BOSH ILMIY-METODIK MARKAZ
SAMDU HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

ZAMONAVIY GEOMYETRIYA MODULI BO'YIChA O'QUV-USLUBIY MAJMUA

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISh BOSH ILMIY-METODIK MARKAZI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“ZAMONAVIY GEOMYETRIYA”

MODULI BO’YIChA

O’QUV-USLUBIY MAJMUA

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi yo‘nalishi: Matematika

Samarqand -2023

Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil “7”-dekabrdagi 648-sonli bayonnomasi bilan ma’qullangan o‘quv dasturi va o‘quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan.

Tuzuvchilar:
Samarqand davlat universiteti Algebra va geometriya kafedrasi mudiri, dotsent H.Ro‘zimurodov

Taqrizchilar:
Samarqand davlat universiteti Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kafedrasi professori f-m.f.d., prof. J.Abdullayev, dasturiy injinering kafedrasi mudiri, t.f.f.d. O. Yusupov

O’quv-uslubiy majmua Samarqand davlat universiteti ilmiy-metodik kengashi (2020 yil “28”-dekabrdagi 4- sonli bayonnomasi).

MUNDARIJA

I.Ishchi dastur

KIRISh

Dastur O’zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentyabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil7 fevraldagi “O’zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son,2019 yil 8 oktyabrdagi “O’zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”giPF-5847-sonli Farmonlari hamda O’zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentyabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamdainnovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdekamaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Mazkur dastur zamonaviy talablar va rivojlangan xorijiy davlatlarning oliy ta’lim sohasida erishgan yutuqlar hamda orttirilgan tajribalar asosida «Matematika» qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishi uchun tayyorlangan namunaviy o‘quv reja hamda dastur mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarining mazmunini takomillashtirish hamda oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasbiy kompetentligini muntazam oshirib borishda xizmat qiladi.

Modulning maqsadi va**vazifalari**

“Zamonaviy geometriya” modulining maqsadi: pedagog kadrlarni innovatsion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o‘zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat.

“Zamonaviy geometriya” modulining vazifalariga quyidagilar kiradi:

- “Matematika” yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

-pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

-mutaxassislik fanlarini o‘qitish jarayoniga zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali tatbiq etilishini ta’minlash;

- mutaxassislik fanlari sohasidagi o‘qitishning innovatsion texnologiyalari va ilg‘or xorijiy tajribalarini o‘zlashtirish;

“Matematika” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta’minlash.

Modul yakunida tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalari hamda

kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar:

Matematika fanlari bo‘yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo‘lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- integral va o‘lchov tushunchalarini;
- geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanishni;
- matematik masalalarni matematik tizimlarda yechishni va standart funksiyalardan foydalanishni;
- matematikani o‘qitishda uning tatbiqlari bilan tushuntirishni, hayotiy va sohaga oid misollarni;
- matematik fanlarni o‘qitishning zamonaviy usullarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- o‘lchovlar nazariyasidan matematika, fizika va biologiya masalalarida keng foydalanish;
- matematik analizning biomatematika, mexanika, ommaviy xizmat nazariyasi, iqtisodiy sohalar va boshqa sohalarda keng qo‘llash;
- matematik fanlarni o‘qitishda innovatsion ta’lim metodlari va vositalarini amaliyotda qo‘llash;
- talabaning o‘zlashtirish darajasini nazorat qilish va baholashning nazariy asoslari hamda innovatsion yondashuv uslublarini to‘g‘ri qo‘llay olish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- o‘lchovlar nazariyasi va uning tatbiqini turli fazolarda qo‘llay olish;
- geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanish;
- matematikani o‘qitish innovatsion jarayonini loyihalashtirish va tashkillashtirishning zamonaviy usullarini qo‘llash ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- matematikani o‘qitishda foydalaniladigan zamonaviy (matlab, mathcad, maple, GeoGebra va boshqalar) matematik paketlarini o‘quv jarayoniga tatbiq etish;
-matematikaning xorij va respublika miqyosidagi dolzarb muammolari, yechimlari, tendensiyalari asosida o‘quv jarayonini tashkil etish;
- matematikani turli sohalarga tatbiq etish;
- oliy ta’lim tizimida matematik fanlar mazmunining uzviyligi va uzluksizliginitahlil qila olish **kompetensiyalariga** ega bo‘lishi lozim.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ilg‘or xorijiy mamlakatlarda biologiya o‘qitishni tashkil qilishning xorijiy tajribalarni o‘rganish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar. So‘nggi yillarda matematika sohasidagi yutuqlar va istiqbollar oliy o‘quv yurtlaridagi ta’lim jarayonining mazmunini boyitishga xizmat qiladi.

“Zamonaviy geometriya” modulining soatlar bo‘yicha taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o‘quv yuklamasi, soat				
		Hammasi	Auditoriya o‘quv yuklamasi			Ko‘chma mashg‘ulot
			Jami	jumladan		
				Nazariy	Amaliy mashg‘ulot	
1.	Chiziqli fazo.	**4**	**4**	**2**	**2**	
2.	Yevklid fazosi.	**4**	**4**	**2**	**2**	
3.	Psevdoyevklid fazo.	**4**	**4**	**2**	**2**	
4.	Giperbolik fazo.	**4**	**4**	**2**	**2**	
5	Ikkinchi tartibli sirtlar. Ikkinchi tartibli sirt invariantlari.	**2**	**2**		**2**	
6.	Ko‘pxilliklar. Ko‘pxillik turlari. Ko‘pxillik geometriyasi.	**2**	**2**		**2**	
Jami:		**20**	**20**	**8**	**12**	**0**

NAZARIY MAShG’ULOT MATYeRIALLARI

1-Mavzu: Chiziqli fazo.

1. Chiziqli fazo o‘lchami. Affin fazo.
2. Affin koordinatalar sistemasi.
3. Affin almashtirishlar va tekisliklari. Bichiziqli forma.

2-Mavzu:Yevklid fazosi.

1. Yevklid fazosida chiziq va sirtlar.
2. Sirt differensial geometriyasi.
3. Sirt ichki geometriyasi. Sirt tashqi geometriyasi.

3-Mavzu: Psevdoyevklid fazo.

1. Sferik fazo.
2. Riman geometriyasi.

4-Mavzu:Giperbolik fazo.

1. Yarim Yevklid fazolar.
2. Yarim giperbolik fazolar.

AMALIY MAShG’ULOTLAR

1-Amaliy mashg‘ulot. Chiziqli fazo.

2-Amaliy mashg‘ulot. Yevklid fazosi.

3-Amaliy mashg‘ulot. Psevdoyevklid fazo.

4-Amaliy mashg‘ulot. Giperbolik fazo.

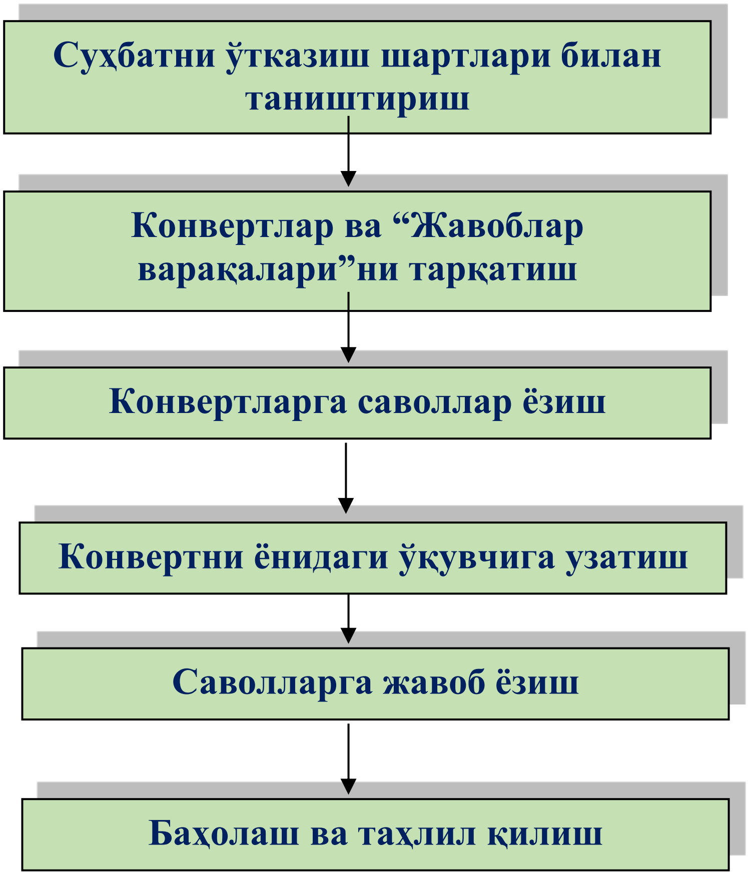
5-Amaliy mashg‘ulot. Ikkinchi tartibli sirtlar. Ikkinchi tartibli sirt invariantlari.

6-Amaliy mashg‘ulot. Ko‘pxilliklar. Ko‘pxillik turlari. Ko‘pxillik geometriyasi.

II.MODULNI O’QITIShDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

Davra stolining tuzilmasi.

Yozma davra suhbatida stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta’lim oluvchiga konvert qog‘ozi beriladi. Har bir ta’lim oluvchi konvert ustiga ma’lum bir mavzu bo‘yicha o‘z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi. Shundan so‘ng konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchi o‘z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi va yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo‘ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig‘ib olinib, tahlil qilinadi. Quyida “Davra suhbati” metodining tuzilmasi keltirilgan



“Davra suhbati” metodining afzalliklari:

- o‘tilgan materialining yaxshi esda qolishiga yordam beradi;
- barcha ta’lim oluvchilar ishtirok etadilar;
- har bir ta’lim oluvchi o‘zining baholanishi mas’uliyatini his etadi;

o‘z fikrini erkin ifoda etish uchun imkoniyat yaratiladi**“Keys-stadi” metodi**

«Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari.

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Assesment” metodi.

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assesment”lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

1-MAVZU:CHIZIQLI FAZO

REJA:

1. Chiziqli fazo o’lchami. Afin fazo.
2. Afin koordinatalar sistemasi.
3. Afin almashtirishlar va tekisliklari. Bichiziqli forma.

Tayanch iboralar:*Chiziqli fazo, o‘lchami, afin fazo, afin koordinatalar sistemasi, afin almashtirishlar va tekisliklari,bichiziqli forma.*

Chiziqli fazo o‘lchami. Afin fazo.

Ko‘p hollarda shunday obektlar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladiki, bunda ularni qo‘shish va biror songa ko‘paytirish amallarini bajarish lozim bo‘lib qoladi. Bir necha misol keltiramiz.

Geometriyada bunday ob’ektlar uch o‘lchamli fazodagi vektorlar, ya’ni yo‘nalishli kesmalardir. Agar yo‘nalishli ikki kesmani parallel ko‘chirish yo‘li bilan ustma-ust tushirish mumkin bo‘lsa, ular ayni bir vektorni aniqlaydi deb hisoblanadi. Shuning uchun bu kesmalarning hammasini bir nuqtadan boshlab chiqarish qulay. Bu nuqtani biz koordinatalar boshi deb ataymiz. Ma’lumki, vektorlarni qo‘shish amali quyidagichadir: x va u vektorlarning yig‘indisi deb, tomonlari x va u bo‘lgan parallelogrammning diogonali hisoblanadi. Vektorni songa ko‘paytirish amali ham ma’lum usul bilankiritiladi.

1. Algebrada biz n ta sondan iborat $x=\xi_1' e_1+\xi_2' e_2+...+\xi_n' e_n$ ko‘rinishdagi sistemalar (masalan: matritsaning yo‘llari, chiziqli forma koeffitsiyentlari, to‘plami va h.k.) bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bunday sistemalarni qo‘shish va songa qo‘paytirish amallari odatda quyidagichakiritiladi: $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ va $y=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$ sistemalar yig‘indisi deb, $x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,...,\xi_n+\eta_n)$ sistemaga aytiladi.$x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ sistema bilan λsonning ko‘paytmasi deb, $\lambda x=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,...,\lambda\xi_n)$ sistemaga aytiladi. Analizda funksiyalarni qo‘shish va ularni songa ko‘paytirish amallari to‘g‘risida t ta’rif beriladi. Aniqlik uchun bundan so‘ng $[a,b]$ segmentdaberilgan hamma uzluksiz funksiyalarto‘plamini tekshiramiz.

Keltirilgan misollarda qo‘shish va songa ko‘paytirishdan iborat xuddi bir xil amallar mutlaqo har xil ob’ektlar ustida bajariladi. Bunday misollarning hammasini bir nuqtai nazar bilan o‘rganish uchun, biz chiziqli, ya’ni affin fazo tushunchasini kiritamiz.

1-ta’rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, x,u,z,... elementlarning V to‘plami chiziqli (afin) fazo deyiladi:

a) xar ikki *x* va *u* elementlarga *x* va *u* elementlar yig‘indisi deb ataladigan *z* element mos qilib qo‘yilgan; *x* va *u* elementlarning yig‘indisi *x+u* bilan belgilanadi;

b) biror maydonning har bir *x* elementi va har bir λson bilan *x* element ko‘paytmasi deb atalgan λx element mos qilib qo‘yilgan.

Bu amallar quyidagi talablarni (aksiomalarni) qanoatlantirishi kerak. 1^0.$x+u=u+x$ (kommutativlik), 2^0.$(x+u)+z=x+(u+z)$(assotsiativlik), 3^0.Xar qanday x uchun shunday 0 element mavjudki, x+0=x bo‘ladi. 0 element nol element deyiladi.

4^0 Xar qandayx uchun –x bilan belgilanadigan shunday element mavjudki, x+(-x)=0 bo‘ladi.

1^0 $1 \cdot x=x$,

2^0 $\alpha(\beta x)=\alpha\beta(x)$.

3^0 $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

4^0 $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha x$.

Biz qo‘shish hamda songa ko‘paytirish amallarini qanday ta’riflanishi haqida gapirmaganimiz bejiz emas. Biz bu amallarni faqat yuqorida ta’riflangan aksiomalarga buysunishlarini talab qilamiz holos. Shuning uchunhar qachon yuqorida qayd qilingan shartlarni qanoatlantiruvchi amallar bilan ish ko‘rar ekanmiz, biz ularni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari deb, elementlari ustida bu amallar bajarilgan to‘plamni esa chiziqli fazo deb xisoblashga haqlimiz. Yuqorida keltirilgan 1-3 misollar bu aksiomalargabo‘ysunadi.

Yana bir misol ko‘rib chiqaylik;

1. Darajasi natural *n* sondan oshmaydigan va odatdagicha qo‘shish va biror songa ko‘paytirish amallari bajariladigan hamma ko‘pxadlar to‘plami chiziqli fazo hosil qiladi.

Yolg‘iz *n*-darajali ko‘pxadlar to‘plami chiziqli fazo tashkil qilmaydi, chunki *n*-darajali ikki ko‘pxad yig‘indisi *n* dan pastroq bo‘lib chiqishi ham mumkin; masalan, $(t^n+t)+(-t^n+t)=2t$.

Chiziqli fazo elementlarini biz *vektorlar* deb ataymiz. Bu so‘zning ko‘pincha tor ma’noda (1-misoldagi kabi) ishlatishi bizni chalg‘itmasligi kerak. Bu chiziq bilan bog‘lik bo‘lgan geometrik tasavvurlar bir qancha natijalarni oydinlashtirishga, ba’zi hollarda esa bu natijalarni oldindan ko‘ra bilishga yordam beradi.

Agar chiziqli fazo ta’rifida qatnashayotgan $\lambda,\mu,...$ sonlar xaqiqiy bo‘lsa, u holda fazo *xaqiqiy chiziqli fazo* deyiladi.

Biz $\lambda,\mu,...$ larni ixtiyoriy *F* maydon elementlari deb umumiyroq faraz etishimiz mumkin. Bu holda *V* fazo *F maydondagi chiziqli fazo* deyiladi. Quyida bayon etiladigan tushuncha va teoremalarning ko‘pchiligi ixtiyoriy maydondagi chiziqli fazalar uchun ham bevosita to‘g‘ri bo‘ladi.

2. Afin koordinatalar sistemasi.

Bundan keyin vektorlarning chiziqli bog‘liqligi va chiziqli erkliligi degan tushunchalar muhim ahamiyatga ega bo‘ladi.

2-ta’rif. V–chiziqli fazo bo‘lsin. Agar kamida bittasi noldan farq qiladigan $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \theta$ sonlar mavjud bo‘lib, $\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\theta v=0$ (1) tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu holda $x,y,z,\ldots,v$ vektorlar chiziqli bog‘liq vektorlar deyiladi.

Chiziqli bog‘liq bo‘lmagan vektorlar chiziqli erkli vektorlar deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, $\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\theta v=0$ tenglik $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\theta=0$ bo‘lgan holdagina o‘rinli bo‘lsa, $x,y,z,\ldots,v$ vektorlar chiziqli erkli vektorlar deyiladi. $x,y,z,\ldots,v$ vektorlar chiziqli bog‘liq, ya’ni ular (1) munosabat bilan bog‘langan bo‘lsin va undagi koeffitsiyentlardan kamida bittasi, masalan, α noldan farqli deb faraz qilaylik. Bu holda $\alpha x=-\beta y-\gamma z-\ldots-\theta v$ bo‘ladi. Buni endi α ga bo‘lib va deb faraz qilib, $-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda,\ -\frac{\gamma}{\alpha}=\mu,\ldots,-\frac{\theta}{\alpha}=\varsigma$ tenglikni hosil qilamiz. $x=\lambda y+\mu z+\ldots+\varsigma v$ Agar x vektor $y,z,\ldots,v$ vektorlar orqali (2) ko‘rinishdagi tenglik bilan ifoda etilsa, u holda biz x vektor $y,z,\ldots,v$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb ataymiz.

Shunday qilib, agar $x,y,z,\ldots,v$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda ulardan kamida bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Teskarisini, ya’ni bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lganvektorlar chiziqli bog‘lik vektorlar bo‘lishining ham to‘g‘riligini ko‘rsatish mumkin.

Endi fazoning o‘lchamlar soni (o‘lchamligi) tushunchasini kiritishga o‘tamiz.

To‘g‘ri chiziqdagi vektorlar to‘plamida har qanday ikkita vektor proporsional, ya’ni chiziqli bog‘liqdir. Tekislikda ikkita chiziqli erkli vektorni topish mumkin, ammo undagi har qanday uchta vektor chiziqli bog‘liqdir.

Agar V – uch o‘lchamli fazodagi vektorlar to‘plami bo‘lsa, u holda V da uchta chiziqli erkli vektorni topish mumkin, ammo bundagi har qanday to‘rtta vektor chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Biz ko‘ramizki, to‘g‘ri chiziq, tekislik va uch o‘lchamli fazodagi chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni geometriyadagi to‘g‘ri chiziq, tekislik hamda fazoning o‘lchami soniga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun quyidagi umumiy ta’rifni qabul qilishimiz tabiiy.

2-MAVZU: EVKLID FAZOSI.

REJA:

1. Evklid fazosida chiziq va sirtlar.
2. Sirt differentsial geometriyasi.
3. Sirt ichki geometriyasi. Sirt tashqi geometriyasi.

Tayanch iboralar*:* Yevklid fazosi,Ortogonal va ortonormal sistemalar.

Ye-haqiqiy sonlar ustida vektor fazo bo‘lib, unda qandaydir qonun yoki qoida bo‘yicha $\forall$ 2 vektorning skalyar ko‘paytirish deb ataluvchi (*x*,*u*) son aniqlangan bo‘lib, bu 4 ta

1. $\forall x, y \in E$ uchun $(x,y)=(y,x)$

2.$\forall x,y,z\in E$ uchun $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

3.$\forall x\in E,\ \forall\lambda\in R,\ (\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

4. $\forall x\neq 0 \quad (x\text{-}x)>0 \quad (x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda bunday vektor fazoni Yevklid fazosi deyiladi.

Masalan: $E = R^3; \quad x=(x_1, x_2, x_3), \quad y=(y_1, y_2, y_3)$

$$(x,y)=(x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3\cdot y_3) \qquad (1)$$

1) $(x,y)=(y,x)$

2) $(x+y,z)=(x_1+y_1)\cdot z_1+(x_2+y_2)\cdot z_2+(x_3+y_3)\cdot z_3=$

$=(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)+(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)=(x,z)+(y,z)$

3) $(\lambda x,y)\overset{(1)}{=}\lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2+\lambda x_3y_3=\lambda(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=\lambda(x,y)$

4) $(x,x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0$

Teorema: Yevlid fazosida quyidagi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi o‘rinli.

$$(x,y)^2\leq(x,x)(y,y) \qquad (2)$$

Isbot. $\forall\lambda\in R, \quad \forall x\cdot y\in E, \quad (\lambda x-y,\lambda x-y)>0$

$(\lambda x\text{-}y,\ \lambda x)+(\ \lambda x\text{-}y,\text{-}y)>0$

$(\lambda x,\ \lambda x)+(\text{-}y,\ \lambda x)+(\ \lambda x_1\text{-}y)+(\text{-}y_1\text{-}y)\geq 0$

$\lambda^2(x,x)\text{-}\ \lambda(y,x)\text{-}\ \lambda(x,y)+(y_1y)>0$

$\lambda^2(x,x)\text{-}2\lambda(x,y)+(y,y)\geq 0$

λ - nisbatan kvadratik uchxad *(x,x)≥0* bo‘lgani uchun

$$b^2 - ac \le 0 \quad a = (x,x) \quad b = -(x,y), \quad c = (y,y)$$

$$(x,y)^2 \le (x,x)(y,y)$$

$$(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \ \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

$$|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \qquad (3)$$

Ta’rif $\sqrt{(x,x)}$ skalyar ko‘paytmadan chiqqan *x* ni $\| x \| = \sqrt{(x,x)}$,

$\| x \| - x$ elementning normasi.

1. $\| x \| \ge 0$

2. $\| \lambda x \| = \| \lambda \| \| x \| \quad \| \lambda x \| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = | \lambda | + \sqrt{(x,x)} = | \lambda \| \| x |$

3. $\| x + y \| < \| x \| + \| y \|$

$$| x + y |^2 = (x + y, x + y) = (x + y, x) + (x + y, y) =$$

$$= (x,x) + (y,x) + (y,x) + (y,y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) =$$

$$\| x \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$$

$$\| x + y \|^2 \le (\| x \| + \| y \|)^2$$

$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ x - element (vektori)

Ta’rif. Norma aniqlangan *Ye* fazoni normallashgan fazo deyiladi.

$(E, \| \cdot \|)$ - normalashgan.

Ta’rif. *(x,y)=0* bo‘lsa, ortogonal deyiladi, ya’ni $x \perp y$

$$|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \Rightarrow \frac{|(x,y)|}{\| x \| \cdot \| y \|} \le 1.$$

Ta’rif. $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\| x \| \cdot \| y \|}$.

Teorema: Agar *(x,y)=0* bo‘lsa, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ bo‘ladi va aksincha $\dfrac{\pi}{2}$ bo‘lsa *(x,y)=0*.

Ta’rif. Ushbu $e_1, e_2, \ldots, e_n$ vektorlar sistemasi berilgan . Agar $(e_i, e_j) = 0$ $i \ne j$ bo‘lsa berilgan sistemani artogonal vektorlar sistemasi deyiladi.

Ta’rif. $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sistemasi ortogonal sistemani tashkil etadi,agar uzunliklari 1 ga teng bo‘lsa, ortogonal bo‘lsa

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Teorema: $e_1, \dots, e_n$ o‘rta normal sistema chiziqli bog‘lanmagan $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$$(ek_1 \lambda e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = (e_k, 0) = 0$$

$$\lambda_1 (e_k, e_1) + \lambda_2 (e_k, e_2) + \dots + \lambda_n (e_k, e_n) = 0$$

$$\lambda_k^{'} (e_k e_k) = 0 \qquad \lambda_k = 0 \qquad k = \overline{1,0}$$

Teorema: Ye^n fazoda $e_1, \dots, e_n$ o‘rta normal bazisni tashkil etsa $\Rightarrow (x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ bo‘ladi haqiqatdan ham

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \qquad\qquad y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j (e_{i, e_j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Agar Ye da o‘rta normal bazis bo‘lsa, $e_1, \dots, e_n$ $(x, e_k) = x_k$.

Teorema. Agar Ye^n da $f_1, \dots, f_n \forall$ bazis bo‘lsa

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (f_i, f_j) = < (f_i, f_j) = a_{ij} >= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

bo‘ladi.

Aytaylik Ye Yevklid fazo bo‘lib, $f_1, \dots, f_n$ (1) undagi $\forall$ bazis bo‘lsin. bizning maqsadimiz Ye da aniqlangan (1) ni ortogonal bazis so‘ngra esa ortonormal bazisga aylantirish mumkinligini ko‘rib chiqamiz. Ushbu jarayonni algebra va sonlar nazariyasida ortogonallash jarayoni deyiladi.

U kuyidagicha

$$n = 1, \quad f_1 \quad f_1 \neq 0 \quad e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1, f_2)}}$$

$$n = 2 \quad f_1 \; f_2; \quad e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1, f_2)}}; \quad q_2 = f_2 \neq \lambda f_1 \quad (q_R, e_1 = 0)$$

$$e_2 = \frac{q_2}{\sqrt{(q_1 q_2)}} \qquad (f_2 + \lambda f_1, e_1) = 0 \qquad \lambda = \frac{(f_2 f_1)}{(f_1 e_1)} f$$

$$(f_2e_1)+(f_1e_1)=0$$

Farazqilaylik. $b_1,\dots,b_n$(1) $b_1,\dots,b_m,\ c_{m+1},\dots,c_n$ (2)

$$(b_{m+1},b_i)=0(4) \qquad (i=\overline{1,m})$$

$$(c_{m+1}+\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_m b_m;b_i)=0 \qquad (i=\overline{1,m})$$

$$(c_{m+1},b_i)+\lambda_i(b_i,b_i)+\dots+\lambda_i(b_i,b_i)+\dots+\lambda_m(b_m,b_i)=0$$

$$(c_{m+1},b_i)+\lambda_i(b_i,b_i)=0 \quad b_i\neq 0 \quad (b_i,b_i)\neq 0$$

$$\lambda_i=-\frac{(c_{m+1}b_i)}{(b_i,b_i)} \qquad (5)$$

(5) bajarilsa, $\Rightarrow$ (4) tenglik o‘rinli bo‘ladi va natijada $b_1,b_2,\dots,b_m,b_{m+1}$

$m+1=n$ bo‘lsa ortogonallash jarayoni tugaydi.

Agarda $m+1<n$ bo‘lsa, muloxazani takrorlaymiz.

$$b_{m+2}=c_{m-2}+\lambda_1'b_1+\dots+\lambda_{m+1}'b_{m+1} \qquad (6)$$

kabi ajratib, $(b_{m+2},b_j)=0$ (8) $j=\overline{1,m}$.

$$\lambda'=-\frac{(c_{m+2},b_j)}{(b_j,b_j)} \qquad (7)$$

Shunday qilib, $b_1,\dots,b_m,\dots,b_{m+1},\ b_{m+2}$ (7) ortogonal teoremani quramiz. $m+2=n$.

Shunday qilib *Ye* faraz ortogonal jarayon ketma-ket qo‘llab $b_1,\dots,b_n$ (8) ortogonal bazisga ega bo‘lamiz.

$$e_1=\frac{b_1}{|b_1|}\dots e_n=\frac{b_n}{|b_n|} \qquad (9)$$

$$(e_i,e_j)=\left(\frac{b_i}{|b_i|},\frac{b_i}{|b_j|}\right)=\frac{(b_i,b_j)}{|b_j|\cdot|b_i|}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \quad (b_i,b_j)=(b_j)^2$$

1-teorema. E_n o‘lchovli fazo bo‘lib, (8) ortogonal chiziqli bog‘lanmagan vektorlar sistemasi chiziqli erkli

$$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$$

$$\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n=0 \qquad \lambda_i=0 \quad i=\overline{1,n}$$

$$e_k(1\le k<n) \quad (e_k;\ \lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n)=(e_k,\theta)=0$$

$$\lambda_1(e_1,e_k)+\lambda_2(e_2,e_k)+\dots+\lambda_k(e_k,e_k)+\dots+\lambda_n(e_k,e_n)=0$$

$$\lambda_e(e_k,e_k)=0 \quad (e_k,e_k)=1 \qquad \lambda_k=0 \quad k=\overline{1,n}$$

2-teorema: *Ye* o‘lchovli Yevklid fazosi $(e_1,...,e_n)$ ortogonal bazis bo‘lsin. $\Rightarrow x_k = (x_1 e_k)$

$(x,e_k) = (x_1 e_1 + ... + x_n e_n, e_k) = x_1(e,e_k) + ... + x_k(e_k,e_2) + ... +$

$+x_n(e_n,e_2) = x_k(e_k,e_k) = x_k \cdot 1 = x_k$

Ta’rif. *Ye* fazo $R_1 \subset E, \quad R_2 \subset E$ bo‘lsin $R_2 = \{y : \forall x \in R; \ (y,x) = 0\}$

Teorema: *R₂,E* aniqlangan skalyar ko‘paytmaga nisbatan qism fazo bo‘ladi.

$$\forall y_1 y_2 \in R_2 \quad y_1 - y_2 \in R_2$$
$$\forall x \in R_1 \quad (y,x) = 0 \quad (y_2,x) = 0$$
$$(y_1 - y_2; x) = (y_1,x) - (y_2;x) = 0 - 0 = 0$$
$$y_1 - y_2 \in R_2$$

2) $\forall \lambda \in R, \ \ \forall y \in R_2 \quad (xy,x) = \lambda \quad (y,x) = \lambda, \ 0 = 0 \quad \lambda y \in R_2$

Ta’rif. *R₂-E* ning qism fazosini *R₁* qism fazoga ortogonal qism fazo deyiladi.

$$E = R_1(+)\ R_2 \quad \dim\ E = n \qquad \dim R_1 = k \quad \dim\ R_2 = n - k$$

$e_1 ... e_n \quad (1) \quad \Rightarrow$ bundagi bazisni $(q_1 ..., q_{n-k})$ (2) bilan belgilaylik.

Ortogonallash jarayoniga ko‘ra (2) bilan (1) ni ortogonal bazisga keltirish mumkin.

$$x = \underline{x_1 e_1 + ... + x_n e_k} + ... + x_n e_n -$$
$$x'(\in)x''$$

$$x' = x_1 e_1 + ... + x_k e_k = R_1$$
$$x'' = (kx+1) \cdot x_{k+1} e_n + ... + x_k e_n = R_2$$

Masalan:

1 $\quad x \ \ x^2$ (1)

$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0 = 0 + 0x + 0x^2$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \quad q_1 = 1 \qquad q_2 = q_1 + \lambda_1 x \qquad (q_2 q_1) = 0$

$q_2 = 1 + (-2)x = 1 - 2x \qquad q_3 = x^2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$

$$(1 + \lambda_1 x_1 1) = \int_0^1 (1 + \lambda x)dx \neq 0$$

$$\left(x + \lambda, \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 0 \quad 1 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_1 = -2$$

$q_2 = 1 + (-2)x = 1 - 2x$

$q_3 = x^2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \qquad (q_3,q_1) = (x^2 + \lambda_1 + \lambda_2(1-2x)\cdot 1) = 0$

$(x^2 + \lambda_1 + \lambda_2(1-2x)\cdot 1 - 2x) = 0$

$(x^2,1) + (\lambda_1,1) + \lambda_2(1-2x,1) = 0$

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx + \lambda_2 \int_0^1 (1-2x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \lambda_1 x\Big|_0^1 - \frac{\lambda_2}{2}\frac{(1-2x)}{2}\Big|_0^1$$

Bundan $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ topamiz:

$$(x^2, 1-2x) + \left(-\frac{1}{3};\ 1-2x\right) + \lambda_2 (1-2x, 2x) = 0$$

$$\int x^2(1-2x)dx - \frac{1}{3}\int (1-2x)dx + \lambda_2 \int_0^1 (1-2x)dx = 0$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{\lambda_0}{2}\frac{(1-2x)}{3}\Big|_0^1 = 0$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{\lambda_2}{3} = 0 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad q_3 = x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1-2x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$1; 1-2x;\ x^2 - x + \frac{1}{6}$ ortogonal vektorlar sistemasi

$$e_1 = 1 \quad e_2 = \frac{1-2x}{\sqrt{(1-2x)(1-2x)}}, \quad e_3 = \frac{x^2 - x + \frac{1}{6}}{\sqrt{\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)}}$$

$$(1-2x, 1-2x) = \int_0^1 (1-2x)^2 dx = -\frac{1}{2} \quad \frac{(1-2x)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$e_2 = \frac{1-2x}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3}(1-2x)$$

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx =$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{3} + \frac{1}{36}x - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{180}$$

$e_3 = \sqrt{180}\ \ \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$ $e_1, e_2, e_3 -$ ortogonal bazis.

3-MAVZU: PSEVDOEVKLID FAZO.

REJA:

1. Сферик фазо.
2. Риман геометрияси.

Tayanch iboralar: *Psevdoyevklid fazo, Psevdoyevklid fazoda masofa*

Ma’lumki, Yevklid fazosida koordinatalar boshidan ixtiyoriy M nuqtagacha bo‘lgan masofa

$$OM^2=x^2+u^2+z^2 \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanar edi. Endi shu formulani o‘zgartirib, masofani $OM^2=x^2+u^2-z^2$ bo‘yicha topishni ko‘rib chiqaylik.

OM masofa $x^2+u^2>z^2$ bo‘lganda haqiqiy musbat son, $x^2+u^2<z^2$ bo‘lganda esa mavxum sonni aniqlaydi. $x^2+u^2=z^2$ bo‘lganda esa masofa 0ga teng bo‘ladi (M nuqta 0 bilan ustma-ust tushmasa xam).

Bu formulani koordinatalar ko‘rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$M_1M^2_2=(x_2-x_1)^2+(u_2-u_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

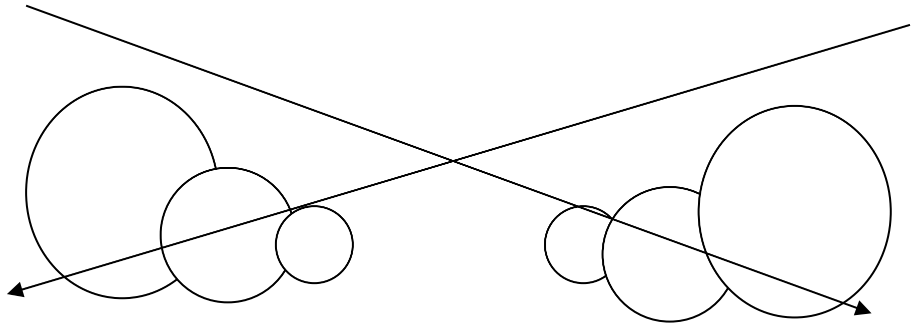
OM_1 va OM_2 kesmalar orasidagi burchakni esa

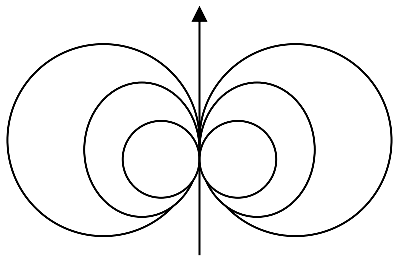
$$\text{sos}\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2-z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2-z_2^2}}$$

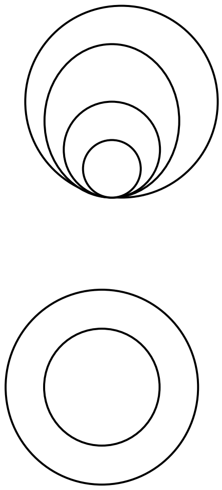
Uzunlik va burchaklar shu formulalar asosida aniqlangan fazolar ***psevdoyevklid fazolar*** deb ataladi. Bu fazoda Yevklid fazosining ko‘pgina aksioma va xossalari saqlanishi bilan bir qatorda ayrim munosabatlar keskin farq qiladi.

Psevdoyevklid fazoda masofani yuqoridagicha aniqlanishidan ko‘rinadiki, unda uch xil to‘g‘ri chiziqlar bo‘lishi mumkin: barcha kesmalari musbat haqiqiy uzunlikka ega to‘g‘ri chiziqlar; mavxum uzunlikdagi kesmalarga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar va barcha kesmalari 0 uzunlikka ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar. Bu to‘g‘ri chiziqlarni fazoviy o‘xshash, vaqtli o‘xshash va izotrop to‘g‘ri chiziqlar deb yuritiladi.

Psevdoyevklid fazodagi bu tipdagi to‘g‘ri chiziqlarni chizmadagi ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:



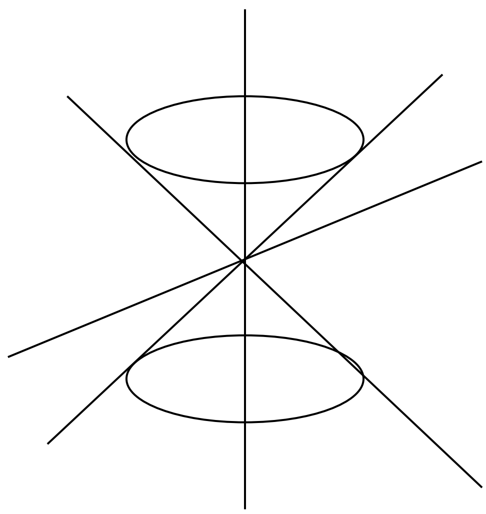




Yuqoridagi formuladan OM=0 shartni qanoatlantiradigan barcha M nuqtalar $x^2+u^2-z^2=0$ tenglama bilan aniqlanadigan tekislikda yotadi.

Bu esa uchi 0 nuqtada joylashgan konus sirtni ifodalaydi.

Ko‘rinib turibdiki, haqiqiy uzunlikdagi to‘g‘ri chiziqlar konusdan tashqarida, mavxumlari ichida va 0 ga tenglari esa konus sirtda yotadi.



4-MAVZU: GIPERBOLIK FAZO

REJA:

1. Yarim Evklid fazolar.
2. Yarim giperbolik fazolar.

Tayanch iboralar: elliptik fazo, giperbolik fazo

n o‘lchovli elliptik fazo deb, R_{n+1} fazoning sferasidagi diametrial qarama-qarshi bo‘lgan nuqtalar to‘plamiga aytiladi (izometrik juft).

Bu fazoni S_n bilan belgilanadi.

S_n fazoni noyevklid Riman fazo deb ham ataladi.

R_{n+1} fazo sferalariga urinmalar R_n fazoni tashkil etganligidan, cheksiz kichik orliqlarda S_p geometriyasi R_p fazo geometriyasiga yaqin bo‘ladi.

S_p fazoning m o‘lchovli tekisligi S_m fazoni tashkil etadi.

Elliptik fazoda masofa masalasi qanday o‘rnatilgan?

Agar S_p fazoning X nuqtasini ifodalovchi vektorlardan biri $\bar{x}$, ikkinchisi ham $\bar{x}$ bo‘lsa, u ‘olda bu vektorlar $\bar{x}^2 = \bar{p}$ munosabat bilan bolangan bo‘ladi.

$\bar{x}$ bilan aniqlangan S_p fazoning X nuqtasini X($\bar{x}$) bilan bog‘lanadi.

Bunda, S–S_{Norton}fazodagi X($\bar{x}$) va U() nuqtalar orasidagi masofa, r esa egrilik radiusidir.

S_p fazo koordinatalari sifatida R_{n+1} fazoning $\bar{x}$ vektorining x^2 koordinatalarini qarash mumkin.

Endi giperbolik fazoning vektor aksiomasi asosida qurilishini ko‘rib chiqaylik

Giperbolik fazoni ta’riflash uchun Ye_pafin fazoning I+IV gruppa aksiomalaridan tashqari quyidagi V gruppa aksiomalari bajarilishi kerak:

V.1^0. Har ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb ataluvchi K=$\bar{a}$ Ye $\bar{b}$ son mos quyilgan bo‘lsin.

V.2^0. Skalyar ko‘paytma kommutativ, yaoni $\bar{a}$ Ye $\bar{b}$ = $\bar{b}$ Ye $\bar{a}$

V.3^0. Skalyar ko‘paytma vektorlarni qo‘shishga nisbatan distributiv ya’ni $\bar{a}$ Ye($\bar{b}+\bar{c}$)= $\bar{a}$ Ye $\bar{b}$ + $\bar{a}$ Ye $\bar{c}$

V.4^0. Haqiqiy ko‘paytuvchini skalyar ko‘paytma tashqarisiga chiqarish mumkin:(k$\bar{a}$)E$\bar{b}$ =k$\bar{a}$ E$\bar{b}$

V.5^0. Shunday $\bar{a}_i$ ko‘rinishdagi i ta vektorlar mavjudki, ular uchun

$$\bar{a}_a E \bar{a}_a > 0 \qquad (a \le l)$$

$$\bar{a}_n E \bar{a}_n < 0 \qquad (u > l), \ \bar{a}_i E \bar{b}_j, \ i \ne j$$

Bunday shartlar asosida qurilgan l indeksli psevdoyevklid fazoni R_n ko‘rinishda belgilaymiz.

1. Bizga ma’lumki F(x,y)=0 tenglama tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi, ya’ni OXU tekislikdagi koordinatalari x va u bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami bu tenglamani qanoatlantiradi. Shuningdek, fazoda xam F(x,y,z)=0 (1)

Tenglama OXUZ da biror sirtni, yaoni koordinatalari x,y,z bo‘lgan va (1) tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to‘plamini aniqlaydi. (1) tenglama sirtning tenglamasi, x,y,z lar esa uning o‘zgaruvchi koordinatalari deyiladi.

Ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$a_1+x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_2xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \quad .$$

bu tenglamadagi $a_1, a_{22}, a_{33}, a_2, a_{13}, a_{23}$ koeffitsiyentlarning kamida bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak. Ayrim hollarda sirt tenglamasi bilan emas, balki u yoki bu xossaga ega bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni bilan berilishi mumkin. bu holda sirtning geometrik xossalaridan foydalanib uning tenglamasi tuziladi.

13^0. Sferaning OXUZ to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini tuzamiz.

Markazi 0'(a,b,c) nuqtada va radiusi R bo‘lgan sfera berilgan bo‘lsin. Agar μ(x,y,z) nuqta sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, u holda 0'(a,b,c) va μ(x,y,z) nuqtalar orasidagi masofani toipsh formulasidan foydalansak, sfera tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (1)$$

(*13*)–markazi 0'(a,b,c) bo‘lgan nuqtada yotuvchi va radiusi R ga teng bo‘lgan sfera tenglamasi deyiladi. Agar (*13*) da a=b=c=0 bo‘lsa, markazi koordinatalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng bo‘lgan sfera tenglamasiga ega bo‘lamiz:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (2)$$

(*13*) ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0 \qquad (3)$$

Sferatenglamasiikkinchitartiblisirtbo‘lishiniko‘rsataylik. Buning uchun sirtning (2) tenglamasida $a_2=a_{13}=a_{23}=0$ va $a_1=a_{22}=a_{33}$ deb olinsa, (2) tenglama sferaning tenglamasi ekanini tekshiramiz. Buning uchun $a_1\neq 0$ deb (4) ning hamma hadlarini a_1 ga bo‘lamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=\frac{2a_{14}}{a_{11}}, B=\frac{2a_{24}}{a_{11}}, C=\frac{2a_{34}}{a_{11}}, D=\frac{a_{44}}{aa_{11}}$$

Natijada

$$x^2+y^2+z_2+Ax+By+Cz+D=0$$

ko‘rinishdagi tenglamaga ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglamani ushbu ko‘rinishda yozib olamiz

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(A^2+B^2+C^2-4D\right)$$

Yoki $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2$ (5)

(5) tenglamadan ko‘rinadiki, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ bo‘lganda (4) tenglama maonoga ega bo‘ladi. Demak, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ bo‘lsa, (5) tenglama markazi

$$\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$$

nuqtada va radiusi

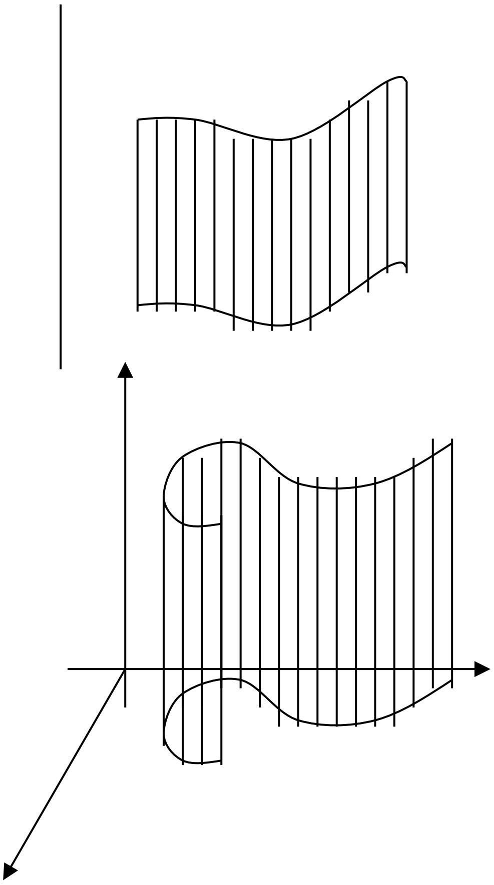
$$R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$$

bo‘lgan sferani ifodalaydi. Agar $A^2+B^2+C^2-4D=0$ bo‘lsa, (5) tenglama

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$$

ko‘rinishda bo‘lib, u faqat bitta $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$ nuqtani ifodalaydi.

2^0. Biror P tekislikda yotuvchi L chiziqning har bir nuqtasidan o‘tuvchi va berilgan *l* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan barcha to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan sirt ***silindrik sirt*** deyiladi. bunda L chiziq silindrik sirtning yo‘naltiruvchisi, *l* to‘g‘ri chiziqqa parallel va L chiziqni kesuvchi chiziqlar uning yasovchisi deyiladi (1–chizma).



Yo‘naltiruvchilari koordinata tekisliklaridan birida yotuvchi yasovchilari esa shu tekislikka perpendikulyar bo‘lib, koordinatalar o‘qiga parallel bo‘lgan silindrik sirtlarni ko‘raylik. OX tekislikda tenglamasi F(x,y)=0 (6)
bo‘lgan L chiziq va yasovchilari OZ o‘qqa parallel bo‘lgan silindrik sirtni yasaymiz (2–chizma). (6) tenglama OXYZ koordinatalar sistemasida silindrik sirt ekanini ko‘rsataylik.

M(x,y,z) –silindrik sirtning ixtiyoriy tayinlangan nuqtasi bo‘lsin. M nuqta orqali o‘tuvchi yasovchining L yo‘naltiruvchisi bilan kesishgan nuqtasini N bilan belgilaymiz. N nuqta M nuqtaning OXU tekisligidagi proyeksiyasidir. Shuning uchun M va N nuqtalar bitta x absissa va bitta u ordinataga ega. N nuqta L chiziqda yotgani uchun u egri chiziqning (6) tenglamasini qanoatlantiradi.

Demak, bu tenglamani M(x,y,z) nuqtaning koordinatalari ham qanoatlantiradi. OXYZ fazoda L yo‘naltiruvchi quyidagi ikkita tenglama sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ Z=0 \end{cases}$$

Xuddi shunga o‘xshash

$$\begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases} \text{va} \quad \begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

tenglamalar silindrik sirtlarning L yo‘naltiruvchi chiziqlarini mos ravishda OXZ va OUZ tekislikdagi holatini aniqlashni ko‘rsatish mumkin.

Xususiy hollarda silindrik sirtlarning yo‘naltiruvchilari ellips, giperbola, parabola, ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq, ikkita o‘zaro parallel (ustma-ust tushmagan) to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘lishi mumkin. Bunday sirtlarni mos ravishda elliptik silindr, parabolik silindr, giperbolik silindr, ikkita kesishuvchi tekislik, ikkita parallel tekislik deb yuritiladi va ularning tenglamalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

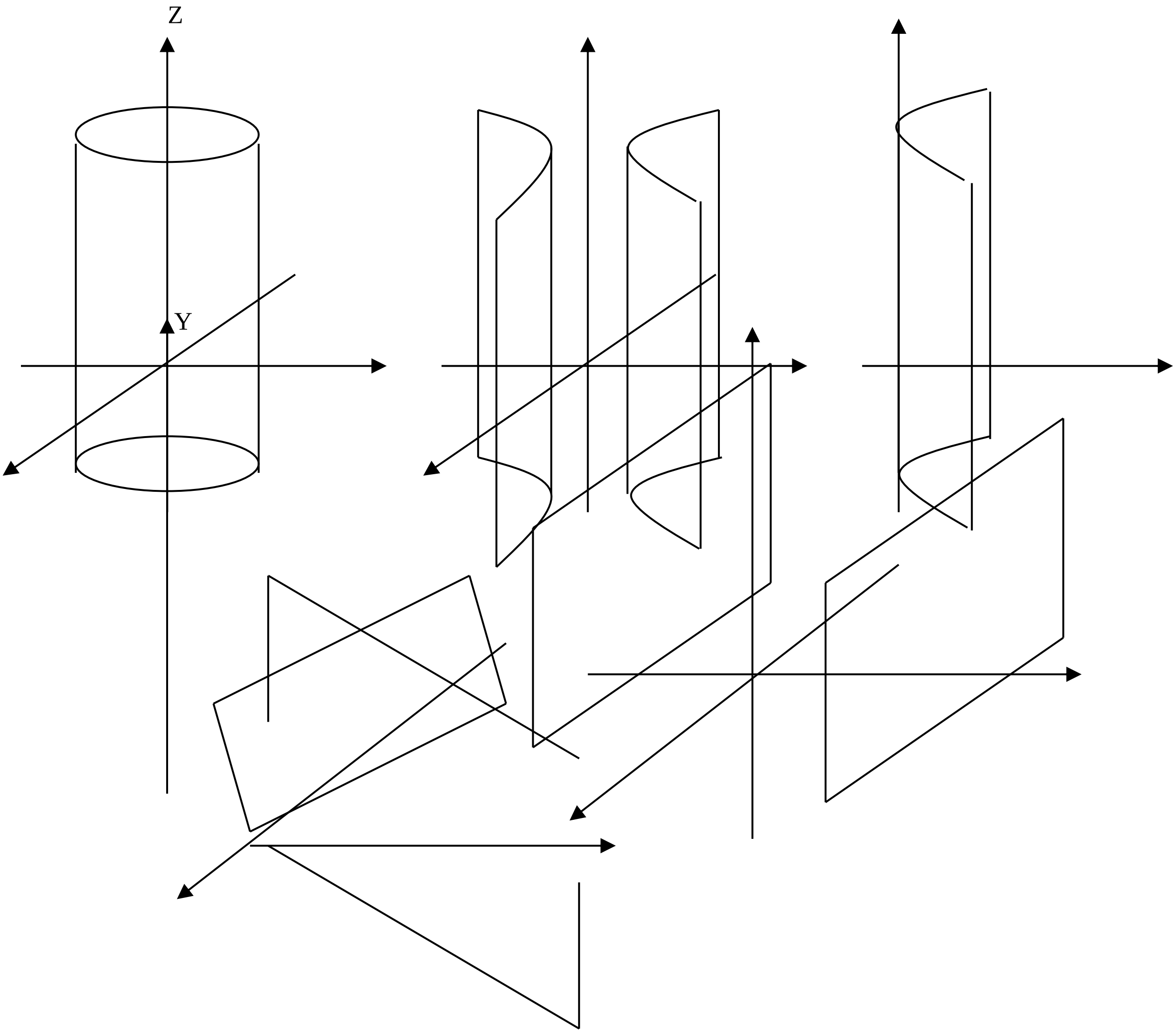
Elliptik silindr: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (3-chizma)

Giperbolik silindr: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (4-chizma)

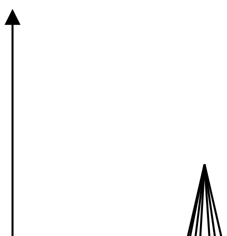
Parabolik silindr: $y^2=-2rx$ (5-chizma)

Ikki kesishuvchi tekislik: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (6-chizma)

Ikki parallel tekislik: $x^2-a^2=0$ $(a\neq 0)$ (7-chizma)



3



1^0. Biror Q tekislikda L ikkinchi tartibli chiziq va bo‘ tekislikka tegishli bo‘lmagan M_0 nuqta berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Fazodagi M_0 nuqtadan o‘tib, L ni kesib o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami ikkinchi tartibli konus sirt (yoki konus) deyiladi. M_0 nuqta konus uchi, L chiziq konus yo‘naltiruvchisi, konusni hosil qiluvchi chiziqlar esa uning yasovchilari deyiladi.

Konus yasovchilari bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar markazi konus ichida bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar bog‘lamiga tegishli bo‘ladi. konus tenglamasini keltirib chiqaraylik. Q tekislik va undagi L chiziq OXU tekislikda yotgan bo‘lsin. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta esa OXU tekislikdagi yotmagan ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. konusning ixtiyoriy M(x,y,z) nuqtasini olaylik, u holda M_0M to‘g‘ri chiziq konusning yasovchisi bo‘lib, L chiziq bilan $M(x_1,y_1,z_1)$ nuqtada kesishadi. M_0,M_1,M nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun $\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda\overrightarrow{M_0M}$ tenglik o‘rinli.

Bu tenglikdan

$$x_1-x_0=\lambda(x-x_0) \Rightarrow x_1=x_0+\lambda(x_0-x_0)$$

$$u_1-u_0=\lambda(u-u_0) \Rightarrow u_1=u_0+\lambda(u_0-u_0)$$

$$z_1-z_0=\lambda(z-z_0) \Rightarrow z_1=z_0+\lambda(z_0-z_0)$$

Oxirgi tenglikdan λ ni topib, oldingi ikki tenglikka qo‘yamiz:

$$x_1=x_0+\frac{x-x_0}{z_0-z}z_0,\ u_1=u_0+\frac{z-z_0}{z_0-z}z_0 \qquad (7)$$

$$M_1\in L \quad \Rightarrow \quad F(x_1,y_1)=0$$

yoki

$$F(\frac{x-x_0}{z_0-z}z_0,\ u_0+\frac{z-z_0}{z_0-z}z_0)=0 \qquad (8)$$

(8) ifoda konus tenglamasi deyiladi. Ikkinchi tenglama konusning Dekart koordinatalar sistemasidagi eng sodda tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (9)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

2^0. Q tekislikda biror L chiziq va *l* to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin.

III.Amaliy mashg‘ulot materiallari

1-AMALIY MASHG’ULOT MAVZUSI:CHIZIQLI FAZO

1-ta’rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, x,u,z,... elementlarning *V* to‘plami chiziqli (afin) fazo deyiladi:

a) xar ikki x va u elementlarga x va u elementlar yig‘indisi deb ataladigan z element mos qilib qo‘yilgan; x va u elementlarning yig‘indisi $x+u$ bilan belgilanadi;

b) biror maydonning har bir x elementi va har bir λson bilan x element ko‘paytmasi deb atalgan λx element mos qilib qo‘yilgan.

Bu amallar quyidagi talablarni (aksiomalarni) qanoatlantirishi kerak.

1^0.$x+u=u+x$ (kommutativlik),

2^0.$(x+u)+z=x+(u+z)$(assotsiativlik),

3^0.Xar qanday x uchun shunday 0 element mavjudki, x+0=x bo‘ladi. 0 element nol element deyiladi.

4^0.Xar qandayx uchun –x bilan belgilanadigan shunday element mavjudki, x+(-x)=0 bo‘ladi.

1^0 .$1 x=x$,

2^0 $\alpha(\beta x) =\alpha\beta(x)$.

3^0 $(\alpha+\beta)x =\alpha x +\beta x$,

4^0 $\alpha(x +y) =\alpha x +\alpha x$.

Biz qo‘shish hamda songa ko‘paytirish amallarini qanday ta’riflanishi haqida gapirmaganimiz bejiz emas. Biz bu amallarni faqat yuqorida ta’riflangan aksiomalarga buysunishlarini talab qilamiz holos. Shuning uchunhar qachon yuqorida qayd qilingan shartlarni qanoatlantiruvchi amallar bilan ish ko‘rar ekanmiz, biz ularni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari deb, elementlari ustida bu amallar bajarilgan to‘plamni esa chiziqli fazo deb xisoblashga haqlimiz. Yuqorida keltirilgan 1-3 misollar bu aksiomalargabo‘ysunadi.

Yana bir misol ko‘rib chiqaylik;

1.Darajasi natural n sondan oshmaydigan va odatdagicha qo‘shish va biror songa ko‘paytirish amallari bajariladigan hamma ko‘pxadlar to‘plami chiziqli fazo hosil qiladi.

Yolg‘iz n-darajali ko‘pxadlar to‘plami chiziqli fazo tashkil qilmaydi, chunki n-darajali ikki ko‘pxad yig‘indisi n dan pastroq bo‘lib chiqishi ham mumkin;masalan,

$$(t^n+t) + (-t^n+t) = 2t\ .$$

Chiziqli fazo elementlarini biz *vektorlar* deb ataymiz. Bu so‘zning ko‘pincha tor ma’noda (1-misoldagi kabi) ishlatishi bizni chalg‘itmasligi kerak. Bu chiziq bilan bog‘lik bo‘lgan geometrik tasavvurlar bir qancha natijalarni oydinlashtirishga, ba’zi hollarda esa bu natijalarni oldindan ko‘ra bilishga yordam beradi.

Agar chiziqli fazo ta’rifida qatnashayotgan $\lambda,\mu,\ldots$sonlar xaqiqiy bo‘lsa, u holda fazo *xaqiqiy chiziqli fazo* deyiladi. Biz$\lambda,\mu,\ldots$ larni ixtiyoriy F maydon elementlari deb umumiyroq faraz etishimiz mumkin. Bu holda V fazo *F maydondagi chiziqli fazo* deyiladi. Quyida bayon etiladigan tushuncha va teoremalarning ko‘pchiligi ixtiyoriy maydondagi chiziqli fazalar uchun ham bevosita to‘g‘ri bo‘ladi.

2. Afin koordinatalar sistemasi.

Bundan keyin vektorlarning chiziqli bog‘liqligi va chiziqli erkliligi degan tushunchalar muhim ahamiyatga ega bo‘ladi.

2-ta’rif. V–chiziqli fazo bo‘lsin. Agar kamida bittasi noldan farq qiladigan α, $\beta,\gamma,\ldots,\theta$ sonlar mavjud bo‘lib, $\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\theta v=0$ (1) tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu holda $x,y,z,\ldots,v$ vektorlar chiziqli bog‘liq vektorlar deyiladi.

Chiziqli bog‘liq bo‘lmagan vektorlar chiziqli erkli vektorlar deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, $\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\theta v=0$ tenglik $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\theta=0$ bo‘lgan holdagina o‘rinli bo‘lsa, $x,y,z,\ldots,v$ vektorlar chiziqli erkli vektorlar deyiladi.

$x,y,z,\ldots,v$ vektorlar chiziqli bog‘liq, ya’ni ular (1) munosabat bilan bog‘langan bo‘lsin va undagi koeffitsiyentlardan kamida bittasi, masalan, α noldan farqli deb faraz qilaylik. Bu holda

$$\alpha x=-\beta y-\gamma z-\ldots-\theta v$$

bo‘ladi. Buni endi α ga bo‘lib va deb faraz qilib, $-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda, -\frac{\gamma}{\alpha}=\mu,\ldots,-\frac{\theta}{\alpha}=\varsigma$

tenglikni hosil qilamiz. $x=\lambda y+\mu z+\ldots+\varsigma v$

Agar x vektor $y,z,\ldots,v$ vektorlar orqali (2) ko‘rinishdagi tenglik bilan ifoda etilsa, u holda biz x vektor $y,z,\ldots,v$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb ataymiz.

Shunday qilib, agar $x,y,z,\ldots,v$ vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda ulardan kamida bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘ladi. Teskarisini, ya’ni bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lganvektorlar chiziqli bog‘lik vektorlar bo‘lishining ham to‘g‘riligini ko‘rsatish mumkin.

Endi fazoning o‘lchamlar soni (o‘lchamligi) tushunchasini kiritishga o‘tamiz.

To‘g‘ri chiziqdagi vektorlar to‘plamida har qanday ikkita vektor proporsional, ya’ni chiziqli bog‘liqdir. Tekislikda ikkita chiziqli erkli vektorni topish mumkin, ammo undagi har qanday uchta vektor chiziqlibog‘liqdir.

Agar *V* – uch o‘lchamli fazodagi vektorlar to‘plami bo‘lsa, u holda *V* da uchta chiziqli erkli vektorni topish mumkin, ammo bundagi har qanday to‘rtta vektor chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Biz ko‘ramizki, to‘g‘ri chiziq, tekislik va uch o‘lchamli fazodagi chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni geometriyadagi to‘g‘ri chiziq, tekislik hamda fazoning o‘lchami soniga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun quyidagi umumiy ta’rifni qabul qilishimiz tabiiy.

3-ta’rif. Agar V chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli vektor mavjud bo‘lib, bundan ortiq chiziqli erkli vektorlar bo‘lmasa, V fazo n o‘lchamli fazo deyiladi va dimV deb belgilanadi.

Agar *V* fazoda cheksiz ko‘p chiziqli erkli vektorlar topish mumkin bo‘lsa, u holda *V* fazo *cheksiz o‘lchamli* fazo deyiladi.

Cheksiz o‘lchamli fazolar matematikaning maxsus bo‘limlarida tekshiriladi. Biz bu kursda faqat chekli o‘lchamli fazolar bilan shug‘ullanamiz.

2-AMALIY MASHG’ULOT MAVZUSI: EVKLID FAZO.

Ye-haqiqiy sonlar ustida vektor fazo bo‘lib, unda qandaydir qonun yoki qoida bo‘yicha $\forall$ 2 vektorning skalyar ko‘paytirish deb ataluvchi (x,u) son aniqlangan bo‘lib, bu 4 ta

1. $\forall x, y \in E$ uchun $(x,y)=(y,x)$

2. $\forall x,y,z\in E$ uchun $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

3. $\forall x\in E$, $\forall \lambda\in R$, $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

4. $\forall x \neq 0$ $(x\text{-}x)>0$ $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda bunday vektor fazoni Yevklid fazosi deyiladi.

Masalan: $E = R^3;\quad x = (x_1, x_2, x_3),\quad y = (y_1, y_2, y_3)$

$$(x, y) = (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3) \qquad (1)$$

3) $(x,y)=(y,x)$

4) $(x + y, z) = (x_1 + y_1) \cdot z_1 + (x_2 + y_2) \cdot z_2 + (x_3 + y_3) \cdot z_3 =$

$= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) + (y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3) = (x, z) + (y, z)$

(1)

3) $(\lambda x, y) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 + \lambda x_3 y_3 = \lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) = \lambda(x, y)$

4) $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$

Teorema: Yevlid fazosida quyidagi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi o‘rinli.

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \qquad (2)$$

Isbot. $\forall \lambda \in R,\quad \forall x \cdot y \in E,\quad (\lambda x - y, \lambda x - y) > 0$

$(\lambda x\text{-}y, \lambda x)+(\lambda x\text{-}y,\text{-}y)>0$

$(\lambda x, \lambda x)+(\text{-}y, \lambda x)+(\lambda x_1\text{-}y)+(\text{-}y_1\text{-}y)\geq 0$

$\lambda^2(x,x)\text{-} \lambda(y,x)\text{-} \lambda(x,y)+(y_1 y)>0$

$\lambda^2(x,x)\text{-}2\lambda(x,y)+(y,y)\geq 0$

λ - nisbatan kvadratik uchxad $(x,x)\geq 0$ bo‘lgani uchun

$b^2 - ac \leq 0 \quad a = (x, x) \quad b = -(x, y), \quad c = (y, y)$

$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

$(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \ \sum_{k=1}^{n} y_k^2$

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} \qquad (3)$$

Ta’rif $\sqrt{(x, x)}$ skalyar ko‘paytmadan chiqqan x ni $\| x \| = \sqrt{(x, x)}$,

$\| x \| - x$ elementning normasi.

1. $\| x \| \geq 0$

2. $\| \lambda x \| = \| \lambda \| \| x \| \quad \| \lambda x \| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| + \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \| x |$

3. $\| x + y \| < \| x \| + \| y \|$

$| x + y |^2 = (x + y, x + y) = (x + y, x) + (x + y, y) =$

$= (x, x) + (y, x) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$

$\| x \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$

$$\| x+y \|^2 \le (\| x \| + \| y \|)^2$$

$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ x - element (vektori)

Ta’rif. Norma aniqlangan *Ye* fazoni normallashgan fazo deyiladi.

$(E, \| \cdot \|)$ - normalashgan.

Ta’rif. *(x,y)=0* bo‘lsa, ortogonal deyiladi, ya’ni $x \perp y$

$$|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \Rightarrow \frac{|(x,y)|}{\| x \| \cdot \| y \|} \le 1 .$$

Ta’rif. $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\| x \| \cdot \| y \|}$.

Teorema: Agar *(x,y)=0* bo‘lsa, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ bo‘ladi va aksincha $\dfrac{\pi}{2}$ bo‘lsa *(x,y)=0*.

Ta’rif. Ushbu $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sistemasi berilgan . Agar $(e_i, e_j)=0$ $i \ne j$ bo‘lsa berilgan sistemani artogonal vektorlar sistemasi deyiladi.

Ta’rif. $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sistemasi ortogonal sistemani tashkil etadi,agar uzunliklari 1 ga teng bo‘lsa, ortogonal bo‘lsa

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \ne j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Teorema: $e_1, \dots, e_n$ o‘rta normal sistema chiziqli bog‘lanmagan $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$$(ek_1 \lambda e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = (e_k, 0) = 0$$

$$\lambda_1 (e_k, e_1) + \lambda_2 (e_k, e_2) + \dots + \lambda_n (e_k, e_n) = 0$$

$$\lambda_k^{'} (e_k e_k) = 0 \qquad \lambda_k = 0 \qquad k = \overline{1,0}$$

Teorema: Ye^n fazoda $e_1, \dots, e_n$ o‘rta normal bazisni tashkil etsa $\Rightarrow (x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ bo‘ladi haqiqatdan ham

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \qquad\qquad y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \quad \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j (e_{i, e_j}) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

Agar *Ye* da o‘rta normal bazis bo‘lsa, $e_1, ..., e_n$ $(x,e_k)=x_k$.

Teorema. Agar Ye^n da $f_1, ..., f_n$∀ bazis bo‘lsa

$$(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (f_i, f_j) =< (f_i, f_j) = a_{ij} >= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

bo‘ladi.

Aytaylik *Ye* Yevklid fazo bo‘lib, $f_1, ..., f_n$ (1) undagi ∀ bazis bo‘lsin. bizning maqsadimiz *Ye* da aniqlangan (1) ni ortogonal bazis so‘ngra esa ortonormal bazisga aylantirish mumkinligini ko‘rib chiqamiz. Ushbu jarayonni algebra va sonlar nazariyasida ortogonallash jarayoni deyiladi.

U kuyidagicha

$$n=1, \quad f_1 \quad f_1 \neq 0 \quad e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1, f_2)}}$$

$$n=2 \quad f_1 \; f_2; \quad e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1, f_2)}}; \quad q_2 = f_2 \neq \lambda f_1 \quad (q_R, e_1 = 0)$$

$$e_2 = \frac{q_2}{\sqrt{(q_1 q_2)}} \qquad (f_2 + \lambda f_1, e_1) = 0 \qquad \lambda = \frac{(f_2 f_1)}{(f_1 e_1)} f$$

$$(f_2 e_1) + (f_1 e_1) = 0$$

Farazqilaylik. $b_1, ..., b_n$(1) $\quad b_1, ..., b_m, \; c_{m+1}, ..., c_n$ *(2)*

$$(b_{m+1}, b_i) = 0(4) \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$(c_{m+1} + \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m; b_i) = 0 \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$(c_{m+1}, b_i) + \lambda_i (b_i, b_i) + ... + \lambda_i (b_i, b_i) + ... + \lambda_m (b_m, b_i) = 0$$

$$(c_{m+1}, b_i) + \lambda_i (b_i, b_i) = 0 \quad b_i \neq 0 \quad (b_i, b_i) \neq 0$$

$$\lambda_i = -\frac{(c_{m+1} b_i)}{(b_i, b_i)} \qquad (5)$$

(5) bajarilsa, ⇒ (4) tengliko‘rinlibo‘ladivanatijada$b_1, b_2, ..., b_m, b_{m+1}$ (6) $m+1=n$bo‘lsaortogonallashjarayonitugaydi.

Agarda $m+1<n$ bo‘lsa, muloxazani takrorlaymiz.

$$b_{m+2} = c_{m-2} + \lambda_1' b_1 + ... + \lambda_{m+1}' b_{m+1} \qquad (6)$$

kabi ajratib, $(b_{m+2}, b_j)=0$ (8) $j = \overline{1,m}$.

$$\lambda' = -\frac{(c_{m+2}, b_j)}{(b_j, b_j)} \qquad (7)$$

Shunday qilib, $b_1, \ldots, b_m, \ldots, b_{m+1}$, b_{m+2} (7) ortogonal teoremani quramiz. $m+2=n$.

Shunday qilib *Ye* faraz ortogonal jarayon ketma-ket qo‘llab $b_1, \ldots, b_n$ (8) ortogonal bazisga ega bo‘lamiz.

$$e_1 = \frac{b_1}{|b_1|} \ldots e_n = \frac{b_n}{|b_n|} \qquad (9)$$

$$(e_i, e_j) = \left(\frac{b_i}{|b_i|}, \frac{b_i}{|b_j|} \right) = \frac{(b_i, b_j)}{|b_j| \cdot |b_i|} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (b_i, b_j) = (b_j)^2$$

1-teorema. E_n o‘lchovli fazo bo‘lib, (8) ortogonal chiziqli bog‘lanmagan vektorlar sistemasi chiziqli erkli

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \quad \lambda_i = 0 \quad i = \overline{1,n}$$

$$e_k (1 \leq k < n) \quad (e_k;\ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n) = (e_k, \theta) = 0$$

$$\lambda_1 (e_1, e_k) + \lambda_2 (e_2, e_k) + \ldots + \lambda_k (e_k, e_k) + \ldots + \lambda_n (e_k, e_n) = 0$$

$$\lambda_e (e_k, e_k) = 0 \quad (e_k, e_k) = 1 \quad \lambda_k = 0 \quad k = \overline{1,n}$$

2-teorema: *Ye* o‘lchovli Yevklid fazosi $(e_1, \ldots, e_n)$ ortogonal bazis bo‘lsin. $\Rightarrow x_k = (x_1 e_k)$

$$(x, e_k) = (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, e_k) = x_1 (e, e_k) + \ldots + x_k (e_k, e_2) + \ldots +$$

$$+ x_n (e_n, e_2) = x_k (e_k, e_k) = x_k \cdot 1 = x_k$$

Ta’rif. *Ye* fazo $R_1 \subset E,\quad R_2 \subset E$ bo‘lsin $R_2 = \{ y : \forall x \in R;\ (y, x) = 0 \}$

Teorema: R_2, E aniqlangan skalyar ko‘paytmaga nisbatan qism fazo bo‘ladi.

$$\forall y_1 y_2 \in R_2 \quad y_1 - y_2 \in R_2$$

$$\forall x \in R_1 \quad (y, x) = 0 \quad (y_2, x) = 0$$

$$(y_1 - y_2; x) = (y_1, x) - (y_2; x) = 0 - 0 = 0$$

$$y_1 - y_2 \in R_2$$

2) $\forall \lambda \in R, \quad \forall y \in R_2 \quad (xy, x) = \lambda \quad (y, x) = \lambda, \ 0 = 0 \quad \lambda y \in R_2$

Ta'rif. R_2-E ning qism fazosini R_1 qism fazoga ortogonal qism fazo deyiladi.

$$E = R_1(+)\ R_2 \quad \dim\ E = n \quad \dim R_1 = k \quad \dim\ R_2 = n-k$$

$e_1 ... e_n$ (1) $\Rightarrow$ bundagi bazisni $(q_1 ..., q_{n-k})$ (2) bilan belgilaylik.

Ortogonallash jarayoniga ko'ra (2) bilan (1) ni ortogonal bazisga keltirish mumkin.

$$x = \underline{x_1 e_1 + ... + x_n e_k} + ... + x_n e_n -$$

$$x'(\in)x''$$

$$x' = x_1 e_1 + ... + x_k e_k = R_1$$

$$x'' = (kx+1)\cdot x_{k+1} e_n + ... + x_k e_n = R_2$$

Masalan:

2 x x^2 (1)

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \quad q_1 = 1 \quad q_2 = q_1 + \lambda_1 x \quad (q_2 q_1) = 0$$

$$q_2 = 1 + (-2)x = 1 - 2x \quad q_3 = x^2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$$

$$(1 + \lambda_1 x_1 1) = \int_0^1 (1 + \lambda x)dx \neq 0$$

$$\left(x + \lambda, \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \quad 1 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = -2$$

$$q_2 = 1 + (-2)x = 1 - 2x$$

$$q_3 = x^2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \quad (q_3, q_1) = (x^2 + \lambda_1 + \lambda_2 (1-2x)\cdot 1) = 0$$

$$(x^2 + \lambda_1 + \lambda_2 (1-2x)\cdot 1 - 2x) = 0$$

$$(x^2, 1) + (\lambda_1, 1) + \lambda_2 (1 - 2x, 1) = 0$$

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx + \lambda_2 \int_0^1 (1-2x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \lambda_1 x\Big|_0^1 - \frac{\lambda_2}{2}\frac{(1-2x)}{2}\Big|_0^1$$

Bundan $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ topamiz:

$$(x^2, 1-2x) + \left(-\frac{1}{3};\ 1-2x\right) + \lambda_2 (1-2x, 2x) = 0$$

$$\int x^2(1-2x)dx - \frac{1}{3}\int (1-2x)dx + \lambda_2 \int_0^1 (1-2x)dx = 0$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{\lambda_0}{2}\frac{(1-2x)}{3}\Big|_0^1 = 0$$

$$-\frac{1}{6}+\frac{\lambda_2}{3}=0 \quad \lambda_2=\frac{1}{2} \quad q_3=x^2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(1-2x)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

$1; 1-2x; \; x^2-x+\frac{1}{6}$ ortogonal vektorlar sistemasi

$$e_1=1 \quad e_2=\frac{1-2x}{\sqrt{(1-2x)(1-2x)}}, \quad e_3=\frac{x^2-x+\frac{1}{6}}{\sqrt{\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)}}$$

$$(1-2x,1-2x)=\int_0^1(1-2x)^2dx=-\frac{1}{2} \quad \frac{(1-2x)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$e_2=\frac{1-2x}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\sqrt{3}(1-2x)$$

$$\left(x^2-x+\frac{1}{6},x^2-x+\frac{1}{6}\right)=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{36}x-2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{180}$$

$e_3=\sqrt{180}\quad\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\quad e_1,e_2,e_3-$ ortogonal bazis.

3- AMALIY MASHG'ULOT MAVZUSI: PSEVDOEVKLID FAZO.

Ma'lumki, Yevklid fazosida koordinatalar boshidan ixtiyoriy M nuqtagacha bo'lgan masofa

$$OM^2=x^2+u^2+z^2 \qquad (1)$$

formula bilan aniqlanar edi. Endi shu formulani o'zgartirib, masofani $OM^2=x^2+u^2-z^2$ bo'yicha topishni ko'rib chiqaylik.

OM masofa $x^2+u^2>z^2$ bo'lganda haqiqiy musbat son, $x^2+u^2<z^2$ bo'lganda esa mavxum sonni

aniqlaydi. $x^2+u^2=z^2$ bo‘lganda esa masofa 0ga teng bo‘ladi (M nuqta 0 bilan ustma-ust tushmasa xam).

Bu formulani koordinatalar ko‘rinishda quyidagicha yozish mumkin:

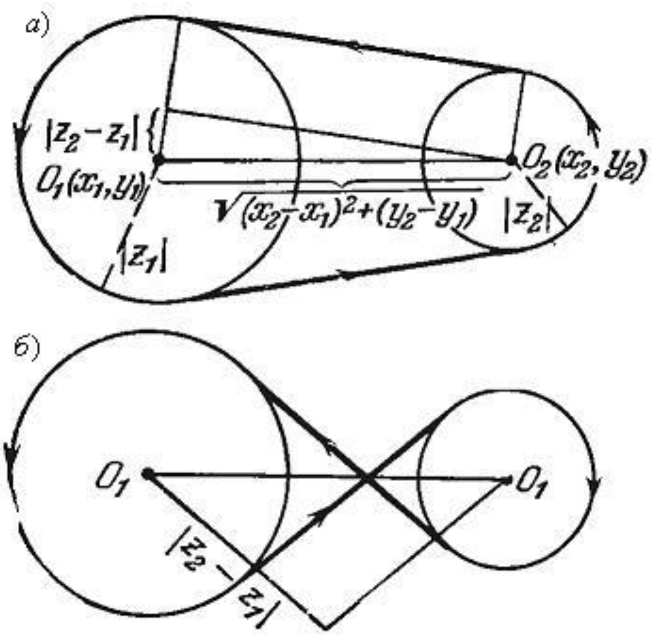
$$M_1M^2{}_2=(x_2-x_1)^2+(u_2-u_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

OM_1 va OM_2 kesmalar orasidagi burchakni esa

$$\text{sos}\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2-z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2-z_2^2}}$$

Uzunlik va burchaklar shu formulalar asosida aniqlangan fazolar ***psevdoyevklid fazolar*** deb ataladi. Bu fazoda Yevklid fazosining ko‘pgina aksioma va xossalari saqlanishi bilan bir qatorda ayrim munosabatlar keskin farq qiladi.

Psevdoyevklid fazoda masofani yuqoridagicha aniqlanishidan ko‘rinadiki, unda uch xil to‘g‘ri chiziqlar bo‘lishi mumkin: barcha kesmalari musbat haqiqiy uzunlikka ega to‘g‘ri chiziqlar; mavxum uzunlikdagi kesmalarga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar va barcha kesmalari 0 uzunlikka ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar. Bu to‘g‘ri chiziqlarni fazoviy o‘xshash, vaqtli o‘xshash va izotrop to‘g‘ri chiziqlar deb yuritiladi.



4- AMALIY MASHG'ULOT MAVZUSI: GIPERBOLIK FAZO.

n o'lchovli elliptik fazo deb, R_{n+1} fazoning sferasidagi diametrial qarama-qarshi bo'lgan nuqtalar to'plamiga aytiladi (izometrik juft).

Bu fazoni S_n bilan belgilanadi.

S_n fazoni noyevklid Riman fazo deb ham ataladi.

R_{n+1} fazo sferalariga urinmalar R_n fazoni tashkil etganligidan, cheksiz kichik orliqlarda S_p geometriyasi R_p fazo geometriyasiga yaqin bo'ladi.

S_p fazoning m o'lchovli tekisligi S_m fazoni tashkil etadi.

Elliptik fazoda masofa masalasi qanday o'rnatilgan?

Agar S_p fazoning X nuqtasini ifodalovchi vektorlardan biri $\bar{x}$, ikkinchisi ham $\bar{x}$ bo'lsa, u 'olda bu vektorlar $\bar{x}^2 = \bar{p}$ munosabat bilan bolangan bo'ladi.

$\bar{x}$ bilan aniqlangan S_p fazoning X nuqtasini X($\bar{x}$) bilan bog'lanadi.

Bunda, S–S_{Norton}fazodagi X($\bar{x}$) va U() nuqtalar orasidagi masofa, r esa egrilik radiusidir.

S_p fazo koordinatalari sifatida R_{n+1} fazoning $\bar{x}$ vektorining x^2 koordinatalarini qarash mumkin.

Endi giperbolik fazoning vektor aksiomasi asosida qurilishini ko'rib chiqaylik

Giperbolik fazoni ta'riflash uchun Ye_p afin fazoning I+IV gruppa aksiomalaridan tashqari quyidagi V gruppa aksiomalari bajarilishi kerak:

V.1^0. Har ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb ataluvchi K=$\bar{a}$ Ye$\bar{b}$ son mos quyilgan bo'lsin.

V.2^0. Skalyar ko'paytma kommutativ, yaoni $\bar{a}$ Ye$\bar{b}$ =$\bar{b}$ Ye$\bar{a}$

V.3^0. Skalyar ko'paytma vektorlarni qo'shishga nisbatan distributiv ya'ni$\bar{a}$ Ye($\bar{b}$ +$\bar{c}$)=$\bar{a}$ Ye $\bar{b}$ +$\bar{a}$ Ye$\bar{c}$

V.4^0. Haqiqiy ko'paytuvchini skalyar ko'paytma tashqarisiga chiqarish mumkin:(k$\bar{a}$)E$\bar{b}$ =k$\bar{a}$ E$\bar{b}$

V.5^0. Shunday $\bar{a}_i$ ko‘rinishdagi i ta vektorlar mavjudki, ular uchun

$\bar{a}_a E \bar{a}_a > 0$ (a≤l)

$\bar{a}_n E \bar{a}_n < 0$ (u>l), $\bar{a}_i E \bar{b}_j$, i≠j

Bunday shartlar asosida qurilgan l indeksli psevdoyevklid fazoni R_n ko‘rinishda belgilaymiz.

1. Bizga ma’lumki F(x,y)=0 tenglama tekislikda biror to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi, ya’ni OXU tekislikdagi koordinatalari x va u bo‘lgan barcha nuqtalar to‘plami bu tenglamani qanoatlantiradi. Shuningdek, fazoda xam

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

Tenglama OXUZ da biror sirtni, yaoni koordinatalari x,y,z bo‘lgan va (1) tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar to‘plamini aniqlaydi. (1) tenglama sirtning tenglamasi, x,y,z lar esa uning o‘zgaruvchi koordinatalari deyiladi.

Ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$a_1+x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_2xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad .$$

bu tenglamadagi $a_1, a_{22}, a_{33}, a_2, a_{13}, a_{23}$ koeffitsiyentlarning kamida bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak. Ayrim hollarda sirt tenglamasi bilan emas, balki u yoki bu xossaga ega bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni bilan berilishi mumkin. bu holda sirtning geometrik xossalaridan foydalanib uning tenglamasi tuziladi.

13^0. Sferaning OXUZ to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini tuzamiz.

Markazi 0'(a,b,c) nuqtada va radiusi R bo‘lgan sfera berilgan bo‘lsin. Agar μ(x,y,z) nuqta sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, u holda 0'(a,b,c) va μ(x,y,z) nuqtalar orasidagi masofani toipsh formulasidan foydalansak, sfera tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (1)$$

(*13*)–markazi 0'(a,b,c) bo‘lgan nuqtada yotuvchi va radiusi R ga teng bo‘lgan sfera tenglamasi deyiladi. Agar (*13*) da a=b=c=0 bo‘lsa, markazi koordinatalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng bo‘lgan sfera tenglamasiga ega bo‘lamiz:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (2)$$

(*13*) ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0 \qquad (3)$$

Sferatenglamasiikkinchitartiblisirtbo‘lishiniko‘rsataylik. Buning uchun sirtning (2) tenglamasida $a_2=a_{13}=a_{23}=0$ va $a_1=a_{22}=a_{33}$ deb olinsa, (2) tenglama sferaning tenglamasi ekanini tekshiramiz. Buning uchun $a_1 \neq 0$ deb (4) ning hamma hadlarini a_1 ga bo‘lamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=\frac{2a_{14}}{a_{11}}, B=\frac{2a_{24}}{a_{11}}, C=\frac{2a_{34}}{a_{11}}, D=\frac{a_{44}}{aa_{11}}$$

Natijada $x^2+y^2+z_2+Ax+By+Cz+D=0$ ko‘rinishdagi tenglamaga ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglamani ushbu ko‘rinishda yozib olamiz

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(A^2+B^2+C^2-4D\right)$$

yoki

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2 \quad (5)$$

(5) tenglamadan ko‘rinadiki, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ bo‘lganda (4) tenglama maonoga ega bo‘ladi. Demak, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ bo‘lsa, (5) tenglama markazi

$$\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$$

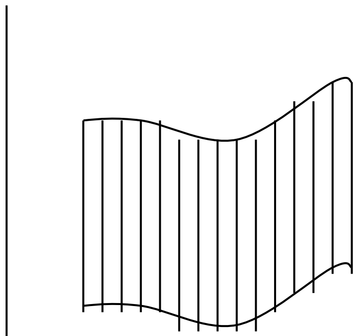
nuqtada va radiusi $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$

bo‘lgan sferani ifodalaydi. Agar $A^2+B^2+C^2-4D=0$ bo‘lsa, (5) tenglama

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$$

ko‘rinishda bo‘lib, u faqat bitta $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$ nuqtani ifodalaydi.

2^0. Biror P tekislikda yotuvchi L chiziqning har bir nuqtasidan o‘tuvchi va berilgan *l* to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan barcha to‘g‘ri chiziqlardan tashkil topgan sirt ***silindrik sirt*** deyiladi. bunda L chiziq silindrik sirtning yo‘naltiruvchisi, *l* to‘g‘ri chiziqqa parallel va L chiziqni kesuvchi chiziqlar uning yasovchisi deyiladi (1–chizma).

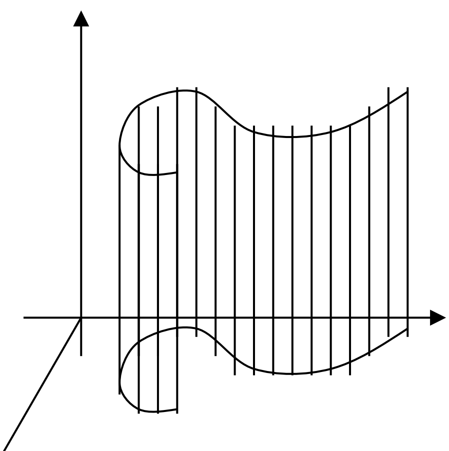


Yo‘naltiruvchilari koordinata tekisliklaridan birida yotuvchi yasovchilari esa shu tekislikka perpendikulyar bo‘lib, koordinatalar o‘qiga parallel bo‘lgan silindrik sirtlarni ko‘raylik.

OX tekislikda tenglamasi

$$F(x,y)=0 \qquad (6)$$

bo‘lgan L chiziq va yasovchilari OZ o‘qqa parallel bo‘lgan silindrik sirtni yasaymiz (2–chizma). (6) tenglama OXYZ koordinatalar sistemasida silindrik sirt ekanini ko‘rsataylik.



M(x,y,z) –silindrik sirtning ixtiyoriy tayinlangan nuqtasi bo‘lsin. M nuqta orqali o‘tuvchi yasovchining L yo‘naltiruvchisi bilan kesishgan nuqtasini N bilan belgilaymiz. N nuqta M nuqtaning OXU tekisligidagi proyeksiyasidir. Shuning uchun M va N nuqtalar bitta x absissa va bitta u ordinataga ega. N nuqta L chiziqda yotgani uchun u egri chiziqning (6) tenglamasini qanoatlantiradi.

Demak, bu tenglamani M(x,y,z) nuqtaning koordinatalari ham qanoatlantiradi. OXYZ fazoda L yo‘naltiruvchi quyidagi ikkita tenglama sistemasi bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ Z=0 \end{cases}$$

Xuddi shunga o‘xshash

$$\begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases} \text{va} \begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

tenglamalar silindrik sirtlarning L yo‘naltiruvchi chiziqlarini mos ravishda OXZ va OUZ tekislikdagi holatini aniqlashni ko‘rsatish mumkin.

Xususiy hollarda silindrik sirtlarning yo‘naltiruvchilari ellips, giperbola, parabola, ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq, ikkita o‘zaro parallel (ustma-ust tushmagan) to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘lishi mumkin. Bunday sirtlarni mos ravishda elliptik silindr, parabolik silindr, giperbolik silindr, ikkita kesishuvchi tekislik, ikkita parallel tekislik deb yuritiladi va ularning tenglamalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

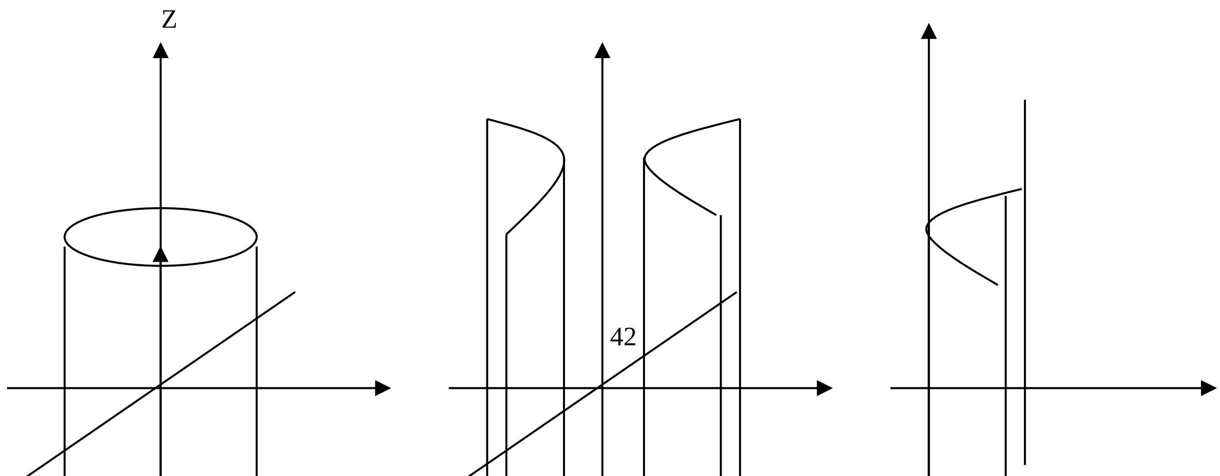
Elliptik silindr: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (3-chizma)

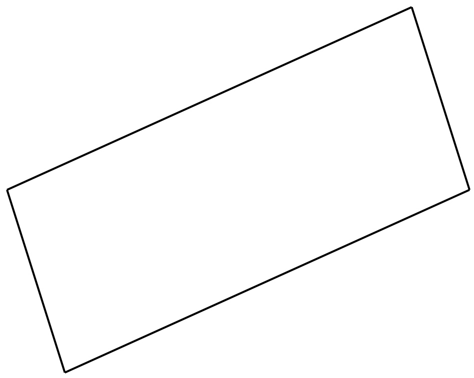
Giperbolik silindr: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (4-chizma)

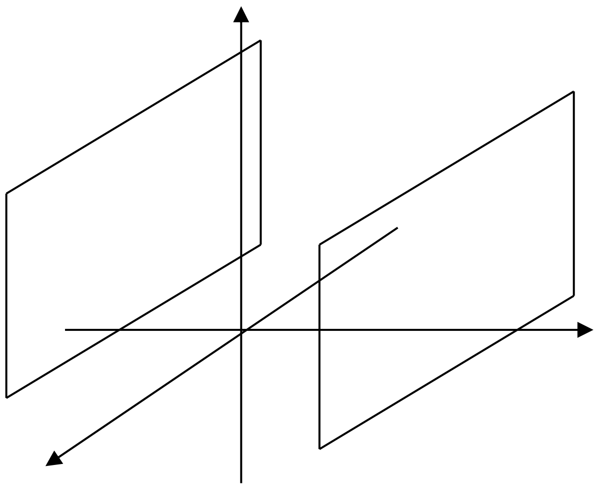
Parabolik silindr: $y^2=-2rx$ (5-chizma)

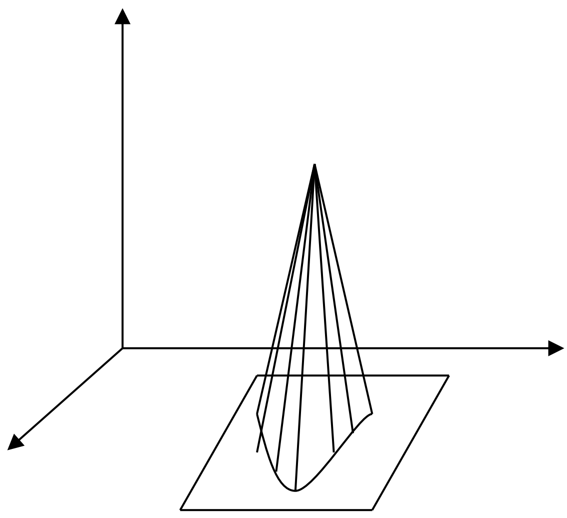
Ikki kesishuvchi tekislik: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (6-chizma)

Ikki parallel tekislik: $x^2-a^2=0$ $(a\neq 0)$ (7-chizma)









3.1^0. Biror Q tekislikda L ikkinchi tartibli chiziq va bo‘ tekislikka tegishli bo‘lmagan M_0 nuqta berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Fazodagi M_0 nuqtadan o‘tib, L ni kesib o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami ikkinchi tartibli konus sirt (yoki konus) deyiladi. M_0 nuqta konus uchi, L chiziq konus yo‘naltiruvchisi, konusni hosil qiluvchi chiziqlar esa uning yasovchilari deyiladi.

Konus yasovchilari bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar markazi konus ichida bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar bog‘lamiga tegishli bo‘ladi. konus tenglamasini keltirib chiqaraylik. Q tekislik va undagi L chiziq OXU tekislikda yotgan bo‘lsin. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta esa OXU tekislikdagi yotmagan ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. konusning ixtiyoriy M(x,y,z) nuqtasini olaylik, u holda M_0M to‘g‘ri chiziq konusning yasovchisi bo‘lib, L chiziq bilan $M(x_1,y_1,z_1)$ nuqtada kesishadi. M_0,M_1,M nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun $\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda\overrightarrow{M_0M}$ tenglik o‘rinli. Bu tenglikdan

$$x_1-x_0=\lambda(x-x_0) \Rightarrow x_1=x_0+\lambda(x_0-x_0)$$

$$u_1-u_0=\lambda(u-u_0) \Rightarrow u_1=u_0+\lambda(u_0-u_0)$$

$$z_1-z_0=\lambda(z-z_0) \Rightarrow z_1=z_0+\lambda(z_0-z_0)$$

Oxirgi tenglikdan λ ni topib, oldingi ikki tenglikka qo‘yamiz:

$$x_1=x_0+\frac{x-x_0}{z_0-z}z_0,\ u_1=u_0+\frac{z-z_0}{z_0-z}z_0 \qquad (7)$$

$$M_1\in L \ \Rightarrow\ F(x_1,y_1)=0$$

yoki

$$F\left(\frac{x-x_0}{z_0-z}z_0,\ u_0+\frac{z-z_0}{z_0-z}z_0\right)=0 \qquad (8)$$

(8) ifoda konus tenglamasi deyiladi. Ikkinchi tenglama konusning Dekart koordinatalar sistemasidagi eng sodda tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (9)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

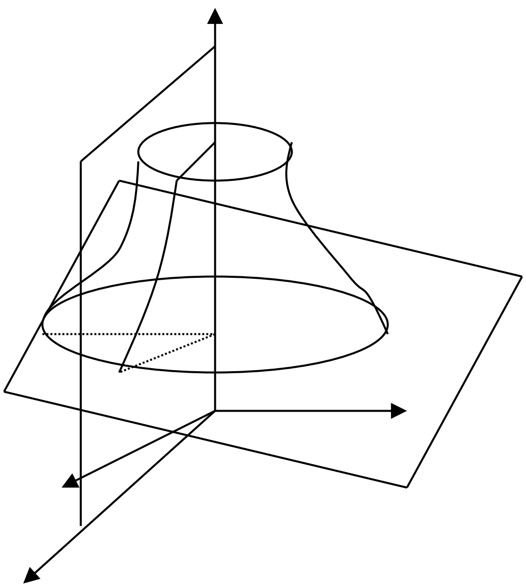
ko‘rinishda bo‘ladi.

2^0. Q tekislikda biror L chiziq va *l* to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. L chiziqning *l* to‘g‘ri chiziq atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan F figura aylanma sirt deyiladi. bunda L aylanma sirtning meridiani, *l* aylanish o‘qi deyiladi.

Aylanma sirtning tenglamasini keltirib chiqaraylik.

Dekart koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, bunda Q–(OYZ) tekislik, *l*–(OZ) o‘q hamda L:F(x,z)=0 bo‘lsin.



L chiziqning (OZ) o‘q atrofida aylanishidan qandaydir F sirt hosil bo‘lsin (9-chizma). M(x,y,z) shu sirtga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. M nuqtadan OZ o‘qqa perpendikulyar o‘tkazsak, kesimda markazi $0\in$(OZ) nuqtada bo‘lgan biror aylana hosil qilinadiki, u aylana L chiziq bilan $M_1(0,y_1,z_1)$ nuqtada kesishsin. Kesim aylanadan iborat bo‘lgani uchun:

$$\rho(0,M)=\rho(0,M_1) \qquad (10)$$

Bu masofalar ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko‘ra quyidagicha bo‘ladi:

$$\rho(0,M)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\rho(0,M_1)=\sqrt{(0-0)^2+(y_1-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{y_1^2}=|y_1|.$$

Bu qiymatlarni (*10*) tenglikka qo‘yamiz:

$$|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

M∈L bo‘lgani uchun:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0 \qquad (11)$$

(11) tenglama L chiziqni 0Z o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan sirtning tenglamasidir.

Agar L chiziq mos ravishda 0X va 0U o‘qlar atrofida aylantirsak, hosil bo‘lgan sirtlarning tenglamalari mos ravishda

$$F\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0 \text{ va } F\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0 \qquad (12)$$

ko‘rinishlarda bo‘ladi.

Torshiriq

1.Giperbolik fazolarga misollar keltiring

5- AMALIY MASHG’ULOT MAVZUSI: IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR. IKKINCHI TARTIBLI SIRT INVARIANTLARI.

1.Sirtlar nazariyasi. Yo‘nalish bo‘yicha egriliklar.

Tekislikdagi ochiq doiraga gomeomorf to‘plamni e***lementar soha*** deb ataymiz.

1-ta’rif. Fazodagi $\hat{O}$ to‘plam elementar sohaning topologik akslantirishdagi obrazi bo‘lsa, u elementar sirt deb ataladi.

Demak, $\hat{O}$ to‘plam elementar sirt bo‘lsa, $f: G \to \hat{O}$ - topologik akslantirish mavjud bo‘lishi kerak. Bu yerda $G \subset R^2$ elementar soha, $\hat{O}$ esa R^3 dan keltirilgan topologiya yordamida topologik fazoga aylantirilgan. Agar $\hat{O}$ elementar sirt bo‘lsa, (f, G) juftlik $\hat{O}$ *sirtni parametrlash usuli* deyiladi.

Albatta G_1 boshqa elementar soha bo‘lsa, G va G_1 sohalar o‘zaro gomeomorf bo‘ladi va agar $g: G_1 \to G$ gomeomorfizm berilgan bo‘lsa, $f \cdot g: G_1 \to \hat{O}$ gomeomorfizm $\hat{O}$ sirtni parametrlashning boshqa usulidir.

Demak, elementar sirt uchun cheksiz ko‘p parametrlash usullari mavjuddir. Birorta to‘plamning elementar sirt ekanligini ko‘rsatish uchun, uning uchun birorta parametrlash usulini ko‘rsatish kerak.

Agar $\hat{O}$ sirt (f, G) parametrlash usuli bilan berilib, $(u, v) \in G$ uchun *f(u,v)* nuqtaning koordinatalari $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ ko‘rinishda belgilsak

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \qquad (1)$$

sistema $\hat{O}$ sirtning *parametrik tenglamalari sistemasi* deyiladi.

2-ta'rif. Fazodagi bog'lanishli $\hat{O}$ to'plam o'ziga tegishli har bir nuqtaning birorta atrofida elementar sirtga aylansa, $\hat{O}$ soda sirt deyiladi.

Ikkinchi ta'rifga izoh beramiz. Demak, $\hat{O}$ soda sirt bo'lshi uchun unga tegishli har bir $p \in \hat{O}$ nuqta uchun shunday $U(p)$ atrof (R^3 fazoda) mavjud bo'lib, kesishma $U(p) \cap \hat{O}$ elementar sirt bo'lishi kerak.

Keyinchalik kurs davomida sirt deganda elementar yoki sodda sirtni tushunamiz.

Misollar.

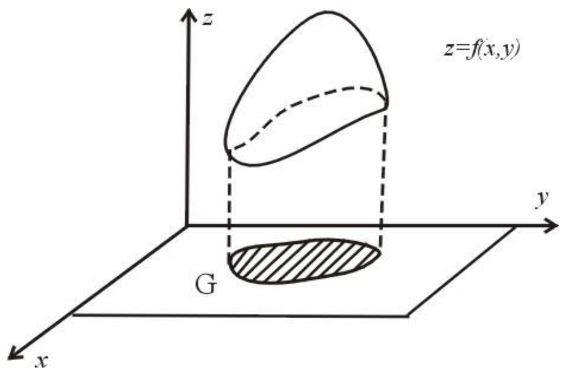
1) Har qanday tekislik elementar sirtdir, chunkitekislikdoiragagomeomorfdir.

Agar $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ tekisliknuqtasi, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlartekislikkaparallelbo'lsa, uni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v, -\infty < u < +\infty, -\infty < v < \infty$$

ko'rinishidaparametrlashmumkin. Bu yerda $\vec{r}_0 = \{x_0, y_{0,}\ z_0\}$ vektor M nuqtaning radius vektoridir.

2) elementar G sohadaaniqlangan $z = f(x,y)$ – uzluksiz funksiyaning grafigi elementar sirtdir. Sababi, $(x, y, f(x,y)) \to (x,y)$ – akslantirish (proyektsiya) gomeomorfizmdir.

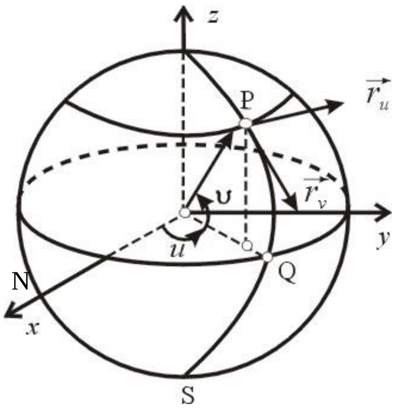


Chizma-1

3) Ikkio'lchamlisfera S^2 elementarbo'lmagansodasirtdir. Radiusi R ga teng S^2 sferaningmarkazigakoordinatalarboshinijoylashtirsak, uni $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ to'plamsifatidaqarashimizmumkin.

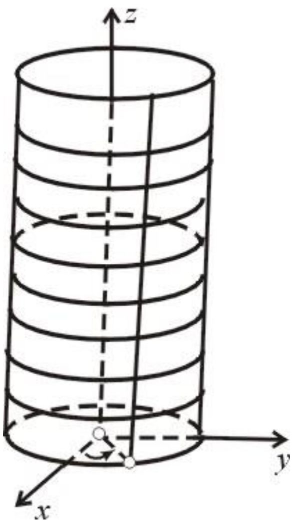
Busferaningsirtekanliginiisbotlashuchununga tegishlibirorta P nuqtaniolaylik. Bu P nuqtadanfarqli S nuqtanijanubiyqutbsifatida, ungadiametrikqarama-qarshibo'lgan N nuqtanishimoliyqutbhisoblab, z o'qini koordinata boshidan N nuqtaorqalio'tkazamiz, Oxy tekisligiesa O nuqtadano'tuvchiva ON ga perpendikulyar tekislikdir. Butekislikva sfera kesishishidanhosilbo'lganaylanani ***ekvator***debataymiz. Endi u Bilan OQ nurva Ox o'qiorasidagiburchakni, v bilan OP va OQ nurlarorasidagiburchaknibelgilaymiz. Buyerda Q nuqta NPS meridianning ekvator Bilankesishishnuqtasidir, $0 < u < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}$. Shunda S^2 sferaning NS meridian chiqaribtashlanganqismi $\phi : P \to (u,v)$ akslantirishyordamida $[0;2\pi] \times \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

lementarsohagagomeomorfakslantiriladiva $x = R\cos u\cos v,\ y = R\sin u\cos v,\ z = \sin v$ tenglamalaryordamidaparametrlanadi.



Chizma-2

4) Doiraviy silindrni $x = R\cos u,\ y = R\sin u,\ z = v$ tenglamalar sistemasi yordamida parametrlash mumkin. Buyerda $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$. Albattasilindrhamelementarsirtemas (3 -chizma).



3 -chizma

Agar biz $\vec{r}(u,v) = \{x(u;v); y(u;v); z(u;v)\}$ vektor funksiyani kiritsak (1) tenglamalar sistemasini bitta

$$\vec{r} = \vec{r}(u;v)\ ,\ (u,v) \in G \qquad (2)$$

vektor tenglama yordamida yoza olamiz. Butenglama $\hat{O}$ sirtning***vektor ko‘rinishdagi tenglamasi*** deyiladi. Tabiiyki, $\hat{O}$ sirt elementar sirt bo‘lmasa, (1) va (2) tenglamalar uni birorta nuqta atrofida aniqlaydi. Agar $\hat{O}$ elementar sirt bo‘lsa, uni to‘liq (1) yoki (2) tenglamalar yordamida aniqlash mumkin.

2. Sirtning oshkormas ko‘rinishda berilishi.

Bizga $G \subset R^3$ ochiq to‘plam va G da aniqlangan silliq $F(x;y;z)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

Shunda $\hat{O} = \{(x;y;z) \in G : F(x;y;z) = 0\}$ to‘plam F funksiyaning ***sath to‘plami*** yoki ***sirti*** deyiladi. Agar $gradF \neq 0$ bo‘lsa, $\hat{O}$ haqiqatdan ham sodda sirt bo‘ladi. Haqiqatdan, agar $p = (x_0; y_0; z_0) \in \hat{O}$ nuqtada $F_z \neq 0$ bo‘lsa, oshkormas funksiya haqidagi teoremaga ko‘ra, shunday $\delta > 0, \varepsilon > 0$ sonlari va $G_0 = \{(x;y) : |x_0 - x| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ sohada aniqlangan $z = f(x;y)$ funksiya mavjud bo‘lib, $(x;y) \in G_0$ bo‘lganda $F(x;y, f(x;y)) = 0$ tenglik va $z_0 = f(x_0;y_0)$, $|z_0 - f(x;y)| < \varepsilon$ munosabatlar bajarilib,

$$Ï = \{(x;y;z) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta, |z_0 - z| < \varepsilon\}$$

Parallelipipedning $\hat{O}$ Bilankesishmasi $z = f(x;y)$ funksiyaninggrafigidaniboratdir. Demak, $\hat{O}$ o‘zigategishliharqandaynuqtaningetarlikichikatrofidaelementarsirtbo‘ladi.

Bizningkursimizdaasosiy metod matematik analiz bo‘lganligiuchun, bizsirtlardanqo‘shimchashartlarnitalabqilamiz.

Ta’rif. *Berilgan* $\hat{O}$ *sirt uchun unga tegishli ixtiyoriy nuqta atrofida* (f, G) *parametrlash usuli mavjud bo‘lib, bunda* $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ *funksiyalar uzluksiz xususiy hosilalarga ega va* $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ *matritsaning rangi ikkiga teng bo‘lsa,* $\hat{O}$ *sirt* ***regulyar sirt*** *deyiladi, parametrlash usuli esa regulyar parametrlash deyiladi.*

Sirtning regulyarlik shartini $\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] = \vec{0}$ ko‘rinishda ham yozishimiz mumkin. Bizkursimizdaasosanregulyarsirtlarnio‘rganamiz.

Endisirtlarningberilishusullarihaqidaquyidagiteoremalarniisbotlaylik.

Teorema-1.*Bizga* G *sohada aniqlangan silliq* $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ *funksiyalar berilib, har bir nuqtada* $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ *tenglik o‘rinli bo‘lsa,*

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \quad (u;v) \in G \\ z = z(u;v) \end{cases}$$

sistema regulyarsirtnianiqlaydi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun

$$\text{F} = \{(x;y;z) : x = x(u;v), y = y(u;v), z = z(u;v), (u;v) \in G\}$$

to‘plamning soda sirt ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun esa $\hat{O}$ to‘plamga tegishli ixtiyoriy

$p_0 = \left(x(u_0;v_0), y(u_0;v_0), z(u_0;v_0) \right)$ nuqtaning yetarli kichik atrofida $\hat{O}$ elementar sirt ekanligini ko‘rsatamiz. Birorta $\varepsilon > 0$ va $G_\varepsilon = \left\{ (u;v) \in G : (u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2 < \varepsilon \right\}$ ochiq doira uchun $f : (u;v) \to (x(u;v), y(u;v), z(u;v))$ qoida Bilan aniqlangan $f : G_\varepsilon \to f(G_\varepsilon)$ akslantirishni qaraymiz. Berilgan $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ funksiyalar uzluksiz bo‘lganligi uchun f ham uzluksiz akslantirishdir. Agar f o‘zaro bir qiymatli bo‘lsa, uning teskarisi f^{-1} mavjud va uzluksiz bo‘ladi (f^{-1} uzluksizligi ham $x(u;v), y(u;v)$ va $z(u;v)$ funksiyalar uzluksizligi va teorema shartidan kelib chiqadi), demak $\hat{O}$ ning p_0 nuqtani o‘z ichiga oluvchi $f(G_\varepsilon)$ qismi elementar sirt bo‘ladi.

Shuning uchun birorta $\varepsilon > 0$ uchun f akslantirishning o‘zaro bir qiymatli akslantirish ekanligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $\varepsilon_i > 0, \varepsilon_i \to 0, i = 1, 2, 3, ...$ va G_{ε_i} doiraga tegishli $(u_i^1; v_i^1)$ va $(u_i^2; v_i^2)$ har xil nuqtalar uchun $f(u_i^1; v_i^1) = f(u_i^2; v_i^2)$ tenglik o‘rinli bo‘lsin. Umumiylikni chegaralamasdan aniqlik uchun $u_i^1 \le u_i^2$ va $v_i^1 \le v_i^2$ deb faraz qilaylik. Shunda,

$$x(u_i^1; v_i^1) - x(u_i^2; v_i^2) = 0, \; y(u_i^1; v_i^1) - y(u_i^2; v_i^2) = 0, \; z(u_i^1; v_i^1) - z(u_i^2; v_i^2) = 0$$

tengliklardan va Lagranj teoremasidan

$$x_u(p_i^1, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + x_v(u_i^2, q_i^1)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

$$y_u(p_i^2, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + y_v(u_i^2, q_i^2)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

$$z_u(p_i^3, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + z_v(u_i^2, q_i^3)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

tengliklarni olamiz.Bu yerda $p_i^1, \; p_i^2, \; p_i^3 \in \left[u_i^1, u_i^2 \right], \; q_i^1, \; q_i^2, \; q_i^3 \in \left[v_i^1, v_i^2 \right], u_i^2 - u_i^1$ va $v_i^2 - v_i^1$ sonlari bir vaqtda nolga aylana olmaydi.

Shuning uchun yuqoridagi tengliklardan

$$\frac{x_u(p_i^1; v_i^1)}{x_v(u_i^2; q_i^1)} = \frac{y_u(p_i^2; v_i^1)}{y_v(u_i^2; q_i^2)} = \frac{z_u(p_i^3; v_i^1)}{z_v(u_i^2; q_i^3)}$$

Munosabatni olamiz. Bumunosabatda $x_u, \, x_v, \, y_u, \, y_v$ va $z_u, \, z_v$ funksiyalar uzluksizligidan foydalanib, $i \to \infty$ limitgao‘tsak,

$$\frac{x_u(u_0, v_0)}{x_v(u_0, v_0)} = \frac{y_u(u_0, v_0)}{y_v(u_0, v_0)} = \frac{z_u(u_0, v_0)}{z_v(u_0, v_0)}$$

Munosabatni olamiz. Bumunosabatesa teorema shartigazidbo‘lgan,

$$rang \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} < 2$$

Tengsizlikka tengkuchlidir. Demak, farazimiznoto‘g‘ri, va $\varepsilon > 0$ yetarli kichik bo‘lganda

$f: G_\varepsilon \to f(G_\varepsilon)$ akslantirish topologik akslantirishdir. Bundanesa, $\hat{O}$ to‘plamning p_0 nuqtani o‘z ichiga oluvchi $f(G_\varepsilon)$ qismi elementar sirt ekanligi kelib chiqadi.

Teorema-2. *Regulyar $\hat{O}$ sirt unga tegishli $p(u_0, v_0)$ nuqta atrofida,*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Parametrik tenglamalar yordamida berilib, p nuqtada $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ determinant noldan farqli bo‘lsa, shunday silliq $f(x,y)$ funksiya mavjudki p nuqtaning atrofida $\hat{O}$ sirt $z = f(x,y)$ funksiyaning grafigidan iboratdir.

Izoh. Biz regulyar sirtlarning parametrlash usulini tanlaganimizda har doim x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v hosilalar mavjud va uzluksiz bo‘lishini talab qilamiz.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun,

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(u_0, v_0) = x_0 \\ y(u_0, v_0) = y_0 \end{matrix}$$

sistemaga matematik analiz kursidagi teskari funksiyalar haqidagi teoremani qo‘llaymiz. Bu teoremaga asosan shunday $\delta > 0$ soni va $\Pi_\delta = \{(x,y): |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$

Sohada aniqlangan shunday differensiallanuvchi $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$ funksiyalar mavjudki, ular $x(u(x;y), v(x;y)) \equiv x$, $y(u(x;y), v(x;y)) \equiv y$ tengliklarniqanoatlantiradiva $u(x_0;y_0) = u_0$, $v(x_0;y_0) = v_0$, munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Demak, p nuqta atrofida $\hat{O}$ sirt $z = z(u(x;y), v(x;y)) = f(x;y)$ funksiyaning grafigidan iboratdir.

3. Sirt ustida yotuvchi egri chiziqlar.

Regulyar $\hat{O}$ sirtning $p \in \hat{O}$ nuqta atrofida regulyar (f, G) parametrlash usuli

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

tenglama yordamida berilgan, sirt ustida M nuqtadan o‘tuvchi γ egri chiziq berilgan bo‘lib, u

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \ a < t < b. \ (2)$$

tenglama yordamida parametrlangan va $\gamma \subset f(G)$ bo‘lsin.

Aniqlik uchun, M sirt nuqtasi sifatida $(u_0; v_0)$ koordinatalarga, egri chiziq nuqtasi sifatida t parametrning t_0 qiymatiga mos kelsin. Tabiiyki, har bir $t \in (a;b)$ uchun shunday $(u(t), v(t)) \in G$ nuqta mavjud bo‘lib,

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) \ (3)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Agar γ silliq egri chiziq bo‘lsa, $u(t), v(t)$ funksiyalar ham differensiallanuvchi funksiyalar bo‘ladi. Bunii sbotlashuchun $\hat{O}$ sirtning regulyar sirt ekanligidan foydalanamiz. $\hat{O}$ regulyar sirt bo‘lganligi uchun $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ tenglik o‘rinli. Aniqlik uchun $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ bo‘lsin deb faraz qilib, $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$ sistemani qaraymiz.

Agar γ silliq egrichiziq bo‘lsa, $\vec{\rho}(t)$ vektor funksiyaning koordinatalari $x(t), y(t), z(t)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo‘ladi. Birorta $t^* \in (a;b)$ uchun $x^* = x(t^*),\ y^* = y(t^*),\ z^* = z(t^*).$ va $u^* = u(t^*),\ v^* = v(t^*)$ belgilashlarkiritib, $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$

sistemani

$$\begin{cases} x(u^*, v^*) = x^* \\ y(u^*, v^*) = y^* \end{cases}$$

Nazorat savollari va topshiriqlar:

1. Yo‘naltiruvchi chizig‘i $\vec{p} = \vec{p}(u)$ tenglama bilan berilgan, yasovchilari $\vec{e}$ vektorga parallel bo‘lgan silindrning parametrik tenglamalari tuzilsin.
2. Fazoda $x = ach\left(\dfrac{u}{a}\right),\quad y = 0,\quad z = u$ tenglamalar bilan berilgan chiziqning Oz o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtning (katenoid) tenglamalarini yozing.
3. Giperbolik paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

kanonik tenglama bilan berilgan bo‘lsa, uning shunday parametrik tenglamalarini yozingki, koordinata chiziqlari yasovchilardan iborat bo‘lsin.

4. Sfera $x = a\cos u \cos v,\quad y = a\sin u\cos v,\quad z = a\sin v$ parametriktenglamalaribilanberilganbo‘lsa, uningbirinchi kvadratik formasinitoping.

Elliptik paraboloid $x = \sqrt{p}v\cos u,\quad y = \sqrt{q}v\sin u,\quad z = \dfrac{v^2}{2}$ tenglamalarbilanberilgan, uningbirinchi kvadratik formasinitoping.

5. Birinchi kvadratik formasi $I = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ ko‘rinishdabo‘lgansirtda $u = \dfrac{1}{2}av^2,\quad u = -\dfrac{1}{2}av^2,\quad v = 1$ chiziqlarhosilqilganuchburchakningperimetrinivaburchaklarinitoping.
6. Birinchi kvadratik forma 6-masaladagi ko‘rinishdabo‘lgansirtda $u = av, u = -av, v = 1$ chiziqlarbilanchegaralanganuchburchakningyuzinihisoblang.
7. Birinchi kvadratik forma 6-masaladagi ko‘rinishdabo‘lgansirtda $u + v = 0, u - v = 0$ chiziqlarorasidagiburchaknitoping.
8. Birpallali giperboloid $x = achu\cos v,\ \ y = achu\sin v,\ \ z = cchu$ tenglamalarbilanberilganbo‘lsa, uningikkinchi kvadratik formasinitoping.
9. Doiraviy silindr $x = R\cos v, y = R\sin v, z = u$ tenglamalarbilanberilganbo‘lsa, uningikkinchi kvadratik formasinitoping.
10. Sirt $F(x, y, z) = 0$ tenglamabilanberilgan. Uning Gauss egriliginitoping.

11. Sirtdifferensiallanuvchi $z = f(x, y)$ funksiyaninggrafigidaniboratbo'lsa, uning Gauss va o'rta egriliginihisoblang.

12. Sfera $x^2+y^2+z^2=169$ tenglama bilan berilgan. Uning $M(3,4,12)$ nuqtadan o'tuvchi urinma tekisligi va normal tenglamalari tuzilsin.

13. Gelikoid $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ tenglamalarbilanberilgan. Uningo'rtaegriliginitoping.

14. Sirt $xyz=1$ tenglamabilanberilgan.Uning $x+y+z-3=0$ tekislikkaparallelurinmatekisliklarinitoping.

15. Gelikoid uchungeodezikchiziqlarningtenglamalariniyozing

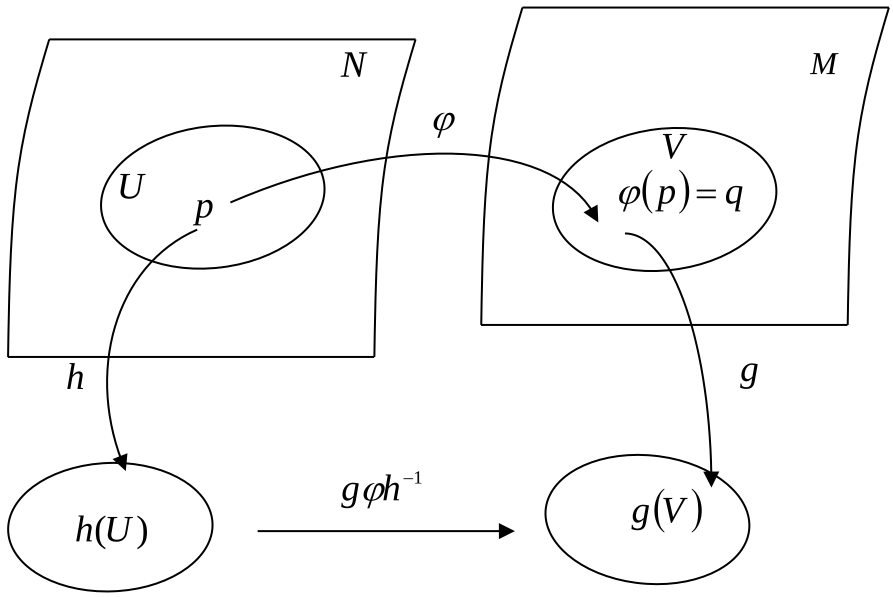
16. Sirt $x=u^2+v^2, y=u^2-v^2, z=uv$ tenglamalarbilanberilgan. Uning $P(u=1, v=1)$ nuqtasidagi $v=u^2$ chiziq yo'nalishibo'yichanormalegriliginitoping.

17. Sirt $z=2x^2+\frac{9}{2}y^2$ tenglama bilan berilgan.Uning $M(0,0,0)$ nuqtasidagi Dyupen indikatrisasi tenglamasini tuzing.

6- AMALIY MASHG'ULOT MAVZUSI: KO'PXILLIKLAR. KO'PXILLIKLAR TURLARI. KO'PXILLIK GEOMETRIYASI.

1. Riman geometriyasi elementlari.

Silliq k *-o'lchamli* N *ko'pxillikni silliq n-o'lchamli ko'pxillikka uzluksiz akslantirish* $\phi: N \longrightarrow M$ *silliq deyiladi, agar ixtiyoriy* $p \in N$ *nuqtaning atrofida* N *va* M *dagi biror kartada silliq funksiyalar bilan berilsa, ya'ni* $g\varphi h^{-1}$ *funksiya* M *da silliq funksiya bo'lsa (2-rasm). Eslatib o'tamiz, bunda* N, M *ko'pxilliklarning o'lchamlari* k, n *ixtiyoriy bo'lishi mumkin.*



2-rasm.

Ikki silliq ko‘pxillikni o‘zaro bir qiymatli ikki tomonlama silliq akslantirish diffeomorfizm, bunday akslantirish o‘rnatish mumkin bo‘lgan ko‘pxilliklar esa diffeomorf deyiladi.

M da silliq yo‘l deb $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ silliq akslantirishga aytamiz. Lokal koordinatalarda yo‘l nuqtalarining har bir $x^i \circ \gamma$ koordinatasi silliq funksiya bo‘ladi. $\gamma(a)$ va $\gamma(b)$ nuqtalar yo‘lning boshi va oxiri deyiladi.

Teorema 3. $\varphi : N \longrightarrow M$ - silliq ko‘pxilliklarni silliq akslantirish va $\forall q \in M$ φ akslantirishning regulyar nuqtasi bo‘lsin. U holda p nuqtaning to‘la proobrazi $B = \varphi^{-1}(q)_N$ da o‘lchami $\dim B = \dim N - \dim M = k - n$ bo‘lgan silliq qism ko‘pxillik bo‘ladi.

Isbot. $B = \varphi^{-1}(q)$ qatlamning ko‘pxillik ekanini isbotlash uchun, har bir $p \in B$ nuqtaning atrofida oshkormas funksiya haqidagi teoremani qo‘llash yetarli. Natijada har bir $p \in B$ nuqtaning R^{k-n} yevklid fazosidagi sohaga gomeomorf $p \in U$ atrofga ega bo‘ladi. U atrofda lokal koordinitalar sifatida N ko‘pxillikning p nuqtasi atrofidagi $(x_1, \ldots, x_n)$ lokal koordinatalardan biror $(n - m)$ tasini olish mumkin. Agar bu koordinatalar $\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}\right)$ bo‘lsa, u holda qolgan (x_j) lokal koordinatalar $\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}\right)$ orqali silliq funksiyalar bilan ifodalanadi. Bundan $B = \varphi^{-1}(q)$ ning silliq ko‘pxillik ekanligi kelib chiqadi. $(y_1, \ldots, y_n)_N$ ko‘pxillikning p nuqtasi atrofidagi boshqa koordinata sistemasi bo‘lsin. $\left(y_{j_1}, \ldots, y_{j_{n-m}}\right)$ sistema B da lokal koordinatalar sistemasini tashkil etadi. U holda

$$y_{j_k} = y_{j_k}(x_1, \ldots, x_n) = y_{j_k}\left(x_1\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}\right), \ldots, x_n\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-m}}\right)\right)$$

Silliq funksiya bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

Bu esa oshkormas funksiya haqidagi teoremadan kelib chiqadi.

Akslantirish differensiali.

φ : N → M — silliq N ko‘pxillikni silliq M ko‘pxillikka silliq akslantirish bo‘lsin. N dagi har bir γ yo‘lga M da $\varphi \circ \gamma$ yo‘l mos keladi.

M da biror φ(r) nuqta atrofida berilgan har bir f funksiyalarga, N da biror r nuqta atrofida berilgan $f \circ \varphi$ funksiya mos keladi.

Silliq φ akslantirishning p nuqtadagi differensiali $d_p\varphi$ deb $d_p\varphi : T_pN \to T_{\varphi(p)}M$ akslantirishga aytiladi, u har bir $u \in T_pN$ vektorga $d_p\varphi(u) \in T_{\varphi(p)}M$ vektorni mos qo‘yadi, M da ixtiyoriy f silliq funksiyaga quyidagi qoida bo‘yicha ta’sir etadi:

$$(d_p\varphi(u))f = u(f \circ \varphi) .$$

Agar u vektor γ yo‘lning r = γ(t) nuqtada tezlik vektori bo‘lsa, u holda $d_p\varphi$(u) vektor $\varphi \circ \gamma$ yo‘lning t da tezlik vektori bo‘ladi (3-rasm),

$d_p\varphi$ (γ '(t))= ($\varphi \circ \gamma$)'(t).

Yuqoridagi formulalardan ko‘rinadiki, ixtiyoriy u, v$\in T_pN$, a$\in$R da $d\varphi(u+v)=d\varphi(u)+d\varphi(v),\ d\varphi(au)=ad\varphi(u),$ ya’ni φ :N→M silliq akslantirishning differensiali $d_p\varphi$ chiziqli akslantirish va shuning uchun, xususiy hollarda silliq akslantirish bo‘ladi,

$d_p\varphi$:$T_pN \to T_{\varphi(p)}M$

Tabiiy qoida bo‘yicha aniqlangan $d_p\varphi$(p, u)= (φ (r), $d_p\varphi$(u)) urinma qatlamalarni akslantirish $d\varphi$*:TN→TM ni qaraymiz. Bu akslantirish umuman olganda chiziqli emas, balki qatlamda chiziqli.*

Botirish, joylashtirish, submersiya.

Agar har bir p$\in$N nuqtada $d_p\varphi$ chiziqli akslantirish yadrosi faqat noldan iborat bo‘lsa, ya’ni $d_p\varphi T_pN$ fazoni $T_{\varphi(p)}M$ ning qism fazosiga chiziqli izomorf akslantirsa, u holda φ akslantirish N ko‘pxillikni M ga (sillik) botirish deyiladi. Tabiiyki, bunda k=dimN$\leq$dimM=n bo‘lishizarur.

N da r nuqtani o‘z ichiga oluvchi (V, g) kartaning lokal koordinatalari x^1 , ..., x^k va M da φ(p) nuqtani o‘z ichiga oluvchi (U, h) kartaning u^1 , ..., u^n lokal koordinatalarida φakslantirish silliq funksiyalar bilan beriladi

$$y^i = y^i(x^1,...,x^k);\ i=1,...,n.$$

φ akslantirish botirish bo‘lishi uchun k $\leq$ n bo‘lib, har bir p$\in$N nuqtada Yakobi matritsasi

$\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{i=1,...,n;\ j=1,...,k}$ *ning rangi k ga teng bo‘lishi, ya’ni maksimal bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Yakobi matritsasining rangi lokal koordinatalarni qanday tanlashga bog‘liq emas va φ akslantirishning r nuqtadagi differensiali $d\varphi$ ning rangi deyiladi.

Agar φ : N → M akslantirishda N o‘zining obraziga diffeomorf bo‘lsa, u holda φ akslantirish (silliq) joylashtirish deyiladi. Bu botirishning xususiy holidir.

Ixtiyoriy botirish lokal joylashtirish bo‘ladi.

Agar k>n da Yakobi matritsasining rangi har bir nuqtada maksimal bo‘lsa, ya’ni n ga teng bo‘lsa, u holda φ akslantirish submersiya deyiladi.

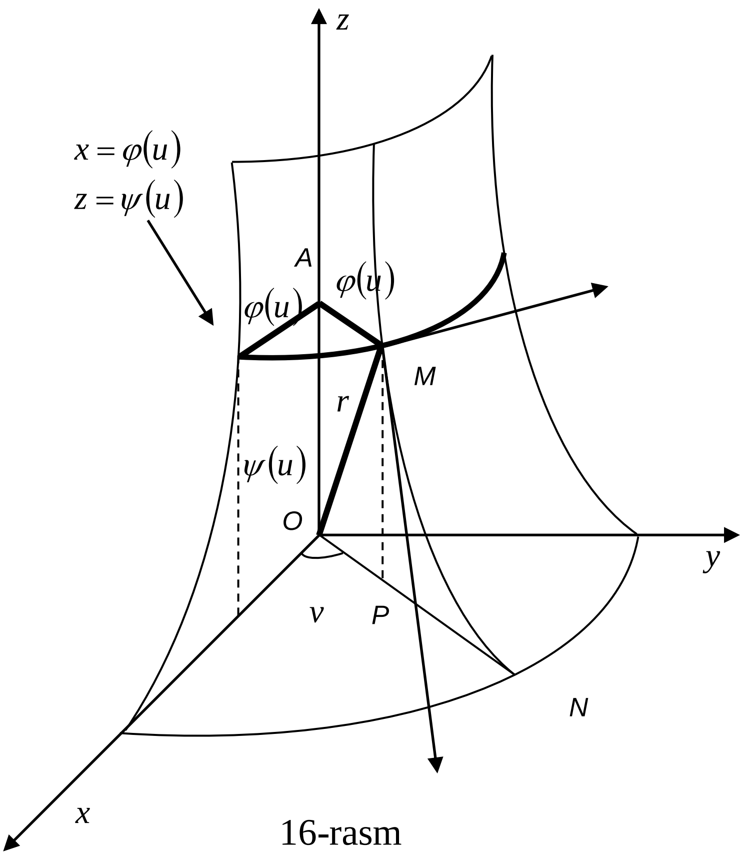
Misollar. 1. Silliq akslantirish $\pi:TM^{2n}\to M^n$ *proyeksiyalash* TM *dagi har bir* (p,u) *(bunda* $p\in M, u\in T_pM$ *) vektorga uning nuqtasini* $\pi(p,u)=p$ *mos qo‘yadi. Bu akslantirishning har bir nuqtada rangi maksimal, ya’ni* n *ga teng bo‘lgani uchun submersiya bo‘ladi.*

2. $\varphi : R^2 \to R^1$ *akslantirish quyidagi qoida bo'yicha aniqlanadi:* $\varphi(x, y) = x$, *uning rangi 1 ga teng submersiya bo'ladi. Uning* $\varphi^{-1}(c) = 0$ *qatlamlari to'g'ri chiziqlar bo'ladi.*

VI. KEYSLAR BANKI

1-masala. xOz tekisligida Oz o‘qini kesmaydigan $x=\varphi(u),\ z=\psi(u)$ chiziq berilgan. Bu chiziqni Oz o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanma sirtning tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Umumiylikka ziyon yetkazmasdan berilgan $x=\varphi(u),\ z=\psi(u)$ chiziq uchun $\varphi(u)>0$ shart o‘rinli deb faraz qilamiz. Egri chiziqli koordinatalar sifatida $\angle XOP=v$ burchakni va berilgan chiziqning u parametrini olamiz (16-rasm). Chiziq



16-rasm

ustidagi har bir $L(u)$ nuqta markazi Oz o‘qida yotgan va radiusi $x=\varphi(u)$ ga teng bo‘lgan aylanani chizadi: $MA=OP=\varphi(u)$.

Koordinat chiziqlari: $u=const-$parallellar (aylanalar), $v=const-$meridianlar bo‘ladi. Sirtning vektor tenglamasi:

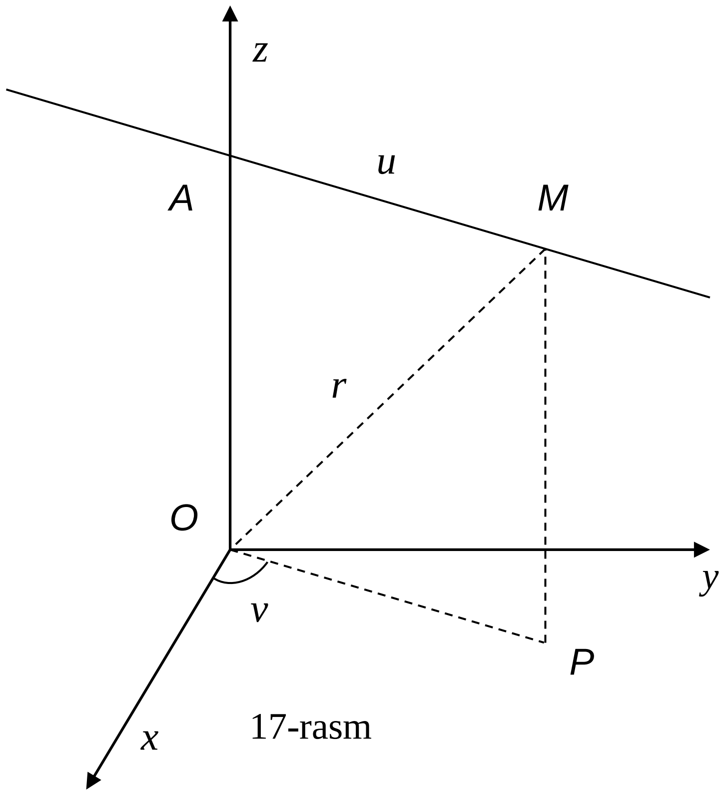
$$\vec{r}=\varphi(u)\cos v\vec{i}+\varphi(u)\sin v\vec{j}+\psi(u)\vec{k},$$

Koordinat ko‘rinishdagi tenglamalari esa:

$$x=\varphi(u)\cos v,\ y=\varphi(u)\sin v,\ z=\psi(u).$$

Berilgan chiziq bilan aylanma sirtning uchinchi koordinatasi bir xildir, chunki chiziq Oz o‘q atrofida aylanmoqda.

2-masala. Oz o‘qqa perpendikular AB to‘g‘ri chiziqning shu o‘q atrofida aylanishidan va shuningdek, aylanish burchagiga proporsional tezlik bilan Oz bo‘ylab siljishidan hosil bo‘lgan sirt to‘g‘ri gelikoid deyiladi. To‘g‘ri gelikoid tenglamasini tuzing.



17-rasm

Yechish. Koordinatalarni quyidagcha tanlaymiz (17-rasm):

$$MA = u, \ \angle XOP = v$$

Shartga ko‘ra $OA = av$, bunda $a = const$. Koordinata chiziqlari: $u = const$ -vint chiziqlar, $v = const$ – yasovchilar (harakatlanuvchi to‘g‘ri chiziqlar)dan iborat bo‘ladi.

1-masaladan foydalb gelikoidning vektor tenglamasi

$$\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k},$$

parametrik tenglamalari esa

$$x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = av$$

ko‘rinishda bo‘lishini hosil qilamiz.

2-keys

1. Quyidagi sfera markazining koordinatalari va radiusi aniqlansin.

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0,$

2) $x^2+y^2+z^2+8x=0,$

3) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0,$

4) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0.$

2. Quyidagi aylana markazining koordinatalari va radiusi aniqlansin.

$x^2 +y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0, 2x+2y+z+1=0.$

3. Quyidagi aylananing markazi aniqlansin.

$x^2+y^2+z^2=R^2$, $Ax+By+Cz+D=0$

4. $A(3;0;4)$, $B(3;5;0)$,$C(3;4;4)$,$D(5;4;6)$ nuqtalarning

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49$

sferaga nisbatan vaziyati aniqlansin.

5. Quyidagi tekistliklarning ushbu

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$

sferaga nisbatan vaziyati aniqlansin.

1) $2x+2y+z+2=0$,

2) $2x+2y+z+5=0$,

3) $2x+2y+z+11=0$.

6. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

sferaning ushbu

$x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$

to‘g‘ri chiziqqa qo‘shma bo‘lgan diametrial tekisligining tenglamasi tuzilsin.

7. Ushbu

$(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=25$

Sferaning $M(3,5,1)$nuqtada teng ikkiga bo‘linadigan vatarlarining geometrik o‘rni topilsin.

8. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

sferaning$S(x_0\ y_0\ z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi vatarlari o‘rtalarining geometrik o‘rni topilsin.

9. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

sferaning$(-R,0,0)$ nuqtadan o‘tuvchi vatarlari o‘rtalarining geometrik o‘rni topilsin.

10. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

sferaning$M_0(x_0y_0z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va tarlari o‘rtalarining geometrik o‘rni topilsin.

11. $S(x_0\ y_0\ z_0)$ nuqtadan $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferaga o‘tkazilgan urin matekislikka tushirilgan perpendikular asoslarinig geometrik o‘rni topilsin.

12. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$sferaga$M\ (7,\ -1,\ 5)$ nuqtada o‘tkazilgan urin matekislik tenglamasi tuzilsin.

13. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$sferaga$M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urin matekislik tenglamasi tuzilsin.

14. $x^2+y^2+z^2=R^2$sferaga$M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urin matekislik tenglamasi tuzilsin.

15. $x^2+y^2=9$, $z=0$ va $x^2+y^2=25$, $z=2$ aylanalardan o‘tuvchi sfera tenglamasi tuzilsin.

16. Koordinatalar boshidan va $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=49$, $2x+2y-z+4=0$ aylanadan o‘tadigan sfera tenglamasi tuzilsin.

17. $(1,\ -2,\ 0)$nuqtadan va $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=49$, $2x+2y-z+4=0$ aylanadan o‘tuvchi sfera tenglamasi tuzilsin.

3-keys

18. To‘g‘ri chiziqlarning bog‘lami S_1 va bu bog‘lamdagi to‘g‘ri chiziqlarg aperpendikular bo‘lgan tekisliklar bog‘lami S_2 berilgan. S_1 bog‘lamining to‘g‘ri chiziqlari va S_2 bog‘lamning tekisliklari kesishadi. Kesish nuqtalarining geometrik o‘rni topilsin. S_1 bog‘lam tekisliklari bilan S_2 bog‘lamning shu tekisliklarga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtalaridan hosil bo‘lgan geometrik o‘rni avvalgi geometrik o‘rning o‘zidan iboratligi isbotlansin.

19. Qandayzaruriyvayetarlishartbajarilganda$Ax+By+Cz+D=0$tekislik$x^2+y^2+z^2=R^2$sferagaurinadi? Bushartbajarilgandeburinishnuqtasiningkoordinatalaritopilsin.

20. O’qlarikoordinatao‘qlaribilanustma-usttushuvchi, OxzvaOyztekisliklarnimosravishda$y=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$, $x=0$ $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$chiziqlarbo‘ylabkesibo‘tuvchiellipsoidtenglamasituzilsin.

4-keys

21. O’qlarikoordinatao‘qlaridaniborat, $z=0$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ellipsva$M(1, 2, \sqrt{23})$ nuqtaorqalio‘tuvchiellipsoidtenglamasituzilsin.

22O’qlarikoordinatao‘qlaridaniboratbo‘lganva $x^2+y^2+z^2=9$, $z=x$ aylanadanhamda$M(3, 1,1)$nuqtadano‘tganellipsoidtenglamasituzilsin.

23. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1$ellipsoidning$M(3,2,5)$nuqtasidagiurinmatekisligitenglamasituzilsin.

24.$Ax+By+Cz+D=0$tekislikning$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidgaurinishiuchunzaruriyvayetarlisharttopilsin.

25. $Ax+By+Cz+D=0$tekislikning$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidbilankesishishiuchunqandayshartningbajarilishizarurvayetarli?

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

ellipsoidningmarkazidanuningurinmatekisligigatushurilganperpendikularlarasoslarining geometriko‘rnitopilsin.

27. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning$Ax+By+Cz+D=0$tekislikbilankesishishchizig‘iningmarkazitopilsin.

28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning$M(x_1, y_1, z_1)$nuqtadatengikkigabo‘linadiganvatarlariningeometriko‘rnitopilsin.

29. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ ellipsoidning$\boldsymbol{a}(2,1,2)$vektorgaparallel, vatarlarinitengikkigabo‘luvchidiametraltekisligininingtenglamasituzilsin.

30. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidning$P(x_0, y_0, z_0)$nuqtadano‘tuvchivatario‘rtalariningeometriko‘rnianiqlansin.

31. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidbilan$x^2+y^2+z^2=R^2$sferaurinmatekisliklariningkesishishidanhosilqilinganellipsmarkazlariningeometriko‘rnianiqlansin.

5-keys

32. O’qlarikoordinatao‘qlarigaparallel,$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidbilan$Ax+By+Cz+D=0$tekislikningkesishishchizig‘idano‘tuvchiellipsoidtenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\lambda(Ax+By+Cz+D)$ko‘rinishdabo‘lishiisbotlansin.

33. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-\lambda(Ax+By+Cz+D)=0$tenglamabilananiqlanganellipsoidlarmarkazlariningeometriko‘rnitopilsin (λ – ixtiyoriyqiymatlarniqabo‘lqiladi).

34. Ikkita$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>b)$ellipsoidqandaychiziqbo‘ylabkesishadi?

35. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a>b>c)$

ellipsoidniaylanalarbo‘yichakesibo‘tadiganhammatekisliklartenglamasituzilsin.

36. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidningmarkazidanbarchanuqtalaridaungao‘tkazilganurinmatekisliklargachabo‘lganmasofalar*d*gatengbo‘ladigannuqtalarninggeometriko‘rnitopilsin.

37. 36-masalani $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ ellipsoiduchuneching.

38. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *(a>b>c)*ellipsoiddoiraviykesimlarimarkazlaridantuzilgannuqtalarninggeometriko‘rnitopilsin.

GLOSSARIY

Termin	O’zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
analitik geometriya	ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlarni o‘rganuvchi fan	the subject which studies second order lines and second order surfaces
ikkinchi tartibli chiziqning markazi	ikkinchi tartibli chiziqning simmetriya markazi	symmetry center of the second order line
ikkinchi tartibli chiziqning diametri	parallel vatarlar o‘rtalaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq	The line which through centers of parallel hords
konus kesimlar	konusni tekislik bilan kesish natijasida hosil bo‘lgan ikkinchi tartibli chiziqlar	Second order lines which are intersection of the cone and plane
differensial geometriya	differensiallanuvchi funksiyalar yordamida parametrlangan chiziqlar va sirtlarni o‘rganuvchi fandir	the subject which studies curves and surfaces, parametrized by differentsiable functions
elementar egri chiziq	ochiq intervalning topologik (gomeomorf) akslantirishdagi obrazi	The image of open segment under topological (gomeomorf) mapping
sodda egri chiziq	o‘ziga tegishli har qanday nuqtaning birorta atrofida elementar egri chiziq bo‘ladigan bog‘lanishli to‘plam	Connected set which is a elementary curve in some neighborhood of any point
Topologiya	geometrk ob’ektlarning topologik xossalarini o‘rganuvchi fandir	the subject which studies topological properties of geometric objects
Geodezik chiziq	sirtlarda yevklid geometriyasidagi to‘g‘ri chiziqlarning analogidir	It is analog of strigth line of Euclidean geometry
Topologik xossalar	geometrik figuralarning gomeomorf akslantirishda caqlanuvchi xossalaridir	Properties of geometric figures which is preserved under homeomorf mappings
sirtning qalbi (soul)	sirtning absolyut qavariq kompakt qism to‘plamidir	absolute convex compact subset of a surface

sirtning yo‘nalish bo‘yicha normal egriligi	berilgan yo‘nalishga parallel va sirtni tik kesuvchi tekislik bilan kesish yordamida hosil bo‘lgan chiziqning egriligi	The curvature of a curve which is normal section
puankare gipotezasi	kompakt chegarasiz bir bog‘lanishli uch o‘lchamli sirt uch o‘lchamli sferaga gomeomorfdir	simply connected compact three-dimensional manifold without boundary is homeomorphic to the three-dimensional sphere
G.Ya.Perelman	Puankare gipotezasini hal qilgan Sankt-Peterburglik matematik	Mathematician from Saint Petersburg who solved Puankare hypothesis
Gromol-Chiger gipotezasi	har qanday nomanfiy egrilikli to‘liq nokompakt sirt o‘z qalbining normal qatlamasiga diffeomorfdir	complete non-compact surface of negative curvature is diffeomorphic to the normal bundle of its soul

ADABIYOTLAR RO'YXATI

I. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O’zbekiston”, 2019. – 592 b.
2. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O’zbekiston”, 2019. – 400 b.
3. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O’zbekiston”, 2018. – 592 b.
4. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob halqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O’zbekiston”. 2017. – 488 b.
5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz – T.: “O’zbekiston”. 2017. – 592 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O’zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O’zbekiston, 2018.
7. O’zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.
8. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
9. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O’zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.
10. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.
11. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021 yillarda O’zbekiston Respublikasini innovatsion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
12. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O’zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
13. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillarda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O’zbekiston Milliy universitetida talab yuqori bo‘lgan malakali kadrlar tayyorlash tizimini tubdan takomillashtirish va ilmiy salohiyatini rivojlantiri chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4358-sonli Qarori.
14. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.

15. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr “O’zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi
PF-5847-sonli Farmoni.

III. Maxsus adabiyotlar

16. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

17. Bauer, H. Measure and Integration Theory, Berlin: de Gruyter,ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

18. Bear, H.S. A Primer of Lebesgue Integration, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.

19. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry//Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464

20. Bogachev, V. I. Measure theory, Berlin: Springer, 2006.

21. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.

22. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010. 204.

23. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts//2013, ISBN-13: 978-0313319983

24. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

25. H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

26. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

27. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

28. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

29. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

30. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

31. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.

32. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

33. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.

34. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

35. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.

36. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

37. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

38. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdaniye: 1-e izd. 421 s.

39. Aleksandrov A.D., Netsvetayev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.

40. Belogurov A.Yu. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obщestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.

41. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An’anaviy va noan’anaviy ta’lim. – Samarqand: “Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi” nashriyoti, 2019. 312 b.

42. Ibraymov A.Ye. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. metodik qo‘llanma/ tuzuvchi. A.Ye.Ibraymov. – Toshkent: “Lesson press”, 2020. 112 bet.

43. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O’quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.

44. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BXV-Peterburg, 2012. — 432 s.

45. Muslimov N.Ava boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O’quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.

46. Obrazovaniye v tsifrovuyu epoxu: monografiya / N. Yu. Ignatova; M-vo obrazovaniya i nauki RF; FGAOU VO «UrFU im. pervogo Prezidenta Rossii B.N.Yelsina», Nijnetagil. texnol. in-t (fil.). – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

47. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

48. Sovremennыe obrazovatelnыe texnologii: pedagogika i psixologiya: monografiya. Kniga 16 / O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Yu. Bulgakova i dr. –

Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

49. Usmonov B.Sh., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish.–T.: “TKTI” nashriyoti, 2019.

IV. Internet saytlar

50. O’zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi: www.edu.uz.

51. Bosh ilmiy-metodik markaz: www.bimm.uz

52. www. Ziyonet. Uz

53. Otkrытoye obrazovaniye. https://openedu.ru/

54. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma

55. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/

56. https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search

57. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html

58. https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics.

Samarqand davlat universiteti huzuridagi pedagogik kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish mintaqaviy markazida 2022 yil may oyida o‘tkaziladigan Matematika yo‘nalishi o‘quv-uslubiy majmualari bo‘yicha

EKSPERT XULOSASI

Samarqand davlat universiteti huzuridagi pedagogik kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish mintaqaviy markazida 2022 yil may oyida oliy ta’lim muassasalari professor-o‘qituvchilarining “Matematika” yo‘nalishi qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi mutaxassislik fanlaridan tuzilgan o‘quv-uslubiy majmualar va chiqish testi savollari maxsus fanlar blokidagi modullarning o‘quv dasturiga mos va uni to‘liq qamrab olgan holda tuzilgan. Test savolari 4 ta muqobil javobda tuzilib, 1 ta to‘g‘ri javobni o‘z ichiga oladi. O‘quv-uslubiy majmua va test savollari qo‘yilgan talablarga javob beradi.

Ekspertlar

Abdullayev Joniqul	SamDU, Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kafedrasi professori, f-m.f.d.	
Ro`zimurodov Xaydar	SamDU, Algebra va geometriya kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.	
Yusupov Ozod	SamDU Dasturiy injiniring kafedrasi mudiri, t.f.f.d	
Meliyev Baxtiyor	SamDU mintaqaviy markaz bo’lim boshlig’i, g.f.f.d.	

Mintaqaviy markaz direktori,
geografiya fanlari doktori, professor: **S.B.Abbasov**

ЭКСПЕРТНОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Об учебно-методических комплексах по направлению «Математика», которые пройдут в мае 2022 года в Региональном центре переподготовки и повышения квалификации педагогических кадров при Самаркандском государственном университете

В апреле 2022 года Региональный центр переподготовки и повышения квалификации педагогических кадров при Самаркандском государственном университете проведет курс переподготовки и повышения квалификации преподавателей высших учебных заведений по направлению «Математика». Учебно-методические комплексы соответствуют учебному плану модулей специального научного блока и полностью охватывает его. Учебно-методические комплексы соответствуют современным требованиям.

Зарубежный эксперт: Профессор Малайзийского технологического университета д.ф-м.н. М.Э.Мўминов