BOSH ILMIY-METODIK MARKAZ
SAMDU HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

O’LChOV NAZARIYASI VA UNING QO’LLANISHI MODULI BO’YIChA O’QUV-USLUBIY MAJMUA

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISH BOSH ILMIY-METODIK MARKAZI

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“ O’LChOV NAZARIYASI VA UNING QO’LLANISHI”

MODULI BO’YIChA

O’QUV-USLUBIY MAJMUA

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi yo‘nalishi: Matematika

Samarqand -2023

Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil “7”-dekabrdagi 648-sonli bayonnomasi bilan ma’qullangan o‘quv dasturi va o‘quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan.

Tuzuvchilar:
Samarqand davlat universiteti Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kafedrasi professori J.Abdullayev

Taqrizchilar:
Samarqand davlat universiteti Matematik fizika va funksional analiz kafedrasi mudiri, akademik S.Laqayev

O’quv-uslubiy majmua Samarqand davlat universiteti ilmiy-metodik kengashi (2020 yil “28”-dekabrdagi 4- sonli bayonnomasi).

MUNDARIJA

I. MODULNING ISHCHI DASTURI

Kirish

Oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash bugungi kunning eng dolzarb masalalaridan biri bo‘lib kelmoqda. Mamlakatimiz ta’lim tizimida bosqichma-bosqich amalga oshirilayotgan islohotlar bu masalaga yanada mas’uliyat bilan yondoshishni talab qilmoqda.

Mazkur dastur zamonaviy talablar va rivojlangan xorijiy davlatlarning oliy ta’lim sohasida erishgan yutuqlar hamda orttirilgan tajribalar asosida «Matematika» qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishi uchun tayyorlangan namunaviy o‘quv reja hamda dastur mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarining mazmunini takomillashtirish hamda oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasbiy kompetentligini muntazam oshirib borishda xizmat qiladi.

Jamiyat taraqqiyoti nafaqat mamlakat iqtisodiy salohiyatining yuksakligi bilan, balki bu salohiyat har bir insonning kamol topishi va uyg‘un rivojlanishiga qanchalik yo‘naltirilganligi, innovatsiyalarni tadbiq etilganligi bilan ham o‘lchanadi. Demak, ta’lim tizimi samaradorligini oshirish, pedagoglarni zamonaviy bilim hamda amaliy ko‘nikma va malakalar bilan qurollantirish, chet el ilg‘or tajribalarini o‘rganish va ta’lim amaliyotiga tadbiq etish bugungi kunning dolzarb vazifasidir. «Matematika fanlarini o‘qitishning zamonaviy usullari» moduli aynan mana shu yo‘nalishdagi masalalarni hal etishga qaratilgan.

Masalalarni yechishda matematik usullarni amaliyotda qo‘llash hozirgi paytda keng tarqalgan kompyuterli matematik tizimlar (MathCad, Maple, MatLab, Matematica, Derive) ning funksional imkoniyatlariga tayanadi. Ko‘p funksionalli matematik dasturiy ta’minotlardan foydalanish matematik ta’limotning amaliy aspektlarini joriy etishni kuchaytirib qolmasdan, balki mutaxassislarning kasbiy tayyorgarligini ko‘taradi. Mutaxassisning matematik kompetentlik nuqtai-nazaridan matematik masalalarni yechishda turli usullarni qo‘llash (aniq va taqribiy yechish usullari, natijalarni simvolli (analitik), sonli hamda grafik ko‘rinishda olish) va yechimni turli shaklda olish har xil turdagi instrumentlarning unikal variativ imkoniyatlarini tushinishga imkoniyat beradi. Bularning barchasi, ya’ni kasbiy ta’lim maqsadi uchun masala mohiyatini tushunish uslubiy muammo dolzarbligini oshiradi.

Modulning maqsadi va vazifalari

Oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish Modulining **maqsadi** pedagog kadrlarni innovatsion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o‘zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat.

Modulning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

- “Matematika” yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

-pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

-mutaxassislik fanlarini o‘qitish jarayoniga zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali tatbiq etilishini ta’minlash;

- mutaxassislik fanlari sohasidagi o‘qitishning innovatsion texnologiyalari va ilg‘or xorijiy tajribalarini o‘zlashtirish;

“Matematika” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta’minlash.

Modul yakunida tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar:

“Kredit modul tizimi va o‘quv jarayonini tashkil etish”, “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish”, “Pedagogning kasbiy professionalligini oshirish”, “Ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish”, “Maxsus maqsadlarga yo‘naltirilgan ingliz tili” modullari bo‘yicha tinglovchilarning bilim, ko‘nikma va malakalariga qo‘yiladigan talablar tegishli ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligi hamda kompetentligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari bilan belgilanadi.

Mutaxassislik fanlari bo‘yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo‘lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- integral va o‘lchov tushunchalarini;
- geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanishni;
- matematik masalalarni matematik tizimlarda yechishni va standart funksiyalardan foydalanishni;
- matematikani o‘qitishda uning tatbiqlari bilan tushuntirishni, hayotiy va sohaga oid misollarni;
- matematik fanlarni o‘qitishning zamonaviy usullarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- o‘lchovlar nazariyasidan matematika, fizika va biologiya masalalarida keng foydalanish;
- matematik analizning biomatematika, mexanika, ommaviy xizmat nazariyasi, iqtisodiy sohalar va boshqa sohalarda keng qo‘llash;
- matematik fanlarni o‘qitishda innovatsion ta’lim metodlari va vositalarini amaliyotda qo‘llash;
- talabaning o‘zlashtirish darajasini nazorat qilish va baholashning nazariy asoslari hamda innovatsion yondashuv uslublarini to‘g‘ri qo‘llay olish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- o‘lchovlar nazariyasi va uning tatbiqini turli fazolarda qo‘llay olish;
- geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanish;
- matematikani o‘qitish innovatsion jarayonini loyihalashtirish va tashkillashtirishning zamonaviy usullarini qo‘llash ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Tinglovchi:

- matematikani o‘qitishda foydalaniladigan zamonaviy (matlab, mathcad, maple, GeoGebra va boshqalar) matematik paketlarini o‘quv jarayoniga tatbiq etish;

- matematikaning xorij va respublika miqyosidagi dolzarb muammolari, yechimlari, tendensiyalari asosida o‘quv jarayonini tashkil etish;
- matematikani turli sohalarga tatbiq etish;
- oliy ta’lim tizimida matematik fanlar mazmunining uzviyligi va uzluksizligini tahlil qila olish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ilg‘or xorijiy mamlakatlarda biologiya o‘qitishni tashkil qilishning xorijiy tajribalarni o‘rganish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar. So‘nggi yillarda Milliy g‘oya, ma’naviyat asoslari, dinshunoslik sohasidagi yutuqlar va istiqbollar oliy o‘quv yurtlaridagi ta’lim jarayonining mazmunini boyitishga xizmat qiladi.

“O’lchov nazariyasi va uning qo‘llanilishi” modulining soatlar bo‘yicha taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o‘quv yuklamasi, soat				
		Hammasi	Auditoriya o‘quv yuklamasi			Ko‘chma mashg‘ulot
			Jami	jumladan		
				Nazariy	Amaliy mashg‘ulot	
1.	O’lchov tushunchasi va xossalari. σ – additivlik.	4	4	2	2	
2.	Lebeg o‘lchovlari.	4	4	2	2	
3.	O’lchovli funksiyalar.	4	4	2	2	
4.	Invariant o‘lchovlar. Ergodik teoremalar.	4	4	2	2	
5	Gibbs o‘lchovlari (fizikada qo‘llanishi). Biologik dinamik sistemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.	2	2		2	
6.	Noarximed fazolarda o‘lchovlar va ularning tatbiqlari.	2	2		2	
Jami:		**20**	**20**	**8**	**12**	**0**

NAZARIY MAShG’ULOT MATYeRIALLARI

1-Mavzu: O’lchov tushunchasi va xossalari. σ – additivlik.

O’lchov tushunchasining paydo bo‘lishi. O’lchovning ko‘p xossalik xususiyatlari. σ – additivlikning mazmuni va mohiyati.

2-Mavzu: Lebeg o‘lchovlari.

Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar sinfi. O’lchovsiz to‘plamlar. Ularning xossalari.

3-Mavzu: O’lchovli funksiyalar.

Turli fazolar va ular ustidagi o‘lchovlarga misollar. Integrallar. Ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi.

4-Mavzu: Invariant o‘lchovlar. Ergodik teoremalar.

Gibbs o‘lchovlari (fizikada qo‘llanishi). Biologik dinamik sistemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi. Noarximed fazolarda o‘lchovlar va ularning tatbiqlari.

AMALIY MAShG’ULOTLAR

1-Amaliy mashg‘ulot. O’lchov tushunchasi va xossalari. σ – additivlik.

2-Amaliy mashg‘ulot. Lebeg o‘lchovlari.

3-Amaliy mashg‘ulot. O’lchovli funksiyalar.

4-Amaliy mashg‘ulot. Invariant o‘lchovlar. Ergodik teoremalar.

5-Amaliy mashg‘ulot. Gibbs o‘lchovlari (fizikada qo‘llanishi). Biologik dinamik sistemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.

6-Amaliy mashg‘ulot. Noarximed fazolarda o‘lchovlar va ularning tatbiqlari.

II. INTREFAOL TA’LIM METODLARI

“SWOT-tahlil” metodidan foydalanish

Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength)	• кучли томонлари
W – (weakness)	• заиф, кучсиз томонлари
O – (opportunity)	• имкониятлари
T – (threat)	• тўсиқлар

Namuna: Ana’naviy va zamonaviy ta’lim shakllarini “SWOT-tahlil” metodida tahlil qiling.

	Oddiy ma’ruzada ma’ruzachi talabalar, tinglovchilarga ko‘p ma’lumot bera oladi	Muammoli ma’ruzada kamroq ma’lumot beriladi, biroq ular talabalar ongiga singdirib beriladi
	O’qituvchi asosan o‘zi va a’lochi, qiziquvchi talabalar bilan gaplashadi, ya’ni darsda oz sonli talabalar qamrab olinadi	Muammoli ma’ruzada ko‘p sonli talabalar, tinglovchilar qamrab olinadi
	Oddiy ma’ruzada faqat o‘qituvchi reja asosida va tayyorlab kelgan ma’lumotlari atrofida gaplashiladi	Muammoli ma’ruzada muhokama jarayonida yangi-yangi masalalar, muammolar yuzaga chiqishi, g‘oyalar tuhilishi mumkin.
	O’qituvchi uchun asosiy to‘siq – dasturdan chiqib keta olmaslik, talaba uchun qiziqmasa ham o‘qituvchini eshitib o‘tirish majburiyati	Keng muhokama uchun vaqtning chegaralanganligi, talabalarni mavzudan chetga burishga intilishlari

Rezyume, Veyer metodidan foydalanish

Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Xulosalash” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida foydalanish mumkin.

Методни амалга ошириш тартиби:

тренер-ўқитувчи иштирокчиларни 5-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратади;

тренинг мақсади, шартлари ва тартиби билан иштирокчиларни таништиргач, ҳар бир гуруҳга умумий муаммони таҳлил қилиниши зарур бўлган қисмлари туширилган тарқатма

ҳар бир гурух ўзига берилган муаммони атрофлича таҳлил қилиб, ўз мулоҳазаларини тавсия этилаётган схема бўйича тарқатмага ёзма баён қилади;

навбатдаги босқичда барча гуруҳлар ўз тақдимотларини ўтказадилар. Шундан сўнг, тренер томонидан таҳлиллар умумлаштирилади, зарурий ахборотлр билан тўлдирилади ва

Namuna:

Matematikadan malaka talablari					
Sobiq standartlar		**Amaldagi standartlar**		**Takomillashtirilgan standartlar**	
afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi
Xulosa:					

“FSMU” metodidan foydalanish

Texnologiyaning maqsadi: Mazkur texnologiya ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, taqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o‘zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur texnologiyadan ma’ruza mashg‘ulotlarida, mustahkamlashda, o‘tilgan mavzuni so‘rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg‘ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Texnologiyani amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo‘lgan yakuniy xulosa yoki g‘oya taklif etiladi;
- har bir ishtirokchiga FSMU texnologiyasining bosqichlari yozilgan qog‘ozlarni tarqatiladi:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизни баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

-

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o‘zlashtirilishiga asos bo‘ladi.

Namuna.

Fikr: “Matematikadan malaka talablarini xalqaro andozalar asosida takomillashtirish va sertifikatlashtirish ta’lim samaradorligining eng muhim omillaridan biridir”.

Topshiriq: Mazkur fikrga nisbatan munosabatingizni FSMU orqali tahlil qiling.

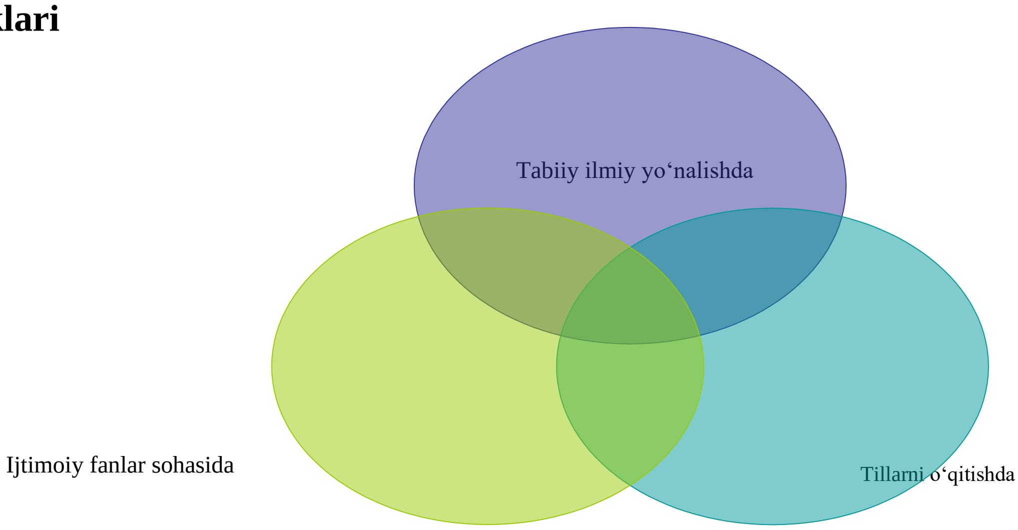
Venn Diagrammasi metodidan foydalanish

Metodning maqsadi: Bu metod grafik tasvir orqali o‘qitishni tashkil etish shakli bo‘lib, u ikkita o‘zaro kesishgan aylana tasviri orqali ifodalanadi. Mazkur metod turli tushunchalar, asoslar, tasavurlarning analiz va sintezini ikki aspekt orqali ko‘rib chiqish, ularning umumiy va farqlovchi jihatlarini aniqlash, taqqoslash imkonini beradi.

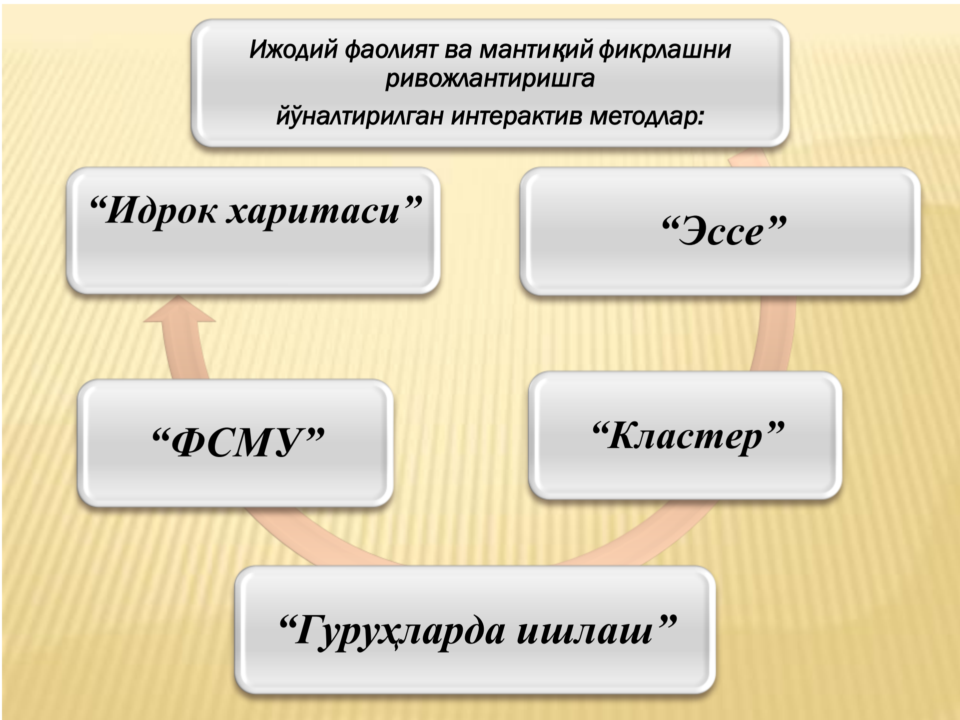
Metodni amalga oshirish tartibi:

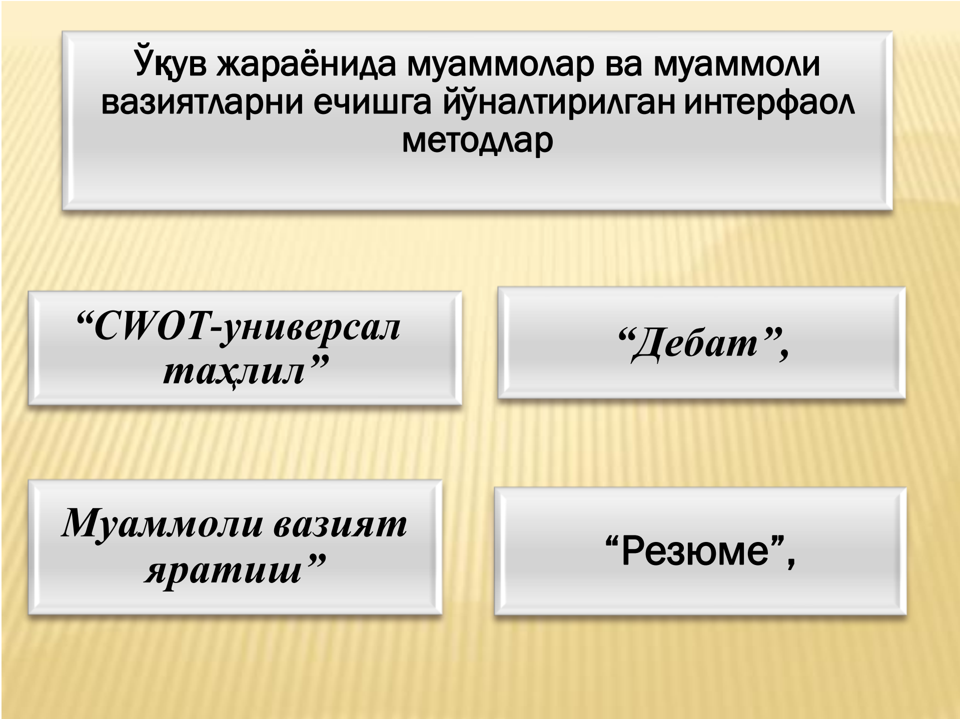
- ishtirokchilar ikki kishidan iborat juftliklarga birlashtiriladilar va ularga ko‘rib chiqilayotgan tushuncha yoki asosning o‘ziga xos, farqli jihatlarini (yoki aksi) doiralar ichiga yozib chiqish taklif etiladi;
- navbatdagi bosqichda ishtirokchilar to‘rt kishidan iborat kichik guruhlarga birlashtiriladi va har bir juftlik o‘z tahlili bilan guruh a’zolarini tanishtiradilar;
- juftliklarning tahlili eshitilgach, ular birgalashib, ko‘rib chiqilayotgan muammo yohud tushunchalarning umumiy jihatlarini (yoki farqli) izlab topadilar, umumlashtiradilar va doirachalarning kesishgan qismiga yozadilar.

Namuna: Matematikani turli yo‘nalishlarda o‘qitishning farqli jihatlari o‘ziga xosliklari




“Зинама-
зина”,
Матн билан
ишлашга
йўналтирилган
интерфаол
метод ва
усуллар
“Бумеранг”
“Инсерт”
“Кейс-
стади”


Ижодий фаолият ва мантиқий фикрлашни
ривожлантиришга
йўналтирилган интерактив методлар:
“Идрок харитаси”
“Эссе”
“ФСМУ”
“Кластер”
“Гуруҳларда ишлаш”


Ўқув жараёнида муаммолар ва муаммоли вазиятларни ечишга йўналтирилган интерфаол методлар
“CWOT-универсал таҳлил”
“Дебат”,
Муаммоли вазият яратиш”
“Резюме”,


“Т-чизмаси”,
“Венн диаграммаси”,
“Органайзер”,
Ҳар хил чизмалар, жадваллар ёрдамида амалга ошириладиган интерфаол методлар:

III. NAZARIY MATERIALLAR

1-Mavzu: O'lchov tushunchasi va xossalari. σ – additivlik.

1. O'lchov tushunchasining paydo bo'lishi.
2. O'lchovning ko'p xossalik xususiyatlari.
3. σ – additivlikning mazmuni va mohiyati.

To'plamlar halqasi. Elementlari to'plamlardan iborat bo'lgan to'plamga to'plamlar sistemasi deyiladi. Bundan buyon, agar oldindan taHkidlanmasa, to'plamlar sistemasi sifatida oldindan tayinlangan X to'plamning qism to'plamlaridan tuzilgan sistemalarni qaraymiz. To'plamlar sistemasini odatda *F, G, R,* $\mathfrak{R}$ va x.q. kabi gotik harflar bilan belgilaymiz.

Agar *F* to'plamlar sistemasidan olingan ixtiyoriy $A \in F$, $B \in F$ elementlar ustida biror ρ algebraik amal aniqlangan bo'lib, bu amal natijasida hosil bo'lgan element yana shu F sistemaga tegishli bo'lsa, uchun holda F sistemani ρ amalga nisbatan yopiq sistema deyiladi.

To'plamlar sistemasida ρ algebraik amallar: $\cup$-to'plamlar birlashmasi; $\cap$-to'plamlar kesishmasi; \ -to'plamlar ayirmasi; Δ -to'plamlarning simmetrik ayirmasi bo'lishi mumkin.

TA'RIF: Agar F to'plamlar sistemasi $\cap$va Δ amallariga nisbatan yopiq bo'lsa, yaoni $\forall A, B \in F$ lar uchun

$A \cap B \in F$ va $A \Delta B \in F$

o'rinli bo'lsa, uchun holda F sistemani to'plamlar halqasi deyiladi.

$\cap$, Δ amallari orqali A va V to'plamlarning yiindisi

$$A \cup B(A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

A va V to'plamlarning ayirmasi esa

$$A \backslash B = A \Delta (A \cap B)$$

tengliklar orqali ifodalangani tufayli F to'plamlar halqasi $\cup$ va \ amallarga nisbatan ham yopiq ekanligi kelib chiqadi.

Bundan tashqari to'plamlar halqasi

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k , \qquad D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

ko'rinishdagi chekli sondagi to'plamlar birlashmasi va chekli sondagi to'plamlar kesishmasiga nisbatan ham yopiq ekanligi o'z-o'zidan ravshan.

F halqa \ amalga nisbatan yopiq ekanligidan hamda $\forall A \in F$ uchun $A \backslash A = \varnothing \in F$ bo'lgani uchun har qanday to'plamlar halqasi bo'sh to'plam $\varnothing$ ni o'z ichiga qabul qilishi kelib chiqadi.

TA'RIF Ye to'plam F to'plamlar sistemasining birlik elementi deyiladi, agar bu to'plam F sistemaga tegishli bo'lib, $\forall A \in F$ lar uchun $A \cap E = A$ tenglik o'rinli bo'lsa.

Birlik elementga ega bo'lgan to'plamlar halqasi to'plamlar algebrasi deb ataladi.

MISOLLAR 1. ixtiyoriy A to'plam uchun $\mathfrak{R}$(A) orqali A ning barcha qism ostilari sistemasini belgilaymiz. $\mathfrak{R}$(A) sistema Ye=A birlik elementga ega bo'lgan to'plamlar algebrasini hosil qiladi.

2. Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan A to'plam uchun {A,$\varnothing$} sistema algebra hosil qiladi. Bunda

birlik element Ye=A bo‘ladi.
3. Ixtiyoriy A to‘plamning barcha chekli qism ostilari sistemasi to‘plamlar halqasini hosil qiladi. Agar A to‘plamning o‘zi ham chekli to‘plam bo‘lsa, u holda hosil qilingan to‘plamlar sistemasi algebra ham bo‘la oladi.
4. Haqiqiy sonlar o‘qidagi barcha chegaralangan to‘plamlar sistemasi halqa hosil qiladi, lekin bu sistema algebra bo‘la olmaydi.

TYeORYeMA 1.Istalgan sondagi $F_\alpha, \alpha \in I,$ Halkalarning kesishmasi

$$F = \bigcap_\alpha F_\alpha$$

yana halqa hosil qiladi.

TAORIF berilgan $F_\alpha, \alpha \in I,$ halqalar sistemasida biror $\alpha_0 \in I$ uchun F_{α_0} halka F_α, $\alpha \neq \alpha_0$ halqalarning barchasiga qism bo‘lib $(F_{\alpha_0} \subset F_\alpha, \alpha \neq \alpha_0, \alpha \in I), F_{\alpha_0}$ ni o‘z ichiga oladigan boshqa halqa mavjud bo‘lmasa, u holda F_{α_0} ni F_α halqalar sistemasidagi minimal halqa deb ataladi.

Quyidagicha savol tuilishi mumkin: ixtiyoriy G sistemani o‘z ichiga oluvchi halqalar ichida minimal halqa mavjudmi? yoki G sistema qanday bo‘lganda bu sistemani o‘z ichiga oluvchi minimal halqa mavjud bo‘ladi?

Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

T Ye O R Ye M A 2: Har qanday G to‘plamlar sistemasi uchun, shu sistemani o‘z ichiga oluvchi yagona minimal halqa mavjud.

ISBOT X deb quyidagi to‘plamni qaraymiz: $X = \bigcup_{A \in G} A.$ $\mathfrak{R}$ (X) orqali X ning barcha qism to‘plamlari sistemasini belgilaymiz. Maolumki, $G \subset \mathfrak{R}$ (X) xamda $\mathfrak{R}$ (X) - halqani hosil qiladi.

R_α orqali G sistemani o‘z ichiga olgan, o‘zlari esa $\mathfrak{R}$ (X) halqada yotgan halqalar sistemasini belgilaymiz:

$$\{ R_\alpha : G \subset R_\alpha \subset \mathfrak{R}(X) \}$$

MaHlumki $R^* = \bigcap_\alpha R_\alpha$ halqani tashkil etadi, hamda $G \subset R^* \subset \mathfrak{R}$ (X) o‘rinlidir. Shu R* biz izlagan yagona minimal halqa bo‘ladi, Haqiqatan ham $R_0 \subset G$ iHtiyoriy halqa bo‘lsin. U holda $R_0' = R_0 \cap \mathfrak{R}(X)$ sistema ham halqa bo‘ladi, yaHni $R_0' \in R_\alpha$

Demak: $R^* \subset R_0' \subset R_0$

Demak R* halqa G sistemani o‘z ichiga oluvchi ixtiyoriy halqaga qism bo‘lar ekan. Bundan R* ning minimal halqa ekanligi kelib chiqadi.

Bunday hosil qilingan R* minimal halqa G ustidagi minimal halqa yoki G orqali hosil qilingan halqa deb ataladi va R(G) orqali belgilanadi.

To‘plamlar yarim halqasi. Abstrakt o‘lchovlar nazariyasida halqa tushunchasi bilan bir qatorda undan umumiyroq, ayni vaqtda zarur tushunchalardan biri bo‘lgan yarim halqa tushunchasini kiritamiz.

TA’RIF: G to‘plamlar sistemasi yarim halqa deyiladi, 1) agar bu sistema ∅- bo‘sh to‘plamni o‘z ichiga qabul kilsa; 2) agar bu sistema to‘plamlar kesishmasiga nisbatan yopiq bo‘lsa; 3) $\forall A \in G$ hamda $A_1 \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $A_1 \in G$ uchun, shunday o‘zaro kesishmaydigan $A_2, A_3, \ldots, A_n \in G$, to‘plamlar topilib $(A_i \in G,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i,j=\overline{1,n}\quad i \neq j)$ A to‘plam

$$A = \bigcup_{i=1}^{ò} A_i$$

ko‘rinishda ifodalansa.

Har qanday to‘plamlar halqasi yarim halqa bo‘la oladi. Haqiqatan ham G = halqa bo‘lsa u holda A va $A_1 \subset A \in G$ bo‘lgani uchun $A_0 = A \setminus A_1 \in G$ bo‘ladi, hamda $A = A_0 \cup A_1$ (bunda $A_0 \cap A_1 = \varnothing$) o‘rinlidir.

Lekin har qanday yarim halqa halqa bo‘la olmaydi. Masalan, G Haqiqiy sonlar o‘qidagi barcha $[a,b)$ ko‘rinishdagi yarim ochiq intervallar sistemasi bo‘lsin. Tekshirish mumkinki G yarim halqani tashkil qiladi, yaoni $a_1 \leq a_2 \leq b_1 \leq b_2$ lar uchun $[a_1;b_1) \wedge [a_2,b_2) = [a_2, b_1)$bo‘ladi. $\varnothing = [a;a)$xamda$a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < b$ uchun $[a:b) = [a;a_1) \cup [a_1;a_2) \cup [a_2;a_3) \cup \ldots \cup [a_n;b)$ o‘rinlidir. Lekin G halqa bo‘la olmaydi, chunki $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ uchun

$$[a_1;b_1)\ \Delta [a_2;b_2) \notin G$$

<u>Yarim halqa orqali hosil qilingan halqa.</u> Faraz qilaylik R(G) biror G sistemani o‘z ichiga olgan minimal halqa bo‘lsin. R(G) halqa har bir elementi ko‘rinishini aniqlash muHim masala bo‘lib hisoblanadi. Agar G ixtiyoriy sistema bo‘lsa R(G) halqa elementi ko‘rinishini aytish murakkabdir, mabodo G sistema yarim halqa bo‘lsa, u holda R(G) halqa elementi ko‘rinishini aytish mumkin.

Aniqroi quyidagi teorema o‘rinlidir.

<u>TYeORYeMA 3</u>. G yarim halqa bo‘lib, R(G) uni o‘z ichiga olgan minimal halqa bo‘lsin. U holda har bir $A \in R(G)$ uchun shunday $A_1, A_2, \ldots, A_k$,G halqadan olingan o‘zaro kesishmaydigan elementlar topiladiki $(A_i \in G,\ \ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j = \overline{1,k})$quyidagi yoyilma o‘rinlidir:

$$A = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k \in G}}^{n} A_k$$

<u>σ- algebralar.</u> Matematikaning ko‘p masalalarida, xususan, abstrakt o‘lchovlar nazariyasida chekli sondagi to‘plamlarning birlashmasi yoki kesishmasidan tashqari sanoqli sondagi to‘plamlarning birlashmasi yoki kesishmasini ham qarashga to‘ri keladi. Shuning uchun to‘plamlar halqasidan boshqa bo‘lgan quyidagi tushunchani ham kiritamiz.

<u>TA’RIF.</u> F to‘plamlar halqasi <u>σ- halqa</u> sigma halqa deb ataladi, agar F ga tegishli bo‘lgan har qanday $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ sanoqli to‘plamlar bilan birga ularning $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ yiindisi ham F ga tegishli bo‘lsa.

<u>TA’RIF:</u> F to‘plamlar halqasi <u>δ-halqa</u> delta halqa deb ataladi, agar F ga tegishli bo‘lgan har qanday $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$sanoqli to‘plamlar bilan birga ularning $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kesishmasi ham F ga tegishli bo‘lsa.

Agar F σ-halqa (δ-halqa) Ye birlik elementga ega bo‘lsa, u xolda F σ-algebra (δ-algebra) deb ataladi.

Har qanday σ-algebra bir vaqtning o‘zida δ-algebra hamdir va aksincha xar qanday δ -algebra bir vaqtning o‘zida σ-algebra hamdir.

<u>MISOL:</u> Ixtiyoriy A to‘plamning barcha qism ostilari sistemasi σ-algebra hosil qiladi.

Agar G qandaydir sistema bo‘lsa, u holda bu sistemani o‘z ichiga olgan Hech bo‘lmaganda bitta σ-algebra mavjuddir. Haqiqatan ham $X = \bigcup_{A\in G} A$ desak, u holda $\Re$(X)=$\Im$ X ning barcha qism ostilaridan tuzilgan sistema σ-algebra tashqil qiladi. Ravshanki G⊂$\Im$. Agar G ni o‘z ichiga oluvchi $\Im$σ-algebraning Ye birlik elementi $E = \bigcup_{A\in G} G$ bo‘lsa $\Im$ ni G ga nisbatan <u>keltirilmaydiganσ-algebra</u> deb ataladi.

G sistemani o‘z ichiga olgan keltirilmaydigan minimal σ-algebra har doim mavjud.

Haqiqiy sonlar o‘qidagi barcha *[a;b]* ko‘rinishdagi to‘plamlar sistemasini o‘z ichiga oluvchi keltirilmaydigan minimal σ-algebra elementlarini <u>borelp to‘plamlar</u> yoki <u>$\Im$-to‘plamlar</u> deb ataladi.

<u>To‘plamlar sistemasi va akslantirishlar.</u> O’lchovli funksiyalar tushunchasini o‘rganish uchun zarur bo‘lgan quyidagi muhim xossalarni keltiramiz.

M to‘plamda aniqlanib, N to‘plamda qiymat kabul qiluvchi *y=f(x)* funksiyani qaraymiz. $\Re$ orqali M dagi to‘plam ostilarning qandaydir sistemasini belgilaylik. f ($\Re$) orqali $\Re$ ga tegishli bo‘lgan A to‘plamlarning f(A) obrazlari sistemasini belgilaymiz. $\Re$ orqali esa N dagi to‘plam ostilarning koidaydir sistemasini belgilaymiz.

$f^{-1}(\aleph)$ orqali esa. $\aleph$ ga tegishli bo‘lgan A to‘plamlarning $f^{-1}(A)$ proobrazlari sistemasini belgilaymiz. U holda quyidagi tasdiqlar o‘rinlidir.

1) Agar $\aleph$ Halka bo‘lsa, u holda $f^{-1}(\aleph)$ ham halqadir;

2) Agar $\aleph$ algebra bo‘lsa, u holda $f^{-1}(\aleph)$ ham algebradir;

3) Agar $\aleph$σ-algebra bo‘lsa, u holda $f^{-1}(\aleph)$ ham σ-algebradir;

4) $R(f^{-1}(\aleph)) = f^{-1}R(\aleph))$;

5) $\Im(f^{-1}(\aleph)) = f^{-1}\Im(\aleph))$.

<u>O’lchovning taorifi.</u> Maolumki to‘ri to‘rtburchakning yuzi, kesmaning uzunligi va H.k. shunga o‘xshash kattaliklarni aniqlaganimizda ularning hammasi uchun umumiy bo‘lgan Hossalarni kuzatamiz, yaoni bu kattaliklar manfiy emas, hamda ularni o‘lchash uchun figuralarni mayda bo‘laklarga bo‘lib o‘lchab so‘ng ularning yiindisini olishimiz mumkin. Shuning uchun bu xossalarni umumlashtirib quyida abstrakt o‘lchov tushunchasini aniqlaymiz. Dastlab quyidagi tushuncha bizga kerak bo‘ladi.

<u>TA’RIF.</u> G to‘plamlar sistemasini R Haqiqiy sonlar to‘plamiga bir qiymatli akslantiruvchi μ: G→R akslantirish G da aniqlangan <u>to‘plam funksiyasi</u> deb ataladi.

Agar G sistemada μ to‘plam funksiyasi aniqlangan bo‘lsa, u holda bu sistemani G_{μ}orqali belgilaymiz.

<u>TA’RIF.</u> G_{μ} da aniqlangan m(·) to‘plam funksiyasi <u>o‘lchov</u> deyiladi, agar :

1) m(·) ning aniqlanish soHasi G_m yarim halqa bo‘lsa;

2) ∀ A∈$G_m$uchun m(A)≥0 bo‘lsa, yaoni $\boldsymbol{m: G_m \to R_0^+}$;

3) m(A) -additivbo‘lsa, yaoni $G_m$danolingano‘zarokesishmaydigan $A_1,A_2,...A_n$ to‘plamlaruchun $\boldsymbol{(A_i \in G_m, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j = \overline{1,k})}$

$\boldsymbol{A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ bo‘lib

$$\boldsymbol{m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa.

IZOX∅=∅∪∅ ekanligidan hamda m ning additiv ekanligidan m(∅)=2m(∅) yoki m(∅)=0 ekanligi kelib chiqadi.

MISOL: G sistema sifatida tekislikdagi ko‘rinishi {*(x;y): a* ≤ x < b; c ≤ y < d}bo‘lgan to‘ri to‘rtburchaklar sistemasini olamiz.

G ning yarim halqa tashkil etishini ko‘rish qiyin emas. G ga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy *A={(x;y) : a* ≤ x < b ; c ≤ y < d} to‘plam uchun m to‘plam funksiyasi qiymatini *m(A)=(b-a)(d-c)* tenglik orqali aniqlaymiz. Bunday aniqlangan to‘plam funksiyasi o‘lchovning 2) va 3) shartlarini qanoatlantirishini ko‘rish qiyin emas.

O’lchovni yarim halqadan, bu yarim halqa orqali hosil qilingan halqagacha davom ettirish. Quyidagi taorifni keltiramiz:

T A H R I F: Aniqlanish soHasi $\boldsymbol{G_{\mu_2}}$ dan iborat bo‘lgan μ_2 o‘lchov aniqlanish soHasi G μ_1 dan iborat bo‘lgan μ_1o‘lchovning davomi deyiladi, agar $G_{\mu1} \subset G_{\mu2}$ bo‘lib , $\forall A \in G_{\mu1}$ lar uchun $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa.

Endi berilgan o‘lchovning davomi yagonami yoki yo‘qmi? degan savolga javob beramiz. Boshkacha qilib aytganda qanday Hollar berilgan o‘lchovning yagona davomi mavjud bo‘lishini aniqlaymiz.

TYeORYeMA. G_m yarim halqada aniqlangan har qanday m o‘lchov uchun aniqlanish soHasi G_m orqali hosil qilingan $R(G_m)$ halqadan iborat bo‘lgan (yaoni G_m ni o‘z ichiga oluvchi minimal halqadan iborat bo‘lgan) yagona m_1 davomi mavjud.

Isbot . Maolumki G_m yarim halqani o‘z ichiga olgan minimal halqa F= $R(G_m)$ning har bir A∈ F elementi uchun quyidagi yoyilma o‘rinli edi:

$$\boldsymbol{A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k} \text{ , buyerda} A_k \in G_m \text{ , } A_i \cap A_j = \emptyset. \; i \neq j.$$

EndiFdam$_1$to‘plamfuknsiyasiniquyidagichaaniqlaymiz:

$\boldsymbol{\forall A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k}$ uchun

$$\boldsymbol{m_1(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)} \qquad (1)$$

debolamiz.

(1) tenglikorqalianiqlanganto‘plamfunksiyasio‘lchovhosilqiladi. Haqiqatanham,

mo‘lchovekanligidan$A_k \in G_m$uchun$m(A_k) \geq 0$ o‘rinlidir, bundanesa $m_1(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geq 0$ ekanligikelibchiqadi.

(1) tenglikAelementuchun $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ yoyilmasiningtanlanishigaboliqemas. Haqiqatanham, aytaylik $A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ hamda $A = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ yoyilmalaro‘rinlibo‘lsin.

$B_i \in G$, $C_j \in G_m$. $\forall i$ va $\forall j$ lar uchun $B_i \cap C_j \in G_m$ o‘rinlidir. U xolda m o‘lchovning additiv ekanligidan

$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{m} m(C_j)$ kelib chiqadi.

U holda $m_1(A)$ to‘plam funksiyasi additiv ekanligini ham kursatish qiyin emas. Shuning uchun (1) tenglik orqali aniqlangan m_1 to‘plam funksiyasi o‘lchovni tashkil qilar ekan. Endi m_1 davomning yagonaligini ko‘rsatamiz.

Faraz kilaylik F halqada m_2 ham m ning davomi bo‘lsin, u holda

$m_2(A) = \sum_{k=1}^{n} m_2(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) = m_1(A)$ ekanligi kelib chiqadi. Demak $m_1 = m_2$.

Shunday qilib biz G_m yarim halqada aniqlangan m o‘lchovni aniqlanish soHasi. $F=R(G_m)$ dan iborat bo‘lgan m_1 o‘lchovgacha yagona davom ettirdik. Bu m_1 o‘lchov quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $A_1, A_2, \ldots A_n$ lar $F=R(G_m)$ dan olingan o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lib, $A \in F$ uchun $A \supset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ `o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$m_1(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m_1(A_k)$$

tengsizlik o‘rinlidir.

2. Agar $F=R(G_m)$ halqaning ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots A_n$ elementlari uchun $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$m_1(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m_1(A_k)$$

tengsizlikni o‘rinlidir.

σ - additivlik . Analizning ko‘pgina masalalarida to‘plamlarning chekli birlashmasidan, tashqari sanoqli sondagi to‘plamlarning birlashmasini xam qarashga to‘ri kelib qoladi. Shu sababli biz quyidagi taorifni beramiz.

TA’RIF: G_m yarim halqada aniqlangan m o‘lchov σ - additiv o‘lchov deyiladi, agar G_m yarim halqaga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy o‘zaro kesishmaydigan, sanoqli sondagi

$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ($A_i \in G$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j=1,2,\ldots$) to‘plamlar uchun $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in G_m$ bo‘lganda

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa.

Hozir ikkita misol keltiramiz. Birinchisida σ - additiv bo‘lgan o‘lchovga, ikkinchisida additiv bo‘lib, σ - additivlik xossasi bajarilmaydigan o‘lchovga misollar keltiriladi.

1. Bizga ξ-tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin va u $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$ sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilinsin. $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ mos ravishda ξ tasodifiy miqdorning qiymatlarini qabul qilish eHtimoli bo‘lsin, yaoni $\rho_i = R(\xi = \xi_i)$. Maolumki $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$X = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots\}$ to‘plamning barcha qism ostilari sistemasi $\Re$ (X) bo‘lsin. Maolumki $\Re(X)$ σ - algabrani tashkil qiladi va bunda X to‘plam birlik element vazifasini bajaradi. $\forall A \in \Re(X)$ to‘plam ($A \subset X$) uchun

$$m(A) = \sum_{\xi_i \in A} p_i$$

deb olamiz. (Masalan $A = \{\xi_1, \xi_{17}, \xi_{15}, \xi_{25}\}$ bo‘lsa $m(A) = \rho_1 + \rho_7 + \rho_{15} + \rho_{25}$)

Bunday tenglik orqali m to‘plam funksiyasi σ- additiv o‘lchovni tashkil etadi va bunda $m(X)=1$ ekanligi maolum. (Buni tekshirish mustaqil bajariladi).

2. Additiv, lekin σ -additiv bo‘lmagan o‘lchovga misol.

Q orqali [0;1] kesmadagi barcha ratsional sonlar to‘plamini belgilaymiz. G_m sistema orqali *Q* to‘plam va [0;1] dagi *[a;b]* kesma, *(a;b)* intervallar bilan kesishgan yoki *[a;b)*, *(a;b]* yarim intervallar bilan kesishgan to‘plamlar sistemasini belgilaymiz. A_{ab}orqali masalan $Q \cap [a;b)$ to‘plamni belgilaymiz. $\forall A_{ab} \in G_m$ uchun

$$m(A_{ab}) = b - a$$

deb olamiz. Maolumki G_m yarim halqa tashkil etadi va m ning o‘lchov ekanligini ko‘rsatish qiyin emas. Biroq m uchun σ - additivlik xossasi o‘rinli emas. Haqiqatan ham, $\{r\} = A_{rr}$ekanligini xisobga olsak

$Q = \bigcup_{r \in [0;1]} A_{rr}$ bo‘ladi. Agar m σ additiv bo‘lsa, u holda

$$m(Q) = m\left(\bigcup_{r \in [0;1]} A_{rr}\right) = \sum_{r} m(A_{rr}) = 0$$

Ikkinchi tomondan $Q = Q \cap [0;1] = A_{0,1}$ deb yozishimiz mumkin, u holda

$$m(Q) = m(A_{0,1}) = 1 - 0 = 1$$

Bu esa ziddiyat. Demak m σ additiv emas.

Agar G_m yarim halqada aniqlangan m o‘lchov σ additiv bo‘lsa, u holda uning $R(G_m)$ gacha davomi bo‘lgan m o‘lchov ham σ -additivdir. U xolda σ - additiv bo‘lgan m_1o‘lchov kuyidagi xossalarga ega.

1. Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ va A to‘plamlar m_1 o‘lchovning aniqlanish soHasidan olingan o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlar bo‘lib, $A \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$m_1(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_1(A_n)$$

tengsizlik o‘rinlidir.

2. Agar m_1 o‘lchovning aniqlanish soHasida har qanday $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ va A to‘plam uchun $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$m_1(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_1(A_n)$$

o‘rinlidir.

T A Ya N Ch I B O R A L A R R U Y X A T I

To‘plamlar sistemasi, ρ amalga nisbatan yopiq sistema, to‘plamlar halqasi, birlik element, to‘plamlar algebrasi, $\Re(A)$ sistema, minimal halqa, G orqali hosil qilingan halqa yarim halqa, yarim halqa orqali hosil qilingan halqa, σ-halqa, δ-halqa, σ-algebra, δ-algebra, keltirilmaydigan σ-algebra, borelp to‘plamlar.To‘plam funksiyasi; o‘lchov; additivlik sharti; o‘lchovning davomi; o‘lchovni yarim halqadan halqagacha davomi; σ-additvilik xossasi; additiv, lekin σ -additiv bo‘lmagan o‘lchov.

NAZORAT UChUN SAVOLLAR

1. Biror amalga nisbatan yopiq sistema deganda nimani tushunasiz?
2. Halka qanday amallarga nisbat yopiq bo‘lishi kerak? Yarim xalqasi?
3. Minimal halqa deb nimaga aytiladi.
4. Halqani qachon algebra deb ataymiz?
5. R(G) minimal halqa elementlari qanday ko‘rinishda ifodalanadi?
6. σ- algebra deganda nimani tushunasiz? δ - algebrada esachi?
7.O’lchov qanday taoriflanadi?
8.. O’lchovning davomi deganda nimani tushunasiz?
9. Qanday shartlarda o‘lchovning yarim xalqadan halqagacha davomi yagona bo‘ladi?
10. σ -additivlik xossasi nima?
11. Har qanday additiv o‘lchov σ -additiv o‘lchov bo‘la oladimi? Nima uchun?
12. Agar G halqada aniqlangan m o‘lchov σ - additiv o‘lchovning davomi ham σ - additivlik xossasini saqlaydimi?
13. Agar f: $\aleph \rightarrow \aleph$ akslantirish uchun $\aleph$ xalqa bo‘lsa, u xolda $f^{-1}(\aleph)$ qanaqa sistema bo‘ladi?

2-Mavzu:Lebeg o‘lchovlari.

1. Lebeg maHnosida o‘lchovli to‘plamlar sinfi.
2. O’lchovsiz to‘plamlar.
3. Ularning xossalari.

Tashqi o‘lchov tushunchasi G_m yarim halqa berilgan bo‘lib, m undagi σ -additiv o‘lchov bo‘lsin. Ye to‘plam G_m yarim halqaning birlik elementi bo‘lsin.

Ye birlik elementning barcha qism to‘plamlaridan tuzilgan sistemani $\Re$ (Ye) orqali belgilaymiz. Maolumki $\Re$(Ye) σ -algebrani tashkil etadi. Shu σ -algebrada tashki o‘lchov tushunchasi kiritamiz.

Faraz kilaylik $B \subset E$ bo‘lib, $B_1, B_2, ..., B_n, ...$lar G_m yarim halqadan olingan chekli yoki sanoqli sondagi to‘plamlar bo‘lib, $B \subset \bigcup_k B_k$ bo‘lsin.

U holda biz $B \subset E$ to‘plamni G_m yarim halqadan olingan $\{B_k\}$ to‘plamlar sistemasi qoplaydi deb aytamiz.

V ni cheksiz ko‘p usullar bilan qoplash mumkin. U holda $\sum_k m(B_k)$ yiindi ham cheksiz ko‘p qiymatga ega bo‘ladi.

Xar bir $B_k \in G_m$ uchun $m(B_k) \geq 0$ bo‘lgani uchun $\sum_k m(B_k) \geq 0$ o‘rinli bo‘ladi. Demak $\sum_k m(B_k)$ yiindi quyidan chegaralangandir. Bu yiindining aniq quyi chegarasiga V to‘plamning tashki o‘lchovi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\mu^*(B) = \inf_{\substack{B \subset \bigcup_k B_k \\ B_k \in G_m}} \sum_k m(B_k)$$

Tashki o‘lchov quyidagi xossalarga ega

1. G_m yarim xalqani o‘z ichiga olgan $F=R(G_m)$ minimal xalqagacha m o‘lchovning davomi $m_1$bo‘lsa, u xolda $\forall A \in F$ uchun $\mu^*(A)=m_1(A)$ o‘rinlidir.

2. Agar $A_1 \in \Re$ (E) va $A_2 \in \Re$(E) bo‘lib, $A_1 \subset A_2$o‘rinlibo‘lsa, uholda

$\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ tengsizliko‘rinlidir.

3. Agar $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \Re$ (E) va A $\in \Re$(A)laruchun $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

o‘rinlibo‘lsa, uxolda $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ o‘rinlidir

O’lchovlito‘plamlaralgebrasi.

Tashkio‘lchovtushunchasidanfoydalanibendio‘lchovlito‘plamgataorifberamiz.

TA’RIF. $G_m$yarimhalqanio‘zichigaolganminimalhalqa $F=R(G_m)$ bo‘lsin. Agar$\forall \varepsilon > 0$ sonuchunshunday $B \in F$ to‘plammavjudbo‘lsaki, $A \in \Re$ (E) to‘plamuchun

$$\mu^*(A \Delta V) < \varepsilon$$

tengsizliko‘rinlibo‘lsa, uholda A $\in \Re$(E) to‘plamnio‘lchovlito‘plamdebataladi.

$A_1 \Delta A_2 = (E \backslash A_1) \Delta (E \backslash A_2)$

tenglikoʻrinliekanligidanquyidagiteoremaoʻrinliekanligikelibchiqadi.

TYeORYeMA. Agar A $\in\Re(E)$ toʻplamoʻlchovliboʻlsa, uholda E\A$\in\Re$ (E) toʻplamhamoʻlchovliboʻladi.

Bundanbuyon$\Re$ (Ye) dagibarchaoʻlchovlitoʻplamlarsistemasini Z orqalibelgilaymiz.

TYeORYeMA.Harqandayikkitaoʻlchovlitoʻplamlarningyiindisi, koʻpaytmasi, ayirmasi, simmetrikayirmasiyanaoʻlchovlitoʻplamdir.

NatijaButeorema Z ningxalqaekanliginikoʻrsatadi. Bundan tashkari Z algebra xamdir.

Haqiqatan xam A $\in$ Z boʻlsin, u holda E \ A $\in$Z boʻladi. Teoremaga asosan

E=A$\cup$ (E\A) $\in$ Z, yaoni Z birlik elementga ega boʻlgan halqa, yaoni algebra ekanligi kelib chiqadi.

TYeORYeMA Agar $A_1\in$ Z va $A_2\in$ Z boʻlib $A_1\cap A_2 = \varnothing$ boʻlsa u holda

$$\mu^* (A_1\cup A_2) = \mu^*(A_1)+\mu^*(A_2)$$

boʻladi.

Buteorematashqioʻlchovningoʻlchovlitoʻplamlarsistemasi Z daoʻlchovtashqilqilishinikoʻrsatadi.

TYeORYeMA. O’lchovlitoʻplamlarsistemasi Z σ - algebradir, yaoniagar $A_1,A_2,\ldots,A_n\ldots \in Z$ boʻlsa, u xolda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j \in Z$ va $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_j \in Z$ boʻladi.

Lebeg oʻlchovi va uning xossalari. Endi biz Lebeg oʻlchovi tushunchasini aniqlashimiz mumkin.

Taorif. O’lchovli toʻplamlar sistemasi Z da aniqlangan μ^* toʻplam funksiyasiga (tashqi oʻlchovga). Lebeg oʻlchovi deyiladi va μ orqali belgilanadi.

TYeORYeMA. Lebeg oʻlchovi σ - additiv oʻlchovdir, yaoni

$A_1,A_2,\ldots,A_n\ldots \in Z$boʻlib, $A_k\cap A_j=\varnothing$, $k\neq j$, $k,j=1,2,\ldots$, va $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

boʻlsa u holda $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ boʻladi.

TA’RIF: $A_1\supset A_2\supset \ldots \supset A_n\supset \ldots$ boʻlib $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$ boʻlganda

$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ tenglik oʻrinli boʻlsa, u xolda μ oʻlchovga uzluksiz oʻlchov deyiladi.

TYeORYeMA. Lebeg oʻlchovi uzluksiz oʻlchovdir.

Shunday qilib biz aniqlanish soHasi G_m yarim halqadan iborat boʻlgan σ - additiv m oʻlchovni aniqlanish soxasi σ algebra Z dan iborat boʻlgan σ additiv va uzluksiz Lebeg oʻlchovi μ gacha davom ettirdik. O’lchovning bunday usulda davom ettirilishi oʻlchovning Lebeg maonosida davom ettirish deb ataladi.

TAYaNCh IBORALAR RO’YXATI

Qoplama, tashki oʻlchov, oʻlchovli toʻplam, oʻlchovli toʻplamlar sistemasi, Lebeg oʻlchovi, uzluksiz oʻlchov, oʻlchovning Lebeg maonosidagi davomi.

NAZORAT UChUN SAVOLLAR

1. V to‘plamning qoplamasi deganda nimani tushinasiz?
2.Tashki o‘lchovni taoriflang.
3. O’lchovli to‘plam deb nimaga aytiladi?
4. Lebeg o‘lchovi qanday kuriladi?
5. Lebeg o‘lchovi qanday xossalarga ega?
6. Uzluksiz o‘lchov deb nimaga aytiladi?

3-Mavzu: O’lchovli funksiyalar.

1. Turli fazolar va ular ustidagi o‘lchovlarga misollar.
2. Integrallar.
3. Ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi.

Aytaylik X va Y to‘plamlar ixtiyoriy bo‘lsin. Z(X) va Z(Y) lar mos ravishda X va Y ning barcha o‘lchovli to‘plam ostilari sistemasi bo‘lsin.

Aniklanish soxasi X to‘plamdan iborat bo‘lgan, Y to‘plamda qiymat qabul qiluvchi y=f(x) funksiya (Z(X) , Z(Y))-o‘lchovli deyiladi agar A $\in$Z(Y) ekanligidan f^{-1}(A) $\in$ Z(X) ekanligi kelib chiqsa

Masalan , X va Y to‘plamlar sifatida Haqiqiy sonlar o‘qini olsak (yaoni Haqiqiy o‘zgaruvchining funksiyasini qarasak) , Z(X) va Z(Y) lar sifatida R^1 dagi barcha ochiq (yoki barcha yopiq) qism to‘plamlar sistemalarini olsak u xolda o‘lchovli funksiya tushunchasi uzluksiz funksiya tushunchasiga keltiriladi. Agar Z(X) va Z(Y)sistemalar sifatida barcha borelp to‘plamlari sistemalarini qarasak, u holda biz V-o‘lchovli (yaoni Borelp bo‘yicha o‘lchovli) funksiyalar tushunchasiga kelamiz.

Bundan buyon o‘lchovli funksiyalar tushunchasiga integrallash nazariyasi nuktai nazari bilan qaraymiz. Bunda aniqlanish soHasi
σ -additiv μ o‘lchov aniqlangan X to‘plamdan iborat bo‘lgan sonli funksiyalarni qaraymiz. Bu holda Z(X) sifatida X ning μ o‘lchov bo‘yicha o‘lchovli bo‘lgan barcha qism ostilari sistemasini qaraymiz, Z(Y) sifatida esa to‘ri chiziqdagi barcha borelp to‘plamlari sistemasini qaramiz. Xar qanday σ - additiv o‘lchovni σ - algebragacha davom ettirish mumkin bo‘lganligi uchun biz boshidanoq Z(X) ni σ algebra deb xisoblaymiz. Shunday qilib sonli funksiyalar uchun o‘lchovli funksiyalar tushunchasini quyidagicha aniqlaymiz.

TA’RIF. Aytaylik X to‘plamda aniqlanish soHasi Z(X) σ - algebradan iborat bo‘lgan $\mu\sigma$ additiv o‘lchov $\mu\sigma$ berilgan bo‘lsin. X to‘plamda aniqlangan f (x) xaqiqiy funksiya μ - o‘lchovli deyiladi, agar sonlar o‘qidagi ipxtiyoriy A borelp to‘plamlari uchun

$$f^{-1}(A)\in Z(X)$$

o‘rinlibo‘lsa

Haqiqiy sonlar o‘qida berilgan sonli funksiya borel funksiyasi (yoki V-o‘lchovli) deyiladi, agar har bir borel to‘plamlarini proobrazi na borel to‘plami bo‘lsa.

TYeORYeMA 1. X,Y,V -ixtiyoriyto‘plamlarbo‘lib, Z(X), Z(Y), Z(V) larmosravishdabuto‘plamlarningo‘lchovliqismostilarisistemasibo‘lsin. Xto‘plamdaaniqlangany=f(x) funksiya (Z(X), Z(Y)) -o‘lchovli, xamdaYto‘plamdaaniqlanganυ=q(y) funksiya (Z(Y), Z(V)) - o‘lchovlibo‘lsin. U holda

$$\upsilon = \varphi(x) = q\,(f(x))$$

funksiya (Z(X), Z(V)) - o‘lchovlidir

Qisqacha qilib aytganda o‘lchovli funksiyalardan olingan o‘lchovli funksiya ham o‘lchovli funksiyadir.

Bundan buyon anglashilmovchilik bo‘lmagan taqdirda μ - o‘lchovli funksiya tushunchasini o‘lchovli funksiya deb yuritamiz.

TYeORYeMA 2. Haqiqiy o‘zgaruvchili sonli funksiya f(x) o‘lchovli bo‘lishi uchun ixtiyoriy Haqiqiy son s uchun

$$E_c=\{x:f(x)<c\}$$

to‘plamning o‘lchovli bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremani ko‘p Hollarda f(x) sonli funksiyalar uchun o‘lchovli funksiya taorifi sifatida qabul qilinadi.

O’lchovli funksiyalar ustida arifmetik amallar . Qandaydir to‘plamda aniqlangan barcha o‘lchovli funksiyalar to‘plami arifmetik amallarga nisbatan yopiqligini ko‘rsatamiz.

TYeORYeMA 3. Ikkita o‘lchovli funksiyaning yiindisi, ayirmasi va ko‘paytmasi yana o‘lchovli funksiya bo‘ladi. Agar bo‘luvchi funksiya nolp qiymatga erishmasa, u xolda ikkita o‘lchovli funksiyaning bo‘linmasi ham yana o‘lchovli funksiya bo‘ladi.

ISBOT. Teorema isbotini bir necha qadamda bajaramiz.

1) Agar f o‘lchovli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy k son uchun kf hamda f+k funksiyalarning o‘lchovli bo‘lishi o‘z-o‘zidan ravshan.

2) Agar f va q funksiyalar o‘lchovli bo‘lsa, u holda {x:f(x)>q(x)} to‘plam o‘lchovli bo‘ladi. Haqiqatan ham

$$\{x: f(x) > q(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x: f(x) > r_k\} \cap \{x: q(x) < r_k\})$$

bu yerda r_k -nomerlab chiqilgan ratsional sonlar.

Bu yerdan

$$\{x:f(x)>a-q(x)\}=\{x:f(x)+q(x)>a\}$$

to‘plamning o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi, yaoni o‘lchovli funksiyalarning yiindisi ham o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

3) 1) va 2) dan f-q ning ham o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

4) Kuyidagi tenglikdan foydalanamiz

$$f \cdot q = \frac{1}{4}[(f+q)^2 - (f-q)^2]$$

Kvadrat funksiya borelp funksiyasi, yaoni o‘lchovli funksiya bo‘lganligi sababli teorema 1 ga asosan $(f+q)^2$ va $(f-q)^2$ lar ham o‘lchovli bo‘ladi. U xolda 1), 2) ga asosan f · q ham o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

5) Agar f(x) o‘lchovli va f(x) ≠ 0 bo‘lsa, u xolda $\frac{1}{f(x)}$ o‘lchovli bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Agar c>0 desak, u xolda

$\left\{x: \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x: f(x) > \frac{1}{c}\right\} \cup \{x: f(x) < 0\},$ agar c<0 desak, u holda

$$\left\{x: \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \left\{x: 0 > f(x) < \frac{1}{c}\right\};$$ agar s=0 desak, u xolda

$$\left\{x: \frac{1}{f(x)} < c\right\} = \{x: f(x) < c\}$$

Bu xollarning hammasida ham o‘ng tomonda o‘lchovli to‘plamni hosil qilamiz, demak q(x)≠0 da $\frac{f(x)}{q(x)}$ xam o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

O’lchovli fuknsiyalar to‘plami na faqat arifmetik amallarga nisbatan yopiq, balki limitga nisbatan xam yopiqdir, yaoni.

TYeORYeMA 4. X to‘plamning har bir x elementida yaqinlashuvchi o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligining limiti ham o‘lchovli funksiyadir.

Ekvivalentlik tushunchasi. O’lchovli funksiyalarni o‘rganishda ko‘p xollarda o‘lchovi nolp bo‘lgan to‘plamlar ustidagi qiymatlarini xisobga olmaslikka to‘ri keladi. Shuning uchun kuyidagi taorifni keltiramiz.

TA’RIF. Ye o‘lchovli to‘plamda aniqlangan ikkita f(x) va q(x) funksiyalar ekvivalent funksiyalar deyiladi (va f ~q ko‘rinishda belgilanadi) agarda

μ{x:f(x)≠q(x)}=0 bo‘lsa

Misol.

$$d(x) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{àãàð õ - èððàöèî í àë ñî í} \\ 1, & \text{àãàð õ - èððàöèî í àë ñî í} \end{cases}$$

funksiya 0(x)≡0 funksiyasiga ekvivalent, yaoni d(x)~ 0(x)Haqiqatan xam,μ {x:d(x)≠0}= μ{Q}=0.

TYeORYeMA 5. Ye o‘lchovli to‘plamda aniqlangan f(x) funksiya shu Ye to‘plamda aniqlangan o‘lchovli q(x) funksiyaga ekvivalent bo‘lsa, u xol- da f(x) funksiya xam o‘lchovli bo‘ladi.

Deyarli hamma yerda yaqinlashish tushunchasi. Ko‘p Hollarda o‘lchovli funksiyalarning o‘lchovi nolp bo‘lgan to‘plamlardagi Holati qiziqtirmagani uchun tabiiyki, nuktaviy yaqinlashishdan ko‘ra umumiyroq bo‘lgan quyidagi tushunchani kiritamiz.

TA’RIF. Biror o‘lchovli Ye to‘plamda aniqlangan $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi f(x) funksiyaga Ye ning deyarli xamma yerida yakinlashadi deyiladi, agar

$$\mu\{x \in E: \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\} = 0$$

o‘rinli bo‘lsa.

Masalan: $f_n(x)=(-x)^n$, x∈[0;1]

$$\mu\{x \in [0;1];\ \lim_{n\to\infty}(-x)^n \neq 0\} = \mu\{1\} = \mu([1;1]) = 0$$

TYeORYeMA: O’lchovli Ye to‘plamda aniqlangan $\{f_n(x)\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi f(x) funksiyaga deyarli xamma yerda yaqinlashsa, u xolda f(x) funksiya xam o‘lchovli bo‘ladi.

Kuyida keltiriladigan teorema 1911 yilda D.F.Yegorov tomonidan isbotlangan bo‘lib, u tekis yakinlashish tushunchasi bilan deyarli xamma yerda yaqinlashish tushunchasi o‘rtasidagi bolanishini ko‘rsatib beradi.

TYeORYeMA. (Yegorov) Aytaylik Ye to‘plamda chekli μ o‘lchov aniqlangan bo‘lib, $\{f_n(x)\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi Ye da f(x) funksiya deyarli xamma yerda yaqinlashsin. U holda har qanday $\delta>0$ son uchun shunday o‘lchovli $E_\delta \subset E$ to‘plam topiladiki kuyidagi shartlar o‘rinlidir:

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) E_δ to‘plamda $\{f_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligi f(x) funksiyaga tekis yakinlashadi.

<u>O’lchov bo‘yicha yaqinlashish.</u> O’lchovli funksiyalar ketma-ketligi uchun yaqinlashishning yana bir turini aniqlaymiz.

TA’RIF. Ye o‘lchovli tuplamda aniqlangan $\{f_n(x)\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi f(x) funksiyaga <u>o‘lchov bo‘yicha yakinlashadi</u> deyiladi, agar ixtiyoriy $\sigma>0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$$

o‘rinli bo‘lsa.

Kuyida keltiriladigan ikkita teorema deyarli hamma yerda yaqinlashish tushunchasi bilan o‘lchov bo‘yicha yaqinlashish tushunchasi o‘rtasida bolanishni o‘rnatib beradi. Bu teoremalarda ham ko‘rilayotgan o‘lchovni xam chekli deb qabul kilamiz.

TYeORYeMA. Agar Ye o‘lchovli to‘plamda aniqlangan $\{f_n(x)\}$ o‘lchovli funksiyalar ketlik-ketligi f(x) funksiyaga deyarli hamma yerda yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlik f(x) ga o‘lchov bo‘yicha xam yaqinlashadi.

O’lchov bo‘yicha yaqinlashishdan deyarli xamma yerda yaqinlashish kelib chiqmaydi.

MASALAN. (0;1] kesmada xar bir k natural son uchun quyidagi funksiyalar ketma-ketligi

$$f_i^k(x) = \begin{cases} 1, & \text{àãàð} \quad \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k} \\ 0, & \text{õ í èí ã ûî ë ãàí ûè é ì àò ë à ðè ä à} \end{cases}$$

o‘lchov bo‘yicha nolpga yaqinlashadi, lekin Hech bir nuqtada yaqinlashmaydi. (mustaqil isbotlanadi)

Yuqorida keltirilgan teoremaga teskari teorema o‘rinli bo‘lmasa ham, kuyidagi natijani keltirish mumkin.

TYeORYeMA. Agar Ye o‘lchovli to‘plamda aniqlangan $\{f_n(x)\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi Ye da f(x) funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashsa, u xolda bu ketma-ketlikdan f(x) funksiyaga deyarli xamma yerda yaqinlashuvchi $\{f_{nk}(x)\}$qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Matanaliz kursidan maolum bo‘lgan Riman integrali faqat uzluksiz yoki uzulishlari soni chekli bo‘lgan funksiyalarga qo‘llanilishi mumkin. O’lchovli funksiyalar xamma yerda uzulishga ega bo‘lganligi, yoki abstrakt to‘plamlarda aniqlangani sababli ularga Riman integralini ko‘llab bo‘lmaydi. Biroq bunday funksiyalar uchun mukammal va qatoiy bo‘lgan Lebeg integrali tushunchasi mavjud.

Lebeg integrali qurilishining asosiy mazmuni shundan iboratki bunda Riman integralidan farqli o‘laroq, x nuqtalar ularning x o‘qida bir-biriga yakin turishiga karab emas, balki bu nuqtalarda funksiya qiymatlarining bir-biriga yaqin turishiga qarab gruppalanadi. Bu usul esa Lebeg integralini ancha kengroq bo‘lgan funksiyalar sinfiga tatbiq etish imkonini yaratadi.

Bundan buyon, agar oldindan taokidlab o‘tilmasa, birlik element Ye ga ega bo‘lgan σ-algebrada aniqlangan to‘la σ-additiv bo‘lgan qandaydir μ o‘lchovni qaraymiz. Xamma $A\subset E$ to‘plamlar o‘lchovli, $x\in X$ larda aniqlangan f(x) funksiyalar xam o‘lchovli deb xisoblaymiz.

Lebeg integralini dastlab sodda funksiyalar deb ataluvchi funksiyalar sinfi uchun aniqlaymiz. So‘ngra bu tushunchani kengroq bo‘lgan funksiyalar sinfi uchun davom ettiramiz.

Sodda funksiyalar. Analiz va eHtimollar nazariyasining ko‘p masalalarida ko‘pincha quyidagi funksiyalar sinfiga duch kelamiz.

TA’RIF. O’lchov kiritilgan X to‘plamda aniqlangan f(x) funksiya sodda funksiya deb ataladi, agar u o‘lchovli bo‘lib, X da chekli yoki sanoqli sondagi qiymatga erishsa.

Sodda funksiyalarning tuzilishi quyidagi teorema orqali xarakterlanadi.

TYeORYeMA 1. Chekli yoki sanoqli sondagi $y_1,y_2,...,y_n,...$ qiymatlarga ega bo‘lgan f(x) funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun $A_n=\{x\in X: f(x)=y_n\}$ to‘plamlarning barchasi o‘lchovli bo‘lishi zarur va yetralidir.

TYeORYeMA 2. f(x) funksiyaning o‘lchovli bo‘lishligi uchun, bu funksiya tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi limiti sifatida ifodalanishi zarur va yetarlidir.

Bu keltirilgan teorema Lebeg integralini aniqlashda sodda funksiyalardan foydalanish uchun katta ahamiyat kasb etadi.

Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali. Aytaylik f chekli yoki sanoqli sondagi

$$y_1,y_2,...,y_n,...;\ y_i\neq y_j,\ i\neq j$$

qiymatlarni qabul qiluvchi sodda funksiya bo‘lsin. A esa X dagi o‘lchovli to‘plam bo‘lsin. Kuyidagi belgilashni kiritamiz:

$$A_k=\{x\in A:\ f(x)=y_k\}$$

Ma’lumki A_k to‘plamlar o‘lchovlidir

Quyidagi $\sum_k y_k\mu(A_k)$ (1) qatorni qaraymiz.

TA’RIF. Agar (1) qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘lsa, u xolda f(x) funksiya (μ o‘lchov bo‘yicha) A to‘plamda integrallanuvchi yoki jamlanuvchi deb ataladi. Agar f integrallanuvchi bo‘lsa, u xolda (1) qatorning yiindisi f(x) funksiyaning A to‘plam bo‘yicha Lebeg integrali deb ataladi va quyidagi ko‘rinishda belgilanadi.

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_k y_k\mu(A_k)$$

Misol. A=[0;1] bo‘lsin va

$$d(x)=\begin{cases}0, & \text{àãàð õ - èððàöèî í àë ñî í}\\ 1, & \text{àãàð õ - èððàöèî í àë ñî í}\end{cases}$$

berilgan bo‘lsin, u holda

$$\int_A d(x)d\mu=\int_{[0;1]} d(x)d\mu=\int_{Q\cup J} d(x)d\mu=0\cdot\mu(J)+1\cdot\mu(Q)=0\cdot1+1\cdot0=0$$

LYeMMA . Aytaylik $A=\bigcup_k B_k,\ \ B_i\cap B_j=\varnothing,\ \ i\neq j$ hamda har bir B_k to‘plamda f(x) funksiya faqat bitta s_k qiymatga erishsin; u holda

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k c_k \cdot \mu(B_k) \qquad (2)$$

o‘rinlidir, bu xolda f funksiya A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lishi uchun (2) qatorning absolyut yaqinlashuvchi bo‘lishligi zarur va yetarlidir.

Sodda funksiyalar uchun Lebeg integralning xossalari. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integralining quyidagi xossalarini keltiramiz.

A) $\int_A (f(x)+q(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A q(x)d\mu;$

Bu yerda o‘ng tomondagi integrallarning mavjud ekanligidan chap tomondagi integralning mavjudligi kelib chiqadi.

B) ixtiyoriy o‘zgarmas son k uchun

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$$

bu yerda o‘ng tomondagi integralning mavjudligidan chap tomondagi integralning mavjudligi kelib chiqadi.

V) A to‘plamda chegaralangan f(x) sodda funksiya integrallanuvchidir, bunda agar A to‘plamda |f(x)|≤ M bo‘lsa, u holda

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| \le M\mu(A)$$

Bu xossalar bevosita taorifdan foydalanib tekshirib chiqiladi.

Chekli o‘lchov aniqlangan to‘plamlarda Lebeg integralining umumiy taorifi.

T A ‘R I F: A to‘plamda f funksiyani integrallanuvchi (yoki jamlanuvchi) deyiladi, agar A to‘plamda f funksiyaga tekis yaqinlashuvchi A da integrallanuvchi $\{f_n\}$sodda funksiyalar ketma-ketligi mavjud bo‘lsa.

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu \qquad (1)$$

limitga f funksiyaning A to‘plam bo‘yicha Lebeg integrali deyiladi va

$$\int_A f(x)d\mu$$

kabi belgilanadi.

Bu kiritilgan taorifda aniqlik bo‘lishi (korrekt bo‘lishi) uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

1. Ixtiyoriy tekis yaqinlashuvchi sodda, A da integrallanuvchi $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi uchun (1) limit mavjud bo‘lishi kerak.

2. Bu limit berilgan f uchun $\{f_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga boliq bo‘lmasligi kerak.

3. Sodda funksiyalar uchun integrallanuvchilik taorifi bundan oldingi mavzuda keltirilgan taorifga teng kuchli bo‘lishi kerak.

Bu shartlarning hammasi Haqiqatan ham o‘rinli bo‘ladi. Bu shartlar sodda funksiyalar uchun aniqlangan Lebeg integrali va uning xossalaridan bevosita kelib chiqadi.

Demak Lebeg integralini taoriflash ikki boskichda amalga oshirilar ekan. Birinchi bosqichda qandaydir funksiyalar sinfi (sodda funksiyalar) uchun bevosita (integral qator) yaqinlashuvchiligidan foydalanib taoriflansa, ikkinchi bosqichda bu taorif undan kengroq bo‘lgan funksiyalar sinfi uchun limitga utish orqali kengaytirilar ekan.

Lebeg integralining asosiy xossalari. Bevosita taorifdan foydalanib Lebeg integralining asosiy xossalarini keltiramiz.

1. $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$

2. Ixtiyoriy o‘zgarmas k son uchun

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$$

bunda o‘ng tomondagi integralning mavjudligidan chap tomondagi integralning mavjudligi kelib chiqadi.

3. $\int_A (f(x)+q(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A q(x)d\mu$

bunda o‘ng tomondagi integrallar mavjudligidan chap tomondagi integralning mavjudligi kelib chiqadi. (Bu xossa additivlik xossasi deyiladi).

4. A to‘plamda chegaralangan f(x) funksiya A da integrallanuvchidir.

5. Agar *f(x)≥0* bo‘lsa, u xolda

$$\int_A f(x)d\mu \geq 0$$

(albatta bu yerda integralning mavjudligi talab etiladi). (Bu xossa monotonlik xossasi deyiladi)

5'. Agar A to‘plamda *f(x)≥q(x)* bo‘lsa, u xolda

$$\int_A f(x)d\mu \geq \int_A q(x)d\mu$$

5''. Agar A to‘plamning deyarli xamma yerida $m \leq f(x) \leq M$ bo‘lsa, u xolda

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x)d\mu \leq M\mu(A)$$

6. Agar $\mu(A)=0$ bo‘lsa, u xolda $\int_A f(x)d\mu = 0$

6'. Agar A ning deyarli hamma yerida *f(x)=q(x)*bo‘lsa, u xolda

$\int_A f(x)d\mu = \int_A q(x)d\mu$, bunda ikki tarafdagi integrallar bir vaqtning o‘zida mavjud bo‘ladi yoki mavjud emas.

7. Agar φ funksiya A da jamlanuvchi bo‘lsa, va A ning deyarli xamma yerida $|f(x)| \leq q(x)$ bo‘lsa u xolda f xam A da jamlanuvchidir.

8. $I_1 = \int_A f(x)d\mu$ âà $I_2 = \int_A |f(x)|d\mu$

integrallar bir vaqtning o‘zida mavjud yoki mavjud emas.

Lebeg integralning σ-additivlik xossasi. Agar $\int_A f(x)d\mu$ integralda biz f(x) funksiyani tayinlab olsak u xolda integralning qiymati A to‘plamga boliq bo‘lib qoladi, yaoni

$$F(A)=\int_A f(x)d\mu$$

ifoda o‘lchovli to‘plamlar sistemasida aniqlangan to‘plam funksiyasi sifatida qaraladi.

TYeORYeMA 1: Agar $A=\bigcup_n A_n,\quad A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j,$

bo‘lsa, u xolda

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_n\int_A f(x)d\mu$$

o‘rinlidir, bunda chap tomonda to‘ran integralning mavjudligidan o‘ng tomonda turgan integrallarning mavjudligi va qatorning absolyut yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

Bu teorema odatda Lebeg integralning σ-additivlik xossasi deb yuritiladi.

Natija Agar f funksiya A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u xolda f A to‘plamning ixtiyoriy o‘lchovli qism ostisi A′⊂ A da xam integrallanuvchidir.

Yuqorida keltirilgan tasdiqlarni biz quyidagi natijaga keltirib olishimiz mumkin.

TYeORYeMA 2: Agar $A=\bigcup_n A_n,\quad A_i\cap A_j=\varnothing,\ i\neq j,$ bo‘lsa, u xolda

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_n\int_{A_n} f(x)d\mu$$

tenglik o‘rinlidir.

Chebishev tengsizligi. Endi o‘lchovlar nazariyasi, ayniqsa extimollar nazariyasida ahamiyatga ega bo‘lgan, Chebishev tengsizligi deb ataluvchi tengsizlikni keltiramiz.

TYeORYeMA 3: Agar φ(x) ≥ 0 munosabat A to‘plamda o‘rinli bo‘lib va c>0 bo‘lsa, u xolda

$$\mu\{x\in A:\varphi(x)\geq c\}\leq\frac{1}{c}\int_A\varphi(x)d\mu$$

tengsizlik o‘rinlidir.

NATIJA Agar $\int_A |f(x)|d\mu=0$ bo‘lsa, u xolda deyarli xamma yerda f(x)=0 bo‘ladi.

Lebeg integralining absolyut uzluksizligi xossasi. Chebishev tengsizligi va uning natijasini quyidagi Lebeg integralining absolyut uzluksizligi deb ataluvchi xossaning limiti sifatida qarash mumkin.

TYeORYeMA 4. Agar f(x) funksiya A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u xolda har qanday ε>0 son uchun shunday δ>0 son topiladiki

$$\left|\int_e f(x)d\mu\right|<\varepsilon$$

tengsizlik μ (e)<δ shartni qanoatlantiruvchi har qanday ye ⊂ A o‘lchovli to‘plam uchun o‘rinlidir.

Lebeg integralining yuqorida keltirilgan xossalaridan quyidagi xulosaga kelamiz:

Aytaylik μ o‘lchov aniqlangan X fazoda f- manfiy bo‘lmagan tayinlangan funksiya bo‘lsa, u xolda $F(A)=\int_A f(x)d\mu$ to‘plam funksiyasi X ning barcha o‘lchovli $A\subset X$ qism to‘plamlarida aniqlangan, musbat aniqlangan va σ- additivlik xossasiga ega, yaoni $\forall A \subset X$ uchun $F(A) \geq 0$;

agar $A=\bigcup_n A_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, u xolda $F(A)=\sum_n F(A_n)$

Boshkacha qilib aytganda F(A) to‘plam funksiyasi σ-additiv o‘lchovni hosil qilar ekan. Bu o‘lchov xam dastlabki berilgan μ o‘lchov aniqlangan σ-algebrada aniqlangan va μ bilan quyidagi shart orqali bolangan, agar $\mu(A)=0$ bo‘lsa, u xolda $F(A)=0$

TAYaNCh IBORALAR RO’YXATI

(Z(X),Z(Y)) - o‘lchovli funksiya, V-o‘lchovli funksiya, μ-o‘lchovli funksiya, borelp funksiyasi, o‘lchovli funksiyalar ustida amallar, ekvivalentlik. Nuktaviy yaqinlashish, tekis yaqinlashish, deyarli hamma yerda yaqinlashish, o‘lchov bo‘yicha yaqinlashish, Yegorov teoremasi. Sodda funksiya, sanoqli sondagi qiymatlar, integrallanuvchi, absolyut yaqinlashuvchi qator, sodda funksiya uchun Lebeg integrali. Integrallanuvchi funksiya, tekis yaqinlashishi, Lebeg integrali aniqlik shartlari, additivlik va monotonlik xossalari. F(A)- to‘plam funksiyasi, Lebeg integralining σ-additivlik xossasi, Chebishev tengsizligi, Lebeg integralining absolyut uzluksizligi xossasi F(A) -o‘lchov.

NAZORAT UChUN SAVOLLAR

1. O’lchovli funksiya deb nimaga aytiladi?
2. O’lchovli funksiyalar qanday xossalarga ega?
3. Sonli funksiyalar uchun o‘lchovli funksiya tushunchasini qanday taoriflash mumkin?
4. Ekvivalent funksiyalar deb nimaga aytiladi?
5. Deyarli xamma yerda degan iborani qachon ishlatish mumkin?
6. O’lchovli funksiya va uzluksiz funksiya tushunchasi orasida qanday bolanish bor?
7.Deyarli xamma yerda yakinlashish tushunchasini taoriflang?
8.. O’lchov bo‘yicha yakinlashish nima?
9.. Har xil yakinlashishlar orasida qanday bolanishlar mavjud?
10. Yegorov teoremasini tushuntirib bering.
11. Deyarli hamma yerda yaqinlashuvchi ketma-ketlik o‘lchov bo‘yicha yaqinlashuvchi bo‘lish sharti nima?
12. Sodda funksiyalar taorifini keltiring
13. Sodda funksiyalar qanday xossalarga ega?
14. Sodda funksiyaning integrallanuvchi bo‘lishi sharti nima?
15. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali qanday taoriflanadi?
16. Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali qanday xossalarga ega?
17. Lebeg integralining umumiy taorifini keltiring va taorifning aniqliligi shartlarini ko‘rsating
18. Lebeg integrali umumiy taorifining aniqliligi shartlarini ko‘rsating?
19. Lebeg integralini taoriflash qanday bosiqchlarda amalga oshiriladi?

20. Lebeg integrali qanday asosiy xossalarga ega?
21. Nima uchun Lebeg integralini to‘plam funksiyasi deb qarash mumkin?
22. Lebeg integrali uchun σ- additivlik xossasi qanday ifodalanadi?
23. Lebeg integralining absolyut uzluksizligi qanday ifodalanadi?
24. Lebeg integral ham o‘lchov bo‘lishini tushuntiring?
25. Lebeg integrali bilan aniqlangan o‘lchov, berilgan o‘lchov bilan qanday bolangan?

IV. AMALIY MAShG'ULOTLAR MATERIALLARI

1 amaliy mashg'ulot. O'lchov tushunchasi va xossalari. σ - additivlik.

1.1-misol. $A \subset E$ birlik kvadratdagi barcha ratsional koordinatali nuqtalar toplami bo'lsin. A va $E \setminus A$ to'plamlar E da zich bo'lganligi uchun

$$j^*(A)=1, \quad j^*(E \setminus A)=1$$

tengliklar o'rinli. Bu yerdan

$$j_*(A)=0 \quad \text{va} \quad j^*(A) \neq j_*(A).$$

Demak, A to'plam Jordan maHnosida o'lchovli emas. MaHlumki, A - sanoqli to'plam, shuning uchun uning elementlarini $(x_k, y_k),\ k \in N$ ko'rinishda nomerlab chiqish mumkin. Shunday ekan

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad P_k = \{(x,y): x_k \leq x \leq x_k,\ y_k \leq y \leq y_k\}.$$

Ikkinchi tomondan ixtiyoriy $k \in N$ uchun $m(P_k)=0.$ Bundan

$$\mu^*(A)=0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shuni taHkidlash kerakki, tashqi o'lchovi nolga teng bo'lgan har qanday to'plam o'lchovli to'plamdir. Buning uchun elementar to'plam sifatida $B=\varnothing$ ni olish yetarli:

$$\mu^*(A \Delta B)=\mu^*(A \Delta \varnothing)=\mu^*(A)=0<\varepsilon.$$

Demak, A Lebeg maHnosida o'lchovli to'plam, ammo A to'plam Jordan maHnosida o'lchovli emas.

MaHlumki, Lebeg maHnosida o'lchovli bo'lgan to'plamlar sinfi yetarlicha keng. Tabiiy ravishda "Lebeg maHnosida o'lchovsiz to'plam mavjudmi?" – degan savol tug'iladi

1.2-misol. $[-1,1]$ kesmaning nuqtalari orasida ekvivalentlik tushunchasini quyidagicha kiritaylik: agar x va y ning ayirmasi $x-y$ ratsional son bo'lsa, ular ekvivalent deyiladi. Bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo'ladi. Shuning uchun $[-1,1]$ kesma o'zaro ekvivalent bo'lgan elementlardan iborat $K(x),\ x \in [-1,1]$ sinflarga ajraladi. Bunda turli sinflar o'zaro kesishmaydi. Shunday qilib, $[-1,1]$ kesma o'zaro kesishmaydigan $K(x),\ x \in [-1,1]$ sinflarga ajraladi. Endi bu sinflarning har biridan bittadan element tanlab olib, bu tanlab olingan elementlar to'plamini A bilan belgilaymiz. Ushbu A to'plamning o'lchovsiz ekanligini ko'rsating.

Yechish. $[-1,1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlarni nomerlab chiqamiz:

$$r_0 = 0, r_1, r_2, \ldots$$

A_k bilan A to‘plamni r_k songa siljitishdan hosil bo‘lgan to‘plamni belgilaymiz, yaHni $A_k = A + r_k = \{y : y = x + r_k, x \in A\}$. Xususan $A_0 = A$. A_k to‘plam A to‘plamdan r_k ga siljitish orqali hosil qilingani uchun ular bir vaqtda yo o‘lchovli, yo o‘lchovsiz to‘plamlar bo‘ladi. Faraz qilaylik, A o‘lchovli to‘plam bo‘lsin. U holda A_k to‘plamlar ham o‘lchovli bo‘ladi va $\mu(A_k) = \mu(A)$ tenglik o‘rinlidir. Ravshanki,

$$[-1;1] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Bundan, o‘lchovning yarin additivlik xossasiga asosan

$$2 = \mu([-1;1]) \leq \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \mu(A) + \mu(A) + \cdots + \mu(A) + \cdots.$$

Bundan $\mu(A) > 0$ ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, ixtiyoriy $k \in \{0,1,2,\ldots,\}$ uchun $A_k \subset [-2;2]$. Bundan

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset [-2;2]$$

va A_k to‘plamlar o‘zaro kesishmaydi. O’lchovning σ - additivlik xossasiga asosan

$$4 = \mu([-2;2]) \geq \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \mu(A) + \mu(A) + \cdots + \mu(A) + \cdots.$$

Bundan $\mu(A) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Bu qarama-qarshilikdan A to‘plamning o‘lchovsiz ekanligi kelib chiqadi.

1.3-misol. Kantor to‘plami K ning Lebeg o‘lchovi nolga teng ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Kantor to‘plami K ning o‘lchovi nolga tengligi $\mu([0,1] \setminus K) = 1$ tenglikdan kelib chiqadi. Barcha chiqarib tashlangan intervallar uzunliklari yig‘indisi

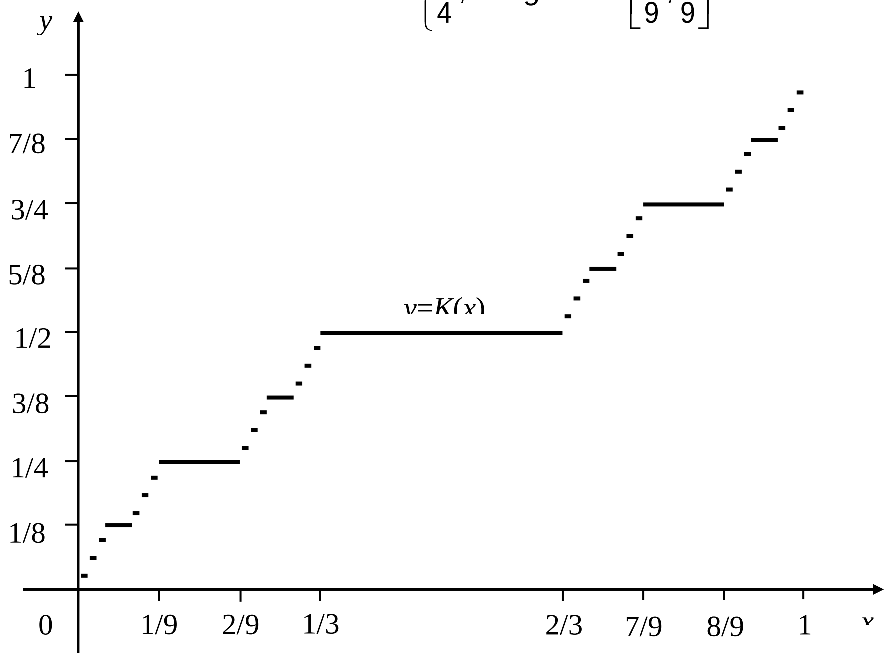
$$\mu([0,1] \setminus K) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots = 1.$$

Bunda $K_n -$ n - qadamda tashlab yuborilgan intervallar birlashmasi. Demak, $\mu(K) = 0$.

1.4-misol. $K(x)$ funksiyani $[0;1]$ kesmada quyidagicha aniqlaymiz. $K_1 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ to‘plam va uning chegarasida $K(x) = \frac{1}{2}$, $x \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

$K_2 = \left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$ to‘plam va uning chegaralarida

$$K(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & agar\ x\in\left[\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right],\\ \frac{3}{4}, & agar\ x\in\left[\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right].\end{cases}$$



Shuningdek ,

2.3 - chizma

$$K_3=\left(\frac{1}{3^3};\frac{2}{3^3}\right)\cup\left(\frac{7}{3^3};\frac{8}{3^3}\right)\cup\left(\frac{19}{3^3};\frac{20}{3^3}\right)\cup\left(\frac{25}{3^3};\frac{26}{3^3}\right)$$

to‘plam va uning chegaralarida

$$K(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^3}, & agar\ x\in\left[\frac{1}{3^3};\frac{2}{3^3}\right],\\ \frac{3}{2^3}, & agar\ x\in\left[\frac{7}{3^3};\frac{8}{3^3}\right],\\ \frac{5}{2^3}, & agar\ x\in\left[\frac{19}{3^3};\frac{20}{3^3}\right],\\ \frac{7}{2^3}, & agar\ x\in\left[\frac{25}{3^3};\frac{26}{3^3}\right].\end{cases}$$

Xuddi shunday K_n to‘plamning k-intervali va uning chegarasida

$$K(x)=\frac{k}{2^n},\qquad k=1,3,5,\ldots,2^n-1.$$

$[0;1]$ kesmaning qolgan nuqtalariga $K(x)$ ni uzluksiz davom ettiramiz. Hosil bo‘lgan $K(x)$ funksiya Kantorning zinapoya funksiyasi deyiladi (2.3-chizmaga qarang). Kantorning zinapoya funksiyasi $[0;1]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz, monoton kamaymaydigan funksiya bo‘ladi. Xususan, $K(0)=0, K(1)=1$.

1.5-misol. $F(x)=2x+1$ funksiya yordamida qurilgan μ_F- Lebeg-Stiltes o‘lchovi absolyut uzluksiz o‘lchov bo‘ladi. Ushbu Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘yicha $A=(1;5]$

to‘plamning o‘lchovini hisoblang.

Yechish. TA’RIFga ko‘ra

$$\mu_F(A) = F(5) - F(1) = 2\cdot 5 + 1 - (2\cdot 1 + 1) = 11 - 3 = 8.$$

1.6-misol. $F(x) = [x]$ funksiya yordamida qurilgan μ_F– Lebeg-Stiltes o‘lchovi diskret o‘lchov bo‘ladi. Chunki $F(x) = [x]$ funksiya monoton kamaymaydigan o‘ngdan uzluksiz funksiya bo‘lib, uning qiymatlar to‘plami butun sonlar to‘plami Z dan iborat. Butun sonlar to‘plami esa sanoqli to‘plamdir. Bu o‘lchov bo‘yicha $A = (1;5] \cup \{7;8\}$ to‘plamning o‘lchovini toping.

Yechish. Hosil qilingan μ_F– Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘yicha ixtiyoriy $n \in Z$ nuqtaning o‘lchovi birga teng. Chunki $\{n\} = [n;n]$ tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun, TA’RIFga ko‘ra

$$\mu_F([n;n]) = F(n) - F(n-0) = n - (n-1) = 1.$$

Demak, $\mu_F(\{7;8\}) = 2.$ Endi $B = (1;5]$ to‘plamning o‘lchovini topamiz:

$$\mu_F(B) = F(5) - F(1) = 5 - 1 = 4.$$

Berilgan A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan B va $\{7;8\}$ to‘plamlarning birlashmasidan iborat. O’lchovning additivlik xossasiga ko‘ra

$$\mu_F(A) = F(B) + F(\{7;8\}) = 4 + 2 = 6.$$

1.7-misol. $F(x) = K(x)$, bunda $K(x)$– Kantorning zinapoya funksiyasi. $F(x) = K(x)$ yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi μ_F singulyar o‘lchov ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Kantorning zinapoya funksiyasi $K(x)$ ni $(-\infty;\infty)$ ga quyidagicha uzluksiz davom ettiramiz. $K(x) = 0$, agar $x < 0$ bo‘lsa va $K(x) = 1$, agar $x > 1$ bo‘lsa. Hosil qilingan μ_F– Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘yicha ixtiyoriy $a \in R$ nuqtaning o‘lchovi nolga teng. Chunki $\{a\} = [a;a]$ tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun, TA’RIFga ko‘ra

$$\mu_F([a;a]) = K(a) - K(a-0) = 0.$$

Bundan tashqari, $A = (-\infty;0) \cup (1;\infty)$ to‘plamning o‘lchovi ham nolga teng. Haqiqatan ham, o‘lchovning additivlik xossasiga ko‘ra

$$\mu_F(A) = \mu_F((-\infty,0)) + \mu_F((1,\infty)) = F(0) - \lim_{a\to-\infty} F(a) + \lim_{a\to+\infty} F(a) - F(1) = 0. \qquad (2.7)$$

2.3-misolda ko‘rsatildiki, $\mu(K) = 0.$ Agar $\mu_F(R \setminus K) = 0$ ekanligi ko‘rsatilsa, μ_F o‘lchovning singulyar o‘lchov ekanligi kelib chiqadi. Endi $\mu_F(R \setminus K)$ ni hisoblaymiz. O’lchovning additivlik xossasi va (2.7) tenglikka ko‘ra

$$\mu_F(R \setminus K) = \mu_F((-\infty;0)) + \mu_F((1;\infty)) + \mu_F([0;1] \setminus K) = \mu_F([0;1] \setminus K).$$

Dastlab $K_n, n \in N$ to‘plamlarning o‘lchovi nol ekanligini ko‘rsatamiz:

$$\mu_F(K_1) = F\left(\frac{2}{3}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Shuningdek,

$$\mu_F(K_2) = \mu_F\left(\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\right) + \mu_F\left(\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\right) = F\left(\frac{2}{9}\right) - F\left(\frac{1}{9}\right) + F\left(\frac{8}{9}\right) - F\left(\frac{7}{9}\right) = 0$$

tenglik o‘rinli. $\mu_F(K_n) = 0, n \geq 3$ tengliklar ham shunga o‘xshash ko‘rsatiladi. Endi Lebeg-Stiltes o‘lchovi $\mu_F(\cdot)$ ning σ - additivlik xossasidan foydalansak

$$\mu_F([0,1] \setminus K) = \mu_F(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_F(K_n) \qquad (2.8)$$

tenglikni olamiz. Shunday qilib, hosil qilingan Lebeg-Stiltes o‘lchovi $\mu_F(\cdot)$ singulyar o‘lchov ekan.

Masalalar

1. Agar A, B o‘lchovli to‘plamlar va $A \supset B$ bo‘lsa, u holda $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ tenglikni isbonlang.

2. Agar A, B, C, D o‘lchovli to‘plamlar va $A \Delta C = B \Delta D$, $\mu(C) = \mu(D) = 0$ bo‘lsa, u holda $\mu(A) = \mu(B)$ tenglikni ko‘rsating.

3. A, B o‘lchovli to‘plamlar uchun $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$ tenglikni isbotlang.

4. O’lchovli bo‘lmagan to‘plamga misollar keltiring.

5. Tekislikdagi $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ to‘plam elementar to‘plam bo‘ladimi? Uning o‘lchovini toping.

6. O’nli kasr yozuvida 5 raqami qatnashmagan $[0,1]$ kesmadagi barcha sonlar to‘plamining Lebeg o‘lchovini hisoblang.

7. O’nli kasr yozuvida 2 va 5 raqamlari qatnashmagan $[0,1]$ kesmadagi barcha sonlar to‘plamining Lebeg o‘lchovini hisoblang.

8. Haqiqiy sonlar o‘qida joylashgan, musbat o‘lchovga ega bo‘lgan to‘plam kontinuum quvvatli to‘plam ekanligini isbotlang.

9. Haqiqiy sonlar o‘qidagi A o‘lchovli to‘plam yordamida aniqlangan $f(t) = \mu([a,t] \cap A),\ t \in [a,b]$ funksiyaning uzluksiz ekanligini ko‘rsating.

10. Barcha haqiqiy sonlar to‘plamida joylashgan, kontinuum quvvatli va o‘lchovi nolga teng bo‘lgan to‘plamga misollar keltiring.

11. To‘gri chiziqdagi barcha o‘lchovli to‘plamlar sistemasining quvvati /ekanligini ko‘rsating.

12. $[0,1]$ kesmada joylashgan va bu kesmaning hech qayerida zich bo‘lmagan, o‘lchovi 0,9 ga teng bo‘lgan mukammal to‘plam tuzing.

13. $[0,1]$ kesmada joylashgan va bu kesmaning hech qayerida zich bo‘lmagan, o‘lchovi $a\,(0<a<1)$ ga teng bo‘lgan mukammal to‘plam tuzing.

14. $[0,1]$ kesmada joylashgan va bu kesmaning hech qayerida zich bo‘lmagan, o‘lchovi 1 ga teng bo‘lgan mukammal to‘plam tuzing.

15. Tekislikda A to‘plamni quyidagicha tuzamiz: dastlab, usbu $\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ birlik kvadratning har bir tomonlarini teng uchga ajratgan holda teng 9 ta kichik kvadratga ajratamiz va markazda joylashgan ochiq kichik kvadratni tashlab yuboramiz, ikkinchi qadamda esa qolgan sakkizta kichik kvadratning har birini yana teng 9 ta kichik kvadratga ajratamiz va bu har bir 9 ta kichik kvadratning markazida joylashgan ochiq kichik kvadratni tashlab yuboramiz va bu jarayonni cheksiz marta davom ettiramiz. Yuqoridagi qoida bo‘yicha sanoqli marta “kichik kvadratlar” tashlab yuborilgandan keyin, qolgan A to‘plam “Serpinskiy gilami” deb yuritiladi. “Serpinskiy gilami”ning o‘lchovini hisoblang.

16. Tekislikda A to‘plamni quyidagicha tuzamiz: dastlab, usbu $\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ birlik kvadratning har bir tomonlarini teng uchga ajratgan holda teng 9 ta kichik kvadrat ajratamiz va birlik kvadratning to‘rttala burchagida joylashgan yopiq kvadratlar birlashmasini A_1 bilan belgilaymiz va A_1 ga tegishli kvadratlarni 1 - turga tegishli deb yuritamiz, ikkinchi qadamda esa A_1 to‘plamga tegishli bo‘lgan kvadratlarning har birini yana teng 9 ta kichik kvadratlarga ajratamiz va bu har bir 9 ta kichik kvadratlarning 1 - tur kvadratlar burchaklarida joylashgan kichik kvadratlar birlashmasini A_2 bilan belgilaymiz va A_2 ga tegishli kvadratlarni 2 - turga tegishli deb yuritamiz va bu jarayonni cheksiz marta davom ettiramiz. Natijada, kichik kvadratlardan tuzilgan $A_1, A_2, A_3, \ldots$ to‘plamlar ketma-ketligi hosil bo‘ladi va $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots$. Ushbu $A=\bigcap_k A_k$ to‘plam o‘lchovini hisoblang.

17. XOY tekislikda quyidagi to‘plamni aniqlaymiz: $W=\{(x,y): x\in[0,1],\ y\in K\}$, bunda K to‘plam Oy o‘qidagi Kantor to‘plami. /to‘plam o‘lchovini hisoblang.

18. To‘g‘ri chiziqdagi chegaralangan A o‘lchovli to‘plam uchun $\mu(A)=p>0$ bo‘lsin. U holda har qanday $q\,(0<q<p)$ son uchun o‘lchovi q ga teng bo‘lgan A ning qism to‘plami mavjudligini isbotlang.

19. Birorta ichki nuqtasi mavjud bo‘lgan o‘lchovli to‘plam o‘lchovi nolga teng bo‘lishi mumkinmi?

20. O’lchovi $b-a$ ga teng bo‘lgan $[a,b]$ kesmaning, $[a,b]$ dan farqli yopiq qism to‘plami mavjudmi?

21. Cheksiz o‘lchovga ega bo‘lgan kamayuvchi to‘plamlar ketma-ketligi kesishmasining o‘lchovi cheksiz bo‘ladimi?

22. Chekli o‘lchovga ega bo‘lgan o‘suvchi to‘plamlar ketma-ketligi birlashmasining o‘lchovi chekli bo‘ladimi?

23. To‘g‘ri chiziqdagi chegaralanmagan o‘lchovli to‘plam o‘lchovi chekli musbat songa teng bo‘lishi mumkinmi?

24. Isbotlang: agar to‘g‘ri chiziqda yotuvchi A to‘plam o‘lchovi musbat bo‘lsa, u holda bu to‘plamda shunday ikkita har xil nuqtalar topiladiki, ularning orasidagi masofa irratsional songa teng bo‘ladi.

25. Isbotlang: agar to‘g‘ri chiziqda yotuvchi $A\subset[a,b]$ to‘plam o‘lchovi musbat bo‘lsa, uholda bu to‘plamda shunday ikkita har xil nuqta topiladiki, ularning orasidagi masofa ratsional songa teng bo‘ladi.

26. Isbotlang: agar to‘g‘ri chiziqda yotuvchi A chegaralanmagan to‘plam o‘lchovi musbat bo‘lsa, uholda bu to‘plamda shunday ikkita har xil nuqta topiladiki, ularning orasidagi masofa ratsional songa teng bo‘ladi.

27. μ_F-2.7-misolda keltirilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi bo‘lsin. $\mu_F(K)=1$ ekanligini isbotlang. Bunda $K-$ Kantor to‘plami.

28. μ_F-2.7-misolda keltirilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi, $A(K\subset A)$ ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. $\mu_F(A)=1$ tenglikni isbotlang.

29. Elementar to‘plamlar sistemasida aniqlangan m' o‘lchovning additivlik xossasini isbotlang.

30. 2.3-teoremani μ o‘lchov uchun isbotlang. Bu xossa Lebeg o‘lchovining yarim additivlik xossasi deb ataladi.

31. $F(x)=x$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi absolyut uzluksiz o‘lchov bo‘ladimi?

32. $F(x)=2[x]+1$ funksiya yordamida qurilgan Lebeg-Stiltes o‘lchovi diskret o‘lchov bo‘ladimi?

33. Singulyar Lebeg-Stiltes o‘lchoviga misollar keltiring.

34. Elementar to‘plamlar sistemasi halqa tashkil qiladimi?

35. Lebeg maHnosida o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\sigma-$algebra tashkil qiladimi?

36. $[0;1]$ kesmadagi barcha irratsional sonlar to‘plamini X bilan belgilaymiz. Σ_m orqali X ning $(a;b)$ intervallar, $[a;b]$ kesmalar va $[a;b),(a;b]$ yarim intervallar bilan kesishmalaridan iborat to‘plamlar sistemasini belgilaymiz. Agar $A_{ab}=X\bigcap(a;b)$ $(\bigcap[a;b],\bigcap(a;b],\ \bigcap[a;b))$ desak, har bir A_{ab} to‘plamga $m(A_{ab})=b-a$ sonni mos qo‘yamiz. Bu to‘plam funksiyasi m σ-additiv o‘lchov bo‘ladimi?

37. Har bir $A\subset R=(-\infty;\infty)$ to‘plamga

$$m(A)=\sum_{n\in N\bigcap A}\frac{1}{2^n}$$

sonni mos qo‘yamiz. m to‘plam funksiyasi o‘lchov bo‘lishini ko‘rsating. $A=(-\infty;0)$ va $B=[1;4]$ to‘plamlarning o‘lchovlarini toping.

38. Yuqorida aniqlangan m o‘lchov $\sigma-$ additiv o‘lchov bo‘ladimi?

39. $\sigma-$halqa bo‘lmagan, ammo sanoqli sondagi to‘plamlar kesishmasiga nisbatan yopiq bo‘lgan halqaga misollar keltiring.

40. Faraz qilaylik, f $[0,1]$ kesmada aniqlangan nomanfiy funksiya bo‘lsin. Har bir $A=\{x_1,x_2,...,x_n\},x_k\in[0,1]$ chekli to‘plam uchun $\mu(A)=\bigcup_{k=1}^{n}f(x_k)$ bo‘lsin. $\mu(A)$ to‘plam funksiyaning sanoqli additiv o‘lchov ekanligini isbotlang.

2 amaliy mashg‘ulot. Lebeg o‘lchovlari.

Birli (birlik elementli) yarim halqada aniqlangan o‘lchovni Lebeg maHnosida davom ettirish. Agar $\pounds_m$ yarim halqada aniqlangan m o‘lchov additivlik xossasiga ega bo‘lib, ammo $\sigma-$ additiv bo‘lmasa, u holda m ning $\pounds_m$ dan $\Re(\pounds_m)$ ga davomi bilan o‘lchovni davom ettirish jarayoni tugaydi, yaHni m o‘lchovni $\Re(\pounds_m)$ dan kengroq sinfga davom ettirib bo‘lmaydi. Agar $\pounds_m$ da aniqlangan m o‘lchov $\sigma-$ additiv bo‘lsa, u holda m ni $\pounds_m$ dan $\Re(\pounds_m)$ ga nisbatan kengroq bo‘lgan va qandaydir maHnoda maksimal sinfga davom ettirish mumkin.

Bizga biror $\pounds_m$ birli yarim halqada aniqlangan $\sigma-$ additiv m o‘lchov berilgan bo‘lsin va E to‘plam $\pounds_m$ halqaning biri bo‘lsin. E ning barcha qism to‘plamlaridan tashkil bo‘lgan $M(E)$ sistemada tashqi o‘lchov deb ataluvchi μ^* funksiyani quyidagi usulda aniqlaymiz.

2.1-TA'RIF. *Ixtiyoriy* $A \subset E$ *to'plam uchun*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_n B_n} \sum_n m(B_n) \tag{4.1}$$

son A *to'plamning tashqi o'lchovi deb ataladi, bu yerda aniq quyi chegara* A *to'plamni qoplovchi barcha chekli yoki sanoqli* $\{B_n\}, B_n \in £_m$ *to'plamlar sistemasi bo'yicha olinadi.*

2.1-teorema. *(Sanoqli yarim additivlik). Agar* A *va sanoqlita* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *to'plamlar uchun*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

bo'lsa, u holda

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

2.2-TA'RIF. *Agar* $A \subset E$ *to'plam va istalgan* $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $B \in \Re(£_m)$ *to'plam mavjud bo'lib,*

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A *(Lebeg maHnosida) o'lchovli to'plam deyiladi.*

Faqat o'lchovli to'plamlar sinfida aniqlangan μ^* funksiya Lebeg o'lchovi deb ataladi va u μ harfi bilan belgilanadi. Ravshanki, $£_m$ va $\Re(£_m)$ dan olingan to'plamlar o'lchovli bo'ladi. Bunda, agar $A \in £_m$ va $B \in \Re(£_m)$ bo'lsa, u holda

$$\mu(A) = m(A), \quad \mu(B) = m'(B).$$

Agar A o'lchovli to'plam va $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $B \in \Re(£_m)$ to'plam berilgan bo'lsa,

$$A \Delta B = (E \setminus A) \Delta (E \setminus B)$$

tenglikdan A ning to'ldiruvchi to'plami $E \setminus A$ ning ham o'lchovli ekanligi kelib chiqadi.

2.2-teorema. *O'lchovli to'plamlar sistemasi* $\Im(M)$ *halqa bo'ladi.*

2.1-eslatma. $£_m$ ning birlik elementi - E o'lchovli to'plamlar sistemasi $\Im(M)$ uchun ham birlik element bo'ladi, shuning uchun o'lchovli to'plamlar sistemasi $\Im(M)$ algebra tashkil qiladi.

2.3-teorema. O'lchovli to'plamlar sistemasi $\Im(M)$ *da aniqlangan* μ *to'plam funksiyasi additivdir.*

2.4-teorema. O'lchovli to'plamlar sistemasi $\Im(M)$ *da aniqlangan* μ *to'plam* *funksiyasi $\sigma-$ addituvdir.*

2.5-teorema. Lebeg bo‘yicha o‘lchovli bo‘lgan barcha to‘plamlar sistemasi $\Im(M)$, *birlik elementli $\sigma-$ algebra, bunda E to‘plam birlik elementdir.*

Tekislikdagi to‘plamlarning Lebeg o‘lchovi (5-§ ga qarang) xossalariga o‘xshash, o‘lchovning $\sigma-$ additivlik xossasidan unung uzluksizlik xossasi kelib chiqadi. YaHni, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ o‘lchovli to‘plamlar ketma-ketligi uchun $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsa, u holda

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

bo‘ladi. Xuddi shuningdek, agar biror o‘lchovli to‘plamlarning $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ ketma-ketligi uchun $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsa, u holda

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

tenglik o‘rinli.

Shunday qilib, agar birlik elementli $£_m$ yarim halqada $\sigma-$ additiv m o‘lchov berilgan bo‘lsa, bu o‘lchovni Lebeg maHnosida davom ettirish natijasida $\Im(M)$ $\sigma-$ algebrada aniqlangan $\sigma-$ additiv μ o‘lchov hosil bo‘lar ekan.

2.3-TA’RIF. *O’lchovli to‘plamlar sistemasi $\Im(M)$ da aniqlangan va $\Im(M)$ da tashqi o‘lchov μ^* bilan ustma-ust tushuvchi μ funksiya m o‘lchovning $\mu = L(m)$ Lebeg maHnosidagi davomi deb ataladi.*

Birlik elementga ega bo‘lmagan yarim halqada berilgan o‘lchovni davom ettirish. Agar m o‘lchov birlik elementga ega bo‘lmagan $£_m$ yarim halqada aniqlangan bo‘lsa, u holda avvalgi banddagi o‘lchovni Lebeg maHnosida davom ettirish jarayonida baHzi o‘zgarishlar sodir bo‘ladi. Aniqrog‘i, μ^* tashqi o‘lchov chekli $\sum_n m(B_n)$ yig‘indiga ega bo‘lgan $\bigcup_n B_n \in £_m$, qoplamasi mavjud bo‘lgan A to‘plamlar uchun aniqlanadi. To‘plam o‘lchovliligi TA’RIFi o‘zgarishsiz qoladi. 4.2–4.4-teoremalar va 4.3-TA’RIF o‘z kuchini saqlab qoladi. Yarim halqada birlik elementning mavjudligidan 4.2- teorema isbotida foydalaniladi. Umumiy holda ham 4.2-teoremani isbotlash mumkin. Buning uchun $A_1, A_2 \in \Im(M)$ dan $A_1 \cup A_2 \in \Im(M)$ kelib chiqishini birlik elementga bog‘liqsiz ravishda ko‘rsatish kerak. Bu tasdiq

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

munosabatdan kelib chiqadi.

$£_m$ yarim halqada bir mavjud bo‘lmagan holda 4.5-teorema quyidagi teoremaga almashtiriladi.

2.6-teorema. *Istalgan boshlang'ich / o'lchov uchun Lebeg bo'yicha o'lchovli to'plamlar sistemasi* $\Im(M)$ $\delta-$ *halqa bo'ladi. Sanoqli sondagi o'lchovli* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *to'plamlar birlashmasi bo'lgan* $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *to'plamning o'lchovli bo'lishi uchun* $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ *qiymatning* n *ga bog'liq bo'lmagan holda yuqoridan biror o'zgarmas bilan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

2.1-natija. *O'lchovli to'plamlar sinfi* $\Im(M)$ *va* $A\in\Im(M)$ *to'plam berilgan bo'lsin.* A *to'plamning barcha* $B\in\Im(M)$ *qism to'plamlaridan tuzilgan* $\Im(M(A))$ *sistema* $\sigma-$ *algebra bo'ladi.*

Misol uchun, agar $\Im(M)$ sonlar o'qidagi Lebeg maHnosida o'lchovli to'plamlar sinfi va $A=[a,b]$ - ixtiyoriy kesma bo'lsa, u holda $[a,b]$ kesmada joylashgan o'lchovli to'plamlar sistemasi $\sigma-$ algebra tashkil qiladi.

2.4-TA'RIF. *Agar* $\mu(A)=0$ *va* $A'\subset A$ *bo'lishidan* A' *ning o'lchovli ekanligi kelib chiqsa,* μ *o'lchov to'la deb ataladi.*

TA'RIFda keltirilgan A' to'plam uchun $\mu(A')=0$ bo'ladi. Qiyinchiliksiz isbotlash mumkinki, ixtiyoriy o'lchovning Lebeg maHnosida davomi to'la bo'ladi. Haqiqatan ham, $A'\subset A$, $\mu(A)=\mu^*(A)=0$ bo'lsa, $\mu(A')=0$ bo'ladi va $\varnothing\in$ £$_m$ ni olsak,

$$\mu^*(A'\Delta\varnothing) = \mu^*(A') = 0,$$

yaHni A' o'lchovli bo'lishi kelib chiqadi.

Umuman olganda $\sigma-$ algebrada aniqlangan har qanday $\sigma-$ additiv o'lchovni to'la o'lchovgacha davom ettirish mumkin. Buning uchun nol o'lchovli to'plamning ixtiyoriy qismiga nolni mos qo'yish kifoya qiladi.

2.1-misol. Bizga ixtiyoriy sanoqli

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

to'plam berilgan bo'lsin. $p_n>0$ sonlarni shunday tanlaymizki,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

bo'lsin. Har bir $A\subset X$ to'plamga

$$m(A) = \sum_{x_n\in A} p_n$$

sonni mos qo'yamiz. Aniqlanishiga ko'ra, $m(A)$ to'plam funksiyasi o'lchov bo'ladi va X ning barcha qism to'plamlari o'lchovli bo'ladi. Bundan tashqari, $m(X)=1$.

Endi X ning o‘zaro kesishmaydigan sanoqlita ixtiyoriy $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ qism to‘plamlarini olaylik va $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ bo‘lsin. Aniqlanishiga ko‘ra,

$$m(A) = \sum_{x_k \in A} p_k$$

va tenglik o‘ng tomonidagi qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun

$$m(A) = \sum_{x_k \in A} p_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x_k \in A_n} p_k = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

tengliklar o‘rinli, yaHni m $\sigma-$ additiv o‘lchov bo‘ladi.

2.2-misol. $[0;1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to‘plamini X bilan belgilaymiz. Σ_m orqali X ning $(a;b)$ intervallar, $[a;b]$ kesmalar va $[a;b), (a;b]$ yarim intervallar bilan kesishmalaridan iborat to‘plamlar sistemasini belgilaymiz. Ko‘rsatish mumkinki, Σ_m yarim halqa bo‘ladi. Agar $A_{ab} = X \bigcap (a;b) \left(\bigcap [a;b], \bigcap (a;b], \bigcap [a;b) \right)$ desak, har bir A_{ab} to‘plamga

$$m(A_{ab}) = b - a$$

sonni mos qo‘yish mumkin. Bu to‘plam funksiyasi m additiv o‘lchov bo‘ladi, ammo $\sigma-$ additiv bo‘lmaydi. Chunki $[0;1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to‘plami sanoqli, yaHni $X = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ tenglik o‘rinli. Birinchidan $A_{01} = X \bigcap [0;1]$ to‘plam uchun $m(A_{01}) = 1$ bo‘ladi, ikkinchi tomondan $A_{01} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ o‘zaro kesishmaydigan sanoqlita nol o‘lchovli $A_n = X \bigcap [r_n; r_n]$ to‘plamlarning yig‘indisidan iborat bo‘ladi, yaHni

$$m(A_{01}) = 1 \neq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0.$$

Ushbu 3-§ da va 4-§ da qaralayotgan o‘lchovlarni $\sigma-$ additiv o‘lchovlar deb hisoblaymiz.

Masalalar

1. $[0;1]$ kesmadagi barcha irratsional sonlar to‘plamini X bilan belgilaymiz. Σ_m orqali X ning $[a;b)$ yarim intervallar bilan kesishmalaridan iborat to‘plamlar sistemasini belgilaymiz. Bu sistemaning yarim halqa ekanligini ko‘rsating.

2. 1-topshiriqda aniqlangan Σ_m yarim halqaning har bir $A_{ab} = X \cap [a;b)$ to‘plamiga $m(A_{ab}) = b - a$ sonni mos qo‘yamiz. Bu to‘plam funksiyasi o‘lchov bo‘lishini ko‘rsating.

3. 2-topshiriqda aniqlangan $m:\Sigma_m \to R$ o‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomini toping. Uni sonlar o‘qidagi Lebeg o‘lchovi bilan ustma-ust tushishini isbotlang.

4. Faraz qilaylik, $X = N$ natural sonlar to‘plami va $\mathfrak{R}$ - X ning barcha chekli to‘plamlaridan tuzilgan sistema hamda $\varnothing \in \mathfrak{R}$ bo‘lsin. Har bir $A \in \mathfrak{R}$ uchun A to‘plamdagi elemementlar soni $\mu(A)$ ni mos qo‘yamiz. $\mu(A)$ ning o‘lchov ekanligini ko‘rsating va $\mu(A)$ o‘lchovning Lebeg maHnosidagi davomini quring.

5. Faraz qilaylik, μ_1, μ_2 to‘plam funksiyalar $\mathfrak{R}$ halqada aniqlangan $\sigma-$additiv o‘lchovlar bo‘lsin. Ixtiyoriy nomanfiy α, β sonlar uchun $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ to‘plam funksiya $\mathfrak{R}$ halqada σ - additiv o‘lchov bo‘lishini isbotlang.

3 amaliy mashg‘ulot. O’lchovli funksiyalar

Bu paragrafda uzluksiz funksiyaga «qaysidir» maHnoda yaqin bo‘lgan o‘lchovli funksiya tushunchasini kiritamiz. O’lchovli funksiyalar Lebeg integrali tushunchasini kiritishda asosiy manba hisoblanadi.

Bizga $E \subset R^2 \, (E \subset R)$ Lebeg maHnosida o‘lchovli to‘plam va unda aniqlangan haqiqiy qiymatli f funksiya berilgan bo‘lsin.

3.1-TA’RIF. *Agar ixtiyoriy* $c \in R$ *uchun* $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ *to‘plam o‘lchovli bo‘lsa,* f *funksiya* E *to‘plamda o‘lchovli deyiladi.*

3.1-misol. $f : E \to R,\quad f(x) \equiv a = const$ funksiyaning o‘lchovli ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$E(f < c) = \{x \in E : f(x) < c\} = \begin{cases} E, & \text{agar} \quad c > a, \\ \varnothing, & \text{agar} \quad c \le a \end{cases}$$

tenglik o‘rinli. E va $\varnothing$ to‘plamlar o‘lchovli. Demak, ixtiyoriy $c \in R$ uchun $E(f < c)$ to‘plam o‘lchovli ekan. TA’RIFga ko‘ra, $f(x) = a$ funksiya E da o‘lchovli funksiya bo‘ladi.

3.2-misol. *Agar* f *funksiya* E *to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy* $a, b \in R$ *lar uchun quyidagi to‘plamlarning har biri o‘lchovli bo‘lishini isbotlang:*

1) $E(f \ge a)$; 2) $E(a \le f < b)$; 3) $E(f = a)$; 4) $E(f \le a)$; 5) $E(f > a)$.

Yechish. Faraz qilaylik, f o‘lchovli funksiya bo‘lsin, u holda TA’RIFga ko‘ra, ixtiyoriy $a \in R$ uchun $E(f < a)$ to‘plam o‘lchovli bo‘ladi.

1) $E(f \ge a) = E \setminus E(f < a)$ tenglikdan hamda o‘lchovli to‘plamning to‘ldiruvchisi o‘lchovli ekanligidan $E(f \ge a)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

2) $E(a \le f < b) = E(f \ge a) \cap E(f < b)$ tenglikdan hamda o‘lchovli to‘plamlar kesishmasi o‘lchovli ekanligidan $E(a \le f < b)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

3) $E(f = a)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligini ko‘rsatamiz:

$$E(f = a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(a \le f < a + \frac{1}{n}\right).$$

Bunda $E(a \le f < a + 1/n)$ to‘plam 2) ko‘rinishdagi to‘plam bo‘lgani uchun u o‘lchovli. O’lchovli to‘plamlarning sanoqli sondagi kesishmasi o‘lchovli bo‘lgani uchun $E(f = a)$ to‘plam o‘lchovli bo‘ladi.

4) $E(f \le a)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi TA’RIFdan, 3) dan hamda $E(f \le a) = E(f < a) \cup E(f = a)$ tenglikdan kelib chiqadi.

5) $E(f > a) = E \setminus E(f \le a)$ tenglikdan hamda o‘lchovli to‘plamlar to‘ldiruvchi to‘plamining o‘lchovliligidan kelib chiqadi.

3.3-misol. Agar ixtiyoriy $a \in R$ uchun $E(f \le a)$ to‘plam o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda f funksiyaning E to‘plamda o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

Yechish. Ixtiyoriy $a \in R$ uchun ushbu $E(f \le a)$ to‘plam o‘lchovli bo‘lsin. U holda quyidagi tengliklarga ko‘ra

(i) $E(f > c) = E \setminus E(f \le c),\ c \in R;$

(ii) $E(c < f \le d) = E(f > c) \cap E(f \le d),\ c, d \in R;$

(iii) $E(f = c) = \cap_{n=1}^{\infty} E\left(c - \frac{1}{n} < f \le c\right),\ c \in R;$

(iv) $E(f \ge c) = E(f > c) \cup E(f = c),\ c \in R$

ushbu $E(f > c),\ E(c < f \le d),\ E(f = c),\ E(f \ge c)$ to‘plamlar har biri o‘lchovlidir. Natijada ushbu $E(f < a) = E \setminus E(f \ge a),\ a \in R$ tenglikdan ixtiyoriy $a \in R$ uchun $E(f < a)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi. Demak, TA’RIFga ko‘ra f *funksiya* E to‘plamda o‘lchovlidir.

3.4-misol. *Agar ixtiyoriy* $a \in R$ *uchun 5.2-misoldagi 1), 5) ko‘rinishdagi to‘plamlarning birortasi o‘lchovli bo‘lsa, u holda* f *fuknsiya* E *to‘plamda o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.*

Yechish. 1). Ixtiyoriy $c \in R$ uchun ushbu $E(f \ge c)$ to‘plam o‘lchovli bo‘lsin. Ushbu $E(f < c) = E \setminus E(f \ge c)$ tenglikdan o‘lchovli to‘plamlar xossasiga ko‘ra $E(f < c)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

2). Ixtiyoriy $c \in R$ uchun ushbu $E(f > c)$ to‘plam o‘lchovli bo‘lsin. Ushbu $E(f < c) = E \setminus (E(f > c) \cup E(f = c))$ tenglikdan o‘lchovli to‘plamlar xossasiga ko‘ra $E(f < c)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

3.5-misol. *Agar f va g lar E da o'lchovli funksiyalar bo'lsa, u holda*

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\}$$

to'plam o'lchovli ekanligini ko'rsating.

Yechish. Ratsional sonlar to'plami sanoqli bo'lgani uchun uning elementlarini nomerlab chiqamiz, yaHni $Q = \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots\}$ va quyidagi tenglikni isbotlaymiz:

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(E(f > r_k) \cap E(g < r_k) \right). \tag{5.1}$$

Faraz qilaylik, $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ bo'lsin, u holda ratsional sonlarning zichlik xossasiga ko'ra shunday $r_k \in Q$ mavjudki, $f(x_0) > r_k > g(x_0)$ munosabat o'rinli bo'ladi. Demak,

$$x_0 \in \{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}.$$

Bundan

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\} \right)$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\} \right)$$

ixtiyoriy nuqta bo'lsin, u holda x_0 birlashmadagi to'plamlarning hech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'ladi, yaHni shunday $r_k \in Q$ mavjudki, bir vaqtda $f(x_0) > r_k$ va $g(x_0) < r_k$ bo'ladi. Bundan $f(x_0) > g(x_0)$ ekanligi va demak $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ ekanligi kelib chiqadi.

Biz (5.1) tenglikni isbotladik. $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$ to'plam o'lchovliligi isboti (5.1) tenglikdan, hamda o'lchovli to'plamlarning sanoqli birlashmasi yana o'lchovli to'plam ekanligidan kelib chiqadi.

3.2-TA'RIF. *E o'lchovli to'plamda aniqlangan f va g funksiyalar uchun*

$$\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

bo'lsa, f va g lar ekvivalent funksiyalar deyiladi va $f \sim g$ shaklda belgilanadi.

Biz aynan nol funksiyaga ekvivalent bo'lgan funksiyalarni θ (yoki $\theta(x)$) bilan belgilaymiz.

3.1-teorema. *Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda ularning yig'indisi $f+g$, ayirmasi $f-g$ va ko'paytmasi $f \cdot g$ E to'plamda o'lchovli bo'ladi. Agar $g(x) \neq \theta(x)$ bo'lsa, u holda f/g funksiya ham E da o'lchovli bo'ladi.*

Shunday qilib, o'lchovli funksiyalar to'plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligi haqidagi xossalari bilan tanishdik.

E o'lchovli to'plamda f funksiya va $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

3.3-TA'RIF. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ *uchun shunday* $n_0 > 0$ *mavjud bo'lib, barcha* $n > n_0$ *va ixtiyoriy* $x \in E$ *lar uchun* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *bo'lsa, u holda* $\{f_n\}$ *funksiyalar ketma-ketligi* E *to'plamda* f *funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.*

3.4-TA'RIF. *Agar har bir* $x \in E$ *da* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *bo'lsa, u holda* $\{f_n\}$ *funksiyalar ketma-ketligi* f *ga nuqtali yaqinlashadi deyiladi.*

Quyidagi teorema o'lchovli funksiyalar to'plamining limitga o'tish (nuqtali yaqinlashish) amaliga nisbatan ham yopiqligini ifodalaydi.

3.2-teorema. Agar E *to'plamda* $\{f_n\}$ *o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi har bir* $x \in E$ *da* $f(x)$ *ga yaqinlashsa, u holda limit funksiya* f E *to'plamda o'lchovli bo'ladi.*

3.6-misol. Agar $f : E \to R$ o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda f funksiya E ning ixtiyoriy o'lchovli A qismida ham o'lchovli funksiya bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$\{x \in A : f(x) < c\} = E(f < c) \cap A$$

tenglik o'rinli. $E(f < c)$ va A to'plamlar o'lchovli bo'lganligi uchun $\{x \in A : f(x) < c\}$ to'plam ham o'lchovli bo'ladi. TA'RIFga ko'ra, f funksiya A da o'lchovli bo'ladi.

Masalalar

1. O'lchovli bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.

2. O'lchovli bo'lmagan, lekin moduli o'lchovli bo'lgan funksiyaga misol keltiring.

3. Shunday f va g funksiyalarga misol keltiringki, ularning yig'indisi o'lchovli bo'lsin, lekin ayirmasi o'lchovli bo'lmasin.

4. Shunday f va funksiyalarga misol keltiringki, ularning ko'paytmasi o'lchovli bo'lsin, lekin yig'indisi o'lchovli bo'lmasin.

5. Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \in R \setminus Q, \\ 1, & \text{agar} \quad x \in Q \end{cases}$$

ning [0;3] to'plamda o'lchovli ekanligini TA'RIF yordamida ko'rsating.

6. Agar *f(x)* funksiya E to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, u holda $h(x)=[f(x)]$ ning o‘lchovli ekanligini isbotlang. Bu yerda $[x]$ bilan x ning butun qismi belgilangan.

7. Agar $[f(x)]^{11}$ funksiya E da o‘lchovli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya E to‘plamda o‘lchovli bo‘ladimi?

8. Agar $[f(x)]^{10}$ funksiya E da o‘lchovli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya E to‘plamda o‘lchovli bo‘ladimi?

9. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiya E da o‘lchovli bo‘lsa, u holda

$$m(x)=\min\{f(x),g(x)\},\ x\in E,$$
$$M(x)=\max\{f(x),g(x)\},\ x\in E$$

10. Funksiyalar E to‘plamda o‘lchovli ekanligini ko‘rsating.

11. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ ning qismi bo‘lgan ixtiyoriy $[\alpha,\beta]$ $(a<\alpha<\beta<b)$ kesmada o‘lchovli bo‘lsa, u holda *f(x)* funksiya $[a,b]$ da o‘lchovli ekanligini ko‘rsating.

12. Faraz qilaylik A - to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy to‘plam, K – Kantor to‘plami. U holda ushbu

$$f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ agar } x\in A\cap K, \\ x-1, \text{ agar } x\notin A\cap K \end{cases}$$

funksiya [0,1] da o‘lchovli bo‘ladimi?

13. Agar $[a,b]$ to‘plamning har bir nuqtasida *f(x)* funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lsa, u holda $f'(x)$hosila funksiyaning $[a,b]$ da o‘lchovli ekanligini ko‘rsating.

14. Ushbu $\chi_A(x),\ A\subset R$ xarakteristik funksiyaning R da o‘lchovli bo‘lishi uchun, A to‘plamning o‘lchovli bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini ko‘rsating.

15. Agar *f(x)* funksiya E da o‘lchovli bo‘lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya E to‘plamda o‘lchovli bo‘ladimi?

16. Faraz qilaylik, *f(x)* funksiya E to‘plamda o‘lchovli funksiya, A to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy ochiq yoki yopiq to‘plam bo‘lsin. A to‘plam asli $f^{-1}(A)$ o‘lchovli to‘plam bo‘ladimi?

17. Faraz qilaylik, *f(x)* funksiya E to‘plamda o‘lchovli funksiya, A to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. A to‘plam asli $f^{-1}(A)$ o‘lchovli to‘plam bo‘ladimi?

18. Faraz qilaylik, *f(x)* funksiya E to‘plamda o‘lchovli funksiya, $A\subset E$ - ixtiyoriy o‘lchovli qismto‘plam bo‘lsin. A to‘plam asli $f^{-1}(A)$ o‘lchovli to‘plam bo‘ladimi?

19. Faraz qilaylik, *g(t)* funksiya *E* to‘plamda o‘lchovli funksiya, *B=g(E)* – *g(t)* funksiyaning qiymatlar to‘plami bo‘lsin. Agar *f(x)* funksiya *B* to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda *F(t)=f(g(t))* funksiyaning *E* to‘plamda o‘lchovli ekanligini isbotlang.

20. Faraz qilaylik, *g(t)* funksiya *E*=[*a*,*b*] to‘plamda uzluksiz, *B=g(E)* – *g(t)* funksiyaning qiymatlar to‘plami bo‘lsin. Agar *f(x)* funksiya *B* to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, u holda *F(t)= f(g(t))* funksiyaning *E* to‘plamda o‘lchovli bo‘ladimi?

21. Agar *g(t)* funksiya *R* to‘plamda uzluksiz funksiya bo‘lsa, u holda *g(t)* funksiyaning *R* da o‘lchovli ekanligini isbotlang.

4 amaliy mashg‘ulot. Invariant o‘lchovlar. Ergodik teoremalar.

Bu paragrafda ekvivalent funksiyalar, ularning ayrim xossalari va o‘lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining turli yaqinlashishlari orasidagi bog‘lanishlarni keltiramiz.

4.1-TA’RIF. E o‘lchovli to‘plamda aniqlangan *f va g funksiyalar uchun*

$$\mu\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}=0$$

bo‘lsa, f va g lar ekvivalent funksiyalar deyiladi va $f\sim g$ kabi belgilanadi.

4.1-misol. Dirixle funksiyasi

$$D(x)=\begin{cases}0, & \text{agar} \quad x\in R\setminus Q\\ 1, & \text{agar} \quad x\in Q,\end{cases}$$

Riman funksiyasi

$$R(x)=\begin{cases}0, \ \text{agar}\ x-\text{irratsional son bo'lsa}\\ \dfrac{1}{n}, \ \text{agar}\ x=\dfrac{m}{n}\ \text{qisqarmas kasr bo'lsa}\ (m\in Z, n\in N)\end{cases}$$

berilgan. Bu funksiyalar qaysi birinol $\theta(x)\equiv 0$ funksiyaga, qaysi biri bir $I(x)\equiv 1$ funksiyaga ekvivalent bo‘ladi.

Yechish. MaHlumki, Q sanoqli to‘plam, shuning uchun $\mu(Q)=0$. Lebeg o‘lchovi - to‘la o‘lchov, shunday ekan, ixtiyoriy $A\subset Q$ uchun $\mu(A)=0$. Endi bu funksiyalarni ekvivalentlikka tekshiramiz:

$$\{x: D(x)\neq\theta(x)\}=Q, \quad \{x: R(x)\neq\theta(x)\}=Q,$$
$$\{x: D(x)\neq R(x)\}\subset Q, \quad \{x: D(x)\neq I(x)\}=R\setminus Q.$$

Bu yerdan quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$\mu\{x: D(x)\neq\theta(x)\}=\mu\{x: R(x)\neq\theta(x)\}=\mu\{Q\}=0,$$

$$\mu\{x : D(x) \neq R(x)\} = 0, \quad \mu\{x : D(x) \neq I(x)\} = \mu\{R \setminus Q\} \neq 0.$$

Demak, $D \sim \theta$, $R \sim \theta$, $R \sim D$ bo‘ladi. I bilan D ekvivalent emas.

4.2-TA’RIF. Agar biror xossa E *to‘plamning nol o‘lchovli qism to‘plamidan boshqa barcha nuqtalarida bajarilsa, bu xossa* E *to‘plamda deyarli bajariladi deyiladi.*

MaHlumki, agar ikkita funksiya deyarli teng bo‘lsa, ular ekvivalentdir.

4.2-misol. Aytaylik, $E = A_1 \cup A_2$ va $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ bo‘lsin. Agar $f_1 : A_1 \to R$ va $f_2 : A_2 \to R$ funksiyalar o‘lchovli bo‘lsa, u holda

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{agar} \quad x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{agar} \quad x \in A_2 \end{cases}$$

E da o‘lchovli funksiya bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish. Ixtiyoriy $c \in R$ da

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \{x \in A_1 : f_1(x) < c\} \cup \{x \in A_2 : f_2(x) < c\}$$

to‘plam - o‘lchovli. Demak, f funksiya- E da o‘lchovli.

4.3-misol. Nol o‘lchovli A to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy $f : A \to R$ funksiyaning o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

Yechish. O’lchovi nolga teng to‘plamning ixtiyoriy qismi

$$\{x \in A : f(x) < c\} \subset A$$

o‘lchovli, shuning uchun, $f - A$ da o‘lchovli funksiya bo‘ladi.

4.4-misol. Agar f *funksiya* E *o‘lchovli to‘plamda aniqlangan bo‘lib, o‘lchovli* $g : E \to R$ *funksiyaga ekvivalent bo‘lsa, u holda* f *ham* E *da o‘lchovli funksiya bo‘ladi.*

Yechish. Faraz qilaylik, g -o‘lchovli, $f \sim g$ bo‘lsin, va $A = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ bo‘lsin. U holda $E | A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ va $\mu(E | A) = 0.$

Natijada, 4.2-va 4.3- misollarga ko‘ra, ushbu funksiya

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} x \in E \backslash A \\ g(x), & \text{agar } x \in A \end{cases}$$

E da o‘lchovli funksiya bo‘ladi.

4.1. Deyarli yaqinlashish. Bizga E o‘lchovli to‘plamda aniqlangan $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

4.3-TA’RIF. Agar E *to‘plamda aniqlangan* $\{f_n\}$ *funksiyalar ketma-ketligining* f *funksiyaga yaqinlashmaydigan nuqtalari to‘plamining o‘lchovi nol bo‘lsa, yaHni*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

tenglik E dagi deyarli barcha x lar uchun o'rinli (yoki

$$A = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \right\}, \quad \mu(E \setminus A) = 0. \text{)}$$

bo'lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashadi deyiladi

4.5-misol. $f_n(x) = \cos^n x, \quad E = [0;2\pi]$ funksiyalar ketma-ketligining nol funksiyaga deyarli yaqinlashishini ko'rsating.

Yechish.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos x)^n = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \in (0;2\pi) \setminus \{\pi\}, \\ \text{mavjud emas}, & x = \pi, \\ 1, & \text{agar } x \in \{0, 2\pi\}. \end{cases}$$

Demak,

$$A = \left\{ x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \right\} = E \setminus \{0, \pi, 2\pi\}, \quad \mu(E \setminus A) = \mu\{0, \pi, 2\pi\} = 0.$$

TA'RIFga asosan, $f_n(x) = \cos^n x$ funksiyalar ketma-ketligi $E = [0;2\pi]$ to'plamda nol $\theta(x) = 0$ funksiyaga deyarli yaqinlashadi.

4.1-teorema. Agar *E to'plamda $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsa, u holda limit funksiya f ham o'lchovlidir.*

MaHlumki, tekis yaqinlashishdan nuqtali yaqinlashish, nuqtali yaqinlashishdan esa deyarli yaqinlashish kelib chiqadi. Quyidagi munosabatlar o'rinli:

Текис яқинлашиш	$\Rightarrow$	Нуқтали яқинлашиш	$\Rightarrow$	Деярли яқинлашиш	$\Rightarrow$	Ўлчов бўйича яқинлашиш

Yegorov teoremasi deyarli yaqinlashish bilan tekis yaqinlashish orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

4.2-teorema (Yegorov). *E chekli o'lchovli to'plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun shunday $E_\delta \subset E$ to'plam mavjudki, uning uchun quyidagilar o'rinlidir:*

1) $\mu(E \setminus E_\delta) < \delta$,

2) *E_δ to'plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga tekis yaqinlashadi.*

4.2. O'lchov bo'yicha yaqinlashish. Bizga E o'lchovli to'plamda aniqlangan $\{f_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi va f o'lchovli funksiya berilgan bo'lsin.

4.4-TA'RIF. Agar ixtiyoriykichik $\delta > 0$ *uchun*

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x\in E : |f_n(x)-f(x)|\geq\delta\}=0$$

tenglik bajarilsa, u holda $\{f_n\}$ *funksiyalar ketma-ketligi* E *to'plamda* f *funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashadi deyiladi.*

4.3-teorema. Agar $\{f_n\}$ *o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi* $E\ (\mu(E)<\infty)$ *to'plamda* f *funksiyaga deyarli yaqinlashsa, u holda* $\{f_n\}$ *ketma-ketlik* E *to'plamda* f *ga o'lchov bo'yicha ham yaqinlashadi.*

"O'lchov bo'yicha yaqinlashishdan deyarli yaqinlashish kelib chiqadimi?" degansavoltug'iladi. Umuman olganda, o'lchov bo'yicha yaqinlashishdan deyarli yaqinlashish kelib chiqmaydi!

4.6-misol. Harbir $k\in N$ uchun $(0,1]$ yarim intervalda $f_1^{(k)}, f_2^{(k)},\ldots, f_k^{(k)}$ funksiyalarni quyidagi usul bilana niqlaymiz

$$f_i^{(k)}=\begin{cases}1, \ agar \ \dfrac{i-1}{k}<x\leq\dfrac{i}{k},\\ 0, \ agar \ x\in(0,1]\backslash\left(\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right].\end{cases}$$

bu yerda $i=1,\ldots k$. Bu funksiyalar har biri $(0,1]$ yarim intervalda o'lchovlidir.

Bu funksiyalarni quyi va yuqori indekslari yig'indisining o'sish tartibida joylashtirsak, $\{g_n\}$funksiyalar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Ushbu $\{g_n\}$ ketma-ketlikning nol funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashishini va har bir $x\in(0,1]$ uchun $g_n(x)$ nolga yaqinlashmasligini ko'rsating.

Yechish. Har bir $n\in\mathrm{N}$ uchun shunday k va i sonlar topiladiki, $f_i^{(k)}(x)=g_n(x)$ tenglik bajariladi va n cheksizga intilishi bilan k ham cheksizga intiladi. Demak, ixtiyoriy kichik $\delta>0$ uchun

$$\mu\{x:|g_n(x)|\geq\delta\}=\mu\{x: f_i^{(k)}(x)\geq\delta\}\leq\mu\left[\left(\frac{i-1}{k};\frac{1}{k}\right]\right]=\frac{1}{k}\to 0,\quad k\to\infty.$$

Oxirgi munosabat $\{g_n\}$funksiyalar ketma-ketligining nol funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashishini anglatadi.

Enli $\{g_n\}$funksiyalar ketma-ketligi$(0;1]$ intervaldagi har bir nuqtada nolga yaqinlashmasligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $x_0\in(0;1]$ nuqtani olamiz. Shunday k_n va i_n $(k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots)$ sonlar topiladiki,

$$x_0\in\left(\frac{i_n-1}{k_n};\frac{i_n}{k_n}\right]$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0)=\lim_{n\to\infty} f_{i_n}^{(k_n)}(x_0)=1\neq 0.$$

4.4-teorema. Agar $\{f_n\}$ *o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi* E *to'plamda* f *ga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u holda undan* f *ga deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.*

Masalalar

1. Agar f va g funksiyalar E to'plamda o'lchovli bo'lsa, u holda $h_-(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ va $h_+(x)=\max\{f(x),g(x)\}$

funksiyalarning o'lchovli bo'lishini isbotlang.

2. Agar $f\sim g$ va $g\sim\varphi$ bo'lsa, u holda $f\sim\varphi$ ekanligini isbotlang.

3. 6.6-misolda keltirilgan $\{g_n\}$ funksiyalar ketma-ketligidan nolga deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajrating.

4. 6.5-misol uchun Yegorov teoremasi shartlarini qanoatlantiruvchi E_δ, $\delta=10^{-3}$ to'plamni quring.

5. Dirixle va Riman funksiyalariga deyarli yaqinlashuvchi o'lchovli funksiyalar ketma-ketligini tuzing.

6. f funksiyaga har bir nuqtada yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan f_n funksiyalar ketma-ketligiga misol keltiring.

7. $f_n(x)=x^n$, $x\in[0;1]$ funksional ketma-ketlikning limit funksiyasini toping.

8. $f_n(x)=x^n$, $x\in[-1;1]$ funksional ketma-ketlik Dirixle(yoki Riman) funksiyasiga deyarli yaqinlashadimi?

9. Deyarli yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikning limit funksiyasi yagona bo'ladimi? Agar yagona bo'lmasa, bu haqda o'z fikringizni asoslang.

10. Faraz qilaylik, E o'lchovli to'plam va o'lchovi noldan farqli bo'lsin. Agar E to'plamda $\{f_n\}$ va $\{g_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi mos ravishda E to'plamda *f(x)* va *g(x)* funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u holda ushbu $h_n(x)=f_n(x)+g_n(x)\ (x\in E), n\in N$ funksiyalar ketma-ketligining E to'plamda *h(x)=f(x)+g(x)* funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashishini isbotlang.

11. Faraz qilaylik, E o'lchovli to'plam va o'lchovi noldan farqli bo'lsin. Agar E to'plamda $\{f_n\}$ va $\{g_n\}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi mos ravishda E to'plamda *f(x)* va *g(x)* funksiyaga o'lchov bo'yicha yaqinlashsa, u holda ushbu $h_n(x)=f_n(x)g_n(x)\ (x\in E), n\in N$ funksiyalar ketma-ketligining E to'plamda

$h(x)=f(x)g(x)$ funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishini isbotlang.

12. Faraz qilaylik, E o‘lchovli to‘plam va o‘lchovi noldan farqli bo‘lsin. Agar E to‘plamda $\{f_n\}$ va $\{g_n\}$($g_n(x)\neq 0$ deyarli barcha $x\in E$ larda) o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi mos ravishda E to‘plamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashsa, bu yerda $g(x)\neq 0$ deyarli barcha $x\in E$ larda, u holda ushbu $h_n(x)=\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)}\ (x\in E), n\in N$ funksiyalar ketma-ketligining E to‘plamda $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishini isbotlang.

13. Faraz qilaylik, E o‘lchovli to‘plamda $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f(x)$ funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashsin. Agar $f_n(x)\leq a,\ n\in N$ bo‘lsa, u holda $f(x)\leq a$ tengsizlikning deyarli E to‘plamda bajarilishini isbotlang.

14. [0,1] segmentda o‘lchov bo‘yicha yaqinlashuvchi, shunday o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligiga misol tuzingki,bu ketma-ketlik [0,1] segmentning biror nuqtasida yaqinlashuvchi bo‘lmasin.

15. Ushbu $f_n(x)=\chi_{\left(\sqrt{n},\sqrt{n+1}\right)}(x),\ x\in R$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligining R da nol funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishini ko‘rsating.

16. Ushbu $f_n(x)=\sin^n x,\ x\in R$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligining R da nol funksiyaga deyarli yaqinlashishini ko‘rsating.

17. Quyidagi funksiyalarning R da o‘lchovli ekanligini ko‘rsating:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(ne^{10x})}{n\sqrt[5]{n}},\ x\in R;$

2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1+\sin x},\ x\in R.$

18. Quyidagi funksiyalarning R^2 da o‘lchovli ekanligini ko‘rsating:

1) $f(x,y)=sign\sin\pi(x^2+y^2),\ x,y\in R;$

2) $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n\left(1+n[x^2+y^2]\right)},\ x,y\in R.$

19. Ushbu $f_n(x)=x^2+\sin^n x+\cos^n x,\ x\in R$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligining R da $f(x)=x^2$ funksiyaga deyarli yaqinlashishini ko‘rsating.

20. Ushbu $f_n(x,y)=\sin^n x+\cos^n y,\ x,y\in R$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligining R^2 da nol funksiyaga deyarli yaqinlashishini ko‘rsating.

5 amaliy mashg‘ulot. Gibbs o‘lchovlari (fizikada qo‘llanishi). Biologik dinamik

sistemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.

Biz ushbu paragrafda o‘lchovli funksiyalarni uzluksiz funksiyalar bilan yaqinlashtirish haqidagi teoremalar bilan tanishamiz.

5.1-teorema. Faraz qilaylik E *to‘plamda o‘lchovli va deyarli chekli qiymatlarni qabul qiluvchi* f *funksiya berilgan bo‘lsin.U holda ixtiyoriy* $\delta > 0$ *uchun shunday o‘lchovli chegaralangan* g *funksiya topiladiki, bunda* $\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} < \delta$ *tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.*

5.1-TA’RIF. f *funksiya* E *to‘plamda aniqlangan bo‘lsin va* $x_0 \in E$, $f(x_0) \neq \pm\infty$. *Quyidagi hollarda* f *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz deb yuritiladi: 1) agar* x_0 *nuqta* E *to‘plamning yakkalangan nuqtasi bo‘lsa; 2) agar* $x_0 \in E'$ *va* $x_n \to x_0$ *munosabatdan* $f(x_n) \to f(x_0)$ *munosabat kelib chiqsa.*

f funksiya E to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, f funksiya E to‘plamda uzluksiz deb yuritiladi.

Quyidagi teorema uzluksiz va o‘lchovli funksiyalar o‘rtasidagi muhim bog‘lanishni ifodalaydi.

5.2-teorema (Borel). Faraz qilaylik, $[a,b]$ *to‘plamda o‘lchovli va deyarli chekli qiymatlarni qabul qiluvchi* f *funksiya berilgan bo‘lsin. U holda ixtiyoriy* $\delta > 0$ *va ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *uchun* $[a,b]$ *da uzluksiz bo‘lgan shunday* g *funksiya mavjudki, bunda* $\mu\{x \in [a,b] : |f(x) - g(x)| \geq \delta\} < \varepsilon$ *tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda agar* $|f(x)| \leq C$ *bo‘lsa,* g *funksiyani ushbu* $|g(x)| \leq C$ *shartni qanoatlantiruvchi etib tanlash mumkin.*

5.1-natija. $[a,b]$ *segmentda o‘lchovli va deyarli chekli qiymatlarni qabu lqiluvch iixtiyoriy* f *funksiya uchun, o‘lchov bo‘yicha* f *ga yaqinlashuvchi* f_n *uzluksiz f unksiyalar ketma-ketligi mavjuddir.*

Ushbu xossadan vao‘lchov bo‘yicha yaqinlashuvchi funksiyalar ketma-ketligi xossasidan quyidagi teorema kelib chiqadi.

5.3-teorema(Freshe). $[a,b]$ *segmentda o‘lchovli va deyarli chekli qiymatlarni qabul qiluvchi ixtiyoriy* f *funksiya uchun, deyarli* f *ga yaqinlashuvchi uzluksiz funksiyalar ketma-ketligi mavjuddir.*

Yuqoridagi teorema yordamida o‘lchovli funksiyalar nazariyasida muhim ahamiyatga ega bo‘lgan Luzin teoremasi kelib chiqadi.

5.4-teorema (Luzin). $[a,b]$ *kesmada aniqlangan* f *funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun ixtiyoriy* $\varepsilon > 0$ *son uchun* $[a,b]$ *da uzluksiz bo‘lgan shunday* φ *funksiya mavjud bo‘lib,* $\mu\{x \in [a,b] : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$ *tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.*

5.2-natija. $[a,b]$ *kesmada uzluksiz funksiya o‘lchovlidir.*

5.1-misol. $[0;\pi]$ kesmada aniqlangan

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0,\pi] \setminus Q \\ \cos^2(\sin x), & x \in Q \end{cases}$$

funksiya o‘lchovli bo‘ladimi?

Yechish. Ushbu $\varphi(x) = \sin x, \quad x \in [0,\pi]$ uzluksiz funksiya uchun

$$\mu\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} = \mu([0,\pi] \cap Q) = 0 < \varepsilon$$

va bu tengsizlikdan hamda Luzin teoremasidan f funksiyaning $[0;\pi]$ kesmada o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

5.2-misol. $[0,1]$ to‘plamda ushbu chegaralanmagan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & \text{agar } x \in [0,1) \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x = 1 \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya o‘lchovli bo‘ladimi?

Yechish. Bizga ixtiyoriy kichik ε sonberilgan bo‘lsinva $\varepsilon > 0$. $[0,1]$ to‘plamda aniqlangan ushbu

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & \text{agar } x \in [0, 1-\varepsilon^2) \text{ bo'lsa,} \\ \dfrac{x-1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon^2}, & \text{agar } x \in [1-\varepsilon^2, 1] \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

uzluksiz funksiyani tuzib olamiz.

Luzin teoremasi va

$$\mu\{x \in [0,1] : f(x) \neq \varphi_\varepsilon(x)\} \leq \mu\left([1-\varepsilon^2, 1]\right) = \varepsilon^2 < \varepsilon$$

tengsizlikdan f funksiyaning $[0,1]$ kesmada o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi

5.3-misol. $[0,10\pi]$ to‘plamda ushbu chegaralanmagan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin^2 x}, & \text{agar } \ x \notin \{0, \pi, ..., 10\pi\} \quad \text{bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0, \pi, ..., 10\pi \quad \text{bo'lsa} \end{cases}$$

funksiya o‘lchovli bo‘ladimi?

Yechish. Bizga ixtiyoriy kichik ε son berilgan bo‘lsin va $\varepsilon > 0$. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\Delta_0 = \left[0, \frac{\varepsilon^2}{20}\right), \ \Delta_k = \left[\pi k - \frac{\varepsilon^2}{20}, \pi k + \frac{\varepsilon^2}{20}\right], \ k = 1, ...9, \ \Delta_{10} = \left(10\pi - \frac{\varepsilon^2}{20}, 10\pi\right]$$

va $t_0 = \frac{\varepsilon^2}{20}$, $t_k = \pi k - \frac{\varepsilon^2}{20}$, $k = 1,...9$, $t_{10} = 10\pi - \frac{\varepsilon^2}{20}$. $[0,10\pi]$ to‘plamda aniqlangan ushbu

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 x}, \text{ agar } x \notin \bigcup_{k=0}^{10} \Delta_k \text{ bo'lsa,} \\ f(t_k), \text{ agar } x \in \Delta_k, k \in \{0,1,...,10\} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

uzluksiz funksiyani tuzib olamiz.

Luzin teoremasi va

$$\mu\{x \in [0,1] : f(x) \neq \varphi_\varepsilon(x)\} = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{10} \Delta_k\right) = \varepsilon^2 < \varepsilon$$

tengsizlikdan f funksiyaning $[0,1]$ kesmada o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

Masalalar

1. (0,1) to‘plamda aniqlangan ushbu $f(x) = \frac{1}{1-x}$ o‘lchovli funksiya uchun 7.1-teorema shartlarining bajarilishini tekshiring.

2. $(0,\pi)$ to‘plamda aniqlangan ushbu $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ o‘lchovli funksiya uchun 7.1-teorema shartlarining bajarilishini tekshiring.

3. *E*=(0,1) to‘plamda aniqlangan ushbu $f(x) = \frac{1}{1-x}$ o‘lchovli funksiya uchun, ixtiyoriy $\delta > 0$ kichik son berilganda *E*=(0,1) to‘plamda shunday o‘lchovli chegaralangan/ funksiya topingki, bunda $\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} < \delta$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin (7.1-teoremaga qarang).

4. $E = (0,\pi)$ to‘plamda aniqlangan ushbu $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ o‘lchovli funksiya uchun, ixtiyoriy $\delta > 0$ kichik son berilganda $E = (0,\pi)$ to‘plamda shunday o‘lchovli chegaralangan g funksiya topingki, bunda $\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} < \delta$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin(7.1-teoremaga qarang).

5. R da aniqlangan ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, \text{ agar } x \neq 1, \\ 0, \text{ agar } x = 1 \end{cases}$$

o‘lchovli funksiya uchun 7.1-teorema shartlarining bajarilishini tekshiring.

6. $(0, 2\pi)$ to‘plamda aniqlangan ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}, & \text{agar } x\neq\pi,\\ 1, & \text{agar } x=\pi\end{cases}$$

o‘lchovli funksiya uchun 7.1-teorema shartlarining bajarilishini tekshiring.

7. R da aniqlangan ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & \text{agar } x\neq 1,\\ 0, & \text{agar } x=1\end{cases}$$

o‘lchovli funksiya uchun, ixtiyoriy $\delta>0$ kichik son berilganda R da shunday o‘lchovli chegaralangan g funksiya topingki, bunda $\mu\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}<\delta$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin.

8. $E=(0,2\pi)$ to‘plamda aniqlangan ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}, & \text{agar } x\neq\pi,\\ 1, & \text{agar } x=\pi\end{cases}$$

o‘lchovli funksiya uchun, ixtiyoriy $\delta>0$ kichik son berilganda $E=(0,2\pi)$ to‘plamda shunday o‘lchovli chegaralangan g funksiya topingki, bunda $\mu\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}<\delta$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin (7.1-teoremaga qarang).

9. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo‘lsin. Quyidagi jumlani isbotlang. Ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ uchun shunday $P(x)$ ko‘phad topiladiki, ushbu

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

Tengsizlik barcha $x\in[a,b]$ larda o‘rinli bo‘ladi.

10. $[a,b]$ segmentda aniqlangan, deyarli chekli qiymatlar qabul qiluvchi ixtiyoriy o‘lchovli $f(x)$ funksiya uchun $f(x)$ ga deyarli yaqinlashuvchi ko‘phadlar ketma-ketligi mavjudligini isbotlang.

V. GLOSSARIY

Termin	O'zbekcha izohi	Inglizcha izohi
To‘plamlar sistemasi	Elementlari to‘plamlardan iborat bo‘lgan to‘plam	A set whose elements consist of sets
To‘plamlar halqasi	To‘plamlar kesishmasi va simmetrik ayirmasiga nisbatan yopiq bo‘lgan to‘plamlar sistemasi	A set system that is closed relative to the intersection and symmetric separation of the sets
To‘plamlar algebrasi	Birlik elementga ega to‘plamlar halqasi	A set system that is closed relative to the intersection and symmetric separation of the sets
To‘plamlar yarim halqasi	Shunday sistemasi, bu sistema Bo‘sh to‘plamni o‘z ichiga olgan, to‘plamlar kesishmasiga nisbatan yopiq bo‘lgan va unga tegishli bo‘lgan ixtiyoriy A to‘plam shu sistemaga tegishli bo‘lgan bir nechta o‘zaro kesishmaydigan to‘plamlarning (ularda hech bo‘lmaganda bo‘lishi kerak) birlmashmasidan iboratdir.	Such a system consists of a combination of several non-intersecting sets (which they must have) that belong to the same system, including an empty set, which is closed relative to the intersection of sets, and an arbitrary set A belonging to it.
G sistemani orqali hosil qilingan halqa	G ni o‘z ichiga olgan eng kichik halqa, R(G) orqali belgilanadi.	The smallest ring containing G is denoted by R (G).
2-halqa	Berilgan halqa o‘ziga tegishli bo‘lgan har sondan sanoqli sondagi elementlarining birlashmagani ham o‘z ichig oladi.	A given ring also contains a combination of a small number of elements from each number to which it belongs.
Borel to‘plamlari	Haqiqiy sonlar o‘qidagi barcha [*a*,*b*] ko‘rinishdagi to‘plamlar sistemasini o‘z ichiga oluvchi keltirilmaydigan minimal σ-algebraning elementlari.	Elements of the nonlinear minimum σ-algebra, which includes a system of sets of all forms [a, b] on the axis of real numbers.
O’lchov	G_m yarim halqada aniqlangan, musbat qiymatli, additiv bo‘lgan $m(\cdot)$ to‘plam funksiyasi	G_m is a set function of m (·) with a positive value, additive, defined in the semicircle

G_{m_1} dan G_{m_2} gacha o‘lchovning davomi	$G_{m_1} \subset G_{m_2}$ bo‘lib, G_{m_1} dagi m_1 o‘lchov va G_{m_2} dagi m_2 o‘lchov uchun $\forall A \in G_{m_1}$ lar uchun $m_1(A) = m_2(A)$ bo‘lsa, $m_1 \cdot m_2$ ning G_{m_2} gacha davomidir.	$G_{m_1} \subset G_{m_2}$ as, G_{m_1} m1 measurement in and G_{m_2} for the measurement of m2 in $\forall A \in G_{m_1}$ for s $m_1(A) = m_2(A)$ if $m_1 \cdot m_2$ of G_{m_2} continues until.
σ - additiv o‘lchov	G_m dagi t o‘lchov uchun $A_1, A_2, \dots, A_m$ G_m $((A_i \cap A_j) = \varnothing;\ i \neq j)$ uchun $m(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i);\ m(A_i)$ bo‘lsa	G_m for the measurement of m in $A_1, A_2, \dots, A_m$ G_m $((A_i \cap A_j) = \varnothing;\ i \neq j)$ for $m(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i);\ m(A_i)$ if
R(E) σ algebra	G_m yarim halqa birlik elementi *Ye* ning barcha mumain bo‘lgan qism to‘plamlaridan tuzilgan sistema	G_m a system consisting of all mumain part sets of a semicircular unit element E
***V* to‘plamning tashki o‘lchovi**	$B \subset \bigcup_i B_i$ bo‘lgan $B_1 \in G_m$ lar uchun $\sum_i m(B_i)$ yig‘indining aniq quyi chegarasi $\mu^*(B) = \inf_{B \subset \bigcup_i B_i} \sum_i m(B_i)$	$B \subset \bigcup_i B_i$ which was $B_1 \in G_m$ for s $\sum_i m(B_i)$ the exact lower limit of the sum $\mu^*(B) = \inf_{B \subset \bigcup_i B_i} \sum_i m(B_i)$
O’lchovli to‘plam	Ixtiyoriy musbat son uchun G_m yarim halqani o‘z ichiga olgan minimal halqa *F=R(Gm)* dagi *V* to‘plam mavjud bo‘lib $A \in R(E)$ to‘plam uchun $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$ bo‘lsa *A* o‘lchovli to‘plam deyiladi.	For an arbitrary positive number G_m a minimum ring containing a half ring $F=R(G_m)$ There is a set B in $A \in R(E)$ for the collection $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$ is called A one-dimensional set.
Lebeg o‘lchovi	Lebesg o'lchovi - bu *n* o'lchovli Evklid fazosining ichki o'lchovlari ma'nosiga ega o'lchov. Lebesg o'lchovi Iordan o'lchovining to'plamlarning keng sinfiga kengayishi	The Lebeg measure is a measure that has the meaning of the n-dimensional volume of subsets of *n*-dimensional Euclidean space. More formally, the Lebesgue

	hisoblanadi. Xususan, segmentning haqiqiy chiziqdagi Lebeg o'lchovi uning uzunligiga, tekislikdagi ko'pburchakning Lebeg o'lchovi uning yusiga teng.	measure is an extension of the Jordan measure to a wider class of sets. In particular, the Lebesgue measure of a segment on the real line is equal to its length, and the Lebesgue measure of a polygon on the plane is equal to its area.
Lebeg bo’yicha o’lchanuvchan to’plam	To'plam Lebeg bo’yicha o’lchanuvchan deb nomlanadi, agar uning tashqi va ichki o'lchovlari teng bo'lsa	A set is called Lebesgue measurable if its outer and inner measures are equal
O’lchovli funksiya	*X* ning o‘lchovli to‘plam ostilari sistemasi *Z(X)* da aniqlanib. Uning o‘lchovli to‘plam ostilar sistemasi *Z(Y)* qiymat qabul qiluvchi *y=f(x)*, uchun $A \in Z(Y)$, uchun $f^{-1}(A) \in Z(X)$ o‘rinli bo‘lsa.	The dimensional subsystem of X is defined in Z (X). For its dimensional set subsystem Z (Y), for the receiver y = f (x) $A \in Z(Y)$ for $f^{-1}(A) \in Z(X)$ if appropriate.
Sodda fuknsiya	Berilgan to‘plamda chekli yoki sanoqli qiymatga erishuvchi o‘lchovli funksiya	A dimensional function that achieves a finite or finite value in a given set
Jordan o'lchovi	Jordan o'lchovi - bu uzunlik, maydon va *n*-o'lchovli hajm tushunchasini *n*-o'lchovli Evklid fazosida ko’chirishning bir usuli.	The Jordan measure is one way to formalize the concept of length, area, and {\ displaystyle n} n-dimensional volume in {\ displaystyle n} n-dimensional Euclidean space.
Geometrik o'lchov nazariyasi	Geometrik o'lchov nazariyasi o'lchov nazariyasidan foydalangan holda to'plamlarning geometrik xususiyatlarini o'rganish bilan shug'ullanadi (odatda Evklid fazosida).	Geometric measure theory deals with the study of geometric properties of sets (usually in Euclidean space) using measure theory.
Hausdorff o'lchovi	Hausdorff o'lchovi - bu Borel algebrada aniqlangan o'lchovlar sinfining umumiy nomi. metrik	Hausdorff measure is a collective name for a class of measures defined on the Borel of the metric space X

	makon Feliks Xausdorff tomonidan qurilgan	Built by Felix Hausdorff
Tuzatiladigan to'plam	Tuzatiladigan to'plam - bu to'g'rilanadigan egri chiziqni yuqori o'lchamlarga umumlashtirish.	A rectifiable set is a generalization of a rectifiable curve to higher dimensions.
Tashqi o'lchov	Tashqi o'lchov - bu uzunlik, maydon va hajm tushunchalarini umumlashtirishdan biridir; fazoning barcha kichik to'plamlarida aniqlangan, bir nechta qo'shimcha shartlarni qanoatlantiradigan aniq qiymatli funktsiya.	External measure is one of the generalizations of the concepts of length, area and volume; is a real-valued function defined on all subsets of the space that satisfies several additional technical conditions.
Ichki o'lchov	Agar E to'plami chegaralangan bo'lsa, unda E to'plamining ichki o'lchovi - bu $[a, b]$segment uzunligidan E ning to'dirmasining ayirmasiga teng	If the set E is bounded, then the inner measure of the set E is the difference between the length of the segment [a, ; b] [a, b] containing E and the outer measure of the complement [a ; b]:

VI. FOYDALANILGAN ADABIYoTLAR

I. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O’zbekiston”, 2019. – 592 b.
2. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O’zbekiston”, 2019. – 400 b.
3. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O’zbekiston”, 2018. – 592 b.
4. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob halqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O’zbekiston”. 2017. – 488 b.
5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz – T.: “O’zbekiston”. 2017. – 592 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O’zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O’zbekiston, 2018.
7. O’zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.
8. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
9. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O’zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.
10. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.
11. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021 yillarda O’zbekiston Respublikasini innovatsion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
12. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O’zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
13. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillarda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O’zbekiston Milliy universitetida talab yuqori bo‘lgan malakali kadrlar tayyorlash tizimini tubdan takomillashtirish va ilmiy salohiyatini rivojlantiri chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4358-sonli Qarori.
14. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
15. O’zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr “O’zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.

III. Maxsus adabiyotlar

16. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

17. Bauer, H. Measure and Integration Theory, Berlin: de Gruyter, ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

18. Bear, H.S. A Primer of Lebesgue Integration, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.

19. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464

20. Bogachev, V. I. Measure theory, Berlin: Springer, 2006.

21. David Spencer "Gateway", Students book, Macmillan 2012.

22. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010. 204.

23. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts//2013, ISBN-13: 978-0313319983

24. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

25. H.Q. Mitchell "Traveller" B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

26. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni "PIONEER", B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

27. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

28. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

29. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

30. Lindsay Clandfield and Kate Pickering "Global", B2, Macmillan. 2013. 175.

31. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.

32. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

33. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.

34. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

35. Steve Taylor "Destination" Vocabulary and grammar", Macmillan 2010.

36. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

37. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

38. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdaniye: 1-e izd. 421 s.

39. Aleksandrov A.D., Netsvetayev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.

40. Belogurov A.Yu. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obщestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.

41. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An’anaviy va noan’anaviy ta’lim. – Samarqand: “Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi” nashriyoti, 2019. 312 b.

42. Ibraymov A.Ye. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. metodik qo‘llanma/ tuzuvchi. A.Ye. Ibraymov. – Toshkent: “Lesson press”, 2020. 112 bet.

43. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O’quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.

44. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BXV-Peterburg, 2012. — 432 s.

45. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O’quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.

46. Obrazovaniye v tsifrovuyu epoxu: monografiya / N. Yu. Ignatova; M-vo obrazovaniya i nauki RF; FGAOU VO «UrFU im. pervogo Prezidenta Rossii B.N.Yelsina», Nijnetagil. texnol. in-t (fil.). – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

47. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

48. Sovremennыe obrazovatelnыe texnologii: pedagogika i psixologiya: monografiya. Kniga 16 / O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Yu. Bu-gakova i dr. – Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

49. Usmonov B.Sh., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish.–T.: “TKTI” nashriyoti, 2019.

IV. Internet saytlar

50. O’zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi: www.edu.uz.
51. Bosh ilmiy-metodik markaz: www.bimm.uz
52. www. Ziyonet. Uz
53. Otkrыtoye obrazovaniye. https://openedu.ru/
54. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma
55. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/
56. https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-

&op=Search
57. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html
58. https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics.

Samarqand davlat universiteti huzuridagi pedagogik kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish mintaqaviy markazida 2022 yil may oyida o'tkaziladigan Matematika yo'nalishi o'quv-uslubiy majmualari bo'yicha

EKSPERT XULOSASI

Samarqand davlat universiteti huzuridagi pedagogik kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish mintaqaviy markazida 2022 yil may oyida oliy ta'lim muassasalari professor-o'qituvchilarining "Matematika" yo'nalishi qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi mutaxassislik fanlaridan tuzilgan o'quv-uslubiy majmualar va chiqish testi savollari maxsus fanlar blokidagi modullarning o'quv dasturiga mos va uni to'liq qamrab olgan holda tuzilgan. Test savolari 4 ta muqobil javobda tuzilib, 1 ta to'g'ri javobni o'z ichiga oladi. O'quv-uslubiy majmua va test savollari qo'yilgan talablarga javob beradi.

Ekspertlar

Abdullayev Joniqul	SamDU, Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kafedrasi professori, f-m.f.d.	
Ro`zimurodov Xaydar	SamDU, Algebra va geometriya kafedrasi dotsenti, f-m.f.n.	
Yusupov Ozod	SamDU Dasturiy injiniring kafedrasi mudiri, t.f.f.d	
Meliyev Baxtiyor	SamDU mintaqaviy markaz bo'lim boshlig'i, g.f.f.d.	

Mintaqaviy markaz direktori,
geografiya fanlari doktori, professor: **S.B.Abbasov**

ЭКСПЕРТНОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Об учебно-методических комплексах по направлению «Математика», которые пройдут в мае 2022 года в Региональном центре переподготовки и повышения квалификации педагогических кадров при Самаркандском государственном университете

В апреле 2022 года Региональный центр переподготовки и повышения квалификации педагогических кадров при Самаркандском государственном университете проведет курс переподготовки и повышения квалификации преподавателей высших учебных заведений по направлению «Математика». Учебно-методические комплексы соответствуют учебному плану модулей специального научного блока и полностью охватывает его. Учебно-методические комплексы соответствуют современным требованиям.

Зарубежный эксперт: Профессор Малайзийского технологического университета д.ф-м.н. М.Э.Мўминов