O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

“OLIY MATEMATIKA, STATISTIKA VA EKONOMETRIKA” KAFEDRASI

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA
fanidan o’quv-uslubiy majmua
(I semestr)

Bilim sohasi:	100000	– Gumanitar
	200000	– Ijtimoiy soha, iqtisod va huquq
Ta’lim sohasi:	230000	– Iqtisod
Ta’lim yo‘nalishlari:	5230600	– Moliya;
	5230700	– Bank ishi;
	5230800	– Soliqlar va soliqqa tortish;
	5230900	– Buxgalteriya hisobi va audit (tarmoqlar bo‘yicha);
	5231200	– Sug‘urta ishi;
	5231300	– Pensiya ishi;
	5231500	– Baholash ishi;
	5232000	– Davlat budjetining g‘azna ijrosi;
	5232700	– Investitsion loyihalarni moliyalashtirish;
	5232800	– Elektron tijorat.

Toshkent – 2019

Fanning O'quv uslubiy majmuasi O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 201__ yil "__".___dagi "__"-sonli buyrug'ining __-ilovasi bilan tasdiqlangan fan dasturiga muvofiq ishlab chiqildi.

Tuzuvchilar:	Xashimov A.R.	– TMI, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrasi, dotsent, f-m.f.n.
	Xujaniyozova G.S.	– TMI, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrasi, katta o'qituvchi.
Taqrizchilar:	Qodirov F.A.	– Toshkent moliya instituti, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrasi, katta o'qituvchi.
	Babadjanov Sh.Sh.	– Toshkent moliya instituti, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrasi, dotsent, f.-m.f.n.

Fanning O'quv uslubiy majmuasi kafedraning 2019 yil "27".08 dagi "1"-sonli yig'ilishi muhokamasidan o'tkazilgan va fakultet Kengashida ko'rib chiqish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri **A.R.Xashimov**

Fanning O'quv uslubiy majmuasi "Buxgalteriya hisobi va audit" fakultet Kengashi muhokamasidan o'tkazilgan va institut o'quv-uslubiy Kengashida ko'rib chiqish uchun tavsiya etilgan. (2019 yil "25" 08 dagi "1"-sonli qaror).

Fakultet dekani **K.Karimova**

Kelishildi:

O'quv uslubiy bo'lim boshlig'i **T.Baymuratov**

O'quv-uslubiy ishlar bo'yicha prorektor **I.Qo'ziyev.**

Fanning O'quv uslubiy majmuasi institut o'quv-uslubiy Kengashining 2019 yil "28".08 dagi "1"-sonli yig'ilishida ko'rib chiqilgan va tasdiqlash uchun tavsiya qilingan.

Fanning O'quv uslubiy majmuasi institut Kengashining 2019 yil "29".08 dagi "1"-sonli majlisi bayoni bilan ma'qullangan.

MUNDARIJA

FAN VA ISHCHI DASTURLAR

MA'RUZALAR

1-mavzu. Matrisalar va ular ustida amallar

Reja:

1. Matrisaga doir asosiy tushunchalar.
2. Matrisalar ustida amallar.
3. Texnologik matrisa tushunchasi.
4. Excelda matrisalar ustida amallarni bajarish.

Tayanch so‘z va iboralar: matrisa, satr matrisa, ustun matrisa, satr-vektor, ustun-vektor, vektor komponenti, nol matrisa, teng matrisa, zanjirlangan matrisalar, kvadrat matrisaning bosh diagonali, diagonal matrisa, skalyar matrisa, birlik matrisa, transponirlangan matrisa, simmetrik matrisa, qiya simmetrik matrisa, texnologik matrisa.

Matrisa tushunchasi va unga asoslangan matematikaning “Matrisalar algebrasi” bo‘limi amaliyotda, jumladan, iqtisodiyotda katta ahamiyat kasb etadi. Bu shu bilan tushuntiriladiki, aksariyat iqtisodiy obyekt va jarayonlarning matematik modellari matrisalar yordamida sodda va kompakt ko‘rinishida tasvirlanadi.

Matrisa tushunchasi birinchi marta ingliz matematiklari U.Gamilton (1805-1865 y.y.) va A.Kel (1821-1895 y.y.) ishlarida uchraydi. Hozirgi kunda matrisa tushunchasi tabiiy va amaliy jarayonlarning matematik modellarini tuzishda muhim vosita sifatida qo‘llaniladi.

1-ta’rif. Matrisa deb m ta satr va n ta ustunga ega bo‘lgan qavslar ichiga olingan to‘rtburchakli sonlar jadvaliga aytiladi.

Matrisalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrisani tashkil qilgan sonlar uning elementlari deyiladi. Matrisa o‘lchami $m \times n$ kabi yoziladi. Matrisaning $i-$satr, $j-$ustun kesishmasidagi element a_{ij} kabi belgilangan. Demak, a_{34} $-$3-satr va 4-ustin kesishmasida joylashgan elementdir.
Ba’zida matrisalarni yozishda (...) qavslar o‘rniga [...] qavslar yoki ||...|| kabi belgilardan foydalaniladi.

Aytaylik quyidagi jadvalda iqtisodiyotning tarmoqlari bo‘yicha resurslarning taqsimlanishi berilgan bo‘lsin:

Resurslar	**Iqtisodiyot tarmoqlari**	
	Sanoat	**Qishloq xo‘jaligi**
Elektr energiyasi resurslari	7,3	5,2
Mehnat resurslari	4,6	3,1
Suv resurslari	4,8	6,1

Bu resurslar taqsimotini matrisa ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin: $A=\begin{pmatrix} 7{,}3 & 5{,}2 \\ 4{,}6 & 3{,}1 \\ 4{,}8 & 6{,}1 \end{pmatrix}$. Bu matrisaning o‘lchami 3×2 bo‘lib, satrlari resurs turlariga ustunlari esa tarmoqlarga mos keladi.

$(1\times n)$ o‘lchamli matrisaga satr matrisa, $(m\times 1)$ o‘lchamli matrisaga esa ustun matrisa deyiladi, ya’ni

$$K=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Bundan tashqari ba’zida bu matrisalar mos ravishda satr-vektor va ustun-vektor deb ham ataladi. Matrisaning elementlari esa vektorlarning komponentlari, deyiladi.

Har bir elementi nolga teng bo‘lgan, ixtiyoriy o‘lchamli matrisaga nolmatrisa deb aytiladi va quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

2-ta’rif. A va B matrisalar bir xil o‘lchamga ega bo‘lib, ularning barcha mos elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, bunday matrisalar teng matrisalar deyiladi va $A=B$ ko‘rinishda yoziladi.

1-misol. Quyidagi matrisaviy tenglikdan x va y noma’lumlarning qiymatlarini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Matrisalarning mos elementlarini taqqoslab quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$y = 2, \quad x + y = 2 \Rightarrow x = 0 .$$

3-ta'rif. A matrisaning ustunlari soni B matrisaning satrlari soniga teng bo'lsa, A matrisa B matrisa bilan zanjirlangan matrisa deyiladi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matrisalar zanjirlangan matrisalar bo'ladi.

Chunki, A matrisaning o'lchami 3×3 ga, B matrisaning o'lchami 3×2 ga teng. Shuni ta'kidlash lozimki B va A matrisalar zanjirlangan emas. Chunki, B matrisaning ustunlari soni 2 ga, A matrisaning satrlari soni 3 ga teng bo'lib, o'zaro bir xil emas.

4-ta'rif. Ham satrlar soni,ham ustunlar soni n ga teng bo'lgan, ya'ni $n \times n$ o'lchamli matrisa $n-$tartibli kvadrat matrisa deyiladi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 11 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ matrisa 4-tartibli kvadrat matrisadir.

$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ elementlarning tartiblangan to'plami kvadrat matrisaning asosiy diagonali deyiladi.Agar $A = (a_{ij})$ kvadrat matrisada $i > j \ (i < j)$ munosabat bajarilganda $a_{ij} = 0$ bo'lsa, u holda A matrisa yuqori (quyi) uchburchakli matrisa deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{yuqori uchburchakli matritsa})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{quyi uchburchakli matritsa})$$

$A=(a_{ij})$ kvadrat matrisada $i \neq j$ bo‘lganda, $a_{ij}=0,\ i=j$ bo‘lganda, $a_{ij} \neq 0$ bo‘lsa, u holda A matrisaga diagonal matrisa deyiladi ya’ni

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Agar diagonal matrisaning barcha diagonal elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda bunday matrisaga skalyar matrisa deyiladi ya’ni

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a \end{pmatrix}.$$

Agar skalyar matrisada $a=1$ bo‘lsa, u holdabunday matrisaga birlik matrisa deyiladi va odatda E harfi bilan belgilanadi, ya’ni

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

O‘lchamlari aynan teng bo‘lgan matrisalar ustidagina algebraik qo‘shish amali bajariladi.

O‘lchamlari aynan teng bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{va } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1j} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2j} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{i1} & b_{i2} & ... & b_{ij} & ... & b_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mj} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisalarni qo‘shish uchun, ularning mos elementlari qo‘shiladi, y’ani

$$A+B=C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1j}+b_{1j} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2j}+b_{2j} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & ... & a_{ij}+b_{ij} & ... & a_{in}+b_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mj}+b_{mj} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrisani biror haqiqiy λ songa ko‘paytirish uchun bu son matrisaning har bir elementiga ko‘paytiriladi, y’ani

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ikkita matrisa ayirmasi quyidagicha topiladi:

$$A - B = D = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1j}-b_{1j} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2j}-b_{2j} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \dots & a_{ij}-b_{ij} & \dots & a_{in}-b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mj}-b_{mj} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2-misol. Quyidagi matrisalarning yig‘indisi va ayirmasini toping:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yechish. A va B matrisalarning o‘lchamlari 2×4 ga teng. Shu sababli bu matrisalarni qo‘shish va ayirish mumkin. Ta’rifga asosan

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3-misol. Quyidagi A matrisani $\lambda = 2$ soniga ko‘paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $\lambda \cdot A = 2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 7 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 16 & 4 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}.$

4-misol. Firma 5 turdagi mahsulotni ikkita korxonada ishlab chiqaradi. Firmaning ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	1	2	3	4	5
1-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	139	160	205	340	430
2-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	122	130	145	162	152

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilash natijasida ishlab chiqarishni 17% ga oshirdi. Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti qanday bo‘ladi?

Yechish. Firmaning ishlab chiqarish uskunalarini yangilamasdan oldingi ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini quyidagi matrisa ko‘rinishda yozish mumkin:

$$P=\begin{pmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152 \end{pmatrix}.$$

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini topish uchun, bu ishlab chiqarish matrisasini 1,17 ga ko‘paytirish zarur bo‘ladi:

$$1{,}17\cdot P=1{,}17\cdot\begin{pmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 162{,}63 & 187{,}2 & 239{,}85 & 397{,}8 & 503{,}1 \\ 142{,}74 & 152{,}1 & 169{,}65 & 189{,}54 & 177{,}84 \end{pmatrix}.$$

Matrisalarni qo‘shish, ayirish, ya’ni algebraik qo‘shish va matrisani songa ko‘paytirish amallariga matrisalar ustida chiziqli amallar deyiladi.

Matrisalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga bo‘ysinadi:

$$1)\,A+B=B+A; \qquad 2)\,A+(B+C)=(A+B)+C;$$
$$3)\,k(A+B)=kA+kB; \qquad 4)\,k(nA)=(kn)A;$$
$$5)\,(k+n)A=kA+nA; \qquad 6)\,A+\Theta=A;$$
$$7)\,A+\left(-A\right)=\Theta; \qquad 8)\,1\cdot A=A.$$

Bu yerda $A,B,C-$bir xil o‘lchamli matrisalar, Θ matrisa A,B,C matrisalar bilan bir xil o‘lchamli nol matrisa, $k,n-$ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Faqat va faqat zanjirlangan matrisalar ustida ko‘paytirish amali bajariladi. $m\times p$ o‘lchamli $A=(a_{ij})$ matrisaning $p\times n$ o‘lchamli $B=(b_{jk})$ matrisaga ko‘paytmasi deb elementlari $c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+...+a_{ip}b_{pk}$ kabi aniqlanadigan $m\times n$ o‘lchamli $C=(c_{ik})$ matrisaga aytiladi. Bu formuladan ko‘rish mumkinki, A va B matrisalarning ko‘paytmasi C matrisadagi c_{ik} element A matrisaning $i-$

satrida joylashgan har bir elementni B matrisaning $k-$ ustunida joylashgan mos o'rindagi elementga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish natijasida aniqlanadi.

Masalan, bizga umumiy holda $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ko'rinishdagi matrisalar berilgan bo'lsin. Bu matrisalarni ko'paytirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Endi buni aniq misollarda ko'rib chiqamiz.

5-misol. Quyidagi A matrisani B matrisaga ko'paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. 1. Izlanayotgan $C=AB$ matrisaning c_{11} elementi A matrisaning birinchi satr elementlarini B matrisaning birinchi ustun mos elementlari bilan ko'paytmalarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$c_{11}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 1=6.$$

2. Izlanayotgan $C=AB$ matrisaning birinchi satr va ikkinchi ustunining elementi A matrisaning birinchi satr elementlarini B matrisaning ikkinchi ustun elementlari bilan mos ravishda ko'paytmalarining yig'indisiga teng:

$$c_{12}=(3\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=3\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 0=2.$$

3. Birinchi satr va uchinchi ustun elementi

$$c_{13}=(3\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1=-1$$

kabi aniqlanadi.

4. Izlanayotgan matrisaning ikkinchi satr elementlari A matrisaning ikkinchi satr elementlarining B matrisaning mos ravishda 1, 2, 3-ustun elementlari bilan ko‘paytmalarining yig‘indisi sifatida topiladi:

$$c_{21} = 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 6;$$
$$c_{22} = 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 = 1;$$
$$c_{23} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1.$$

5. C matrisaning uchinchi satr elementlari ham shunga o‘xshash topiladi:

$$c_{31} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 8;$$
$$c_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 = -1;$$
$$c_{33} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 4.$$

Shunday qilib,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6-misol. Quyidagi A matrisani B matrisaga ko‘paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu matrisalar zanjirlangan bo‘lganligi sababli ular ustida ko‘paytirish amali bajariladi.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(1+4+9+16\right) = \left(30\right).$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, A va B matrisalarning ko‘paytmasi kommutativlik (o‘rin almashtirish) xossasiga ega emas, ya’ni $AB \neq BA$. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matrisalar bo‘lsa, AB va BA ko‘paytmalarini topish mumkin. Agar A va B matrisalar uchun $AB = BA$ $\left(AB = -BA\right)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda A va B matrisalar kommutativ (antikommutativ) matrisalar deyiladi. Masalan, E birlik matrisa ixtiyoriy A kvadrat matrisa bilan kommutativdir. Haqiqatan ham

$$AE = EA = A.$$

Matrisalarni ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

$$1)\,(kA)B = k(AB) = A(kB);$$

$$2)\,(A+B)C = AC + BC;$$

$$3)\,A(B+C) = AB + AC;$$

$$4)\,A(BC) = (AB)C.$$

Keltirilgan xossalardan to‘rtinchisini quyidagi misol yordamida tekshiramiz.

7-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ va $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisalar berilgan bo‘lsin:

$$1.\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix},$$

$$2.\ BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Ko‘rinib turibdiki, ikki xil hisoblash usulida ham natija bir xil.

A kvadrat matrisani $m\ (m > 1)$ butun musbat darajaga ko‘tarish quyidagicha amalga oshiriladi: $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\ marta}.$

Agar A matrisada barcha satrlari matrisaning mos ustunlari bilan almashtirilsa, u holda hosil bo‘lgan A^T matrisa A matrisaga transponirlangan matrisa deyiladi.

Transponirlangan matrisalar quyidagi xossalarga ega:

$$1)\ \left(A^T\right)^T = A, \qquad 2)\ (kA)^T = kA^T,$$

$$3)\ (A+B)^T = A^T + B^T, \qquad 4)\ (AB)^T = B^T A^T.$$

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘ladi.

Agar A kvadrat matrisa uchun $A = A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bu matrisaga simmetrik matrisadeyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ simmetrik matrisaning elementlari bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan.

$n-$tartibli simmetrik matrisaning turli elementlari soni koʻpi bilan $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ga teng, bunda $n-$natural son.

Agar A kvadrat matrisada $A=-A^T$ munosabat oʻrinli boʻlsa, bunday matrisaga qiya simmetrik matrisa deb ataladi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$n-$tartibli qiya simmetrik matrisaning turli elementlari soni koʻpi bilan n^2-n+1formula yordamida topiladi, bunda $n-$natural son.

5-ta'rif. Nolmas satrlarga ega A matrisada har qanday $k-$nolmas satrning birinchi noldan farqli elementi $(k-1)-$nolmas satrning birinchi noldan farqli elementidan oʻngda tursa, u holda A pogʻonasimon matrisa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ matrisapogʻonasimon matrisadir.

Iqtisodiy masalalarni matematik modellashtirishda, ya'ni, iqtisodiy muammoni matematik ifodalar yordamidagi ifodasida, matrisalardan keng foydalaniladi. Bunda muhim tushunchalardan biri texnologik matrisa tushunchasidir. Bu matrisa, masalan, bir nechta turdagi resurslardan bir nechta mahsulot turlarini ishlab chiqarishni rejalashtirish (programmalashtirish), tarmoqlararo balansni modellashtirish kabi muhim iqtisodiy masalalarda asosiy rolni oʻynaydi.

Faraz qilaylik, oʻrganilayotgan iqtisodiy jarayonda n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil ishlab chiqarish faktorlari (resurslar) zarur boʻlsin. $i-$mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun $j-$turdagi resursdan a_{ij} miqdori sarflansin. a_{ij} elementlardan tuzilgan $m\times n$ oʻlchamli A matrisa texnologik matrisa deb ataladi.

1-turdagi mahsulotdan x_1 miqdorda, 2-turdagi mahsulotdan x_2 miqdorda, ..., $n-$turdagi mahsulotdan x_n birlik miqdorda ishlab chiqarilishi talab qilinsin. Bu rejani $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ustun vektor ($n\times 1$ o‘lchamli matrisa) shaklida ifodalaymiz. U holda 1-turdagi resurs sarfi $a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n$ ga, ikkinchi turdagi resurs sarfi $a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n$ ga teng. Umumlashtiradigan bo‘lsak, ishlab chiqarish rejasini bajarish uchun zarur bo‘lgan $j-$turdagi resurs sarfi $a_{j1}x_1+...+a_{jn}x_n$ birlikka teng. Bu miqdorlarni ustun vektor sifatida yozsak aynan AX ko‘paytmani hosil qilamiz. $j-$mahsulotning bir birligining narxi c_j bo‘lsin. Narxlar vektorini $C=(c_1,...,c_n)$ ko‘rinishda ifodalaymiz. U holda CX ko‘paytma, matrisalarni ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, skalyar miqdor, ya’ni sondan iborat. Bu son ishlab chiqarishdan olingan daromadni ifodalaydi.

$i-$ turdagi resurs zahirasi miqdori b_i birlikka teng bo‘lsin. Resurs zahiralari vektorini ustun vektor shaklida ifodalaymiz: $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$. U holda $AX\le B$ tengsizlik ishlab chiqarishda resurs zahiralari hisobga olinishi zarurligini bildiradi. Bu vektor tengsizlik AX vektorning har bir elementi B vektorning mos elementidan katta emasligini bildiradi. $AX\le B$ shartni qanoatlantiruvchi X rejani joiz reja, deb ataymiz. Ma’nosidan kelib chiqadigan bo‘lsak, har qanday X rejaning elementlari musbat sonlardan iborat bo‘lishi zarur.

8-misol. Korxona ikki turdagi transformatorlar ishlab chiqaradi. 1-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 5 kg temir va 3 kg sim, 2-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 3 kg temir va 2 kg sim sarflanadi. Bir birlik transformatorlarni sotishdan mos ravishda 6 va 5 sh.p.b. miqdorida daromad olinadi. Korxonaning omborida 4,5 tonna temir va 3 tonna sim mavjud. Texnologik matrisa, narxlar vektori va resurs zahirasini ifodalovchi vektorni tuzing. $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejalar joiz reja bo‘la oladimi?

Yechish. Korxona ikki turdagi resursdan foydalanib 2 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Narxlar vektori $C=(6,5)$. Resurs zahiralari vektori $B=\begin{pmatrix}4500\\3000\end{pmatrix}$.

Texnologik (resurs sarfi normasi) matrisa $A=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$.

$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. Bu rejani bajarishdagi resurs sarfi

$$AX=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x_1+3x_2\\3x_1+2x_2\end{pmatrix}$$

ga teng. Bu sarf zahiradan oshib ketmasligi kerak, ya'ni $AX\le B$ yoki

$$5x_1+3x_2\le 4500,$$
$$3x_1+2x_2\le 3000.$$

Joiz reja yuqoridagi tengsizliklarni qanoatlantirishi zarur.

1) $X=\begin{pmatrix}500\\600\end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}500\\600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4300\\2700\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}4500\\3000\end{pmatrix},$$

ya'ni bu reja joiz reja. Bu reja asosida olinadigan daromad miqdori $CX=(6\quad 5)\begin{pmatrix}500\\600\end{pmatrix}=(6000)$ sh.p.b. ga teng.

2) $X=\begin{pmatrix}600\\600\end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600\\600\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4800\\3000\end{pmatrix}.$$

Bundan ko'rish mimkinki, 1-turdagi resurs sarfi 4800 ga teng bo'lib, resurs zahirasi 4500 dan katta. Shu sababli, qaralayotgan reja joiz reja emas.

9-misol. Korxona m turdagi resurslarni qo'llab, n turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. $j-$turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga ketgan $i-$xom ashyo resurslari harajatlarining normalari $A_{m\times n}$ matrisa bilan berilgan. Vaqtning ma'lum oralig'ida korxona har bir turdagi mahsulotdan x_{ij} miqdorini ishlab chiqargan bo'lsin. Uni $X_{n\times 1}$ matrisa bilan ifodalaymiz.

Vaqtning berilgan davrida barcha mahsulotning har bir turini ishlab chiqarishga ketgan resurslarning to'la harajatlar matrisasi S ni aniqlang. Berilgan

$$A_{4\times3}=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix},\ X_{3\times1}=\begin{pmatrix}100\\80\\110\end{pmatrix}.$$

Yechish. Resurslarning to‘la harajatlar matrisasi S A va X matrisalarning ko’paytmasi sifatida aniqlanadi, ya’ni $S=AX$.

Berilgan masalaning sharti bo’yicha

$$S=\begin{pmatrix}2&5&3\\0&1&8\\1&3&1\\2&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\80\\110\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}930\\960\\450\\690\end{pmatrix}.$$

Berilgan vaqt orlig‘ida 930 birlik I turdagi resurs, 960 birlik II turdagi resurs, 450 birlik III turdagi resurs, 690 birlik IV turdagi resurs sarf qilingan.

10-misol. Korxona mahsulotning n turini ishlab chiqaradi, ishlab chiqariladigan mahsulot hajmlari $A_{1\times n}$ matrisa bilan berilgan. $j-$mintaqada mahsulotning $i-$turi birligining sotilish narxi $B_{n\times k}$ matrisa bilan berilgan, bu yerda $k-$mahsulot sotilayotgan mintaqalar soni.

Mintaqalar bo‘yicha daromad matrisasi C ni toping.

$$A_{1\times3}=(100,200,100);\qquad B_{n\times k}=\begin{pmatrix}2&3&1&5\\1&3&2&2\\2&4&2&4\end{pmatrix}$$

bo‘lsin.

Yechish. Daromad $C_{1\times k}=A_{1\times n}\cdot B_{n\times k}$ matrisa bilan aniqlanadi, $c_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{1i}\cdot b_{ij}-$bu $j-$mintaqada korxonaning daromadi quyidagicha:

$$C=(100,200,100)\begin{pmatrix}2&3&1&5\\1&3&2&2\\2&4&2&4\end{pmatrix}=(600,1300,700,1300).$$

MS Excel dasturida matrisalarni qo‘shish, songa ko‘paytirish va matrisalarni ko‘paytirishga misollar keltiramiz.

1) $A=\begin{pmatrix}1&-3&5\\2&3&2\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}0&4&3\\2&-2&3\end{pmatrix}$ matrisalarni qo‘shish talab qilinsin.

I. Matrisalarni quyidagi ko‘rsatilgan jadvallar shaklida MS Excelga kiritamiz.

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		0	4	3
6	B=	2	-2	3

II. Biror katakka matrisalarning 1-elementlari yig‘indisini topish uchun formula kiritamiz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			=B2+B5		
4						A+B=			
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

III. 2x3 o‘lchamli jadvalni bu katakdagi formulani avtomatik ko‘chirish usuli bilan to‘ldiramiz. Buning uchun sichqonchani bu katakning pastki o‘ng burchagiga keltiramiz. Qalin qora kursor (krestik) paydo bo‘lganda sichqonchaning chap tugmasini bosamiz va oldin satr bo‘yicha uch katakka, keyin ustun bo‘yicha ikki kattakka tortamiz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			1	1	8
4						A+B=	4	1	5
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

Natijada matrisalarning yig‘indisi hosil bo‘ladi.

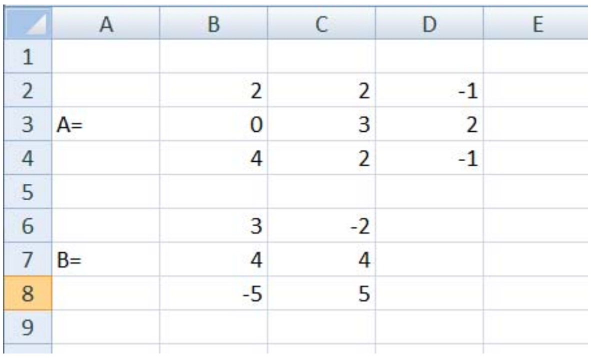
2) Yuqoridagi A matrisani 2 ga ko‘paytiramiz. Buning uchun A matrisani 2 ga ko‘paytirish formulasini biror katakka kiritamiz. Bu katakdagi formulani yuqorida tushuntirilgan usulda avtomatik to‘ldiramiz.

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		=B2*2		
6	2A=			
7				

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		2	-6	10
6	2A=	4	6	4
7				

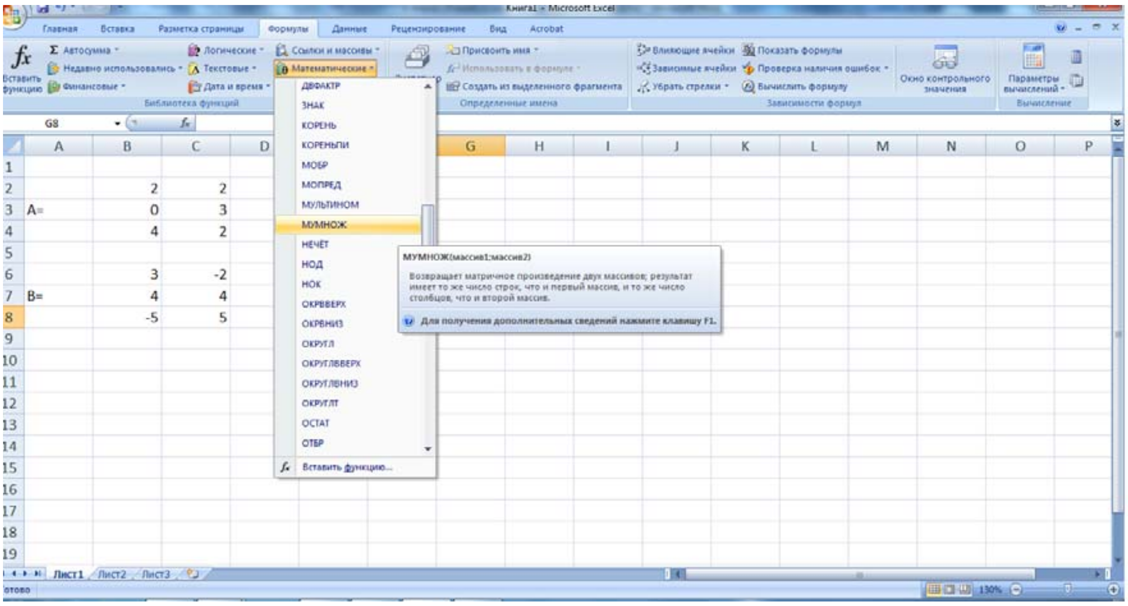
3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. AB ko‘paytmani topamiz. A matrisa o‘lchamlari 3×3 va B matrisa o‘lchamlari 3×2 bo‘lganligi sababli, ko‘paytmaning o‘lchamlari 3×2 bo‘ladi.

I. A va B matrisalarni Excelda jadval shaklida kiritamiz.

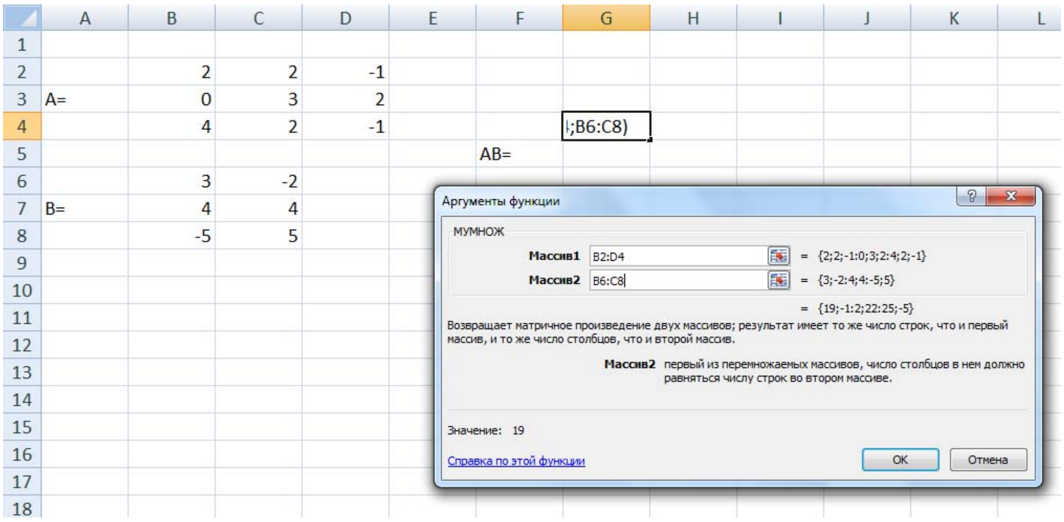


	A	B	C	D	E
1					
2		2	2	-1	
3	A=	0	3	2	
4		4	2	-1	
5					
6		3	-2		
7	B=	4	4		
8		-5	5		
9					

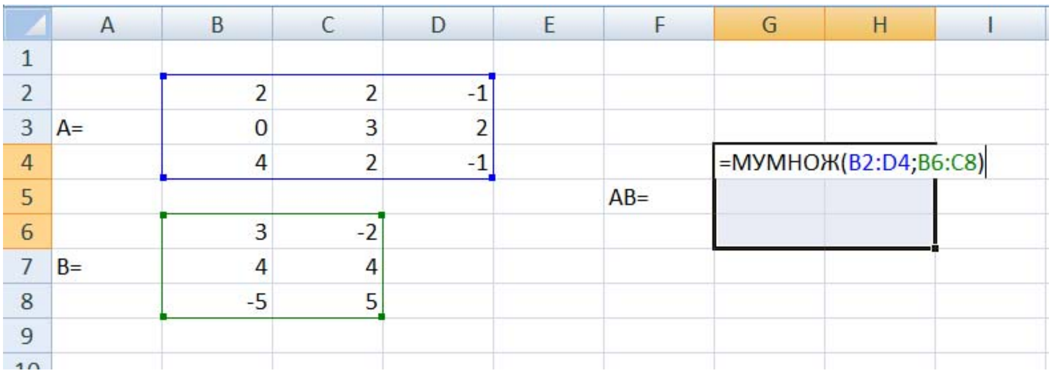
II. Excel funksiyalari ro‘yxatidan matematik funksiyalar ro‘yxatini topamiz. bu ro‘yxatdan “МУМНОЖ” funksiyani tanlaymiz.



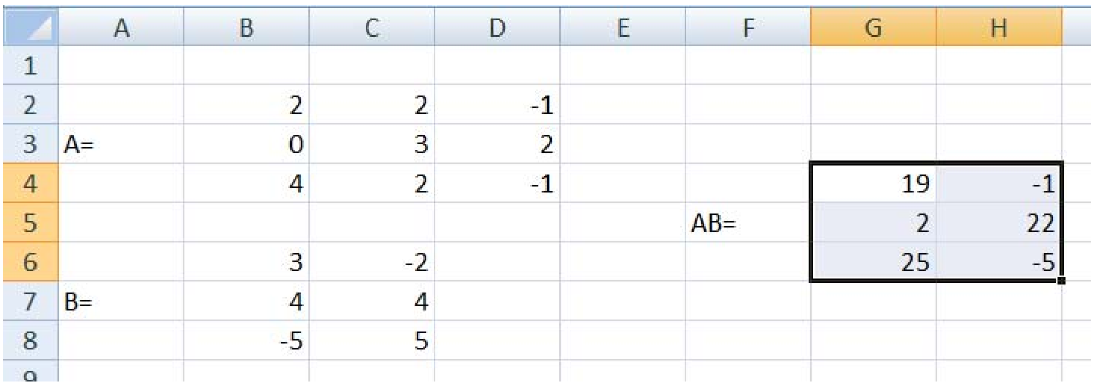
III. Hosil bo‘lgan yangi oynachada ‘Массив1’ qatoriga A matrisa koordinatalarini, ‘Массив2’ qatoriga B matrisa koordinatalarini kiritamiz. Enter tugmasini bosamiz.



IV. Bunda funksiya kiritilgan katakda ko'paytmaning faqat bitta elementi hosil bo'ladi. Boshqa elementlarni topish uchun ko'paytma o'lchovlariga mos uchta satr va uchta ustunli jadvalni rasmdagiday belgilaymiz va F2 tugmasini bosamiz.



V. Ctrl+Shift+Enter tugmalarni bir paytda bosamiz. Belgilangan kataklarda matrisalar ko'paytmasi hosil bo'ladi.



Demak, $AB = \begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 2 & 22 \\ 25 & -5 \end{pmatrix}$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matrisa deb nimaga aytiladi?
2. Satr matrisa, ustun matrisa deb qanday matrisaga aytiladi?

3. Nol matrisa deb qanday matrisaga aytiladi?
4. Matrisalarni qo'shish va matrisani songa ko'paytirish amallari bo'ysunadigan xossalarni sanab o'ting?
5. Matrisa satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish amali qanday nomlanadi?
6. O'zaro zanjirlangan matrisalar qanday ko'paytiriladi?
7. Matrisalarni ko'paytirish amali qanday xossalarga bo'ysunadi?
8. Matrisalarni ko'paytirish amali o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunadimi?
9. n-tartibli kvadratik matrisa deb qanday matrisaga aytiladi?
10. Kvadrat matrisaning qanday xususiy ko'rinishlarini bilasiz?

2-mavzu. Determinantlar nazariyasi

Reja:

1. O'rin almashtirishlar. Determinantning ta'rifi.
2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.
3. Determinantning xossalari.
4. Laplas teoremasi.
5. Excelda determinantni hisoblash.

Tayanch so'z va iboralar: matrisa, determinant, kvadrat matrisa, aniqlovchi, $n-$tartibli determinant, ikkinchi tartibli determinant, uchinchi tartibli determinant, Sarrus qoidasi.

A kvadrat matrisaning skalyar (sonli) miqdorni aniqlovchi determinant tushunchasining kiritilishi chiziqli tenglamalar sistemasini yechish bilan chambarchas bog'liq.

$n-$tartibli o'rin almashtirish tushunchasini kiritamiz. $1,2,3,...,n$ sonlarning biror bir tartibda yozilishi $n-$tartibli o'rin almashtirish deb ataladi.
Masalan $\{1,2,3,4\}$ to'plamni qaraymiz. Bu to'plamdagi o'rin almashtirishlar

$$P_1=(2,3,1,4),\ P_2=(3,2,4,1),\ P_3=(3,1,2,4) \text{ va hakozo.}$$

Umuman olganda har qanday n ta elementdan tuzilgan to'plamda o'rin almashtirish tushunchasini kiritish mumkin. Bu jarayonni to'plam elementlarini 1 dan boshlab ketma-ket natural sonlar bilan nomerlaymiz va $\{1,2,...,n\}$ sonlar ustida o'rin almashtirishga keltiramiz. Ya'ni, $\{1,2,...,n\}$ sonlar ustida o'rin almashtirish tushunchasini qarash umumiylikni buzmaydi.

1-ta’rif. Agar $m > k$ bo‘lib, m soni k dan chaproqda joylashgan bo‘lsa, u holda P o‘rin almashtirishda m va k sonlar inversiyani tashkil qiladi deyiladi.
2-ta’rif. P o‘rin almashtirishdagi barcha elementlar tashkil etgan umumiy inversiyalar soni P o‘rin almashtirishning inversiyalar soni, deb ataladi va $inv\, P$ kabi belgilanadi.
$inv\, P$ sonning juft yoki toq bo‘lishiga qarab, mos ravishda, P o‘rin almashtirish juft yoki toq deb ataladi.

Masalan, $P = (1,4,3,2)$ o‘rin almashtirishda 1 va 4 sonlari inversiya tashkil qilmaydi. 3 soniga mos inversiyalar 1 ta, 2 soniga mos inversiyalar 2 ta. Demak, $inv\, P = 1 + 2 = 3$. P o‘rin almashtirish toq.

O‘rin almashtirish quyidagi xossalarga ega:

1. $\{1,2,3,...,n\}$ to‘plamdagi barcha o‘rin almashtirishlar soni $n!$ ga teng;
2. Juft va toq o‘rin almashtirishlar soni o‘zaro teng, ya’ni har biri $\frac{n!}{2}$ tadan;
3. O‘rin almashtirishda ikkita elementning o‘rni almashtirilsa uning juft-toqligi o‘zgaradi.

3-ta’rif. $\{1,2,3,...,n\}$ sonlar to‘plamini o‘ziga akslantiruvchi o‘zaro bir qiymatli akslantirish o‘rinlashtirish deb ataladi.

O‘rinlashtirishni ikkita o‘rin almashtirish bilan berishimiz mumkin. Ikkita P_1 va P_2 $n-$ tartibli o‘rin almashtirishlardan tuzilgan F o‘rinlashtirish quyidagicha belgilanadi: $F = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$.

Masalan, $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $F_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ o‘rinlashtirishlar o‘zaro teng. Chunki bu o‘rinlashtirishlarning har biri 1 ga 2 ni, 2 ga 3 ni va 3 ga 1 ni mos qo‘yadi.

O‘rinlashtirishni har doim $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & ... & i_n \end{pmatrix}$ ko‘rinishga keltirish mumkin. Bunda $P_2 = (i_1, i_2, ..., i_n)$ biror $n-$tartibli o‘rin almashtirish. P_2 almashtirish juft bo‘lsa, F o‘rinlashtirish juft, P_2 toq bo‘lsa, F ham toq deyiladi. $h(F) = (-1)^{inv\, P_2}$ miqdorga F o‘rinlashtirishning signaturasi deyiladi. $n-$tartibli barcha o‘rinlashtirishlar to‘plamini S_n bilan belgilaymiz.

Endi $n-$tartibli determinant tushunchasini kiritamiz. Bizga $n-$tartibli

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matrisa berilgan bo‘lsin.

4-ta’rif. Barcha mumkin bo‘lgan turli $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ o‘rinlashtirishlarga mos $h(F)a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}\dots a_{ni_n}$ ko‘rinishdagi ko‘paytmalarning yig‘indisidan iborat songa tartibli determinant deyiladi.

tartibli determinant $\det(A)$, $|A|$ yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kabi belgilanadi.

O‘rinlashtirish va o‘rin almashtirishlarning xossalariga asosan, bu ta’rifdan

1) $n-$tartibli determinant $n!$ ta hadning yig‘indisidan iborat;

2) bu yig‘indining har bir hadi matrisaning turli satrlari va turli ustunlarida joylashgan ta elementi ko‘paytmasidan iborat;

3) yuqorida aytilgan ko‘paytmalarning yarmi ($n!/2$ tasi) o‘z ishorasi bilan, qolgan yarmi qarama-qarshi ishora bilan olingan.

Bundan ko‘rinib turibdiki, determinantni ta’rif bo‘yicha hisoblash juda ko‘p amallardan iborat bo‘lib, ma’lum noqulayliklarga ega. Misol uchun 4-tartibli determinant $4!=24$ ta haddan iborat. Har bir hadi matrisaning turli satr va ustunlaridan olingan 4 ta elementi ko‘paytmasidan iborat. Bu hadlarning har birining ishorasini topish uchun 24 ta o‘rinlashtirishning juft-toqligi aniqlanishi talab qilinadi.

Shu sababdan determinantni uning ba’zi xossalaridan foydalanib hisoblash qulayroq. Bu xossalarni berishdan oldin ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni alohida qarab o‘tamiz.

2-tartibli kvadrat matrisaning determinanti quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,.$$

Haqiqatan, ikkinchi tartibli turli o‘rinlashtirishlar soni $2! = 2$ ta. Bular

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ va } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bulardan birinchisi juft, ikkinchisi esa toq. Shu sababli determinant $a_{11}a_{22}$ va $-a_{12}a_{21}$ sonlarning yig‘indisidan iborat.

1-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli matrisaning determinantini hisoblang:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 - 10 \cdot 9 = 48 - 90 = -42.$

2-misol. Quyida berilgan ikkinchi tartibli determinantni hisoblang:

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}.$$

Yechish. Yuqoridagi ta’rifga asosan

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Endi uchinchi tartibli determinantni qaraymiz. Uchinchi tartibli turli o‘rinlashtirishlar soni $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ta. Bular

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

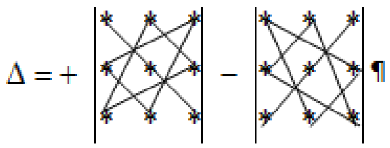
Bu o‘rinlashtirishlarning ikkinchi satridagi o‘rin almashtirishlarni qaraymiz. S_1 da $P_1 = (1,2,3)$ bo‘lib, $inv\, P_1 = 0$, S_2 da $P_2 = (2,3,1)$ bo‘lib, $inv\, P_2 = 0 + 0 + 2 = 2$, S_3 da $P_3 = (3,1,2)$ bo‘lib, $inv\, P_3 = 0 + 1 + 1 = 2$. Demak, S_1, S_2 va S_3 lar juft bo‘lib, ularga mos signaturalar 1 ga teng. Shu sababli determinantni ifodalovchi yig‘indida bu uchta o‘rinlashtirishga mos $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ va $a_{13}a_{21}a_{32}$ ko‘paytmalar o‘z ishorasi bilan olinadi. Juft va toq o‘rin almashtirishlar soni teng bo‘lganligi sababli, qolgan uchta S_4, S_5 va S_6 lar toq va ularga mos $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ va $a_{11}a_{23}a_{32}$ ko‘paytmalar qarama-qarshi ishora bilan olinishi kerak.

Yuqoridagilarni umumlashtirsak, uchinchi tartibli determinant uchun quyidagi ifodani olamiz:

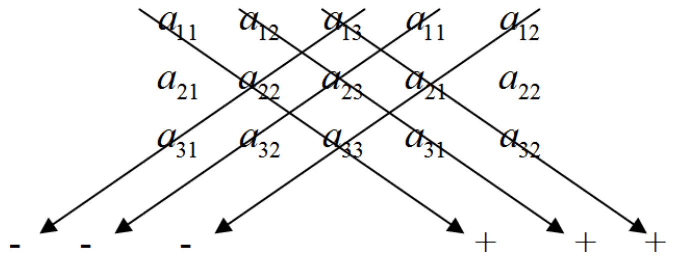
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Uchinchi tartibli determinantda o‘z ishorasi va qarama-qarshi ishora bilan olinadigan hadlarni eslab qolish uchun odatda ikki xil usuldan foydalaniladi. Bular uchburchak va Sarrus usullari deb nomlanadi.

Uchburchak usuli. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning uchburchak usuli quyidagicha sxematik ko‘rinishda amalga oshiriladi:



Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrus qoidasi quyidagicha amalga oshiriladi. Determinant ustunlarining o‘ng yoniga chapdagi birinchi va ikkinchi ustunlar ko‘chirib yoziladi. Hosil bo‘lgan kengaytirilgan jadvalda bosh diagonal yo‘nalishida joylashgan elementlar ko‘paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo‘nalishidagi elementlar ko‘paytirilib manfiy ishora bilan olinib yig‘indi tuziladi. Bu yig‘indi uchinchi tartibli determinantning qiymatidan iborat. Buni sxema ko‘rinishida quyidagicha tasvirlash mumkin:



3-misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantni uchburchak usuli bilan hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yechish. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 4\cdot 5 - 1\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 1 = 27.$

Determinant quyidagi xossalarga ega:

1. Agar determinant biror satri (ustuni) ning barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot 4\cdot 3 + 7\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 0\cdot 3 - 6\cdot 4\cdot 0 - 7\cdot 0\cdot 2 = 0.$$

2. Diagonal matrisaning determinanti diagonal elementlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

3. Yuqori (quyi) uchburchakli matrisalarning determinantlari uning bosh diagonal elementlari ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

Masalan, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot 6 = 60.$

4. Determinantning biror satri (ustuni) elementlarini $k \neq 0$ songa ko‘paytirish determinantni shu songa ko‘paytirishga teng kuchlidir yoki biror satr (ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni:

$$k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

Masalan, $3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(24+60+56-18-70-64) = -36.$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 7 & 3\cdot 3 \\ 5 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+180+168-54-192-210 = -36.$$

$$\begin{vmatrix} 3\cdot 2 & 7 & 3 \\ 3\cdot 5 & 6 & 8 \\ 3\cdot 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+180+168-54-192-210 = -36.$$

5. $n-$tartibli determinant uchun quyidagi tenglik o‘rinli:

$$\det(kA) = k^n\cdot\det(A)$$

6. Determinantda ikkita satr (ustun) o‘rinlari almashtirilsa, determinantning ishorasi o‘zgaradi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 39.$

Endi bu matrisada birinchi va uchinchi ustunlarining o‘rinlarini almashtiramiz, u holda

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 12 - 20 - 2 - 20 + 18 = -39.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, determinantlar faqat ishorasi bilan farq qiladi.

7. Agar determinant ikkita bir xil satr (ustun)ga ega bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi.

Masalan, $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 45 + 36 + 150 - 36 - 150 - 45 = 0.$

8. Agar determinantning biror satri (yoki ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun)ning mos elementlarini biror songa ko‘paytirib qo‘shilsa, determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 + 1 \cdot 2 & 4 + 2 \cdot 2 & 5 + 3 \cdot 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Haqiqatan ham, tenglikning chap tarafi

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 30 + 30 - 36 - 4 - 25 = -1.$$

tenglikning o‘ng tarafi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1\cdot 2 & 4+2\cdot 2 & 5+3\cdot 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8+66+60-72-55-8=-1.$$

Demak tenglik o‘rinli.

9. Agar determinant ikki satri (ustuni)ning mos elementlari proporsional bo‘lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31} \end{vmatrix} = 0.$$

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 12 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 72+192+192-72-192-192=0.$$

10. Transponirlash natijasida determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39.$$

11. Agar determinant biror satri (ustuni)ning har bir elementi ikki qo‘shiluvchi yig‘indisidan iborat bo‘lsa, u holda determinant ikki determinant yig‘indisiga teng bo‘lib, ulardan birining tegishli satri (ustuni) birinchi qo‘shiluvchilaridan, ikkinchisining tegishli satri (ustuni) ikkinchi qo‘shiluvchilaridan iborat bo‘ladi, ya’ni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

12. Agar determinant satr (ustun)laridan biri uning qolgan satr (ustun) larining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, determinant nolga teng. Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 16 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2\cdot 2+4\cdot 3 \\ -2 & 1 & -2\cdot 2+4\cdot 1 \\ 3 & -2 & 3\cdot 2-4\cdot 2 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Toq tartibli har qanday qiya simmetrik matrisaning determinanti nolga teng. Masalan,

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0+60-60+0+0+0=0.$$

14. Bir xil tartibli ikkita matrisalar ko‘paytmasining determinanti, bu matrisalar determinantlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B).$$

Bizga $n-$tartibli kvadrat matrisa berilgan bo‘lsin.

5-ta’rif. $n-$tartibli A kvadrat matrisaning $1\le k\le n-1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy k ta satrlari va k ta ustunlari kesishgan joyda turgan elementlardan tashkil topgan $k-$tartibli matrisaning determinanti d determinantning $k-$tartibli minori deb ataladi.

$k-$tartibli minor sifatida A kvadrat matrisaning $n-k$ ta satr va $n-k$ ta ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan determinant, deb ham qarash mumkin.

6-ta’rif. Matrisaning diagonal elementlari yordamida hosil bo‘lgan minorlar bosh minorlar deb ataladi.

7-ta’rif. $n-$tartibli A kvadrat matrisada $k-$tartibli M minor turgan satrlar va ustunlar o‘chirib tashlangandan so‘ng qolgan $(n-k)-$tartibli M' minorga M minorning to‘ldiruvchisi deyiladi va aksincha.

M minor va uning M' to‘ldiruvchi minorini sxematik ravishda quyidagicha tasvirlash mumkin:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \boxed{M} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Shunday qilib, determinantning o‘zaro to‘ldiruvchi minorlar jufti haqida gapirish mumkin. Xususiy holda, a_{ij} element va determinantning $i-$satri va $j-$ustunini o‘chirishdan hosil bo‘lgan $(n-1)-$tartibli minor o‘zaro to‘ldiruvchi minorlar juftini hosil qiladi.

8-ta’rif. a_{ij} minorning (elementning) algebraik to‘ldiruvchisi deb $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ songa aytiladi.

Laplas teoremasi. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bilan, shu elementlarga mos algebraik to‘ldiruvchilar ko‘paytmalari yig‘indisiga teng, ya’ni:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

Bu formulaga Δ determinantni i satr elementlari bo‘yicha yoyish formulasi deyiladi.

Determinantning biror satr (ustun) elementlari bilan uning boshqa satri (ustuni) elementlari algebraik to‘ldiruvchilari ko‘paytmalarining yig‘indisi nolga teng.

4-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoysak

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=2A_{11}+A_{12}+3A_{13}=2(-1)^{1+1}\cdot M_{11}+(-1)^{1+2}\cdot M_{12}+3(-1)^{1+3}\cdot M_{13}=$$

$$=2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=2(9-8)-(15-2)+3(20-3)=2-13+51=40.$$

5-misol. Quyidagi determinantni Laplas formulasi bilan hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

Yechish. Berilgan determinantni ikkinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib chiqamiz. Bu ustunda 2 ta noldan farqli element bo‘lgani uchun natijada 2 ta 3-tartibli determinant hosil bo‘ladi.

$$\Delta = -1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}.$$

Yoki avval $a_{32} = 2$ elementni nolga keltirishimiz mumkin. Buning uchun 2-satrni 2 ga ko‘paytirib 3-satrga qo‘shamiz va hosil bo‘lgan determinantni 2-ustun elementlariga nisbatan yoyamiz va hisoblaymiz:

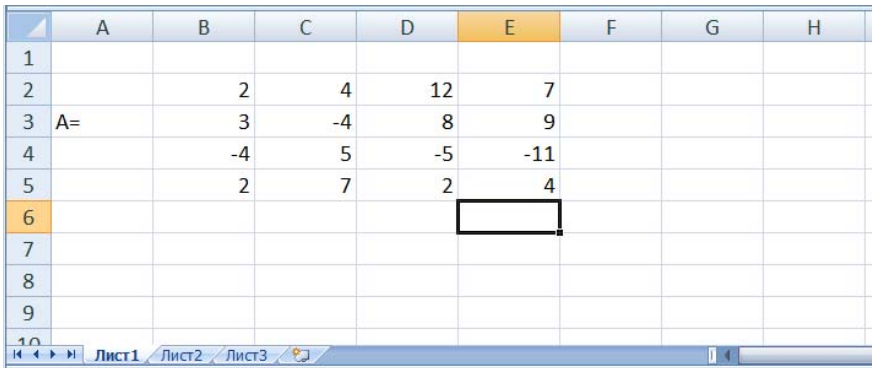
$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 4 & 1\\ 7 & 0 & 9 & 7\\ 1 & 0 & 6 & 2\end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 7 & 9 & 7\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix} = -21.$$

Ko‘rinib turibdiki, Laplas teoremasidan yuqorida keltirilgan xossalar bilan birgalikda foydalanish determinantni hisoblashni ancha osonlashtiradi. Buning uchun biror satr yoki ustunni tanlab olib, shu ustun yoki satrdagi elementlarni determinantning xossalaridan foydalanib iloji boricha nollarga keltirishimiz kerak bo‘ladi. So‘ngra, Laplas teoremasi yordamida determinantning tartibini bittaga kamaytirishimiz mumkin.

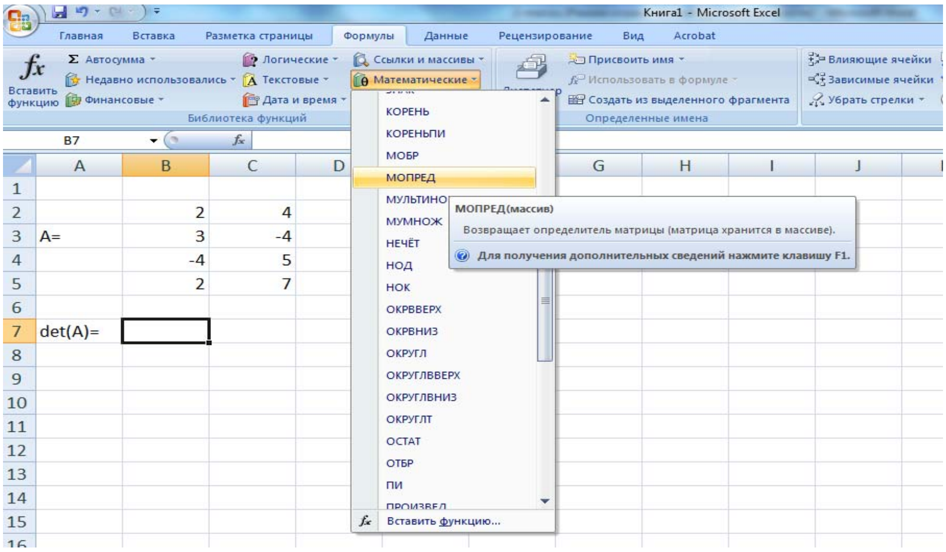
Determinantni Excelda hisoblash usuli bilan tanishib chiqamiz.

6-misol. $A = \begin{pmatrix}2 & 4 & 12 & 7\\ 3 & -4 & 8 & 9\\ -4 & 5 & -5 & -11\\ 2 & 7 & 2 & 4\end{pmatrix}$ matrisaning determinantini hisoblang.

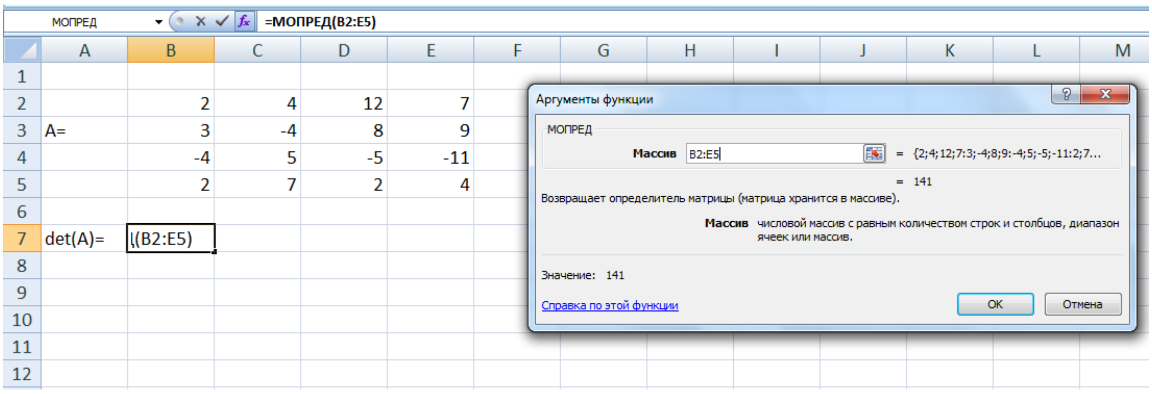
I. Matrisani Excel dasturida jadval shaklida kiritamiz;



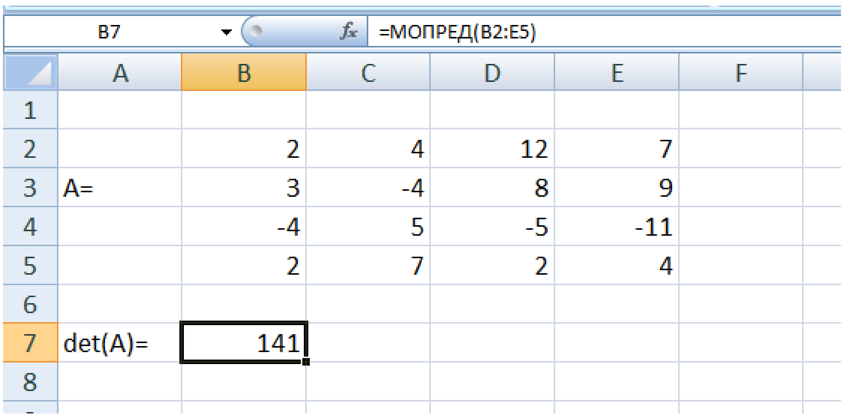
II. Biror katakni tanlaymiz. Matematik funksiyalar ro‘yxatidan “МОПРЕД” funksiyasini tanlaymiz.



III. Hosil bo‘lgan oynada massiv qatoriga matrisa joylashgan koordinatalarni kiritamiz.



Enter tugmasi bosilsa, determinant qiymati hosil bo‘ladi.



Determinant qiymati 141 ga teng ekan.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash Sarrus qoidasi nimadan iborat?
3. Uchinchi tartibli determinantni hisoblash uchburchak sxemasini yozing.
4. Transpozitsiyalash deganda nimani tushunasiz?

5. Juft yoki toq o‘rin almashtirish tizimi deb, qanday o‘rin almashtirishga aytiladi?
6. n-tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
7. n-tartibli determinant ixtiyoriy elementi minori deb nimaga aytiladi?
8. Algebraik to‘ldiruvchi yoki ad’yunkt deb nimaga aytiladi?
9. Determinantni transponirlashdan tashqari uning ustida qanday almashtirishlar bajarganda kattaligi o‘zgarmaydi?
10. n-tartibli kvadrat matrisaning determinanti yoki aniqlovchisi deb nimaga aytiladi?

3-mavzu. Matrisa rangi. Teskari matrisa

Reja:

1. Matrisa rangi va uning xossalari.
2. Vektorlar sistemasining rangi.
3. Xos va xosmas matrisalar.
4. Bazis minor tushunchasi.
5. Teskari matrisa. Teskari matrisani Excelda hisoblash.

Tayanch so‘z va iboralar: matrisa, matrisa osti minori, matrisa rangi, xos matrisa, xosmas matrisa, determinant, qo‘shma matrisa, teskari matrisa.

Ixtiyoriy o‘lchamli matrisaning bir necha satr yoki ustunlarini o‘chirishdan hosil bo‘lgan kvadrat matrisa determinantiga matrisa osti minori deyiladi. Bu kvadrat matrisa tartibi matrisa osti minorning tartibi deyiladi. Agar berilgan matrisa kvadrat shaklda bo‘lsa, uning eng katta tartibli minori o‘ziga teng.

Masalan: $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ matrisaning 1-satr va 1-ustunini o‘chirishdan 2-tartibli minor $M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$, 2-satr va 3-ustunini o‘chirishdan 2-tartibli minor $M_{23}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ va hokazo minorlarni hosil qilish mumkin.

1-ta’rif. A matrisaning rangi, deb noldan farqli matrisa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va $rang(A)=r(A)$ ko‘rinishida ifodalanadi.

Matrisa rangining xossalari:

1) agar A matrisa $m \times n$ o‘lchovli bo‘lsa, u holda $rangA \le \min(m;n)$;

2) A matrisaning barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda $rangA = 0$;

3) agar A matrisa $n-$tartibli kvadrat matrisa va $|A| \ne 0$ bo‘lsa, u holda $rangA = n$.

1-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ matrisa rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan matrisa (3×2) o‘lchamli bo‘lgani uchun satrlar va ustunlar sonini taqqoslaymiz va kichigini, ya’ni 2 ni tanlaymiz. Matrisadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning qiymatini hisoblaymiz. Bu jarayonni noldan farqli ikkinchi tartibli minor topilguncha davom ettiramiz:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -1 \ne 0.$$

Berilgan matrisadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta’rifga binoan, A matrisa rangi 2 ga teng, ya’ni $rang(A) = 2$.

Matrisa rangi uning ustida quyidagi almashtirishlar bajarganda o‘zgarmaydi:

1. matrisa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko‘paytirganda;
2. matrisa satrlari (ustunlari) o‘rinlari almashtirilganda;
3. matrisa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror noldan farqli songa ko‘paytirib, so‘ngra qo‘shganda;
4. barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborganda;
5. matrisa transponirlanganda.

Teorema. Elementar almashtirishlar matrisa rangini o‘zgartirmaydi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ matrisada birinchi satrni 2 ga va ikkinchi satrni -3 ga ko‘paytirib, birinchini ikkinchiga qo‘shsak, so‘ngra yana birinchi satrni 5 ga, uchunchi satrni 3 ga ko‘paytirib, natijalarni qo‘shsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

matrisa hosil bo‘ladi.

Bu matrisada ikkinchi satrni 1 ga, uchunchi satrni 5 ga ko‘paytirib, ikkinchi satrni uchunchi satrga qo‘shsak,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

matrisa hosil bo‘ladi. Yana

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

matrisani olib, yuqoridagi singari almashtirishlarni bajarsak,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hosil bo‘ladi.

A va B matrisaga qo‘llanilgan almashtirishlarning mohiyati quyidagidan iborat: m satrli matrisa berilgan holda birinchi va ikkinchi satrlarni, undan keyin birinchi va uchinchi satrlarni, ..., nihoyat, birinchi va $m-$satrlarni shunday sonlarga ko‘paytiramizki, tegishli songa ko‘paytirilgan birinchi satrni navbat bilan boshqa hamma satrlarga qo‘shganimizda ikkinchi satrdan boshlab birinchi ustun elementlari nollarga aylanadi. So‘ngra ikkinchi satr yordamida keyingi hamma satrlar bilan yana shunday almashtirishlarni bajaramizki, uchinchi satrdan boshlab, ikkinchi ustun elementlari nollarga aylanadi. Undan keyin to‘rtinchi satrdan boshlab uchinchi ustun elementlari nollarga aylanadi va hokazo. Shu tariqa bu jarayon oxirigacha davom ettiriladi.

Agar matrisaning qandaydir satrlari boshqa satrlari orqali chiziqli ifodalangan bo‘lsa, u holda shu almashtirishlar natijasida, bunday satrlarning hamma elementlari nollarga (ya’ni bunday satrlar nol satrlarga) aylanadi.

Birorta elementi noldan farqli satrni nolmas satr, deb atasak, yuqoridagi almashtirishlardan keyin hosil bo‘lgan matrisaning rangi nolmas satrlar soniga teng bo‘ladi, chunki bunday satrlar chiziqli erkli satrlarni bildiradi.

Yuqorida qo‘llaniladigan almashtirishlar matrisani elementar almashtirishlardan iborat bo‘lgani uchun, ular matrisaning rangini o‘zgartirmaydi.

Teorema. Pog‘onasimon matrisaning rangi uning nolmas satrlari soniga teng.

Ixtiyoriy matrisaning rangini aniqlash uchun yuqorida ko'rsatilgan qoida bo'yicha elementar almashtirishlar yordamida matrisa pog'onasimon matrisaga keltiriladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

bu yerda $a_{ii}\neq 0,\ i=1,...,r,\ \ r\leq k.$

Pog'onasimon matrisaning rangi r ga teng. Masalan, yuqoridagi misollarda $r(A)=3,\ r(B)=2$ bo'ladi.

2-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ matrisaning rangini aniqlang.

Yechish. Berilgan dastlabki matrisa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisa pog'onasimon matrisaga keltirildi. Uchinchi satr barcha elementlari nollardan iborat bo'lganligi sababli, berilgan matrisa rangi ikkiga teng.

Matrisa yordamida vektorlar sistemasining rangi bilan tanishib chiqamiz: o'lchamlari teng bir necha vektorlardan tuzilgan $A_i=(a_{1i},a_{2i},...a_{mi})^T,\ i=1,2,...,n,$ ustun vektorlar sistemasini qaraymiz.

2-ta'rif. Vektorlar sistemasining rangi, deb shu vektorlar koordinatalari yordamida tuzilgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa rangiga aytiladi va $r(A_1,A_2,...,A_n)$ ko'rinishida belgilanadi.

Izoh. Xuddi shuningdak, satr vektorlar sistemasi ham qaralishi mumkin.

3-misol. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorlar sistemasining rangini hisoblang.

Yechish. Berilgan vektor koordinatalari yordamida matrisa quramiz va matrisa rangini elementar almashtirish yordamida topamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 14 & 13 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3$ bo‘lgani uchun $r(A_1, A_2, A_3, A_4) = 3$ bo‘ladi.

3-ta’rif. Kvadrat matrisa elementlaridan tuzilgan determinant noldan farqli bo‘lsa, u holda bunday matrisa aynimagan yoki maxsusmas matrisa deyiladi. Aks holda, ya’ni agar determinant nolga teng bo‘lsa, bu matrisa aynigan yoki maxsus matrisa deyiladi.

4-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ va $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

matrisalarning aynigan yoki aynimaganligini aniqlang.

Yechish. Berilgan matrisalarning determinantlarini hisoblaymiz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 10 - 60 = -50,$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0, \qquad |E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Demak, A va E matrisalar – aynimagan, B matrisa esa aynigan matrisa. $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ixtiyoriy sonlar va $A_1, A_2, ..., A_n$ vektorlar berilgan bo‘lsin.

4-ta’rif. $B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n$ vektorga $A_1, A_2, ..., A_n$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

5-ta’rif. Agar A matrisaning r tartibli minoridan katta barcha minorlari nolga teng bo‘lsa, u holda matrisaning noldan farqli r tartibli minori bazis minor deb ataladi.

Ta'rifdan ko'rinib turibdiki, bazis minorning tartibi matrisa rangiga teng.

Bazis minorlar haqidagi quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Matrisaning ixtiyoriy ustuni (satri) bazis minor joylashgan ustunlar (satrlar) chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. Umumiylikni buzmasdan bazis minor birinchi r ta satr va birinchi r ta ustunlar kesishmasida joylashgan, deb olamiz. $r+1$ tartibli quyidagi minorni ko'rib chiqamiz.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} & a_{sk} \end{vmatrix}$$

Bu minor bazis minorga $s-$satr va $k-$ustun elementlarini qo'shishdan hosil bo'lgan. Ta'rifga asosan $D=0$. Determinantni Laplas teoremasidan foydalangan holda oxirgi satri bo'yicha yoysak,

$$a_{s1}D_{s1} + ... + a_{sr}D_{sr} + a_{sk}D_{sk} = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bunda D_{sj} son a_{sj} elementning algebraik to'ldiruvchisi. Teorema shartiga ko'ra $D_{sk} \neq 0$. Bundan:

$$a_{sk} = \alpha_1 a_{s1} + \alpha_2 a_{s2} + ... + \alpha_r a_{sr},$$

bu yerda $\alpha_j = \dfrac{D_{sj}}{D_{sk}}, j=1,2,...,r.$ Bu tenglikda k ni 1 dan m gacha o'zgartirib, ixtiyoriy $k-$ ustun $\alpha_j,\ j=1,2,...,r$ koeffisiyentlar bilan bazis minorga mos ustunlar chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodasini olamiz.

6-ta'rif. A kvadrat matrisaning har bir a_{ik} elementini unga mos algebraik to'ldiruvchisi bilan almashtirish natijasida hosil qilingan matrisa ustida transponirlash amalini bajarishdan hosil bo'lgan $\overline{A}$ matrisa berilgan matrisaga qo'shma matrisa deyiladi.

Masalan: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrisaga qo'shma matrisa

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{i1} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{i2} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1j} & A_{2j} & \ldots & A_{ij} & \ldots & A_{nj} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{in} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ ko‘rinishda bo‘ladi.

5-misol. Quyidagi $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisa uchun qo‘shma matrisa topilsin.

Yechish. Matrisaning barcha elementlariga mos algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-20, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-15, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-10, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4.$$

Shunday qilib, berilgan A kvadrat matrisaga qo‘shma bo‘lgan $\overline{A}$ matrisa

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 0 & -5 & -20 \\ 0 & -15 & -10 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -5 & -15 & 1 \\ -20 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

7-ta’rif. Agar A kvadrat matrisa uchun $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglik bajarilsa, A^{-1} matrisa A matrisaga teskari matrisa deyiladi.

Ta’rifga asosan, $\det(A)\det(A^{-1})=\det(AA^{-1})=\det(E)=1$ bo‘lganligi sababli, agar teskari matrisa mavjud bo‘lsa $\det(A)\neq 0$ ekanligini hosil qilamiz. Agar $\det(A)=0$ bo‘lsa, teskari matrisa mavjud emas.

Odatda matrisaga teskari matrisa topishning 2 xil usulidan foydalanamiz:

1. Agar A matrisa aynimagan bo'lsa, u holda uning uchun yagona A^{-1} matrisa mavjud bo'ladi va u quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\overline{A},$$

bunda $\overline{A}$ matrisa A ga qo'shma matrisa.

6-misol. Berilgan matrisaga teskari matrisani toping: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}.$

Yechish. 1) A matrisaning determinantini topamiz:

$$\det A=1\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=$$

$$=-48-2\cdot(-42)+3\cdot(32-35)=-48+84-9=27\neq 0.$$

$\det A\neq 0$ demak, A^{-1} mavjud.

2) A matrisa barcha elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 0\end{vmatrix}=5\cdot 0-6\cdot 8=-48;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-(4\cdot 0-6\cdot 7)=42;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=4\cdot 8-5\cdot 7=-3;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 0\end{vmatrix}=24; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-21;$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=6; \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3;$$

3) $\overline{A}=\left(A_{ij}\right)^{T}=\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}$ matrisani yozamiz.

4) A^{-1} matrisani topamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\overline{A}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}-48 & 24 & -3\\ 42 & -21 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}.$$

Tekshiramiz: $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Teskari matrisani topishning Gauss-Jordan usulida maxsusmas matrisani shu tartibdagi birlik matrisa bilan kengaytiriladi, kengaytirilgan matrisa satrlari ustida elementar almashtirish to kengaytirilgan matrisa birinchi qismida birlik matrisa hosil bo‘lguncha olib boriladi, natijada kengaytirilgan matrisaning ikkinchi qismida berilgan matrisaga teskari bo‘lgan matrisa hosil bo‘ladi. Bu jarayonni Gauss-Jordan modifikatsiyasi (yoki formulasi) ko‘rinishida yozishimiz mumkin:

$$\left(A\middle|E\right)\sim\left(E\middle|A^{-1}\right)$$

7-misol. Gauss-Jordan usulida berilgan matrisaga teskari matrisani toping.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Yechish. (3×6) o‘lchamli $\Gamma=(A/E)$ kengaytirilgan matrisani yozamiz. Avval matrisaning satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib uni pog‘onasimon ko‘rinishga keltiramiz $\Gamma_1=(A_1/B)$, keyin $\Gamma_2=\left(E/A^{-1}\right)$ ko‘rinishga keltiramiz.

$$\Gamma=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ II-I\\ III-2\cdot I\end{array}\sim\Gamma_1=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ II+III\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-3&1&1\\0&0&2&-2&0&1\end{array}\right)III\div 2\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&-3&1&1\\0&0&1&-1&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\begin{array}{c}I-II-III\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-1&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-3&1&1\\0&0&1&-1&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)=\Gamma_2$$

Demak, $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1&-\frac{3}{2}\\-3&1&1\\-1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

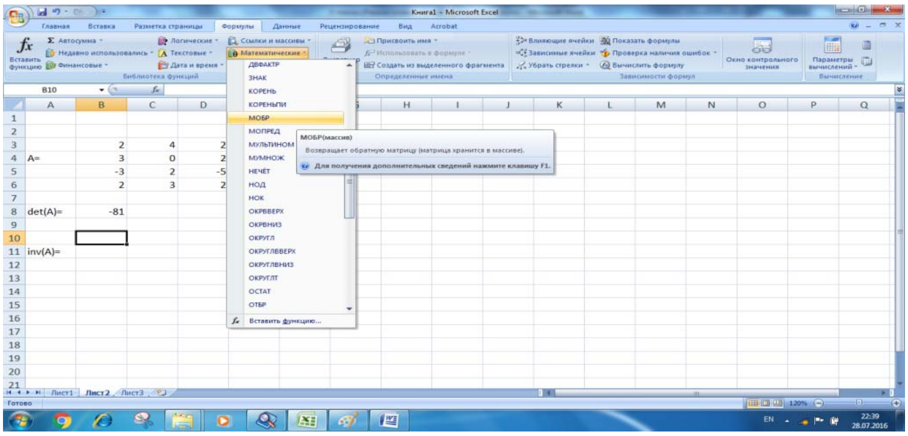
Tekshiramiz: $AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-1&-\frac{3}{2}\\-3&1&1\\-1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}5&-1&-\frac{3}{2}\\-3&1&1\\-1&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

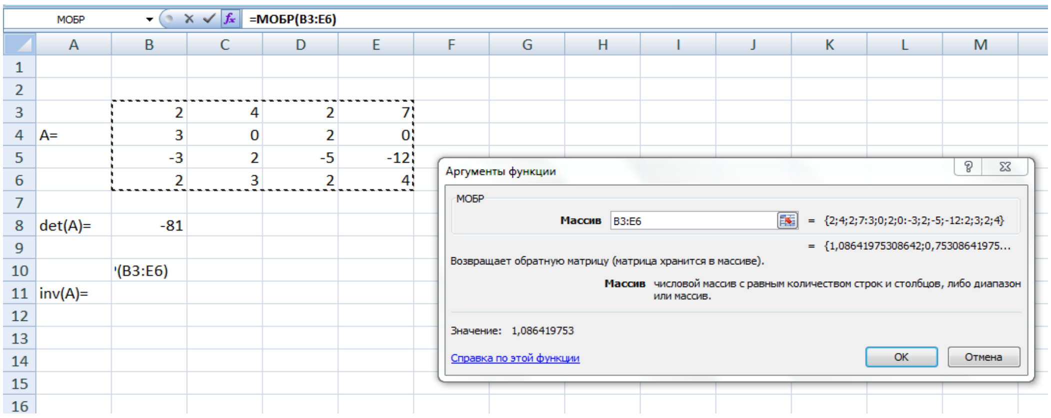
Endi teskari matrisani Excelda qurish bilan tanishib chiqamiz.

$A=\begin{pmatrix}2&4&2&7\\3&0&2&0\\-3&2&-5&-12\\2&3&2&4\end{pmatrix}$ matrisaning teskarisini topamiz. Birinchi navbatda matrisaning determinantini hisoblaymiz. $\det(A)=-81\neq 0$. Demak, teskari matrisa mavjud.

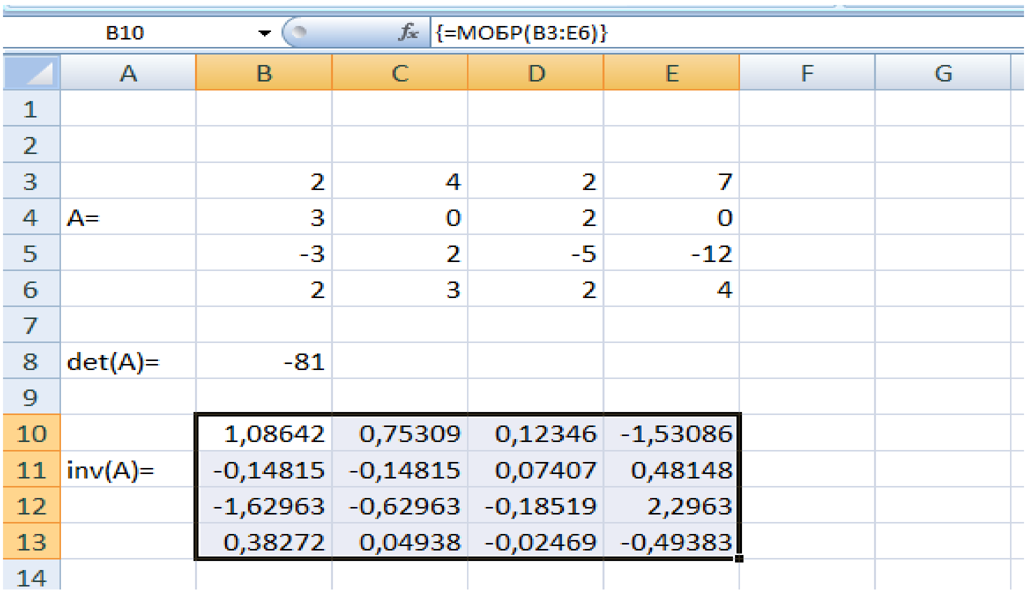
I. Bo‘sh katakni belgilaymiz. Matematik funksiyalardan ‘МОБР’ funksiyasini tanlaymiz.



II. Dialog oynasida A matrisa joylashgan o‘rni koordinatalarini kiritamiz.



III. Enter tugmasini bosamiz. Belgilangan katakda teskari matrisaning birinchi elementi paydo bo‘ladi. Boshqa elementlarni hosil qilish uchun shu katakdan boshlab 4 ga 4 jadvalni belgilaymiz va $F2$ tugmasini bosamiz. Keyin Ctrl+Shift+Enter tugmalari birgalikda bosiladi. Shu bilan teskari matrisani hosil qilamiz.



Matrisalarni ko‘paytirish usuli bilan tekshirib, natija to‘g‘riligiga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

G6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3		2	4	2	7						
4	A=	3	0	2	0						
5		-3	2	-5	-12						
6		2	3	2	4			1	0	0	0
7								0	1	0	0
8	det(A)=	-81					A*inv(A)=	0	0	1	0
9								0	0	0	1
10		1,08642	0,75309	0,12346	-1,53086						
11	inv(A)=	-0,14815	-0,14815	0,07407	0,48148						
12		-1,62963	-0,62963	-0,18519	2,2963						
13		0,38272	0,04938	-0,02469	-0,49383						
14											

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Matrisaning rangi deb nimaga aytiladi?
2. Matrisa rangini hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
3. Matrisa ustida qanday amallarni bajarganda uning rangi o‘zgarmaydi?
4. Xosmas matrisa deb qanday kvadratik matrisaga aytiladi?
5. Xos matrisa deb qanday kvadratik matrisaga aytiladi?
6. Teng tartibli qanday kvadratik matrisalarni ko‘paytirganda ko‘paytma xosmas matrisadan iborat bo‘ladi?
7. Xosmas matrisaning teskari matrisasi deb qanday matrisaga aytiladi?
8. Nima uchun xos matrisaning teskarisi mavjud emas?
9. Kvadratik matrisaning teskari matrisasini qurishning qanday usullarini bilasiz?
10. Teskari matrisaning qanday xossalarini bilasiz?

4-mavzu. Vektorlar sistemasi va uning rangi

Reja:

1. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi.
2. Ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari.
3. R_n fazoda bazis va koordinatalar. Kanonik bazis.

Tayanch so‘z va iboralar: Vektorlar sistemasi bazisi, vektorlar sistemasi rangi, ortogonal vektorlar sistemasi, ortogonallash jarayoni, ortonormallangan vektorlar sistemasi, fazo bazisi, kanonik bazis.

n-o‘lchovli *m* ta $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$vektorlardan iborat vektorlar sistemasi berilgan bo‘lib, chiziqli bog‘liq sistemani tashkil etsin. $\mathbf{a^{(i)}, a^{(j)}, \ldots, a^{(k)}}$ $(1\le i<j<\ldots<k\le m)$ sistema esa berilgan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sistemaning qism osti sistemalaridan biri bo‘lsin.

Agar: birinchidan, $\mathbf{a^{(i)}, a^{(j)}, \ldots, a^{(k)}}$ $(1\le i<j<\ldots<k\le m)$ sistema chiziqli erkli; ikkinchidan, $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ sistemaning har bir vektori $\mathbf{a^{(i)}, a^{(j)}, \ldots, a^{(k)}}$ $(1\le i<j<\ldots<k\le m)$ sistema vektorlari bo‘yicha yagona usulda yoyilsa, u holda $\mathbf{a^{(i)}, a^{(j)}, \ldots, a^{(k)}}$ $(1\le i<j<\ldots<k\le m)$ vektorlar sistemasiga $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ **vektorlar sistemasining bazisi** deyiladi.

$\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ vektorlar sistemasining har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasini sistemaning bazisigacha to‘ldirish mumkin.

Berilgan $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sistemaning bazislaridan birini topish uchun $\mathbf{a_1}x_1+\mathbf{a_2}x_2+\ldots+\mathbf{a_m}x_m=\mathbf{\theta}$ vektor tenglama tuziladi va uning biror-bir ko‘rinishdagi umumiy yechimi quriladi. Qurilgan umumiy yechimning bazis noma’lumlari oldidagi mos koeffisiyent – vektorlardan iborat sistema uning bazisini tashkil etadi. Xar qanday chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasi umumiy yechim ko‘rinishlariga mos holda bir nechta bazisga ega bo‘lishi mumkin. Har bir bazisdagi vektorlar soni esa tengligicha qoladi.

Berilgan $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ vektorlar sistemasining ixtiyoriy bazisi tarkibidagi vektorlar soniga uning **rangi** deyiladi.

Masala: Quyida berilgan vektorlar sistemasining bazislaridan birini quring va rangini aniqlang: $\mathbf{a_1}(1; -1; 2; 3)$, $\mathbf{a_2}(-2; -3; 0; 1)$, $\mathbf{a_3}(-2; -9; 4; 6)$, $\mathbf{a_4}(-1; 2; -2; -1)$.

$\mathbf{a_1}x_1+\mathbf{a_2}x_2+\mathbf{a_3}x_3+\mathbf{a_4}x_4=\mathbf{\theta}$ vektor tenglama umumiy yechimini Gauss-Jordan usulida quramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -9 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x_1, x_2 va x_4 noma’lumlar umumiy yechimning bazis noma’lumlari. Demak, mos ravishda, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ va $\mathbf{a_4}$ vektorlar tizimi berilgan sistemaning bazislaridan birini tashkil etadi. Tizim 3 ta vektordan tarkib topgani uchun, berilgan vektorlar sistemasining rangi 3 ga teng.

Agar $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_m}$ vektorlar sistemasining rangi **r** ga teng bo‘lsa, u holda sistemaning r ta vektoridan tuzilgan har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasi uning bazisi bo‘ladi.

Agar berilgan ikki *n*-o‘lchovli $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{a_2}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi nolga teng bo‘lsa, $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{a_2}$ vektorlar o‘zaro **ortogonal vektorlar** deyiladi. «Ortogonal» iborasi real fazo vektorlari uchun «perpendikulyar» iborasi bilan almashtirilishi mumkin. Masalan, $\mathbf{a_1}(-1; 2; 0; 3)$ va $\mathbf{a_2}(4; 2; -5; 0)$ vektorlar o‘zaro ortogonal vektorlardir, chunki $\mathbf{(a_1, a_2)} = -1*4+2*2+0*(-5)+3*0 = 0$.

n-o‘lchovli vektorlardan tarkib topgan vektorlar sistemasi berilgan bo‘lib, sistema vektorlarining har qanday ikki jufti o‘zaro ortogonal bo‘lsa, u holda sistemaga **ortogonal vektorlar sistemasi** deyiladi. Masalan, $\mathbf{a_1}$(3; 2; 1), $\mathbf{a_2}$(2; -3; 0), $\mathbf{a_3}$(-3; -2; 13) vektorlar sistemasi ortogonaldir, chunki **$(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})=0$, $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_3})=0$ va $(\mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})=0$.**

Har qanday nolmas vektorlardan iborat ortogonal vektorlar sistemasi chiziqli erkli sistemadir.

n-o‘lchovli k ta $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ vektorlardan iborat chiziqli erkli sistema berilgan bo‘lsin. $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots,\mathbf{a_k}$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal vektorlar sistemasini qurish mumkin, ya’ni chiziqli erkli $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ sistemani mos ravishda $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_k}$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin. Almashtirish quyidagi **Shmidt formulalari** yordamida amalga oshiriladi:

$$\mathbf{b_1 = a_1,\ b_t = a_t\text{-}\Sigma[(b_i, a_t)/(b_i, b_i)]*b_i,\ (t\in\{2; 3; \ldots; k\}).}$$

$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots,\mathbf{a_k}$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi ustida ortogonal $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots,\mathbf{b_k}$ vektorlar sistemasini keltirilgan qurish usuli $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots,\mathbf{a_k}$ vektorlar sistemasini **ortogonallash jarayoni** deyiladi.

Masala: $\mathbf{a_1}$(1; 1; 1), $\mathbf{a_2}$(0; 1; 1), $\mathbf{a_3}$(0; 0; 1) vektorlar sistemasi ustida ortogonal sistema quring.

Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli erkli sistemadir, chunki rang**$(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})=3 = 3$** (vektorlar soni). Demak, ortogonallash jarayonini qo‘llab, berilgan sistemani b_1, b_2, b_3 ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin.

$$\mathbf{b_1 = a_1(1; 1; 1);}$$

$$\mathbf{b_2 = a_2\text{-}[(b_1, a_2)/(b_1, b_2)]*b_1}=(0; 1; 1)-2/3(1; 1; 1)=(-2/3; 1/3; 1/3);$$

$$\mathbf{b_3 = a_3\text{-}[(b_1, a_3)/(b_1, b_1)]*b_1\text{-}[(b_2, a_3)/(b_2, b_2)]*b_2}=(0; 0; 1)-1/3*(1; 1; 1)-$$

$$-\quad (1/3)/(2/3)*(-2/3; 1/3; 1/3)=(0; -1/2; 1/2).$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirib, (1; 1; 1); (-2; 1; 1); (0; -1; 1) natijani olamiz.

Nolmas **b** vektorning normallangan yoki birlik vektori deb, $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori normallangan, ya’ni birlik vektor ko‘rinishga keltirilgan ortogonal sistemaga **ortonormallangan vektorlar sistemasi** deyiladi.

Agar $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots,\mathbf{b_k}$ ortogonal vektorlar sistemasi bo‘lsa, $\mathbf{b_1}/|\mathbf{b_1}|$, $\mathbf{b_2}/|\mathbf{b_2}|$, …, $\mathbf{b_k}/|\mathbf{b_k}|$ ortonormallangan vektorlar sistemasidir.

Masala. $\mathbf{a_1}$(1; 1; 1), $\mathbf{a_2}$(0; 1; 1), $\mathbf{a_3}$(0; 0; 1) vektorlar sistemasi ustida ortonormallangan sistema quring.

Berilgan vektorlar sistemasi ustida dastlab qurilgan ortogonal $\mathbf{b_1}$(1; 1; 1); $\mathbf{b_2}$(-2; 1; 1); $\mathbf{b_3}$(0; -1; 1) sistemaning har bir vektorini birlik ko‘rinishiga keltiramiz.

$$\mathbf{b_1}/|\mathbf{b_1}|=(1/\sqrt{1^2+1^2+1^2})\ (1; 1; 1)=(1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$$

$\mathbf{b_2}/|\mathbf{b_2}|=(1/\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2})\ (-2;\ 1;\ 1)=(-2/\sqrt{6};\ 1/\sqrt{6};\ 1/\sqrt{6})$

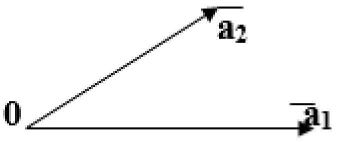
$\mathbf{b_3}/|\mathbf{b_3}|=(1/\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2})\ (0;\ -1;\ 1)=(0;\ -1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$

Ortonormallangan sistema $(1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$, $(-2/\sqrt{6};\ 1/\sqrt{6};\ 1/\sqrt{6})$, $(0;\ -1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$ vektorlar tarkibidan iborat.

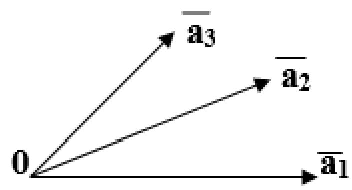
n-o‘lchovli haqiqiy arifmetik R_n fazoning bazisi deb, har qanday chiziqli erkli *n*-o‘lchovli *n* ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi. *n*-o‘lchovli *n* ta $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, …, $\mathbf{a_n}$ vektorlardan iborat tartiblangan tizim R_n fazo bazisi va *a* uning ixtiyoriy vektori bo‘lsin. U holda *a* vektor tanlangan bazis vektorlari bo‘yicha ularning yagona chiziqli kombinatsiyasi $\mathbf{a}=x_1\mathbf{a_1}+x_2\mathbf{a_2}+\ldots+x_n\mathbf{a_n}$ ko‘rinishida yoyilishi mumkin. x_1, x_2, …, x_n haqiqiy sonlarga *a* vektorning $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, …, $\mathbf{a_n}$ bazisdagi koordinatalari deyiladi.

Xususan, haqiqiy koordinatalar tekisligi (R_2) bazisi deb, tekislikda tanlangan ixtiyoriy tartiblangan ikkita nokollinear vektorlarga aytiladi.

R_2 fazoda tanlangan 0 nuqta va $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ bazis birgalikda tekislikda Dekartkoordinatalarisistemasideyiladi (1-rasm).



1-rasm



2-rasm

Ixtiyoriy $a\in R_2$ vektor tanlangan $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ bazis vektorlari bo‘yicha yagona usulda yoyilishi mumkin.

Haqiqiy real uch o‘lchovli fazo (R_3) bazisi deb, unda ixtiyoriy tanlangan uchta tartiblangan nokomplanar vektorlarga aytiladi.

R_3 fazoda tanlangan 0 nuqta va $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ bazis birgalikda fazoda Dekart koordinatalari sistemasi deyiladi (2-rasm). Ixtiyoriy $a\in R_3$ vektor tanlangan $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ bazis vektorlari bo‘yicha yagona usulda yoyilishi mumkin.

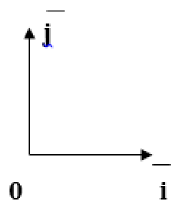
n-o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazo (R_n) ortogonal bazisi deb, vektorlari juft-jufti bilan o‘zaro ortogonal bo‘lgan bazisga aytiladi.

R_n fazo ortonormallangan bazisi deb esa, har bir vektori normallangan ortogonal bazisga aytiladi.

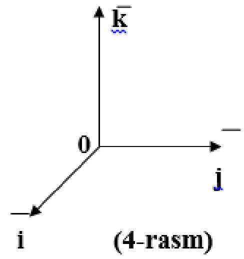
n-o‘lchovli *n* ta $\mathbf{e_1}(1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $\mathbf{e_2}(0;\ 1;\ \ldots;\ 0)$, …, $\mathbf{e_n}(0;\ 0;\ \ldots;\ 1)$ vektorlardan iborat ortonormallangan bazisga R_n fazo **kanonik bazisi** deyiladi.

Xususan $\mathbf{i}(1;\ 0)$, $\mathbf{j}(0;\ 1)$ bazis R_2 fazo kanonik bazisi deyilsa, $\mathbf{i}(1;\ 0;\ 0)$, $\mathbf{j}(0;\ 1;\ 0)$, $\mathbf{k}(0;\ 0;\ 1)$ bazis esa R_3 fazo kanonik bazisi deyiladi.

Tekislikda (fazoda) ortonormallangan bazisli Dekart koordinatalar sistemasiga to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi (3-rasm, 4-rasm).



(3-rasm)



(4-rasm)

R_n fazoda berilgan ixtiyoriy chiziqli erkli vektorlar sistemasini fazo bazisigacha to‘ldirish mumkin.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Vektorlar sistemasi bazisi deb nimaga aytiladi?
2. Vektorlar sistemasining har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasini uning bazisigacha to‘ldirish mumkinmi?
3. Chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasining bazislaridan biri qanday quriladi?
4. Chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasi bir necha bazisga ega bo‘lishi mumkinmi va nima uchun?
5. Vektorlar sistemasining rangi deb nimaga aytiladi?
6. Ortogonal vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
7. Chiziqli erkli vektorlar sistemasini ortogonal sistemaga aylantirish mumkinmi va qanday?
8. Ortogonallash jarayoni deganda nimani tushunasiz?
9. Ortonormallangan vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
10. Ortogonal sistemani ortonormallangan sistemaga aylantirish jarayoni nimadan iborat?
11. n-o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
12. R_n fazo ixtiyoriy vektorini uning bazisi bo‘yicha yoyish mumkinmi va qanday?
13. R_n fazo kanonik bazisi deb nimaga aytiladi?

5-mavzu. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Asosiy tushunchalar

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida umumiy tushunchalar.
2. Kroneker-Kapelli teoremasi.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo‘llanilishiga misollar.

Tayanch so‘z va iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS), tenglamalar sistemasi yechishning qo‘shish usuli, o‘rniga qo‘yish usuli, grafik usuli, yagona yechim, birgalikda bo‘lgan sistema, aniqmas sistema, ekvivalent sistema, birgalikda bo‘lmagan sistema, tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo‘llanilishi.

Ma’lumki, bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi. Quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

sistemaga n noma’lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (yoki soddalik uchun chiziqli tenglamalar sistemasi) deyiladi. Bu yerda $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ sonlar (1) sistemaning koeffisiyentlari, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar noma’lumlar, $b_1, b_2, ..., b_m$ sonlar esa ozod hadlar deyiladi.

Tenglamalar sistemasi koeffisiyentlaridan tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisa tenglamalar sistemasining asosiy matrisasi deyiladi. Noma’lumlar vektorini $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ ustun vektor, ozod hadlarni $B = (b_1, b_2, ..., b_m)^T$ ustun vektor shaklida ifodalaymiz. U holda tenglamalar sistemasi quyidagi matrisa shaklida yozilishi mumkin:

$$AX = B.$$

1-ta’rif. Agar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sonlar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larning o‘rniga qo‘yilganda (1) sistemadagi tenglamalarni to‘g‘ri tenglikka aylantirsa, bu sonlarga (1) sistemaning yechimlari tizimi, deb aytiladi va $X = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)^T$ kabi belgilanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo‘lsa, u holda bunday sistema birgalikda deyiladi.

1-misol. $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ sistema birgalikda chunki sistema $x = 3, y = 1$ yechimga ega.

Bitta ham yechimga ega bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lmagan sistema deyiladi.

2-misol. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$ sistema yechimga ega bo‘lmaganligi sababli birgalikda emas.

Birgalikda bo‘lgan sistema yagona yechimga ega bo‘lsa, aniq sistema va cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa aniqmas sistema deyiladi.

3-misol. $\begin{cases} x-y=1, \\ 2x-2y=2, \\ 3x-3y=3 \end{cases}$ sistema birgalikda, ammo aniqmas, chunki bu sistema $x=\alpha$, $y=-1+\alpha$ ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p yechimga ega, bunda α-ixtiyoriy haqiqiy son.

Birgalikda bo‘lgan tenglamalar sistemasi bir xil yechimlar majmuiga ega bo‘lsa, bunday sistemalar ekvivalent deyiladi.

4-misol. $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemasining yechimi $(x,y)=(1,1)$.

$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ (b) tenglamalar sistemasining yechimi $(x,y)=(1,1)$.

(a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent tenglamalar sistemasi deyiladi.

Berilgan tenglamalar sistemasining birorta tenglamasini noldan farqli songa ko‘paytirib, boshqa tenglamasiga hadma-had qo‘shish bilan hosil bo‘lgan sistema berilgan sistemaga ekvivalent bo‘ladi.

5-misol. $\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x-y=5 \end{cases}$ (a) tenglamalar sistemadagi 1-tenglamani (-3) ga ko‘paytirib 2-tenglamaga qo‘shib quyidagini hosil qilamiz. $\begin{cases} x+3y=5 \\ -10y=-10 \end{cases}$ (b) natijada (a) va (b) tenglamalar sistemasi ekvivalent.

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimga ega yoki ega emasligini quyidagi teorema yordamida aniqlash mumkin.

Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun uning A asosiy matrisasi va kengaytirilgan $(A\,|\,B)$ matrisalarining ranglari teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Faraz qilamiz (1) sistema birgalikda bo‘lsin. U holda uning biror yechimi mavjud va $x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \ldots, x_n=\xi_n$ dan iborat bo‘lsin.

Bu yechimni (1) chiziqli tenglamalar sistemasidagi noma’lumlar o‘rniga qo‘ysak:

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{in}\xi_n = b_i, \qquad i = 1,2,...,m \tag{2}$$
ega bo‘lamiz.

Bu tengliklar majmuasi quyidagi tenglikka ekvivalent:

$$\xi_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \xi_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad i = 1,2,...,m \tag{3}$$

Bundan (1) sistemaning kengaytirilgan matrisasi oxirgi ustuni asosiy matrisa ustunlari kombinatsiyasidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Ma’lumki matrisaning rangi ustunlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan ustunni tashlab yuborilganda o‘zgarmaydi. Kengaytirilgan matrisadan ozod hadlar ustunini olib tashlasak sistemaning asosiy matrisasiga ega bo‘lamiz. Demak, asosiy va kengaytirilgan matrisalarning ranglari teng. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Yetarliligi. Aytaylik asosiy va kengaytirilgan matrisalarning ranglari teng,

$$r(A) = r(A/B)$$

A (asosiy) matrisaning r ta bazis ustunlarini ajratamiz, bular (A/B) (kengaytirilgan) matrisaning ham bazis ustunlari bo‘ladi. Faraz qilamiz birinchi r ta ustun bazis bo‘lsin.

Bazis minor haqidagi teoremaga asosan A matrisaning oxirgi ustuni bazis ustunlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida tasvirlanishi mumkin. Bu esa:

$$\xi_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \xi_r \begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

munosabatni qanoatlantiruvchi $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r$ lar mavjudligini bildiradi. Oxirgi munosabat quyidagi m ta tenglamalarga ekvivalent:

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \cdots + a_{ir}\xi_r = b_i, \qquad i = 1,2,...,m$$

Agar (1) tenglamalar sistemasiga

$$x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, ..., x_r = \xi_r, x_{r+1} = 0, ..., x_n = 0, \tag{4}$$

qo‘ysak, u holda tenglamalar sistemasi (2) ga aylanadi. Bundan noma’lumlarning (4) qiymati (1) sistemadagi barcha tenglamalarni qanoatlantiradi, ya’ni sistema yechimga ega bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

Kroneker-Kapelli teoremasiga ko‘ra birgalikda bo‘lgan tenglamalar sistemasining asosiy A matrisasi rangi bilan uning kengaytirilgan (A/B) matrisasining ranglari teng. $r = r(A) = r(A/B)$ qiymatni berilgan sistemaning rangi deb ataymiz. A matrisaning biror bazis minorini belgilab olamiz. Bazis satrlarga mos bo‘lgan tenglamalarni berilgan sistemaning bazis tenglamalari deb ataymiz. Bazis tenglamalar bazis sistemani tashkil etadi. Bazis ustunlarda qatnashgan noma’lumlarni bazis o‘zgaruvchilar, qolganlarini ozod o‘zgaruvchilar, deb ataymiz.

Oldingi mavzularda berilgan bazis minor haqidagi teoremadan quyidagi tasdiq o‘rinliligi kelib chiqadi.

Teorema. Chiziqli tenglamalar sistemasi o‘zining bazis tenglamalar sistemasiga ekvivalent.

Soddalik uchun (1) sistemada birinchi r ta tenglama bazis tenglama bo‘lsin. Yuqorida keltirilgan teoremaga asosan:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1,2,...,r \tag{5}$$

bazis tenglamalar sistemasi berilgan (1) sistemaga ekvivalent. Shuning uchun (1) tenglamalar sistemasi o‘rniga uning rangiga teng bo‘lgan (5) sistemani tadqiq etish yetarli.

O‘z-o‘zidan ko‘rinadiki matrisaning rangi ustunlar sonidan katta emas, ya’ni $r \le n$. Boshqacha aytganda birgalikdagi sistemaning rangi noma’lumlar sonidan oshmaydi.

Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) $r = n$;

$r = n$, ya’ni bazis sistemada tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bo‘lsin. Bazis sistemani quyidagicha ifodalaymiz $A_b X = B_b$. Bunda A_b bazis minorga mos matrisa. $\det(A_b) \ne 0$ bo‘lganligi sababli, A_b^{-1} mavjud va

$$X = EX = A_b^{-1}A_bX = A_b^{-1}(A_bX) = A_b^{-1}B$$

tenglik yagona yechimni ifodalaydi.

2) $r < n$ bo‘lsin. Tenglamalarda $x_1, x_2, ..., x_r$ bazis noma’lumlar qatnashmagan barcha hadlarni uning o‘ng tomoniga o‘tkazamiz. U holda (5) sistema:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ir}x_r = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \cdots - a_{in}x_n. \tag{5}$$

ko‘rinishni oladi.

Agar erki $x_r, x_{r+1}, ..., x_n$ noma’lumlarga biror $\xi_{r+1}, ..., \xi_n$ sonli qiymatlarni bersak, u holda $x_1, ..., x_r$ o‘zgaruvchilarga nisbatan tenglamalar sistemasini olamiz va bu sistemada noma’lumlar soni asosiy matrisa rangiga teng bo‘lganligi sababli u yagona yechimga ega. Erkli noma’lumlar qiymati ixtiyoriy tanlanganligi sistemaning umumiy yechimlari soni cheksiz ko‘p.

Fan va texnikadaning ko‘p sohalarida bo‘lganidek, iqtisodiyotning ham ko‘p masalalarining matematik modellari chiziqli tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi.

6-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	A	B	C	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Berilgan xom ashyo zahirasi to‘la sarflansa, mahsulot turlari bo‘yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlashning matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. Bir birlik A turdagi mahsulotga, 1-xil xom ashyo sarfi 5 birlik bo‘lganligi uchun $5x_1$ A turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday B va C turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $7x_3$ bo‘lib, uning uchun quyidagi tenglama o‘rinli bo‘ladi:

$$5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000 \,.$$

Yuqoridagiga o‘xshash 2-, 3-xil xom ashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$

$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Demak, masala shartlaridan quyidagi uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu masalaning matematik modeli quyidagi uch noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070. \end{cases}$$

Ikki bozor muvozanati masalasi. Ko‘p bozorli muvozanat modelida tenglamalar sistemasi har bir bozordagi talab, taklifning muvozanatini ifodalaydi. Bunda talab va taklif har bir bozorda, boshqa bozordagi narxlarga bog‘liq. Masalan, kofega bo‘lgan talab, faqat kofening narxiga bog‘liq emas shuningdek o‘rin bosuvchi tovar bo‘lgan choyning ham narxiga bog‘liq. Mashinaga talab uning narxiga bog‘liq va shuningdek, to‘ldiruvchi tovar bo‘lgan uning yoqilg‘isiga ham bog‘liq. Korxonalarning taklifi turli ko‘rinishdagi tovarlar narxiga bog‘liq. Masalan, biror firma ishlab chiqargan mahsulot, boshqasi uchun xom ashyo material bo‘lishi mumkin.

Ikki tovar bog‘liqligi modeli masalasi.

$$\left.\begin{aligned} q_1^s &= \alpha_1 + \beta_{11}p_1 + \beta_{12}p_2 \\ q_2^s &= \alpha_2 + \beta_{21}p_1 + \beta_{22}p_2 \end{aligned}\right\} \text{taklif} \qquad \left.\begin{aligned} q_1^d &= a_1 + b_{11}p_1 + b_{12}p_2 \\ q_2^d &= a_2 + b_{21}p_1 + b_{22}p_2 \end{aligned}\right\} \text{talab}$$

Natijada masalan, $\beta_{12} < 0$ ikkinchi firmadagi materiallar narxi o‘sishi, birinchi firmani material sarfini kamaytiradi, natijada esa birinchi firma ishlab chiqarishni kamaytiradi. Har bir bozordagi talab va taklifning tengligining o‘rnatilishi muvozanat narxlar bo‘lgan p_1 va p_2 larni aniqlash uchun ikki tenglamalar sistemasini beradi. $b_{ij} \cdot s$ va $\beta_{ij} \cdot s$ lar nolga teng ham bo‘lishi mumkin.

Bu tenglamalar modelning asosini tashkil etadi va strukturali tenglik deb ataladi.

$$(b_{11} - \beta_{11}) \cdot p_1 + (b_{12} - \beta_{12}) \cdot p_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$(b_{21} - \beta_{21}) \cdot p_1 + (b_{22} - \beta_{22}) \cdot p_2 = \alpha_2 - \alpha_1$$

Ikkinchi tenglamadan p_1 ni topsak:

$$p_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) - (b_{22} - \beta_{22}) \cdot p_2}{(b_{21} - \beta_{21})}$$

Endi buni birinchi tenglikka qo‘yamiz

$$p_2 = \frac{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (\alpha_2 - a_2) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (\alpha_1 - a_1)}{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (b_{22} - \beta_{22}) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}$$

p_1 ni topsak:

$$p_2 = \frac{(b_{22} - \beta_{22}) \cdot (\alpha_1 - a_1) - (b_{12} - \beta_{12}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}{(b_{11} - \beta_{11}) \cdot (b_{22} - \beta_{22}) - (b_{21} - \beta_{21}) \cdot (b_{12} - \beta_{12})}$$

p_1 va p_2 larni bunday ta’riflash kamaytirilgan forma deb ataladi. Chunki ular faqat modelning ko‘rsatkichlariga bo‘g‘liq. $a_i, \alpha_i, b_{ij}, \beta_{ij}$ $i, j = 1,2$ larning alohida parametrlari uchun biz p_i ning qiymatlarini topa olamiz. Keyingi misollarda bu qiymatni qanday topish ko‘rsatilgan.

To‘ldiruvchi tovarlar uchun ikki bozor muvozanati. Faraz qilaylik iste’molchilar bozorida o‘rin bosadigan tovarlarga talab, taklif tengligi quyidagicha:

$$q_1^s = -1 + p_1, \; q_1^d = 20 - 2p_1 - p_2 \qquad \text{1-tovar}$$

$$q_2^s = p_2, \; q_2^d = 40 - 2p_2 - p_1 \qquad \text{2-tovar}$$

Bu yerda q_i^s va q_i^d talab va taklif miqdori. p_i tovar narxlari bu tovarlarning o‘rinbosar ekanligidan agar birinchi tovarga talab kamaysa, ikkinchi tovar narxi ko‘tariladi. Endi muvozanat narxni toping (ikki tovar uchun).

Yechish. $q_i^s = q_i^d$ tengligidan ikkita tenglik kelib chiqadi

$$3p_1 + p_2 = 21$$
$$p_1 + 3p_2 = 40$$

Ikkinchi tenglikdan $p_1 = 40 - 3p_2$ topib, birinchisiga qo‘ysak:

$$3 \cdot (40 - 3p_2) + p_2 = 21 \Rightarrow 8p_2 = 99 \Rightarrow p_2 = 12{,}375$$

va $p_1 = 2{,}875$ ekanligi keladi. Natijada bu narx bozordagi muvozanat narxni beradi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemaning yechimi deb nimaga aytiladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemaning matrisaviy shakli.
4. Qanday sistemalarga birgalikda, aniq, aniqmas va birgalikda bo‘lmagan sistemalar deyiladi?
5. Birgalikdagi chiziqli tenglamalar sistemasi nima bilan xarakterlanadi va erkli noma’lumlar deb nimaga aytiladi?
6. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi deb nimaga aytiladi?
7. Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudlik va yagonalik yetarli shartlari nimalardan iborat?
8. Kroneker-Kapelli teoremasi.
9. Ikki bozor muvozanati masalasi.
10. To‘ldiruvchi tovarlar uchun ikki bozor muvozanati masalasi.

6-mavzu. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss-Jordan usuli.
3. Bazis yechim tushunchasi.
4. Gauss va Gauss-Jordan usullarining iqtisodiy masalalarni yechishga qo‘llanilishi.

Tayanch so‘z va iboralar; Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli, chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss-Jordan modifikatsiyasi, chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimlari.

n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish ikki bosqichda (dastlab chapdan o‘ngga, so‘ngra o‘ngdan chapga qarab) amalga oshiriladi.

1-bosqich. (1) sistemani uchburchak ko‘rinishga keltirishdan iborat. Buning uchun, $a_{11} \neq 0$, deb (agar $a_{11} = 0$ bo‘lsa, 1-tenglamani $a_{i1} \neq 0$ bo‘lgan i-tenglama bilan o‘rin almashtiriladi) birinchi tenglamaning chap va o‘ng tomoni a_{11} ga bo‘linadi. So‘ngra, 1 tenglama $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ga ko‘paytirilib, i-tenglamaga qo‘shiladi. Bunda, sistemaning 2-tenglamasidan boshlab x_1 noma’lum yo‘qotiladi. Bu jarayonni $n-1$ marotaba takrorlab quyidagi uchburchaksimon sistema hosil qilinadi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

2-bosqich. Oxirgi sistemani yechishdan iborat. Bunda, dastlab sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n topilib, undan oldingi tenglamaga qo‘yiladi va undan x_{n-1} topiladi. Shu jarayon davom ettirilib, nihoyat 1-tenglamadan x_1 topiladi.

Sistema Gauss usuli bilan yechilganda uchburchaksimon shaklga kelsa u yagona yechimga ega bo‘ladi. Agar sistema pog‘onasimon shaklga kelsa u cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi yoki yechimga ega bo‘lmaydi.

Tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish usuli, deb ham ataladi. Bu jarayonni kattaroq teglamalar sistemasiga qo‘llash mumkin, chunki bu juda samarali. Quyidagi misolni ko‘rib chiqamiz:

1-misol. Tenglamalar sistemasining barcha mumkin bo‘lgan yechimlarini toping.

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10. \end{cases}$$

Yechish. Dastlab ikkinchi va uchinchi tenglamadagi x_1 noma'lumni yo'q qilinadi va keyin x_2 noma'lumni uchinchi tenglamadan yo'qotamiz. Keyin faqat x_3 noma'lum qoladi. Lekin biz dastlabki 2 ta tenglamaning o'rnini almashtirishdan boshlaymiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$$

2-tenglamada x_1 yo'q. Keyingi qadamda 1-tenglamani ishlatib 3-tenglamadagi x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Bu jarayon 1-tenglamani 3 ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shish orqali bajariladi.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = -7, \\ 5x_2 + 11x_3 = -4. \end{cases}$$

Keyingi bosqichda 2-tenglamani $\frac{1}{2}$ ga ko'paytirib, x_2 ning koeffisiyentini 1 ga aylantiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}, \\ 5x_2 + 11x_3 = -4. \end{cases}$$

Oxirgi tenglamalar sistemasidagi 2-tenglamani -5 ga ko'paytirib 3-tenglamaga qo'shamiz. x_2 ni yo'qotamiz.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{7}{2}, \\ \frac{27}{2}x_3 = \frac{27}{2}. \end{cases}$$

So'ng, oxirgi tenglamani $\frac{2}{27}$ ga ko'paytirib $x_3 = 1$ qiymatni topamiz. Bu qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'yib, $x_2 = -3$ qiymatni hosil qilamiz. $x_3 = 1$ va $x_2 = -3$

qiymatlarni birinchi tenglamaga qo'yib $x_1 = 2$ qiymatni olamiz. Shunday qilib, sistema yagona $(2;-3;1)$ yechimga ega.

Mashqni bajaring. Tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2-misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasidagi noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib yechimni topamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ 9x_2 = 9, \\ 14x_2 - 7x_3 = 21. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_3 - 2x_2 = -3, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

$x_2 = 1$ qiymatni ikkinchi tenglamaga qo'yib, $x_3 = -1$ qiymatni hosil qilamiz. $x_2 = 1$ va $x_3 = -1$ qiymatlarni birinchi tenglamaga qo'yib $x_1 = -2$ qiymatni olamiz. Shunday qilib, sistema yagona $(-2;1;-1)$ yechimga ega.

Mashqni bajaring. Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$

Tenglamalar sistemasida noma'lumlar soni tenlamalar sonidan ko'p bo'lsa ham, ya'ni sistema birgalikda bo'lib aniq bo'lmasa ham uning yechimini Gauss usulida topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko'rib chiqamiz.

3-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 7x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 44, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Yechish. Birinchi qadamda sistemadagi birinchi tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib, qolganlaridan ketma-ket x_1 noma’lumni yo‘qotamiz, ikkinchi qadamda ikkinchi tenglamani qoldirib qolganlaridan x_2 noma’lumni yo‘qotamiz, uchinchi qadamda uchinchi tenglamani qoldirib qolganlaridan x_3 noma’lumni yo‘qotamiz. Soddalik uchun tenglamalar sistemasi o‘rniga kengaytirilgan matrisa ustida ish olib boramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 7 & 2 & 8 & -6 & 44 \\ 5 & 2 & 5 & -6 & 30 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 9 & -6 & 1 & 16 \\ 0 & 7 & -5 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 22 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 22 \end{array}\right)$$

Hosil bo‘lgan sistemada ikkita bir hil tenglamadan bittasini qoldirib, ikkinchisini tashlab yuboramiz. Shu yerda chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning chapdan o‘ngga qarab bosqichi tugadi. Tenglamalar soni noma’lumlar sonidan kichik. Endi x_4 erkli o‘zgaruvchini o‘ng tomonga o‘tkazamiz. So‘ngra o‘ngdan chapga qarab harakat yordamida sistemaning barcha yechimlari topiladi.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_3 + 16x_4 = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_4 - 34/3 \\ x_2 = -(11x_4 + 2)/3 \\ x_3 = -(16x_4 - 22)/3 \end{cases} \Rightarrow$$

Javob: $\left(8x_4 - \frac{34}{3}; -\frac{11x_4 + 2}{3}; -\frac{16x_4 - 22}{3}; x_4\right)$, $x_4 \in R$.

Mashqni bajaring. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching:

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5, \\ -x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

Tenglamalar sistemasini yechishda Gauss-Jordan usulining (Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi) mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: dastlabki normal ko‘rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan $(A|B)$ matrisasi quriladi. Yuqorida keltirilgan sistemaning teng kuchliligini saqlovchi elementar almashtirishlar yordamida, kengaytirilgan matrisaning chap qismida birlik matrisa hosil qilinadi. Bunda birlik matrisadan o‘ngda yechimlar ustuni hosil bo‘ladi. Gauss-Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A|B) \sim (E|X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishning Gauss strategiyasi va teskari matrisa qurishning Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matrisa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o‘ng ustunda bir yo‘la teskari matrisaning ozod hadlar ustuniga ko‘paytmasi – yechimlar ustuni quriladi.

4-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasi koeffisiyentlaridan kengaytirilgan matrisa tuzamiz. Tenglamalar ustida bajariladigan almashtirishlar yordamida asosiy matrisani quyidagicha birlik matrisaga keltirib javobni topamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 27 & 27 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

5-misol. Tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Yechish. Berilgan sistemada kengaytirilgan matrisani ajratib olamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

va unga Gauss-Jordan usulini tatbiq etamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 3/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & -14/5 & 19/5 & 4/5 & 18/5 \\ 0 & 14/5 & 1/5 & 1/5 & -13/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/7 & 5/7 & 5/7 \\ 0 & 1 & -19/14 & -2/7 & -9/7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/56 & -53/56 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Sistema trapetsiyasimon ko'rinishiga keldi:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{7}x_4 = \dfrac{3}{7} \\ x_2 + \dfrac{3}{56}x_4 = -\dfrac{53}{56} \\ x_3 + \dfrac{1}{4}x_4 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Bu yerda x_1, x_2 va x_3 o'zgaruvchilarni bazis sifatida qabul qilamiz, chunki ular oldidagi koeffisiyentlardan tuzilgan determinant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Bu determinant oxirgi sistemaning koeffisiyentlaridan tuzilgan asosiy matrisaning ham bazis minori bo'ladi. Erkli o'zgaruvchi bo'lib x_4 xizmat qiladi.

Oxirgi sistemadan quyidagi yechimga

$$x_1 = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}x_4, \qquad x_2 = -\frac{53}{56} - \frac{3}{56}x_4, \qquad x_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_4.$$

ega bo'lamiz. Shunday qilib, berilgan sistemaning umumiy X yechimini

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{7}x_4 \\ -\dfrac{53}{56} - \dfrac{3}{56}x_4 \\ \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$ ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Agar $x_4 = 2$, deb olsak, u holda berilgan sistemaning $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ -\frac{59}{56} \\ -\frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix}$ ko‘rinishdagi xususiy yechimini topamiz.

Agar $x_4 = 0$ ni olsak berilgan sistemaning quyidagi bazis yechimiga ega bo‘lamiz:

$$X_b = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{53}{56} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iqtisodiy masalalarning chiziqli tenglamalar sistemasi yordamida ifodalanadigan modellarida odatda noma’lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo‘ladi. Bu holat bir tomondan erkli o‘zgaruvchilarni tanlash hisobiga bizga qo‘shimcha erkinlik beradi. Biroq sistema yechimlari cheksiz ko‘p bo‘lgani sabab mumkin bo‘lgan barcha holatlarni ko‘rish mumkin bo‘lmay qoladi va buning oqibatida iqtisodiy jihatdan optimal yechimni topishning imkoniyati bo‘lmaydi.

Bunday holatlarda odatda bazis yechim tushunchasidan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

1-ta’rif. Faqat bazis o‘zgaruvchilari noldan farqli bo‘lishi mumkin bo‘lgan yechim tenglamalar sistemasining bazis yechimi deyiladi.

Bazis yechimda erkli o‘zgaruvchilarning qiymatlari nolga teng, deb olinadi. Tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p bo‘lsada, bazis yechimlar soni chekli bo‘ladi. Bazis yechimlar soni bazis minorlar soniga teng bo‘ladi.

Faraz qilaylik sistemaning rangi r ga, noma’lumlar soni n ga teng bo‘lsin. $n > r$ bo‘lganda bazis minorlar soni (bazis yechimlar soni) ko‘pi bilan $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ga teng.

Tasdiq. Agar $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar $AX = B$ tenglamalar sistemasining bazis yechimlari bo‘lsa, $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sonlar uchun $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_k X_k$ chiziqli kombinatsiya ham $AX = B$ tenglamalar sistemasining yechimi bo‘ladi.

Haqiqatan ham

$$A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_k X_k) = \alpha_1 AX_1 + \alpha_2 AX_2 + ... + \alpha_k AX_k =$$
$$= \alpha_1 B + \alpha_2 B + ... + \alpha_k B = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k) B = B.$$

Umuman olganda, sistemaning ixtiyoriy yechimini bazis yechimlarning koeffisiyentlari yig‘indisi birga teng bo‘lgan chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin.

6-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 5. \end{cases}$$

sistemada:

a) noma’lumlarni bazis va erkin o‘zgaruvchilarga ajratish usuli sonini aniqlang:

b) bazis yechimlarini toping.

Yechish. a) mazkur sistemada ikkita tenglama va beshta noma’lum qatnashmoqda $(m = 2, \quad n = 5)$. Ko‘rinib turibdiki, $r = 2$. Demak, noma’lumlarning bazis guruhlari ikkita noma’lumdan iborat. Bunda:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{3!4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3!} = 10.$$

Bunda guruhlar:

x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_1, x_5; x_2, x_3; x_2, x_4; x_2, x_5; x_3, x_4; x_3, x_5; x_4, x_5.

Bu juftliklarning qaysi birida no‘malumlar oldidagi koeffisiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli bo‘lsa, o‘sha juftlik noma’lumlari bazis o‘zgaruvchi bo‘la oladi. Shuning uchun quyidagi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = -3 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki 2-, 4-,6-,9- juftliklar bazis o‘zgaruvchilar bo‘la olmaydi. Chunki bu juftliklarga mos bazis minorlar nolga teng. Demak, sistemani bazis va erkin o‘zgaruvchilarga oltita usul bilan ajratish mumkin:

1) x_1 va x_2 - bazis, x_3, x_4, x_5 - erkli;

2) x_1 va x_4 - bazis, x_2, x_3, x_5 - erkli;

3) x_2 va x_3 - bazis, x_1, x_4, x_5 - erkli;

4) x_2 va x_5 - bazis, x_1, x_3, x_4 - erkli;

5) x_3 va x_4 - bazis, x_1, x_2, x_5 - erkli;

6) x_4 va x_5 - bazis, x_1, x_2, x_3 - erkli.

b) berilgan sistemaning bazis yechimlarini topamiz. Yuqoridagi a) punktda sistema oltita bazis yechimga ega ekanligini ko'rgan edik. Birinchi bazis yechimni topish uchun $\boldsymbol{x}_1$ va $\boldsymbol{x}_2$ bazis o'zgaruvchilarni o'zgarishsiz qoldirib, x_3, x_4, x_5 erkli o'zgaruvchilarni nolga tenglaymiz. Natijada $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5. \end{cases}$ sistemaga ega bo'lamiz va uning yechimi $x_1 = 3, \quad x_2 = 1$.

Shunday qilib, birinchi bazis yechim $X_{1b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ikkinchi bazis yechimni topamiz. $\boldsymbol{x}_1$ va $\boldsymbol{x}_4$ bazis, u holda $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_5$ erkli o'zgaruvchilarni nolga tenglab

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_4 = 3, \\ 3x_1 + 8x_4 = 5 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz va $x_1 = 3, \quad x_4 = -\dfrac{1}{2}$ yechimi topamiz.

Shunday qilib, ikkinchi bazis yechim $X_{2b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Xuddi shu usul bilan qolgan bazis yechimlarni ham topamiz:

$$X_{3b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_{4b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad X_{5b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_{6b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aniq r ta noldan farqli noma'lumdan tashkil topgan bazis yechimga xosmas bazis yechim deyiladi, bunda r-sistemaning rangi.

Yuqorida qaralgan misoldagi barcha oltita yechim ham xosmas bazis yechim bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra bazis yechimda erkli o'zgaruvchilar nolga teng, bazis yechimlar esa odatda noldan farqli. Lekin, bazis yechimning bazis o'zgaruvchilari ham nolga teng bo'lib qolishi mumkin. Bunday bazis yechimlar xos (maxsus) bazis yechimlar deb ataladi.

7-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining bazis yechimlari topilsin.

Yechish. Sistema ikkita tenglama va uchta noma'lumdan iborat $(m = 2, \quad n = 3)$ va $r = 2$. Demak, bazis o'zgaruvchilar guruhi ikkita noma'lumdan tashkil topgan. Bazis yechimlar soni $C_3^2 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ dan katta emas.

x_1 va x_2 bazis o'zgaruvchilar, chunki ular oldidagi koeffisiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. U holda x_3 erkli o'zgaruvchi. Tenglamalarga $x_3 = 0$ qiymatni qo'yib,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 = 3. \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz va uning yechimi $x_1 = 1, \quad x_2 = 0$. Topilgan birinchi bazis yechim $X_{1b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, chunki ikkinchi bazis o'zgaruvchi $x_2 = 0$.

x_1 va x_3 ham bazis o'zgaruvchilar, chunki ular oldidagi koeffisiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. U holda x_2 erkli o'zgaruvchi. Tenglamalarga $x_2 = 0$ qo'yib,

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 8x_3 = 3 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz, uning yechimi $x_1 = 1, \; x_3 = 0$. Ikkinchi bazis yechim $X_{2b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ chunki ikkinchi bazis o'zgaruvchi $x_3 = 0$.

x_2 va x_3 lar bazis o‘zgaruvchilar emas, chunki ular oldidagi koeffisiyentlardan tuzilgan determinant nolga teng: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0$. Demak, uchinchi bazis yechim mavjud emas.

8-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi (tonna)**
	1	2	3	
1	5	12	3	20
2	2	6	8	16
3	9	7	4	20

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo‘yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo‘lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2, 3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $3x_3$ bo‘lib, uning uchun quyidagi tenglama o‘rinli bo‘ladi: $5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20$.

Yuqoridagiga o‘xshash 2, 3-xil xom ashyolar uchun

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16,$$
$$9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20$$

tenglamalar hosil bo‘ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishda Gauss usulidan foydalanamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ \dfrac{6}{5}x_2 + \dfrac{34}{5}x_3 = 8, \\ -\dfrac{73}{5}x_2 - \dfrac{7}{5}x_3 = -16 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 6x_2 + 34x_3 = 40, \\ -\dfrac{1220}{3}x_3 = -\dfrac{1220}{3} \end{cases} \sim \begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 6x_2 + 34x_3 = 16, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

9-misol. Korxona to‘rt xildagai xom ashyo ishlatib to‘rt turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari jadvalda berilgan.

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari**				**Xom ashyo zahirasi (tonna)**
	1	**2**	**3**	**4**	
1	1	2	1	0	8
2	0	1	3	1	15
3	4	0	1	1	11
4	1	1	0	23	23

Matematik modelini tuzamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usuli bilan yechamiz.

Yechish. 1-tenglamani o‘zgarishsiz qoldirib sistemaning qolgan tenglamalaridan x_1 noma’lumni yo‘qotamiz, buning uchun 1-tenglamani ketma-ket (-4), (-1) ga ko‘paytirib mos ravishda 3, 4-tenglamalarga hadma-had qo‘shish orqali ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 = 21, \\ 0 - x_2 - x_3 + 5x_4 = 15. \end{cases}$$

Endi 2-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib, boshqa tenglamalardan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 2 tenglamani (-2), (8), (1) larga ketma-ket ko'paytirib, mos ravishda 1, 3, 4-tenglamalarga hadma-had qo'shamiz va ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 5x_2 - 2x_3 = -22, \\ 0 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 2x_3 + 6x_4 = 30. \end{cases}$$

Endigi qadamda 3-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan x_3 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 3-tenglamani ketma-ket $\left(-\frac{5}{21}\right), \left(-\frac{3}{21}\right), \left(-\frac{2}{21}\right)$ larga ko'paytirib mos ravishda 1, 2, 4-tenglamalarga hadma-had qo'shsak, ushbu tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 + \frac{3}{21}x_4 = \frac{33}{21}, \\ 0 + x_2 + 0 - \frac{6}{21}x_4 = \frac{18}{21}, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 9x_4 = 99, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi qadamda 4-tenglamani o'zgarishsiz qoldirib boshqa tenglamalardan, x_4 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun 4-tenglamani ketma-ket $\left(-\frac{21}{3}\right), \left(-\frac{21}{6}\right), (-9)$ larga ko'paytirib, mos ravishda 1, 2, 3-tenglamalarga hadma-had qo'shamiz natijada, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 0 - 0 + 0 = 1, \\ 0 + x_2 + 0 + 0 = 2, \\ 0 + 0 + 21x_3 + 0 = 63, \\ 0 + 0 + 0 + x_4 = 4. \end{cases}$$

Oxirgi sistemadan $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ yechimni olamiz.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulining qanday modifikatsiyalarini bilasiz?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi Gaussning klassik usulida qanday yechiladi?

4. Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini topish o‘rniga uning umumiy yechimini qurish yetarlimi?
6. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyatini so‘zlab bering va sxemasini yozing?
7. Bazis yechim tushunchasi.
8. Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiy masalalarni yechishga qo‘llanilishi.

7-mavzu. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matrisalar usuli. Kramer qoidasi

Reja:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning teskari matrisalar usuli.
3. Chiziqli tenlamalar sistemasining yechishning Kramer qoidasi va teskari matrisalar usulining iqtisodiyotda qo‘llanilishi.

Tayanch so‘z va iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS), Kramer teoremasi, Kramer formulalari, teskari matrisa.

Kramer qoidasi. Agar *n* ta noma’lumli *n* ta

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

chiziqli tenglamalar sistemaning Δ determinanti noldan farqli bo‘lsa, u holda (1) sistema yagona yechimga ega bo‘ladi va bu yechim quyidagi formulalar bilan topiladi:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}, \\ x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta} \end{cases} \tag{2}$$

bu yerda Δx_1, Δx_2, …, Δx_n determinantlar Δ determinantda noma'lumlar oldidagi koeffisiyentlarni mos ravishda ozod hadlar bilan almashtirish orqali hosil qilinadi. (2) formulalarga Kramer formulalari deyiladi.

1-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} -2x_1 + \ x_2 - \ \ x_3 = 7, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish. Sistemaning asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27 . \ \Delta \neq 0$$

bo'lganligi sababli berilgan sistema aniq sistemani tashkil qiladi va u yagona yechimga ega bo'ladi. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{27} = -\frac{81}{27} = -3, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{54}{27} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimi: (-3; 2; 1).

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

$$1) \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x \ + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x \ + x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 30. \end{cases}$$

Agar $\Delta = 0$ bo'lib, Δx_1, Δx_2, …, Δx_n lardan birortasi noldan farqli bo'lsa, u holda (1) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

2-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish. Tenglamalar sistemasining asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \ \Delta = 0$$

bo‘lganligi sababli berilgan sistemadan Δx_1, $\Delta x_2, \Delta x_3$ larni hisoblaymiz. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 9, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimga ega emas, chunki

$$\Delta = 0 \text{ va } \Delta x_1 \neq 0, \ \Delta x_2 \neq 0, \ \Delta x_3 \neq 0.$$

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Agar $\Delta = 0$ bo‘lib, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n = 0$ bo‘lsa, u holda (6) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

3-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6, \\ 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 9. \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini Kramer formulalari yordamida toping.

Yechish. Sistemaning asosiy determinanti Δ ni hisoblaymiz. Bunda:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0. \ \Delta = 0$$

bo‘lganligi sababli berilgan sistemaning $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ determinantlarini hisoblaymiz. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega chunki

$$\Delta = 0 \text{ va } \Delta x_1 = 0,\ \Delta x_2 = 0,\ \Delta x_3 = 0.$$

Agar sistemaning yechimi cheksiz ko‘p bo‘lsa, u holda uning umumiy yechimini Kramer qoidasi bilan ham topish mumkin.

4-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9. \end{cases}$$

sistemaning yechimini toping.

Yechish. Sistemaga ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -3x_3 + 3, \\ 6x_1 + 4x_2 = -5x_3 + 9. \end{cases}$$

Sistemaning determinantlarini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -3x_3 + 3 & 1 \\ -5x_3 + 9 & 4 \end{vmatrix} = -7x_3 + 3, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3x_3 + 3 \\ 6 & -5x_3 + 9 \end{vmatrix} = 8x_3.$$

U holda Kramer formulalari yordamida quyidagi yechimni hosil qilamiz va undan sistemaning yechimi cheksiz ko‘p ekanligini ko‘rishimiz mumkin:

$$x_1 = \frac{-7x_3 + 3}{2} = -\frac{7}{2}x_3 + \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{8x_3}{2} - 4x_3,$$

$$x_3 = \alpha \Rightarrow X\left(-\frac{7}{2}\alpha + \frac{3}{2}, 4\alpha\right).$$

Shuni ta’kidlashimiz kerakki, bu yerda biz asosiy determinant sifatida $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ determinantni oldik. Agar sistemaning yechimini topishda asosiy determinant sifatida $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ yoki $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ determinantlarni olib sistema yechimining boshqa ko‘rinishlarini ham hosil qilishimiz mumkin.

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 12x_3 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 6. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 8x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 6, \\ 12x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 9. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 12. \end{cases}$

Kramer formulalari asosan nazariy jihatdan ahamiyatga ega. Agar sistemada noma'lumlar soni ko'p bo'lsa, bu qoida yordamida yechilganda katta va og'ir hisoblashlarni bajarishga olib keladi. Lekin, bu formulalar muhim afzallikka ega, ular barcha noma'lumlarning qiymatlarini aniq ifodalaydi.

Ushbu n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3}$$

(8) tenglamalar sistemada quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Bu yerda, $A-$noma'lumlar oldida turgan koeffisiyentlardan tuzilgan matrisa;

$X-$noma'lumlardan tuzilgan matrisa; $B-$ozod hadlardan tuzilgan matrisa. U holda (3) tenglamalar sistemasini

$$AX = B$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Faraz qilamiz $\det|A| \neq 0$ bo'lsin. U holda A matrisa uchun A^{-1} teskari matrisa mavjud. $AX = B$ tenglikning har ikkala tomonini A^{-1} ga chapdan ko'paytiramiz:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad EX = A^{-1}B, \qquad X = A^{-1}B.$$

Hosil bo'lgan $X = A^{-1}B$ ifoda chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar usuli bilan yechish formulasidan iborat.

5-misol. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Yechish. A, X, B matrisalarni tuzib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $\det|A| = -12 \neq 0.$

Teskari matrisani topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2, \quad A_{12}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2, \quad A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-5, \quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=11, \quad A_{23}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1, \quad A_{11}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-5, \quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & -5 & -1\\ 2 & 11 & -5\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Bundan:

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & -5 & -1\\ 2 & 11 & -5\\ 4 & 4 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-10+0-2\\ 10+0-10\\ 20+0-8\end{pmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-12\\ 0\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$$

Demak, $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=-1$ yoki $(1;0;-1)$.

Mashqni bajaring. Chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

$$1)\ \begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=6,\\ 3x_1+2x_3=8,\\ x_1+x_2-x_3=1.\end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases}3x_2+2x_3=5,\\ 2x_1+x_2-x_3=4,\\ -x_2+2x_3=1.\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}x_1+2x_3=5,\\ 3x_1-x_2=9,\\ x_1+x_2-2x_3=1.\end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases}x_1+x_2+2x_3=4,\\ 2x_2+x_3=3,\\ x_1-x_2=2.\end{cases}$$

Agar sistema matrisasining rangi tenglama noma’lumlari sonidan kichik bo‘lsa ham uning yechimini teskari matrisa usulida topish mumkin. Buni quyidagi misolda ko‘rib chiqamiz.

6-misol. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matrisa usulida yeching:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-5x_4=2,\\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=-3,\\ 3x_1-3x_2+8x_3-2x_4=-1,\\ 2x_1-2x_2+5x_3-12x_4=4\end{cases}$$

Yechish. Tenglamalar sistemasi matrisasi A va kengaytirilgan matrisasi $(A|B)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -5\\ 2 & 1 & 4 & 1\\ 3 & -3 & 8 & -2\\ 2 & -2 & 5 & -12\end{pmatrix},\ \left(A|B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 1 & -3\\ 3 & -3 & 8 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 5 & -12 & 4\end{array}\right)$$

larning rangini topib

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 1 & -3\\ 3 & -3 & 8 & -2 & -1\\ 2 & -2 & 5 & -12 & 4\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7\\ 0 & 3 & -1 & 13 & -7\\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 32 & -14\\ 0 & 0 & -1 & -32 & 14\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & -5 & 2\\ 0 & 5 & -2 & 11 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 32 & -14\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$r\left(A\right)=r\left(A|B\right)=3$ ekanligini ko‘ramiz. Uning minori

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -3 & 8\end{vmatrix}=8-18-24-9+32+12=1$$

noldan farqli. Shuning uchun to‘rtinchi tenglamani tashlab yuboramiz, qolgan tenglamalarda x_4 qatnashgan hadlarni o‘ng tomonga o‘tkazamiz.

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=2+5x_4,\\ 2x_1+x_2+4x_3=-3-x_4,\\ 3x_1-3x_2+8x_3=-1+2x_4.\end{cases}$$

Bu sistemani teskari matrisa usuli bilan yechamiz. Avval asosiy matrisa teskarisini Gauss-Jordan usulida topamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 7 & 0 & -8 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 1 & 3 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 20 & 7 & -11\\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -9 & -3 & 5\end{array}\right),\ A^{-1}=\begin{pmatrix}20 & 7 & -11\\ -4 & -1 & 2\\ -9 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

Tenglamalar sistemasining umumiy yechimni topish uchun $X=A^{-1}\cdot B$ amalni bajaramiz:

$$X=\begin{pmatrix}20 & 7 & -11\\ -4 & -1 & 2\\ -9 & -3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+5x_4\\ -3-x_4\\ -1+2x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+71x_4\\ -7-15x_4\\ -14-32x_4\end{pmatrix}$$

Javob: $\left(30+71x_4;-7-15x_4;-14-32x_4;x_4\right),\ \ x_4\in R$

x_4 ga ixtiyoriy qiymatlar berib $x_1,\ x_2,\ x_3$ noma’lumlarning mos qiymatlarini topamiz. Sistema cheksiz ko‘p yechimga ega.

Mashqni bajaring. Ushbu chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matrisa usulida yeching:

$$1)\ \begin{cases}x_1+x_2+3x_3=3,\\ 4x_1+4x_2+12x_3=12,\\ 2x_1+3x_2+4x_3=5.\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}4x_1+x_2+3x_3=3,\\ 8x_1+2x_2+6x_3=6,\\ 2x_1+x_2+5x_3=4.\end{cases}\quad 3)\ \begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4,\\ 2x_1+4x_2+6x_3=8,\\ 2x_1+3x_2+5x_3=12.\end{cases}$$

7-misol. Quyidagi tenglamani yeching:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}$$

Yechish. Tenglamaga quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ C_1=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}.$$

U holda berilgan tenglama

$$A\cdot X\cdot B=C$$

ko‘rinishni oladi.

Agar AXB ifodaning chap tomondan A^{-1} va o‘ng tomondan B^{-1} ga ko‘paytirsak, hamda $A^{-1}A=E,\ \ EX=X,\ \ BB^{-1}=E$ va $XE=X$ ekanligini hisobga olsak quyidagi yechimga ega bo‘lamiz:

$$X=A^{-1}CB^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -8\\ -8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -\frac{5}{6}\\ -8 & 4\end{pmatrix}.$$

Mashqni bajaring. Quyidagi tenglamalarni yeching:

$$1)\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 8\end{pmatrix},\qquad 2)\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix},$$

$$3)\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Agar sistemada $m \neq n$ va $r(A) \neq m$ bo‘lib, $r(A) = r(A|B)$ bo‘lgan holda ham teskari matrisa usulidan foydalanib uning yechimini topsa bo‘ladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo‘llanilishiga doir misollar keltiramiz.

Masala. A va B mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xom ashyodan foydalaniladi. Bir birlik A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik 1-tur va 4 birlik 2-tur xom ashyo sarflanadi, bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik 1-tur va 5 birlik 2-tur xom ashyo ishlatiladi. 1-tur xom ashyo 62 birlik, 2-tur xom ashyo 73 birlik berilgan bo‘lsa, ishlab chiqarilgan A va B mahsulot miqdorini toping.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur xom ashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1 + 3x_2$ A va B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflanadigan 1-tur xom ashyo jami sarfi miqdorinni ifodalaydi, bu xom ashyo chegaralangan bo‘lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1 + 3x_2 = 62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xom ashyo sarfi uchun $4x_1 + 5x_2 = 73$ tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62, \\ 4x_1 + 5x_2 = 73. \end{cases}$$

Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xom ashyo sarfining matematik modelini ifodalaydi.

Yechish. Kramer usulidan foydalanib yechimini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \det|A| = 25 - 12 = 13 \neq 0 \text{ . Bunda}$$

$\det|A| \neq 0$ bo‘lganligi sababli berilgan sistema aniq sistemani tashkil qiladi va u yagona yechimga ega bo‘ladi. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\det|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 62 & 3 \\ 73 & 5 \end{vmatrix}}{13} = \frac{91}{13} = 7, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\det|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 62 \\ 4 & 73 \end{vmatrix}}{13} = \frac{117}{13} = 9.$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimi: $(x_1, x_2) = (7, 9)$.

8-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi (tonna)**
	1	**2**	**3**	
1	5	12	3	20
2	2	6	8	16
3	9	7	4	20

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo'lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2, 3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $3x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi:

$5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20$. Yuqoridagiga o'xshash 2, 3-xil xom ashyolar uchun

$$2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16,$$
$$9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlaridan quyidagi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} .$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishda teskari matrisalar usulidan foydalanamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 20, \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 16, \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Bundan, $\det|A| = 488 \neq 0$. Teskari matrisani topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -32, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 64, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -40,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -27, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = 73,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 78, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -34, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{488}\begin{pmatrix} -32 & -27 & 78 \\ 64 & -7 & -34 \\ -40 & 73 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bundan:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{495}\begin{pmatrix} -36 & -27 & 81 \\ 64 & -7 & -34 \\ -31 & 73 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{495}\begin{pmatrix} -640 - 432 + 1560 \\ 1280 - 112 - 680 \\ -800 + 1168 + 120 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{488}\begin{pmatrix} 488 \\ 488 \\ 488 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Demak, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ yoki $(1;1;1)$.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. *n* ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer teoremasi nimani aniqlab beradi?
2. Aniqmas chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yechish mumkinmi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisa shaklida yozish mumkinmi va qanday?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi matrisa ko‘rinishida qanday yoziladi?
5. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisa usulida yechish yoki teskari matrisa usulining afzallik va noqulaylik jihatlari nimalardan iborat?
6. Chiziqli tenlamalar sistemasining iqtisodiyotda qo‘llanilishi.

8-mavzu. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Fundamental yechimlar sistemasi

Reja:

1. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi va uning yechimlari xossalari.
2. Vektorlar sistemasining chiziqli bog‘liqligi va chiziqli erkliligi tushunchalari.
3. Fundamental yechimlar sistemasi.

Tayanch so‘z va iboralar: bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi, fundamental yechimlar sistemasi, aniqlik shartlari, bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi.

n ta noma’lumli m ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini vektor shakldagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$AX = \Theta$$

Bu yerda $\Theta = (0,0,...,0)^T$ – nol vektor, A – $m \times n$ o‘lchovli matrisa, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – noma’lumlar vektori.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, chunki $X = \Theta$ har doim sistemaning yechimi bo‘ladi. Bir jinsli sistema uchun $rang(A) = n$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, sistema aniq bo‘lib, yagona nol yechimga ega.

Agarda bir jinsli sistema uchun $rang(A) < n$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, sistema nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham ega bo‘ladi. Buni quyidagi misolda ko‘rib chiqamiz.

1-misol. Quyidagi sistemani yeching:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Yechish. Bu sistemadan

$$\begin{cases} \qquad 2x_2 - \qquad 2x_4 = 0, \\ \qquad 7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Agar ozod had sifatida x_4 noma’lumni olib, $x_4 = \alpha$ deb qarasak. U holda

$$x_1 = \frac{3}{5}\alpha, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \frac{4}{5}\alpha, \quad x_4 = \alpha$$

ko‘rinishdagi yechimlarni hosil qilamiz.

Ushbu holda har bir nolmas yechim n o‘lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining yechimlari quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_n)$ vektor $AX = \Theta$ sistemaning yechimi bo‘lsa, u holda k ixtiyoriy son bo‘lganda ham $kX_0 = (k\,b_1, k\,b_2, ..., k\,b_n)$ vektor ham bu sistemaning yechimi bo‘ladi.
2. Agar $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_n)$ va $X_1 = (c_1, c_2, ..., c_n)$ vektorlar $AX = \Theta$ sistemaning yechimlari bo‘lsa, u holda $X_0 + X_1 = (b_1 + c_1, b_2 + c_2, ..., b_n + c_n)$ vektor ham bu sistemaning yechimi bo‘ladi.

Shuning uchun bir jinsli sistema yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham uning yechimi bo‘la oladi.

Bir jinsli bo‘lmagan sistema yechimlari uchun yuqoridagi da’vo o‘rinli emas.

$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$, ..., $A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ n o‘lchovli vektorlar sistemasini ko‘rib chiqamiz.

1-ta’rif. Agar $x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k = \Theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi kamida bittasi noldan farqli $x_1, x_2, ..., x_k$ sonlar mavjud bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasi deb ataladi.
Aks holda, yani faqat $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$ bo‘lgandagina $x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k = \Theta$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli vektorlar sistemasi deb ataladi.

Izoh. $x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k = \Theta$ vektor bir jinsli tenglamalar sistemasini ifodalaydi.

Masalan, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorlar sistemasini qaraymiz.

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = \Theta$$

vektordan quyidagi algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning yechimlarini Gauss usulida topamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \quad - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -7x_3, \\ x_2 = 4x_3, \\ x_3 \in R. \end{cases}$$

Ko‘rinib turibdiki, tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega. $x_3 = 1$, deb olsak, $x_1 = -7$, $x_2 = 4$ qiymatlarni topamiz. Ya’ni,

$$-7A_1 + 4A_2 + A_3 = \Theta.$$

Demak, ta’rifga asosan, qaralayotgan vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq.

Yuqorida aytib o‘tilgan bir jinsli tenglamalar sistemasining xossalari va Kroneker-Kapelli teoremasiga asosan quyidagi tasdiqni hosil qilamiz.

Tasdiq. Agar $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasining rangi $r(A_1, ..., A_k)$ vektorlar soni k dan kichik bo‘lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘ladi. Agar $r = k$ bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo‘ladi.

Xususan, bu tasdiqdan, bir xil o‘lchovli vektorlar sistemasidagi vektorlar soni bu vektorlarning o‘lchovidan, ya’ni rangidan katta bo‘lsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli bo‘gliq bo‘lishi kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $A_1, A_2, ..., A_k$ vektorlar sistemasining rangi, ta’rifga asosan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

matrisa rangiga teng. Shartga asosan $k > n$, $r(A) \le \min(n, k) = n < k$. U holda $AX = \Theta$ tenglamada noma’lumlar soni tenglamalar sistemasi rangidan katta. Demak, sistema trivial bo‘lmagan (noldan farqli) yechimga ega, ya’ni, vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq.

2-ta’rif. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimlarining har qanday maksimal sondagi chiziqli erkli sistemasi bu tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.

Teorema. $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining har qanday yechimi fundamental yechimlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasidan iborat.

Isbot. $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar sistemasi $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi bo‘lsin. X_0 vektor esa tenglamalar sistemasining boshqa ixtiyoriy yechimi bo‘lsin. U holda, ta’rifga asosan, $X_0, X_1, X_2, ..., X_k$

vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq. Ya’ni shunday kamida bittasi noldan farqli $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k$ sonlar mavjudki,

$$\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k = \Theta.$$

Agar bu tenglikda $\alpha_0 = 0$ bo‘lsa, $\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_k X_k = 0$, ya’ni, $X_1, X_2, ..., X_k$ vektorlar chiziqli bog‘liq. Bu esa teorema shartiga zid. Demak, $\alpha_0 \neq 0$. Shu sababli

$$X_0 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} X_1 - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} X_k .$$

Bu teoremadan muhim bo‘lgan quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

Tasdiq. Agar $F_1, F_2, ..., F_k$ n o‘lchovli vektorlar sistemasi $AX = \Theta$ tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi bo‘lsa, bu bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining umumiy yechimi

$$X = c_1 F_1 + ... + c_k F_k$$

shaklda ifodalanadi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

Teorema. Bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasining rangi r ga teng bo‘lib, sistema noma’lumlari soni n dan kichik bo‘lsin. U holda tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi $n-r$ ta nolmas vektorlardan iborat bo‘ladi.

Teoremadan ko‘rinib turibdiki, fundamental yechimlar sistemasidagi vektorlar soni bu sistemaga mos erkli o‘zgaruvchilar soniga teng ekan.

Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasini quyidagicha qurishimiz mumkin:

1. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi topiladi;
2. $n-r$ ta erkli o‘zgaruvchilarga qiymat beramiz. Buning uchun $n-r$ o‘lchovli $n-r$ ta vektorlardan iborat chiziqli erkli vektorlar sistemasi tanlanadi. Bunda masalan, har bir vektori $n-r$ o‘lchovli $A_1 = (1,0,...,0)^T$, $A_2 = (0,1,...,0)^T$,..., $A_{n-r} = (0,0,...,1)^T$ sistemani tanlash mumkin;
3. Erkli noma’lumlar o‘rniga yuqorida tanlangan A_1 vektorning mos koordinatalarini qo‘yib, bazis noma’lumlar aniqlanadi va F_1 quriladi. Xuddi shunday usulda $A_2, A_3, ..., A_{n-r}$ vektorlardan foydalanib, mos ravishda F_2, F_3, …, F_{n-r} yechimlar quriladi.

$F_1, F_2, ..., F_{n-r}$ vektorlar sistemasining rangi ularning qismi bo‘lgan $A_1, ..., A_{n-r}$ vektorlar rangidan kichik emas. $A_1, ..., A_{n-r}$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lgani sababli bu vektorlar sistemasi rangi maksimal, ya’ni $n-r$ ga teng. Shu sababli,

$F_1, F_2, ..., F_{n-r}$ vektorlar sistemasi rangi ham maksimal, ya'ni $n-r$ ga teng, ya'ni bu yechimlar sistemasi chiziqli erkli.

2-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasini toping.

Yechish. Bu sistemada $r = 2$, $n = 5$. Demak, sistemaning har qanday fundamental yechimlar sistemasi $n - r = 3$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

1. Bu yerda x_3, x_4, x_5 noma'lumlarni ozod noma'lumlar, deb hisoblab sistemani yechamiz va quyidagi umumiy yechimni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 - \frac{1}{2}x_5, \\ x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5. \end{cases}$$

2. So'ngra uchta chiziqli erkli uch o'lchovli vektor olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bu vektorlarning har birining komponentlarini umumiy yechimga ozod noma'lumlarning qiymatlari sifatida keltirib qo'yib, x_1, x_2 larning qiymatlarini hisoblab, berilgan tenglamalar sistemasining quyidagi fundamental yechimlar sistemasini hosil qilamiz:

$$F_1 = \begin{pmatrix} \frac{19}{8}, & \frac{7}{8}, & 1, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8}, & -\frac{25}{8}, & 0, & 1, & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Sistemaning umumiy yechimi $X = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3$, yoki

$$F=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}19/8\\7/8\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}3/8\\-25/8\\0\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Bu yerda c_1, c_2 va c_3 ixtiyoriy sonlar.

n noma'lumli m ta chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar sistemasi matrisalar yordamida $AX=B$ ko‘rinishda ifodalangan bo‘lsin. Bunda A – $m\times n$ o‘lchovli matrisa, X n-o‘lchovli noma'lumlardan iborat ustun vektor, B – m o‘lchovli ozod hadlar vektori.

$AX=\Theta$ tenglamalar sistemasi $AX=B$ bir jinsli bo‘lmagan sistemaning bir jinsli qismi deyiladi.

Berilgan bir jinsli bo‘lmagan sistemaning umumiy yechimini vektor shaklda quyidagicha yozish mumkin:

$$X=F_0+c_1F_1+\ldots+c_{n-r}F_{n-r}$$

Bu yerda, F_0 – dastlabki bir jinslimas sistemaning xususiy yechimlaridan biri (F_0 ni aniqlash uchun erkli o‘zgaruvchilarning xususiy qiymatlarida bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar sistemasi yechiladi); F_1, F_2, …, F_{n-r} – bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasi; c_1, c_2, …, c_{n-r} – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

3-misol. Quyidagi

$$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=1\\2x_1+x_2-x_3=2\end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlarini toping.

Yechish. Sistemaning yechimini topishda Gauss-Jordan usulidan foydalanamiz

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&1\\2&1&-1&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&1&3\\2&1&-1&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&1&3\\5&1&0&5\end{array}\right).$$

Bu yerda x_2, x_3 basis o‘zgaruvchilar, x_1 erkli o‘zgaruvchidir. $n=3$, $r=2$, $n-r=1$. Oxirgi sistemada $x_1=0$, deb olsak, $F_0=\begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}$ xususiy yechimni olamiz.

Endi bir jinsli bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechib fundamental yechimlar sistemasini topamiz. Bir jinsli sistema quyidagi sistemaga ekvivalent

$$\begin{cases}3x_1+x_3=0,\\5x_1+x_2=0.\end{cases}$$

Bu sistemada $x_1 = 1$, deb olsak, $F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental yechimni olamiz. Demak, umumiy yechim

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

bu yerda c – ixtiyoriy son.

4-misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining umumiy yechimini vektor shaklda yozing.

Yechish. Sistemaning yechimini topishda Gauss-Jordan usulidan foydalanamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1,2 & 1 & 0,8 \\ 1 & 0 & 2,6 & -1 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$F_0 = (0,6; 0,8; 0; 0)$ sistemaning xususiy yechimlaridan biri. Bundan foydalanib sistemaning umumiy yechimini vektor shaklida yozamiz:

$$X = F_0 + c_1F_1 + c_2F_2 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} -2,6 \\ 1,2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

bu yerda c_1, c_2 lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik yetarli sharti nimadan iborat?
2. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining aniqlik va aniqmaslik yetarli shartlari nimalardan iborat?
3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi deb nimaga aytiladi?
4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi qanday shartlar bajarilganda o‘zining fundamental yechimlari tizimiga egaligi bilan xarakterlanadi?
5. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimini qurish jarayoni nimalarni o‘z ichiga oladi?
6. Vektorlar sistemasining chiziqli bog‘liqligi tushunchasi.

7. Vektorlar sistemasining chiziqli erkliligi tushunchasi.
8. Agar bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi fundamental yechimlari tizimi qurilgan bo‘lsa, uning umumiy yechimini vektor shaklda yozish mumkinmi va qanday?
9. Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemaning keltirilgan sistemasi deb nimaga aytiladi?
10. Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemaning umumiy yechimi vektor shaklda qanday yoziladi?

9. Analitik geometriya elementlari

Reja:

1. Analitik geometriyaga oid ba’zi ma’lumotlar.
2. Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamasining turli ko‘rinishlari.
3. To‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvi.
4. Iqtisodiyotda to‘g‘ri chiziqlarning qo‘llanishiga misollar.
5. Fazoda uch o‘lchovli vektorlarning ba’zi xossalari.
6. Fazoda tekislik tenglamasi.
7. Fazoda to‘g‘ri chiziq.

Tayanch so‘z va iboralar: Dekart koordinata sistemasi, nuqta koordinatalari, to‘g‘ri chiziqning normal vektori, to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyenti, to‘g‘ri chiziqning parametrli tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi, to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi, to‘g‘ri chiziqlarning parallelik va perpendikulyarlik shartlari, fazoda tekislik tenglamasi, fazoda to‘g‘ri chiziq.

Mikroiqtisodiyot alohida korxonalar va bozorlarning iqtisodiy nazariyasi va ularning siyosatini tahlil qilish bilan shug‘ullanadi. Bu esa talab va taklif orasidagi muvozanatni aniqlab beruvchi bozor muvozanatini o‘rganishni talab qiladi. Mahsulotni sotish narxi va uni ishlab chiqarish miqdori muvozanatini aniqlash uchun talab va taklif chiziqlarining o‘zaro joylashishini aniqlash zaruriyati tug‘iladi. Biz bu paragrafda talab va taklif chiziqlarini ifodalash uchun zarur bo‘lgan chiziqlarning sodda ko‘rinishi bilan, ya’ni tekislikda to‘g‘ri chiziqlarning joylashishi bilan tanishib chiqamiz. Buning uchun biz to‘g‘ri chiziqlarni analitik ifodalashni, ya’ni to‘g‘ri chiziqlarning tenglamasini yozish bilan tanishamiz.

Matematikada chiziqlarning tenglamasi tushunchasi bilan tanishtiradigan bo‘lim analitik geometriya deb ataladi.

1-ta'rif. Agar d chiziqdagi har bir (x,y) nuqta $F(x,y)=0$ $(y=f(x))$ tenglamani qanoatlantirsa, u holda $F(x,y)=0$ tenglama d chiziqning tenglamasi deb ataladi. Agar d chiziqni to'g'ri chiziq, deb qarasak, u holda $F(x,y)=0$ tenglama d to'g'ri chiziqning tenglamasi bo'ladi.

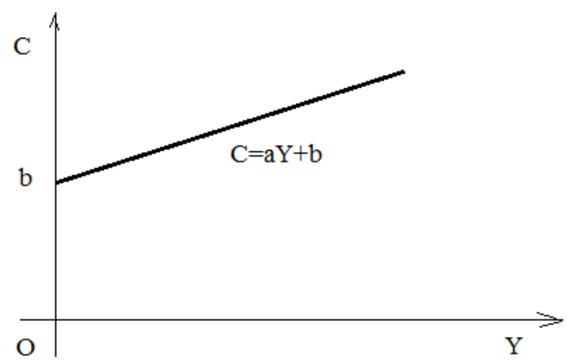
To'g'ri chiziqning

$$y=kx+b \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglamasi bilan biz oldindan tanishmiz. Analitik geometriyada bu tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi deb ataladi.

Bu kabi tenglamalardan iqtisodiyotda milliy daromadni o'rganishda foydalanish mumkin. Masalan, milliy daromadni hisoblashda iqtisodning eng sodda modelidan foydalanish maqsadida uni ikki sektordan: xo'jaliklar (iste'molchilar) va korxonalardan (ishlab chiqaruvchilar) iborat, deb qaraymiz. Korxonalar quyidagi resurslardan masalan, yer, kapital, mehnat resurslari va xom-ashyolardan mahsulotlarni ishlab chiqarishda va iste'molchilarga xizmat ko'rsatish sohalarida foydalanadi. Bu resurslar ishlab chiqarish ko'rsatkichlari sifatida korxonalarga tegishli bo'lishi kerak. Bu ko'rsatkichlar uchun korxonalardan xo'jaliklarga to'lov sifatida jo'natilayotgan pul oqimini milliy daromad sifatida qarash mumkin. Xo'jaliklar bu pullarni ikki maqsad uchun: pulning ma'lim bir qismini korxonalar tomonidan ishlab chiqarilgan mahsulotlarni $C-$iste'mol qilishga (xarid qilishga) va pulning qolgan qismini $S-$iqtisod qilishga (jamg'arma qilishga) sarflaydi, deb qarash mumkin. U holda C va S belgilar $Y-$daromadning funksiyasi sifatida qaraladi: $C=f(Y),\ S=f(Y)$.

Agar C va Y orasidagi bog'liqlik chiziqli bo'lsa, u holda $C=aY+b,\ a>0,\ b>0$ bo'ladi. Chunki daromad ortishi bilan iste'mol uchun sarf ham oshadi.



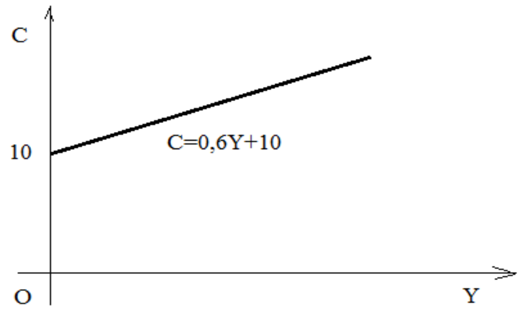
Bu yerda b daromad bo'lmagandagi ($Y=0$) iste'mol darajasini bildiradi va uni ko'p hollarda avtonom iste'mol, deb ham ataladi. a iste'mol o'zgarishining limit qiymati bo'lib, u Y bir birlikka o'zgarganda C belgining qanchaga o'zgarishini bildiradi. Yuqorida aytilganidek, daromad iste'mol uchun va jamg'arma uchun ishlatiladi. U holda

$$Y = C + S.$$

Demak, bir birlik daromadning ma'lum bir qismigina iste'mol uchun sarflanadi va $0 < a < 1$. $Y = C + S$ munosabat iste'mol funksiyasidan foydalanib jamg'arma funksiyasini aniqlashga yordam beradi.

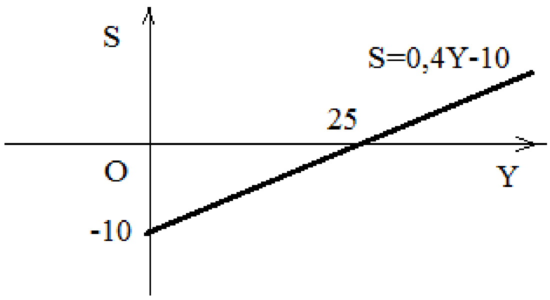
1-misol. Agar iste'mol funksiyasi $C = 0,6Y + 10$ ko'rinishda bo'lsa, u holda unga mos jamg'arma funksiyasini aniqlang va uning grafigini chizing.

Yechish. Iste'mol funksiyasining grafigini chizib olamiz.



Bu chiziqqa tegishli bo'lgan ikkita nuqtani topamiz: $A(0,10)$, $B(10,16)$. Jamg'arma funksiyasini topish uchun $Y = C + S$ munosabatdan foydalanamiz. U holda $S = Y - C$ bo'lgani uchun jamg'arma funksiyasi $D(0,-10)$, $K(10,-6)$ nuqtalardan o'tadi va bu funksiyaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$S = Y - C = Y - (0,6Y + 10) = 0,4Y - 10$.



Mashq. Agar iste'mol funksiyasi $C = 0,7Y + 15$ ko'rinishda bo'lsa, u holda unga mos jamg'arma funksiyasini aniqlang va uning grafigini chizing.

Endi biz tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasining turli ko'rinishlari bilan tanishib chiqamiz.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

ko'rinishdagi tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Bu tenglamadan foydalanib to'g'ri chiziqning boshqa ko'rinishdagi tenglamalarini hosil qilish mumkin yoki aksincha to'g'ri chiziqning boshqa ko'rinishdagi tenglamalarini (2) ko'rininshga keltirish mumkin.

(2) tenglamani (1) ko‘rinishga keltiramiz:

$$Ax+By+C=0\overset{(B\neq 0)}{\Rightarrow} By=-Ax-C\Rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}\overset{\left(k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{b}\right)}{\Rightarrow} y=kx+b.$$

Endi (1) tenglamani (2) ko‘rinishga keltiramiz:

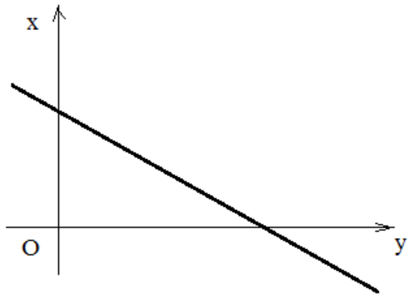
$$y=kx+b\Rightarrow y=\frac{1}{\frac{1}{k}}x+b\Rightarrow \frac{1}{k}y=x+\frac{b}{k}\overset{\left(B=-\frac{1}{k},\ A=1,\ C=\frac{b}{k}\right)}{\Rightarrow} Ax+By+C=0.$$

2-misol. $3x+4y-5=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni burchak koeffisiyentli tenglama orqali yozing va grafigini chizing.

Yechish. Birinchi navbatda $3x+4y-5=0$ tenglamani (1) ko‘rinishga keltirib olamiz:

$$3x+4y-5=0\Rightarrow 4y=-3x+5\Rightarrow y=-0,75x+1,25.$$

Endi to‘g‘ri chiziqni Dekart koordinatalar sistemasida tasvirlaymiz:



Endi to‘g‘ri chiziq tenglamasining boshqa ko‘rinishlari bilan ham tanishib chiqamiz.

$M(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{l}(m,n)$ vektorga parallel bo‘lgan d to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Ixtiyoriy $M_0\neq M(x,y)\in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)P\vec{l}\Rightarrow \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad (3)$$

(3) d to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi, $\vec{l}$ esa uning yo‘naltiruvchi vektori, deb ataladi. (2) tenglamani (3) ko‘rinishga keltiramiz: $d: Ax+By+C=0$ bo‘lsin. U holda

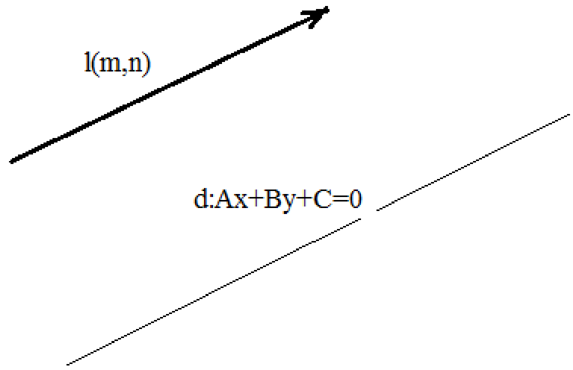
$$\left.\begin{array}{l} M\in d\Rightarrow Ax+By+C=0,\\ M_0\in d\Rightarrow Ax_0+By_0+C=0\end{array}\right\}\Rightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x-x_0}{-B}=\frac{y-y_0}{A}\overset{m=-B,\ n=A}{\Rightarrow}\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

Demak, $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{l}(-B,A)$.

Endi (3) tenglamani (2) ko‘rinishga keltiramiz:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\Rightarrow n(x-x_0)-m(y-y_0)=0\overset{(A=n,\ B=-m,\ C=my_0-nx_0)}{\Rightarrow}Ax+By+C=0.$$



3-misol. $M(3,4)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{l}(-3,7)$ vektorga parallel bo‘lgan d to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Ixtiyoriy $M_0\neq M(x,y)\in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overrightarrow{M_0M}(x-3,y-4)P\vec{l}\Rightarrow\frac{x-3}{-3}=\frac{y-4}{7}\Rightarrow 7x+3y-33=0.$$

To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidan uning parametrli tenglamasi, deb ataluvchi tenglamasini keltirib chiqaramiz:

$$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)P\vec{l}\Rightarrow\frac{x-x_0}{m}=t=\frac{y-y_0}{n}\Rightarrow\begin{cases}x-x_0=tm,\\ y-y_0=tn.\end{cases}$$

Oxirgi tenglama to‘g‘ri chiziqning parametrli tenglamasi, t esa parametr, deb ataladi va uning har bir parametriga bitta to‘g‘ri chiziq mos keladi.

$M(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{n}(a,b)$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan d to‘g‘ri chiziq tenlamasini tuzamiz. Ixtiyoriy $M_0(x_0,y_0)\neq M(x,y)\in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Rightarrow\left(\overrightarrow{M_0M},\vec{n}\right)=0\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \qquad (4)$$

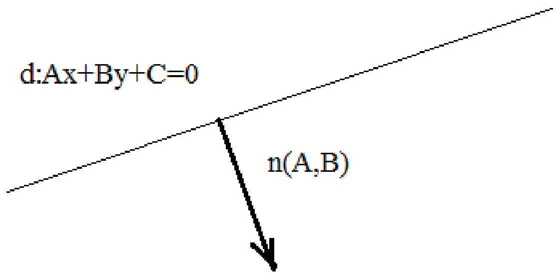
Bu yerda $\vec{n}$ vektor d to‘g‘ri chiziqning normal vektori, deb ataladi. (4) tenglamani (3) ko‘rinishga keltiramiz: $d:Ax+By+C=0$ bo‘lsin. U holda

$$\left.\begin{array}{l}M\in d\Rightarrow Ax+By+C=0,\\ M_0\in d\Rightarrow Ax_0+By_0+C=0\end{array}\right\}\overset{A=a,\ B=b}{\Rightarrow}a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

Demak, $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqning normal vektori $\vec{n}(A,B)$.

Endi (4) tenglamani (2) ko‘rinishga keltiramiz:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\overset{(A=a,\ B=b,\ C=-by_0-ax_0)}{\Rightarrow}Ax+By+C=0.$$



4-misol. $M(-5,4)$ nuqtadan o‘tuvchi $\vec{n}(4,3)$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan d to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Ixtiyoriy $M_0(x_0,y_0) \neq M(x,y) \in d$ nuqta olamiz. U holda

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}\right) = 0 \Rightarrow 4(x+5)+3(y-4)=0 \Rightarrow 4x+3y+8=0.$$

To‘g‘ri chiziqning $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasining shaklini quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$\frac{Ax+By+C=0}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow \pm\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} \pm \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}} \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

Oxirgi tenglama to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi deb ataladi. Bu yerda

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Bunda: agar $C<0$ bo‘lsa ishora “+” va agar $C>0$ bo‘lsa “–” olinadi.

To‘g‘ri chiziqning $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasida $C \neq 0$ bo‘lsin. U holda

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1 \overset{a=-\frac{C}{A},\ b=-\frac{C}{B}}{\Rightarrow} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

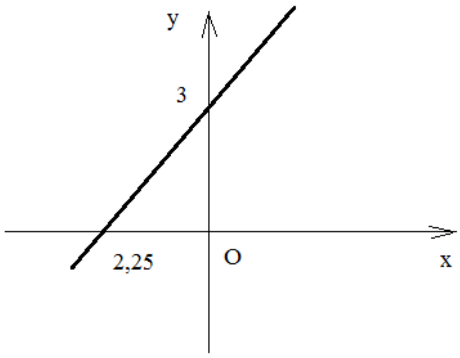
To‘g‘ri chiziqning a, b kesmalar bo‘yicha tenglamasini hosil qilamiz.

5-misol. Ushbu $-4x+3y-9=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni yasang.

Yechish. Berilgan tenglamani

$$-4x+3y-9=0 \Rightarrow \frac{x}{-2,25}+\frac{y}{3}=1$$

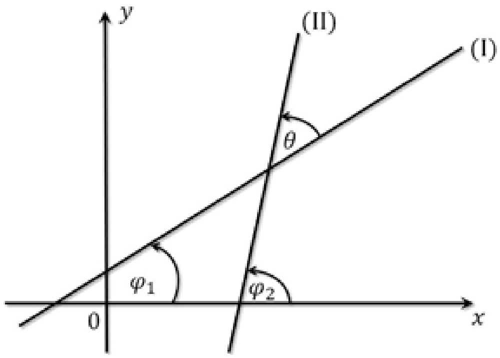
ko‘rinishga keltirib olamiz. Demak, to‘g‘ri chiziq Oy o‘qidan 3 birlik, Ox o‘qidan esa -2,25 birlik kesma ajratadi va uning grafigi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



Ma'lumki, $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$ to'g'ri chiziqlar orasidagi θ burchak

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$$

formula yordamida topiladi. Bundan $k_1 = k_2$ bo'lsa to'g'ri chiziqlar parallel; $k_1 k_2 = -1$ bo'lsa to'g'ri chiziqlar perpendikulyar ekanligi kelib chiqadi.



$I: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,\ II: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ularning $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$ normal vektorlari orasidagi burchakka teng, ya'ni $\theta = \left(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2\right)$. Shuning uchun

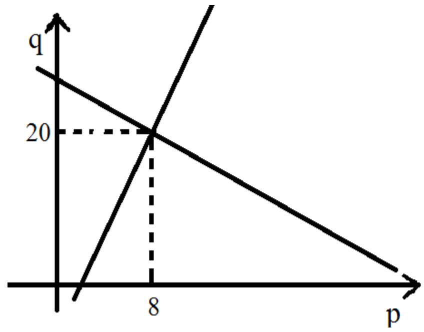
$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

formula o'rinli. Bundan ikkita to'g'ri chiziq uchun parallellik $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = t$ va perpendikulyarlik $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ shartlari kelib chiqadi.

Faraz qilamiz $M_0(x_0, y_0)$ nuqta va $d: Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. U holda M_0 nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

$$\rho(M_0, d) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

formula yordamida topiladi.



Iqtisodiyotdagi muhim tushunchalardan biri bu talab va taklif funksiyalaridir. Odatda bunday funksiyalar mahsulot narxi p va shu narxda sotiladigan mahsulot miqdori q orasidagi munosabatni ifodalaydi. Ba'zi bir cheklovlar ostida bu funksiyalarni chiziqli funksiyalar deb olishimiz mumkin.

Talab va taklif miqdori teng bo'ladigan p narxga muvozanat narxi deyiladi. Masalan, talab va taklif funksiyalari quyidagi chiziqli funksiyalar bilan ifodalangan bo'lsin $q=-2p+36,\ q=4p-12$. Bu misolda x, y o'zgaruvchilar o'rniga narxni ifodalovchi p o'zgaruvchi va miqdorni ifodalovchi q o'zgaruvchi ishtirok qilmoqda. Talab funksiyasining burchak koeffisiyenti –2 ga teng bo'lib, narxga nisbatan kamayish tezligini (koeffisiyentini) ifodalaydi. Taklif funksiyasining burchak koeffisiyenti 4 ga teng bo'lib, narxga nisbatan taklifning o'sish koeffisiyentini ifodalaydi. Talab va taklifning muvozanat holatini topish uchun bu ikkita tenglikni birgalikda yechamiz, ya'ni mos to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz.

$$\begin{cases} q=-2p+36, \\ q=4p-12. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -2p+36=4p-12 \quad \Leftrightarrow \quad p=8,\ q=20.$$

Demak, talab va taklif bir xil bo'ladigan muvozanat narxi $p=8$ ga teng bo'lib, bunda talab va taklif miqdori $q=20$ ga teng.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda imkoniyatlardan kelib chiqadigan chiziqli tengsizlik shaklidagi cheklovlardan foydalaniladi. Bu cheklovlar odatda resurslar zahirasidan ortiq miqdorda resursdan foydalana olmasligimizni yoki mablag' sarfiga cheklovni ifodalaydi.

Faraz qilaylik, ikki xil turdagi mahsulot sotib olish talab qilinsin. Bu mahsulotlarning bir birliklarining narxlari mos ravishda p_1, p_2 bo'lsin. U holda $P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ narx vektori deb ataladi. Sotib olingan mahsulotlar miqdori mos ravishda x_1, x_2 bo'lsin. $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektor mahsulotlar vektori deb ataladi. Bu mahsulotlar vektorining umumiy narxi $(P,X)=P^T X=p_1x_1+p_2x_2$ ga teng.

Bir xil narxli ikkita X va Y mahsulotlar vektorlari ekvivalent deyiladi va $X \sim Y$ kabi belgilanadi.

Izoh. Umuman olganda biz bu yerda ixtiyoriy n sondagi mahsulotlarni qarashimiz mumkin. Bunda narx va mahsulotlar vektorlari n o‘lchovli arifmetik vektorlardan iborat bo‘ladi. Aynan ikki mahsulotning qaralishi ikki o‘lchovli arifmetik vektorning tekislikdagi vektor bilan ekvivalentligidir.

Bir xil c narxdagi X mahsulot vektorlari to‘plami Ox_1x_2 tekislikda $p_1x_1 + p_2x_2 = c$ to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

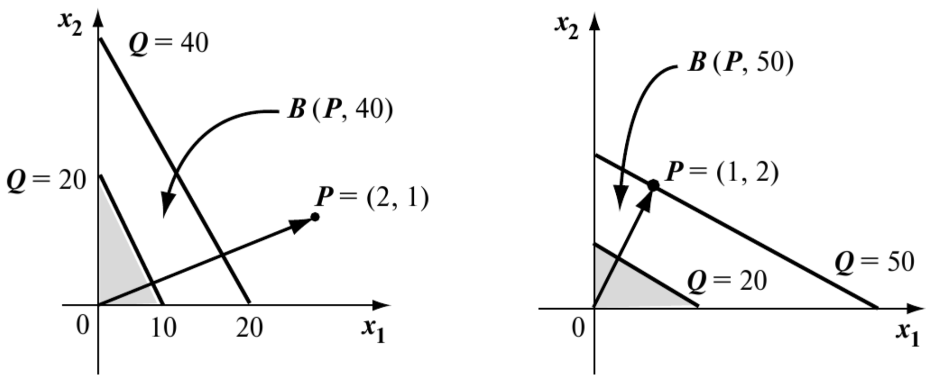
Q miqdordagi mablag‘ berilgan bo‘lsin. Narxi Q dan oshmaydigan mahsulot vektorlari to‘plami byudjet to‘plami deyiladi. Byudjet to‘plami $p_1x_1 + p_2x_2 \le Q$ tengsizlik bilan ifodalanadi va

$$B(P,Q) \equiv B(p_1, p_2, Q) = \left\{ (x_1, x_2) \middle| p_1x_1 + p_2x_2 \le Q \right\}$$

kabi belgilanadi.

Q narxdagi mahsulot vektorlari to‘plami $B(p_1, p_2, Q)$ byudjet to‘plam chegarasi deyiladi va $p_1x_1 + p_2x_2 = Q$ tenglama bilan ifodalanadi.

Quyidagi rasmda byudjet to‘plamiga misollar keltirilgan. Mahsulotlar vektori komponentalari musbat bo‘lganligi sababli, byudjet to‘plami katetlari koordinata o‘qlarida yotgan I chorakda joylashgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdan iborat.



To‘g‘ri chiziqning xossalaridan kelib chiqadigan bo‘lsak, byudjet to‘plam chegarasini ifodalovchi to‘g‘ri chiziqning normali P narx vektoridan iborat. Yuqoridagi rasmdan byudjet to‘plami chegarasini ifodalovchi to‘g‘ri chiziq narx vektori (normal vektor) yo‘nalishida parallel ko‘chirilsa, sarflanadigan Q mablag‘ miqdori ortadi.

Byudjet to‘plami tushunchasida narxni bir birlik mahsulot ishlab chiqarishdagi ma’lum bir resurs sarfi, Q ni resurs zahirasi, deb olishimiz mumkin. Bu holatda byudjet to‘plami ma’lum resurs sarfi shu resurs zahirasidan ortmasligi zarurligini bildiradi.

Biz vektorlarning skalyar ko‘paytmasi bilan tanishmiz va bu tushunchadan tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamasining normal shaklini aniqlashda foydalandik. Biz tekislik tushunchasini kiritish R^3 fazoda amalga oshirilganligi sababli bu fazo vektorlariga doir ba’zi tushunchalarni, ya’ni vektorlarning vektor ko‘paytmasi, vektorlarning aralash ko‘paytmasi va komplanar vektorlar tushunchalarini kiritib olamiz.

2-ta’rif. Agar $\vec{x},\ \vec{y}$ vektorlar tekisligiga perpendikulyar $\vec{z}$ vektor quyidagi:

1) $\vec{z}$ vektor ko‘paytma uzunligi

$$|\vec{z}| = |\vec{x}||\vec{y}|\sin\alpha$$

tenglik bilan aniqlanadi va son jihatidan $\vec{x}, \vec{y}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga teng bo‘ladi (bu yerda α – $\vec{x},\ \vec{y}$ vektorlar orasidagi burchak);

2) $\vec{z}$ vektor uchidan qaraganda $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlar orasidzgi α burchak soat strelkasiga qarama-qarshi yo‘nalishda aniqlanadi;

xossalarga ega bo‘lsa, u holda $\vec{z}$ vektorga $\vec{x},\ \vec{y}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deyiladi va $\vec{z} = \left[\vec{x}, \vec{y}\right]$ ko‘rinishda belgilanadi.

Vektor ko‘paytma quyidagi xossalarga ega:

1) $[\vec{x},\vec{y}] = -[\vec{y},\vec{x}]$; 2) $\vec{x} \perp \vec{y} \Rightarrow \left|[\vec{x},\vec{y}]\right| = |\vec{x}||\vec{y}|$;

3) $\alpha[\vec{x},\vec{y}] = [\alpha\vec{x},\vec{y}] = [\vec{x},\alpha\vec{y}]$; 4) $[\vec{x},(\vec{y}+\vec{z})] = [\vec{x},\vec{y}] + [\vec{x},\vec{z}]$.

$\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ va $\vec{y}(y_1, y_2, y_3)$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini 3-tartibli determinant yordamida quyidagicha aniqlash mumkin:

$$\vec{z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

6-misol. $\vec{x}(2;1;2),\ \vec{y}(-1;2;0)$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

1) vektor ko‘paytmasi va uning uzunligini;
2) skalyar ko‘paytmasini;
3) ular orasidagi burchakni.

Yechish.

a) $$\vec{z} = \left[\vec{x}, \vec{y}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Demak, $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$ vektorlarning vektor ko'paytmasi: $\vec{z}(-4;-2;5)$. Bu vektorning uzunligi: $|\vec{z}| = \sqrt{16+4+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

b) $(\vec{x},\vec{y}) = -2+2+0 = 0$.

c) $(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$. Bu yerda $\alpha - \vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$ vektorlar orasidagi burchak. Bu burchakni vektor ko'paytmadan foydalanib ham hisoblab ko'ramiz:

$$\sin\alpha = \frac{\|[\vec{x},\vec{y}]\|}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+2+0}} = 1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$

Mashq. $\vec{x}(2;4;-2)$, $\vec{y}(4;-2;5)$ vektorlar berilgan. Quyidagilarni aniqlang:

1) vektorlarning vektor ko'paytmasi va uning uzunligini;
2) vektorlarning skalyar ko'paytmasini;
3) vektorlar orasidagi burchakni;
4) vektorlarga qurilgan parallelepiped yuzini.

3-ta'rif. Agar $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $[\vec{x},\vec{y}]$ uchinchi $\vec{z}$ vektorga skalyar ko'paytmasi $([\vec{x},\vec{y}],\vec{z})$ $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deb ataladi va $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ kabi belgilanadi.

Vektorlarning aralash ko'paytmasi quyidagi xossalarga ega:

1) $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y})$.

Ya'ni ko'paytiriluvchi vektorlar o'rinlari doiraviy almashtirilganda aralash ko'paytma qiymati o'zgarmaydi.

2) $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z})$, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x})$, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = -(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y})$.,

Ya'ni qo'shni 2 ta vektorlarning o'rinlari almashtirilganda aralash ko'paytma ishorasini o'zgartiradi.

3) R^3 da aralash ko'paytma qiymatini quyidagicha 3-tartibli determinant yordamida aniqlash mumkin: $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

7-misol. $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$, $\vec{z}(3;2;4)$ vektorlar berilgan. Bu vektorlar uchun $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ aralash ko'patmani hisoblang.

Yechish. $(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) = (\vec{z},\vec{x},\vec{y})$ bo'lgani uchun biz $(\vec{z},\vec{x},\vec{y})$ ko'paytmaning qiymatini hisoblaymiz:

$$(\vec{z},\vec{x},\vec{y})=\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-12-4+20=4.$$

Demak $\vec{x}(2;1;2)$, $\vec{y}(-1;2;0)$, $\vec{z}(3;2;4)$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi 4 ga teng.

Mashq. $\vec{x}(5;-7;2)$, $\vec{y}(-11;2;5)$, $\vec{z}(3;6;4)$ vektorlar berilgan. Bu vektorlar uchun $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ aralash ko‘paytmani hisoblang.

4-ta’rif. Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deyiladi.

Teorema. R^3 da 3 ta $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ vektorlar komplanar bo‘lishi uchun ularning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

8-misol. $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=7\vec{i}+14\vec{j}-13\vec{k}$ vektorlarni komplanarlikka tekshiring.

Yechish. $[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=21+70-91=0$.

Demak, bu vektorlar komplanar.

Mashq. $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$; $\vec{c}=7\vec{i}+4\vec{j}-13\vec{k}$ vektorlarni komplanarlikka tekshiring.

Izoh. Vektorlarning aralash ko‘paytmasining absolyut qiymati shu vektorlarga qurilgan parallelepipedning hajmiga teng, ya’ni $V=\left|\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)\right|$, V parallelepiped-ning hajmi.

Tekislik geometriyaning boshlang‘ich tushunchalaridan bo‘lib, uni turli usullarda aniqlash mumkin. Biz tekislikni aniqlashning ba’zi usullari bilan tanishib chiqamiz. Shuni alohda ta’kidlashimiz zarurki, bizga ma’lum ma’lumotlar yordamida aniqlangan tekislik yagona bo‘lishi kerak.

Belgilangan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{n}(A,B,C)$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzamiz. Ma’lumki, bunday tekislik yagona.

Tekislikka tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtani olamiz. U holda tekislikda yotgan $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,y-y_0)$ vektor $\vec{n}$ ga perpendikulyar. Bundan $(\overrightarrow{M_0M},\vec{n})=0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Bu tenglamani soddalashtirsak, tekislikning umumiy tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \left(D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \right)$$

Tekislikka perpendikulyar bo‘lgan har qanday $\vec{n}(A,B,C)$ vektor tekislikning normal vektori deyiladi.

9-misol. $3x - 4y + 7x + 6 = 0$ tekislikning normal vektorini toping.

Yechish. Bu tekislikning normal vektori: $\vec{n}(3;-4;7)$.

Tekislik umumiy tenglamasining xususiy hollarini qaraymiz:

1) Agar $D=0$ bo‘lsa, tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko‘rinishida bo‘lib, uni $O(0;0;0)$ nuqta qanoatlantiradi, ya’ni tekislik koordinatalar boshidan o‘tadi.

2) $C=0$ bo‘lsa, tenglama $Ax+By+D=0$ ko‘rinishni oladi. Bu Oxy tekislikdagi proeksiyasi $Ax + By + D = 0$ to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lgan tekislik tenglamasi. Bu tekislik Oz o‘qiga parallel. Shunga o‘xshash, $B=0$ va $A=0$ bo‘lganda, mos ravishda, Oy va Ox o‘qlariga parallel bo‘lgan $Ax + By + D = 0$ va $By + Cz + D = 0$ tekisliklarni hosil qilamiz.

3) $B=C=D=0$ bo‘lsa, Oyz tekislikning tenglamasi hosil bo‘ladi. Shunga o‘xshash, Oxz tekislik va Oxy tekislik tenglamalarini hosil qilamiz.

Faraz qilamiz, tekislikning umumiy tenglamasida barcha koeffisiyentlar noldan farqli bo‘lsin. U holda bu tenglamani quyidagicha yozib olishimiz mumkin:

$$Ax + By + Cz = -D \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \ \left(a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C} \right).$$

Bu tekislikning a, b, c kesmalar bo‘yicha tenglamasi deb atalib, bunda a, b, c tekislikning koordinata o‘qlarida ajratgan kesmalar kattaligi.

Masalan, $2x-3y+z-6=0$ tenglamani kesmalar bo‘yicha tenglamaga keltirish talab qilinsin. Buning uchun tenglamaning har bir hadini 6 ga bo‘lamiz va izlangan $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{6}=1$ tenglamani topamiz.

Mashq. Ushbu

1) $2y - 5 = 0$; 2) $x + z - 1 = 0$; 3) $3x + 4y + 6z - 12 = 0$

tenglamalar bilan berilgan tekisliklarni chizing.

Bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzish talab qilinsin.

Bu tekislikda yotgan ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtani qaraymiz va quyidagi vektorlarni hosil qilamiz: $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overrightarrow{M_2M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Bu vektorlar bitta tekislikda yotganligi sababli, bu vektorlar komplanar. Demak, $\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_2M}\right)=0$, ya’ni

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

Bu tenglama belgilangan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi deb ataladi.

10-misol. Bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan $M_0(2;0;1)$, $M_1(1;2;0)$, $M_2(0;3;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Bu tekislikda yotgan ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani qaraymiz va quyidagi vektorlarni hosil qilamiz: $\overrightarrow{M_0M}(x-2,y,z-1)$, $\overrightarrow{M_1M}(x-1,y-2,z)$, $\overrightarrow{M_2M}(x,y-3,z-2)$. Bu vektorlar bitta tekislikda yotganligi sababli, bu vektorlar komplanar. Demak, $\left(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_2M}\right)=0$, ya’ni

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 1-2 & 2-0 & 0-1 \\ 0-2 & 3-0 & 2-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(x-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=5(x-2)+3y+z-1=5x+3y+z-11=0.$$

Mashq. Bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan $M_0(2;3;1)$, $M_1(1;2;4)$, $M_2(5;3;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

Ikki tekislik orasidagi ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi sifatida bu tekisliklarning normal vektorlari orasidagi burchak qabul qilingan. Demak, umumiy tenglamalari $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ ko‘rinishda bo‘lgan tekisliklar orasidagi burchakni φ bilan belgilasak, u holda bu burchakni topish uchun $\overline{n}_1\left(A_1B_1C_1\right)$ va $n_2(A_2,B_2,C_2)$ vektorlar orasidagi burchakni topish formulasidan foydalanamiz:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Bu ikki tekislik orasidagi burchakni topish formulasi bo‘lib, u $0\le\varphi\le\pi$ oraliqda topiladi.

Umuman olganda ikki tekislikning normal vektorlari yordamida ularning o‘zaro joylashishi haqida quyidagi mulohazalarni chiqarish mumkin.

Agar tekisliklar parallel bo‘lsa, u holda $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$; agar tekisliklar perpendikulyar bo‘lsa, u holda $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha masofa quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{|\vec{n}|}.$$

11-misol. $M_1(-2;1;0)$ nuqtadan $2x - 6y + 3x - 4 = 0$ tekislikkacha masofa topilsin.

Yechish. $d = \dfrac{|2 \cdot (-2) - 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \dfrac{|-4 - 6 - 4|}{7} = 2$.

12-misol. $M(1;-3;-2)$ nuqtadan o‘tgan va $3x - 2y + 4z - 3 = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. Ikkita parallel tekislik umumiy normalga ega. Berilgan tekislik normal vektori $\vec{n} = (3;-2;4)$. Bundan izlangan tekislik tenglamasining ko‘rinishini topamiz:

$$3(x-1) - 2(y+3) + 4(z+2) = 0 \Rightarrow \ 3x - 2y + 4z - 1 = 0.$$

Fazoda to‘g‘ri chiziqni ikkita parallel bo‘lmagan tekisliklar kesishmasidan iborat nuqtalarning geometrik o‘rni sifatida aniqlash mumkin.

To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

To‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan ixtiyoriy vektor to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deb ataladi. Yuqoridagi tenglamalar sistemasi yordamida ifodalangan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchisini $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ kabi aniqlash mumkin, bunda $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ tekisliklarning normal vektorlari.

Ma’lumki, fazodagi ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtani $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ radius vektor bilan aniqlaymiz.

Fazoda to‘g‘ri chiziqda yotuvchi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va noldan farqli $\vec{s}(m, n, p)$ yo‘naltiruvchi vektor berilgan bo‘lsin. Faraz qilamiz $M(x, y, z)$ nuqta to‘g‘ri chiziqda yotgan ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. U holda $\overrightarrow{M_0M}$ va $\vec{s}$ vektorlar kollinear bo‘ladi, ya’ni shunday t son mavjudki, $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$.

U holda ta’rifga asosan $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ekanligini hisobga olsak, to‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasini $\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$ hosil qilamiz. Bu tenglamani koordinatalar ko‘rinishida ifodalasak

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt \\ y &= y_0 + nt \\ z &= z_0 + pt \end{aligned}\right\}$$

to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini hosil qilamiz. Bu sistemada t parametrni yo‘qotsak

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

ga ega bo‘lamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.

13-misol. To‘g‘ri chiziqning

$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ 3x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

umumiy tenglamasini kanonik shaklga keltiring.

Yechish. Buning uchun berilgan sistemadan x, y noma’lumlarni topamiz:

$$x=-\frac{1}{5}z+\frac{5}{2},\ \ y=\frac{7}{5}z-\frac{9}{5}$$

Endi esa bu ifodalardan z ni topamiz:

$$z=\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}},\ \ z=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}.$$

Endi ularni o‘zaro tenglashtirib

$$\frac{z}{1}=\frac{x-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}=\frac{y+\frac{9}{5}}{\frac{7}{5}}$$

ko‘rinishdagi kanonik tenglamani topamiz.

Ikkita to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning orasidagi burchakni topish, ularning parallelik va perpendikulyarlik shartlari yo‘naltiruvchilar orasidagi burchakni topish, yo‘naltiruvchilarning parallellik va perpendikulyarlik shartlariga ekvivalent.

$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ to‘g‘ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik orasidagi burchak

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

formula yordamida topiladi. Agar $Am+Bn+Cp=0$, ya’ni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchisi va tekislikning normal vektori perpendikulyar bo‘lsa, tekislik va to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi. Agar $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ bo‘lsa, ya’ni to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchisi va tekislikning normal vektori parallel bo‘lsa, tekislik va to‘g‘ri chiziq perpendikulyar bo‘ladi.

14-misol. Berilgan $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$ to‘g‘ri chiziq va $2x+3y+3z-8=0$ tekislikning kesishish nuqtasi topilsin.

Yechish. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}=t$

Belgilash yordamida

$$x=3t-2, y=-t+2, z=2t-1$$

ifodalarni topamiz. Bu qiymatlarni tekislik tenglamasiga qo‘ysak, $t=1$. Bundan, $x=y=z=1$.

Tekislikning ba’zi tatbiqlarini ko‘rib chiqamiz: bozorga ikki turdagi mahsulot taklif etilayotgan bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: P_i $(i=1,2)-$ mahsulotlarni sotish narxi, Q_i-mahsulotlarga bo‘lgan talab miqdori bo‘lsin. Agar narx va miqdor orasidgi bog‘lanish chiziqli bo‘lsa, u holda quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$\begin{cases} Q_1=a_1+b_1P_1+c_1P_2, \\ Q_2=a_2+b_2P_1+c_2P_2. \end{cases}$$

Birinchi tenglamada qatnashayotgan o‘zgaruvchilarni va koeffisiyentlarni tahlil qilib chiqamiz. Mahsulotlar narxi nolga teng bo‘lganda ularga bo‘lgan talab $Q_1>0$ bo‘lgani uchun $a_1>0$. Mahsulot narxi oshganda talab kamayganligi sababli $b_1<0$, c_1 parametrning ishorasi mahsulotlarning xarakteriga bog‘liq. Agar mahsulotlar bir-birining o‘rnini bosadigan bo‘lsa, u holda 2-mahsulot narxining oshishi iste’molchi 1-mahsulotni xarid qilishga undaydi va natijada 1-mahsulotga bo‘lgan talab Q_1 ortadi. Bu holat, ya’ni ular bir-birining o‘rnini bosuvchi mahsulotlar ekanligi $c_1>0$ tengsizlik bajarilishi bilan xarakterlanadi. Agar mahsulotlar bir-birini to‘ldiruvchi mahsulotlar bo‘lsa, u holda mahsulot narxining oshishi unga bo‘lgan talabning kamayishiga olib keladi. Bu holat esa $c_1<0$ tengsizlik bajarilishi bilan xarakterlanadi. Xuddi shunday usulda a_2, b_2, c_2 parametrlarning ham ishoralari aniqlanadi.

15-misol. Ikki mahsulot uchun talab va taklif funksiyalari quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= 10 - 2P_1 + P_2, \\
Q_{12} &= 5 + 2P_1 - 2P_2, \\
Q_{21} &= -3 + 2P_1, \\
Q_{22} &= -2 + 3P_2.
\end{aligned}
$$

Bu ikki mahsulotni ishlab chiqarish miqdori va narxi uchun muvozanat nuqtasini aniqlang. Bu yerda $Q_{11} = Q_{21}, Q_{12} = Q_{22}$.

Yechish. $Q_{11} = Q_{21} = Q_1, Q_{12} = Q_{22} = Q_2$ belgilashlar kiritib tenglamalarni quyidagicha yozib olamiz:

$$
\left.\begin{aligned}
Q_1 &= 10 - 2P_1 + P_2, \\
Q_2 &= 5 + 2P_1 - 2P_2, \\
Q_1 &= -3 + 2P_1, \\
Q_2 &= -2 + 3P_2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\left.\begin{aligned}
10 - 2P_1 + P_2 &= -3 + 2P_1, \\
5 + 2P_1 - 2P_2 &= -2 + 3P_2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\left.\begin{aligned}
-4P_1 + P_2 &= -13, \\
2P_1 - 5P_2 &= -7
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow P_1 = 4,\ P_2 = 3, Q_1 = 5, Q_2 = 7.
$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
2. To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va geometrik izohlang.
3. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasini yozing va koeffisiyentlarining geometrik ma’nosini izohlang.
4. To‘g‘ri chiziqning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasini yozing.
5. Koordinatalar tekisligida to‘g‘ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasini yozing va izohlang.
6. To‘g‘ri chiziqning normal ko‘rinishdagi tenglamasi, deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
7. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o‘tuvchi va burchak koeffisiyenti ma’lum bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
8. Fazoda kiritilgan to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislik vaziyati qanday aniqlanadi?
9. Tekislikning normal shakldagi tenglamasini yozing.
10. Tekislikning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
11. Tekislik umumiy tenglamasining mumkin bo‘lgan barcha xususiy hollarini sharhlab bering?
12. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi va nima uchun?

13. Fazoda bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasining qanday shakllarini bilasiz?
14. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing.
15. Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan tekislikgacha bo‘lgan masofani hisoblash formulasini yozing.
16. Fazoda kiritilgan to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan to‘g‘ri chiziq qanday aniqlanadi?
17. Fazoda to‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasini yozing.

10-mavzu. Arifmetik vektor fazo. Chiziqli fazo

Reja:

1. Arifmetik vektorlar va ular ustida chiziqli amallar.
2. Arifmetik vektorlarning skalyar ko‘paytmasi. Vektor uzunligi.
3. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Uchburchak tengsizligi.
4. Arifmetik vektorlar orasidagi burchak.
5. Chiziqli fazo va unga misollar.
6. Elementlarning chiziqli kombinatsiyasi.
7. Chiziqli fazoning o‘lchovi va bazisi.
8. Chiziqli fazo elementlarining bazis vektorlari bo‘yicha yoyilmasi, elementlarining bazisdagi koordinatalari.
9. Chiziqli qism fazo va unga misollar.
10. Yevklid fazosi va unga misollar.

Tayanch so‘z va iboralar: arifmetik vekto fazo, arifmetik vektor, nol vektor, vektorlar ustida chiziqli amallar, vektorlarning skalyar ko‘paytmasi, arifmetik vektor uzunligi, arifmetik vektorlar orasidagi burchak, uchburchak tengsizligi, Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. chiziqli fazo, elementlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli kombinatsiya koeffisiyentlari, chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli elementlar, chiziqli fazo bazisi, chiziqli fazo o‘lchami, qism fazo, Yevklid fazosi.

Bizga ma’lumki, yo‘nalgan kesmalar vektorlar, deb atalib, ular $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,... ko‘rinishda belgilangan va bu vektorlar ustida amallar aniqlangan. Yuqoridagi aniqlangan vektor tushunchasidan tekislikda va R^3 fazoda foydalanish mumkin. Biz bu paragrafda umumiyroq vektor, ya’ni n o‘lchovli arifmetik vektor tushunchasini kiritib, vektorlar ustida bajariladigan amallarni aniqlaymiz va bu amallar yordamida arifmetik vektor fazo tushunchasini kiritamiz.

1-ta'rif. n ta sonning tartiblangan tizimiga n o'lchovli vektor deyiladi.

Vektorlarni lotin alifbosining bosh harflari bilan $A, B, ..., X, Y, ...$ ko'rinishda belgilaymiz va quyidagi bir ustundan iborat matrisa ko'rinishida yozamiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Izoh. 1. Amaliyotda $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ shakldagi satr matrisa vektorlardan ham foydalaniladi.
2. Ba'zida vektorlar matrisalardan farq qilishi uchun lotin alifbosining kichik harflari bilan ham belgilanishi mumkin.
3. Elementar geometriya kurslarida ikki va uch o'lchovli geometrik vektorlar o'rganilgan. Bu mavzuda o'rganiladigan vektorlar bu vektorlarning umumlashmasidan iboratdir.

n o'lchovli vektorlar ustida qo'shish va songa ko'paytirish amallari xuddi matrisalardagi kabi aniqlanadi.
1) X va Y vektorlarning yig'indisi, deb shunday bir $C = X + Y$ vektorga aytiladiki, bu vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$C = X + Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix};$$

2) X vektorning λ songa ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Aniqlanishiga ko'ra ikkita n o'lchovli vektorlar yig'indisi, shuningdek, vektorni songa ko'paytirish natijasida yana n o'lchovli vektor hosil bo'ladi, ya'ni n o'lchovli vektorlar to'plami kiritilgan bu amallarga nisbatan yopiq to'plam bo'ladi. Ya'ni, bu amallar natijasida yana n o'lchovli vektor hosil bo'ladi.
1-misol. Quyidagi vektorlar yig'indisini va $5A$ ni toping:

$$A=\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1\\5\\6\\7\end{pmatrix}.$$

Yechish.

$$A+B=\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\10\\9\\3\end{pmatrix};\qquad 5A=\begin{pmatrix}2\\5\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\25\\15\\-20\end{pmatrix}.$$

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega:

1) $X+Y=Y+X$;

2) $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$;

3) $X+\Theta=X$, bunda $\Theta=(0,0,...,0)^T$;

4) $X+(-X)=\Theta$;

5) $1\cdot X=X$;

6) $(\alpha+\beta)X=\alpha X+\beta X$, bunda α va β ixtiyoriy sonlar;

7) $\alpha(X+Y)=\alpha X+\alpha Y$;

8) $\alpha(\beta X)=(\alpha\beta)X$.

bu yerda, X,Y va Z n o‘lchovli vektorlar.

2-ta’rif. Barcha n o‘lchovli vektorlar to‘plami yuqorida kiritilgan chiziqli amallar bilan birgalikda n o‘lchovli arifmetik vektor fazo deyiladi.

Agar vektorlarning komponentlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lsa bu arifmetik vektor fazoga haqiqiy arifmetik vektor fazo deyiladi, agar vektorlarning komponentlari kompleks sonlardan iborat bo‘lsa bu arifmetik vektor fazoga kompleks arifmetik vektor fazo deyiladi.

Haqiqiy arifmetik vektor fazo R^n, kompleks arifmetik vektor fazo esa C^n bilan belgilanadi.

Biz faqat haqiqiy arifmetik vektor fazo bilan ish ko‘ramiz va uni oddiy qilib arifmetik fazo deb ataymiz hamda R^n kabi belgilaymiz.

Izoh. Vektor tushunchasining umumlashtirilishi vektor komponentlarini turlicha talqin qilishga imkon beradi.

2-misol. Korxona o‘zining ishlab chiqarish jarayonida n turdagi xom ashyodan foydalanib m xildagi mahsulot ishlab chiqarsin. Korxonaning bir sutkada xom ashyoga bo‘lgan ehtiyojini va bir sutkada ishlab chiqargan mahsulotlarini ifodalovchi vektorlarni yozing.

Yechish. Agar x_k kattalik $k-$xom ashyoga bo‘lgan korxonaning bir sutkalik ehtiyojini, y_i kattalik esa bir sutkada ishlab chiqarilgan $i-$mahsulot miqdorini bildirsa, u holda quyidagi $X=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ va $Y=(y_1,y_2,...,y_m)^T$ vektorlar mos ravishda korxonaning barcha xom ashyoga bo‘lgan bir sutkalik ehtiyojini va bir kunda, ishlab chiqarilgan mahsulotning turlari miqdorini bildiradi.

3-misol. Ikkita korxona bir xil 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Korxonalarning har bir mahsulotdan bir sutkada qanchadan ishlab chiqarishi quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	**1**	**2**	**3**	**4**
1-korxona	24	36	50	80
2-korxona	30	25	20	10

Birinchi korxona bir oyda 22 kun, ikkinchi korxona esa 20 kun ishlaydi. Bir oyda ikkala korxona har bir turdagi mahsulotlardan birgalikda qancha miqdorda ishlab chiqaradi.

Yechish. Korxonalarning bir sutkada ishlab chiqargan mahsulotlari vektorlarini quyidagicha yozamiz:

$$A=\begin{pmatrix}24\\36\\50\\80\end{pmatrix} \quad va \quad B=\begin{pmatrix}30\\25\\20\\10\end{pmatrix}.$$

U holda ikkala korxonaning birgalikdagi bir oyda ishlab chiqarish vektori quyidagicha topiladi:

$$22A+20B=22\begin{pmatrix}24\\36\\50\\80\end{pmatrix}+20\begin{pmatrix}30\\25\\20\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}528\\792\\1100\\1760\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}600\\500\\400\\200\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1128\\1292\\1500\\1960\end{pmatrix}.$$

3-ta’rif. Ikkita bir xil o‘lchovli

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \quad va \quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb shu vektorlar mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng songa aytiladi va

$$(X,Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

shaklda yoziladi.

Skalyar ko‘paytmani matrisalar ko‘paytmasi shaklida quyidagicha ifodalashimiz mumkin:

$$(X,Y) = X^T Y = Y^T X .$$

4-misol. Quyidagi vektorlarning skalyar ko‘paytmasini toping:

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $(X,Y) = X^T Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} =$

$$= 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + (-4) \cdot 7 = -2 + 25 + 18 - 28 = 13.$$

5-misol. Korxona 5 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Korxonaning bir sutkada har bir turdagi mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarganligi va har bir mahsulotning bir birligining narxi quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Korxonaning bir sutkada i/ch.mahsuloti miqdori	23	54	26	46	68
Bir birlik mahsulot narxi(sh.p.b)	32	56	36	65	35

Korxonaning bir sutkalik daromadi qancha bo‘ladi?

Yechish. Agar korxonaning ishlab chiqarish vektorini X va narx vektorini P bilan belgilasak, u holda

$$X = \begin{pmatrix} 23 \\ 54 \\ 26 \\ 46 \\ 68 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 32 \\ 56 \\ 36 \\ 65 \\ 35 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi. Korxonaning bir sutkalik daromadini topish uchun bu vektorlarni skalyar ko‘paytiramiz:

$$(X,P)=X^TP=\begin{pmatrix}23 & 54 & 26 & 46 & 68\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32\\56\\36\\65\\35\end{pmatrix}=10066.$$

Skalyar ko‘paytma quyidagi xossalarga ega:

1) $(X,X)\geq 0$; 2) $(X,X)=0 \Leftrightarrow X=O$;

3) $(X,Y)=(Y,X)$; 4) $(X,Y+Z)=(X,Y)+(X,Z)$;

5) $(\lambda X,Y)=\lambda(X,Y)$.

bu yerda X,Y, Z n o‘lchovli vektorlar va λ ixtiyoriy son.

4-ta’rif. Vektor komponentlari kvadratlari yig‘indisining kvadrat ildiziga teng bo‘lgan $|X|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ songa n o‘lchovli X vektor uzunligi (moduli, normasi) deyiladi.

Vektor uzunligi quyidagi xossalarga ega:

1) $|X|\geq 0$; 2) $|\lambda X|=|\lambda|\cdot|X|$;

3) $|X+Y|\leq|X|+|Y|$ (uchburchak tengsizligi)

bu yerda, X,Y, Z n o‘lchovli vektorlar va λ ixtiyoriy son.

6-misol. Quyidagi vektorlarning uzunliklarini toping:

$$1)\ A=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix};\quad 2)\,B=\begin{pmatrix}2\\5\\-2\\3\end{pmatrix};\quad 3)\,C=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-4\\-3\end{pmatrix}.$$

Yechish. 1) $|A|=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

$$2)\,|B|=\sqrt{2^2+5^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+25+4+9}=\sqrt{42}$$

$$3)\ |C|=\sqrt{1^2+2^2+3^2+(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9+16+9}=\sqrt{39}.$$

5-ta’rif. Agar ikkita noldan farqli vektorlarning skalyar ko‘paytmasi nolga teng bo‘lsa, u holda bunday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.

7-misol. a parametrning qanday qiymatida quyidagi vektorlar ortogonal bo‘ladi:

$$X=\begin{pmatrix}3\\0\\a\\-1\end{pmatrix} \quad va \quad Y=\begin{pmatrix}-2\\5\\6\\0\end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu vektorlarning skalyar ko‘paytmasini hisoblaymiz

$$(X,Y)=3\cdot(-2)+0\cdot 5+a\cdot 6+(-1)\cdot 0=6a-6.$$

Masala shartiga ko‘ra, $6a-6=0,\ a=1$.

R^n arifmetik fazoda kiritilgan skalyar ko‘paytma xossalaridan foydalanib quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. R^n arifmetik fazodan olingan ixtiyoriy X va Y vektorlar uchun

$$|(X,Y)|\le|X|\cdot|Y| \quad yoki \quad \left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

Isbot. Ixtiyoriy $\lambda\in R$ uchun

$$0\le(X+\lambda Y,X+\lambda Y)=(X,X)+2\lambda(X,Y)+\lambda^2(Y,Y)$$

Ixtiyoriy $\lambda\in R$ ga nisbatan hosil bo‘lgan bu kvadrat uchhad nomanfiyligidan bu kvadrat uchhadning diskriminanti manfiy bo‘lmasligini bilamiz. Bundan

$$4(X,Y)^2-4(X,X)(Y,Y)\le 0 \text{ yoki } |(X,Y)|\le|X|\cdot|Y|.$$

Bu teorema asosida R^n arifmetik fazo vektorlari orasidagi burchak tushunchasini kiritamiz.

6-ta’rif. Ikkita n o‘lchovli noldan farqli X va Y vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{(X,Y)}{|X|\cdot|Y\cdot|}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}},\quad \varphi\in[0;\pi]$$

formula bilan aniqlanadi.

R^n arifmetik fazodagi n o‘lchovli vektorlar orasidagi burchak ta’rifining korrektligi yuqorida isbotlangan Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi.

8-misol. $X(3;-4;2;5)$ va $Y(-1;3;-7;2)$ vektorlar berilgan:

$a)$ $3X+2Y$ vektorni toping;

$b)$ (X,Y) skalyar ko‘paytmani toping;

$c)$ X va Y vektorlar orasidagi burchakni toping;

$d)$ Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini tekshiring.

Yechish. $a)$ $$3X+2Y=3\begin{pmatrix}3\\-4\\2\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\3\\-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-6\\-8\\19\end{pmatrix}.$$

$$b)\ (X,Y)=-3-12-14+10=-19.$$

$$c)\ |X|=\sqrt{9+16+4+25}=\sqrt{54};\quad |Y|=\sqrt{1+9+49+4}=\sqrt{63}.$$

$$\cos\varphi=\frac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}};\quad \varphi=\arccos\left(\frac{-19}{\sqrt{54}\sqrt{63}}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{19}{9\sqrt{42}}\right).$$

$$d)\ |-19|<\sqrt{54}\cdot\sqrt{63}\qquad 19<9\sqrt{42}\qquad 9\sqrt{42}\approx 58{,}33.$$

Elementar matematika, analitik geometriya, algebra va matematik analiz kurslarida turli tabiatli elementlar to‘plamlarini uchratish mumkin. Bular haqiqiy va kompleks sonlar to‘plamlari; to‘gri chiziqdagi, tekislikdagi va fazodagi vektorlar to‘plamlari; oldingi mavzularda biz tanishgan n o‘lchovli vektorlar to‘plamlari; bizga tanish bo‘lgan matrisalar to‘plamlari; biror $[a,\ \ b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz funksiyalar to‘plamlari va hakozo. Bu to‘plamlar turli tabiatli bo‘lsada, bu to‘plamlarning har birining elementlari orasida ularni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallarini kiritish mumkin va bu to‘plamlar turli tabiatli bo‘lishiga qaramasdan ular ustida kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari juda ko‘p umumiy xossalarga ega bo‘ladi. Biz quyida to‘plam elementlarining tabiatini hisobga olmasdan bu to‘plamlar uchun umumiy bo‘lgan nazariya bilan tanishamiz. Bu ob’ektlardan biri chiziqli fazo bo‘lib, iqtisodiy masalalarni yechishda juda muhim ahamiyatga ega.

7-ta’rif. Agar elementlari ixtiyoriy tabiatli bo‘lgan L to‘plam berilgan va bu toplam elementlari orasida qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari kiritilgan, ya’ni
1) ixtiyoriy $x\in L$ va $y\in L$ elementlar juftiga x va y elementlarning yig‘indisi, deb ataluvchi yagona $z=x+y\in L$ element mos qo‘yilgan;
2) $x\in L$ element va $\lambda\in K$ (K-haqiqiy yoki kompleks sonlar to‘plami) songa x vektorning λ songa ko‘paytmasi deb ataluvchi yagona $z=\lambda x\in L$ element mos qo‘yilgan bo‘lib, aniqlangan bu qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagi 8 ta aksiomani bajarsa, u holda L to‘plam chiziqli (yoki vektor) fazo deyiladi:
1. Qo‘shish kommutativ, $x+y=y+x$;
2. Qo‘shish assotsiativ, $(x+y)+z=x+(y+x)$;

3. L to‘plamda barcha x elementlar uchun $x+\theta=x$ shartni qanoatlantiradigan nol element θ mavjud;
4. L to‘plamda har qanday x element uchun $x+(-x)=\theta$ shartni qanoatlantiradigan $-x$ qarama-qarshi element mavjud;
5. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;
6. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
7. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
8. $1\cdot x=x$.

Bundan keyin biz chiziqli fazo elementlarini vektorlar deb aytamiz. Agar chiziqli fazodagi vektorlar uchun kompleks songa ko‘paytirish amali aniqlangan bo‘lsa, u holda bunday fazoga kompleks chiziqli fazo deyiladi. Agar chiziqli fazodagi vektorlar uchun faqat haqiqiy songa ko‘paytirish amali aniqlangan bo‘lsa, u holda bunday fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi.

Chiziqli fazoni aniqlovchi aksiomalardan, quyidagi xossalarni ajratish mumkin:
1) Har qanday chiziqli fazo uchun yagona θ-nol vektor mavjud.
2) Har qanday chiziqli fazoda har bir x vektor uchun unga qarama-qarshi bo‘lgan yagona $(-x)$ vektor mavjud.
3) Har qanday chiziqli fazoda har bir vektor uchun $0\cdot x=0$ tenglik o‘rinli.

Izoh. $y-x$ vektorlar ayirmasi deb, y va $-x$ vektorlar yig‘indisi tushuniladi.

Yuqoridagi aniqlashimizga ko‘ra chiziqli fazo elementlari turli tabiatli bo‘lishi mumkin. Quyida biz chiziqli fazolarni aniq misollarda ko‘rib chiqamiz.

Misollar. 1. Barcha haqiqiy sonlar to‘plami - haqiqiy sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.
2. Barcha kompleks sonlar to‘plami kompleks sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.
3. Oldingi mavzularda ko‘rgan R^n $(n=1,2,3,...,k)$ fazolar vektorlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.
4. Elementlari $n\times m$-tartibli matrisalardan iborat bo‘lgan $M^{n\times m}$ matrisalar to‘plami matrisalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.
5. $C[a,b]-[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz barcha haqiqiy $f\equiv f(t)$ funksiyalar to‘plami funksiyalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish $(f+g)t\equiv f(t)+g(t),\ \ \lambda f(t)$ amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.
6. Darajasi n dan yuqori bo‘lmagan barcha ko‘phadlar to‘plami ko‘phadlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladi.

7. Darajasi roppa-rosa n ga teng bo‘lgan barcha ko‘phadlar to‘plami ko‘phadlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qilmaydi. Haqiqatan ham

$$P \equiv P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

va $Q \equiv Q_n(t) = a_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$ $n-$ darajali ko‘phad lekin $P_n(x) - Q_n(x)$ ko‘phadning darajasi n dan kichik.

Chiziqli fazoda elementlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli bog‘liqligi va erkliligi vektorlarga o‘xshab kiritiladi.

8-ta’rif. L chiziqli fazodan olingan $x_1, x_2, ..., x_n$ elementlar va $\lambda_i \in R, (i = 1...n)$ sonlar yordamida qurilgan $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n$ ifodaga $x_1, x_2, ..., x_n$- elementlarning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi.

9-ta’rif. Agar $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda y element $x_1, x_2, ..., x_n$ elementlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.

10-ta’rif. Agar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ koeffisiyentlardan hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lganda

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $x_1, x_2, ..., x_n$ elementlar chiziqli bog‘liq deyiladi.

Agar

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta$$

tenglik $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ koeffisiyentlardan barchasi nolga teng bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lsa, u holda $x_1, x_2, ..., x_n$ – elementlar chiziqli erkli deyiladi. Bu yerda, θ – chiziqli fazoning nol elementi.

11-ta’rif. Agar L chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli elementlar mavjud bo‘lib, har qanday $n+1$ ta element chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda L chiziqli fazoning o‘lchovi n ga teng deyiladi.

12-ta’rif. n o‘lchovli L chiziqli fazoda har qanday n ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi bu fazoning bazisi deyiladi.

Odatda bazis vektorlar sistemasi $e_1, e_2, ..., e_n$ kabi belgilanadi.

Masalan, darajasi n dan oshmaydigan barcha ko‘phadlar to‘plami chekli o‘lchovli, ya’ni $(n+1)$ o‘lchovli chiziqli fazo tashkil qiladi. Bu fazoning bazisini $\{\ 1, t, t^2, ..., t^n\ \}$ vektorlar sistemasi tashkil qiladi.

9-misol. Barcha ikkinchi tartibli matrisalarning chiziqli fazosini qaraymiz

$$M^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \ a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R \right\}$$

Bu chiziqli fazoning bazisi va o‘lchamini toping.

Yechish. Bu fazoning bazislaridan biri sifatida quyidagi matrisalar sistemasini olish mumkin.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\;\; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\;\; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\;\; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chunki ixtiyoriy 2-tartibli matrisani bu matrisalarning chiziqli kombinatsiyasi orqali quyidagicha yozish mumkin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisalar sistemasining chiziqli erkliligini ko‘rsatamiz. Buning uchun quyidagi tenglikni qaraymiz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu tenglik faqat va faqat $a_{11} = 0,\; a_{12} = 0,\; a_{21} = 0,\; a_{22} = 0$ bajarilsagina o‘rinli bo‘lgani uchun $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisalar sistemasi M^2 fazoning bazisi hisoblanadi. Bundan M^2 fazoning o‘lchovi 4 ga tengligi ham kelib chiqadi.

Teorema. n o‘lchovli L chiziqli fazoning har bir elementi bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida bir qiymatli yoziladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\{\, e_1, e_2, ..., e_n \,\}$-elementlar sistemasi L fazoning bazisi va $x \in L$ ixtiyoriy element bo‘lsin. U holda $\{\, e_1, e_2, ..., e_n, x \,\}$ elementlar sistemasi L fazoda chiziqli bog‘liq bo‘ladi. U holda barchasi bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan $\{\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \lambda \,\}$ sonlar ketma-ketligi mavjudki,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda x = \theta \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $\lambda \neq 0$ bo‘ladi, aks holda $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta$ tenglikda $\{\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \,\}$ sonlarning hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak, ammo bu $\{\, e_1, e_2, ..., e_n \,\}$ elementlar sistemasining bazisligiga ziddir. Chunki $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \theta \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. (1) tenglikdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x=-\frac{\lambda_1}{\lambda}e_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}e_2+...+\frac{\lambda_n}{\lambda}e_n$$

yoki $\mu_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda}(i=1,2,...,n)$ belgilashdan,

$$x=\mu_1 e_1+\mu_2 e_2+...+\mu_n e_n, \qquad (2)$$

ya'ni L fazoning ixtiyoriy elementi bazis elementlarining kombinatsiyasi, ko'rinishida ifodalanadi.

Endi (2) yoyilma bir qiymatli yo'zilishini isbotlaymiz. Faraz qilaylik bu x elementni boshqa ko'rinishda ham ifodalash mumkin bo'lsin:

$$x=\gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2+...+\gamma_n e_n \qquad (3)$$

(2) va (3) ifodalarni hadma-had ayirib quyidagini hosil qilamiz

$$(\mu_1-\gamma_1)e_1+(\mu_2-\gamma_2)e_2+...+(\mu_n-\gamma_n)e_n=\theta.$$

Bu tenglikdan va $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ elementlar sistemasining bazisligidan $\mu_1-\gamma_1=\mu_2-\gamma_2=...=\mu_n-\gamma_n=0$ yani $\mu_1=\gamma_1,\mu_2=\gamma_2,...,\mu_n=\gamma_n$. Demak (2) yo'yilma yagona bo'ladi.

13-ta'rif. (2) tenglik $x\in L$ elementning $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazis vektorlari bo'yicha yoyilmasi deyiladi, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ sonlarga esa x elementning bu bazis vektorlar bo'yicha koordinatalari deyiladi.

Chiziqli fazo elementlari uchun chiziqli bog'liqlik va erklilik tushunchalariga misollar ko'ramiz.

10-misol. $C[a,b]$ fazoda $x_1=e^t$ va $x_2=3e^t$ funksiyalar chiziqli bog'liq bo'ladimi?

Yechish. Bu vektorlarning quyidagicha chiziqli kombinatsiyasini tuzamiz va uni nolga tenglaymiz

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2=0\Rightarrow \lambda_1 e^t+3\lambda_2 e^t=0,\ 3\lambda_1-\lambda_2=0.$$

Demak, bu funksiyalar chiziqli bog'liq.

Xuddi shunga o'xshab ko'rsatish mumkinki $C[a,b]$ fazoda $y_1=sin^2 t$, $y_2=cos^2 t$, $y_3=\frac{1}{2}$ funksiyalar ham chiziqli bog'liq bo'ladi. Chunki

$$y_1+y_2-2y_3\equiv 0.$$

14-ta'rif. Agar chiziqli fazo cheksiz sondagi chiziqli erkli vektorlar sistemasiga ega bo'lsa, u holda bunday chiziqli fazoga cheksiz o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.

Yuqorida ko‘rilgan $C[a,b]$ fazo cheksiz o‘lchovli chiziqli fazo bo‘ladi, chunki $\{\ 1, t, t^2,...,t^n...\ \}$ funksiyalar barcha $n \in N$ lar uchun chiziqli erkli bo‘ladi.

15-ta’rif. L chiziqli fazoning V qism to‘plamining o‘zi ham L da aniqlangan elementlarni qo‘shish va elementlarni songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo bo‘lsa, u holda V fazo L fazoning chiziqli qism fazosi deyiladi.

Teorema. L fazoning bo‘sh bo‘lmagan V qism to‘plami uning chiziqli qism fazosi bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi yetarli:

1. Agar x va y vektorlar V ga tegishli bo‘lsa, u holda $x+y$ vektor ham V ga tegishli bo‘lishi;
2. Agar x vektor V ga tegishli bo‘lsa, u holda αx vektor ham α sonning istalgan qiymatida V ga tegishli bo‘lishi.

11-misol. Barcha n-tartibli kvadrat matrisalar chiziqli fazosini qaraymiz. Bu fazo uchun barcha n-tartibli diagonal matrisalar fazosi chiziqli qism fazo bo‘ladimi?

Yechish. Ixtiyoriy

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ,,, & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisalarni qaraymiz. Ma’lumki bunda

$$D_1 + D_2 = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

ya’ni ikkita diagonal matrisaning yig‘indisi yana diagonal matrisa bo‘ladi.
Endi diagonal matrisaning λ songa ko‘paytmasini tekshiramiz:

$$\lambda D_1 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ,,, & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

ya’ni diagonal matrisani λ songa ko‘paytirsak yana diagonal matrisa hosil bo‘ladi. Bundan tashqari bizga ma’lumki, n-tartibli matrisalar uchun chiziqli fazo uchun o‘rinli bo‘lgan yuqoridagi 8 ta aksioma bajariladi. Demak, n-tartibli diagonal matrisalar fazosi n-tartibli matrisalar fazosining qism fazosi bo‘lganligi sababli yuqoridagi teoremaga asosan barcha n-tartibli diagonal matrisalar to‘plami chiziqli qism fazo tashkil qiladi.

Mashqni bajaring. Barcha n-tartibli kvadrat matrisalar fazosini va barcha n-tartibli simmetrik matrisalar to‘plamini qaraymiz. Agar barcha n-tartibli simmetrik matrisalar to‘plami barcha n-tartibli kvadrat matrisalar fazosining chiziqli qism fazosi bo‘lsa, chiziqli qism fazoning o‘lchovini toping.

16-ta’rif. n o‘lchovli haqiqiy L chiziqli fazoning har bir x va y vektorlar juftligi uchun mos ravishda skalyar ko‘paytma, deb ataluvchi (x, y) haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lib, quyidagi shartlar bajarilsa, L chiziqli fazoda skalyar ko‘paytma aniqlangan, deyiladi:

1) $(x, x) \geq 0$, ixtiyoriy $x \in L$ uchun $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$; 2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; 4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

17-ta’rif. Agar n o‘lchovli haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko‘paytma aniqlangan bo‘lsa, bu fazo n o‘lchovli Yevklid fazosi deyiladi va E^n ko‘rinishda belgilanadi.

Har qanday n o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazoda skalyar ko‘paytmani aniqlash orqali uni Yevklid fazosiga aylantirish mumkin.

12-misol. Korxona jadvalda ko‘rsatilgan miqdorda 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi.

Mahsulot turlari	**B$_1$**	**B$_2$**	**B$_3$**	**B$_4$**
Mahsulot miqdori (birlik)	50	80	20	120
Bir birlik mahsulot uchun xom ashyo sarfi	7	3,5	10	4
Mahsulot hajmining o‘zgarishi	+5	-4	-2	+10

Mahsulot ishlab chiqarish uchun sarflanadigan umumiy xom ashyo miqdori va mahsulot hajmining o‘zgarishidagi uning o‘zgarishini toping.

Yechish. Umumiy xom ashyo miqdori S $x = (50;80;20;120)$ va $y = (7;3{,}5;10;4)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi bo‘ladi:

$$S = (x, y) = 50 \cdot 7 + 80 \cdot 3{,}5 + 20 \cdot 10 + 120 \cdot 4 = 1310\,(kg)$$

Skalyar ko‘paytmaning xossasidan, umumiy xom ashyo miqdorining o‘zgarishini topamiz.

$$\Delta S = (x + \Delta x, y) - (x, y) = (\Delta x, y) = +5 \cdot 7 - 4 \cdot 3{,}5 - 2 \cdot 10 + 10 \cdot 4 = 41\,(kg).$$

Yevklid fazosida x vektorning uzunligi (normasi) deb uning skalyar kvadratidan olingan kvadrat ildizga aytiladi:

$$|x| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

Vektorning uzunligi uchun quyidagi xossalar o‘rinlidir:

1. $|x| = 0$ bo‘ladi faqat va faqat $x = 0$ bo‘lsagina;
2. $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$, bunda $\lambda \in R$;
3. $|(x, y)| \le |x| \cdot |y|$ (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi);
4. $|x + y| \le |x| + |y|$ (uchburchak tengsizligi).

Noldan farqli vektorlardan tashkil topgan vektorlar sistemasidagi vektorlarning har qanday ikki jufti o‘zaro ortogonal bo‘lsa, u holda sistema ortogonal vektorlar sistemasi deb ataladi.

Teng o‘lchovli $a_1, a_2, ..., a_k$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi ustida ortogonal vektorlar sistemasini qurish, ya’ni uni $b_1, b_2, ..., b_k$ ortogonal vektorlar sistemasi bilan almashtirish mumkin. Buning uchun Shmidt formulalaridan foydalanamiz:

1) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, deb olib keyingi qadamda

$$2)\boldsymbol{b}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{a}_t - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{(\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a}_t)}{(\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i)} \boldsymbol{b}_i, \ \ t = 2, 3, ..., k$$

Masalan, $\vec{a}_1(1, 1, 1)$, $\vec{a}_2(0, 1, 1)$, $\vec{a}_3(0, 0, 1)$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal vektorlar sistemasini quramiz.

Birinchi navbatda $\vec{a}_1(1, 1, 1)$, $\vec{a}_2(0, 1, 1)$, $\vec{a}_3(0, 0, 1)$ vektorlar sistemasining rangini aniqlab olamiz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$rang(\vec{a}_1, \ \vec{a}_2, \ \vec{a}_3) = 3$ bo‘lganligi sababli bu sistemadagi vektorlar chiziqli erkli. Sistemani ortogonal sistemaga aylantirish uchun Shmidt formulasidan foydalanamiz:

1) $\vec{b}_1 = \vec{a}_1(1, 1, 1)$;

$$2)\ \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{a}_2)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)}\vec{b}_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);$$

$$3)\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{(\vec{b}_1, \vec{a}_3)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)}\vec{b}_1 - \frac{(\vec{b}_2\, \vec{a}_3)}{(\vec{b}_2\, \vec{b}_2)}\vec{b}_2 = \left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirish uchun $\vec{c}_1=\vec{b}_1\,(1,1,1)$; $\vec{b}_2=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ ni unga kollinear bo‘lgan $\vec{c}_2(-2,1,1)=\frac{1}{3}\vec{b}_2$ bilan; $\vec{b}_3=\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ni esa unga kollinear bo‘lgan $\vec{c}_3(0,-1,1)=\frac{1}{2}\vec{b}_3$ bilan almashtirib va $\vec{c}_1=\vec{b}_1\,(1,1,1)$ belgilash kiritib: $\vec{c}_1(1,1,1)$, $\vec{c}_2(-2,1,1)$, $\vec{c}_3(0,-1,1)$ ortogonal vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

Nol bo‘lmagan b vektorning birlik vektori, deb $\frac{b}{|b|}$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori birlik vektorga keltirilgan ortoganal sistemaga ortonormal vektorlar sistemasi deyiladi.

Yuqoridagi misolda topilgan ortogonal $\vec{c}_1(1,1,1)$, $\vec{c}_2(-2,1,1)$, $\vec{c}_3(0,-1,1)$ vektorlar sistemasini ortonormal vektorlar sistemasiga keltiramiz.

$$\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1,1,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}=\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}(-2,1,1)=\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}=\frac{1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}(0,-1,1)=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

n o‘lchovli Yevklid fazosida $e_1,e_2,...,e_n$ vektorlar $i\neq j$ da $(e_i,e_j)=0$ bo‘lsa ortogonal bazis, $i=1,2,...,n$ da $|e_i|=1$ bo‘lsa ortonormallangan bazis tashkil qiladi.

Mashqlarni bajaring. 1) Tekislikda boshi koordinatalar boshida uchi I chorakda bo‘lgan vektorlar to‘plami vektorlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladimi?

2) Tekislikda birorta vektorga parallel bo‘lgan vektorlar to‘plami vektorlarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallariga nisbatan chiziqli fazo tashkil qiladimi?

3) R_+^1 $-$barcha musbat haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamda quyidagicha amal kiritamiz: ikki son yig‘ndisi sifatida ularning oddiy ko‘paytmasini, $r\in R_+^1$ ning λ songa ko‘paytmasi sifatida esa r^λ ni tushunamiz. Bu kiritilgan amallarga nisbatan R_+^1 chiziqli fazo tashkil qiladimi?

4) $P(t)=5-2(t+1)+3(t+1)^2+(t+1)^3$ ko‘phadning quyidagi bazisga nisbatan koordinatalarini toping.

a) $e_1 = 1, e_1 = t, e_1 = t^2, \ e_1 = t^3$; b) $e_1 = 1, e_2 = t+1, e_3 = (t+1)^2, \ e_4 = (t+1)^3$.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. n-o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazo deganda nimani tushunasiz?
2. Vektorlar ustida chiziqli amallar deganda qanday amallar tushuniladi?
3. Vektorlar ustida bajariladigan chiziqli amallar bo‘ysunadigan xossalarni sanab o‘ting?
4. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb nimaga aytiladi?
5. Arifmetik vektor uzunligi deb nimaga aytiladi?
6. Vektorlarning uzunligi bo‘ysunadigan qanday xossalarni bilasiz?
7. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi bo‘ysunadigan qanday xossalarni bilasiz?
8. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini yozing?
9. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
10. Ortogonal vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
11. Chiziqli fazo deb nimaga aytiladi?
12. Chiziqli fazoning qism osti fazosi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
13. Chiziqli fazoda elementlarning chiziqli kombinatsiyasi.
14. n-o‘lchovli chiziqli fazo deb qanday chiziqli fazoga aytiladi?
15. Chiziqli fazo o‘lchovi deb nimaga aytiladi?
16. n-o‘lchovli chiziqli fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
17. Chiziqli fazo elementlarining bazis vektorlari bo‘yicha yoyilmasi, elementlarining bazisdagi koordinatalari.
18. Har qanday $x \epsilon L^n$ vektorni fazoning bazisi orqali yoyish mumkinmi?
19. Vektorning biror-bir bazisdagi koordinatalari deb nimaga aytiladi?
20. Qanday chiziqli fazoga Yevklid fazo deyiladi?

11-mavzu. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

Reja:

1. Chiziqli operator tushunchasi.
2. Chiziqli operator matrisasi.
3. Chiziqli operatorlar ustida amallar.
4. O‘tish matrisasi.
5. Operatorning xos qiymatlari va xos vektorlari. Chiziqli operator matrisasini diagonal shaklga keltirish.

Tayanch so‘z va iboralar: Operator, chiziqli operator, operatorning matrisasi, operatorning rangi, nol operator, birlik operator, matrisaning xos vektori, matrisaning xos qiymati, xarakteristik tenglama, chiziqli operator matrisasining diagonal shakli.

Matrisalar algebrasining asosiy tushunchalaridan biri – chiziqli operatorlar tushunchasidir. Faraz qilaylik bizga $L,\ L_1$ chiziqli fazolar berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar biror $\tilde{A}$ qoida yoki qonun bo‘yicha har bir $x \in L$ elementga $y \in L_1$ element mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda L fazoni L_1 fazoga o‘tkazuvchi $\tilde{A}$ operator (almashtirish, akslantirish) aniqlangan deyiladi va $y = \tilde{A}(x)$ ko‘rinishda belgilanadi.

2-ta’rif. Agar ixtiyoriy $x, y \in L,\ \lambda \in R$ uchun:

1) $\tilde{A}(x+y) = \tilde{A}(x) + \tilde{A}(y)$ (operatorningadditivligi);

2) $\tilde{A}(\lambda x) = \lambda \tilde{A}(x)$ (operatorningbirjinsliligi) munosabatlaro‘rinlibo‘lsa, u holdabu operator chiziqli operator deyiladi.

1-misol. $\tilde{A}$operator $\tilde{A}: R^2 \to R^3$ almashtirishni amalga oshiradi. Agar bu operator almashtirishni $\tilde{A}(x,y) = (x, y, x+y),\ (x,y) \in R^2,\ (x, y, x+y) \in R^3$ formula yordamida amalga oshirsa, u holda bu operatorning chiziqli operator ekanligini ko‘rsating.

Yechish. Ma’lumki, $a_1 = (x_1, y_1)$ va $a_2 = (x_2, y_2)$ vektor uchun $a_1 + a_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. U holda $a_1 + a_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ elementga $\tilde{A}$ operatorni ta’sir ettirsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\tilde{A}(a_1 + a_2) = \tilde{A}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) =$$
$$= (x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) = \tilde{A}(a_1) + \tilde{A}(a_2).$$

Bu esa $\tilde{A}$ operatorning additivligini ko‘rsatadi.

Endi operatorning bir jinsli ekanligini tekshiramiz. Ma’lumki, $ka_1 = (kx_1, ky_1)$. U holda

$$\tilde{A}(ka_1) = \tilde{A}(kx_1, ky_1) = (kx_1, ky_1, kx_1 + ky_1) = k(x_1, y_1, x_1 + y_1) = k\tilde{A}(a_1).$$

Demak, biz o‘rganayotgan operator chiziqli operatordir.

Mashqlarni bajaring. 1) $T: R^2 \to R^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -3x_1 + 2x_2)$ operator berilgan. Bu operatorning chiziqli isbotlang.

2) $\tilde{A}(x_1, x_2, x_3) = (4x_2,\ x_1 - 2x_2 + x_3,\ 5x_1 - x_2 + 4x_3)$ operator berilgan. Bu operatorlarning chiziqli ekanligini isbotlang.

3) $\tilde{A}(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1-x_2)$, $\tilde{B}(x_1,x_2)=(x_1-x_2,x_1+x_2)$ operatorlar berilgan. Bu operatorlarning chiziqli ekanligini isbotlang.

$y=\tilde{A}(x)\in L_1$ element $x\in L$ elementning aksi, $x\in L$ elementning o‘zi esa $y\in L_1$ elementning proobrazi deyiladi. Agar $L=L_1$ bo‘lsa, u holda $\tilde{A}$ operator L fazoni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi operator bo‘ladi. Biz ko‘proq fazoni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi operatorlarni o‘rganamiz.

Teorema. Har bir $\tilde{A}:L^n\to L^n$ chiziqli operatorga berilgan bazisda n-tartibli matrisa mos keladi va aksincha har bir n-tartibli matrisaga n-o‘lchovli chiziqli fazoni, n-o‘lchovli chiziqli fazoga akslantiruvchi $\tilde{A}$ chiziqli operator mos keladi.

Isbot. Faraz qilaylik $\tilde{A}:L^n\to L^n$ chiziqli operator bo‘lsin. Agar $\{e_1,e_2,...,e_n\}\subseteq L^n$ vektorlar sistemasi L^n fazoning bazisi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $x\in L^n$ elementni bu bazis elementlari orqali yozish mumkin:

$$x=x_1e_1+...+x_ne_n. \tag{1}$$

Bu yerda biz $\tilde{A}$ operatorning chiziqliligidan foydalanib, $\tilde{A}(x)$ni quyidagicha yozaolamiz:

$$\tilde{A}(x)=\tilde{A}\left(x_1e_1+...+x_ne_n\right)=x_1\tilde{A}(e_1)+...+x_n\tilde{A}(e_n). \tag{2}$$

Bu yerda har bir $\tilde{A}(e_i)$ $(i=\overline{1,n})$ elementlar o‘z navbatida L^n fazoning elementlari bo‘lganligi sababli, bu elementlarni ham $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazis orqali yozish mumkin:

$$\tilde{A}(e_i)=a_{1i}e_1+...+a_{ni}e_n. \tag{3}$$

U holda (3) dan foydalanib (2) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned}&\tilde{A}(x)=x_1(a_{11}e_1+a_{21}e_2+...+a_{n1}e_n)+x_2(a_{12}e_1+a_{22}e_2+...+a_{n2}e_n)+...\\&+x_n(a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+...+a_{nn}e_n)=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n)e_1+\\&+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n)e_2+...+(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n)e_n\end{aligned} \tag{4}$$

Ikkinchi tomondan $y=\tilde{A}(x)$ element ham $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazis elementlari bo‘yicha quyidagi yoyilmaga ega:

$$y=\tilde{A}(x)=y_1e_1+y_2e_2+...+y_ne_n. \tag{5}$$

Vektorning bitta bazis bo‘yicha yoyilmasi yagonaligidan (4) va (5) tengliklarning o‘ng tomonlarini tenglashtirib, quyidagini olamiz.

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n\end{cases}$$

yoki matrisa ko‘rinishida $Y = AX$, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

3-ta’rif. $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1,2,...,n)$ matrisa $\widetilde{A}$ operatorning $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazisdagi matrisasi, $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1,2,...,n)$ matrisaning rangi esa $\widetilde{A}$ operatorning rangi deyiladi.

L fazoning barcha vektorlarini θ nol vektorga akslantiruvchi $\theta(x) = \theta$ operator nol operator, $\widetilde{E}(x) = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi operator birlik operatori deb ataladi.

2-misol. R^3 fazoda $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazisda chiziqli operator matrisasi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

berilganbo‘lsin. $x = 4e_1 - 3e_2 + e_3$ vektorning $y = \widetilde{A}(x)$ aksini toping.

Yechish. Yuqorida qayd qilingan formulaga ko‘ra

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Demak, $y = 10e_1 - 13e_2 - 18e_3$.

3-misol. $T : R^3 \to R^4$; $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$ operatorning matrisasini toping.

Yechish. $A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix}$ matrisaning har bir elementini topamiz:

$$T(e_1)=T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0\\1-0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad T(e_2)=T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1\\0-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$T(e_3)=T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0\\0-0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

U holda

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Mashqlarni bajaring. 1) R^4 fazoning $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ bazisida $\widetilde{A}$ chiziqli operator matrisasi

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&5&2&5\\3&4&7&0\\6&3&2&1\end{pmatrix}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. $x=3e_1-2e_2+e_3-2e_4$ vektorning aksini toping.

2) R^4 fazoning $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ bazisida $\widetilde{A}$ chiziqli operator matrisasi

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3&3\\0&5&2&5\\1&4&7&0\\1&3&2&1\end{pmatrix}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. $x=3e_1+4e_2+3e_3-e_4$ vektorning aksini toping.

Chiziqli operatorlar ustida bajariladigan amallar bilan tanishib chiqamiz. R^n chiziqli fazoda $\widetilde{A},\ \widetilde{B}$ chiziqli operatorlar berilgan bo‘lsin.

4-ta’rif. $\left(\widetilde{A}+\widetilde{B}\right)(x)=\widetilde{A}(x)+\widetilde{B}(x)$ tenglik bilan aniqlanadigan operatorni $\widetilde{A},\ \widetilde{B}$ operatorlarning yig‘indisi deb ataladi.

$\widetilde{A}+\widetilde{B}$ operator chiziqlidir. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x,y\in R^n$ vektorlar va $\alpha\in R$ son uchun:

1) $\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)(x+y)=\tilde{A}(x+y)+\tilde{B}(x+y)=$

$$=\tilde{A}(x)+\tilde{A}(y)+\tilde{B}(x)+\tilde{B}(y)=\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)(x)+\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)(y);$$

2) $\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)(\alpha x)=\tilde{A}(\alpha x)+\tilde{B}(\alpha x)=\alpha(\tilde{A}(x))+\alpha(\tilde{B}(x))=$

$$=\alpha(\tilde{A}(x)+\tilde{B}(x))=\alpha\left[(\tilde{A}+\tilde{B})(x)\right]$$

munosabatlar o‘rinli. Bu esa $\widetilde{A}+\widetilde{B}$ operator chiziqli ekanligini ko‘rsatadi.

5-ta’rif. $\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)(x)=\tilde{B}\left(\tilde{A}(x)\right)$ tenglik bilan aniqlanadigan, ya’ni $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ operatorlarni ketma-ket bajarishdan hosil bo‘lgan $\widetilde{A}\widetilde{B}$ operator $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ operatorlarning ko‘paytmasi deyiladi.

$\widetilde{A}\widetilde{B}$ operator chiziqlidir. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x,y\in R^n$ vektorlar va $\alpha\in R$ son uchun:

1) $\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)(x+y)=\tilde{B}[\tilde{A}(x+y)]=\tilde{B}(\tilde{A}(x)+\tilde{A}(y))=\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)(x)+\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)(y);$

2) $\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)(\alpha x)=\tilde{B}[\tilde{A}(\alpha x)]=\tilde{B}[\alpha(\tilde{A}(x))]=\alpha[\tilde{B}(\tilde{A}(x))]=\alpha[(\tilde{A}\tilde{B})(x)]$

munosabat o‘rinli. Bu esa $\widetilde{A}\widetilde{B}$ operator chiziqli ekanligini ko‘rsatadi.

6-ta’rif. $\left(\alpha\tilde{A}\right)(x)=\alpha\left(\tilde{A}(x)\right)$ tenglik bilan aniqlanadigan $\alpha\widetilde{A}$ operator $\widetilde{A}$ operatorlarning α songa ko‘paytmasi deyiladi.

$\alpha\widetilde{A}$ operator chiziqlidir. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $x,y\in R^n$ vektorlar va $\alpha,\beta\in R$ sonlar uchun:

1) $\left(\alpha\tilde{A}\right)(x+y)=\alpha[\tilde{A}(x+y)]=\alpha(\tilde{A}(x)+\tilde{A}(y))=$

$$=\alpha(\tilde{A}(x))+\alpha(\tilde{A}(y))=\left(\alpha\tilde{A}\right)(x)+\left(\alpha\tilde{A}\right)(y);$$

2) $\left(\alpha\tilde{A}\right)(\beta x)=\alpha[\tilde{A}(\beta x)]=\alpha[\beta(\tilde{A}(x))]=\beta[\alpha(\tilde{A}(x))]=\beta[(\alpha\tilde{A})(x)]$

munosabat o‘rinli. Bu esa $\alpha\widetilde{A}$ operator chiziqli ekanligini ko‘rsatadi.

Yuqoridagilardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

I. Ixtiyoriy bazisda chiziqli operatorlar yig‘indisining matrisasi bu operatorlarning o‘sha bazisdagi matrisalari yig‘indisiga teng.

II. Ixtiyoriy bazisda chiziqli operatorlar ko‘paytmasining matrisasi bu operatorlarning o‘sha bazisdagi matrisalari ko‘paytmasiga teng.

III. Biror bir bazisda $\tilde{A}$ chiziqli operatorning α songa ko‘paytmasini beruvchi matrisa bu operatorning shu bazisdagi matrisasini α songa ko‘paytirilganiga teng.

7-ta’rif. $\tilde{A}(x)$ operator uchun $\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^{-1}\tilde{A} = \tilde{E}$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\tilde{A}^{-1}$ operator $\tilde{A}$ operatorga teskari operator deb ataladi.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, $\tilde{A}(x)$ operatorga teskari operator mavjud bo‘lishi uchun (bu holda $\tilde{A}(x)$ operator aynimagan operator deb ataladi) uning har qanday bazisdagi A matrisasi aynigan bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.

4-misol. Berilgan $\tilde{A}(x_1,x_2,x_3) = \left(2x_2,\, -2x_1 + 3x_2 + 2x_3,\, 4x_1 - x_2 + 5x_3\right)$ va $\tilde{B}(x_1,x_2,x_3) = \left(-3x_1 + x_2,\, 2x_2 + x_3,\, -x_2 + 3x_3\right)$ operatorlar berilgan. $\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{B}$ operator va uning matrisasi topilsin.

Yechish. Avval A va B matrisalarni topib olamiz:

$$\tilde{A}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \tilde{A}(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \tilde{A}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}(e_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ B(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \tilde{B}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

U holda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \qquad C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Bundan

$$\tilde{C}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{C}(e_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{C}(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{C}(x) = \left(4x_2 + 2x_3,\, 6x_1 + 2x_2 + 9x_3,\, -12x_1 - 3x_2 + 14x_3\right).$$

Mashqni bajaring. $\tilde{A}(x_1,x_2,x_3) = \left(x_2 - x_3,\, 4x_1 + 3x_2 - x_3,\, -3x_1 - x_2 + 6x_3\right)$ va $\tilde{B}(x_1,x_2,x_3) = \left(x_1 - 3x_2,\, 4x_2 + x_3,\, -5x_2 + 3x_3\right)$ operatorlar berilgan. $\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{B}$ operator va uning matrisasi topilsin.

Bitta chiziqli operatorning turli bazislardagi matrisalari orasidagi bog‘lanish haqidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar $\tilde{A}$ chiziqli operatorning $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ va $\{e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*\}$ bazislardagi matrisalari mos ravishda A va A^* matrisalardan iborat bo‘lsa, u holda $A^* = C^{-1}AC$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.
Bu yerda C o‘tish matrisasi deb ataladi.

5-misol. $\{e_1, e_2\}$ bazisda chiziqli operator matrisasi $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ berilgan bo‘lsin.

Yangi $\begin{cases} e_1^* = e_1 - 2e_2 \\ e_1^* = 2e_1 + e_2 \end{cases}$ bazisdagi chiziqli operator matrisasini toping.

Yechish. O‘tish matrisasi $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, unga teskari matrisa $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Demak, yangi bazisda operatorning matrisasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$A^* = C^{-1}AC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Mashqlarni bajaring. 1) $\{e_1, e_2\}$ bazisda chiziqli operator $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ko‘rinishga ega.

Yangi $\begin{cases} e_1^* = e_1 - e_2 \\ e_2^* = e_1 + e_2 \end{cases}$ bazisda chiziqli operatorning matrisasini toping.

2) $\{e_1, e_2\}$ bazisda chiziqli operatorning matrisasi $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ko‘rinishga ega.

Yangi $\begin{cases} e_1^* = 2e_1 - e_2 \\ e_2^* = e_1 + e_2 \end{cases}$ bazisda chiziqli operatorning matrisasini toping.

Shuni ta’kidlab o‘tish kerakki, $\tilde{A}(x)$ operatorga teskari operator mavjud bo‘lishi uchun (bu holda $\tilde{A}(x)$ operator aynimagan operator deb ataladi) uning har qanday bazisdagi A matrisasi aynigan bo‘lmasligi zarur va yetarlidir.

Agar $\tilde{A}$ chiziqli operator va λ son uchun

$$\tilde{A}(x) = \lambda x$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda λ son $\tilde{A}(x)$ operatorning xos soni, unga mos x vektorga esaoperatorning xos vektori deb ataladi.

Yuqoridagi tenglikni operatorning matrisasidan foydalanib yozsak, u holda quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda \cdot x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda \cdot x_2 \\ ----------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda \cdot x_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ ----------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Bundan

$$\left[A - \lambda E\right] \cdot X = 0.$$

Ma'lumkibir jinsli sistema har doim nol yechimga ega. Sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun esa uning koeffisiyentlaridan tuzilgan determinantning qiymati nolga teng bo'lishi zarur va etarli, ya'ni

$$\left|A - \lambda E\right| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

$\left|A - \lambda E\right|$ determinant λ ga nisbatan n darajali ko'phaddir. Bu ko'phad $\tilde{A}(x)$ operatorning xarakteristik ko'phadi deb ataladi. (6) tenglama $\tilde{A}(x)$ operatorning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi bazisni tanlashga bog'liq emas.

6-misol. $\tilde{A}(x) = \left(2x_1 - x_2 + 2x_3,\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3,\ -x_1 - 2x_3\right)$ operatorning xos soni va xos vektorlarini toping.

Yechish. Avval $\tilde{A}$ operatorning matrisasini tuzib olamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berilgan operatorga mos keluvchi bir jinsli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} \left(2 - \lambda\right)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - \left(3 + \lambda\right)x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - \left(2 + \lambda\right)x_3 = 0. \end{cases}$$

Bundan xarakteristik ko'phadni topamiz:

$$p\left(\lambda\right) \equiv \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3 - \lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda + 1\right)^3.$$

Demak, xos son $\lambda = -1$ ekan. Bu sonni sistemaga qo'ysak,

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Bundan $x_1 = x_2$, $x_1 = -x_3$. Demak, $X = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Mashqlarni bajaring. 1) $A = \begin{pmatrix} 6 & 24 \\ 54 & 6 \end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan chiziqli operatorning xos soni va xos vektorlarini toping.
2) $\tilde{A}(x) = \left(4x_1 - 2x_2 + 4x_3, 10x_1 - 6x_2 + 6x_3, -2x_1 - 4x_3\right)$ operatorning xos soni va unga mos keluvchi xos vektorlarini toping.
7-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matrisaning xos soni va xos vektorlarini toping.
Yechish. Xarakteristik tenglamani tuzib yechamiz:

$$\begin{Vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{Vmatrix} = 0;$$

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0,$$

$$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = 9.$$

$\lambda_1 = 3$ xos son uchun xos vektor

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{aligned}\right\}$$

tenglamalar sistemasidan aniqlanadi. $x_1 = m$ deb qabul qilib, $x_2 = 2m, x_3 = 2m$ ni hosil qilamiz. Xos vektor:

$$\vec{\tau}_1 = m\vec{i} + 2m\vec{j} + 2m\vec{k}\ .$$

Shunga o‘xshash

$$\vec{\tau}_2 = m\vec{i} + \frac{1}{2}m\vec{j} - m\vec{k}\,; \qquad \vec{\tau}_3 = -m\vec{i} + m\vec{j} - \frac{1}{2}m\vec{k}$$

xos vektorlarni topamiz.

Izoh. Yuqorida keltirilgan misollardan ko‘rinib turibdiki, chiziqli operatorning xarakteristik tenglamasi ko‘p hollarda yuqori darajali tenglamalarga keltiriladi. Shu sababli biz quyida 3 va undan yuqori darajali tenglamalarning ildizlari haqidagi ba’zi tushunchalarni keltiramiz. Ma’lumki, tenglamaning ildizlar soni tenglama darajasi bilan aniqlanadi.

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

tenglamaning ildizlarini topish uchun uni $y = x - \frac{a}{3}$ almashtirish yordamida

$$x^3 + px + q = 0$$

ko‘rinishga keltiramiz va uning uchta ildiziniKardano formulasi:

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

yordamida topamiz.

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

tenglamaning ildizini topish uchun uni $y = x - \frac{a}{4}$ almashtirish yordamida

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

ko‘rinishga keltiramiz va uning to‘rtta ildizini

$$\begin{cases} x^2 - \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0, \\ x^2 + \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) = 0. \end{cases}$$

sistemaning ildizlari sifatida aniqlaymiz. Bu yerda α_0

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha\left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0$$

tenglama ildizlaridan biri.

XIX asrning yigirmanchi yillarida Abel $n \geq 5$ bo‘lganda $n-$darajali tenglamalarning ildizlari uchun yuqoridagi kabi formulalar topish mumkin emasligini isbotlab uch asr davom etgan befoyda urinishlarga nuqta qo‘ydi. XIX asrning 30-yillarida esa Galua qanday shartlar bajarilganda tenglamani yechish mumkinligi haqidagi masalani to‘liq tekshirib masalaga nuqta qo‘ydi.

Xalqaro savdo modeli. Ko‘pgina iqtisodiy masalalarning matematik modeli chiziqli modellarga keltirilishi sababli, chiziqli fazo elementlari iqtisodiyotda o‘zining muhim o‘rnini egallagan.

Matrisaning xos vektori va xos sonini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

$S_1, S_2, \cdots, S_n$ n ta mamlakat bo‘lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larga teng bo‘lsin. a_{ij} – S_j -mamlakatning S_i -mamlakatdan sotib olgan mahsulotlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo‘lsin. Milliy daromad to‘laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan mahsulot xarid uchun sarf bo‘ladi, deb hisoblaymiz, ya’ni

$$\sum_{i-1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak. Quyidagi matrisani qaraylik

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------- \\ a_{n1} \ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matrisa savdo-sotiqning strukturaviy matrisasi, deb nomlanadi. Istalgan $S_i \, (i = \overline{1, n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo‘lgan tushimi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo‘lishi uchun, har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo‘lishi kerak, ya’ni har bir mamlakat savdosidan hosil bo‘lgan tushumuning milliy daromadidan kam bo‘lmasligi kerak. Ya’ni

$$P_i \geq x_i, \; i = \overline{1, n}$$

Agar $P_i > x_i$, deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz,

$$Pi = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k > x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

bu yerdan

$$\sum_{i=1}^{n} P_i > \sum_{i=1}^{n} x_i \, ,$$

ya’ni,

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \right) x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k > \sum_{k=1}^{n} x_i$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak $P_i \geq x_i$ tengsizlik o‘rniga $P_i = x_i$ tenglik o‘rinli bo‘lishligi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko‘rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = x_i$, $i = \overline{1,n}$ tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$, ya'ni, qaralayotgan masala A-matrisaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

8-misol. Uch mamlakatdagi savdoning strukturali matrisasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Balanslangan savdo uchun bu mamlakatlarning milliy daromadlari nisbatini aniqlang.

Yechish. $(A - E)x = 0$ tenglamani yechib yoki

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 \\ 0,6 & -0,6 & 0,6 \\ 0,2 & 0,3 & -0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistemani Gauss metodida yechib, $\lambda = 1$ xos songa mos x xos vektorni topamiz. Demak $x = (c;\, 2c;\, c)$. Olingan natijadan balanslangan savdo uchun bu uch mamlakatlarning milliy daromadlari nisbati $1:2:1$ bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. L^n fazoda bir bazisdan ikkinchi bazisga o'tish matrisasi qanday tuziladi?
2. Qanday haqiqiy elementli matrisaga ortogonal matrisa deyiladi?
3. Ortogonal matrisa determinant haqida nima deya olasiz?
4. Chiziqli fazoning chiziqli almashtirishi yoki operatori deb nimaga aytiladi?
5. Matrisaning o'xshashlik almashtirishi deganda nimani tushunasiz?
6. Chiziqli almashtirish usti dabajariladigan qanday amallarnibilasiz?
7. Chiziqli almashtirishning xos vektori va xos qiymati deb nimaga aytiladi?
8. Xos vektorlarning qanday xossalarini bilasiz?
9. Matrisaning xarakteristik ko'phadi bazis tanlanishiga bog'liqmi?
10. Qanday bazisda matrisa diagonal ko'rinishga ega bo'ladi?

12-mavzu. Kvadratik formalar va ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Reja:

1. Kvadratik formalar.
2. Kvadratik formalarning kanonik ko‘rinishi.
3. Ortogonal almashtirish.
4. Inersiya qonuni.
5. Ishorasi aniqlangan kvadratik formalar.
6. Ikkinchi tartibli chiziqlar.

Tayanch so‘z va iboralar: kvadratik formalar, kanonik ko‘rinish, inersiya qonuni, ortogonal almashtirish, xos va xosmas kvadratik formalar, xos va xosmas chiziqli almashtirishlar, ikkinchi tartibli chiziqlar.

Kvadratik formalar nazariyasining manbalari ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlar nazariyasida yotadi. Ma’lumki, markazi koordinata boshida bo‘lgan

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D \tag{1}$$

egri chiziqda

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \tag{2}$$

almashtirish bajarib, ya’ni koordinata o‘qlarini α burchakka burib, (1) egri chiziq tenglamasini quyidagi

$$A'x'^2 + C'y'^2 = D' \tag{3}$$

“kanonik” ko‘rinishga keltirish mumkin. (2) almashtirish xosmas chiziqli almashtirish, deb ataladi, chunki

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

1-ta’rif. n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ noma’lumlarning $f(x)$ kvadratik formasi, deb har bir hadi bu noma’lumlarning kvadrati yoki ikkita noma’lumning ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{4}$$

yig‘indiga aytiladi.

Kvadratik formaning a_{ij} koeffisiyentlaridan foydalanib

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matrisani tuzish mumkin. Bu yerda A matrisaning barcha xarakteristik ildizlari haqiqiy bo‘lishi uchun $a_{ij} = a_{ji}$, deb faraz qilinadi. A matrisaning rangi (4) kvadratik formaning rangi, deyiladi. A matrisa aynimagan bo‘lsa, (4) kvadratik forma xosmas deyiladi.

Kvadratik formaning koeffisiyentlari haqiqiy yoki kompleks sonlar bo‘lishiga bo‘g‘liq holda, kvadratik forma haqiqiy yoki kompleks deyiladi.
(4) ni matrisa formada quyidagacha yozish mumkin

$$f = X^T AX \tag{5}$$

Bu yerda X va X' o‘zaro transponirlangan matrisalar bo‘lib, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ikki no‘malumli kvadratik forma quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$f = X^T AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \ (a_{12} = a_{21})$$

Uchta no‘malumning kvadratik formasi esa

$$f = X^T AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 +$$
$$+a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2, \quad (a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32})$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Simmetrik matrisalar uchun ba’zi xossalarini keltirib o‘tamiz:

1) $(AB)^T = B^T A^T$; 2) $A^T = A$.

Bu xossalardan foydalanib quyidagi teoremani sxematik isbotlaymiz.

Teorema. A matrisali n noma’lumli kvadratik forma ustida Q matrisali chiziqli almashtirish bajarilgandan so‘ng u $Q^T AQ$ matrisali yangi n noma’lumli kvadratik formaga aylanadi.

Isbot. (4) formaga nisbatan

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k ,$$

ya'ni $X = QY$ chiziqli almashtirishni bajaramiz. U holda 1- xossaga ko'ra $X^T = Y^T Q^T$ tenglikni hosil qilamiz. U holda (4) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$f = Y^T (Q^T AQ)Y \text{ yoki } f = Y^T BY .$$

Bu yerda B matrisa simmetrik bo'ladi.

1-misol. $f = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

Yechish. Bu yerda kvadratik formaning matrisasi $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, chiziqli almashtirishning matrisasi esa $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi. U holda teoremaga asosan

$$A^* = C^T AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bundan quyidagi kvadratik formani hosil qilamiz:

$$L = 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_1^2 .$$

Mashqlarni bajaring. 1) $f = x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

2) $f = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$ kvadratik forma ustida

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 5y_2, \\ x_2 = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

almashtirish bajarilgandan so'ng hosil bo'lgan yangi kvadratik formani toping.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagi xulosani chiqarish mumkin.

Chiziqli almashtirish bajarilgandan so'ng kvadratik formaning rangi o'zgarmaydi.

2-ta'rif. Agar (4) kvadratik formada turli noma'lumlarning ko'paytmalari oldidagi barcha koeffisiyentlar nolga teng bo'lsa, u holda bu forma kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi deb ataladi. Shunday qilib, quyidagi

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + ... + b_n y_n^2$$

ifoda (4) formaning kanonik ko‘rinishi deyiladi.

Shuni alohida ta’kidlash kerakki, kanonik ko‘rinishda noldan farqli koeffisiyentlar soni (4) kvadratik formaning rangiga teng bo‘lishi kerak. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Har qanday kvadratik forma biror xosmas chiziqli almashtirish orqali kanonik ko‘rinishga keltirilishi mumkin.

Bu teoremani matematik induksiya metodi yordamida isbotlash mumkin. Demak, matematik induksiya metodi yordamida kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin.

Berilgan kvadratik forma keltiriladigan kanonik ko‘rinish bir qiymatli aniqlangan emas, ya’ni har qanday kvadratik forma turli usullar bilan turli ko‘rinishdagi kanonik ko‘rinishga keltirilishi mumkin. Masalan, $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$ kvadratik formani

a) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + 3t_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3, \\ x_3 = t_3. \end{cases}$

xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2$ kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin;

b) $\begin{cases} x_1 = t_1 + 3t_2 + 2t_3, \\ x_2 = t_1 - t_2 - 2t_3, \\ x_3 = t_2. \end{cases}$

xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = 2t_1^2 + 6t_2^2 - 8t_3^2$ kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin.

(4) krvadratik formani kanonik ko‘rinishda yozish uchun A matrisaning xarakteristik ildizlarini, ya’ni $|A - \lambda E|$ ko‘phadning ildizlarini topamiz. Bu ildizlar esa kanonik ko‘rinishning koeffisiyentlari bo‘ladi.

2-misol. Quyidagi

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring.

Yechish. Bu kvadratik formaning matrisasi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga ega. Uning xarakteristik ko‘phadini topamiz:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3) \cdot$$

Shunday qilib, A matrisaning uch karrali xarakteristik ildizi: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ va bitta oddiy xarakteristik ildizi: $\lambda_4 = -3$ mavjud.

Demak, bu kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2 .$$

Ba’zi hollarda faqat kanonik ko‘rinishini emas, balki bu ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishni bilish kerak bo‘lib qoladi.

Buning uchun berilgan A simmetrik matrisani diagonal ko‘rinishga keltiruvchi Q ortogonal matrisani yoki uning teskari matrisasi Q^{-1} ni topish va A matrisaning λ_0 xarakteristik ildizlaridan foydalanib tuzilgan

$$(A - \lambda_0 E)X = 0$$

sistemaning fundamental yechimlarini ortonormallash kifoya.

Yuqoridagi 26-misolda buning amalga oshirish algoritimini ko‘rib chiqamiz.

3-misol. Quyidagi

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 .$$

kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni toping.

Yechish. $\lambda_0 = 1$ bo‘lsin. U holda quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning rangi 1 ga teng. Demak, uning 3 ta chiziqli erkli yechimini topish mumkin. Masalan:

$$b_1 = (1,1,0,0),$$
$$b_2 = (1,0,1,0),$$
$$b_3 = (-1,0,0,1)$$

vektorlar sistemaning chiziqli erkli yechimlari bo‘ladi.

Bu vektorlar sistemasini ortogonallab, quyidagi

$$c_1 = b_1 = (1,1,0,0),$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1 + b_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$

$$c_3 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + b_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

$\lambda_0 = -3$ bo‘lsin. U holda quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemaning rangi 3 ga teng. Uning noldan farqli yechimi $c_4 = (1,-1,-1,1)$ ko‘rinishda bo‘ladi. c_1, c_2, c_3, c_4 vektorlar ortogonal sistemani tashkil etadi. Uni normalab

$$c_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \qquad c_3' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$c_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right), \qquad c_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ortonormalangan vektorlar sistemasini hosil qilamiz. Shunday qilib, f ni kanonik ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishlardan biri

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3, \\ y_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_4, \\ y_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Mashqni bajaring. $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 4x_3x_4$ kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni toping.

Agar kvadratik formaning kanonik ko‘rinishida $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$ bo‘lsa, u holda bu formani kvadratik formaning normal ko‘rinishi deyiladi.

Agar haqiqiy kvadratik forma qaralayotgan bo‘lsa, uni normal ko‘rinishga keltirish masalasi anchagina murakkab masalalardan biri hisoblanadi. Chunki bunda manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish talab qilinishi mumkin.

Teorema. Berilgan haqiqiy koeffisiyentli kvadratik formaning haqiqiy xosmas chiziqli almashtirish yordamida hosil qilingan normal ko‘rinishdagi musbat kvadratlar soni va manfiy kvadratlar soni bu almashtirishning tanlab olinishiga bo‘g‘liq emas.

Berilgan f kvadratik formaning keltirilgan kanonik ko‘rinishidagi musbat ishorali kvadratlar soni bu forma inersiyasining musbat indeksi, deb manfiy ishorali kvadratlar soni esa inersiyaning manfiy indeksi, deb musbat va manfiy indekslar ayirmasi esa f kvadratik formaning signaturasi deb ataladi.

Bu tushunchalardan foydalanib quyidagi teoremani keltirish mumkin.

Teorema. n ta noma’lumning haqiqiy koeffisiyentli ikkita kvadratik formasi bir xil rangga va bir xil signaturaga ega bo‘lgandagina va faqat shundagina, ular xosmas chiziqli almashtirish orqali bir-biriga o‘tkaziladi.

Teorema. Agarda (4) kvadratik formada o‘zgaruvchining kvadrati ishtirok etmasa, u holda chiziqli almashtirish yordamida uni hech bo‘lmaganda bitta o‘zgaruvchining kvadrati qatnashgan kvadratik formaga keltirish mumkin.

Kvadratik formalarni o‘rganishda ularning kanonik ko‘rinishlarini klassifikatsiyaga ajratib o‘rganish kerak bo‘ladi.

Biz quyida ularning bir necha turlarini keltirib o‘tamiz.

3-ta’rif. Agar n ta noma’lumning haqiqiy koeffisiyentli f kvadratik formani n ta musbat kvadratdan iborat normal ko‘rinishga keltirilsa, u holda bu forma musbat aniqlangan deyiladi.

4-ta’rif. Agar n ta noma’lumning haqiqiy koeffisiyentli f kvadratik formasi n ta manfiy kvadratdan iborat normal ko‘rinishga keltirilsa, u holda bu forma manfiy aniqlangan deyiladi.

5-ta’rif. Agar haqiqiy koeffisiyentli f kvadratik formaning normal ko‘rinishida ham musbat, ham manfiy kvadratlardan iborat bo‘lsa, u holda bu forma ishorasi aniqlanmagan forma deyiladi.

6-ta’rif. Agar haqiqiy koeffisiyentli f xos kvadratik formalarning normal ko‘rinishi bir xil ishorali kvadratlardan iborat bo‘lsa, u holda bu forma ishorasi yarim aniqlangan formalar deyiladi.

Masalan,

1. $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ kvadratik forma musbat aniqlangan;
2. $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ kvadratik forma manfiy aniqlangan;
3. $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan;
4. $\varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ kvadratik formaning ishorasi yarim aniqlangan.

Amaliyotda va iqtisodiyotda eng ko‘p uchraydigan kvadratik formalar ishorasi aniqlangan kvadratik formalar bo‘lganligi sababli biz asosiy e’tiborni ishorasi aniqlangan kvadratik formalarga beramiz.

Koeffisiyentlar bo‘yicha formaning musbat aniqlangan ekanligini bilish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

n ta noma’lumning matrisasi $A = (a_{ij})$ bo‘lgan f kvadratik forma berilgan bo‘lsin. Bu matrisaning yuqori chap burchagiga joylashgan $1, 2, ..., n-$tartibli minorlari, ya’ni

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlari f kvadratik formaning ($A = (a_{ij})$ matrisaning) bosh minorlari deyiladi.

Teorema. n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ noma’lumlarning haqiqiy koeffisiyentli $f(x)$ kvadratik formasi uning bosh minorlari qat’iy musbat bo‘lganda va faqat shundagina, musbat aniqlangan bo‘ladi.

Bu teoremani matematik induksiya metodidan foydalanib isbotlash mumkin.

Isbot. $n = 1$ bo‘lganda $f = a_{11}x^2$. Bu forma $a_{11} > 0$ bo‘lgandagina musbat aniqlangan.

Teoremani $n-1$ noma’lum uchun isbotlangan, deb faraz qilamiz va n ta noma’lum uchun isbotlaymiz.

Koeffisiyentlari haqiqiy $f(x)$ kvadratik forma berilgan bo‘lib, uning matrisasi $A = (a_{ij})$ bo‘lsin. Ma’lumki, agar $f(x)$ kvadratik forma ustida matrisasi

Q bo‘lgan xosmas chiziqli almashtirish bajarilsa, u holda forma determinantining ishorasi o‘zgarmaydi.

Haqiqatan ham, almashtirishdan so‘ng matrisasi $Q^T AQ$ bo‘lgan kvadratik forma hosil bo‘ladi. Bu yerda

$$|Q^T| = |Q| \Rightarrow |Q^T AQ| = |Q^T||A||Q| = |A||Q|^2.$$

Endi $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ bo‘lsin. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$f = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i x_n + a_{nn}x_n^2 .$$

f forma musbat aniqlangan bo‘lsin. U holda induktiv farazga ko‘ra φ formaning hamma bosh minorlari qat’iy musbat. f formaning oxirgi bosh minori, ya’ni A matrisa determinantining qat’iy musbatligi quyidagi mulohazadan kelib chiqadi: f forma musbat aniqlanganligi sababli u xosmas chiziqli almashtirish yordamida n ta musbat kvadratlardan tuzilgan normal ko‘rinishga keladi. Bu normal ko‘rinishning determinanti qat’iy musbat, shu sababli f formaning determinanti ham qat’iy musbat.

Endi f formaning hamma bosh minorlari qat’iy musbat bo‘lsin. U holda φ formaning hamma bosh minorlari qat’iy musbat bo‘lgani uchun induktiv farazga ko‘ra φ forma musbat aniqlanganligi kelib chiqadi, ya’ni $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ noma’lumlarning shunday chiziqli almashtirishi mavjudki, u yangi φ formani $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ noma’lumlarning $n-1$ kvadratlari yig‘indisi formasiga keltiradi. Bu chiziqli almashtirishni, $x_n = y_n$, deb faraz qilib, barcha $x_1, x_2, ..., x_n$ noma’lumlarning chiziqli almashtirishigacha to‘ldirish mumkin. Bu chiziqli almashtirishdan so‘ng quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in}y_i y_n + b_{nn}y_n^2 .$$

b_{in} ning aniq ko‘rinishi biz uchun muhim emas.

$$y_i^2 + 2b_{in}y_i y_n = \left(y_i + b_{in}y_n\right)^2 - b_{in}^2 y_n^2$$

bo‘lgani uchun $z_i = y_i + b_{in}y_n, \quad i = 1, 2, ..., n-1, \ z_n = y_n$

chiziqli almashtirish f formani

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + cz_n^2 \qquad (6)$$

kanonik ko‘rinishga keltiradi.

f formaning musbat aniqlanganligini ko‘rsatish uchun c sonning musbatligini ko‘rsatish yetarli. Ko‘rinib turibdiki, (6) formaning determinanti c ga teng. Bu determinant esa musbat. Chunki farazga asosan f formaning bosh determinanti musbat va xosmas chiziqli almashtirishlarda forma determinantining ishorasi o‘zgarmaydi.

Masalan, $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ kvadratik forma musbat aniqlangan, chunki uning bosh minorlari musbat:

$$5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

$f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ kvadratik forma musbat aniqlangan emas, chunki uning ikkinchi minori manfiy:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Ikki noma’lumli ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{7}$$

(7) tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalarning geometrik o‘rnini ko‘rib chiqamiz. Buning uchun (7) tenglamaning koeffisiyentlaridan quyidagi ikkita:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz.

Bu yerda $\Delta -$(7) tenglamaning diskriminanti, $\delta -$uning yuqori tartibli hadlarining diskriminanti deyiladi. Δ va δ larning qiymatlariga qarab (7) tenglama quyidagi geometrik formalarni aniqlaydi:

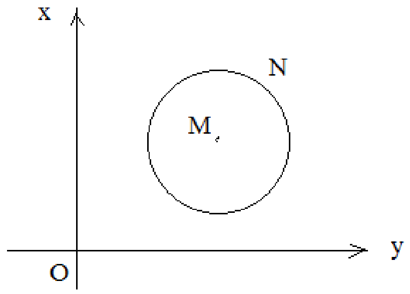
	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips (haqiqiy yoki mavhum)	Nuqta
$\delta < 0$	Giperbola	Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
$\delta = 0$	Parabola	Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq (haqiqiy yoki mavhum parallel to‘g‘ri chiziq)

Masalan, $x^2 - y^2 = 0$ ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi, chunki bu yerda $\delta = -1, \Delta = 0$; $(x+y)^2 = 1$ ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlarni aniqlaydi, chunki bu yerda $\delta=0, \Delta=0$; $x^2+y^2=0$ bitta nuqtani ifodalaydi chunki bu yerda $\delta=1, \Delta=0$.

Yuqorida jadvalda keltirilgan ikkinchi tartibli egri chiziqlarning har birini alohida-alohida ko‘rib chiqamiz.

7-ta’rif. Tekislikda belgilangan $M(a,b)$ nuqtadan bir xil R masofada yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni aylana deb ataladi.
Bu yerda $M(a,b)$ nuqta aylana markazi, R masofa esa aylana radiusi deb ataladi.

$N(x,y)$ aylanadagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin.



U holda ta’rifga ko‘ra $|MN|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$ tenglikdan aylananing kanonik tenglamasini hosil qilamiz:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad (8)$$

4-misol. $x^2+y^2-6x-7=0$ tenglama bilan berilgan aylananing markazi koordinatalarini va radiusini toping.

Yechish. Tenglamada x va y ga nisbatan to‘la kvadrat ajratamiz: $(x-3)^2+y^2=4^2$. Bundan $R=4$ aylana radiusini va $M_0(3,0)$ aylana markazini topamiz.

5-misol. $M(0,3)$ nuqtadan $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ aylanaga o‘tkazilgan urinma tenglamasini toping.

Yechish. Urinma tenglamasini $y=kx+3$ to‘g‘ri chiziq ko‘rinishida izlaymiz. Chunki u (0,3) nuqtadan o‘tadi. Aylana tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$(x-3)^2+(y+2)^2-9-4-12=0, \text{ ya'ni } (x-3)^2+(y+2)^2=25.$$

Aylana va to‘g‘ri chiziqning umumiy nuqtasini topish uchun to‘g‘ri chiziq va aylana tenglamalarini birgalikda yechib, quyidagi shakl almashtirish bajaramiz:

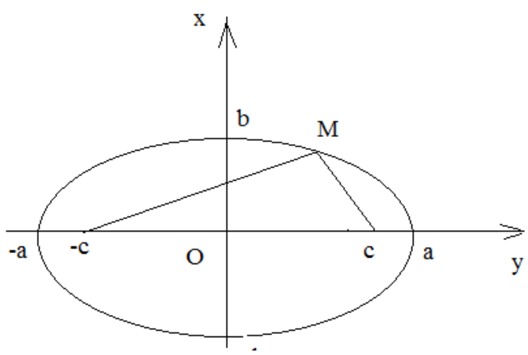
$$(x-3)^2+(kx+3+2)^2=0 \Rightarrow (k^2+1)x^2+(10k-6)x+9=0.$$

To‘g‘ri chiziq aylanaga uringani uchun bu tenglama yagona yechimga ega bo‘lishi kerak. Tenglama yagona yechimga ega bo‘lishi uchun esa uning diskriminanti nolga teng bo‘lishi lozim:

$$(5k-3)^2-9(k^2+1)=0 \Rightarrow 16k^2-30k=0$$

U holda $k_1=0,\ k_2=\dfrac{15}{8}$. Demak, izlangan urinma tenglamalari $y=3$yoki $y=\dfrac{15}{8}x+3$ ko‘rinishda bo‘ladi.

8-ta’rif. Har bir nuqtasidan belgilangan $F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$ nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas $2a$ songa teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni ellips deb ataladi.
Bu yerda $F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$ nuqtalar ellipsning fokuslari deb ataladi.



Ta’rifga ko‘ra ellipsning ixtiyoriy$M(x,y)$nuqtasidan $F_1,\ F_2$ nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas: $|F_1M|+|F_2M|=2a$. U holda

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Oxirgi ifodani kvadratga oshirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+y^2.$$

Bu ifodani soddalashtirib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$xc+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Bundan

$$|F_2M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F_1M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-|F_2M|=2a-a-\frac{c}{a}x=a-\frac{c}{a}x$$

masofalarni topamiz. Bu masofalar fokal masofalar deb ataladi. Bundan

$$c^2x^2+2cxa^2+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

hosil qilamiz. $c<a$ bo‘lganligi sababli $a^2-c^2=b^2$ belgilash ma’noga ega. U holda

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (9)$$

(9) ellipsning kanonik tenglamasi deb ataladi. (9) tenglamada noma’lumlarning faqat kvadratlari qatnashgani uchun, uning grafigi Ox va Oy o‘qlariga nisbatan simmetrik joylashgan. Koordinatalar boshi uning simmetriya markazi bo‘lib, koordinata o‘qlari simmetriya o‘qlari bo‘ladi. Fokuslar joylashgan o‘q ellipsning fokus (fokal) o‘qi deyiladi.

Ellipsni koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalari uning uchlari deyiladi. (9) tenglamada $y=0$, deb $A_1(-a,0),\ A_2(a,0)$ uchlarni, $x=0$, deb $B_1(-b,0),\ B_2(b,0)$ uchlarni topamiz, $|A_2A_1|=2a,\ \ |B_2B_1|=2b$ kesmalar ellipsning mos ravishda katta (fokal) o‘qi va kichik (fokal) o‘qi, deyiladi a,b kesmalar mos ravishda katta yarim o‘q va kichik yarim o‘q deyiladi. O‘qlari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan ellipsning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

ko‘rinishda bo‘ladi va (x_0,y_0) ellips markazining koordinatasini ifodalaydi.

Ellips fokuslari orasidagi $2c$ masofani katta o‘q $2a$ ga nisbati uning ekssentrisiteti deyiladi va ε bilan belgilanadi: $\varepsilon=\frac{c}{a}$.

Har qanday ellips uchun $\varepsilon<1$ bo‘lib, ε ellipsning cho‘zinchoqligini yoki siqilganligini bildiradi. Ellipsning fokal radiuslari $r_1=a+\varepsilon x,\ r_2=a-\varepsilon x\ \ (r_1+r_2=2a)$ formula bilan aniqlanadi.

Ellipsning kichik o‘qiga parallel va undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofada yotgan to‘g‘ri chiziqlarellipsning direktrisasi deb ataladi va $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ tenglama bilan aniqlanadi.

6-misol. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ tenglama bilan aniqlangan chiziqning shaklini, markazini va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Egri chiziq tenglamasida shakl almashtiramiz.

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=4\left(x^2-2x\right)+3\left(y^2+4y\right)-32=$$

$$4\left(x^2-2x+1-1\right)+3\left(y^2+4y+4-4\right)-32=4(x-1)^2-4+3(y+2)^2-12-32=0,$$

bo‘lganligi sababli, bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1.$$

Demak, tenglama ellipsni ifodalaydi. Bu yerda $a = 2\sqrt{3}, b = 4, c = 2, \quad \varepsilon = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

Mashq. Ellips $24x^2 + 49y^2 = 117$ tenglama bilan berilgan. Uning
1) yarim o‘qlari uzunligini;
2) fokuslarining koordinatalarini;
3) ellips ekssentrisitetini;
4) direktrisalar tenglamalari va ular orsidagi masofani;
5) chap fokusidan 12 birlik masofada joylashgan ellips nuqtasini toping.

9-ta’rif. Har bir nuqtasidan belgilangan $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ nuqtalargacha bo‘lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o‘zgarmas $2a$ songa teng bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni giperbola deb ataladi.
Belgilangan F_1, F_2 nuqtalar giperbolaning fokuslari deb ataladi.

Ta’rifga asosan, giperboladagi ixtiyoriy $M(x,y)$ uchun $\left\| F_1M \right\| - \left\| F_2M \right\| = 2a$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu yerda ham yuqoridagi kabi mulohaza yuritib, ma’lum bir shakl almashtirishlardan so‘ng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu yerda $c > a$ bo‘lib, $b^2 = c^2 - a^2$ belgilashlardan so‘ng giperbolaning quyidagi kanonik tenglamasini topamiz:

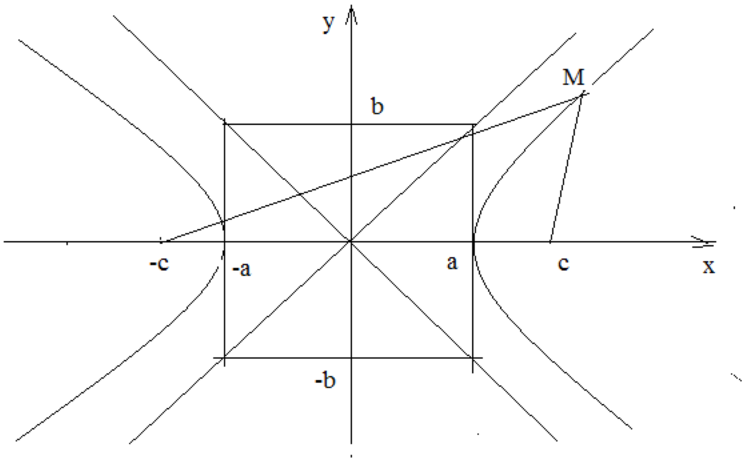
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Tenglamadan ko‘rinib turibdiki giperbola koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘ladi. Shuningdek, giperbola $O(0,0)$ nuqtaga, ya’ni koordinata boshiga nisbatan ham simmetrik. Fokuslar yotgan o‘q giperbolaning fokal o‘qi deyiladi.

Agar (10) tenglamada $y = 0$, deb olsak, $x = \pm a$ ni topamiz. $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi. Bu yerda $|A_1A_2| = 2a$. Giperbola Oy o‘q bilan kesishmaydi. Haqiqatan ham (10) tenglamada $x = 0$, deb olsak, $y^2 = -b^2$ bo‘ladi. Bu tenglikning ma’noga ega emasligi giperbola Oy o‘qi bilan kesishmasligini bildiradi. $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari, deb atalib, ular orasidagi masofa $2b$ ga teng bo‘ladi.

$y = \pm\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi.

Bu to‘g‘ri chiziqlar markazi koordinatalar boshida bo‘lgan, tomonlari $2a$ va $2b$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak (giperbolaning asosiy to‘rtburchagi) diagonallarida yotadi. Giperbolani chizishdan oldin asimptotalarini chizish maqsadga muvofiq.



Giperbola uchun ham $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ko‘rinishdagi tenglik giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi, giperbola uchun $\varepsilon > 1$.

Ekssentrisitet giperbolaning asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagini cho‘zinchoqligini ifodalaydi.

Giperbolaning mavhum o‘qiga parallel hamda undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofada yotgan l_1, l_2 to‘g‘ri chiziqlar giperbolning direktrisasi deb ataladi.

Agar giperbolada $a = b$bo‘lsa, giperbola teng tomonli deyiladi, uning tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Simmetriya markazi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada va simmetriya o‘qlari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan giperbolaning tenglamasi

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar giperbolaning haqiqiy o‘qi Oy o‘qda yotsa, u holda giperbola tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Bu giperbolaning ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{b}$ ga, asimtotalar $y = \pm\frac{b}{a}x$ ga, teng bo‘lib, uning direktrisalari esa $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$tenglamalar bilan aniqlanadi.

7-misol. $5x^2-4y^2=20$ giperbolada:

1) yarim o‘qlar uzunligi; 2) fokuslar koordinatasi;
3) ekssentrisiteti; 4) asimptotava direktrisa tenglamasi;
5) $M(3;2,5)$nuqtasining fokal radiuslari topilsin.

Yechish. Tenglamaning ikki tarafini 20 ga bo‘lib, giperbola tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiramiz: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. Bundan:

1) $a^2=4$, $b^2=5$ ya’ni, $a=2, b=\sqrt{5}$;

2) $c^2=a^2+b^2=4+5=9\Rightarrow c=3$. Demak, $F_1(-3,0),\ F_2(3,0)$;

3) $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$;

4) asimptota va direktrissatenglamalari topamiz: $y=\pm\frac{b}{c}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x,\ x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{4}{3}$;

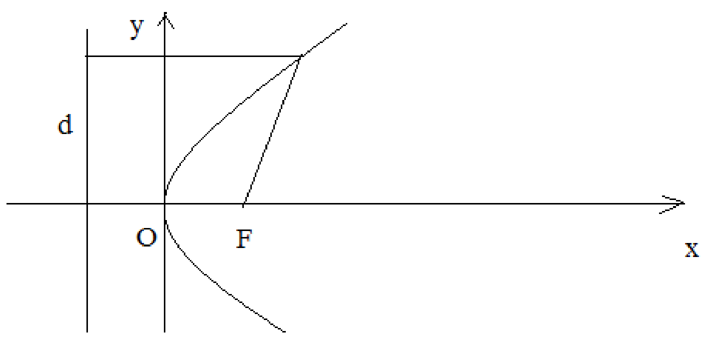
5) M nuqta giperbolaning o‘ng qismida $\left(x=3>0\right)$ yotganligi sababli uning fokal radiusi $r=\pm a+\varepsilon x$ formuladan foydalanib topiladi:

$$r_1=2+\frac{3}{2}\cdot 3=6,5,\ \ r_1=-2+\frac{3}{2}\cdot 3=2,5.$$

Mashqlar. 1) Fokuslari $F_1(-2;4),\ F_2(12;4)$ nuqtalarda yotgan va mavhum o‘qining uzunligi 6 bo‘lgan giperbola tenglamasini toping.
2) Agar giperbola ekssentrisiteti 2 bo‘lsa, uning asimtotalari orasidagi burchakni toping.

10-ta’rif. Belgilangan $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ nuqta va belgilangan $d:x=-\frac{p}{2}$ to‘g‘ri chiziqdan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o‘rni parabola deb ataladi. $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ nuqta fokus, $d:x=-\frac{p}{2}$ to‘g‘ri chiziq esa direktrisa deb ataladi.

Fokus nuqtadan o‘tib direktrisaga perpendikulyar bo‘lgan o‘qni Ox o‘qi, deb qabul qilamiz. U holda parabolaning grafigi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



Paraboladan ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta olamiz. U holda ta'rifga asosan

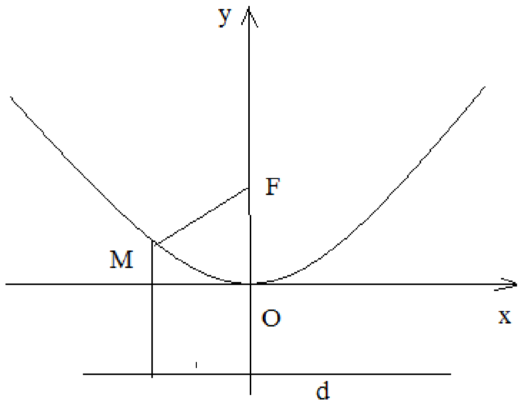
$$|MF| = \rho(M,d) \Rightarrow \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Bu tenglamani soddalashtirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y^2 = 2px.$$

Bu tenglama parabolaning kanonik tenglamasi deb ataladi.

Agar parabolaning fokusi $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqtada, direktrisasi $y = -\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqda bo'lsa, u holda uning grafigi



ko'rinishda bo'lib, tenglamasini esa quyidagicha yozamiz:

$$x^2 = 2py$$

Parabolaning uchi $O(0,0)$ nuqtada yotadi, FM kesma uzunligi M nuqtaning fokal radiusi, $Ox-$o'qi esa uning simmetriya o'qi deyiladi. Parabolning fokal radiusi $r = x + \frac{p}{2}$ formula bo'yicha topiladi.

8-misol. Parabola $x^2 = 4y$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Fokus nuqta koordinatasi, direktrisa tenglamasi, $M(4;4)$ nuqtaning fokal radiusi topilsin.

Yechish. $x^2 = 2py \Rightarrow p = 2$. Demak, $F(0;1)$, $y = -1$. $M(4;4)$ nuqtaning fokalradiusi $r = 4 + 1 = 5$.

Mashq. $y = -2x^2 + 8x - 5$ parabola uchining koordinatasi, fokusi va direktrisasi topilsin hamda uning grafigining eskizi chizilsin.

9-misol. Agar talab va taklif funksiyalari $P = Q_S^2 + 14Q_S + 22$, $P = -Q_D^2 - 10Q_D + 150$ ko'rinishda bo'lsa, ishlab chiqarilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorini va muvozanat narxini aniqlang.

Yechish. Muvozanatda $Q_S = Q_D = Q$ bo'lgani uchun masala shartidagi funksiyalarni $P = Q^2 + 14Q + 22$, $P = -Q^2 - 10Q + 150$ korinishda yozib olamiz. U holda

$$Q^2 + 14Q + 22 = -Q^2 - 10Q + 150 \Rightarrow 2Q^2 + 24Q - 128 = 0.$$

Bu tenglamaning yechimi $Q = -16,\ Q = 4$. Bu yerda $Q > 0$ bo‘lgani uchun $Q = 4$ (muvozanat miqdor) qiymatni tenglamaning yechimi sifatida qabul qilamiz. U holda $P = 94$ (muvozanat narx).

Mashqlar. 1) Agar talab va taklif funksiyalari $P = 2Q_S^2 + 10Q_S + 10$, $P = -Q_D^2 - 5Q_D + 52$ bo‘lsa, ishlab chiqarilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

2) Agar talab va taklif funksiyalari $P = Q_S^2 + 2Q_S + 12$, $P = -Q_D^2 - 4Q_D + 68$ mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

3) Agar talab va taklif funksiyalari $P = Q_S^2 + 2Q_S + 7$, $P = -Q_D + 25$ bo‘lsa, ishlab chiqrilgan mahsulot uchun muvozanat miqdorni va muvozanat narxni aniqlang.

Kvadratik formalarning ko‘pdan-ko‘p tadbiqlari mavjud bo‘lib bu tadbiqlaridan biri sifatida ikkinchi tartibli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{11}$$

tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalarning geometrik o‘rnini ko‘rib chiqamiz.

Buning uchun (11) tenglamaning koeffisiyentlaridan quyidagi ikkita:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz.

Bu yerda $\Delta -$ (11) tenglamaning diskriminanti, $\delta -$ uning yuqori tartibli hadlarining diskriminanti deyiladi. Δ va δ larning qiymatlariga qarab (11) tenglama quyidagi geometrik formalarni aniqlaydi:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips (haqiqiy yoki mavhum)	Nuqta
$\delta < 0$	Giperbola	Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
$\delta = 0$	Parabola	Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq (haqiqiy yoki mavhum)

10-misol. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ tenglamada qaysi turdagi egri chiziq berilgan.

Yechish.

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -26.$$

Demak, $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, u holda bu tenglama ellipsni ifodalaydi.

11-misol. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 3 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning qaysi turdagi egri chiziq ekanligini aniqlang.

Yechish. $A = 5,\ B = 4,\ C = 5, D = -9,\ E = -9, F = 3$

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demak, $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, u holda bu tenglama ellipsni ifodalaydi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. *n* ta noma’lumlarning kvadratik shakli deb qanday ko‘phadga aytiladi?
2. Kvadratik shaklni matrisa ko‘rinishida yozish mumkinmi va qanday?
3. Kvadratik shaklning kanonik ko‘rinishi deb, uning qanday shakliga aytiladi?
4. Kvadratik shakl matrisasini diagonal ko‘rinishga keltiruvchi ortogonal matrisa mavjudmi va nima uchun?
5. Kvadratik shaklni kanonik ko‘rinishga keltirish masalasi qanday yechiladi?
6. Kvadratik shaklning xarakteristik sonlari va bosh yo‘nalishlari deb nimalarga aytiladi?
7. Kvadratik shakl rangi deb nimaga aytiladi?
8. Musbat va manfiy aniqlangan kvadratik shakllar deb, qanday shakllarga aytiladi?
9. Kvadratik shakl matrisasining bosh yoki burchak minorlari deb, nimalarga aytiladi?
10. Kvadratik shakl musbat va manfiy aniqlanganlik yetarli shartlari nimalardan iborat?

13-mavzu. Iqtisodiy matematik modellar. Chiziqli programmalashtirish masalasi: yechimlari va ularning xossalari

Reja:

1. Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalalari.
2. Iqtisodiy matematik model tushunchasi.
3. Eng sodda iqtisodiy masalalarning matematik modellari.
4. Chiziqli programmalashtirish masalasining umumiy qo‘yilishi.
5. Chiziqli programmalashtirish masalasining turli formada ifodalanishi.
6. Teng kuchli almashtirishlarni bajarib ChPMni kanonik ko‘rinishga keltirish.

7. Chiziqli programmalashtirish masalasining joiz va bazis yechimlari.
8. Joiz yechimlar to‘plamining qavariqligi.

Tayanch so‘z va iboralar: Matematik model, chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish, stoxastik programmalashtirish, dinamik programmalashtirish. Chiziqli programmalashtirish, chegaralovchi shartlar (cheklamalar), maqsad funksiya, joiz reja (yechim), bazis yechim (reja), xos va xosmas bazis reja, optimal reja, qo‘shimcha o‘zgaruvchi, qavariq kombinatsiya, qavariq to‘plam, qavariq to‘plamning burchak nuqtasi.

Chiziqli programmalashtirish matematik programmalashtirishning bir bo‘limi bo‘lib, u chegaralangan resurslar (xom-ashyo, texnika vositalari, kapital qo‘yilmalar, yer, suv, mineral o‘g‘itlar va boshqalar)ni ratsional taqsimlab eng ko‘p foyda olish yoki eng kam xarajat qilish yo‘llarini o‘rgatadi.

Chiziqli programmalashtirishning shakllanishi XX asrning ikkinchi yarmidagi iqtisodiy fikrlarning takomillashishiga katta ta’sir ko‘rsatdi. 1975 yilda chiziqli programmalashtirish nazariyasini birinchi bor kashf qilgan rus olimi L.V.Kantorovichga va matematik iqtisodiyot bo‘yicha mutaxassis, “Chiziqli programmalashtirish” terminining birinchi muallifi, amerika olimi T.Kupmansga Nobel mukofotining berilishi chiziqli programmalashtirishning iqtisodiy nazariyaga qo‘shgan hissasini tan olishdan iborat deb hisoblash mumkin.

Chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning, uning tarkibiga kiruvchi noma’lumlarga chegaralovchi shartlar qo‘yilganda, eng katta va eng kichik qiymatini izlash va topish uslubini o‘rgatuvchi bo‘limdir.

Noma’lumlarga chiziqli chegaralashlar qo‘yilgan chiziqli funksiyaning ekstremumini topish chiziqli programmalashtirishning predmetini tashkil qiladi. Shunday qilib, chiziqli programmalashtirish chiziqli funksiyaning shartli ekstremumini topish masalalari turkumiga kiradi.

Iqtisodiy jarayonlarning o‘ziga xos qonuniyatlarini o‘rganish uchun, birinchi navbatda, bu jarayonlarni tavsiflovchi matematik modellarni tuzish kerak. O‘rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarning (masalalarning) matematik modelini tuzish uchun quyidagi bosqichlardagi ishlarni bajarish kerak:
1) masalaning iqtisodiy ma’nosi bilan tanishib, undagi asosiy shartlar va maqsadni aniqlash;
2) masaladagi ma’lum parametrlarni belgilash;
3) masaladagi noma’lumlarni (boshqaruvchi o‘zgaruvchilarni) belgilash;

4) masaladagi cheklamalarni, ya’ni boshqaruvchi o‘zgaruvchilarning qanoatlantirishi kerak bo‘lgan chegaraviy shartlarni chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;
5) masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash.

Boshqaruvchi o‘zgaruvchilarning barcha cheklamalarni qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish kerakki, u maqsad funksiyaga eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat bersin. Bundan ko‘rinadiki, maqsad funksiya boshqaruvchi noma’lumlarning barcha qiymatlari ichida eng yaxshisini (optimalini) topishga yordam beradi. Shuning uchun ham maqsad funksiyani foydalilik yoki optimallik mezoni deb ham ataladi.

Iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish jarayonini amaliyotda nisbatan ko‘p uchraydigan quyidagi iqtisodiy masalalar misolida o‘rganamiz.

Ishlab chiqarishni tashkil qilish va rejalashtirish masalasi. Faraz qilaylik, korxonada m xil mahsulot ishlab chiqarilsin; ulardan ixtiyoriy birini i bilan belgilaymiz. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun n xil ishlab chiqarish faktorlari zarur bo‘lsin. Har bir xom-ashyoning umumiy miqdori va bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan normasi haqidagi ma’lumotlar quyidagi jadvalda berilgan bo‘lsin.

Xom-ashyolar / **Mahsulot turlari**	**1**	**2**	**3**	**…**	n	**Daromad**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	c_2
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	c_m
Xom-ashyolar zahirasi	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Jadvaldagi har bir: $b_j - j$ xom-ashyoning umumiy miqdori (zahirasi); a_{ij} – i mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan j xom-ashyo miqdori; c_j – korxonaning j mahsulotning bir birligini sotishdan oladigan daromadi.

Masalaning iqtisodiy ma’nosi: korxonaning ishini shunday rejalashtirish kerakki:

a) hamma mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan har bir xom-ashyoning miqdori ularning umumiy miqdoridan oshmasin;

b) mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan daromadi maksimal bo‘lsin.

Rejalashtirilgan davr ichida ishlab chiqariladigan i mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masaladagi a) shart quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra noma’lumlar manfiy bo‘lmasligi kerak, ya’ni: $x_i \ge 0, \quad (i = \overline{1,m})$.

Masaladagi b) shart uning maqsadini aniqlaydi. Demak, masalaning maqsadi mahsulotlarni sotishdan korxonaning oladigan umumiy daromadini maksimallashtirishdan iborat bo‘lib, uni $y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$ funksiya orqali ifodalash mumkin. Shunday qilib, ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasining matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m},$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m \to \max.$$

Iste’mol savati masalasi. Faraz qilaylik, kishi organizmi uchun bir sutkada n xil $A_1, A_2, ..., A_n$ oziqa moddalari kerak bo‘lsin, jumladan bir sutkada A_1 oziqa moddasidan kamida b_1 miqdorda, A_2 oziqa moddasidan b_2 miqdorda, A_3 oziqa moddasidan b_3 miqdorda va hokazo, A_n ozuqadan b_n miqdorda zarur bo‘lsin va ularni m ta $B_1, B_2, ..., B_m$ mahsulotlar tarkibidan olish mumkin bo‘lsin. Har bir B_i mahsulot tarkibidagi A_j oziqa moddasining miqdori a_{ij} birlikni tashkil qilsin.

Ozuqa moddalari / **Mahsulot turlari**	A_1	A_2	A_3	**…**	A_n	**Mahsulot bahosi**
B_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	c_1
B_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	c_2
…	…	…	…	…	…	…
B_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	c_m
Ozuqa moddasining minimal normasi	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Masalaning iqtisodiy ma'nosi: iste'mol savatiga qanday mahsulotlardan qancha miqdorda kiritish kerakki, natijada:

a) odam organizmi qabul qiladigan turli oziqa moddasining miqdori belgilangan minimal miqdordan kam bo'lmasin;

b) iste'mol savatining umumiy bahosi minimal bo'lsin.

Iste'mol savatiga kiritiladigan i-mahsulotning miqdorini x_i bilan belgilaymiz. U holda masalaning

a) sharti quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n. \end{cases}$$

Masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, undagi noma'lumlar manfiy bo'la olmaydi, ya'ni: $x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1,m})$.

Masalaning b) sharti uning maqsadini ifodalaydi. Demak, masalaning maqsadi iste'mol savatiga kiritiladigan mahsulotlarning umumiy bahosini minimallashtirishdan iborat bo'lib, uni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m \to \min .$$

Shunday qilib, iste'mol savati masalasining matematik modeli ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \dots,\ x_m \geq 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \to \min .$$

Optimal bichish masalasi. Optimal bichish masalasining eng sodda holi bilan tanishamiz. Faraz qilamiz, uzunligi L bo'lgan xomaki materiallardan uzunliklari $\Delta_i \ (i = \overline{1,m})$ bo'lgan m xil detallarning har biridan c_i miqdorda tayyorlash kerak bo'lsin. Bundan tashqari xomaki materiallarni n usul bilan kesish mumkin, hamda har bir j usul bilan kesilgan xomaki materialdan a_{ij} miqdorda i detal tayyorlash va b_j miqdorda chiqindi hosil qilish mumkin ekanligi aniqlangan bo'lsin. Xomaki materiallardan qanchasini qaysi usul bilan kesganda tayyorlangan detallar miqdori rejadagiga teng bo'ladi va hosil bo'lgan chiqindilarning umumiy miqdori eng kam (minimal) bo'ladi.

Tayyorlanadigan detallarning uzunliklari	Kesish usullari				Detallar ishlab chiqarish rejasi
	1	2	…	n	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	c_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{1n}	c_2
…	…	…	…	…	…
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	c_m
Chiqindilar	b_1	b_2	…	b_n	

j usul bilan kesiladigan xomaki materiallar miqdorini x_j bilan belgilaymiz. U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko‘rinishda yoiziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0,$$

$$Y = b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n \to \min.$$

1-misol. Uzunligi 110 sm. bo‘lgan po‘lat xipchinlardan uzunliklari 45 sm, 35 sm va 50 sm bo‘lgan xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo‘lsin. Talab qilingan xomaki mahsulotlar miqdori mos ravishda 40, 30 va 20 birlikni tashkil qilsin. Po‘lat xipchinlarni kesish yo‘llari va ularga mos keluvchi xomaki mahsulotlar va chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xomaki mahsulotlar Uzunligi	Kesish usullari						Xomaki mahsulotlar i/ch rejasi
	1	2	3	4	5	6	
45 sm.	2	1	1	-	-	-	40
35 sm.	-	1	-	3	1	-	30
50 sm.	-	-	1	-	1	2	20
Chiqindilar	20	30	15	5	25	10	

Har bir kesish usuli bo‘yicha qancha po‘lat xipchinlar kesilganda tayyorlangan xomaki mahsulotlar miqdori rejadagiga teng bo‘ladi va chiqindilarning umumiy miqdori minimal bo‘ladi?

Yechish: $j-$usul bilan kesiladigan po‘lat xipchinlar sonini x_j bilan belgilaymiz. U holda uzunligi 45sm bo‘lgan xomaki mahsulotlardan ja’mi $2x_j + x_2 + x_3$ miqdorda tayyorlanadi. Rejaga ko‘ra bunday mahsulotlar soni 40 taga teng bo‘lishi kerak, ya’ni $2x_j + x_2 + x_3 = 40$.

Xuddi shuningdek, uzunliklari 35sm va 50sm bo‘lgan xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarish rejasini to‘la bajarilishidan iborat shartlar mos ravishda $x_2 + 3x_4 + x_5 = 30$ va $x_3 + x_5 + 2x_6 = 20$ tenglamalar orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy ma’nosiga ko‘ra belgilangan noma’lumlar manfiy bo‘la olmaydi, demak $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_6 \geq 0$.

Rejadagi xomaki mahsulotlarni ishlab chiqarishda hosil bo‘lgan chiqindilar-ning umumiy miqdorini quyidagi chiziqli funksiya ko‘rinishida ifodalaymiz: $Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_{6.}$.

Masalaning shartiga ko‘ra bu funksiya minimum qiymatni qabul qilishi kerak, ya’ni $Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \rightarrow min.$

Shunday qilib, quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 40, \\ x_2 + 3x_4 + x_5 = 30, \\ x_3 + x_5 + 2x_6 = 20 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_6 \geq 0,$$

$$Y = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 5x_4 + 25x_5 + 10x_6 \rightarrow min.$$

2-misol. Konditer fabrikasi uch turdagi A, B, C karamellarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom-ashyo: shakar, qiyom va quruq mevalar ishlatadi. 1 tonna karamel turlarini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan xom-ashyolar miqdori (me’yori), xom-ashyolarning zahirasi hamda 1 tonna karamelni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyo turlari	**1 tonna mahsulotga xom-ashyo sarfi (t. hisobida)**			**Xom-ashyo zahirasi (t)**
	A	B	C	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Qiyom	0,4	0,4	0,3	600
Quruq mevalar	-	0,1	0,1	120
1 t karamel sotishdan olinadigan daromad (sh.b.)	108	112	126	

Fabrikaga maksimal foyda keltiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini toping.

Yechish: Konditer fabrikasida A turdagi karameldan x_1 miqdorda, B turdagi karameldan x_2 miqdorda va C turdagi karameldan x_3 miqdorda ishlab chiqarilsin deb belgilaymiz. U holda fabrikada ishlab chiqariladigan barcha karamellar uchun $0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3$ miqdorda shakar sarf qilinadi. Bu miqdor shakarning zahirasidan, ya'ni 800 tonnadan oshmasligi kerak. Demak, $0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. Xuddi shunday yo'l bilan mos ravishda qiyom va quruq mevalar sarfini ifodalovchi quyidagi tengsizliklarni hosil qilish mumkin: $0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600,\ 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 120.$ Fabrika ishlab chiqargan A karameldan $108x_1$, B karameldan $102x_2$, C karameldan $126x_3$ birlik va ja'mi $108x_1 + 112x_2 + 126x_3$ birlik daromad oladi. Bu yig'indini Y bilan belgilab uni maksimumga intilishini talab qilamiz. natijada quyidagi funksiyaga ega bo'lamiz: $Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to max$. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600, \\ \qquad\qquad 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 120. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$

$$Y = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to max.$$

Chiziqli programmalashtirish masalasi (ChPM) umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ ...., \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max\ (\min). \tag{3}$$

Demak, (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi noma'lumlarning shunday qiymatlarini topish kerakki, ular (3) chiziqli funksiyaga minimum (maksimum) qiymat bersin.

Masalaning (1) va (2) shartlari uning chegaraviy shartlari, (3) chiziqli funksiya esa masalaning maqsadi yoki **maqsad funksiyasi** deb ataladi.

Muayyan masalalarda (1) shart tenglamalar sistemasidan, "≥" yoki "≤" ko'rinishdagi tengsizliklar sistemasidan yoki aralash sistemadan iborat bo'lishi mumkin.

Ko‘p hollarda ChPMsida qatnashayotgan tengsizliklarning ishoralarini bir xil ko‘rinishga keltirib olinadi. Shu sababli ChPMsining quyidagi shaklini

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ ...., \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \le b_k, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{1a}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2a}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{3a}$$

uning **standart shakli** deb qabul qilingan.

ChPMsi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ ...., \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min . \tag{6}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda (4)-(6) masala **kanonik** ko‘rinishdagi ChPMsi deb ataladi.

ChPMsini (4)-(6) shaklini turli ko‘rinishlarda yozish mumkin. Bu ko‘rinishlarni keltirib o‘tamiz.

1. ChPMning vektor ko‘rinishi. (4)-(6) masalani vektor ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{aligned} &P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_nx_n = P_0, \\ &x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ &Y = CX \to \min, \end{aligned} \tag{7}$$

bu yerda

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ ..., \ P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \ C = (c_1, c_2, ..., c_n).$$

2. ChPMning matrisa ko‘rinishi. (4)-(6) masalaning matritsa ko‘rinishdagi ifodasi quyidagicha yoziladi:

$$AX = P_0,$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n, \qquad (8)$$
$$Y = CX \to \min.$$

bu yerda $A = (a_{ij})$.

Ba’zi hollarda (4)-(6) masala quyidagacha ifodalanadi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, \qquad (9)$$
$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min.$$

Har qanday ChPMsini (4)-(6) ko‘rinishga keltirish mumkin. Buning uchun quyidagilarni amalga oshirish zarur: ChPMda qatnashayotgan tengsizliklarni tenglamaga keltirish kerak. Bu quyidagicha amalga oshiriladi.

Masalan, $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$ ko‘rinishdagi tengsizlikni olamiz. Bu tengsizlikning chap tamoniga qandaydir nomanfiy x_{n+1} o‘zgaruvchini shunday qiymat bilan qo‘shamizki, natijada tengsizlik tenglikka aylansin:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b,$$

bu yerda

$$x_{n+1} = b - a_1x_1 - a_2x_2 - ... - a_nx_n \geq 0$$

o‘zgaruvchi **qo‘shimcha o‘zgaruvchi** deb ataladi.

1-teorema. Berilgan $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$ tengsizlikning har bir $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ yechimiga $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$ tenglamaning bitta va faqat bitta yagona $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ yechimi mos keladi va aksincha.

Isbot: Faraz qilaylik, X_0 tengsizlikning yechimi bo‘lsin. U holda

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq b,$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Tengsizlikning chap tomonini o‘ng tomonga o‘tkazib hosil bo‘lgan ifodani α_{n+1} bilan belgilaymiz: $0 \leq b - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n) = \alpha_{n+1}$. Endi $Y_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1})$ vektor tenglamaning yechimi ekanligini ko‘rsatamiz:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + (b - a_1\alpha_1 - a_2\alpha_2 - ... - a_n\alpha_n) = b.$$

Endi agar Y_0 tenglamani qanoatlantirsa, u holda u tengsizlikni ham qanoatlantirishini ko‘rsatamiz.

Shartga ko‘ra: $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = b, \quad \alpha_{n+1} \geq 0.$ Bu tenglamadan $\alpha_{n+1} \geq 0$ sonni tashlab yuborish natijasida

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \leq b,$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bundan ko‘rinadiki, $X_0 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tengsizlikning yechimi ekan.

Shunday yo‘l bilan ChPMsining chegaralovchi shartlaridagi tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish mumkin. Bunda shunga e’tibor berish kerakki, sistemadagi turli tengsizliklarni tenglamalarga aylantirish uchun ularga bir-birlaridan farq qiluvchi nomanfiy o‘zgaruvchilarni qo‘shish kerak.

Masalan, agar ChPMsi quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \text{...}, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0, \tag{10}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min.$$

shaklda bo‘lsa, bu masaladagi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0,\ ...,\ x_{n+m} \geq 0$ qo‘shimcha o‘zgaruvchilar qo‘shish yordamida tenglamalarga aylantirish mumkin. Bu o‘zgaruvchilar Y funksiyaga 0 koeffisiyent bilan kiritiladi. Natijada (10) masala quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \text{..}, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, ..., x_{n+m} \geq 0, \tag{11}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ ... + c_nx_n + 0(x_{n+1} + ... + x_{n+m}) \to \min.$$

Xuddi shuningdek,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \text{...}, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0, \tag{12}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min.$$

shaklda berilgan ChPMsini kanonik shaklgakeltirish mumkin. Buning uchun qo‘shimcha $x_{n+1} \geq 0,\ x_{n+2} \geq 0,\ ...,\ x_{n+m} \geq 0$ o‘zgaruvchilar tengsizliklarning katta tomonidan ayriladi. Natijada quyidagi masala hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0,..., x_{n+m} \geq 0, \tag{13}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ ... + c_nx_n + 0(x_{n+1} + ... + x_{n+m}) \to \min.$$

Agar ChPMda maqsad funksiyasi

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

ko‘rinishda bo‘lsa, uni kanonik shaklda yozish uchun c_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ qarama-qarshi ishora bilan yozib olinib

$$\tilde{Y} = -c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n \to \min$$

ifodani hosil qilamiz.

3-misol. Quyidagi ChPMsini kanonik ko‘rinishga keltiring va uni turli ko‘rinishlarda ifodalang:

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad - 3x_3 \leq -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 6, \end{cases} \tag{I}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max .$$

Yechish: Masalaning cheklamalaridagi birinchi va uchinchi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$ qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritib, ularni tenglamalarga aylantiramiz, hamda birinchi tenglamaning ikki tomonini -1 ga ko‘paytirib undagi ozod hadni musbat songa aylantiramiz va (I) masalaga teng kuchli bo‘lgan quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \end{cases} \tag{II}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0,\ \ x_4 \geq 0,\ \ x_5 \geq 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max .$$

Ushbu masalada $Y \to \max$ ifodani qarama-qarshi ishora bilan olib, uni $Y \to \min$ bilan almashtiramiz. Natijada berilgan masalaning kanonik shakliga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6, \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$$

$$Y = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 0(x_4 + x_5) \to \min .$$

(III) masalaning matrisa ko‘rinishini yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U holda (III) masalaning matrisa shakli quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$AX = B,$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}, \qquad \text{(IV)}$$

$$Y = C^T X \to \min.$$

(III) masalani vector ko‘rinishlarda yozish uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$X = \left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\right),\ C = \left(-3,\ 2,\ -1,\ 0,\ 0\right).$$

U holda (III) masala quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 = P_0,$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,5}, \qquad \text{(V)}$$

$$Y = CX \to \min .$$

Endi matrisasi yechimlari va ularning xossalari bilan tanishamiz.

1-ta’rif. (4)-(6) masalaning **joiz yechimi** (joiz rejasi) deb, (4), (5) shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ vektorga aytiladi.

(4)-(6) masalaning joiz yechimlar to‘plami uning mumkin bo‘lgan (joiz) yechimlar to‘plamini tashkil etadi: $K_m = \left\{ X(x_1,...,x_n) : AX^T = P_0,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n} \right\}$. Bu yerda $r(A) = m < n$.

2-ta’rif. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in K_m$ joiz rejaning $n-m$ ta koordinatasi $(m < n)$ nolga teng bo‘lib, qolgan $x_1, x_2, ..., x_m$ koordinatalariga mos $P_1, P_2, ..., P_m$ vektorlar chiziqli erkli bo‘lsa, u holda $X^0 \in K_m$ joiz reja **bazis reja** deyiladi.

3-ta’rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo‘lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja, aks holda esa bu reja **aynigan bazis reja** deyiladi.

4-ta’rif. (4)-(6) masalaning (6) chiziqli funksiyasiga eng kichik qiymat beruvchi $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ bazis reja masalaning **optimal rejasi** (optimal yechimi) deyiladi.

(4)-(6) masalaning joiz yechimlari to‘plami xossalarini o‘rganish uchun ba’zi tushunchalarni kiritamiz.

$A_1, A_2, ..., A_n$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, R^n fazoda har bir $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vektorga koordinatalari $(a_1, a_2, ..., a_n)$ bo‘lgan nuqta mos keladi. Shuning uchun bundan keyin $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ vektorni R^n fazo nuqtasi deb qaraymiz.

5-ta’rif. $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_n A_n$ nuqtalar to‘plami $A_1, A_2, ..., A_n$ nuqtalarning **qavariq kombinasiyasi** deb ataladi. Bu yerda $\alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

$C \in R^n$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

6-ta’rif. Agar ixtiyoriy $A_1 \in C$ va $A_2 \in C$ nuqtalar bilan bir qatorda bu nuqtalarning $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ $(0 \leq \alpha_1 \leq 1,\ 0 \leq \alpha_2 \leq 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ qavariq kombinatsiyasidan iborat nuqta ham C to‘plamga tegishli bo’lsa, ya’ni $A_1 \in C,\ A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo‘lsa, u holda C to‘plam **qavariq to‘plam** deb ataladi.

Qavariq to‘lamning geometrik ma’nosini tushuntirish uchun A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesma tushunchasini kiritamiz.

Ma’lumki, A_1 va A_2 nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi

$$A(\alpha) = A_2 + (A_1 - A_2)\alpha$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda $A_1 - A_2$ to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori.

Agar $\alpha = 0$ bo‘lsa, u holda $A(0) = A_2$;

Agar $\alpha = 1$ bo‘lsa, u holda $A(1) = A_1$.

Agar $0 \le \alpha \le 1$ bo‘lsa, u holda $A(\alpha)$ – A_1 va A_2 nuqtalarni tutashtiruvchi kesmadagi nuqtalarni aks ettiradi.

1-teorema. ChPMsining joiz yechimlaridan tashkil topgan to‘plam qavariq to‘plam bo‘ladi.

Isbot: ChPMsining ixtiyoriy ikkita yechimining qavariq kombinasiyasi ham yechim ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, X_1 va X_2 ChPMsining yechimlari bo‘lsin. U holda

$$AX_1^T = P_0, \quad x_{1j} \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{14}$$

$$AX_2^T = P_0, \quad x_{2j} \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{15}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. X_1 va X_2 yechimlarning qavariq kombinasiyasini tuzamiz.

$$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2, \qquad 0 \le \alpha \le 1,$$

hamda uni yechim ekanligini ko‘rsatamiz:

$$AX^T = A\left[\alpha X_1^T + (1-\alpha) X_2^T\right] = \alpha A X_1^T + (1-\alpha) A X_2^{\,T},$$

(14) va (15) tenglamalarni inobatga olsak:

$$AX^T = \alpha P_0 + (1-\alpha) P_0 = P_0.$$

Bu munosabat X vektor ham yechim ekanligini ko‘rsatadi. Demak, ChPMsining yechimlaridan tashkil topgan to‘plam qavariq to‘plam bo‘ladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Agar k ta o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan $P_1, P_2, ..., P_k$ vektorlar berilgan bo‘lib, ular uchun

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_k x_k = P_0$$

tenglik barcha $x_i > 0$ lar uchun o‘rinli bo‘lsa, u holda $X = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, 0, .., 0)$ nuqta K qavariq to‘plamning burchak nuqtasi bo‘ladi.

3-teorema. Qavariq to‘plamning ixtiyoriy nuqtasini uning burchak nuqtalarining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

4-teorema. ChPMsi o‘zining optimal qiymatiga shu masalaning joiz yechimlaridan tashkil topgan qavariq to‘plamning burchak nuqtasida erishadi. Agar masala birdan ortiq burchak nuqtada optimal qiymatga erishsa, u shu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo‘lgan ixtiyoriy nuqtada ham o‘zining optimal qiymatiga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ K to‘plamning burchak nuqtasi bo‘lishi uchun musbat x_i komponentalar $P_1 x_1 + P_2 x_2 + ... + P_n x_n = P_0$ yoyilmada o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lmagan P_i vektorlarning koeffisiyentlaridan iborat bo‘lishi zarur va yetarli.

2-xulosa. ChPMsining bazis yechimiga K_m qavariq to'plamning burchak nuqtasi mos keladi va aksincha.

3-xulosa. ChPMsining optimal yechimini K_m to'plamning burchak nuqtalari orasidan qidirish kerak.

14-mavzu. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini. Grafik usul

Reja:

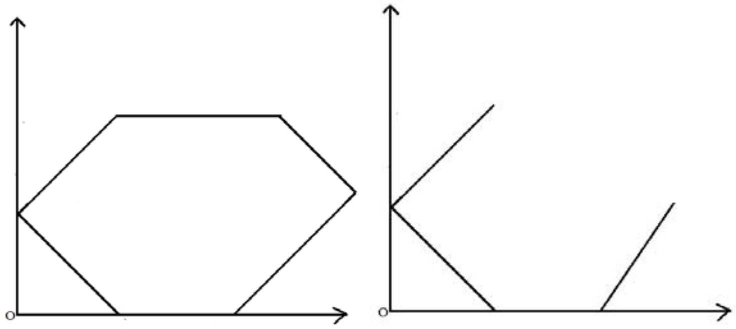
1. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometirik talqini.
2. Chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yechish.
3. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechish va tahlil qilish.

Tayanch so'z va iboralar: Gipertekislik, gipertekisliklar oilasi, yechimlar ko'pburchagi, sath to'g'ri chizig'i, aktiv va passiv shartlar, kamyob xom-ashyo.

ChPMsini geometrik nuqtai nazardan tahlil qilish uchun quyidagi statandart masalani ko'ramiz:

$$\begin{aligned} &Ax \le B \\ &x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,n} \\ &Y = CX \to \max \end{aligned} \tag{1}$$

Ma'lumki, (1) masalaning har qanday rejasini n-o'lchovli fazoning nuqtasi deb qarash mumkin. Bizga yana shu ham ma'lumki, chiziqli tengsizliklar bilan aniqlangan bunday nuqtalar to'plami qavariq to'plamdan iborat bo'ladi. Bu holda qavariq to'plam (qavariq ko'pburchak yoki ko'pyoq) chegaralangan yoki chegaralanmagan bo'lishi, bitta nuqtadan iborat bo'lishi yoki bo'sh to'plam bo'lishi ham mumkin. Masalan, qavariq to'plamlar



a) chegaralangan b) chegaralanmagan

(1) masalani geometrik nuqtai nazardan tahlil qilamiz. Buning uchun quyidagi

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b, \qquad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni bilan tanishib chiqamiz.

Ma’lumki, koordinatalari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \qquad (3)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $x_1, x_2, ...x_n$ nuqtalar to‘plami gipertekislik deb ataladi. Demak, (1) masalada (3) kabi tengliklar qatnashsa ular gipertekisliklarni ifodalaydi. Har qanday gipertekislik fazoni ikki yarim fazoga ajratadi. Bu yarim fazolardan faqat bittasigina (2) tengsizlikni qanoatlantiradi. (2) tengsizlikni qanoatlantiradigan yarim fazoni aniqlash uchun $O(0,0,...,0)$ koordinata boshidan foydalanamiz, ya’ni:

agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (2) tengsizlikni to‘g‘ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuqtani o‘z ichiga oluvchi yarim fazo (2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni bo‘ladi;

agar $O(0,0,...,0)$ nuqta (2) tengsizlikni noto‘g‘ri tengsizlikka aylantirsa, u holda $O(0,0,...,0)$ nuiqtani o‘z ichiga olmaydigan yarim fazo (2) tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni bo‘ladi.

Bundan ko‘rinadiki, (1) masalada nechta tensizlik qatnashsa ular shuncha yarim fazoni ifodalaydi. Bu yarim fazolarning kesishmasi esa (1) masalaning barcha joiz yechimlarini o‘z ichiga oluvchi qavariq to‘plamni tasvirlaydi. Bu qavariq to‘plam masalaning joiz yechimlar sohasi deb ataladi.

(1) masalaning optimal yechimini topish uchun $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ maqsad funksiyasidan foydalanamiz. Buning uchun

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = const \qquad (4)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi gipertekisliklar oilasini qaraymiz.

Ma’lumki, bu yerda $const$ ning har bir qiymatiga bitta gipertekislik mos keladi. ChPMsining qavariq to‘lami bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo‘lgan gipertekisliklar “sath gipertekisliklar” deyiladi. ChPMsining qavariq to‘plami bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan gipertekislik, ya’ni urinma gipertekislik tayanch gipertekislik deyiladi. Tayanch gipertekislikni hosil qilish uchun (4) tenglikdagi $const$ ga turli qiymatlar berib uni gipertekislikning normal vektori bo‘ylab parallel ko‘chiramiz va urinma gipertekislikni hosil qilamiz.

Shuni ta’kidlaymizki, Y funksiyaning maksimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo‘nalashi bo‘ylab, Y funksiyaning minimal qiymatini topish uchun normal vektorning yo‘nalashiga qarama-qarshi harakatlanish kerak.

$n = 2$ o‘lchovli fazoda, ya’ni tekislikda ChPMsini geometrik nuqtai nazardan ko‘rib chiqamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_{\cdot m} \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{6}$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \tag{7}$$

Faraz qilaylik, (5) sistema (6) shartni qanoatlantiruvchi yechimlarga ega va ulardan tashkil topgan to‘plam chegaralangan bo‘lsin.

Ma’lumki, (5) va (6) tengsizliklarning har biri

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i,\ (i = \overline{1,m}),$$

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0$$

to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan yarim tekisliklarni ifodalaydi. Bu tekisliklarni ko‘rib chiqamiz.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i,\ \ (i = \overline{1,m}) \tag{8}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamini aniqlash uchun $O(0,0)$ nuqtadan foydalanamiz. Agar $O(0,0)$ nuqta (8) tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda qidirilayotgan teksilik $O(0,0)$ nuqtani o‘z ichiga oladi, aks holda qidirilayotgan tekislik $O(0,0)$ nuqtani o‘z ichiga olmyadi. Yuqoridagi mulohazalar asosida (5) sistemaning yechimlaridan iborat qavariq ko‘pburchakni topib olganimizdan so‘ng (6) tengsizliklarni e’tiborga olamiz. (6) tengsizliklar (5) yordamida topilgan qavariq ko‘pburchakning I chorakdagi qismini ajratib olishga yordam beradi. (5) va (6) cheklamalarni qanoatlantiruvchi qavariq ko‘pburchakni reja ko‘pburchagi deb ataymiz.

(5)-(7) masalaning optimal yechimini topish uchun (7) ifodada qatnashayotgan chiziqli funksiyadan hosil qilinadigan

$$c_1x_1 + c_2x_2 = const \tag{9}$$

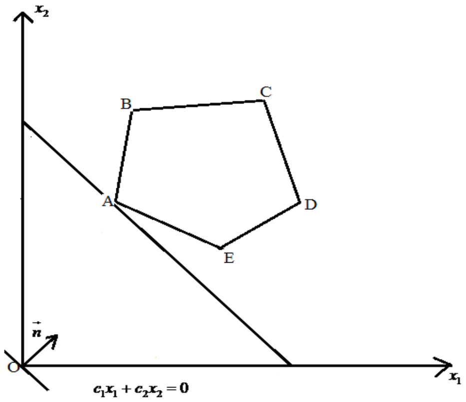
to‘g‘ri chiziqlar oilasidan foydalanamiz. Ma’lumki, (9) ifodadagi har bir ma’lum o‘zgarmas $C_0 = const$ qiymatida bitta

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

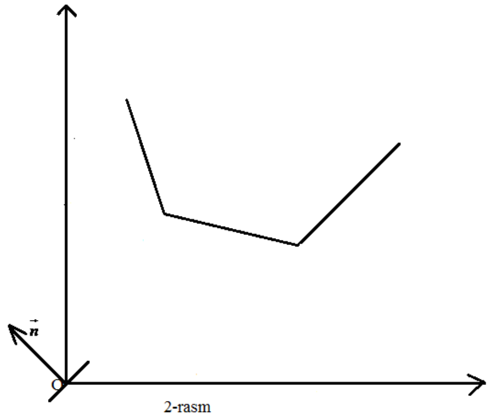
sath to‘g‘ri chizig‘i to‘g‘ri keladi.

So‘ngra, bu sath to‘g‘ri chiziqlardan birini, masalan, $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to‘g‘ri chiziqni chizib olamiz. $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ chiziqni $\vec{n}(c_1, c_2)$ normal vektor bo‘ylab parallel ko‘chirib, reja ko‘pburchagiga $c_1x_1 + c_2x_2 = C^0$ tayanch (urinma) to‘g‘ri chiziqni topib olamiz. Bu yerda C^0 (5)-(7) masalaning optimal yechimi yoki qiymati; $X^0(x_1^0, x_2^0)$ urinish nuqtasi esa (5)-(7) masalaning optimal rejasi deb ataladi.

Ba'zi xususiy hollarni ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, reja ko'pburchakgi $ABCDE$ beshburchakdan iborat bo'lsin (1-rasm).



$c_1x_1 + c_2x_2 = 0$
1-Rasm



2-rasm

1-rasmdan ko'rinib turibdiki, chiziqli funksiya o'zining minimal qiymatiga $ABCDE$ qavariq ko'pburchakning A nuqtasida erishadi. C nuqtada esa, u o'zining maksimal (eng katta) qiymatiga erishadi.

Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak chegaralanmagan bo'lsin. Bunday ko'pburchaklardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

1-hol. 2-rasmdagi holatda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ to'g'ri chiziq $\vec{n}$ vektor bo'ylab siljib borib har vaqt qavariq ko'pburchakni kesib o'tadi.

Bu holda $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ funksiya minimal qiymatga ham, maksimal qiymatga ham erishmaydi. Bu holda chiziqli funksiya (5) va (6) cheklamalar bilan aniqlangan sohada quyidan ham, yuqoridan ham chegaralanmagan bo'ladi.

1-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

$$Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

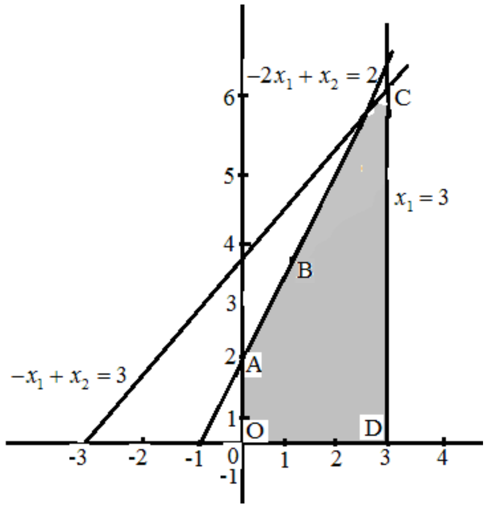
Yechish: Yechimlardan tashkil topgan qavariq ko'pburchak yasash uchun koordinatalar sistemasida

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

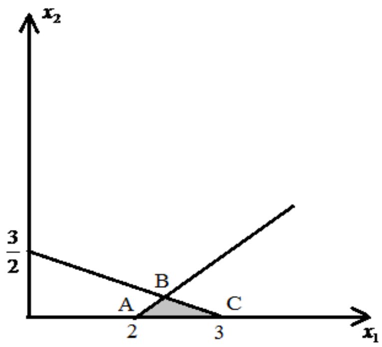
chiziqlar bilan chegaralangan

$$-2x_1 + x_2 \le 2, -x_1 + x_2 \le 3, x_1 \le 3$$

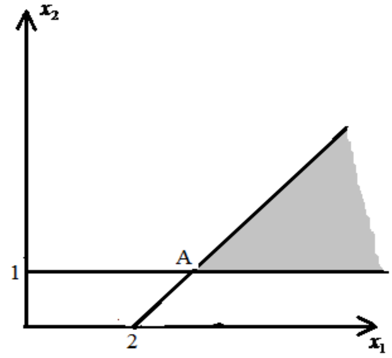
yarim tekisliklarni koordinatalar sistemasining I choragida yasaymiz, chunki $x_1, x_2 \geq 0$



Berilgan tengsizliklarni qanoatlantiruvchi yechimlar to'plami bo'yalgan OABCD-beshburchakni tashkil qiladi. Natijada $Z = -x_1 - 2x_2$ chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi $C(3;6)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtaning koordinatalari masalaning optimal rejasi, $Z(C) = -15 \to \min$ esa masalaning optimal yechimi bo'ladi.



1-rasm



2-rasm

2-misol. Berilgan ChPMsini grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$Y = 2x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Yechish: Bu yerda ham yuqoridagidek yechimlar ko'pburchagini hosil qilamiz. Yuqoridagi 1-rasmdan ko'rinadiki, yechimlar ko'pburchagi yuqoridan chegaralanmagan. Koordinata boshidan $\vec{n}(2;2)$ vektorni yasaymiz va unga perpendikulyar bo'lgan $2x_1 + 2x_2 = 0$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq $2x_1 + 2x_2 = const$ to'g'ri chiziqlar oilasidan biri bo'ladi. Shakldan ko'rinadiki, masalada maqsad funksiyaning qiymati yuqoridan chegaralanmagan.

3-misol. Masalani grafik usulda yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 1, \end{cases}$$
$$Y = x_1 - 2x_2 \to \max$$

Yechish: Masalani yuqoridagi usul bilan yechib quyidagi shaklga ega bo‘lamiz. Yuqoridagi 2-rasmdan ko‘rinadiki, yechimlar to‘plami chegaralanmagan, lekin optimal yechim mavjud va u $X^0(2,5;1)$ nuqta koordinatalaridan iborat.

Shuni alohida ta’kidlash kerakki, agar ChPMda noma’lumlar soni $n=2$ bo‘lganda uning optimal yechimini gtafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Agar ChPM kanonik ko‘rinishda berilgan bo‘lib, tenglamalar sistemasida noma’lumlar soni tenglamalar sonidan 2 taga ko‘p bo‘lsa, ya’ni $n-m=2$ bo‘lsa, bunday ChPMlarining optimal yechimlarini ham gtafik usulida topish maqsadga muvofiq.

Iqtisodiy masalalarning optimal yechimlarining tahlili. Endi ChPMsining optimal yechimini geometrik nuqtai nazardan tahlil qilib chiqamiz. Buning uchun quyidagi iqtisodiy masalaning optimal yechimini quramiz va tahlil qilamiz.

Faraz qilaylik, korxonada ikki xil bo‘yoq ishlab chiqarilsin. Bu bo‘yoqlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xom-ashyodan foydalanilsin. Xom-ashyolarning zahirasi 6 va 8 birlikni tashkil qilsin. Ikkinchi bo‘yoqqa bo‘lgan talab 2 birlikdan oshmasin va u birinchi bo‘yoqqa bo‘lgan talabdan 1 birlikka katta bo‘lsin.

Har bir bo‘yoqning bir birligini ishlab chiqarish uchun kerak bo‘lgan xom-ashyolar miqdori, hamda korxonaning har bir birlik bo‘yoqni sotishdan oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyolar / **Bo‘yoqlar**	**1**	**2**	**Foyda**
I	1	2	3
II	2	1	2
Zahira	6	8	

Har bir bo‘yoqdan qanchadan ishlab chiqarilganda ularga sarf qilingan xom-ashyolar miqdori ularning zahiralaridan oshmaydi, daromad eng yuqori bo‘ladi, hamda talab bo‘yicha shartlar bajariladi? Masalaning optimal rejasini toping.

Masaladagi noma’lumlarni belgilaymiz:

x_1 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan I mahsulotning miqdori;

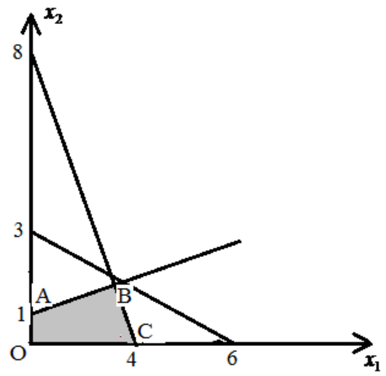
x_2 – ishlab chiqarish rejalashtirilgan II mahsulot miqdori.

U holda masalaning matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 - x_1 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \\ 0 \le x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$Y = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

Masalani grafik usulda yechib, $D(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3})$ optimal nuqta ekanligini aniqlaymiz.



Optimal yechim quyidagicha bo‘ladi: $x_1 = 3\frac{1}{3};\ x_2 = 1\frac{1}{3};\ Y_{\max} = 12\frac{2}{3}.$ Demak, korxona birinchi bo‘yoqdan $3\frac{1}{3}$ birlik, ikkinchisidan $1\frac{1}{3}$ birlik ishlab chiqarishi kerak. Bu holda uning oladigan daromadi $12\frac{2}{3}$ birlikka teng bo‘ladi:

$$X^0\left(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3}\right), \qquad Y = 12\frac{2}{3}.$$

Endi masalaning optimal yechimini tahlil qilamiz. Buning uchun $D-$ optimal nuqtani qaraymiz. Bu nuqta $2x_1 + x_2 = 8$ va $x_1 + 2x_2 = 6$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi. Bu esa, buyoq ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan ikkala xom ashyoning ham kamyob ekanligini ko‘rsatadi. Optimal nuqta bilan bog‘liq bo‘lgan bu shartlar aktiv shartlar , optimal nuqtaga bog‘liq bo‘lmagan shartlar esa passiv shartlar deb ataladi. Biz ko‘rayotgan masalada mahsulotlarga bo‘lgan talabga qo‘yilgan $-x_1 + x_2 \le 1$ va $x_2 \le 2$ shartlar optimal nuqtaga bog‘liq emas va shu sababli bu shartlar passiv shartlar.

Passiv shartlarga mos keluvchi resurslar kamyob bo‘lmaydi va ularning ma’lum darajada o‘zgarishi optimal yechimga ta’sir qilmaydi.

Aksincha, aktiv shartlarga mos keluvchi resurslarni bir birlikka oshirilishi optimal yechimning o‘zgarishiga olib keladi.

Masalan, 1-xom ashyo zahirasini bir birlikka oshirilishi optimal yechimga qanday ta'sir ko'rsatishini ko'rish uchun uning zahirasini 7 ga teng deb olamiz. U holda CD to'g'ri chiziq o'ziga parallel ravishda yuqoriga ko'tariladi va DCK uchburchak reja ko'pburchagiga qo'shiladi. Natijada K nuqta optimal nuqtaga aylanadi.

Bu nuqtada $x_1 = 2; x_1 + 2x_2 = 7; 2x_1 + x_2 = 8$ to'g'ri chiziqlar kesishadi. Shuning uchun endi masalaning $0 \le x_2 \le 2; x_1 + 2x_2 \le 7; 2x_1 + x_2 \le 8$ shartlar aktiv shartlarga aylanadi. Demak, yangi optimal yechim: $X^0(2,3), Y_{\max} = 13$.

Xuddi shunday yo'l bilan 2-xom ashyoni bir birlikka oshirish optimal yechimni qanday o'zgartirishini ko'rsatish mumkin.

Bundan tashqari kamyob bo'lmagan xom-ashyolar miqdorini, optimal yechimga ta'sir qilmagan holda, qanchalik kamaytirish mumkinligini ham ko'rsatish mumkin.

Yuqoridagi 8-shaklda BC kesma $x_1 = 2$ chiziqni, ya'ni masalaning 4 shartini ifodalaydi. Ma'lumki, bu – passiv shart. Maqsad funksiya qiymatini o'zgartirmagan holda passiv shartni qanchalik o'zgartirish mumkin ekanligini aniqlash uchun BC kesmani o'ziga parallel ravishda pastga, D nuqta bilan kesishguncha siljitamiz. Bu nuqtada $x_2 = \frac{4}{3}$ bo'ladi.

Demak, ikkinchi bo'yoqqa bo'lgan talabni optimal yechimga ta'sir qilmasdan $\frac{4}{3}$ gacha kamaytirish mumkin ekan.

Shunday yo'l bilan masalaning optimal yechimiga ta'sir etmasdan uning boshqa passiv shartning o'ng tomonini qanchaga kamaytirish mumkin ekanligini ko'rsatish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Fermada qo'ng'ir va sariq quyonlar parvarish qilinadi. Ularning normal parvarishi uchun 3 turdagi ozuqa ishlatiladi. Qo'ng'ir va sariq quyonlar uchun har kungi zarur bo'lgan har bir turdagi ozuqalar miqdori jadvalda keltirilgan. Hayvon fermasi ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi ozuqaning umumiy miqdori va 1 ta qo'ng'ir va sariq quyon terisini sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Ozuqa turi	Kunlik zarur bo‘lgan ozuqa birligi miqdori		Oziqaning umumiy miqdori
	Qo‘ng‘ir quyon	Sariq quyon	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 ta terini sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	16	12	

Ferma eng katta daromad olishi uchun ishni qanday tashkil etishi kerak?

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 \geq 2 \end{cases}$
$Z = -x_1 - x_2 \to \min$
$x_1, x_2 \geq 0.$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$
$Z = x_1 - 2x_2 \to \min$
$x_1, x_2 \geq 0.$

4. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ -2x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$
$Z = -5x_1 - 7x_2 \to \min$
$x_1, x_2 \geq 0.$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 6 \end{cases}$
$Z = 2x_1 + 13x_2 \to \min$
$x_1, x_2 \geq 0.$

6. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 6x_1 - x_2 \geq 12 \end{cases}$
$Z = x_1 + 2x_2 \to \max$
$x_1, x_2 \geq 0.$

15-mavzu. Chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usulida yechish

Reja:

1. Simpleks usuli haqida.
2. Simpleks jadvalida almashtirishlarni bajarish.
3. Optimal yechimni aniqlashga doir teoremalar.
4. Maqsad funksiyaning chekli minimumga ega bo‘lmaslik sharti.
5. Simpleks usuli.
6. Sun’iy bazis, sun’iy vektor.
7. Sun’iy bazis vektor usulining mohiyati.
8. Sun’iy bazis vektor usulida bazis yechimning optimallik sharti.
9. ε -usuli.

Tayanch so‘z va iboralar: Simpleks usuli, optimallik bahosi, sun’iy o‘zgaruvchilar.

Simpleks usuli eng keng foydalaniladigan barcha raqamli algoritmlardan foydalanadigan keng tarqalgan chiziqli dasturlash usullaridan biri. Bu 1940 yilda ishlab chiqilgan bo‘lib chiziqli dasturlash model sifatida ham iqtisodiy ham harbiy rejalalarni amalga oshirish uchun ishlatilgan.

Simpleks usuli faqat chiziqli dasturlash muammolarini yechishga qaratilgan bo‘lsada uning yechish texnikalari umumiy qiziqishga sazovordir. Shu texnikasi chiziqsiz optimallashtirish muammolarini chiziqli cheklovlardan foydalanish va chiziqsiz cheklovlarni umumiylashtirish mumkin.

Simpleks usuli iqtisodiyot uchun muhim tarixiy aloqalarga ega va bu usul bilan bog‘liq atamashunoslikka katta hissa qo‘shgan. Misol uchun xarajatlar va soya narxlar degan iborani gapirish. Ko‘p ilovalar uchun bu atamalar foydali va bu chiziqli dasturlash modelini talqin qilishda foydalaniladi.

Dansig yaratgan simpleks usul bilan chiziqli progammalash masalasining optimal yechimini topish uchun ChPMsi kanonik shaklda va cheklamalar sistemasi keltirilgan tenglamalar sistemasi shaklida bo‘lishi kerak. Simpleks usuli ChPMsining optimal yechimini chekli qadamdan so‘ng topishga yordam beradi.

Bizga quyidagi ChPMsi berilgan bo‘lsin.

$$Z = C^T x \to \min$$
$$Ax = b$$
$$x \ge 0.$$

bu yerda $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ ko‘rinishda ifodalanadi.

Bu bazis o‘zgaruvchilarning vektori esa nolga teng bo‘lgan bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchilarning vektori. Maqsad funksiya quydagicha yoziladi:

$$Z = C_B^T x_B + C_N^T x_N,$$

bu yerda bazis o‘zgaruvchilarning koeffisiyentlarida, bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchilarning koeffisiyentlari esa da va biz tenglikni quydagicha yozishimiz mumkin:

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Qaytadan yozilganda quydagicha bo‘ladi:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchilarni qiymati o‘zgartirish orqali $Ax = b$ tenglikka barcha mumkin bo‘lishi bo‘lgan barcha yechimlarni qo‘lga kiritamiz.

Bu formulani Z formulaga alishtirsak biz quydagi formula kelib chiqadi

$$Z = C_B^T B^{-1}b + (C_N^T - C_B^T B^{-1}N)x_N.$$

Agar biz $y=(C_B^T B^{-1})^T = B^{-T} C_B$, ni aniqlasak, Z ni quydagicha yozishimiz mumkin:

$$Z = y^T b + (C_N^T - y^T N)x_N.$$

Bu formula samaraliroq. y vektor simpleks vektorning ko‘paytiruvchilaridir.

Maqsad funksiya va bazis o‘zgaruvchilarning qiymati $x_N = 0$ qiymat qo‘yish orqali topiladi.

$$x_B = \widehat{b} = B^{-1}b \quad \text{va} \quad \widehat{Z} = C_B^T B^{-1} b.$$

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	C_B^T	C_N^T	0
x_B	B	N	b

va bazis asosda jadval quyidagicha bo‘ladi

Bazis	x_B	x_N	b_0
$-Z$	0	$C_N^T - C_B^T B^{-1} N$	0
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Bu simplek jadvalining rasmiy formulalari hisoblanadi.

Bizga quyidagi ChPMsi berilgan bo‘lsin.

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \quad x_2 \quad + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad\quad x_m + \tilde{a}_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min \tag{3}$$

Ko‘rinib turibdiki bu masalada (1) cheklamalar keltirilgan tenglamalar sistemasi ko‘rinishidadir. (1) sistemani vektor shaklida yozib olamiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \ldots + P_nx_{\ n} = P_0,$$

bu yerda $P_1,\ P_2, \ldots, P_m$ vektorlar sistemasi m-o‘lchovli fazoda chiziqli erkli birlik vektorlar sistemasidan iborat bo‘lib, bazis vektorlar sistemasini tashkil etadi. Ular m-o‘lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ o‘zgaruvchilar “**bazis** (erksiz) **o‘zgaruvchilar**” deb ataladi. $x_{m+1},\ x_{m+2}, \ldots,\ x_n$ o‘zgaruvchilar bazis bo‘lmagan (erkli) o‘zgaruvchilar. Agar erkli o‘zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o‘zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo‘ladi. Natijada $X_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ bazis yechim hosil bo‘ladi. Bu yechimni boshlang‘ich bazis yechim deb ataymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritamiz: P_b –

bazis vektorlar sistemasi; $C_b -$ maqsad funksiyasida bazis o‘zgaruvchlar oldidagi c_i koeffisiyentlar.

Yuqoridagilardan foydalanib quyidagi jadvalni hosil qilamiz.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}		a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}		a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	...	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_l	c_l	b_l	0	0	$\dots$	0	a_{lm+1}		a_{lk}	$\dots$	a_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}		a_{mk}	$\dots$	a_{mn}

Bu jadval **simpleks jadvali** deb ataladi. $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ boshlangich bazis rejani optimallikka tekshirish uchun bu jadvalga qo‘shimcha $\Delta = \{\Delta_0, \Delta_j\}$, $j = \overline{1,n}$ satr kiritamiz.

Jadvalning P_0 ustiniga mos Δ_0 ni quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_0 \equiv Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i c_i \,. \tag{4}$$

Jadvalning P_j ustinlariga mos Δ_j larni esa quyidagicha hisoblaymiz:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i - c_j \,. \tag{5}$$

U holda yuqoridagi jadval quyidagi ko‘rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
			P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2k}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	...	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_l	c_l	b_l	0	0	$\dots$	0	a_{lm+1}	$\dots$	a_{lk}	$\dots$	a_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	$\dots$	Δ_m	Δ_{m+1}	$\dots$	Δ_k	$\dots$	Δ_n

(5) formuladan ko‘rinib turibdiki, simpleks jadvaldagi bazis vektorlarga mos Δ_j lar har doim 0 ga teng.

Agar c_j ustunlarga mos barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \le 0$ shart bajarilsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechim optimal yechim bo‘ladi. Y chiziqli funksiyaning minimal qiymati Y_0 ga teng bo‘ladi.

Shunday qilib, $\Delta_j \le 0$ shart (1)-(3) ChPMsi uchun **optimallik sharti** deyiladi.

Agar kamida bitta j uchun $\Delta_j > 0$ bo‘lsa, u holda $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ masalaning optimal yechimi bo‘la olmaydi.

Bunday holatda topilgan $X_0(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ bazis rejani optimal rejaga yaqin bo‘lgan boshqa bazis rejaga almashtirish kerak.

Yangi bazisga kiritiladigan vektorni

$$\max_{\Delta_j > 0} \Delta_j \tag{6}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\max\limits_{\Delta_j > 0} \Delta_j = \Delta_k$ bo‘lsin. Demak, yangi bazislar sistemasida P_k vektor bazis vektor sifatida qatnashishi kerak. Agar P_k bazisga kiritilsa, u holda eski $P_i -$ bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak, chunki (1) sistemaga mos A matrisaning rangi: $rang(A) = m$. Bazisdan chiqariladigan P_i, $i = \overline{1,m}$ vektorni aniqlash uchun $\dfrac{b_i}{a_{ik}}$ nisbat orqali aniqlovchi koeffisiyent tushunchasini kiritamiz. Bazisdan chiqariladigan P_i, $i = \overline{1,m}$ vektorni

$$\min_{a_{ik} > 0} \frac{b_i}{a_{ik}} \tag{7}$$

shart asosida aniqlaymiz.

Masalan, $\min\limits_{a_{ik} > 0} \dfrac{b_i}{a_{ik}} = \dfrac{b_l}{a_{lk}}$ bo‘lsin. Demak, P_l vektor bazisdan chiqariladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan l satrdagi P_l vektor o‘rniga u joylashgan k ustundagi P_k vektor bazis vektor sifatida kiritiladi. Buning uchun simpleks jadvalida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi.

1. l satrdagi barcha: b_l, a_{lj} elementlarni a_{lk} hal qiluvchi elementga bo‘lib, bu satrda $\dfrac{b_l}{a_{lk}}, \dfrac{a_{l1}}{a_{lk}}, ..., \dfrac{a_{lk-1}}{a_{lk}}, 1, \dfrac{a_{lk+1}}{a_{lk}}, ..., \dfrac{a_{ln}}{a_{lk}}$ elementlarni hosil qilamiz. U holda jadval quyidagi ko‘rinishga keladi:

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n	a.k
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n	
P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	$\frac{b_1}{a_{1k}}$
P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	$\frac{b_2}{a_{2k}}$
…	…	…	…	…	…	...	…	…	…	…	…	
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	0	…	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	…	1	…	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$	$\boxed{\frac{b_l}{a_{lk}}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	$\frac{b_m}{a_{mk}}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	Δ_1	…	Δ_m	Δ_{m+1}	…	$\boxed{\Delta_k}$	…	Δ_n	

2. P_k vektorni bazis vektorga aylantirish uchun, ya'ni jadvalni quyidagi

P_b	C_b	P_0	c_1	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
			P_1	…	P_l	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	c_1	b_1	1	…	$-\frac{a_{1k}}{a_{lk}}$	…	0	$\tilde{a}_{1m+1}$	…	0	…	$\tilde{a}_{1n}$
P_2	c_2	b_2	0	…	$-\frac{a_{2k}}{a_{lk}}$	…	0	$\tilde{a}_{2m+1}$	…	0	…	$\tilde{a}_{2n}$
…	…	…	…	…	…	…	...	…	…	…	…	…
P_l	c_l	$\frac{b_l}{a_{lk}}$	0	…	$\frac{1}{a_{lk}}$	…	0	$\frac{a_{lm+1}}{a_{lk}}$	…	1	…	$\frac{a_{ln}}{a_{lk}}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	…	$-\frac{a_{mk}}{a_{lk}}$	…	1	$\tilde{a}_{mm+1}$	…	0	…	$\tilde{a}_{mn}$
Δ_j		Δ_0	Δ_1	…	$\tilde{\Delta}_l$	…	Δ_m	$\tilde{\Delta}_{m+1}$	…	$\tilde{\Delta}_k$	…	$\tilde{\Delta}_n$

ko'rinishga keltirish uchun jadvalda quyidagi elementar almashtirishlarni bajaramiz:

$$\tilde{b}_i = b_i - \frac{b_l}{a_{lk}} a_{ik};\ \ \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{lj}}{a_{lk}} a_{ik};\ i \neq l. \tag{8}$$

Bu jarayonni barcha Δ_j lar uchun $\Delta_j \le 0$ shart bajarilguncha davom ettiramiz. Har bir qadamda $\Delta_j \le 0$ optimallik shartini tekshirib boramiz.

Shunday qilib quyidagi teoremalar o‘rinli.

1-teorema. Agar biror bir $X^0 = (x_1^0,\ x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ bazis reja uchun $\Delta_j \le 0$, $(j = \overline{1,n})$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda bu reja optimal reja bo‘ladi.

2-teorema. Agar X^0 bazis rejada biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ shart o‘rinli bo‘lib qolsa, u holda X^0 optimal reja bo‘lmaydi va uholda shunday X_1 rejani topish mumkin bo‘ladiki, uning uchun

$$Y(X_1) < Y(X^0)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Agar biror bir j uchun $\Delta_j > 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, bu ustundagi barcha elementlar uchun $a_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ bo‘lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo‘lmaydi.

Shuning uchun quyidagi shartlarga:

1. $\Delta_j > 0$; 2. $a_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

(1)-(3) masalaning optimal yechimga ega bo‘lmaslik sharti deyiladi.

Agar ChPMsida maqsad funksiyasi

$$Y = c_1x_1 + c_1x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda masalaning optimallik sharti sifatida:

$$\Delta_j \ge 0, \quad (j = \overline{1,n})$$

tengsizlikni; masalaning optimal yechimga ega bolmaslik sharti sifatida esa:

1. $\Delta_j > 0$; 2. $a_{ij} \le 0$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$

tengsizliklarni qabul qilamiz.

1-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2; \\ -x_1 + 2x_2 \le 7; \\ x_1 \le 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ (j = 1, 2.)$$

$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min .$$

Yechish: Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritamiz

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7; \\ x_1 + x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, 2, ..5.)$$

$$Y = -x_1 - 2x_2 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	-1	-2	0	0	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	$\boxed{2}$
P_4	0	7	-1	2	0	1	0	782
P_5	0	3	1	0	0	0	1	-
Δ_j		0	1	$\boxed{2}$	0	0	0	
P_2	-2	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	3	0	-2	1	0	$\boxed{1}$
P_5	0	3	1	0	0	0	1	3
Δ_j		-4	$\boxed{5}$	0	-2	0	0	
P_2	-2	4	0	1	-1/3	2/3	0	-
P_1	-1	1	1	0	-2/3	1/3	0	-
P_5	0	2	0	0	2/3	-1/3	1	3
Δ_j		-9	0	0	4/3	-5/3	0	
P_2	-2	5	0	1	0	1/2	1/2	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
P_3	0	3	0	0	1	-1/2	3/2	
Δ_j		-13	0	0	0	-1	-2	

Simpleks usulning I bosqichida bazis vektorlar sistemasiga P_3 vektor kiritilib P_2 vektor bazisdan chiqarildi, II bosqichida P_4 bazisga kiritildi va P_1 bazisdan chiqarildi. Simpleks jadval (8) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi: $X_0 = (3, 5, 3, 0, \ 0,)$, $Y_{\min} = -13$.

2-misol. Quyidagi masalani simpleks usul bilan yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2; \\ -x_1 + x_2 \leq 3; \\ x_1 \leq 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1, 2.)$$

$$Z = -x_1 \to \min.$$

Yechish: Bu chiziqli tenglamani standartlashtirish uchun qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritamiz

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ (j = 1,2,..5.)$$

$$Z = -x_1 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	-1	0	0	0	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	-2	1	1	0	0	-
P_4	0	3	-1	1	0	1	0	-
P_5	0	3	1	0	0	0	1	$\boxed{3}$
Δ_j		0	$\boxed{1}$	0	0	0	0	
P_2	0	8	0	1	1	0	1	-
P_4	0	6	0	1	0	1	1	
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	
Δ_j		-3	0	0	0	0	-1	

$X_0 = (3, 0, 8, 6, 0,)$, $Y_{\min} = -3$.

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi misollarni simpleks usulda yeching.

1. $Z = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 30 \end{cases}$$

$x_j \geq 0. \ (j = 1,2,3,4)$

2. $Z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 22 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 30 \end{cases}$$

$x_j \geq 0. \ (j = 1,2,3)$

3. $Z = 7x_1 + 8x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 40 \end{cases}$$

$x_j \geq 0. \ (j = 1,2)$

4. $Z = 3x_1 + 9x_2 \to \min$

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ -3x_1 + x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$x_j \geq 0. \ (j = 1,2)$

5. $Z = -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 48 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \end{cases}$$

$x_j \geq 0. \ (j = 1,2,3)$

ChPM masalasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0, \qquad (1)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min.$$

Bu masalada tenglamalar sistemasi keltirilmagan. Shu sababli undagi tenglamalarga $x_{n+1},\ x_{n+2},\ ...,\ x_{n+m}$ – sun’iy o‘zgaruvchilar kiritib uni kengaytirilgan sistemaga aylantiramiz. U holda quyidagi masala hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, ..., x_{n+m} \geq 0, \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ ... + c_nx_n + M(x_{n+1} + ... + x_{n+m}) \to \min.$$

Bu yerda, $M-$ yetarlicha katta musbat son.

Sun’iy bazis o‘zgaruvchilariga mos $P_{n+1},\ P_{n+2},\ ...,\ P_{n+m}$ vektorlar “**sun’iy bazis vektorlar**” deb ataladi. Berilgan (1) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

1-teorema. Agar kengaytirilgan (2) masalaning optimal yechimida sun’iy bazis o‘zgaruvchilari nolga teng bo‘lsa, ya’ni: $x_{n+i} = 0 \quad (i = \overline{1,m})$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda bu yechim berilgan (1) masalaning ham optimal yechimi bo‘ladi.

Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimida kamida bitta sun’iy bazis o‘zgaruvchi noldan farqli bo‘lsa, u holda boshlang‘ich masala yechimga ega bo‘lmaydi.

Sun’iy bazis usuli maqsad funksiyaga jarima (penalty) termini kiritiladi qaysiki bazisga sun’iy o‘zgaruvchilar kiritishga mo‘ljallangan. Biz yana shartni minimallashtirish namunasidan metodni oydinlashtirish uchun foydalanamiz:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 14 \\ 2x_1 - 4x_2 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 19 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Oldingidek, standart shaklga keltiramiz va sun'iy o'zgaruvchlar kiritiladi. Lekin bu holatda qo'shimcha 1 muammo bosqich tashkil qilish o'rniga, maqsad funksiyaga qo'yilgan shart minimumga aylantiriladi.

$$Z' = 2x_1 + 3x_2 + Ma_1 + Ma_2 \to \min$$

bu yerda M eng katta musbat sonni ifodalaydi. Umuman, har bir sun'iy o'zgaruvchini ifodalovch bitta penalty termin bor. Kompyuter hisoblari uchun M programma chizig'ining yechimlari orasida vujudaga kelishi mumkin bo'lgan boshqa hamma sonlar uchun dominat yetarli katta son.

Agar M katta bo'lsa, musbat sun'iy o'zgaruvchini o'z ichiga olgan qandaydir bazis maqsad funksiya Z' qiymatini ham katta musbat songa olib boradi. Agar qandaydir bazis dastlabki chiziqli programmalash masalasining mumkin bo'lgan javobi bo'lsa, u holda o'rganilayotgan bazis o'z ichiga hech qanday sun'iy o'zgaruvchilarni olmaydi va uning maqsad qiymati kichikroq bo'ladi. Chunki sun'iy o'zgaruvchilar ular bilan katta qiymatli bog'liqlikka ega, simpleks usul agar bu mavjud bo'lsa ularni bazisdan oxirida olib tashlaydi. Qandaydir ba'zis jarima muammosi bo'lgan yechim bo'ladi qaysiki bazis emas hamma sun'iy o'zgaruvchilar (bundan buyog'iga nol) ham orginal muammoga mumkin bo'lgan yechim bo'ladi.

Sun'iy bazis usulida maqsad funksiya 1 muammo bosqichida maqsad funksiyaning chegarasi sifatida olinishi mumkin. Sun'iy bazis usulining maqsad funksiyasi mavjud:

$$Z' = c^T x + M\sum_i a_i$$

Bu maqsaddan foydalanishga teng:

$$\widehat{Z} = M^{-1}c^T x + \sum_i a_i$$

Chegaralarni $M \to \infty$ sifatida olish 1 maqsad bosqichini beradi. Natijada 1 muommo bosqichi ko'rinishi Sun'iy bazis usuli ko'rinishidan faqat tepa qatordan farq qiladi. Shu sababli biz simpleks usulini misollarda tezroq ko'rib chiqamiz ikki bosqich usulini tekshirishni amalga oshirishga nisbatan.

Bizning misolda, jarima (penalized) muommo uchun dastlabki bazis bilan sun'iy o'zgaruvchilar quyidagini beradi.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	2	3	0	0	M	M	0
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	2	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Oldingidek, sun'iy o'zgaruvchilar uchun qisqartirilgan qiymatlar nol bo'lmaydi va muammo doimiy bazis terminida yozilishi mumkin.

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	b_0
$-Z'$	-5M+2	2M+3	M	0	0	0	-16M
a_1	3	2	0	0	1	0	14
a_2	$\boxed{2}$	-4	-1	0	0	1	2
x_4	4	3	0	1	0	0	19

Birinchi takrorlashda x_1 kirayotgan o'zgaruvchi va a_2 chiqayotgan o'zgaruvchi. Ikki bosqich usulidagidek, sun'iy o'zgaruvchi bazisni tark etsa u ahamiyatsizga aylanadi va muammodan olib tashlanadi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (a_2 olib tashlangandan), biz quyidagicha bazis yechim olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	-8M+7	-1,5M+1	0	0	-11M-2
a_1	0	8	3/2	0	1	11
x_1	1	-2	-1/2	0	0	1
x_4	0	$\boxed{11}$	2	1	0	15

Ikkinchi takrorlashda x_2 kiritilayotgan o'zgaruvchi va x_4 chiqib ketayotgan o'zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashgandan keyin (a_1 ustun olib tashlangandan keyin chunki, u ahamiyatsiz) biz quyidagi yangi bazis javobni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b_0
$-Z'$	0	0	$-\dfrac{M+6}{22}$	$\dfrac{8M-7}{11}$	0	$-\dfrac{M+127}{11}$
a_1	0	0	1/22	-8/11	1	1/11
x_1	1	0	-3/22	2/11	0	41/11
x_2	0	1	2/11	1/11	0	15/11

Uchinchi takrorlashda x_3 kiritilayotgan o'zgaruvchi va a_1 chiqib ketayotgan o'zgaruvchi. Tayanch nuqta muvozanatlashganda keyin (a_1 ustun olib tashlangandan keyin chunki, u ahamiyatsiz), biz yangi bazis yechimni olamiz:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	0	0	-5	-11
x_3	0	0	1	-16	2

x_1	1	0	0	-2	4
x_2	0	1	0	3	1

Joriy bazis o‘z ichiga hech qanday sun’iy o‘zgaruvchini olmaydi, shuning uchun bu haqiqiy muammo uchun mumkin bo‘lgan maqsad. To‘rtinchi takrorlashda x_4 uchun qisqartirilgan qiymat bo‘lishsiz shuning uchun u optimal bazis emas. Muvoznatlashish quyidagini beradi:

Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
$-Z'$	0	5/3	0	0	-28/3
x_3	0	16/3	1	0	22/3
x_1	1	2/3	0	0	14/3
x_4	0	1/3	0	1	1/3

Bu bazis optimal. Kutilgandek, bu ikki bosqich usuldan olingan optimal bazis bilan bir xil.

Programmalarda bajarishda penalty uchun mos qiymatni tanlsh qiyin bo‘lishi mumkin.

M muammoda boshqa qiymatlar uchun dominant bo‘lishi uchun yetarlicha katta bo‘lishi zarur, lekin u juda katta bo‘lsa uni aylana bo‘ylab hisoblashda jiddiy muammolar kelib chiqadi.

3-misol. Masalani sun’iy bazis usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$$

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max.$$

Yechish: Masalada maqsad funksiyasiga qo‘yilgan shartni minimumga aylantirib, sun’iy $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ o‘zgaruvchilar kiritamiz va uni quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0, \ x_6 \geq 0,$$

$$Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \to \min.$$

Hosil bo‘lgan masalani simpleks jadvaliga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	-5	-3	-4	1	M	M	a.k
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_5	M	3	1	3	2	2	1	0	$\boxed{1}$
P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	1,5
Δ_j		6M	3M+5	$\boxed{5M+3}$	3M+4	3M-1	0	0	
P_2	-3	1	$1/3$	1	$2/3$	$2/3$	$1/3$	0	3
P_6	M	1	$4/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-2/3$	1	$\boxed{\frac{3}{4}}$
Δ_j		M-3	$\boxed{\frac{4}{3}M+4}$	0	$-\frac{1}{3}M+2$	$-\frac{1}{3}M-3$	$-\frac{5}{3}M-1$	0	
P_2	-3	$3/4$	0	1	$3/4$	$3/4$	$1/2$	$-1/4$	$\boxed{1}$
P_1	-5	$3/4$	1	0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/2$	$3/4$	-
Δ_j		-6	0	0	$\boxed{3}$	-2	1-M	-3-M	
P_3	-4	1	0	$4/3$	1	1	$2/3$	$-1/3$	
P_1	-5	1	1	$1/3$	0	0	$-1/3$	$2/3$	
Δ_j		-9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M	

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng. Shuning uchun (1-teoremaga asosan) berilgan masalaning optimal yechimi: $X_0(1, 0, 1, 0)$, $Z_{\min} = -9$, $Z_{\max} = 9$.

Aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi. Sikllanish va undan qutilish usuli (ε-usul). Agar ChPMsida P_i bazis vektorlarga mos keluvchi birorta $x_i^0 = 0$ bo'lsa, ya'ni

$$P_0 = P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_mx_m \tag{3}$$

yoyilmadagi x_i lardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, chiziqli programmalashtirish masalasi **aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi** deyiladi va P_i bazis vektorlarga mos keluvchi bazis reja esa aynigan reja bo'ladi.

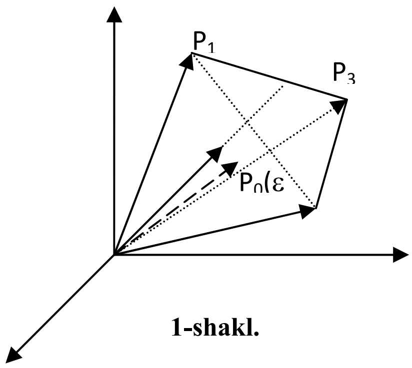
Yuqorida, simpleks usulni asoslash jarayonida chiziqli programmalashtirish masalalarini aynumagan deb faraz qilgan edik. Bu farazga ko'ra simpleks usulning har bir iteratsiyasidan so'ng chiziqli funksiyaning qiymati kamaya borishini va chekli sondagi iteratsiyadan so'ng u o'zining optimal qiymatiga erishishi mumkinligini ko'rsatgan edik.

Agar masalaning bazis rejasi aynigan reja bo'lsa,

$$\theta = \frac{b_k}{a_{lk}} = 0 \tag{4}$$

bo‘lishi mumkin. U holda bir bazis rejadan ikkinchisiga o‘tganda, chiziqli funksiyaning qiymati o‘zgarmaydi. Ba’zan bunday masalalarni yechish jarayonida sikllanish holati, ya’ni ma’lum sondagi iteratsiyadan so‘ng oldingi iteratsiyalardan birortasiga qaytish holati ro‘y berishi mumkin. Sikllanish holati ro‘y bergan masalalarda optimal reja hech qachon topilmaydi. Sikllanish odatda, bazis rejadagi birdan ortiq $x_i = 0$ bo‘lgan holatlarda ro‘y berishi mumkin. Birdan ortiq vektorlar uchun $\theta = 0$ bo‘lganda bazisdan chiqariladigan vektorni to‘g‘ri aniqlash sikllanish holatini oldini olishda katta ahamiyatga egadir. Bundan ko‘rinadiki, aynigan masalalarni yechishga moslashtirilgan usullar masalaning optimal yechimini topishga ishonch bildirib bazisdan chiqariladigan vektorni tanlashning yagona yo‘lini ko‘rsatishi kerak.

Aynigan ChPMsining geometrik tasvirini 1- shakldan ko‘rish mumkin. Bunda P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tuzilgan qavariq konusning sirtida yotibdi. Shuning uchun P_0 vektor P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi sifatida ifodalab bo‘lmaydi, lekin uni P_1 va P_2 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash uchun $P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3$ yoyilmadagi P_3 vektorning koeffisiyenti $x_3 = 0$ bo‘lishi kerak.



1-shakl.

Agar P_3 vektorni $\varepsilon > 0$ ga siljitib P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichiga kiritsak, u holda uni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin bo‘ladi. P_3 vektorni qavariq konusning ichiga siljitish uchun ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ son olib, P_1, P_2, P_3 vektorlarning

$$\varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3$$

kombinatsiyasini tuzamiz va uni masalaning

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_0$$

cheklamalarining o‘ng tomoniga qo‘shib yozamiz:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 = P_0(\varepsilon) \qquad (5)$$

Hosil bo‘lgan $P_0(\varepsilon)$ vektor P_1, P_2, P_3 vektorlardan tashkil topgan qavariq konusning ichida yotadi (1-shakl). Demak, P_0 ni P_1, P_2, P_3 vektorlarning qavariq kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Xuddi shuningdek, umumiy holda berilgan masalaning

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + P_nx_n = P_0 \tag{6}$$

cheklamalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} &P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + P_nx_n = \\ &= P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots + \varepsilon^m P_m + \ldots + \varepsilon^n P_n = P_0(\varepsilon) \end{aligned} \tag{7}$$

Faraz qilaylik, $P_1, P_2, \ldots, P_m$ bazis vektorlar bo‘lib, ular B matrisani tashkil qilsin. U holda

$$\overline{X} = B^{-1}P_0 \geq 0 \tag{8}$$

berilgan masalaning yechimi va

$$\overline{X}(\varepsilon) = B^{-1}P_0(\varepsilon) \geq 0 \tag{9}$$

o‘zgartirilgan (5) chegaralovchi shartli masalaning yechimi bo‘ladi.

$$\overline{X}_j = B^{-1}P_j \tag{10}$$

tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun (8) ni ushbu ko‘rinishda ifodalash mumkin.

$$\begin{aligned} \overline{X}(\varepsilon) &= B^{-1}P_0 + \varepsilon B^{-1}P_1 + \varepsilon^2 B^{-1}P_2 + \ldots + \varepsilon^m B^{-1}P_m + \ldots + \varepsilon^n B^{-1}P_n = \\ &= \overline{X} + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \ldots + \varepsilon^m X_m + \ldots + \varepsilon^n X_n. \end{aligned} \tag{11}$$

Demak, sistemaning o‘ng tamoni $\overline{b_i}(\varepsilon)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{b_i}(\varepsilon) = \overline{b_i} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j a_{ij} \tag{12}$$

$$\overline{b_i}(\varepsilon) = \overline{b_i} + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{ij} \tag{13}$$

ε kichik son bolgani uchun $\overline{b_i}(\varepsilon) > 0$.

Simpleks usulini qo‘llash jarayonida bazisdan chiqariladigan P_l vektorni aniqlash uchun

$$\theta_0 = \frac{b_l(\varepsilon)}{a_{lk}} = \min_i \frac{\overline{b_i}(\varepsilon)}{a_{ik}} = \frac{b_l + \varepsilon^i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} \varepsilon^j a_{ij}}{a_{lk}} > 0 \tag{14}$$

formuladan foydalanamiz. Farazga asosan $\dfrac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}$ nisbat $i = l$ da minimumga erishadi. Agar

$$\theta_0 = \min_i \frac{b_i(\varepsilon)}{a_{ik}}, \qquad (a_{ik} > 0)$$

qiymat, $i=l$ indeks uchun o‘rinli bo‘lsa, u holda P_l bazisdan chiqariladi.

Bazisga kiritiladigan P_k tanlangandan so‘ng, simpleks jadval ma’lum yo‘l bilan almashtiriladi. Natijada topilgan yangi $\overline{X}(\varepsilon)$ bazis reja yetarli darajada kichik ε uchun aynimagan reja bo‘ladi.

Amalda aynigan chiziqli programmalashtirish masalasi juda kam uchraydi. Quyida biz keltiradigan masala amerika matematigi Bil tomonidan tuzilgan.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0, \\ x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7},$$

$$Y = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4 \to \min .$$

Bu masala aynigan masala bo‘lib, uni yuqorida keltirilgan “to‘g‘rilash” usulini qo‘llamasak yechganda sikllanish holati ro‘y beradi. Simpleks usulning 7-iteratsiyasidan so‘ng 2-iteratsiyaga qaytish holati ro‘y beradi. Agar yuqorida ko‘rilgan “to‘g‘rilash” usulini qo‘llamasak, bu sikllanish holati cheksiz ravishda takrorlanishi mumkin, demak masalaning optimal yechimini topish imkoniyati bo‘lmaydi. Endi masalani “to‘g‘rilash” usulini qo‘llab yechamiz. Eng avval berilgan masaladagi sistemani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 + \frac{1}{4}\varepsilon - 60\varepsilon^2, \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 + \frac{1}{2}\varepsilon - 90\varepsilon^2, \\ x_3 + x_7 = 1, \end{cases}$$

Bu yerda ε kichik musbat son bo‘lib, uni shunday tanlash mumkinki, natijada tenglamalarning o‘ng tomoniga ε ning faqat birinchi va ikkinchi darajasini qo‘shish yetarli bo‘lsin. Masalani simpleks jadvalga joylashtirib yechamiz:

I.

P_b	C_b	P_0	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	$\frac{\varepsilon}{4} - 60\varepsilon^2$	1/4	-60	-1/25	9	1	0	0
P_6	0	$\frac{\varepsilon}{2} - 90\varepsilon^2$	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1

II.

P_1	-3/4	$\varepsilon - 240\varepsilon^2$	1	-240	-4/25	36	4	0	0
P_6	0	$30\varepsilon^2$	0	30	3/50	-15	-2	1	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4} + 160\varepsilon^2$	0	30	7/50	-33	-3	0	0

III.

P_1	-3/4	ε	1	40	8/25	-84	-12	8	0
P_2	150	ε^2	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
P_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4} + 150\varepsilon^2$	0	0	2/25	-18	-1	-1	0

IV.

P_1	-3/4	$\varepsilon - 160\varepsilon^2$	1	-160	0	-4	-4/3	8/3	0
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2$	0	500	1	-250	-100/3	50/3	0
P_7	0	$1 - 500\varepsilon^2$	0	-500	0	250	100/3	-50/3	1
		$-\frac{3\varepsilon}{4} + 110\varepsilon^2$	0	-40	0	2	5/3	-7/3	0

V.

P_1	-3/4	$\frac{2}{125} + \varepsilon - 168\varepsilon^2$	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125
P_3	-1/50	1	0	0	1	0	0	0	1
P_4	6	$\frac{1}{250} - 2\varepsilon^2$	0	-2	0	1	2/15	-1/15	1/250
		$-\frac{1}{125} - \frac{3\varepsilon}{4} - 114\varepsilon^2$	0	-36	0	0	7/5	-11/5	3/125

VI.

P_1	-3/4	$\frac{1}{125} + \varepsilon - 180\varepsilon^2$	1	-180	0	6	0	2	1/25
P_3	-1/50	$500\varepsilon^2 + 1$	0	0	1	0	0	0	1

P_5	0	$\frac{3}{100}-15\varepsilon^2$	0	-15	0	15/2	1	-1/2	3/100
		$135\varepsilon^2-\frac{1}{20}-\frac{3\varepsilon}{4}$	0	-15	0	-21/5	0	-3/2	-1/100

Shunday qilib, yuqoridagi “to‘g‘irlash” usulini qo‘llab masalani yechganda 6-bosqichda optimal yechim topiladi.

$$X(\varepsilon)=(180\varepsilon^2+\varepsilon+\frac{1}{25};\ 0;\ 500\varepsilon^2+1;\ 0;\ \frac{3}{100}-15\varepsilon^2),$$

$$Y_{\min}(\varepsilon)=-135\varepsilon^2-\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{1}{20}.$$

Berilgan masalani yechimini topish uchun $\varepsilon=0$ deb qabul qilamiz.

Javob: $X_0=(\frac{1}{25};\ 0;\ 1;\ 0;\ \frac{3}{100}),\ Y_{\min}=-\frac{1}{20}.$

Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi masalalarni sun’iy bazis usuli bilan yeching.

1. $Z=-4x_1-2x_2-8x_3\to\min$

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3\le 30\\ x_1+2x_2+4x_3=40\end{cases}$$

$x_1,x_2,x_3\ge 0$

2. $Z=-4x_1-2x_2\to\min$

$$\begin{cases}2x_1-2x_2\ge 4\\ -2x_1+x_2=2\end{cases}$$

$x_1,x_2\ge 0$

16-mavzu. Chiziqli programmalashtirishda ikkilanish nazariyasi

Reja:

1. Ikkilangan masala.
2. Qo‘shma masalalar.
3. O‘zaro qo‘shma masalalar orasidagi bog‘lanishlar.
4. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremalari.
5. Ikkilanish nazariyasining asosiy teoremalarining iqtisodiy talqini.
6. Iqtisodiy masalalarning yechimini tahlil qilish.

Tayanch so‘z va iboralar: O‘zaro qo‘shma masalalar, simmetrik qo‘shma masalalar, simmetrik bo‘lmagan qo‘shma masalalar, ikkilamchi baholar, ikkilangan masala.

Quyidagi ChPMsini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{2}$$

Bu masala matrisa shaklida quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{3}$$

1-ta'rif.

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m = c_l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n = c_n, \end{cases} \tag{4}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$\tilde{F} = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \tag{6}$$

masala (1), (2) masalaga **ikkilangan masala** deyiladi. U holda (3) masalaga ikkilangan masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &A^TY = C^T, \\ &y_i \ge 0, \ i = \overline{1,n}, \\ &\tilde{F} = B^TY \to \min. \end{aligned} \tag{7}$$

bu yerda $Y^T = (y_1 \ y_2 \ \ldots \ y_m)$, $C = (c_1 \ c_2 \ \ldots \ c_n)$.

Yuqoridagidan foydalanib ikkilangan masalani qurish qoidasini keltiramiz:

1. Berilgan masala koeffisiyentlaridan tashkil topgan asosiy matrisa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda ikkilangan masalaning asosiy matrisasi

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘lib, A matrisaga transponirlangan bo‘ladi.

2. Ikkilangan masaladagi noma’lumlar soni berilgan masaladagi cheklamalar soniga teng. Ikkilangan masaladagi cheklamalar soni esa berilgan masaladagi noma’lumlar soniga teng bo‘ladi.

3. Ikkilangan masalaning maqsad funksiyasi koeffisiyentlari berilgan masalaning ozod hadlardan iborat bo‘ladi. Ikkilangan masalaning ozod hadlari esa berilgan masalaning maqsad funksiyasi koeffisiyentlaridan iborat bo‘ladi.

4. Agar berilgan masalada $x_j \geq 0$ bo‘lsa, u holda ikkilangan masaladagi unga mos j-cheklamaga ≥ ko‘rinishdagi tengsizlik qo‘yiladi. Agarda x_j noma’lumning ishorasi noaniq bo‘lsa, u holda ikkilangan masaladagi j-cheklamaga tenglik qo‘yiladi.

5. Agar berilgan masaladagi i-cheklama tengsizlikdan iborat bo‘lsa, u holda ikkilangan masaladagi bu cheklamaga mos noma’lumning ishorasi $y_i \geq 0$ bo‘ladi. Agarda berilgah masaladagi i-cheklama tenglikdan iborat bo‘lsa, u holda ikkilangan masaladagi bu cheklamaga mos y_i noma’lumning ishorasi noaniq bo‘ladi.

Har qanday chiziqli programmalash masalasi uchun ikkilangan masala mavjud va uni berilgan masaladagi maqsad funksiya va noma’lumlarga qo‘yilgan cheklamalar orqali to‘la aniqlash mumkin.

Biz quyida ChPMlarinig bazilariga ikkilangan masalani qurish qoidasi bilan tanishib chiqamiz.

Standart ChPMsi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{aligned} &AX \leq B, \\ &x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{8}$$

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A \\ -E \end{pmatrix}$; $\overline{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ belgilashlar kiritamiz, bu yerda E $n \times n$ -o‘lchovli birlik matrisa, 0 n -o‘lchovli nol matrisa. U holda (8) masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} &\overline{A}X \leq \overline{B}, \\ &Y = CX \to \max. \end{aligned} \tag{9}$$

Bu masalaning ko‘rinishi (3) masala bilan mos tushadi. Demak, ikkilangan masalani yozishda tarifdan foydalanish mumkin. Shunday qilib, ta’rifga asosan (9) masala uchun ikkilangan masala quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &\overline{A}^T P = C^T, \\ &p_i \geq 0, \; i = \overline{1, n+m}, \\ &\tilde{F} = \overline{B}^T P \to \min. \end{aligned} \tag{10}$$

bu yerda, $P^T = \left(p_1 \;\; p_2 \;\; \dots \;\; p_{n+m}\right) = \left(Y^T, Z^T\right) = (y_1 \; y_2 \dots y_m \; z_1 \; z_2 \dots z_n)$. $A^T = \left(A^T, \; -E\right)$ ekanligini hisobga olib, oldingi belgilashlarga qaytsak (10) quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} &A^T Y - Z = C^T, \\ &y_i \geq 0, \; z_j \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min. \end{aligned} \tag{11}$$

$z_j \geq 0$ bo‘lgani uchun $A^T Y - Z = C$ tenglik $A^T Y \geq C$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun (8) masalaga ikkilangan masala

$$\begin{aligned} &A^T Y \geq C^T, \\ &y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min \end{aligned} \tag{12}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

ChPMsi quyidagicha berilgan bo‘lsin:

$$\begin{aligned} &AX = B, \\ &x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{13}$$

Ma’lumki, $q = k \Leftrightarrow \begin{cases} q \leq k, \\ q \geq k. \end{cases}$. U holda (13) masalani quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{aligned} &AX \leq B, \; -AX \leq -B, \\ &x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{14}$$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B \\ -B \end{pmatrix}$ belgilashlar yordamida (14) masalani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{aligned} &\tilde{A}X \leq \tilde{B}, \\ &x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{15}$$

(15) masalaga ikkilangan masalani, (12) ga asosan, yozamiz:

$$\begin{aligned} &\tilde{A}^T S \geq C^T, \\ &s_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ &\tilde{F} = \tilde{B}^T S \to \min. \end{aligned}$$

bu yerda $S^T = \left(s_1 \;\; s_2 \;\; \dots \;\; s_{2m}\right) = \left(P^T, Q^T\right) = \left(p_1 \;\; p_2 \;\; \dots \;\; p_m \;\; q_1 \;\; q_2 \;\; \dots \;\; q_m\right)$.

Oldingi belgilashlarga qaytamiz, u holda

$$A^T P - A^T Q \geq C^T,$$
$$p_i \geq 0,\ q_i \geq 0,\ \ i = \overline{1,m},$$
$$\tilde{F} = B^T P - B^T Q \to \min.$$

$Y = P - Q$ belgilashdan so‘ng

$$A^T Y \geq C^T,$$
$$\tilde{F} = B^T Y \to \min \tag{16}$$

masalani hosil qilamiz. Bu yerda Y ikkita matrisaning ayirmasi bo‘lgani uchun uning ishorasi noaniq bo‘ladi.

Berilgan masala va unga ikkilangan masala birgalikda o‘zaro qo‘shma masalalar deb ataladi. Agar qo‘shma masalalardan birortasi yechimga ega bo‘lsa, ularning ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo‘ladi.

O‘zaro qo‘shma masalalarni ko‘z oldiga keltirish va ularni iqtisodiy ma’nolarini tahlil qilish uchun quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko‘ramiz.

$$AX \leq B,$$
$$x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,n}, \tag{17}$$
$$F = CX \to \max.$$

Yuqoridagilardan xulosa qilib, o‘zaro qo‘shma masalalarning matematik modellarini quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

Simmetirik bo‘lmagan qo‘shma masalalar

	Berilgan masala	Ikkilangan masala
I	$AX = B,$ $x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$	$A^T Y \geq C^T,$ $\tilde{F} = B^T Y \to \min.$
II	$AX = B,$ $x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$	$A^T Y \leq C^T,$ $\tilde{F} = B^T Y \to \max.$

	Berilgan masala	Ikkilangan masala
I	$AX \leq B,$ $x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$	$A^T Y \geq C^T,$ $y_j \geq 0,\quad j = \overline{1,m},$ $\tilde{F} = B^T Y \to \min.$
II	$AX \geq B,$ $x_j \geq 0,\quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$	$A^T Y \leq C^T,$ $y_j \geq 0,\quad j = \overline{1,m},$ $\tilde{F} = B^T Y \to \max.$

1-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masalani tuzing.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Yechish: Masalada barcha cheklamalar "≤" ko'rinishdagi tengsizliklardan iborat. Demak, berilgan masalaga simmetirik bo'lgan qo'shma masala 4-ko'rinishda tuziladi. Natijada quyidagi simmetirik qo'shma masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,$$

$$F = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min.$$

2-misol. Berilgan masalaga ikkilangan masala tuzing.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 13, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Z = 4x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max.$$

Yechish: Berilgan masaladagi ikkinchi cheklama tenglamadan, birinchi va uchinchi cheklamalar esa tengsizliklardan iborat. Shuning uchun qo'shma masalani tuzishda yuqoridagi 5-punktda keltirilgan qoidaga rioya qilamiz va quyidagi masalaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \ge 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \ge 0,$$

$$F = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to \min.$$

Ikkilangan masalalar yechimlari orasida mavjud bolgan boglanishni ikkilanish nazariyasining asosiy tengsizligi va birinchi teoremasi orqali aniqlash mumkin.

Ikkilanish nazariyasida berilgan masalaning ixtiyoriy X joiz rejasi, hamda ikkilangan masalaning ixtiyoriy Y joiz rejasi uchun

$$F(X) \le \tilde{F}(Y)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bunday tengsizlik ikkilanish nazariyasining asosiy tengsizligi deb ataladi.

Agar X^* va Y^* joiz rejalar uchun

$$F(X^*) = \tilde{F}(Y^*)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda bu joiz rejalar mos ravishda berilgan va ikkilangan masalaning optimal rejasi bo‘ladi.

Bu tengsizlik ixtiyoriy joiz ishlab chiqarish rejasi, hamda xom-ashyolarning ixtiyoriy joiz baholari uchun ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi xom-ashyolar bahosidan oshmasligini ko‘rsatadi.

Ikkilanish nazariyasining asosini ikki teorema tashkil etadi. Ulardan biri ikkilanish teoremasi, ikkinchisi esa muvozanatlik teoremasi deb ataladi.

Muvozanatlik teoremasidan ikkilangan masalaning iqtisodiy tahlilida foydalanamiz, shu sababli biz bu teoremani keyinchalik keltiramiz.

Ikkilanish teoremasini keltirish uchun berilgan va ikkilangan masalalar orasidagi ba’zi bog‘lanishlarni aniqlab o‘lamiz.

2-ta’rif. $X = \left\{ x \middle| Ax \le B \right\}$ to‘plam (3) masalaning mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plami deyiladi.

3-ta’rif. Agar (3) masalaning mumkin bo‘lgan yechimlar to‘plami $X = \left\{ x \middle| Ax \le B \right\}$ bo‘sh bo‘lmasa, u holda **masala birgalikda** deyiladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz qabul qilamiz:

1-teorema (ikkilanish teoremasi). Agar (3) va (7) o‘zaro qo‘shma masalalarning har biri birgalikda bo‘lsa, u holda ularning ikkalasi ham yechimga ega bo‘ladi, hamda bu masalalardagi maqsad funksiyalarning ekstremal qiymatlari o‘zaro teng bo‘ladi, yani $F_{\min}(X^*) = \tilde{F}_{\max}(Y^*)$.

Bu teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

2-teorema. Agar o‘zaro ikkilangan masalalardan biri yechimga ega bo‘lsa, u holda ikkinchisi ham yechimga ega bo‘ladi.

3-teorema. Agar o‘zaro ikkilangan masalalardan biri birgalikda bo‘lib, ikkinchisi esa birgalikda bo‘lmasa, u holda birinchi masala o‘zining yechimlar to‘plamida chegeralanmagan bo‘ladi

Bu teoremalar ikkilangan masalalarda quyidagi holatlar bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatadi:

1. Quyidagi ikkala masala ham birgalikda (ikkalasi ham yechimga ega).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 \to \max.$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 1, \\ y_1 + 2y_2 = 1, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$$

$$\tilde{F} = 4y_1 + 4y_2 \to \min.$$

$$X^* = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \qquad\qquad Y^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

2. Quyidagi ikkala masala ham birgalikda emas.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le -4, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 - y_2 = 1, \\ -y_1 + y_2 = 3, \end{cases}$$

$$F = x_1 + 3x_2 \to \max. \qquad y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$$

$$\tilde{F} = 3y_1 - 4y_2 \to \min.$$

$$X = \varnothing \qquad\qquad X = \varnothing$$

3. Quyidagi masalardan biri birgalikda ikkinchisi birgalikda emas.

$$\{x_1 - x_2 \le 1, \qquad \begin{cases} y_1 = 1, \\ -y_1 = 1, \end{cases}$$

$$F = x_1 \to \max. \qquad y_1 \ge 0,$$

$$\tilde{F} = y_1 \to \min.$$

Masala birgalikda $\qquad\qquad Y = \varnothing$

Agar berilgan masala yechimga ega bo‘lsa, u holda ikkilangan masalaning yechimi

$$Y^0 = C^0 B^{-1}$$

formula orqali topiladi.

Xuddi shuningdek, agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo‘lsa, u holda berilgan masalaning optimal yechimi

$$X^0 = B^{-1} B^0$$

formula orqali topiladi. Bu formulalarda:

$C^0 -$ simpleks jadvalning oxirgi qadamidagi C_b vektor;

$B^0 -$ ikkilangan masala simpleks jadvalining oxirgi qadamidagi B vektor;

$B^{-1} -$ matrisani aniqlash uchun

$$AX \le B,$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$$

$$F = CX \to \max.$$

masala simpleks jadvalining oxirgi qadamini yozamiz

P_b	C_b	(X^0)	c_1	c_2	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
		P_0	P_1	P_2	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	…	…	…	…	…

P_l	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}

P_k vektorni $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, 0, ..., 0)$ $\left(P_0 = (b_1, b_2, ..., b_m)\right)$ optimal yechim bazislari $P_1, P_2, ..., P_m$ bo‘yicha yoyilmasini yozamiz

$$P_k = x_{1k}P_1 + x_{2k}P_2 + ... + x_{mk}P_m, \quad k = \overline{0,n}.$$

Bu yoyilmani quyidagicha yozish mumkin:

$$P_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ ... \\ x_{mk} \end{pmatrix} = DX_k.$$

D matrisaga teskari D^{-1} matrisani B^{-1} bilan belgilaymiz, ya’ni $D^{-1} \equiv B^{-1}$. U holda $B^0 = P_0$; $C^0 = C_b$.

3-misol. Berilgan masala va unga ikkilangan masalaning yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6},$$

$$F = x_2 - 3x_3 + x_5 \to \min.$$

Yechish: Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

P_b	C_b	P_0	0	1	-3	0	2	0	a.k.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0	
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0	
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1	$\boxed{10/3}$
Δ_j		0	0	-1	$\boxed{3}$	0	-2	0	
P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0	
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0	$\boxed{4}$
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1	
Δ_j		-9	0	$\boxed{1/2}$	0	-3/4	-2	0	

P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0	
P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0	
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1	
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-4/5	-7/5	0	

III bosqichda optimal yechimga ega bo‘lamiz: $X^0 = (0, 4, 5, 0, 0, 11)$, $F_{\min} = -11$.

$$C^0 = (1, -3, 0), \qquad B^0 = (4, 5, 11), \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$Y^0 = C^0 B^{-1} = (1 \quad -3 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan ikkilanish nazariyasining 1-teoremasi iqtisodiy nuqtai nazardan shunday talqin qilinadi: agar tashqaridan belgilangan c_j bahoda sotilgan mahsulotning pul miqdori y_i ichki bahoda o‘lchangan xarajatlar (xom-ashyolar) miqdoriga teng bo‘lsa, u holda mahsulotning ishlab chiqarish rejasi, hamda xom-ashyolarning baholari optimal bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, ikkilangan masaladagi noma’lumlar (ularni ikkilangan baholar deb ataymiz) sarf qilingan xarajatlar va ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdorlarini o‘zaro teng bo‘lishini taminlovchi vosita bolib xizmat qiladi.

Ma’lumki, chiziqli programmalash usullari jumladan, simpleks usul iqtisodiy masalalarning eng yaxshi (optimal) yechimini topishga yordam beradi.

Lekin biz uchun buning o‘zi kifoya emas. Optimal yechim topilgandan so‘ng iqtisodiy ob’ektlar (zavod, fabrika, firma) boshqaruvchilari oldida quyidagiga o‘xshagan masalalarni yechishga to‘g‘ri keladi:

1. xom-ashyolarning ba’zilarini oshirib, ba’zilarini qisqartirib sarf qilinsa optimal yechim qanday o‘zgaradi?

2. optimal yechimni o‘zgartirmasdan xom-ashyolar sarfini qanday darajaga o‘zgartirish (kamaytirish) mumkin?

3. mahsulotga bo‘lgan talab bir birlikka kamayganda (oshganda) optimal yechim qanday o‘zgaradi?

Shunga o‘xshash boshqa muammolarni hal qilishda ikkilanish nazariyasi teoremalaridan foydalaniladi. Bunda ikkilanish nazariyasining quyidagi teoremalariga asoslaniladi. Quyidagi o‘zaro qo‘shma masalalarni qaraymiz:

Berilgan masala:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{1}$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{aligned} &A^T Y = C^T, \\ &y_i \ge 0,\ i = \overline{1, m}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min. \end{aligned} \tag{2}$$

1-teorema (muvozanatlik teoremasi). $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ ikkilangan masalaning optimal yechimi bo‘lsin.

Agar $y_i^* > 0$ bo‘lsa, u holda

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i. \tag{3}$$

Ikkilanish va muvozanatlik teoremalaridan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

2-teorema. $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (1) berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ (2) ikkilangan masalaning joiz yechimi bo‘lsin.

Agar $y_i^* > 0$ tengsizlik bajarilganda

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i \tag{4}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda X^*, Y^* mos ravishda (1) va (2) masalalarning optimal yechimlari bo‘ladi.

Ikkilanish teoremalari ChPMsining standart, kanonik va boshqa turdagi masalalari uchun ham o‘rinli. Masalan, muvozanatlik teoremasini standart ChPMsi:

Berilgan masala:

$$\begin{aligned} &AX \le B, \\ &x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ &F = CX \to \max. \end{aligned} \tag{5}$$

Ikkilangan masala:

$$\begin{aligned} &A^T Y \ge C^T, \\ &y_i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ &\tilde{F} = B^T Y \to \min \end{aligned} \tag{6}$$

uchun keltiramiz.

3-teorema. $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ (5) berilgan masalaning, $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ (6) ikkilangan masalaning optimal yechimi bo‘lsin.

Agar $y_i^* > 0$ bo‘lsa,

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i. \quad (7)$$

Agar $x_j^* > 0$ bo‘lsa,

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + ... + a_{mj}y_m^* = c_j. \quad (8)$$

Bu shartlarni quyidagicha talqin qilish mumkin: agar birinchi masala yechimidagi noma’lum musbat qiymatga ega bo‘lsa, u holda ikkinchi masalada tegishli shartlar optimal rejada tenglikka aylanadi.

Bundan ko‘rinadiki: optimal yechimning ikkilangan bahosi – resurslar tanqisligi darajasining o‘lchovidir. Mahsulot ishlab chiqarishda to‘la ishlatiladigan xom-ashyo “**tanqis** (defitsit) xom-ashyo” deyiladi. Bunday xom-ashyoni oshirib sarf qilish korxonada mahsulot ishlab chiqarish darajasini oshiradi. Mahsulot ishlab chiqarishda to‘la ishlatilmaydigan xom-ashyo “**notanqis** (kamyob bo‘lmagan) xom-ashyo” hisoblanadi. Bunday xom-ashyolarni ikkilangan bahosi nolga teng bo‘ladi. Ularning miqdorini oshirish ishlab chiqarish rejasini oshirishga ta’sir qilmaydi.

1-masala. Deylik, korxonada bir xil mahsulotni 3 ta texnologiya asosida ishlab chiqarilsin. Har bir texnologiyaga bir birlik vaqt ichida sarf qilinadigan xom-ashyolar miqdori, ularning zahirasi, har bir texnologiyaning unumdorligi quyidagi jadvalda keltirilgan. Har bir texnologiya bo‘yicha korxonaning ishlash vaqtini shunday topish kerakki, natijada korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning miqdori maksimal bo‘lsin.

Resurslar	**Texnologiyalar**			**Zahira**
	T_1	T_2	T_3	
Ish kuchi (ishchi/soat)	15	20	25	1200
Birlamchi xom ashyo (t)	2	3	2,5	150
Elektroenergiya (Kvt/ch)	35	60	60	3000
Texnologiyaning unumdorligi	300	250	450	
Texnologiyalarni ishlatish rejalari	x_1	x_2	x_3	Z→max

Masalaning matematik modeli:

$$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,3}),$$

$$Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3 \to \max.$$

Masalani simpleks usuli bilan yechamiz.

X_b	C_b	B	300	250	450	0	0	0	a.k.
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0	$\boxed{48}$
X_5	0	150	2	3	2,5	0	1	0	60
X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1	50
Δ_j		0	-300	-250	$\boxed{-450}$	0	0	0	
X_3	450	48	0,6	0,8	1	0,04	0	0	80
X_5	0	30	0,5	1	0	-0.1	1	0	$\boxed{60}$
X_6	0	120	-1	12	0	-2,4	0	1	-
Δ_j		21600	$\boxed{-30}$	110	0	18	0	0	
X_3	450	12	0	-0,4	1	0,16	-1,2	0	
X_1	300	60	1	2	0	-0,2	2	0	
X_6	0	180	0	14	0	-2,6	2	1	
Δ_j		23400	0	170	0	12	60	0	

Jadvaldan ko‘rinadiki, $X^* = (60, 0, 12, 0, 0, 180)$, $Z(X^*) = 23400$.

Jumladan T_1 texnologiyani 60 soat, T_3 texnologiyani 12 soat qo‘llash kerak. T_2 texnologiyani esa umuman qo‘llamaslik kerak. Ikkilangan masalaning yechimi:

$$Y^* = (12, 60, 0), \qquad \tilde{Z}(Y^*) = 23400.$$

Masalaning yechimidan ko‘rinadiki, 1 va 2-resurslar (ish kuchi va birlamchi xom-ashyo) to‘la ishlatiladi. Demak, ular kamyob resurslardir. 3-resurs (elektroenergiya) kamyob emas.

Berilgan masala yechimini uning cheklamalariga qo‘yganda 1 va 2-shartlar tenglikka aylanadi. 3-shart qat’iy tengsizlikka aylanadi.

(5) va (6) masala misolida ikkilanish nazariyasining ba’zi tatbiqlarini ko‘rib chiqamiz. Buning uchun quyidagicha belgilash kiritamiz: $d = F_{\max} = \tilde{F}_{\min}$. Biz d ning qiymati B^T vektorga bog‘liqligini aniqlaymiz. Shu maqsadda $d = \tilde{F}(B^T)$ deb qaraymiz.

$\tilde{F}(B^T)$ funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. $\tilde{F}(B^T)$ – bir jinsli, ya’ni $\tilde{F}(\lambda B^T) = \lambda \tilde{F}(B^T), \ \lambda \geq 0$;
2. $\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning aniqlanish sohasida botiq.

Qavariq funksiyalar nazariyasidan ma’lumki botiq funksiya aniqlanish sohasining ichida uzluksiz. Demak, $\tilde{F}(B^T)$ funksiya ham aniqlanish sohasida uzluksiz.

$\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning differensiallanuvchanligi ikkilangan masala yechimlarining strukturasiga bog‘liq.

4-teorema. Agar ikkilangan masala yagona Y^* yechimga ega bo‘lsa, u holda $\tilde{F}(B^T)$ funksiya B^T nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib,

$$\frac{\partial \tilde{F}(B^T)}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = 1, 2, ..., m$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Agarda ikkilangan masala yechimi yagona bo‘lmasa, u holda yuqoridagiga o‘xshash tasdiqni keltirish qiyinroq. Ammo bu holda ham yechimlar to‘plamining ko‘pyog‘ida chetki nuqtalar yagona $\tilde{F}(B^T)$ funksiyaning differensial xarakteristikalari bo‘lib qoladi.

Quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi yechimini tahlil qilamiz.

2-masala. 3 ta A, B, C, mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xom-ashyolar (resurslar) ishlatilsin, I tur xom-ashyoning zahirasi 180 kg, II tur xom-ashyoning zahirasi 210 kg va III tur xom-ashyoning zahirasi 244 kg bo‘lsin. Har bir mahsulotning 1 birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xom-ashyoning miqdori (normasi) va mahsulot birligining bahosi (narxi) quyidagi jadvalga joylashtirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar pul qiymatini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini toping.

Xom-ashyo / **Mahsulot turi**	**I**	**II**	**III**	**Mahsulot birligi bahosi (p.b.)**
A	4	3	1	10
B	2	1	2	14
C	1	3	5	12
Xom-ashyo zahirasi (kg)	180	210	244	

Bu masala bor resurslardan optimal foydalanish masalasi bo‘lib, uning matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,3}),$$

$$Z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max.$$

Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz.

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \qquad (i = \overline{1,3}),$$

$$F = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \to \min.$$

Berilgan masalani kanonik ko‘rinishga keltiramiz va simpleks jadvalga joylashtirib uni simpleks usul bilan yechamiz.

№	X_b	C_b	10	14	12	0	0	0	X_0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	X_4	0	4	2	1	1	0	0	$\boxed{180}$
2	X_5	0	3	1	3	0	1	0	210
3	X_6	0	1	2	5	0	0	1	244
Δ_j			-10	$\boxed{-14}$	-12	0	0	0	
1	X_2	14	2	1	1/2	½	0	0	90
2	X_5	0	1	0	5/2	-1/2	1	0	120
3	X_6	0	-3	0	4	-1	0	1	$\boxed{64}$
Δ_j			18	0	$\boxed{-5}$	7	0	0	1260
1	X_1	14	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	82
2	X_5	0	23/8	0	0	1/8	1	-5/8	80
3	X_3	12	-3/4	0	1	-1/4	0	¼	16
Δ_j			57/4	0	0	23/4	0	5/4	1340

Optimal yechim berilgan masala uchun $X^* = (0,\ 82, 16)$, $Z(X^*) = 1340$; ikkilangan masala uchun $Y^* = \left(\frac{23}{4},\ 0,\ \frac{5}{4}\right)$, $F(Y^*) = 1340$.

Endi berilgan masala yechimini tahlil qilamiz.

Ikkilangan masala yechimida $y_1^* = \frac{23}{4}$, $y_3^* = \frac{5}{4}$. Demak, 3-teoremaga asosan I va III tur xom-ashyolar to‘la ishlatilgan. Chunki bu yerda

$$4 \cdot 0 + 2 \cdot 82 + 16 = 180, \quad 0 + 2 \cdot 82 + 5 \cdot 16 = 244$$

Shu sababli bu xom-ashyolar kamyob hisoblanadi.

$y_2^* = 0$. Demak II tur xom-ashyo to‘la ishlatilmagan. Shu sababli bu xom-ashyo kamyob emas.

Ikkilangan masalaning yechimi “shartli optimal yechim” deyiladi. Ular yordamida xom-ashyolar 1 birlik ortiqcha sarf qilinganda maqsad funksiyasining qiymati, ya’ni daromad qanchaga o‘zgarishi ko‘rsatiladi.

Masalan, 1-tur resursni 1 kg ortiqcha sarf qilish natijasida maqsad funksiyaning qiymati $5{,}75$ birlikka oshadi.

Agar 1-tur resursdan ishlab chiqarishda 1 kg ortiqcha sarf qilinsa, uning ishlab chiqarish rejasi o‘zgaradi. Bu yangi rejaga muvofiq ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdori 5,75 ko‘proq bo‘ladi. Jadvaldagi x_4 ustunga qarab quyidagilarni aniqlaymiz. Yangi rejada B mahsulotni ishlab chiqarish $\frac{5}{8}$ birlikka oshadi va C mahsulotni ishlab chiqarish $\frac{1}{4}$ birlikka kamayadi. Buning natijasida 2-tur xom-ashyoni sarf qilish $\frac{1}{8}$ birlikka kamayadi.

Xuddi shuningdek, x_6 ustunga qaraymiz. 3-tur xom-ashyo xarajatini 1 birlikka oshirib sarf qilish natijasida yangi reja topiladi va bu rejaga ko‘ra ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul qiymati 1,25 birlikka oshadi va daromad 1340+1,25=1341,25 birlikni tashkil qiladi. Bu natija B mahsulot ishlab chiqarishni $\frac{1}{8}$ birlikka kamaytirish, C mahsulot ishlab chiqarishni $\frac{1}{4}$ birlikka oshirish hisobiga bo‘ladi. Bu holda 2 tur resurs $\frac{5}{8}$ kg. ko‘proq sarf qilinadi.

17-mavzu. Iqtisodiy masalalarning yechimlarini tahlil qilish

Ma’lumki, chiziqli dasturlash usullari va jumladan, simpleks usul iqtisodiy masalalarning eng yaxshi (optimal) yechimini topishga yordam beradi.

Lekin buning o‘zi kifoya emas. Optimal yechim topilgandan so‘ng iqtisodiy ob’ektlar (zavod, fabrika, firma) boshliqlari oldida quyidagiga o‘xshash muammolarni yechishga to‘g‘ri keladi:

- xom ashyolarning ba’zilarini oshirib, ba’zilarini qisqartirib sarf qilinsa optimal yechim qanday o‘zgaradi?

- optimal yechimni o‘zgartirmasdan xom ashyolar sarfini qanday darajaga o‘zgartirish (kamaytirish) mumkin?

Mahsulotga bo‘lgan talab bir birlikka kamayganda (oshganda) optimal yechim qanday o‘zgaradi?

Shunga o‘xshash muammolarni hal qilishda ikkilanish nazariyasidan foydalaniladi. Bunga ikkilanish nazariyasining yuqoridagi teoremalariga asoslaniladi.

Iqtisodiy masalaning optimal yechimini tahlil qilish jaraenini quyidagi misolda ko‘rsatamiz.

1-masala. Faraz qilaylik, korxonada bir xil mahsulot 3 ta texnologiya asosida ishlab chiqarilsin. Har bir texnologiya bo‘uyicha bir birlik vaqt ichida sarf qilinadigan resurslarning miqdori, ularning zahirasi, har bir texnologiyaning unumdorligi quyidagi jadvalda kelitirilgan.

Resurslar	**Texnologiyalar**			**Resurslar zahirasi**
	T1	**T2**	**T3**	
Ish kuchi (ishchi/soat)	15	20	25	1200
Birlamchi xom ashyo	2	3	2.5	150
Elektroenergiya (kvt/s)	35	60	60	3000
Texnologiyaning unumdorligi	300	250	450	
Texnologiyalarni qayta ishlatish rejalari (vaqti)	X_1	X_2	X_3	

Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori maksimal bo‘lishi uchun qaysi texnologiyadan qancha vaqt foydalanish kerak?

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz:

$$15x_1+20x_2+25x_3 \leq 1200$$
$$2x_1+3x_2+2.5x_3 \leq 150$$
$$35x_1+60x_2+60x_3 \leq 3000$$
$$x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0, \quad x_3\geq 0,$$
$$Y=300\,x_1+250\,x_2+450\,x_3 \longrightarrow \max$$

Hosil bo‘lgan masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$15W_1+2W_2+35W_3\geq 300,$$
$$20W_1+3W_2+60W_3\geq 250,$$
$$25W_1+2.5W_2+60W_3\geq 450,$$
$$W_1\geq 0,\ W_2\geq 0,\ W_3\geq 0,$$

$$F=1200W_1+150W_2+3000W_3 \longrightarrow \min$$

Berilgan masalani kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$15x_1+20x_2+25x_3+x_4=1200$$
$$2x_1+3x_2+2.5x_3+x_5=150$$
$$35x_1+60x_2+60x_3+x_6=3000$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ x_4\geq 0,\ x_5\geq 0,\ x_6\geq 0,$$
$$Y=-300x_1-250x_2-450x_3 \longrightarrow \min$$

Bu masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

B. o‘zg	C_{baz}	B_0	-300	-250	-450	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_4	0	1200	15	20	25	1	0	0
X_5	0	150	2	3	2.5	0	1	0
X_6	0	3000	35	60	60	0	0	1
Δ_j		0	300	250	450	0	0	0
X_3	-450	48	0.6	0.8	1	0.04	0	0
X_5	0	30	0.5	1	0	-0.1	1	0
X_6	0	120	-1	12	0	-2.4	0	1
Δ_j		-21600	30	-110	0	-18	0	0
X_3	-450	12	0	-0.4	1	0.16	-1.2	0
X_1	-300	60	1	2	0	-0.2	2	0
X_6	0	180	0	14	0	-2.6	2	1
Δ_j		-23400	0	-170	0	-12	-60	0

Simpleks usulning III-bosqichida berilgan masalaning optimal yechimi topildi

$$X^*=(60;\ 0;\ 12;\ 0;\ 0;\ 180),$$
$$Y_{min}=-23400, \quad Y_{max}=23400$$

Jadvaldan ko‘rinadiki, T-1 texnologiyani 60 soat, T-3 ni 12 soat qo‘llash kerak. T-2 texnologiyani esa, umuman qo‘llamaslik kerak.

Ikkilangan masalaning yechimi:

$$W^0=(12;\ 60;\ 0), \quad F_{max}=23400.$$

Demak, birinchi va ikkinchi resurslar (ish kuchi va birlamchi xom ashyo)ning ikkilangan baholari uchun

$$W_1^0=12>0, W_2^0=60>0$$

munosabatlar o‘rinli. Bundan ish kuchi va birlamchi xom ashyo ishlab chiqarishda to‘la ishlatilganligi ko‘rinadi. Demak, bu resurslar kamyob resurslardir.

Uchinchi resurs (elektroenergiya)ning ikkilamchi bahosi $W_3^0=0$ bo‘lgani uchun bu resurs kamyob emas, ya’ni ortiqcha.

Bu aytilganlarni tekshirish uchun berilgan masalaning yechimini uning shartlariga qo‘yamiz.

$$15\cdot60+2\cdot0+25\cdot12=1200$$

$$2\cdot60+2\cdot0+2.5\cdot12=150$$

$$35\cdot60+60\cdot0+60\cdot12=2820<3000$$

hamda undagi birinchi va ikkinchi shartlarning ayniyatga, uchinchi shart esa qat’iy tengsizlikka aylanganini ko‘ramiz.

Demak, xaqiqatdan ham, ish kuchi va birlamchi xom ashyo kamyob, elektroenergiya esa ortiqcha ekan.

Elektroenergiyani ikkilamchi bahosi $W_3^0 = 0$ bo‘lgani uchun uni ishlab chiqarishga oshirib sarf qilish, korxonada mahsulot ishlab chiqarish hajmini o‘zgarishiga ta’sir qilmaydi.

Ish kuchining ikkilamchi bahosi $W_1^0 = 12 > 0$ bo‘lgani uchun uni bir birlikka oshirib sarf qilinsa, korxonadagi ishlab chiqarish rejasi o‘zgaradi. Bu rejani qanday o‘zgarishini aniqlash uchun oxirgi simpleks jadvaldagi X_4 ustuniga qaraymiz va xulosa qilamiz. Yangi rejaga asosan T-1 texnologiya 0.2 soat kamroq, T-3 texnologiya esa 0.16 soat ko‘proq ishlatiladi. Natijada korxona 12 birlik qo‘shimcha mahsulot ishlab chiqaradi. Bu holda korxonaning ishlab chiqargan mahsulotining hajmi

$$23400+12=23412$$

birilik bo‘ladi.

Birlamchi xom ashyoning ikkilamchi bahosi $W_2^0 = 60 > 0$. Demak, bu xom ashyoni bir birlikka oshirib sarf qilish oqibatida korxonada ishlab chiqariladigan mahsulotlar hajmi 60 birlikka oshadi, ya’ni

$$23400+60=23460$$

birlik bo‘ladi. Oxirgi simpleks jadvalning X_5 ustuniga qaraymiz va aniqlaymiz. Birlamchi xom ashyoni bir birlikka oshirib sarf qilinsa, korxonaning ishlab chiqarish rejasi o‘zgaradi. Bu rejaga asosan T-1 texnologiya 2 soat ko‘proq va T-3 texnologiya 1.2 soat kamroq ishlatiladi va natijada ishlab chiqariladigan umumiy mahsulot miqdori 60 birlikka oshadi:

$$(60+2)\cdot300+(12-1.2)\cdot450=23460$$

Endi ikkilangan masala yechimini uning shartlariga qo‘yib topamiz:

$$5\cdot12+5\cdot60+35\cdot\ 0=300$$

$$20\cdot12+3\cdot60+60\cdot\ 0=420>250$$

$$25\cdot12+2.5\cdot60+60\cdot\ 0=450$$

Bundan ko‘rinadiki, ikkilangan masala yechimida 1 va 3-shartlar ayniyatga aylanib, 2-shart qat’iy tengsizlikka aylanadi.

Demak, T-1 va T-3 texnologiyalar yordamida bir birlik vakt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot bahosi bilan unga sarf qilingan resurslarning ikkilamchi baholari o‘zaro teng. Shuning uchun T-1 va T-3 texnologiyalarni ishlab chiqarishda qo‘llash kerak.

T-2 texnologiya bilan bir birlik vakt ichida sarf qilingan resurslarning ikkilamchi bahosi ishlab chiqariladigan mahsulotlar bahosidan ko‘p bo‘layapti. Demak, T-2 texnologiya samarasiz. Shuning uchun uni ishlab chiqarishda qo‘llash kerak emas.

Endi quyidagi ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi yechimini tahlil qilamiz:

2-misol. 3 ta A,B,C mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 3 xil xom ashyolar (resurslar) ishlatilsin. I tur xom ashyoning zahirasi 180 kg. II tur xom ashyoning zahirasi 210 kg va III tur xom ashyoning zaxirasi 244 kg bo‘lsin. Har bir mahsulotning 1 birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan turli xil xom ashyoning miqdori (normasi) va mahsulot birligining bahosi (narxi) quyidagi jadvalda joylashtirilgan.

Xom ashyo / Mahsulotlar	I	II	III	Mahsulot birligining bahosi
A	4	3	1	10
B	2	1	2	14
C	1	3	5	12
Xom ashyo zahirasi	180	210	244	

Bu masala bor resurslardan optimal foydalanish masalasi bo‘lib, uning matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$4x_1+2x_2+x_3 \le 180,$$
$$3x_1+x_2+3x_3 \le 210,$$
$$x_1+2x_2+5x_3 \le 244,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$
$$Y=10\,x_1+14\,x_2+12\,x_3 \longrightarrow \max.$$

Bu yerda $X=(x_1, x_2, x_3)$ ishlab chiqarish rejasini ko‘rsatadi. Bu masalaga ikkilangan masalani tuzamiz:

$$4W_1+3W_2+W_3 \ge 10,$$
$$2W_1+W_2+2W_3 \ge 14,$$
$$W_1+3W_2+5W_3 \ge 12,$$
$$W_1 \ge 0, W_2 \ge 0, W_3 \ge 0,$$
$$F=180W_1+210W_2+244W_3 \longrightarrow \min$$

Bu yerda $W=(w_1, w_2, w_3)$ – xom ashyolarning ikkilamchi bahosidan iborat vektor-qator. Ikkilangan masalaning iqtisodiy ma’nosi: xom ashyolar bahosini shunday tanlash kerakki, natijada 1 birlik mahsulot ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xom ashyoning umumiy bahosi mahsulot bahosidan kam bo‘lmasin, hamda sarf qilingan barcha xom ashyolarning umumiy bahosi minimal bo‘lsin.

Ma’lumki, agar berilgan masala optimal yechimga ega bo‘lsa, u holda ikkilangan masala ham yechimga ega bo‘ladi va bu yechim

$$W^*=C^0B^{-1}$$

formula orqali topiladi. Bu erda C^0 oxirgi simpleks jadval optimal yechimga mos keluvchi maqsad funktsiya koeffisiyentlaridan tashkil topgan vektor-qator. B – dastlabki simpleks jadvaldagi bazis vektorlardan tashkil topgan matrisa. B^{-1} – oxirgi simpleks jadvalda B matrisa o‘rnida hosil bo‘lgan matrisa (teskari matrisa).

Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

	B. o‘zg	C_{baz}	10	14	12	0	0	0	X_0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
I.	X_4	0	4	2	1	1	0	0	180
	X_5	0	3	1	3	0	1	0	210
	X_6	0	1	2	5	0	0	1	244
	Δ_j		-10	-14	-12	0	0	0	
II.	X_2	14	2	1	1/2	1/2	0	0	90
	X_5	0	1	0	5/2	-1/2	1	0	120
	X_6	0	-3	0	4	-1	0	1	64
	Δ_j		18	0	-5	7	0	0	1260
III.	X_2	14	19/8	1	0	5/8	0	-1/8	82
	X_5	0	23/8	0	0	1/8	1	-5/8	80
	X_3	12	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4	16
	Δ_j		57/4	0	0	23/4	0	5/4	1340

Natijada ikkala masala uchun optimal yechimini topamiz.

Optimal yechim: berilgan masala uchun

$$X^*=(0;\ 82;\ 16), \quad Y_{max}=1340$$

ikkilangan masala uchun

$$W^*=(23/4;\ 0;\ 5/4), \quad F_{min}=1340$$

Endi berilgan masala yechimini tahlil qilamiz. Buning uchun ikkilangan masala yechimini ko‘ramiz. Unda $W_1=23/4$ va $W_3=5/4$ bo‘lib, ular nolga teng emas. Bu hol I va II tur xom ashyolarning to‘la ishlatilganligini, ya’ni ularning kamyob ekanligini ko‘rsatadi. Bu yechimda $W_0=0$, bu hol II tur xom ashyo to‘la ishlatilmaganligini, demak, uning ortiqcha ekanligini (kamyob emasligini) ko‘rsatadi.

Ikkilangan masalaning yechimi “**shartli ikkilangan baho**” deyiladi. Ular xom ashyolar miqdorini bir birlikka ortiqcha sarf qilinganda maqsad funktsiyaning qiymati, ya’ni ishlab chiqarilgan mahsulotning pul miqdori qanchaga o‘zgarishini ko‘rsatadi. Masalan, 1-tur xom ashyoni 1 kg ortiqcha sarf qilish natijasida maqsad funktsiyaning qiymati 23/4=5.75 birlikka oshadi. Agar 1 tur xom ashyodan ishlab chiqarishda 1 kg ortiqcha sarf qilinsa, korxonaning ishlab chiqarish rejasi o‘zgaradi. Bu yangi rejaga muvofik ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul miqdori 5,75 birlikka ko‘proq bo‘ladi. Jadvaldagi X_4 ustunga qarab quyidagilarni aniqlaymiz. Yangi rejada B mahsulotni ishlab chiqarish 5/8 birlikka oshadi va C mahsulotni ishlab chiqarish 1/4 birlikka kamayadi. Buning natijasida 2-tur xom ashyo sarfi 1/8 birlikka kamayadi.

$$(5/8 \cdot 1 - 3 \cdot 1/4 = 5/8 - 6/8 = - 1/8).$$

Xuddi shuningdek X_6 ustunga qaraymiz. 3 tur xom ashyo xarajatini 1 kg ga oshirib sarf qilish natijasida yangi reja topiladi va bu rejaga ko‘ra ishlab chiqarilgan mahsulotlarning pul qiymati 5/4=1.25 so‘mga oshadi va 1340+1.25=1342.25 so‘mni tashkil qiladi. Bu natija B mahsulot ishlab chiqarishni 1/8 birlikka kamaytirish, Cmahsulot ishlab chiqarishni 1/4 birlikka oshirish xisobiga bo‘ladi. Bu holda 2-tur xom ashyo 5/8 kg ko‘proq sarf qilinadi.

Ikkilamchi optimal baholarni ikkilangan masala shartlariga qo‘yib quyidagilarni aniqlaymiz:

$$23+5/4>10$$
$$23/2+5/2=14$$
$$23/4+25/4=12$$

Bundan ko‘rinadiki, ikkilangan masalaning birinchi sharti qat’iy tengsizlikdan iborat bo‘lyapti. Bu hol A mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xom ashyolarning bahosi bu mahsulot bahosidan ko‘p bo‘layapti. Shuning uchun A mahsulotni ishlab chiqarish korxona uchun foydali emas. Ikkilangan masaladagi 2 va 3-shartlar optimal yechimda tenglikka aylanadi. Bu hol B va C mahsulotlar birligini ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xom ashyolarning bahosi mahsulot bahosiga teng ekanligini ko‘rsatadi. Demak, B va C mahsulotlarni ishlab chiqarish korxona uchun foydali bo‘ladi.

Shunday qilib, shartli optimal baholar berilgan masalaning optimal rejasi bilan chambarchas bog‘langan. Berilgan masaladagi parametrlarning har qanday o‘zgarishi uning optimal yechimiga ta’sir qiladi, demak ular shartli optimal baholarning o‘zgarishiga ham sabab bo‘ladi.

18-mavzu. Transport masalasi. Potensiallar usuli

Reja:

1. Transport masalasining qo‘yilishi va uning matematik modeli.
2. Transport masalasi yechimining xossalariga doir teoremalar.
3. Transport masalasining boshlang‘ich joiz rejasini topish usullari.
4. Potensiallar usuli.
5. Bazis yechimning optimallik sharti.
6. Ochiq modelli transport masalasi.
7. Aynigan TM ni ε-usul bilan yechish.

Tayanch so‘z va iboralar: Band katakchalar, bo‘sh katakchalar, harajatlar matrisasi, yopiq kontur, potensiallar, potensial tenglama, ochiq modelli transport masalasi, “soxta” ta’minotchi, “soxta” iste’molchi. Yopiq modelli transport masalasi, band katakchalar, ochiq modelli transport masalasi, “shimoliy-g‘arb burchak” usuli, “minimal harajat” usuli.

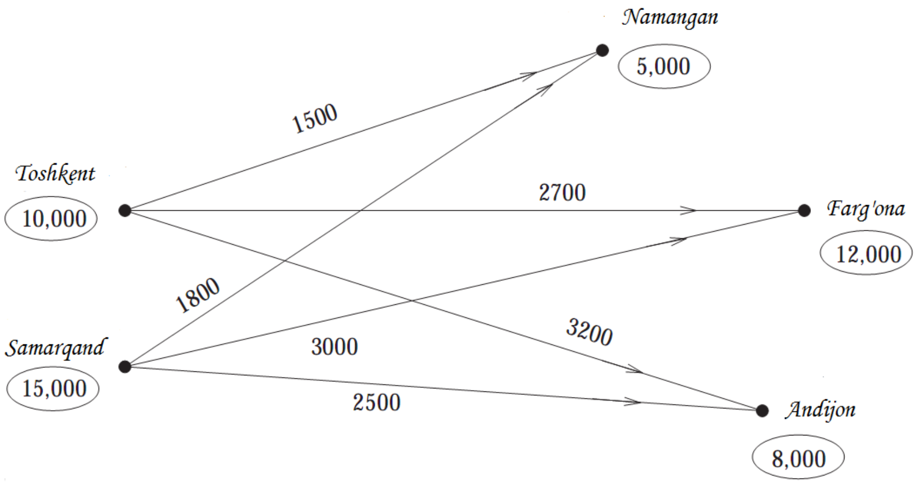
Transport masalasi – chiziqli programmalashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo‘lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo‘llanish sohasi juda kengdir.

Zahirasida b_i birlik mahsuloti bo‘lgan i-ta’minotchidan mavjud bo‘lgan istemolchilarga zahirasidagi mahsulotni to‘la realizatsiya qilish shatri

$$\sum_j x_{i,j} = b_i$$

bu yerda $x_{i,j}$ – i-ta’minotchidan j-is’temolchiga tashilgan mahsulot hajmi.

1-misol. Faraz qilaylik, Toshkent va Samarqandga keltirilgan Xitoyda ishlab chiqariluvchi o‘yinchoqlar Namangan, Farg‘ona va Andijonga transport orqali tarqatilmoqda. Bunda Toshkentga 10000 ta va Samarqandga 15000 ta o‘yinchoq keltirilgan bo‘lib, Namanganga 5000 ta, Farg‘onaga 12000 ta va Andijonga esa 8000 ta jo‘natish rejalashtirilgan. Bitta o‘yinchoqni yetkazib berishdagi transport harajatlari ta’minotchi va is’temolchilar orasidagi masofalarga to‘g‘ri proporsional bo‘lib, masalaning tarmoq grafik ko‘rinishi quyida keltirilgan.



Masalaning qo‘yilishi va uning matematik modeli. m ta A_i ta’minotchilarda a_i miqdordagi bir xil mahsulotni n ta B_j iste’molchilarga mos ravishda b_j miqdordan yetkazib berish talab qilinsin. Har bir i-ta’minotchidan har bir j-iste’molchiga bir birlik mahsulotni tashishga sarf qilinadigan yo‘l harajati c_{ij} pul birligini tashkil qilsin.

Mahsulot tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta’minotchilardagi barcha mahsulotlar olib chiqib ketilsin, iste’molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo‘l harajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo‘lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i-ta’minotchidan j-iste’molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan mahsulot miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz. U holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko‘rinishda yozish mumkin:

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**				**Zahiralar miqdori**
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Talablar miqdori	b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Bunda harajatlarning umumiy qiymati

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalaning matematik modeli quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, & i=\overline{1,m}\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, & j=\overline{1,n}\end{cases} \tag{1}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij}\geq 0,\quad (i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}) \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{3}$$

chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat bersin.

Jadvaldan va masalaning modelidan $0\leq x_{ij}\leq \min\left(a_i, b_j\right)$ tengsizlikning bajariliahi ko‘rinib turibdi.

Transport masalalari ikki turga ajratib o‘rganiladi:

1. Agar mahsulotga bo‘lgan talab taklifga teng, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{4}$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday masala **yopiq modelli transport masalasi** deyiladi.

2. Agar mahsulotga bo‘lgan talab taklifga teng bo‘lmasa, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\neq\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{5}$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday masalalar **ochiq modelli transport masalasi** deyiladi.

(1)-(3) masala uchun quyidagi teorema o‘rinli.

1-teorema. Talablar hajmi takliflar hajmiga teng bo‘lgan istalgan transport masalasining optimal yechimi mavjud bo‘ladi.

Transport masalasi matematik modeli tenglamalar sistemasidagi bazis vektorlar sistemasining o‘lchovini aniqlaymiz. Buning uchun sistema asosiy matrisasining rangini aniqlash kerak.

Agar x_{ij} o‘zgaruvchilarni

$$x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n}, ..., x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn}$$

ko‘rinishda joylashtirsak, u holda transport masalasining cheklamalar matrisasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

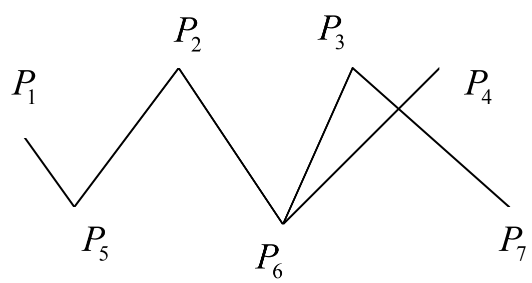
$$A=\begin{pmatrix} m\left\{\begin{matrix} \overbrace{1\;1\;\ldots\;1}^{n}\;\overbrace{0\;0\ldots0}^{n}\;\ldots\;\overbrace{0\;0\ldots0}^{n} \\ 0\;0\ldots0\;\;1\;1\;\ldots\;1\;\ldots\;0\;0\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0\ldots0\;\;0\;0\ldots\;0\;\ldots\;1\;1\;\ldots\;1 \end{matrix}\right. \\ n\left\{\begin{matrix} 1\;0\ldots0\;\;1\;\;0\;\ldots0\;\ldots1\;0\;\ldots0 \\ 0\;1\ldots0\;\;0\;1\;\ldots\;0\;\;\ldots0\;1\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0\ldots\;1\;0\;\;0\ldots\;\;1\;\;\ldots0\;\;0\;\ldots\;1 \end{matrix}\right. \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning rangi: $rang(A)=m+n-1$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatdan ham, matrisada $m+n$ ta satr bo‘lib ular chiziqli bog‘liq. Chunki birinchi m ta satrni qo‘shib undan oxirgi n ta satr yig‘indisini ayirsak nol vektorni hosil qilamiz. Bu matrisaning ixtiyoriy $m+n-1$ satrini olsak chiziqli erkli vektorlar sistemasi hosil bo‘ladi.

Demak, masalaning optimal yechimida musbat x_{ij} lar soni ko‘pi bilan $m+n-1$ ta bo‘ladi.

Transport masalasi rejalari ko‘p takrorlanish xususiyatiga ega.

1-ta’rif. P_i nuqtalarning (punktlarning) chekli $P=\{P_1, P_2, ..., P_l\}$ to‘plami va har bir elementi yoy deb ataluvchi tartiblanmagan (P_i, P_j) juftliklarning Ω to‘plami berilgan bo‘lsin. (P_i, P_j) yoy P_i va P_j nuqtalarni tutashtiradi, bu nuqtalar esa (P_i, P_j) yoyning oxiri deb ataladi. (P, Ω) juftlik esa **transport tarmog‘i** deb ataladi. Masalan,



rasmda elementlari 7 ta nuqtadan iborat $P=\{P_1, P_2, ..., P_7\}$ to‘plam va oltita:

$$(P_1, P_5), (P_2, P_5), (P_2, P_6), (P_3, P_6), (P_3, P_7), (P_4, P_6)$$

yoylarni o‘zichiga oluvchi Ω to‘plam tasvirlangan.

2-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ $(P_{i_l} \in P,\ l = 0, 1, ..., k)$ ixtiyoriy chekli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar har qanday $(P_{i_r}, P_{i_{r+1}})$, $r = 0, 1, ..., k-1$, juftlik yoy bo'lib ($(P_{i_r}, P_{i_{r+1}}) \in \Omega$), bu juftlik $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlikda ko'pi bilan bir marta uchrasa, u holda $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlik **marshrut** (yo'nalish) deb ataladi.

Yuqoridagi rasmda ikkita marshrut bor: $P_1P_5P_2P_6P_4$, $P_1P_5P_2P_6P_3P_7$.

3-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}P_{i_0}$ ko'rinishdagi **marshrut sikli** deb ataladi.

Demak, marshrutda boshlang'ich holatga qaytilsa u **sikl** deb ataladi

Rasmdagi marshrutda sikl yo'q, ammo unga (P_4, P_7) yoy qo'shilsa, u holda bu marshrutda $P_3P_7P_4P_6P_3$ ko'rinishdagi sikl hosil bo'ladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch rejani topishdan boshlanadi.

Yopiq transport masalasining boshlang'ich tayanch rejasini topishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan ikkitasi bilan tanishib chiqamiz.

Boshlang'ich joiz rejani topish usullari. Masalaning aynimagan joiz rejasi $m+n-1$ ta musbat komponentalarni o'z ichiga oladi.

Shunday qilib, transport masalasining aynimagan joiz rejasi biror usul bilan topilgan bo'lsa, matrisaning $m+n-1$ ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi.

Agar transport masalasining shartlari va uning joiz rejasi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij} lar joylashgan kataklar "**band kataklar**", qolganlari "**bo'sh kataklar**" deyiladi.

Yechim aynimagan bazis yechim bo'lishi uchun band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lib, u yerda sikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliy-g'arbiy burchak usuli. Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin.

a_i \ b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

Ma'lumki, har bir bo'sh katakka x_{ij} noma'lumlardan biri to'g'ri keladi. Bu usulda bo'sh kataklrni x_{ij}^0 qiymatlar bilan to'ldiriladi deb faraz qilamiz.

Jadvalning shimoliy-g'arbiy burchagiga x_{11} o'zgaruvchi to'g'ri keladi. $x_{11}^0 = \min\{a_1, b_1\}$ bo'lsin. Agar $x_{11}^0 = a_1$ $(a_1 \le b_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchining barcha mahsuloti birinchi iste'molchiga jo'natilgan bo'ladi. Demak, $x_{1j}^0 = 0,\ j = \overline{1,n}$ bo'ladi.

II qadamda $x_{21}^0 = \min\{b_1 - a_1, a_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz. Bunda, agar $x_{21}^0 = b_1 - a_1$ $(b_1 - a_1 \le a_2)$ bo'lsa, u holda $x_{s1}^0 = 0,\ s = \overline{3,m}$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib band kataklardagi x_{ij} larning qiymatlarini aniqlab olamiz.

Agar $x_{11}^0 = b_1$ $(b_1 \le a_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchida $a_1 - b_1$ miqdorda mahsulot qolgadi. Demak, $x_{i1}^0 = 0,\ i = \overline{2,m}$ bo'ladi. II qadamda $x_{12}^0 = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz va hakozo.

2-misol. Shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib, transport masalasining boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Minimal xarajatlar usuli. Bu usulda boshlang'ich yechim qurish uchun x_{ij}^0 qiymat avvalambor yo'l harajati eng kichik bo'lgan katakka, ya'ni $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\}$ shart o'rinli bo'ladigan katakka yoziladi. Masalan, $\min\limits_{1\le i\le m, 1\le j\le n}\{c_{ij}\} = c_{pq}$ bo'lsin. U holda $x_{pq}^0 = \min\{a_p, b_q\}$ qiymat aniqlanadi. $x_{pq}^0 = \min\{a_p, b_q\}$ $(a_p \le b_q)$ bo'lsin.

Demak, $x_{pj} = a_p,\ j = 1, 2, ..., q-1, q+1, ..., n$ bo‘ladi. Bundan keyingi qadamlarda ham $\min\limits_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \{c_{ij}\} = c_{pq},\ i \ne p,\ j \ne q$ shart asosida x_{ij}^0 qiymatlar aniqlanib boriladi. Bu usulda tuzilgan boshlang‘ich yechimni sikllanishga tekshirish shart.

3-misol. Minimal harajatlar usuli bilan boshlang‘ich yechimini toping.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Potensiallar usuli – transport masalasini yechish uchun qo‘llangan birinchi aniq usul bo‘lib, u 1949 yilda rus olimlari **L.V.Kantorovich** va **M.K.Gavurin** tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g‘oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo‘lib, birinchi marta chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog‘liq bo‘lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o‘xshash usul Amerikalik olim **Dansig** tomonidan yaratildi. Dansig usuli chiziqli programmalashtirishning asosiy g‘oyalariga asoslangan bo‘lib, Amerika adabiyotida bu usul **modifitsirlangan taqsimot usuli** deb yuritiladi.

Transport masalasining optimal yechimini topishda foydalaniladigan potensiallar usuli simpleks usulining soddalashtirilgan varianti hisoblanadi.

Bu usul bilan tanishishdan oldin **aynigan** va **aynimagan** transport masalasi tushunchalarini kiritishimiz kerak.

Ma’lumki, agar ChPM hech bo‘lmaganda bitta aynigan tayanch yechimga ega bo‘lsa, u holda bu masala **aynigan ChPMsi** deb ataladi.

4-ta’rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ tayanch rejadagi (yechimdagi) musbat komponentalar soni $rangA = m$ ga teng bo‘lsa, u holda bu reja **aynimagan tayanch reja**, aks holda esa u **aynigan tayanch reja** deyiladi.

Quyidagi transport masalasi berilgan bo‘lsin: b_j – talablar miqdori; a_i – takliflar miqdori.

a_i \ b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

2-teorema. Agar talablarning qismiy yig‘ndisi takliflarning qismiy yig‘indisiga teng, ya’ni $\sum\limits_{i\in G} a_i = \sum\limits_{j\in H} b_j$, $G \subset M = \{1, 2, ..., m\}$, $H \subset N = \{1, 2, ..., n\}$ bo‘lsa, u holda bu transport masalasi **aynigan transport masalasi** deyiladi.

Aynimagan transport masalasini qaraymiz. Ma’lumki, bu masalaning matematik modeli kanonik ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0, \tag{2}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{3}$$

Bu masalaga ikkilangan masala tuzamiz.

$$U_i + V_j \leq c_{ij}, \tag{4}$$

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} U_i a_i + \sum_{j=1}^{n} V_j b_j \to \max. \tag{5}$$

Ikkilanish nazariyasiga asosan agar (U_i, V_j) ikkilangan baholar mavjud bo‘lsa, u holda $\{x_{ij}\}$ tayanch reja optimal bo‘ladi. Bu yerda U_i va V_j ikkilangan baholar mos ravishda “**ta’minotchi va iste’molchilarning potensiallari**” deyiladi. Bu nazariyaga asosan transport masalasi uchun quyidagi teoremani keltirish mumkin.

3-teorema. Agar transport masalasining $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechimi uchun

$$x_{ij}^* > 0 \Rightarrow U_i + V_j = c_{ij}, \tag{6}$$

$$x_{ij}^* = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij}\,. \qquad (7)$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechim optimal yechim bo‘ladi.

(6) va (7) shartlar transport masalasi uchun **optimallik shartlari** deb ataladi.

Shunday qilib, navbatdagi tayanch yechimni optimallikka tekshirish uchun, avval, (6) shart yordamida potensiallar sistemasi quriladi va so‘ngra (7) shartning bajarilishi tekshiriladi.

Masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz: $S_i -$ta’minotchilar joylashgan nuqta; $Q_j -$iste’molchilar joylashgan nuqta. $P = S \cup Q$. $x_{ij} > 0 \Rightarrow (S_i, Q_j) \in \Omega$. (P, Ω) juftlik transport tarmog‘i.

Potensiallar usulida optimal yechimni topish algoritmi:

1. $\{x_{ij}^0\}$ boshlang‘ich tayanch yechim topiladi. Masalan,

$$Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} ... Q_{j_{k-1}} S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0} \qquad (8)$$

marshrut topiladi;

2. (6) shart asosida U_i va V_j potensiallardan

$$V_{j_0} + U_{i_1} = c_{i_1 j_0},\; V_{j_1} + U_{i_1} = c_{i_1 j_1},\; ...,\; V_{j_k} + U_{i_k} = c_{i_k j_k},\; V_{j_k} + U_{i_0} = c_{i_0 j_k}, \qquad (9)$$

tenglamalar sistemasini tuziladi. Bunda $n + m - 1$ ta band katak uchun $n + m - 1$ ta chziqli tenglama va $n + m$ ta noma’lum hosil bo‘ladi. Noma’lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ortiq bo‘lgani uchun bitta erkli noma’lumga ixtiyoriy qiymat, masalan nol, qiymat berilib qolganlari mos tenglamalardan topiladi;

3. Bo‘sh kataklar uchun (7) shart tekshiriladi:

a) agar barcha bo‘sh kataklar uchun (7) shart bajarilsa, u holda tayanch yechim optimal bo‘ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi;

b) agar ba’zi bo‘sh kataklar uchun (7) shart bajarilmasa, u holda tayanch yechim optimal bo‘lmaydi va tayanch yechimni almashtirish jarayoni amalga oshiriladi;

4. Tayanch yechimni almashtirish jarayonini amalga oshirish uchun $x_{ij}^0 = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij}$ shart o‘rinli bo‘lmagan bo‘sh kataklardan biri

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} (\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}) \qquad (10)$$

shart asosida tanlanadi va u band katakka aylantiriladi. Masalan,

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{i_0 j_0}$$

bo‘lsin. Demak, (8) marshrutga (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni qo‘shish kerak. U holda (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni o‘zida saqlovchi

$$S_{i_0} Q_{j_0} S_{i_1} Q_{j_1} S_{i_2} ... Q_{j_{k-1}} S_{i_k} Q_{j_k} S_{i_0}$$

sikl hosil bo‘ladi. Bu siklga

$$x_{i_0 j_0},\ x_{i_1 j_0},\ x_{i_1 j_1},\ \ldots,\ x_{i_k j_k},\ x_{i_0 j_k}.$$

ketma-ketlik mos keladi. Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned}
&x^1_{i_0 j_0} = x^0_{i_0 j_0} + \theta = \theta,\\
&x^1_{i_1 j_0} = x^0_{i_1 j_0} - \theta,\\
&x^1_{i_1 j_1} = x^0_{i_1 j_1} + \theta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x^1_{i_k j_k} = x^0_{i_k j_k} + \theta,\\
&x^1_{i_0 j_k} = x^0_{i_0 j_k} - \theta.
\end{aligned} \tag{11}$$

Boshqa barcha $(i,\ j)$ juftliklar uchun $x^1_{ij} = x^0_{ij}$. (11) formula yordamida topilgan $\{x^1_{ij}\}$ yechim tayanch yechim bo‘lishi uchun θ ni

$$\theta = \min_{0 \le r \le k} x^0_{i_{r+1} j_r} \tag{12}$$

shart asosida tanlash yetarli.

Bu jarayonni tayanch yechim uchun (6), (7) optimallik sharti bajarilguncha davom ettiramiz.

Bu jarayon chekli son marta qaytarilgandan so‘ng optimal yechim hosil bo‘ladi. Chunki transport masalasi uchun quyidagi teoremalar o‘rinli.

4-teorema. Har qanday yopiq modelli transport masalasining optimal yechimi mavjud.

5-teorema. Agar barcha $a_i,\ b_j$ sonlar butun bo‘lsa, u holda transport masalasining ixtiyoriy tayanch yechimi butun sonlardan iborat bo‘ladi.

4-misol. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1	4
250	2	7	10	6	11
200	8	5	3	2	2
300	11	8	12	16	73

Yechish: Boshlang‘ich tayanch yehimni minimal xarajatlar usuli bilan topamiz.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1 100	4 0
250	2 200	7 50	10	6	11
200	8	5	3	2	2 200
300	11	8 150	12 100	16	73 50

Bu jadvalda band kataklar soni $n+m-2$ ta. Shuning uchun (a_1, b_5) katakka 0 yozib uni band katakka aylantiramiz. So‘ngra band kataklardan foydalanib $U_i + V_j = c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib, U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -16	7 -8	4 -1	1 100-θ	4 0+θ	0
250	2 200	7 50-θ	10 1	6 θ 3	11 1	8
200	8 -16	5 -8	3 -2	2 -3	2 200	-2
300	11 -8	8 150+θ	12 100	16 -6	73 50-θ	9
V_j	-6	-1	3	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = 3$ bo‘lganligi sababli (a_2, b_4) katakka θ sonni kiritamiz va (11) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 1-jadvalni hosil qilamiz. Endi $\theta = \min\,(100, 50, 50) = 50$ asosida yangi bazis rejaga o‘tib, $U_i + V_j = c_{ij}$

potensial tenglamalar sistemasini tuzib U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz. U holda quyidagi jadval hosil bo‘ladi.

$a_i \backslash b_j$	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -5	4 2	1 50	4 50	0
250	2 200	7 0	10 1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -5	3 1	2 -3	2 200	-2
300	11 -14	8 200	12 100	16 -9	73 -3	6
V_j	-3	2	6	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 2$. Shuning uchun (a_1, b_3) katakka θ parametrni kiritamiz va (11) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 3a-jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda

$$\theta = \min\{0, 50, 100\} = 0.$$

Bu asosda yangi bazis yechimni jadvalga joylashtiramiz. Jadvalda keltirilgan bazis yechim optimal yechim bo‘ladi, chunki barcha bo‘sh katakchalarda $\Delta_{ij} \le 0$.

$a_i \backslash b_j$	200	200	100	100	250
100	10 -13	7 -7	4 θ	1 50-θ	4 50
250	2 200	7 0-θ -2	10 -1	6 50+θ	11 -2

200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200
300	11 -6	8 $200+\theta$	12 $100-\theta$	16 -7	73 -1

3-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -7	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 -2	10 -1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200	-2
300	11 -6	8 200	12 100	16 -7	73 -1	8
V_j	-3	0	4	1	4	

Shunday qilib, uchinchi qadamda quyidagi optimal yechimga ega bo‘ldik:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z_{\min} = 4150 .$$

Ochiq modelli transport masalasi. Agar talab va takliflarning umumiy miqdorlari teng bo‘lmasa, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

shart bajarilsa, u holda bu masala “**ochiq modelli transport masalasi**” deyiladi.

Ochiq modelli masalaning optimal yechimini topish uchun yopiq modelga keltiriladi va potensiallar usuli qo‘llaniladi.

Ochiq modelli masalani yopiq modelliga keltirish uchun qo‘shimcha “soxta” ta’minotchi yoki “soxta” iste’molchi kiritiladi, ularning zahirasi yoki talab hajmi

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{yoki} \quad b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

bo‘ladi. Soxta ta’minotchidan real iste’molchilarga yoki real ta’minotchilardan soxta iste’molchilarga amalda mahsulot tashilmagani uchun yo‘l harajatlari nolga teng qilib olinadi. Natijada bu yerda yopiq modelli masala hosil bo‘ladi.
5-misol. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yeching.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	

Yechish: $\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$ bo‘lgan hol uchun masalani yopiq modelli masalaga aylantiramiz: $B_6 = 100$. So‘ngra potensiallar usulini qo‘llaymiz.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**						**Zahira**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	7	4	1	4	0	100
A_2	2	7	10	6	11	0	250
A_3	8	5	3	2	2	0	200
A_4	11	8	12	16	13	0	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	100	

Aynigan transport masalasi. $\varepsilon-$potensiallar usuli. Aynigan transprot masalasida tayanch rejasidagi musbat komponentalar soni $k < m+n-1$ bo‘ladi va bu tayanch reja aynigan reja bo‘ladi. Bunday rejani aynimagan rejaga aylantirish uchun unga $m+n-1-k$ ta nol element kiritish mumkin. Ammo bu nol elementlarga mos x_{ij} noma’lumlar band kataklarga mos x_{ij} noma’lumlar o‘zaro chiziqli bog‘liq vektorlar esa chiziqli erkli bo‘lishi kerak. Bu holatni nazorat qilish qiyin. Shu sababli aynigan transport masalasidagi siklni yo‘qotib uni aynimagan transport masalasiga aylantirish kerak. Bunga erishish uchun quyidagi $\varepsilon-$ potensiallar usulini qo‘llash mumkin.

$\varepsilon-$**potensiallar usuli.** Ma’lumki, bir nechta a_i larning yig‘indisi (hammasi emas) bir nechta b_j larning yig‘indisiga teng bo‘lsa transport masalasini aynigan transport masalasi deb ataymiz.

Masalada ayniganlikni yo‘qotish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig‘indilarning o‘zaro teng bo‘lmasligiga erishish kerak. Buning uchun a_i va b_j larning qiymatini biror kichik songa o‘zgartirish kerak. Masalan, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonni olib, a_i va b_j larni o‘zgartiramiz, ya’ni ε masala tuzamiz:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{a_i} = a_i + \varepsilon, \quad (i = \overline{1,m}), \\ &\overline{b_j} = b_j, \quad (j = \overline{1,n}), \\ &\overline{b_n} = b_n + m\varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ε yetarlicha kichik son bo‘lganligi sababli hosil bo‘lgan masalaning $X(\varepsilon)$ optimal rejasi $\varepsilon = 0$ da berilgan masalaning optimal yechimi bo‘ladi.

6-misol. Berilgan aynigan transport masalasining optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	3	4	5	3
4	4	5	6	3
3	3	2	7	6
8	5	9	1	3

Yechish: (13) munosabatlardan foydalanib, quyidagi ε masalani hosil qilamiz:

a_i \ b_j	3	4	5	3+3ε
4+ε	4	5	6	3
3+ε	3	2	7	6
8+ε	5	9	1	3

Ushbu masalani yechib, $X(\varepsilon)$ rejani topamiz. Bundan $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} X(\varepsilon) = X^0$.

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

1. Mike Rosser. Basic mathematics for economists. London and New York. 1993, 2003.
2. M.Harrison and P.Waldron Mathematics for economics and finance. London and New York. 2011.
3. M.Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London&Cambridge. 2011.
4. Robert M. Leekley, Applied Statistics for Businiess and Economics, USA. 2010.
5. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, New York. 2005.
6. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.
7. David G. Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming, Springer. 2008.
8. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O‘quv qo‘llanma. “Iqtisod-moliya”. 2017. 386 b.
9. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. “Iqtisod-moliya”. 2017. 746 c.
10. Safayeva Q., Shomansurova F. “Matematik programmalashtirish fanidan mustaqil ishlar majmuasi”. O‘quv qo‘llanma. T.: 2012.
11. Safayeva Q., Mamurov I., Shomansurova F. “Matematik programmalash fanidan masalalar to‘plami”. T.: 2013.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR

1-amaliy mashg‘ulot. Matrisalar va ular ustida amallar

1.1. Quyidagi matrisalarning $2A+3B$ chiziqli kombinatsiyasini toping, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Yechish. $2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+$

$$+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6 & 4+9 & 6+0\\ 0+6 & 2+3 & -2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Berilgan matrisalarning chiziqli kombinatsiyasini toping:

1.2. $A-\lambda E,\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$

1.3. $4A-5B,\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}.$

1.4. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}$ matrisalar berilgan. AB va BA matrisalar ko‘paytmasi (agar mumkin bo‘lsa)ni toping.

Yechish. $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7 & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8\\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & 7 & 25\\ -4 & 3 & -3\end{pmatrix}.$$

BA ko‘paytma mavjud emas, B matrisaning ustunlari soni A matrisaning satrlari soniga mos kelmaydi.

AB va BA matrisalar ko‘paytmasi (agar mumkin bo‘lsa)ni toping:

1.5. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$ **1.6.** $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}.$

1.7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^9$ matrisani toping.

Yechish. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ belgilash kiritib A matrisaning kvadratini hisoblaymiz:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A^2=E$ – birlik matrisa. Shuning uchun

$$A^9=\left(A^2\right)^4\cdot A=E^4A=A \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^9=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrisalarni hisoblang:

1.8. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^5$. **1.9.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$. **1.10.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$.

1.11. Agar $f(x)=-2x^2+5x+9$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $f(A)$ matrisali ko‘phadning qiymatini toping.

Yechish. $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$$f(A)=-2A^2+5A+9E=-2\cdot\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

$f(A)$ matrisali ko‘phadning qiymatini toping:

1.12. $f(x)=3x^3+x^2+2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1.13. $f(x)=2x^3-3x^2+5$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.14. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ matrisani transponirlang.

Yechish. $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Quyidagi matrisalarni transponirlang:

1.15. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. **1.16.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

1.17. Satrlari ustida elementar almashtirishlar yordamida A matrisani pog'onasimon ko'rinishga keltiring:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Yechish. } A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} I \leftrightarrow II \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} III-5\cdot I \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & -10 & -30 \end{pmatrix} III-10\cdot II \sim$$

$$\sim B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - pog'onasimon\ matritsa.$$

Matrisalarni pog'onasimon ko'rinishga keltiring:

1.18. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$. **1.19.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -18 \\ 5 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix}$.

1.20. Kopxona 3 xil mahsulot ishlab chiqarish uchun 2 xil xomashyodan foydalanadi. Xomashyo xarajatlari $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan. Mahsulot ishlab chiqarish rejasi $C=\begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}$ – satr-matrisa ko'rinishida berilgan. Har bir xomashyo turining bir birligi bahosi (pul.birl.) $B=\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$ – ustun-matrisa ko'rinishida berilgan. Rejani bajarish uchun sarflanadigan xomashyo miqdorini va xomashyoning umumiy bahosini aniqlang.

Yechish. 1-usul. Har bir xomashyo sarfi

$$S = C \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}$$

bo‘lsa, xomashyoning umumiy bahosi

$$Q = S \cdot B = \left(C \cdot A\right) \cdot B = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70900 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

2-usul. Avval har bir mahsulot turiga sarflanuvchi xomashyo miqdori

$$R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$$

So‘ngra, xom ashyoning umumiy bahosini aniqlaymiz

$$Q = C \cdot R = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70900 \end{pmatrix}$$

Quyidagi iqtisodiy mazmundagi masalani yeching:

1.21. Kopxona 3 xil mahsulot ishlab chiqarish uchun 2 xil xomashyodan foydalanadi. Xomashyo harajatlari $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan. Maxsulot ishlab chiqarish rejasi $C = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \end{pmatrix}$ – satr-matrisa ko‘rinishida berilgan. Har bir xomashyo turining bir birligi bahosi (pul.birl.) $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ – ustun-matrisa ko‘rinishida berilgan. Rejani bajarish uchun sarflanadigan xomashyo miqdorini va xomashyoning umumiy bahosini aniqlang.

Berilgan matrisalarning chiziqli kombinatsiyasini toping:

1.22. $3A + 4B,\ A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$

1.23. $2A - B,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$

1.24. $3A - 2B,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$

1.25. $2A+5B,\ A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$

AB va BA matrisalar ko‘paytmasi (agar mumkin bo‘lsa)ni toping:

1.26. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}.$

1.27. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$

1.28. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

1.29. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ -4 & 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}.$

1.30. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$

1.31. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

1.32. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 2\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$

1.33. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 3 & 5 & 2\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}.$

1.34. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}.$

1.35. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -4\\ 3 & -2 & 4 & -3\\ 5 & -3 & -2 & 1\\ 3 & -3 & -1 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}7 & 8 & 6 & 9\\ 5 & 7 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$

1.36. $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & -3 & -4\\ 7 & 6 & -4 & -5\\ 6 & 4 & -3 & -2\\ 8 & 5 & -6 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix}$.

$f(A)$ matrisali ko‘phadning qiymatini toping:

1.37. $f(x)=3x^2-5x+2,\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

1.38. $f(x)=x^3-6x^2+9x+4,\ A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

1.39. $f(x)=x^2+x+1,\ A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Matrisalarni pog‘onasimon ko‘rinishga keltiring:

1.40. $\begin{pmatrix}2 & 3 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 5 & -5 & 4\end{pmatrix}$.

1.41. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & 13\\ 3 & 1 & -7 & 9\\ -1 & 2 & 0 & -10\\ 2 & 1 & -5 & 5\end{pmatrix}$.

Quyidagi iqtisodiy mazmundagi masalalarni yeching:

1.42. Kopxona 3 xil mahsulot ishlab chiqarish uchun 2 xil xomashyodan foydalanadi. Xomashyo harajatlari $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan . Maxsulot ishlab chiqarish rejasi $C=\begin{pmatrix}150 & 120 & 100\end{pmatrix}$ – satr-matrisa ko‘rinishida berilgan. Har bir xomashyo turining bir birligi bahosi (pul.birl.) $B=\begin{pmatrix}40\\ 60\end{pmatrix}$ – ustun-matrisa ko‘rinishida berilgan. Rejani bajarish uchun sarflanadigan xomashyo miqdorini va xomashyoning umumiy bahosini aniqlang.

1.43. Kopxona 4 xil mahsulot ishlab chiqarish uchun 2 xil xomashyodan foydalanadi. Xomashyo harajatlari $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan. Mahsulot ishlab chiqarish rejasi $C=\begin{pmatrix} 120 & 80 & 150 & 130 \end{pmatrix}$ – satr-matrisa ko‘rinishida berilgan. Har bir xomashyo turining bir birligi bahosi (pul.birl.) $B=\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}$ – ustun-matrisa ko‘rinishida berilgan. Rejani bajarish uchun sarflanadigan xomashyo miqdorini va xomashyoning umumiy bahosini aniqlang.

2-amaliy mashg‘ulot. Determinantlar nazariyasi

2.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ikkinchi tartibli determinantni hisoblang:

Yechish. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$

Ikkinchi tartibli determinantni hisoblang:

2.2. $\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$ **2.3.** $\begin{vmatrix} 10 & -5 \\ 9 & -8 \end{vmatrix}.$

Tenglamani yeching:

2.4. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$ **2.5.** $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0.$

2.6. Uchinchi tartibli determinantni hisoblang: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

Yechish. Determinantni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(5\cdot 2 - 3\cdot 4) - 2\cdot(2\cdot 2 - 3\cdot 3) + 1\cdot(2\cdot 4 - 5\cdot 3) =$$

$$= 3\cdot(-2) - 2\cdot(-5) + 1\cdot(-7) = -3.$$

Uchinchi tartibli determinantlarni ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bo‘yicha yoyib hisoblang:

2.7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$ **2.8.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

2.9. Uchinchi tartibli determinantni uchburchak qoidasidan foydalanib hisoblang:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot(-6)\cdot 7 + (-4)\cdot 3\cdot 8 -$$

$$-3\cdot 5\cdot 7 - (-4)\cdot 2\cdot 9 - 1\cdot(-6)\cdot 7 = 45 - 84 - 96 - 105 + 72 + 42 = -126.$$

Uchburchak qoidasidan foydalanib determinantlarni hisoblang:

2.10. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$ **2.11.** $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$ **2.12.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$

2.13. Determinantning xossalaridan foydalanib tenglikni isbotlang:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + a_1x + b_1y \\ a_2 & b_2 & c_2 + a_2x + b_2y \\ a_3 & b_3 & c_3 + a_3x + b_3y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Chap determinantning uchunchi ustunini uchta ustun yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin, bu determinantni uchta determinant yig‘indisi ko‘rinishida ifodalaymiz:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x \\ a_2 & b_2 & a_2x \\ a_3 & b_3 & a_3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1y \\ a_2 & b_2 & b_2y \\ a_3 & b_3 & b_3y \end{vmatrix}.$$

Ikkinchi determinantning uchunchi ustuni birinchi ustuniga proporsional, uchunchi determinantning uchunchi ustuni ikkinchi ustuniga proporsional. Shuning uchun ikkinchi va uchinchi determinantlar nolga teng.

Tenglikni isbotlang:

2.14. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

2.15. To‘rtinchi tartibli determinantni hisoblang:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

Yechish. Determinantni to‘rtinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\Delta=(+d)\cdot\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} \text{determinantni} \\ \text{2-satr bo'yicha yoyamiz} \end{bmatrix}=d\cdot(-b)\cdot\begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix}=-d\cdot b\cdot a\cdot c.$$

Satr yoki ustun elementlari bo‘yicha yoyish orqali determinantlarni hisoblang:

2.16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$ **2.17.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Ikkinchi tartibli determinantni hisoblang:

2.18. $\begin{vmatrix} \sqrt{a}+\sqrt{b} & \sqrt{a}-\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-\sqrt{b} & \sqrt{a}+\sqrt{b} \end{vmatrix}.$ **2.19.** $\begin{vmatrix} \sin 1^0 & \sin 89^0 \\ -\cos 1^0 & \cos 89^0 \end{vmatrix}.$

2.20. $\begin{vmatrix} \dfrac{x+y}{x} & \dfrac{2x}{x-y} \\ \dfrac{y-x}{x^2-y^2} & \dfrac{y-x}{x^2-y^2} \end{vmatrix}.$ **2.21.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}.$

2.22. $\begin{vmatrix} \sqrt{5}-a^{\frac{1}{2}} & a^{\frac{1}{2}} \\ -a^{\frac{1}{2}} & \sqrt{5}+a^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}.$ **2.23.** $\begin{vmatrix} \sin 60^0 & \cos 45^0 \\ \sin 45^0 & tg30^0 \end{vmatrix}.$

2.24. $\begin{vmatrix} tga & -1 \\ 4 & ctga \end{vmatrix}.$ **2.25.** $\begin{vmatrix} 1,(3) & 2,25 \\ 23/3 & 6 \end{vmatrix}.$

2.26. $\begin{vmatrix} \dfrac{a-1}{2\sqrt{a}} & \dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \\ \dfrac{a\sqrt{a}-\sqrt{a}}{2a} & \dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \end{vmatrix}.$

Tenglamani yeching:

2.27. $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6.$ **2.28.** $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$ **2.29.** $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0.$

Uchinchi tartibli determinantlarni ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bo‘yicha yoyib hisoblang:

2.30. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$ **2.31.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$ **2.32.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}.$

Uchinchi tartibli determinantlarni qulay usulda hisoblang:

2.33. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$ **2.34.** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}.$ **2.35.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

2.36. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$ **2.37.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$ **2.38.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}.$

2.39. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}.$ **2.40.** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}.$

2.41. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}.$ **2.42.** $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$

2.43. $\begin{vmatrix} m+a & m-a & a \\ n+a & 2n-a & a \\ a & -a & a \end{vmatrix}.$ **2.44.** $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}.$

2.45. $\begin{vmatrix} \sin 3\alpha & \cos 3\alpha & 1 \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}.$ **2.46.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$ **2.47.** $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}.$

Tenglama va tengsizliklarni yeching:

2.48. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$ **2.49.** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$

2.50. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$ **2.51.** $\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Tengliklarni isbotlang:

2.52. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

2.53. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

2.54. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

2.55. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

2.56. $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2bc(a+b+c)^3.$

Satr yoki ustun elementlari bo‘yicha yoyish orqali determinantlarni hisoblang:

2.57. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -9 & -9 & -9 & -9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

2.58. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$

2.59. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

2.60. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

2.61. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

2.62. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -3 & -9 & -27 \\ -1 & -4 & -16 & -64 \end{vmatrix}.$

2.63. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}.$

2.64. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$

2.65. $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 8 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$

3-amaliy mashg‘ulot. Matrisa rangi. Teskari matrisa

3.1. Matritlmsa rangini ta’rifga asosan hisoblang: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$

A matrisa 3×5 o‘lchamli, demak uning rangi 3 dan yuqori bo‘lmaydi. Uchinchi tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-4-10-12+12+4+10=0;$$

$$M_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}=-32-2+8-8+32+2=0;$$

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-8-14-16+16+8+14=0;$$

$$M_4=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix}=-40-3+4-10+48+1=0;$$

$$M_5=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix}=6-14+160-4+20-168=0;...$$

Barcha uchinchi tartibli minorlar nolga teng. Ikkinchi tartibli minorlarni hisoblaymiz:

$$M_1^1=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-5+6=1 \qquad M_1^1\neq 0, \qquad r(A)=2.$$

Bu usulda noldan farqli minor topilgunga qadar hisoblashlar davom etadi. Shuning uchun 3 va undan kattaroq tartibli matrisa rangini hisoblash birmuncha qiyinchiliklarga olib keladi.

3.2. Matrisa rangini elementar almashtirishlar yordamida nollar yig‘ib hisoblang:

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

Yechish:

$$A=\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&1&3&5\\0&1&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Bu matrisaning rangi $\begin{pmatrix}25&31&17\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ matrisa rangiga teng.

$$\begin{vmatrix}25&31&17\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=25\neq 0 \qquad\qquad r\begin{pmatrix}25&31&17\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=3$$

Demak, berilgan matrisaning rangi ham 3 ga teng. $r(A)=3$.

3.3. Berilgan kvadrat matrisaning rangini toping. Xosmas matrisaning teskarisini toping:

$$a)\,A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\end{pmatrix};\qquad\qquad b)\,B=\begin{pmatrix}2&5\\-4&2\end{pmatrix};$$

3.4. $A=\begin{pmatrix}2&3&2\\5&1&4\\1&-2&-1\end{pmatrix}$ matrisa uchun teskari A^{-1} matrisani klassik usulda toping.

Yechish. $A_{ij}\left(i=1,2,3;\ j=1,2,3\right)\,A$ matrisa elementlarining algebraik to‘ldiruvchilari.

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3&2\\5&1&4\\1&-2&-1\end{vmatrix}=-2+12-20-2+15+16=43-24=19\neq 0$$

Demak A xosmas matrisa, va A^{-1} teskari matrisa mavjud. Algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&4\\-2&-1\end{vmatrix}=-1+8=7; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}3&2\\-2&-1\end{vmatrix}=-(-3+4)=-1;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}5&4\\1&-1\end{vmatrix}=-(-5-4)=9; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2&2\\1&-1\end{vmatrix}=-2-2=-4;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}5&1\\1&-2\end{vmatrix}=-10-1=-11; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix}=-(-4-3)=7;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3&2\\1&4\end{vmatrix}=12-2=10; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&2\\5&4\end{vmatrix}=-(8-10)=2;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2&3\\5&1\end{vmatrix}=2-15=-13;$$

topilganlarni (2) formulaga qo‘yamiz va teskari $A^{-1}=1/19\begin{pmatrix}7&-1&10\\9&-4&2\\-11&7&-13\end{pmatrix}$ matrisani olamiz. Teskari matrisaning to‘griligini tekshirish uchun quyidagi tenglikni tekshiramiz:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix}2&3&2\\5&1&4\\1&-2&-1\end{pmatrix}\cdot 1/19\begin{pmatrix}7&-1&10\\9&-4&2\\-11&7&-13\end{pmatrix}=$$

$$=1/19\cdot\begin{pmatrix}14+27-22&-2-12+14&20+6-26\\35+9-44&-5-4+28&50+2-52\\7-18+11&-1+8-7&10-4+13\end{pmatrix}=$$

$$=1/19\cdot\begin{pmatrix}19&0&0\\0&19&0\\0&0&19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

Demak, A^{-1} to‘g‘ri topilgan.

3.5. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-1&-3\\4&3&-2\end{pmatrix}$ matrisa uchun A^{-1} matrisani Gauss-Jordan usulida toping.

Yechish: $|A|=-16\neq 0$ teskari matrisa mavjud. Berilgan matrisani birlik matrisa hisobida kengaytirib, elementar almashtirishlar bajaramiz, bu usulni to chap tomonda A matrisa o‘rnida birlik matrisa hosil bo‘lguncha davom ettiramiz, o‘ng tomonda hosil bo‘lgan matrisa berilgan matrisaga nisbatan teskari matrisa bo‘ladi.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\-1&-1&-3&0&1&0\\4&3&-2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-2&1&1&0\\0&-5&-6&-4&0&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-2&1&1&0\\0&0&-16&1&5&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-2&1&1&0\\0&0&1&-1/16&-5/16&-1/16\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&5&-1&-2&0\\0&1&0&14/16&6/16&-2/16\\0&0&1&-1/16&-5/16&-1/16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11/16&-7/16&5/16\\0&1&0&14/16&6/16&-2/16\\0&0&1&-1/16&-5/16&-1/16\end{array}\right)$$

$A^{-1}=-1/16\begin{pmatrix}11&7&-5\\-14&-6&2\\1&5&1\end{pmatrix}$ teskari matrisa to‘g‘ri topilganini (3) formulaga qo‘yib tekshiramiz:

$$AA^{-1}=-1/16\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&-1&-3\\4&3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11&7&-5\\-14&-6&2\\1&5&1\end{pmatrix}=$$

$$=-1/16\begin{pmatrix}11-28+1&7-12+5&-5+4+1\\-11+14-3&-7+6-15&5-2-3\\44-42-2&28-18-10&-20+6-2\end{pmatrix}=$$

$$=-1/16\begin{pmatrix}-16&0&0\\0&-16&0\\0&0&-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

demak, teskari matrisa to‘g‘ri topilgan.

3.6. Berilgan kvadrat matrisalar uchun teskari matrisani ikki usulda toping:

$a)\begin{pmatrix}-1&1\\4&2\end{pmatrix};\qquad b)\begin{pmatrix}1&3\\2&6\end{pmatrix}.$

3.7. Berilgan kvadrat matrisalar uchun teskari matrisani qulay usulda toping:

$$a)\begin{pmatrix}1&5&7\\3&1&1\\2&3&4\end{pmatrix};\qquad b)\begin{pmatrix}2&-1&7\\5&3&2\\1&4&3\end{pmatrix};$$

3.8. Berilgan kvadrat matrisalarning rangini toping. Xosmas matrisaning teskarisini toping:

$$a)\begin{pmatrix}-1&0&8\\5&9&0\\0&4&3\end{pmatrix};\qquad b)\begin{pmatrix}2&1&2\\1&1&1\\2&3&2\end{pmatrix};\qquad c)\begin{pmatrix}1&0&5\\4&-2&-1\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3.9. Quyidagi matrisalar rangini minorlar ajratish usuli bilan hisoblang:

$$a)\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \quad d)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad j)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad k)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Misollarda matrisalar rangini elementar almashtirish usuli bilan hisoblang:

3.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix};$ **3.11.** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 8 & 9 & 2 \\ 3 & 21 & 15 & 24 & 27 & 6 \\ 2 & 14 & 10 & 16 & 18 & 4 \end{pmatrix};$

3.12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix};$ **3.13.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

3.14. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix};$ **3.15.** $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix};$

3.16. $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix};$ **3.17.** $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 6 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix};$

3.18. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & 3 & -1 \\ 8 & 12 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$; **3.19.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

3.20. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3.21. Berilgan kvadrat matrisalar uchun teskari matrisani ikki usulda toping:

$$a)\begin{pmatrix} tg\alpha & 1 \\ 2 & ctg\alpha \end{pmatrix}; \qquad b)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$c)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}; \qquad d)\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \qquad e)\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.22. Berilgan kvadrat matrisalar uchun teskari matrisani qulay usulda toping:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}; \qquad b)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$c)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \qquad d)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix};$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4-amaliy mashg‘ulot. Vektorlar sistemasi va uning rangi

4.1. Quyidagi vektorlar sistemasining bazislaridan birini quring va rangini aniqlang:

$$\boldsymbol{a}_1(1;2;-1;3),\quad \boldsymbol{a}_2(0;3;4;1),\quad \boldsymbol{a}_3(-2;-1;6;-5),\quad \boldsymbol{a}_4(5;1;2;-4)$$

Yechish: $\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3+\boldsymbol{a}_4x_4=\theta$ vektor tenglama umumiy yechimini Gauss-Jordan usulida quramiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 6 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -5 & -4 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 3 & 3 & -9 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 7 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -19 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -19 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Yechilgan sistemadan $x_1,\ x_2,\ x_4$ – yechilgan noma’lumlar, x_3 esa erkin noma’lum ekanligi ko‘rinib turibdi. Demak, berilgan vektorlar sistemasining bazisi $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ va $\boldsymbol{a}_4$ vektorlar sistemasi bo‘lib, sistemaning rangi bazisidagi vektorlar soni 3 ga teng.

Agar berilgan ikkita n o‘lchovli $\boldsymbol{a}_1$ va $\boldsymbol{a}_2$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi nolga teng bo‘lsa, $\boldsymbol{a}_1$ va $\boldsymbol{a}_2$ vektorlar o‘zaro *ortogonal vektorlar* deyiladi.

n o‘lchovli nolmas vektorlardan tarkib topgan vektorlar sistemasi berilgan bo‘lib, sistema vektorlarining har qanday ikki jufti o‘zaro ortogonal bo‘lsa, u holda sistemaga *ortogonal vektorlar sistemasi* deyiladi.

4.2. Quyidagi vektorlar sistemasi ortogonalmi?

$$\boldsymbol{a}_1(0;5;-2),\quad \boldsymbol{a}_2(29;-2;-5),\quad \boldsymbol{a}_3(2;4;10)$$

Yechish:

$$(\boldsymbol{a}_1*\boldsymbol{a}_2)=0-10+10=0$$
$$(\boldsymbol{a}_1*\boldsymbol{a}_3)=0+20-20=0$$
$$(\boldsymbol{a}_2*\boldsymbol{a}_3)=58-8-50=0$$

Berilgan vektorlar sistemasi ortogonal vektolar sistemasi ekan.

Teng o‘lchovli n ta $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots\ \boldsymbol{a}_k$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi ustida *ortogonal vektorlar sistemasini* qurish, ya’ni mos ravishda $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots\ \boldsymbol{b}_k$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin. Buning uchun *Shmidt formulalari*dan foydalanamiz:

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$$

$$\mathrm{b}_t = a_t - \sum_{i=1}^{t-1}\frac{(b_i\cdot a_t)}{(b_i\cdot b_i)}b_i \qquad t\epsilon\{2;3;\ldots k\}$$

4.3. $\boldsymbol{a}_1(1;1;1)$, $\boldsymbol{a}_2(0;1;1)$, $\boldsymbol{a}_3(0;0;1)$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal sistema quring.

rang$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=3$ chiziqli erkli sistema ekan.

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1(1;1;1)$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1 \cdot a_2)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 = (0;1;1) - \frac{2}{3}(1;1;1) = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(b_1 \cdot a_3)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 - \frac{(b_2 \cdot a_3)}{(b_2 \cdot b_2)} b_2 = (0;0;1) - \frac{1}{3}(1;1;1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \left(0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirib, (1;1;1); (-2;1;1); (0;-1;1) natijani olamiz.

Nolmas ***b*** *vektorning normallangan* yoki *birlik vektori* deb, $\frac{b}{|b|}$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori normallangan, ya’ni birlik vektor ko‘rinishiga keltirilgan ortoganal sistemaga *ortonormallangan vektorlar sistemasi* deyiladi.

4.4. Yuqoridagi misolda topilgan ortonormal $\boldsymbol{b_1}$(1;1;1); $\boldsymbol{b_2}$(-2;1;1); $\boldsymbol{b_3}$(0;-1;1) sistemaning har bir vektorini birlik ko‘rinishga keltiramiz.

$$\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}(1;1;1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\frac{b_2}{|b_2|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}}(-2;1;1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\frac{b_3}{|b_3|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}}(0;-1;1) = \left(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

n o‘lchovli birlik $e_1(1;0;0;\dots;0), e_2(0;1;0;\dots;0), \dots, e_n(0;0;0;\dots;1)$ vektorlar *kanonik bazis*ni tashkil qiladi.

Quyida berilgan vektorlar sistemasining bazislaridan birini quring va ranglarini aniqlang:

4.5. $\boldsymbol{a_1}$=(1;-2;-5), $\boldsymbol{a_2}$=(3;4;-1), $\boldsymbol{a_3}$=(2;-3;0)

4.6. $\boldsymbol{a_1}$=(1;1;-2;-5), $\boldsymbol{a_2}$=(3;4;-1;2), $\boldsymbol{a_3}$=(4;1;-2;3), $\boldsymbol{a_4}$=(5;2;-3;1)

4.7. $\boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{e_2}$; $\boldsymbol{e_3}$ bazisda $\boldsymbol{a_1}$=(1;1;0), $\boldsymbol{a_2}$=(1;-1;1), $\boldsymbol{a_3}$=(-3;5;6) vektorlar berilgan. $\boldsymbol{a_1}$; $\boldsymbol{a_2}$; $\boldsymbol{a_3}$ vektorlar bazisni tashkil qilishini ko‘rsating.

4.8. $\boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{e_2}$; $\boldsymbol{e_3}$ bazisda vektor ***b***=(4;-4;5) berilgan. Shu vektorni quyidagi $\boldsymbol{a_1}$; $\boldsymbol{a_2}$; $\boldsymbol{a_3}$ bazisda ifodalang: $\boldsymbol{a_1}$=(1;1;0), $\boldsymbol{a_2}$=(1;-1;1), $\boldsymbol{a_3}$=(-3;5;-6)

4.9. $\boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{e_2}$; $\boldsymbol{e_3}$ bazisda berilgan ***a***=(1;2;0), ***b***=(3;-1;1), ***c***=(0;1;1) vektorlar o‘zlari bazis tashkil qilishini ko‘rsating.

4.10. $\boldsymbol{e_1}$; $\boldsymbol{e_2}$; $\boldsymbol{e_3}$ bazisda quyidagi ***a, b, c*** vektorlar berilgan: $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e_2}+3\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e_2}+5\boldsymbol{e_3}$. ***a, b, c*** vektorlar bazis tashkil qilishini isbotlang. Vektor $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{e_1}-\boldsymbol{e_2}+\boldsymbol{e_3}$ ni ***a, b, c*** bazisdagi koordinatalarini toping.

Quyidagi vektorlar sistemasining bazislarini toping:

4.11..$\boldsymbol{a}_1$=(1;2;0;0); $\boldsymbol{a}_2$=(1;2;3;4); $\boldsymbol{a}_3$=(3;6;0;0);

4.12.$\boldsymbol{a}_1$=(1;2;3;4); $\boldsymbol{a}_2$=(2;3;4;5); $\boldsymbol{a}_3$=(3;4;5;6); $\boldsymbol{a}_4$=(4;5;6;7);

Berilgan vektorlar sistemasining rangi va barcha bazislari topilsin:

4.13. $\boldsymbol{a}_1$=(1;2;0;0); $\boldsymbol{a}_2$=(1;2;3;4); $\boldsymbol{a}_3$=(3;6;0;0);

4.14. $\boldsymbol{a}_1$=(1;2;3;4); $\boldsymbol{a}_2$=(2;3;4;5); $\boldsymbol{a}_3$=(3;4;5;6); $\boldsymbol{a}_4$=(4;5;6;7);

4.15. $\boldsymbol{a}_1$=(2;1;-3;1); $\boldsymbol{a}_2$=(4;2;-6;2); $\boldsymbol{a}_3$=(6;3;-9;3); $\boldsymbol{a}_4$=(1;1;1;1);

Vektorlar juftliklari o‘zaro ortoganalmi:

4.16. $\boldsymbol{a}_1$(4;-5) va $\boldsymbol{a}_2$(1;0);

4.17. $\boldsymbol{a}_1$(4;1;2) va $\boldsymbol{a}_2$(-1;0;2);

4.18. $\boldsymbol{a}_1$(2;0;4;-1) va $\boldsymbol{a}_2$(1;2;3;4);

4.19. $\boldsymbol{a}_1$(1;3;2;-3) va $\boldsymbol{a}_2$(1;1;1;2)?

Quyida berilgan chiziqli erkli vektorlar sistemalari ustida ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari qurilsin:

4.20. $\boldsymbol{a}_1$(1;0) va $\boldsymbol{a}_2$(1;1)

4.21. $\boldsymbol{a}_1$(1;1;1;0), $\boldsymbol{a}_2$(0;1;1;1), $\boldsymbol{a}_3$(0;0;1;1)

Quyida berilgan vektorlar sistemasining rangi va bazislari topilsin:

4.22. $\boldsymbol{a}_1$=(5;2;-3;1); $\boldsymbol{a}_2$=(4;1;-2;3); $\boldsymbol{a}_3$=(1;1;-1;2); $\boldsymbol{a}_4$=(3;4;-1;2)

4.23. $\boldsymbol{a}_1$=(2;-1;3;5); $\boldsymbol{a}_2$=(4;-3;1;3); $\boldsymbol{a}_3$=(3;-2;3;4); $\boldsymbol{a}_4$=(4;-1;15;17); $\boldsymbol{a}_5$=(7;-6; -7;0)

4.24. $\boldsymbol{a}_1$=(2;1;-3;1); $\boldsymbol{a}_2$=(4;2;-6;2); $\boldsymbol{a}_3$=(6;3;-9;3); $\boldsymbol{a}_4$=(1;1;1;1)

4.25. $\boldsymbol{a}_1$=(1;2;3); $\boldsymbol{a}_2$=(2;3;4); $\boldsymbol{a}_3$=(3;2;3); $\boldsymbol{a}_4$=(4;3;4); $\boldsymbol{a}_5$=(1;1;1)

4.26. $\boldsymbol{a}_1$=(5;2;-3;1); $\boldsymbol{a}_2$=(4;1;-2;3); $\boldsymbol{a}_3$=(1;1;-1;-2); $\boldsymbol{a}_4$=(3;4;-1;2)

4.27. $\boldsymbol{a}_1$=(2;-1;3;5); $\boldsymbol{a}_2$=(4;-3;1;3); $\boldsymbol{a}_3$=(3;-2;3;4); $\boldsymbol{a}_4$=(4;-1;15;17); $\boldsymbol{a}_5$=(-7;-6;-7;0)

Quyida berilgan chiziqli erkli vektorlar sistemalari ustida ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari qurilsin:

4.28. $\boldsymbol{a}_1$(1;1), $\boldsymbol{a}_2$(0;2)

4.29. $\boldsymbol{a}_1$(1;0;1;0), $\boldsymbol{a}_2$(0;1;1;1), $\boldsymbol{a}_3$(1;1;0;1)

4.30. $\boldsymbol{a}_1$(1;1;1;1), $\boldsymbol{a}_2$(1;1;1;0), $\boldsymbol{a}_3$(1;0;1;1)

5-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Asosiy tushunchalar

5.1. Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiring:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

Yechish. Buning uchun asosiy va kengaytirilgan matrisa rangini topamiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}$$

2-satr elementlaridan 1-satr elementlariniayiramiz:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22\end{pmatrix}\qquad r(A)=2$$

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{array}\right)$$

bu matrisa rangini topish uchun yana yuqoridagi ishni takrorlaymiz, natijada $\left(A|B\right)$ matrisa quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$\left(A|B\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4\end{array}\right),\qquad B_1=\begin{pmatrix}7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 25 & 22 & 4\end{pmatrix}$$

matrisa rangini topamiz:

$$M=|B_1|=\begin{vmatrix}7 & 9 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 25 & 22 & 4\end{vmatrix}=225-154=71;\qquad r(B_1)=3$$

Demak, $r\left(A|B\right)=3$ bo‘lib, $r(A)<r\left(A|B\right)$ va sistema birgalikda emas.

Berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarining birgalikda (aniq, aniqmas) yoki birgalikda emasligini tekshiring va birgalikdagi sistemalarni yeching:

5.2. $\begin{cases}x_1+x_2+\ \ x_3=1\\ x_1+x_2+2x_3=1\\ x_1+x_2+3x_3=2\end{cases}$ **5.3.** $\begin{cases}x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=1\\ x_1+\ \ x_2+2x_3=1\\ 2x_1+2x_2+4x_3=1\end{cases}$

5.4. Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasida bazis va erkli o‘zgaruvchilarni ajratish usuli sonini aniqlang va bazis yechimlarini toping:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=3\\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=4\end{cases}$$

Yechish. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasida noma’lumlar soni $n=4$, tenglamalar soni $m=2$, rangi $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0,\quad r=2.$

Demak, noma'lumlarning bazis guruhlari ikkita noma'lumdan iborat. Bunda

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 6.$$

Guruhlar 6 ta: x_1, x_2; x_1, x_3; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_4; x_3, x_4. Bu juftliklarning qaysi birida noma'lumlar oldidagi koeffisiyentlardan tuzilgan determinant noldan farqli bo'lsa, o'sha juftlik noma'lumlari bazis o'zgaruvchi bo'la oladi.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Demak, sistemaning bazis o'zgaruvchularini besh hil usulda bazis va erkli o'zgaruvchilarga ajratish mumkin:

№	Baziso'zgaruvchilar	Erklio'zgaruvchilar
1.	x_1, x_2	x_3, x_4
2.	x_1, x_3	x_2, x_4
3.	x_2, x_3	x_1, x_4
4.	x_2, x_4	x_1, x_3
5.	x_3, x_4	x_1, x_2

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarining bazis yechimlarini topish uchun erkli o'zgaruvchilarni nolga tenglaymiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{11}{5} \\ x_2 = \dfrac{2}{5} \end{cases} \quad x_{1b} = \begin{pmatrix} 11/5 \\ 2/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{9}{5} \\ x_3 = \dfrac{2}{5} \end{cases} \quad x_{2b} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ 0 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{9}{5} \\ x_3 = \dfrac{11}{5} \end{cases} \quad x_{3b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9/5 \\ 11/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_4 = 3 \\ -x_2 - 2x_4 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{2}{5} \\ x_4 = -\dfrac{11}{5} \end{cases} \quad x_{4b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \\ 0 \\ -11/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_3 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{2}{5} \\ x_4 = -\dfrac{9}{5} \end{cases} \quad x_{5b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$$

Topilgan bazis yechimlar barchasi xosmas bazis yechim, chunki $r = 2$ ta noldan farqli noma'lumdan tashkil topgan. Agarda bazis yechimlardan oldan farqli noma'lumlar soni r dan kam bo'lsa, xos bazis yechim deyiladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining bazis yechimlarini toping, undan xos va xosmas bazis yechimlarni ajrating:

5.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

Berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarining birgalikda (aniq, aniqmas) yoki birgalikda emasligini tekshiring va birgalikdagi sistemalarni yeching:

5.7. $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14 \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 7 \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 = 1 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - 12x_3 - 7x_4 = -4 \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -1 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3 \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5 \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 18 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ **5.16.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$ **5.18.** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ **5.20.** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining bazis yechimlarini toping, undan xos va xosmas bazis yechimlarni ajrating:

5.21. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ **5.22.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2 \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 18 \\ -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$ **5.24.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18 \\ - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

6-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

6.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$ sistemani Gaussning klassik usulida yeching:

Yechish.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ - 8x_2 + 13x_3 = 23 \\ -13x_2 + 17x_3 = 25 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4 \\ -8x_2 + 13x_3 = 23 \\ -\frac{33}{8}x_3 = -\frac{99}{8} \end{cases}$$

$x_3 = 3,\ x_2 = 2;\ x_1 = 4$ Javob: $(4;2;3)$.

6.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}$ sistemani Gauss-Jordan usuli bilan yeching:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 3 & -1 & -6 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 3 & 8 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 12 & 8 & -16 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \\ 0 & -1 & 21 & 20 & -25 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 24 & 12 & -10 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & -21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/12 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & -21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -27/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 11/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right)$$

Javob: $(0;2;1/3;-3/2)$.

Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss va Gauss-Jordan usuli bilan yeching:

6.3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x \ \ + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

6.21. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

6.22. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$

6.23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

6.24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

6.25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

6.26. $\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

6.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

6.28. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

6.29. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	2	1	2	6
S_2	3	0	2	8
S_3	1	1	-1	1

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

6.30. Korxonauch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 2-jadvalda berilgan.

2-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	2	1	1	6
S_2	3	0	2	8
S_3	1	1	0	3

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

6.31. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 3-jadvalda berilgan.

3-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	1	1	2	4
S_2	3	0	2	5
S_3	1	4	1	6

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

6.32. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 4-jadvalda berilgan.

4-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	3	2	2	9
S_2	2	1	5	9
S_3	5	3	6	17

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

7-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matrisalar usuli. Kramer qoidasi

7.1. Sistemani Kramer formulasi bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 9 - 8 - 3 + 12 = 14$

$\Delta \neq 0$ bo‘lgani uchun sistema aniq. Yechimni Kramer formulalari yordamida topish mumkin.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -32 + 8 + 30 - 8 + 40 - 24 = 14$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -20 + 32 + 12 - 40 - 4 + 48 = 28$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 80 + 72 - 64 - 24 - 30 = 42$$

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{28}{14} = 2, \; x_3 = \frac{42}{14} = 3. \quad \text{Javob: } (1;\, 2;\, 3)$$

Quyidagi tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yeching:

7.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$

7.4. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini teskari matrisa usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Yechish. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ matrisa uchun teskari matrisa mavjud, chunki $\Delta = |A| = 14 \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 10 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -56+70 \\ 80-60+8 \\ 8+50-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$ Javob: $(1;2;3)$.

Quyidagi tenglamalar sistemasini teskari matrisalar usuli bilan yeching:

7.5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$ **7.6.** $\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

7.7. Quyidagi matrisali tenglamani yeching:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Yechish. $\det A = 3 - 4 = -1 \neq 0$ bo‘lgani uchun A matrisa maxsusmas va A^{-1} mavjud

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

U holda $X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Izoh. Agarda A matrisa maxsus $(\det A = 0)$ bo‘lsa, u holda matrisali tenglamani yuqoridagidek yechimini topish o‘rinli emas. Bunday hollarda matrisali tenglamalar yoki yechmga ega emas, yoki cheksiz ko‘p yechimga ega. Keyingi misolda bunga ravshanlik kiritamiz.

7.8. Quyidagi matrisali tenglamani yeching:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Yechish. $\det A = 12 - 12 = 0$ bo‘lgani uchun A matrisa maxsus va A^{-1} mavjud emas. Faraz qilamizki,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

A va X matrisalarni ko‘paytirsak,

$$\begin{pmatrix} 2x_{11} + 3x_{21} & 2x_{12} + 3x_{22} \\ 4x_{11} + 6x_{21} & 4x_{12} + 6x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

bundan $\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 1 \\ 4x_{11} + 6x_{21} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_{12} + 3x_{22} = 2 \\ 4x_{12} + 6x_{22} = 4. \end{cases}$

Oxirgi tenglamalar sistemasi birgalikda va aniqmas. Ularni yechsak,

$$x_{11} = \frac{1 - 3x_{21}}{2}, \qquad x_{12} = \frac{2 - 3x_{22}}{2}$$

Masalan, $x_{21} = 2\lambda + 1$, $x_{22} = 2\mu$ deb belgilasak,

$$X = \begin{pmatrix} -3\lambda + 1 & 1 - 3\mu \\ 2\lambda + 1 & 2\mu \end{pmatrix},$$

Bunda λ va μ lari xtiyoriy sonlar.

Izoh. Agarda $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ larga bog‘liq bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasining kamida bittasi birgalikda bo‘lmasa, berilgan matrisali tenglama (A matrisa maxsus bo‘lganda) yechimga ega bo‘lmaydi.

Quyidagi tenglamalar sistemasini Kramer usuli bilan yeching:

7.9. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

7.10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

7.11. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

7.12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

7.13. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases}$

7.14. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$

7.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

7.16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

7.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x \ + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

Quyidagi tenglamalar sistemasini teskari matrisalar usuli bilan yeching:

7.18. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

7.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

7.20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$ **7.21.** $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

7.22. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$ **7.23.** $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$

7.24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$ **7.25.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

7.26. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ **7.27.** $\begin{cases} 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

7.28. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ **7.29.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

Ikkinchi tartibli kvadratik X matrisaga nisbatan matrisali tenglamalarni yeching:

7.30. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ **7.31.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

7.32. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ **7.33.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

7.34. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **7.35.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

7.36. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ **7.37.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$

Uchinchi tartibli kvadratik X matrisaga nisbatan matrisali tenglamalarni yeching:

7.38. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ **7.39.** $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

7.40. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -10 & 2 & 7 \\ 10 & -7 & 8 \end{pmatrix}$ **7.41.** $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

7.42. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 9 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7.43. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.44. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi barcha X matrisalarni toping:

7.45. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **7.46.** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$

7.47. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **7.48.** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7.49. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **7.50.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Quyidagi masalalarning matematik modelini quring, Kramer va teskari matrisa usullaridan foydalanib yeching:

7.51. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

7.52. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 2-jadvalda berilgan.

2-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	1	1	1	1
S_2	1	2	2	2
S_3	2	3	3	3

7.53. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 3-jadvalda berilgan.

3-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	3	2	1	20
S_2	2	3	1	22
S_3	2	2	3	30

7.54. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 4-jadvalda berilgan.

4-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	2	1	2	6
S_2	3	0	2	8
S_3	1	1	-1	1

7.55. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 5-jadvalda berilgan.

5-jadval

Xom ashyo turlari	**Mahsulot turlari bo'yicha xom ashyo sarflari**			**Xom ashyo zahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	2	1	1	6
S_2	3	0	2	8
S_3	1	1	0	3

7.56. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 6-jadvalda berilgan.

6-jadval

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari			Xom ashyo zahirasi
	1	2	3	
S_1	1	1	2	4
S_2	3	0	2	5
S_3	1	4	1	6

7.57. Korxona uch xildagi xomashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 7-jadvalda berilgan.

7-jadval

Xom ashyo turlari	Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari			Xom ashyo zahirasi
	1	2	3	
S_1	3	2	2	9
S_2	2	1	5	9
S_3	5	3	6	17

8-amaliy mashg‘ulot. Bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Fundamental yechimlar sistemasi

8.1. Berilgan bir jinsli sistema umumiy yechimini vektor shaklda quring:

$$\begin{cases} 4x_1+7x_2+2x_3+3x_4=0 \\ x_1+3x_2-x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+x_2+4x_3-x_4=0 \end{cases}$$

Yechish:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1,2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2,6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$m=4,\ r=2$ bo‘lgani uchun $m-r=2$ ta chiziqli erkli $\overrightarrow{e_1}(1;0)$ va $\overrightarrow{e_2}(0;1)$ sistemani tanlaymiz. $\overrightarrow{e_1}(1;0)$ vektor koordinatalarini umumiy yechimning mos erkli noma’lumlari o‘rniga qo‘yib, bazis noma’lumlarni aniqlaymiz va $\overrightarrow{F_1}(-2,6;1,2;1;0)$ fundamental yechimni quramiz. $\overrightarrow{e_2}(0;1)$ vektor yordamida $\overrightarrow{F_2}(1;-1;0;1)$ fundamental yechimni quramiz. Boshqacha qilib aytganda kengaytirilgan matrisadagi koeffisiyentlarni sistemaga qo‘yamiz:

$$\begin{cases} \quad x_2 - 1{,}2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 \qquad 2{,}6x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = & -2{,}6x_3 + x_4 \\ x_2 = & 1{,}2x_3 - x_4 \\ x_3 = & x_3 \\ x_4 = & x_4 \end{cases}$$

Fundamental yechimlar $\overrightarrow{F_1}(-2{,}6;1{,}2;1;0)$ va $\overrightarrow{F_2}(1;-1;0;1)$ quriladi.

Sistema umumiy yechimi vektor shaklini yozamiz:

$$X = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -2{,}6 \\ 1{,}2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bu yerda λ_1 va λ_2 lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

8.2. Berilgan bir jinsli bo‘lmagan sistema umumiy yechimini vektor shaklda quring:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Yechish:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1{,}2 & 1 & 0{,}8 \\ 1 & 0 & 2{,}6 & -1 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$F_0 = (0{,}6;\ 0{,}8;\ 0;\ 0)$ sistemaning xususiy yechimlaridan birini qurdik.

Sistema umumiy yechimi vektor shaklini yozamiz:

$$X = F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2{,}6 \\ 1{,}2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bu yerda λ_1 va λ_2 lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlarini toping va umumiy yechimini yozing:

8.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

8.6. $\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ x + y - 3z = 4 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 = 1 \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 - 12x_3 - 7x_4 = -4 \\ 3x_1 + 11x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -1 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3 \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5 \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 18 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

8.16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 5 \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$

8.19. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

8.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

8.21. $\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

8.22. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

8.23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$

8.24. $\begin{cases} 8x-2y-2z=0 \\ x-y+3z=0 \\ -3y-4z=0 \end{cases}$

8.25. $\begin{cases} 3x+2y-6z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ x+y-5z=0 \end{cases}$

8.26. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$

8.27. $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$

8.28. $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+6x_4=1 \\ 3x_1-3x_2-x_3-x_4=-4 \end{cases}$

8.29. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+x_4=2 \\ x_2-2x_3+3x_4=3 \end{cases}$

8.30. $\begin{cases} 8x_1+2x_2-x_3=5 \\ 2x_1-x_2-x_3=4 \end{cases}$

8.31. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-2x_4=-4 \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=1 \end{cases}$

8.32. $\begin{cases} x_1+x_2+5x_3+x_4=2 \\ 2x_2-2x_3+2x_4=2 \\ 2x_1-2x_3+x_4=2 \end{cases}$

8.33. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+3x_4=18 \\ -x_1-x_2+2x_4=0 \\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=0 \end{cases}$

8.34. $\begin{cases} -x+5y+2z=3 \\ 3x+2y+3z=3 \end{cases}$

8.35. $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3-x_4+x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=3 \\ -x_1-x_2-x_3+x_4+2x_5=2 \end{cases}$

9-amaliy mashg‘ulot. Analitik geometriya elementlari

9.1. $(2;\ 6)$ nuqtadan o‘tuvchi va Ox o‘q bilan $arctg5$ burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasini tuzish uchun k va b ni hisoblash kerak. $k=tg(arctg5)=5,$ b ni hisoblash uchun $y=kx+b$ tenglamaga k ning topilgan qiymatini hamda x va y o‘zgaruvchilarning o‘rniga berilgan nuqtaning koordinatalarini qo‘yamiz. $6=5\cdot 2+b$ bu yerdan $b=-4$ Izlanayotgan tenglama $y=5x-4$

9.2. $A(2;\ 5)$ nuqtadan o‘tuvchi va ordinata o‘qida $b=7$ kesma ajratuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

9.3. $3x+2y+6=0$ to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qqa og‘ish burchagini hisoblang.

Yechish. $3x+2y+6=0$ tenglamani y ga nisbatan yechib, $y=-\frac{3}{2}x-3$ ni hosil qilamiz, bu yerdan $k=-\frac{3}{2}$ biroq $k=tg\alpha$ demak, $tg\alpha=-\frac{3}{2}$. Jadvaldan $\alpha=180^0-56^0 19'=123^0 41'$ ni topamiz.

9.4. $2x+2y-5=0$ to‘g‘ri chiziq Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan qanday burchak hosil qiladi?

9.5. To‘g‘ri chiziq Ox o‘qdan 3 ga, Oy o‘qdan 5ga teng kesma ajratadi. Bu to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. Masala shartida $a=3$ va $b=5$. Bu qiymatlarni $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalari bo‘yicha tenglamasiga qo‘yamiz: $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ga ega bo‘lamiz.

9.6. $4x+3y-36=0$ to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan uchburchakning yuzini toping.

9.7. Agar to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlaridan teng kesmalar ajratsa va to‘g‘ri chiziqni koordinata o‘qlari orasidagi kesmasi $5\sqrt{2}$ ga teng bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

9.8. $A(2;-3)$ va $B(-1;4)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. Masala shartida quyidagilar berilgan $x_A=2; x_B=-1; y_A=-3$ va $y_B=4$. Bu qiymatlarni berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga qo‘yib quyidagilarni topamiz: $\frac{y+3}{4+3}=\frac{x-2}{-1-2}$ yoki $7x+3y-5=0$.

9.9. Koordinata boshidan va $A(-2;-3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

9.10. $A(-1;3)$ va $B(4;-2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

9.11. $y=2x$ va $y=5x$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi o‘tkir burchakni toping.

Yechish. Berilgan to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffisiyentlari 2 va 5ga teng. Ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi o‘tkir burchakni hisoblash uchun k_1 va k_2 larni $tg\varphi>0$bo‘ladigan qilib (chunki o‘tkir burchakning tangensi – musbat son) tanlash kerak. Buning uchun $k_2 = 5$ va $k_2 = 2$ deb olamiz. $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ formula bo‘yicha:

$tg\varphi = \dfrac{5-2}{1+5\cdot 2} = \dfrac{3}{11} = 0,2727.$ φ burchakni jadvaldan topamiz $\varphi = arctg\dfrac{3}{11} = 15^0 15'.$

9.12. To‘g‘i chiziqlar orasidagi burchakni toping:

$$1)\ \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = \dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 5x - \ y + 7 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

9.13. $M(-2;\, 4)$ nuqtadan $2x - 3y + 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. $2x - 3y + 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentini topish uchun uning tenglamasini y ga nisbatan yechamiz: $y = \dfrac{2}{3}x + 2,$ bu yerdan burchak koeffisiyenti $k_1 = \dfrac{2}{3}.$ Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyenti berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentiga teng bo‘ladi, chunki to‘g‘ri chiziqlar parallel, ya’ni $k_1 = k_2 = \dfrac{2}{3}.$ Izlanayotgan to‘g‘ri chiziq $M(-2;\, 4)$ nuqtadan o‘tadi va $k_2 = \dfrac{2}{3}$ burchak koeffisiyentga ega bo‘ladi. Bu qiymatlarni berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasiga qo‘yib, $y - 4 = \dfrac{2}{3}(x+2)$ yoki $2x - 3y + 16 = 0$ ni hosil qilamiz.

9.14. $M(2;\, 3)$ nuqtadan $5x - 4y - 20 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Yechish. $5x - 4y - 20 = 0$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyenti $k_1 = \dfrac{5}{4}.$ Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffisiyentini $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ formula bo‘yicha topamiz: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1} = -\dfrac{4}{5}.\ k_2 = -\dfrac{4}{5}$ ni va $M(2;\, 3)$ nuqtaning koordinatalarini to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasiga qo‘yib, $y - y_0 = k(x - x_0)$ $y - 3 = -\dfrac{4}{5}(x-2)$ yoki $4x + 5y - 23 = 0$ ni hosil qilamiz.

9.15. $3x - 2y + 7 = 0,$ $6x - 4y - 9 = 0,$ $6x + 4y - 5 = 0,$ $2x + 3y - 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidan parallel va perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni aniqlang.

9.16. $M(-3;-4)$ nuqtadan o‘tuvchi koordinata o‘qlariga parallel to‘g‘ri chiziqlar tenglamasini yozing.
9.17. To‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlaridan teng kesmalar ajratadi. Agar to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan uchburchak yuzi 8 kv.birl. bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
9.18. $y=-2,\ y=4$ to‘g‘ri chiziqlar $3x-4y-5=0$ to‘g‘ri chiziqni A va B nuqtalarda kesib o‘tadi. $\overline{AB}$ vektorni uzunligi va uni koordinata o‘qlaridagi proyektsiyalarini toping.
9.19. Agar to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan uchburchak yuzi 6 kv.b. bo‘lsa va to‘g‘ri chiziq $(-4;\ 6)$ nuqtadan o‘tsa, uning tenglamasini yozing.
9.20. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

a) $3x+2y=0$ *va* $6x+4y+9=0$ b) $3x-4y=0$ *va* $8x+6y=11$

9.21. $A(2;\ 3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini yozing. Bu dastadan Ox o‘qibilan 1) 45^0, 2) 60^0, 3) 135^0, 4) 0^0burchaklartashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqni toping.
9.22. $A(-2;\ 5)$ nuqta va $2x-y=0$ to‘g‘ri chiziqni yasang. A nuqtadan o‘tuvchi va 1) berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel; 2) berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
9.23. $2x-5y-10=0$ to‘g‘ri chiziqni koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalariga perpendikulyar qo‘yilgan. Ularning tenglamasini yozing.
9.24. Uchlari $A(-2;\ 0)$, $B(4;-2)$ va $C(4;\ 2)$ bo‘lgan uchburchakka BD balandlik va BE mediana o‘tkazilgan. AC tomon, BE mediana va BD balandlik tenglamalarini yozing.
9.25. Uchburchak tomonlari quyidagi tenglamalar bilan berilgan: $x+3y=0$, $x=3$, $x-2y+3=0$. Uchburchakni burchaklari va uchlarini toping.
9.26. Uchlari $A(-2;\ 0)$, $B(2;\ 4)$ va $C(4;0)$ bo‘lgan uchburchak berilgan. Uchburchak tomonlari, AE medianasi, BD balandlik tenglamalarini, AE mediana uzunligini toping.
9.27. Tomonlari $x+y=4$, $3x-y=0$, $x-3y-8=0$ tenglamalar bilan berilgan uchburchakni burchaklari, uchlari va uchburchakni yuzini toping.
9.28. To‘g‘ri chiziqlarni normal ko‘rinishiga keltiring:

1) $3x-4y-20=0$, 2) $x+y-3=0$.

9.29. Agar to‘g‘ri chiziqli normali $p=2$ bo‘lib, bu normalning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan burchagi:

1) 45^0, 2) 135^0, 3) 225^0, 4) 315^0

bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

9.30. $A(4;3), B(2;1), C(1;0)$ nuqtalardan $3x+4y-10=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofalarni toping.

9.31. $2x-3y=6$ va $4x-6y=25$ to‘g‘ri chiziqlarni parallelligini ko‘rsating va ular orasidagi masofani toping.

9.32. Agar $y=kx+5$ to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan $d=\sqrt{5}$ masofa uzoqlikda bo‘lsa, k ni toping.

9.33. $8x-15y=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan va $A(4;\ 2)$ nuqtadan to‘rt birlik masofa uzoqlikda bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

9.34. $y=4-2x$ to‘g‘ri chiziqqa qaraganda $y=2x-4$ to‘g‘ri chiziqdan uch barobar uzoqlikda harakatlanayotgan $M(x;\ y)$ nuqtaning izi tenglamasini yozing.

9.35. $N(1;-2)$ nuqtadan va $2x+y+6=0$, $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

9.36. $x+3y=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel va $5x-y+10=0$, $8x+4y+9=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

9.37. $2x+3y=12$ va $3x+2y=12$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarining tenglamalari yozilsin.

9.38. $3x+4y=12$ va $y=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarining tenglamalari yozilsin.

9.39. Kvadrat tomonlaridan birining tenglamasi $x+3y-7=0$ va diogonallari kesishgan nuqta $P(0;\ -1)$ berilgan. Kvadratning qolgan uchta tomon tenglamalarini yozing.

9.40. Romb tomonlaridan birining tenglamasi $5x+2y-9=0$. Agar romb diogonallari $O(0;\ 0)$ da kesishgan bo‘lib, ulardan birining tenglamasi $y=2x$ bo‘lsa, pombning qolgan uchta tomon tenglamasini yozing.

9.41. Uchburchak tomonlarining o‘rtalari berilgan $P(1;\ 2)$ – AB tomonining o‘rtasi, $R(-4;\ 3)$ – BC tomonining o‘rtasi, $Q(5;\ -1)$ – AC tomonining o‘rtasi, CF balandlik va AR mediana kesishgan nuqta topilsin.

9.42. Rombning ikki qarama-qarshi uchlarining koordinatalari berilgan, $A(1;-4)$, $C(-1;3)$. Romb diogonallarining tenglamasini yozing.

9.43. Agar $A(-5;5)$ va $B(3;1)$ uchburchakning uchlari, $D(2;5)$ esa balandliklari kesishgan nuqta bo‘lsa, uchburchak tomonlarining tenglamasini yozing.

9.44. $O(0;0)$ va $A(-3;0)$ nuqtalar berilgan OA kesmada parallelogramm yasalgan, uning diogonallari $B(0;2)$ nuqtada kesishadi. Parallelogramm tomonlari va diogonallari tenglamasini yozing.

9.45. Asos tomonlari 8 sm va 2 sm bo‘lgan teng yonli trapetsiyaning o‘tkir burchagi 45^0. Trapetsiyaning katta asosi Ox o‘qida yotsa, Oy o‘qi esa trapetsiyaning simmetriya o‘qi bo‘lsa, trapetsiyaning tomonlari tenglamasini yozing.

9.46. Koordinatalar boshidan $2x+y=a$ to‘g‘ri chiziq bilan teng yonli uchburchak hosil qiluvchi ikki o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Shu uchburchakning yuzini toping.

9.47. Uchburchak AB tomonining tenglamasi $x-3y+3=0$ va AC tomonining tenglamasi $x+3y+3=0$ hamda AD balandligining asosi $D(-1;3)$ berilgan bo‘lsa, uchburchakning ichki burchaklari topilsin.

9.48. Romb ikki tomonining tenglamalari $x+2y=4$ va $x+2y=10$ hamda diogonallaridan birining tenglamasi $y=x+2$ ma’lum bo‘lsa, romb uchlarining koordinatalari hisoblansin.

9.49. $\dfrac{x+2\sqrt{5}}{4}+\dfrac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$ to‘g‘ri chiziq berilgan. To‘g‘ri chiziqning

a) umumiy tenglamasi,

b) burchak koeffisiyentli tenglamasi,

c) kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing.

9.50. $M_0(3;5;-8)$ nuqtadan $6x-3y+2z-28=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa formulasidan foydalanib,

$$d=\frac{|6\cdot3-3\cdot5+2\cdot(-8)-28|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{41}{7}$$

ni topamiz.

9.51. $(5;1;-1)$ nuqtadan $x-2y-2z+4=0$ tekislikkacha bo‘lgan masofa topilsin.

9.52. $M(2;3;5)$ nuqtadan o'tib, $\vec{N}=4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ formuladan foydalanamiz.

$$4(x-2)+3(y-3)+2(z-5)=0 \text{ ya'ni } 4x+3y+2z-27=0.$$

9.53. $M_1(0;-1;3)$ va $M_2(1;3;5)$ nuqtalar berilgan, M_1 nuqtadan o'tuvchi va $\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi yozilsin.

9.54. $M(2;3;-1)$ nuqtadan o'tib, $5x-3y+2z-10=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

Yechish. $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ formuladan

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0$$

Berilgan tekislikning normal vektori $\vec{n}=(5;-3;2)$ bilan izlangan tekislikning normal vektori ustma-ust tushadi, demak, $A=5, B=-3, C=2$ va izlangan tekislik tenglamasi $5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0$ yoki $5x-3y+2z+1=0$ bo'ladi.

9.55. $(2;2;-2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x-2y-3z=0$ tekislikka parallel tekislik topilsin.

9.56. $A(5;4;3)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlaridan teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasidan foydalanib, $(a=b=c)$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ga ega bo'lamiz. $A(5;4;3)$ nuqtaning koordinatalari izlangan tekislik tenglamasini qanoatlantiradi, shuning uchun $\frac{5}{a}+\frac{4}{a}+\frac{3}{a}=1$ bundan $a=12$. Shunday qilib, $x+y+z-12=0$ tenglamaga ega bo'lamiz.

9.57. *Oy* o'qqa parallel, *Ox* va *Oz* o'qlardan a va c kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9.58. $x+y+5z-1=0,\ 2x+3y-z+2=0$ tekisliklarning kesishish chizig'idan va $M(3;2;1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

Yechish. Ma'lumki $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ tenglama λ ning ixtiyoriy qiymatida $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (I) va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (II) tekisliklarning kesishgan chizig'idan o'tuvchi tekilikni aniqlaydi. Demak, $x+y+5z-1+\lambda(2x+3y-z+2)=0.$ M nuqtaning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantirishidan λ ni topamiz:

$$3+2+5-1+\lambda(6+6-1+2)=0,$$

bundan $\lambda=-\dfrac{9}{13}$. Shunday qilib, izlangan tenglama

$$x+y+5z-1-\frac{9}{13}(2x+3y-z+2)=0$$

yoki

$$5x+14y-74z+31=0$$

bo‘ladi.

9.59. $M(0;\,2;\,1)$ nuqtadan va $x+5y+9z-13=0$, $3x-y-5z+1=0$ tekisliklarning kesishish chizig‘idan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

9.60. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$ to‘g‘ri chiziqdan va $M(0;\,2;\,1)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislikning tenglamasini tuzing.

Yechish. Tekislik $M(0;\,2;\,1)$ nuqta orqali o‘tadi, shuning uchun

$$A(x-2)+By+(z-1)=0.$$

To‘g‘ri chiziqning $\vec{s}=(1;\,2;\,-1)$ yo‘naltiruvchi vektori bilan tekislikning $\vec{n}=(A;\,B;\,C)$ normal vektori perpendikulyar. Bu vektorlarning skalyar ko‘paytmasi $(\vec{s}\cdot\vec{n})=0$, $A+2B-C=0$.

Boshqa tomondan $A(1;\,-1;\,-1)$ nuqta to‘g‘ri chiqda yotadi, demak tekislikda ham, uning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantiradi.

$$A(1-2)+B(-1)+C(-1-1)=0 \quad \text{yoki} \quad -A-B-2C=0.$$

Quyidagi tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} A+2B-C=0, \\ -A-B-2C=0. \end{cases}$$

Natijada $A=-5C,\ B=3C.$

Izlanayotgan tekislik tenglamasi $\left(-5(x-2)+3y+z-1\right)C=0$ yoki ($C\neq 0$ ga qisqartirgandan keyin) $5x-3y-z-9=0.$

9.61. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ to‘g‘ri chiziqdan va $(3;\,4;\,0)$nuqtadan o‘tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.62. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$ to‘g‘ri chiziq va $4x-2y-2z-3=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni topish formulasidan

$$\vec{N}=(4;\,-2;\,-2),\;\; \vec{s}=(1;\,1;\,-2),\;\; Sin\varphi=\frac{|4\cdot1-2\cdot1-2\cdot(-2)|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}}=\frac{1}{2}.$$

Demak, $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

9.63. $\begin{cases} x-y+z=0, \\ 2x+y-z-3=0. \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq va $2x+y+2z-5=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.

9.64. $M(a;\,a;\,0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\overrightarrow{OM}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi yozilsin.

9.65. $M(-1;\,2;\,3)$ nuqtadan $\overrightarrow{OM}$ ga perpendikulyar tekislik tenglamasi yozilsin.

9.66. $A\left(a;\,-\dfrac{a}{2};\,a\right)$ va $B\left(0;\,\dfrac{a}{2};\,0\right)$ nuqtadan teng uzoqlikda bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rnining tenglamasi yozilsin.

9.67. $M(2;\,-1;\,3)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinata o‘qlaridan teng kesmalar ajratuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9.68. $M(-4;\,0;\,4)$ nuqtadan o‘tuvchi va Ox va Oy o‘qlaridan $a=4$ va $b=3$ kesmalar ajratuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.69. $M(1;\,-3;\,5)$ nuqtadan o‘tuvchi va Oy va Oz o‘qlardan Ox o‘qdagidan ko‘ra ikki marta katta kesma ajratuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9.70. $M_1(0;\,1;\,3)$ va $M_2(2;\,4;\,5)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Ox o‘qqa parallel tekislik tenglamasi yozilsin.

9.71. Ox o‘qdan va $M(0;\,-2;\,3)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9.72. Oz o‘qdan va $M(2;\,-4;\,3)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9.73. Oy o‘qdan va $M(4;\,0;\,3)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9.74. Oz o‘qqa parallel hamda $M_1(2;\,2;\,0)$ va $M_2(4;\,0;\,0)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9.75. $(0;\,0;\,a)$ nuqtadan o‘tuvchi va $x-y-z=0$ hamda $2y=x$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.76. $M_1(-1;\,-2;\,0)$ va $M_2(1;\,1;\,2)$ nuqtalardan o‘tuvchi hamda $x+2y+2z-4=0$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.77. $M_1(1;\,-1;\,2)$, $M_2(2;\,1;\,2)$ va $M_3(1;\,1;\,4)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.78. Oz o‘qdan $2x+y-\sqrt{5}z=0$ tekislik bilan 60^0 burchak tashkil etuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

9.79. Quyidagi tekisliklardan qaysilari perpendikulyar ekanligini aniqlang:

1) $5x+y-3z-1=0$ va $2x+5y-3z+6=0$

2) $x-y-z-3=0$ va $2x+3y-z+5=0$

3) $7x-2y-z=0$ va $x-7y+21z+3=0$

9.80. Quyidagi tekisliklardan qaysilari parallel ekanligini aniqlang:

1) $2x+3y-4z+12=0$ va $4x+6y-8z+1=0$

2) $x-2y+3z-5=0$ va $x-2y-3z+9=0$

3) $2x-y-3z+4=0$ va $6x-2y-9z+5=0$

9.81. $(2;-1;1)$ nuqtadan o‘tuvchi, $3x+2y-z+4=0$ va $x+y+z-3=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.82. Quyidagi tekisliklar koordinatalar sistemasiga nisbatan qanday joylashgan:

1) $x-y+1=0$ 2) $x+2z=0$ 3) $x-2y+3z=0$

4) $y-z+2=0$ 5) $x+3=0$ 6) $2z+3=0$

7) $2x-z+4=0$ 8) $3y+z=0$ 9) $4x+3y=0$

10) $2y-5=0$?

9.83. Quyidagi tekisliklar orasidagi burchak topilsin.

1) $x-2y+2z-8=0$ va $x+z-6=0$

2) $x+2z-6=0$ va $x+2y-4=0$

9.84. Tekisliklar tenglamalarini tuzing:

1) $(3;2;-1)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinata tekisliklarining har biriga parallel bo‘lgan;

2) $(-2;3;1)$ nuqtadan va koordinata o‘qlarining har biridan o‘tuvchi.

9.85. Quyidagi tekislik tenglamalarini kesmalarga nisbatan va normal ko‘rinishidagi tenglamalarini yozing:

1) $3x-2y-6z+5=0$ 2) $-x+8y-4z+17=0$

9.86. $x+5y-z+2=0$ va $4x-y+3z-1=0$ tekisliklar kesishish chizig‘idan o‘tuvchi va:

1) koordinatalar boshidan; 2) $(1;1;1)$ nuqtadan;

3) Oy o‘qiga parallel bo‘lgan tekisliklar tenglamasi tuzilsin.

9.87. $(-1;-1;2)$ nuqtadan o‘tuvchi va $x-2y+z-4=0$ hamda $x+2y-2z+4=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.88. $4x+3y-5z-8=0$ va $4x+3y-5z+12=0$ parallel tekisliklar orasidagi masofa topilsin.

9.89. $2x-y+3z-9=0$, $x+2y+2z-3=0$, $3x+y-4z+6=0$ tekisliklarning kesishgan nuqtasi topilsin.

9.90. $M(0;2;1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

9.91. $(4;3;0)$ nuqtadan $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ va $M_3(3;0;1)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislikkacha bo‘lgan masofa topilsin.

9.92. $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori topilsin.

9.93. 1) $\begin{cases} y=3 \\ z=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=2 \\ z=x+1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=4 \\ z=y \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari aniqlansin.

9.94. $A(-1;2;3)$ va $B(2;6;-2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin va uning yo‘naltiruvchi kosinuslari topilsin.

9.95. $A(2;-1;3)$ va $B(2;3;3)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin.

9.96. 1) $(-2;1;-1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{P}(1;-2;3)$ vektorga parallel bo‘lgan;
2) $A(3;-1;4)$ va $B(1;1;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamalari yozilsin.

9.97. $\begin{cases} 2x+y+8z-16=0 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini:

1) parametrik ko‘rinishda;

2) kanonik ko‘rinishda yozilsin. To‘g‘ri chiziqning koordinatalar tekisliklaridagi izlari topilsin.

12.98. $A(0;-4;0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{P}(1;2;3)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin, to‘g‘ri chiziqning xOz tekisligidagi izi topilsin.

9.99. $\begin{cases} x=3 \\ z=5 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori topilsin.

9.100. $(2;-3;4)$ nuqtadan Oy o‘qqa tushirilgan perpendikulyarning tenglamalari yozilsin.

9.101. $\begin{cases} 2x-y-7=0 \\ 2x-z+5=0 \end{cases}$ *va* $\begin{cases} 3x-2y+8=0 \\ z=3x \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

9.102. $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq bilan $2x + y + z - 4 = 0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

9.103. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ to‘g‘ri chiziq $2x + y - z = 0$ tekislikka parallel ekanligi, $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ to‘g‘ri chiziq esa shu tekislik ustida yotishi ko‘rsatilsin.

9.104. $(-1;\, 2;\, -3)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\begin{cases} x = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqa perependikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.105. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $2x + 3y - z = 4$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.106. $(a;\, b;\, c)$ nuqtadan o‘tuvchi va:

1) Oz o‘qqa parallel;
2) Oz o‘qqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamalari yozilsin.

9.107. $\begin{cases} x = 2z - 1, \\ y = -2z + 1 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq bilan $(1;\, -1;\, -1)$ nuqta va koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak topilsin.

9.108. $(2;\, -3;\, 4)$ nuqtadan Oz o‘qqa tushirilgan perpendikulyarning tenglamalari yozilsin.

9.109. $N(2;\, -3;\, 4)$ nuqtadan $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa topilsin.

9.110. $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ va $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$ parallel to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

9.111. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t + 2, \\ z = 1 - t \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqning $3x - 2y + z = 3$ tekislik bilan kesishgan nuqtasi topilsin.

9.112. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ to‘g‘ri chiziqning $x + 2y + 3z - 29 = 0$ tekislik bilan kesishgan nuqtasi topilsin.

9.113. $\begin{cases} x = z - 2, \\ y = 2z + 1 \end{cases}$ va $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishuvchi ekanligi ko‘rsatilsin va ular yotgan tekislikning tenglamasi yozilsin.

9.114. $(2;\,1;\,0)$ nuqtadan $\begin{cases} x=3z-1, \\ y=2z \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning tenglamasi yozilsin.

9.115. $x+y-2z-6=0$ tekislik va $M(1;\,1;\,1)$ nuqta berilgan. Berilgan tekislikka nisbatan M nuqtaga simmetrik bo‘lgan N nuqtani toping.

9.116. $M(1;\,1;\,1)$ nuqta va $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ to‘g‘ri chiziq berilgan. Berilgan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan M nuqtaga simmetrik bo‘lgan N nuqtani toping.

9.117. $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-3}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan va $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing.

9.118. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}$ to‘g‘ri chiziqni $x+y-2z-5=0$ tekislikdagi proyeksiyasini toping.

9.119. $A(1;\,1;\,1)$, $B(2;\,3;\,3)$ va $C(3;\,3;\,2)$ nuqtalar berilgan. A nuqtadan o‘tuvchi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlarga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

9.120. Koordinata boshidan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi va yo‘nalishini toping:

1) $2x+3y+6z-35=0$;
2) $21x+30y-70z-84=0$;
3) $x-2y+2z+21=0$.

10-amaliy mashg‘ulot. Arifmetik vektor fazo. Chiziqlifazo

10.1. $A_1(3;-4;1)$ va $A_2(4;6;-3)$ nuqtalar berilgan. $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish: ushbu holda $x_1=3$, $y_1=-4$, $z_1=1$ va $x_2=4$, $y_2=-6$, $z_2=-3$. $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1;\,y_2-y_1;\,z_2-z_1)$ formula bo‘yicha $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}=(1;\,10;\,-4)$ ga ega bo‘lamiz.

10.2. $A(1;3;2)$ *va* $B(5;8;-1)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa $\vec{a}=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ vektorni toping.

10.3. $A(-2;3;5)$ *va* $B(3;-8;-1)$ nuqtalar berilganbo‘lsa $\vec{a}=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ vektorni toping.

10.4. Parallelogrammning uchta ketma-ket uchi $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$, $C(6;4;4)$ berilgan. Parallelogrammning to‘rtinchi D uchini toping.

Yechish: parallelogrammning to‘rtinchi D uchining koordinatalarini x, y, z bilan belgilaymiz $D(x; y; z)$. $\overline{BC}$ va $\overline{AD}$ vektorlarning koordinatalarini topamiz. $\overline{BC} = (6-3;\ 4-2;\ 4-1)$, $\overline{BC} = (3;\ 2;\ 3)$, $\overline{AD} = (x-1; y+2; z-3)$. $ABCD$ parallelogrammda $\overline{BC}$ va $\overline{AD}$ vektorlar tengligidan, $x-1=3$, $y+2=2$, $z-3=3$. Demak, $x=4$, $y=0$, $z=6$, $D(4;\ 0;\ 6)$.

10.5. Parallelogramning ketma-ket uchta $A(1;-2;3)$, $B(3;2;1)$ *va* $C(6;4;4)$ uchlari berilgan. Uning to‘rtinchi uchini toping.

10.6. $\vec{a}$ vektor Ox va Oy o‘qlari bilan mos ravishda $\alpha = 60^0$ va $\beta = 120^0$ burchak tashkil qiladi. Agar $\left|\vec{a}\right| = 2$ bo‘lsa, $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish. x, y, z $\vec{a}$ vektorning koordinatalari, ya’ni $\vec{a} = (x; y; z)$. $\vec{a}$ vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslarini $\cos\alpha = \dfrac{x}{\left|\vec{a}\right|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{\left|\vec{a}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{\left|\vec{a}\right|}$ munosabatlardan topamiz.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \cos^2\gamma = 1 - \cos^2 60^0 - \cos^2 120^0, \quad \cos^2\gamma = \frac{1}{2}.$$

Bu yerdan $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ yoki $\cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Masala sharti ikki vektorni qanoatlantiradi $\vec{a}_1$ va $\vec{a}_2$. $\vec{a}_1$ vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{2}$, $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ va $\vec{a}_2$ vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{2}$, $\cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x_1}{2}$, $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{y_1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{z_1}{2}$ va $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x_2}{2}$, $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{y_2}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{z_2}{2}$ ga egamiz. Bu yerdan $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $z_1 = \sqrt{2}$ va $x_2 = 1$, $y_2 = -1$, $z_2 = -\sqrt{2}$. Demak, $\vec{a}_1 = \left(1; -1; \sqrt{2}\right)$ va $\vec{a}_2 = \left(1; -1; -\sqrt{2}\right)$.

10.7. M nuqtaning radius vektori Ox o‘q bilan 45° va Oy o‘q bilan 60° burchak hosil qiladi. Vektorning uzunligi $\left|\vec{r}\right| = 6$. Agar M ning applikatasi manfiy bo‘lsa, uning koordinatalarini aniqlang va $\overline{OM} = \bar{r}$ vektorni $\vec{i}; \vec{j}$ *va* $\vec{k}$ birlik vektorlari orqali ifodalang.

10.8. $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ va $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ vektorlar berilgan. m ning qanday qiymatlarida vektorlar perpendikulyar bo‘ladi.

Yechish. Bu vektorlarning skalyar ko‘paytmasini topamiz: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4m + 3m - 28$; $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo‘lgani uchun $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ bo‘ladi. Bundan $7m - 28 = 0$, ya’ni $m = 4$.

10.9. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ va $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchakni hisoblang.

Yechish. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|Cos\varphi$ bo‘lgani uchun

$$Cos\varphi = \frac{\left(\overline{a}\overline{b}\right)}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \qquad \left(\overline{a}\overline{b}\right) = 1\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-2) = 8,$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = 2\sqrt{14}.$$

Demak, $\cos\varphi = \dfrac{8}{\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}} = \dfrac{2}{7}$ va $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

10.10. $\overline{a}(2;-1;3;4), \overline{b}(5;2;-2;6)$ vektorlar berilgan:

$a)$ $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$; $\left(3\overline{a} + b, \overline{a} - 2\overline{b}\right)$ skalyar ko‘paytmalarini toping;

$b)$ $\overline{a}$ *va* $\overline{b}$ vektorlar orasidagi burchak kosinusini toping.

10.11. $\overline{a}(1;\,-3;\,2;\,0)$, $\overline{b}(4;\,-2;\,1;\,3)$, $\overline{c}(5;\,-3;\,2;\,1)$, $\overline{d}(1;\,2;\,2;\,-3)$ vektorlar uchun quyidagilarni hisoblang:

a) vektorlarning ortogonallarini aniqlang;

b) $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}), (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}), (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{d})$ burchaklarni hisoblang.

10.12. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping.

Yechish. $$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

ya’ni $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

10.13. Quyidagi vektorlarning vektor ko‘paytmasini toping:

$1)\ \vec{a}(4;3;-1)$ *va* $\vec{b}(5;-1;4)$; $\qquad 2)\ \vec{a}(0;5;6)$ *va* $\vec{b}(12;1;5)$;

$3)\ \vec{a}(7;2;-2)$ *va* $\vec{b}(4;-1;6)$; $\qquad 4)\ \vec{a}(2;3;6)$ *va* $\vec{b}(1;3;5)$;

10.14. $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k},\ \vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlarning komplanarligini ko‘rsating.

Yechish. Uch vektorning aralash ko‘paytmasini topamiz:

$$\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}2 & 5 & 7\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-15+7=0,$$

$\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right)=0$ bo‘lgani uchun $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lar komplanar.

10.15. Quyidagi vektorlarni komplanarlikka tekshiring:

1) $\vec{a}(4;3;-1),\vec{b}(5;-1;4);$ *va* $\vec{c}(1;0;1)$;

2) $\vec{a}(4;3;7),\vec{b}(12;1;5)$ *va* $\vec{c}(4;-1;-1)$

3) $\vec{a}(7;2;-2),\vec{b}(4;1;5)$ *va* $\vec{c}(4;-1;6)$;

4) $\vec{a}(2;3;6),\vec{b}(2;4;6)$ *va* $\vec{c}(1;2;3)$;

10.16. $\vec{r}=\overline{OM}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ vektorning uzunligini hamda yo‘nalishini aniqlang. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ formula bo‘yicha tekshiring.

10.17. Uchlari $A(2;-1;3);\ B(1;1;1)$ *va* $C(0;0;5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning barcha burchaklari aniqlansin.

10.18. Uchlari $A(3;2;3);\ B(-1;1;-1)$ *va* $C(5;-3;5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning barcha burchaklari aniqlansin.

10.19. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$ va $\vec{b}=-\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm dioganallari orasidagi burchak topilsin.

10.20. $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ va $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogram dioganallari orasidagi burchak topilsin.

10.21. $\bar{a}=\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$ va $\bar{b}=\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}$ vektorlar berilgan. $\Pr_{\bar{b}}\left(\vec{a}\right)$ va $\Pr_{\bar{a}}\left(\vec{b}\right)$ larni toping.

10.22. $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}$ va $\bar{b}=-\overline{2j}+\bar{k}$ vektorlar berilgan. $\Pr_{\bar{b}}\left(\vec{a}\right)$ va $\Pr_{\bar{a}}\left(\vec{b}\right)$ larni toping.

10.23. Agar $\vec{m}$ *va* $\vec{n}$ vektorlar o‘zaro 30° burchak tashkil etuvchi birlik vektorlar bo‘lsa, u holda $\left(\vec{m}+\vec{n}\right)^2$ ni hisoblang.

10.24. Agar $|\bar{a}|=2\sqrt{2},\ |\bar{b}|=4$ hamda $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=135^{\circ}$ bo‘lsa, u holda $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$ ni hisoblang.

10.25. Teng yonli $OABC$ trapetsiyada M va N nuqtalar mos ravishda $BC=2,\ AB=2$ tomonlarning o‘rtalari. Trapetsiyaning o‘tkir burchagi $60°$ ga teng. $\overrightarrow{OM}$ *va* $\overrightarrow{ON}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

10.26. $A(2;\,2;\,0)$ *va* $B(0;\,-2;\,5)$ nuqtalar berilgan. $\overline{AB}=\overline{u}$ vektorning uzunligi va yo‘nalishi aniqlansin.

10.27. Tetraedrning bir uchidan o‘tkazilgan ikki tekis burchagining bissektrisalari orasidagi burchak kosinusini aniqlang.

10.28. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ *va* $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlar berilgan. $|\vec{a}|=4;\ |\vec{b}|=2$ va $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=30^{\circ}$ OAB uchburchakning OM medianasi bilan OA tomoni orasidagi burchakni aniqlang.

10.29. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ *va* $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlar berilgan. $|\vec{a}|=2;\ |\vec{b}|=4$ va $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=60^{\circ}$ OAB uchburchakning OM medianasi bilan OA tomoni orasidagi burchakni aniqlang.

10.30. O‘zaro komplanar $\vec{a},\vec{b}$ *va* $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo‘lib $|\overline{a}|=4,\ |\overline{b}|=2,\ |\overline{c}|=3$ va $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=30°,\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}\right)=30°$ bo‘lsa, u holda

a) $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektor uchun $|\vec{u}|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2}$ formula bo‘yicha uning modulini hisoblang.

b) $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ vektor uchun $|\vec{u}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2}$ formula bo‘yicha uning modulini hisoblang.

10.31. O‘zaro komplanar $\vec{a},\ \vec{b}$ *va* $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo‘lib $|\overline{a}|=3,\ |\overline{b}|=2,\ |\overline{c}|=5$ va $\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=60°,\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}\right)=60°$ bo‘lsa, u holda

a) $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ vektor uchun $|\vec{u}|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2}$ formula bo‘yicha uning modulini hisoblang.

b) $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ vektor uchun $|\vec{u}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})^2}$ formula bo‘yicha uning modulini hisoblang.

10.32. Quyida berilgan vektorlar yordamida

a) Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini tekshiring;

b) Minkovskiy tengsizligini tekshiring.

1. $\vec{a}(1;\,2;\,3;\,4)$ *va* $\vec{b}(3;\,2;\,4;\,1)$; 2. $\vec{a}(2;\,3;\,5;\,1;\,0)$ *va* $\vec{b}(4;\,3;\,2;\,1;\,1)$;

3. $\vec{a}(4;\,0;\,1;\,3;\,2)$ *va* $\vec{b}(2;\,3;\,5;\,4;\,2)$; 4. $\vec{a}(1;\,3;\,7;\,5;\,4)$ *va* $\vec{b}(4;\,2;\,0;\,3;\,5)$

Quyidagi vektorlar sistemalariga tortilgan chiziqli qism osti fazosining bazislaridan birini, o‘lchamini va ortonormallangan bazisini toping:

10.33. $\overrightarrow{a_1}(3;-1;2),\ \overrightarrow{a_2}(1;4;-1),\ \overrightarrow{a_3}(7;2;3)$

10.34. $\overrightarrow{a_1}(1;2;-1;3),\ \overrightarrow{a_2}(0;3;4;1),\ \overrightarrow{a_3}(-2;-1;6;-5),\ \overrightarrow{a_4}(5;4;2;-4)$

10.35. $\vec{x}(3;-2;4)$ vektor $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ bazisda berilgan. Vektorning $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. bazisdagi koordinatalarini toping.

Yechish. Koeffisiyentlar matrisasi P ning transponirlangan matrisasi P^T ni hosil qilamiz:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

U holda $\vec{x}$ vektorning dastlabki bazisdagi koordinatalari uning yangi bazisdagi koordinatalari orqali (matrisa shaklida $\vec{x}=P^T\overrightarrow{x'}$) quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' + 2x_3' \\ x_2 = 2x_1' + x_2' - x_3' \\ x_3 = -3x_1' + x_2' + 2x_3' \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 4 & 8 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & -19 \end{array}\right)$$

Demak, dastlab berilgan $\vec{x}(3;-2;4)$ vektorning yangi bazisdagi koordinatalari:

$$\vec{x}\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{12};\frac{19}{12}\right)$$

10.36. $\vec{x}(2;-1)$ vektor $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ bazisda berilgan. Vektorning $\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2'} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \end{cases}$ bazisdagi koordinatalarini toping.

10.37. $\vec{x}(3;-2)$ vektor $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$ bazisda berilgan. Vektorning $\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_2'} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} \end{cases}$ bazisdagi koordinatalarini toping.

10.38. $\vec{x}(1;2;-2)$ vektor $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ bazisda berilgan vektorning $\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{e_2'} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \end{cases}$ bazisdagi koordinatalarini toping.

10.39. $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & Cos\alpha & -Sin\alpha\\ 0 & Sin\alpha & Cos\alpha\end{pmatrix}$ matrisa ortogonal matrisa bo‘lishini tekshiring.

Yechish.

$$P^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & Cos\alpha & Sin\alpha\\ 0 & -Sin\alpha & Cos\alpha\end{pmatrix} \qquad P\cdot P^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Demak, berilgan P matrisa ortogonal matrisa bo‘ladi.

Quyidagi matrisalardan ortogonallarini ajrating:

10.40. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0,5\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$ **10.42.** $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

10.41. $\begin{pmatrix}Sin\alpha & 0 & Cos\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -Cos\alpha & 0 & Sin\alpha\end{pmatrix}$ **10.43.** $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

Quyida berilgan ikki vektorlar sistemalaridan har biri bazis bo‘la olishini isbotlang. Ushbu bazislarda berilgan aynan bir vektorning koordinatalari orasida munosabatlarni o‘rnating:

10.44. $\begin{cases}\vec{e_1}(1;2)\\ \vec{e_2}(1;1)\end{cases}$ va $\begin{cases}\vec{e_1'}(1;1)\\ \vec{e_2'}(3;4)\end{cases}$ **10.45.** $\begin{cases}\vec{e_1}(1;3)\\ \vec{e_2}(2;3)\end{cases}$ va $\begin{cases}\vec{e_1'}(1;0)\\ \vec{e_2'}(0;-3)\end{cases}$

10.46. $\begin{cases}\vec{e_1}(2;3)\\ \vec{e_2}(2;4)\end{cases}$ va $\begin{cases}\vec{e_1'}(0;-1)\\ \vec{e_2'}(6;11)\end{cases}$ **10.47.** $\begin{cases}\vec{e_1}(2;1;-1)\\ \vec{e_2}(3;1;2)\\ \vec{e_3}(1;0;4)\end{cases}$ va $\begin{cases}\vec{e_1'}(1;1;-1)\\ \vec{e_2'}(2;3;-2)\\ \vec{e_3'}(3;4;-4)\end{cases}$

11-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

11.1. Agar R^3 da chiziqli A operator $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ bazisda o‘zining $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$ matrisasi bilan berilgan bo‘lsa, $\vec{x}=4\vec{e_1}-3\vec{e_2}+\vec{e_3}$ vektorning $\vec{y}=\widetilde{A}(\vec{x})$ aksini toping.

Yechish. $Y = AX$ formulaga binoan, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}$

Demak, $\vec{y} = 10\vec{e_1} - 13\vec{e_2} - 18\vec{e_3}$

11.2. R^4 fazoda $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}$ bazisda chiziqli operator matrisasi $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}$ $\vec{x} = 2\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + 4\vec{e_3} + \vec{e_4}$ vektorning $\widetilde{A}\left(\vec{x}\right)$ aksini toping.

11.3. R^3 fazoda $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bazisda chiziqli operator matrisasi $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 8 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ berilgan bo‘lsin. $\vec{x} = 4\vec{e_1} - 3\vec{e_2} - \vec{e_3}$ vektorning aksi $\vec{y} = \widetilde{A}\left(\vec{x}\right)$ ni toping.

11.4. R^3 fazoda $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bazisda chiziqli operator matrisasi $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ berilgan bo‘lsin. $\vec{x} = -2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$ vektorning aksi $\vec{y} = \widetilde{A}\left(\vec{x}\right)$ ni toping.

11.5. $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ bazisda A operator $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ matrisaga ega. $\begin{cases} \vec{e_1'} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} \\ \vec{e_2'} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} \end{cases}$ bazisda A operatorning matrisasini toping.

Yechish. O‘tish matrisasi $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ning teskari matrisasi $C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Demak,

$$B = C^{-1}AC = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

11.6. $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ bazisda chiziqli operatorning matrisasi $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ko‘rinishga ega.

Yangi $\begin{cases} \vec{e_1'} = 5\vec{e_1} - 3\vec{e_2} \\ \vec{e_2'} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} \end{cases}$ bazisda chiziqli operatorning matrisasini toping.

11.7. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ bazisda chiziqli operatorning matrisasi $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ko‘rinishda.

Yangi $\begin{cases} \vec{e_1'} = 2\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ \vec{e_2'} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3} \\ \vec{e_3'} = \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} \end{cases}$ bazisda A operatorning matrisasini toping.

11.8. $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ bazisda chiziqli operatorning matrisasi $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ko‘rinishga ega.

Yangi $\begin{cases} \vec{e_1'} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} \\ \vec{e_2'} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} \end{cases}$ bazisda chiziqli operatorning matrisasini toping.

11.9. $\widetilde{A}(\vec{x}) = (2x_1 + x_3;\, 4x_2 - 2x_3;\, 3x_1 + x_2 - x_3)$ operatorni chiziqlilikka tekshiring.

Yechish. Operatorni chiziqlilikka tekshirish uchun $\widetilde{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \widetilde{A}(\vec{x}) + \widetilde{A}(\vec{y})$ hamda $\widetilde{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\widetilde{A}(\vec{x})$ tengliklarni bajarilishini tekshirish kifoya.

$$\widetilde{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + y_1) + x_3 + y_3 \\ 4(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3) \\ 3(x_1 + y_1) + x_2 + y_2 - (x_3 + y_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 + 2y_1 + y_3 \\ 4x_2 - 2x_3 + 4y_2 - 2y_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3y_1 + y_2 - y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 4x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y_1 + y_3 \\ 4y_2 - 2y_3 \\ 3y_1 + y_2 - y_3 \end{pmatrix} = \widetilde{A}(\vec{x}) + \widetilde{A}(\vec{y})$$

$$\widetilde{A}(\alpha\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2\alpha x_1 + \alpha x_3 \\ 4\alpha x_2 - 2\alpha x_3 \\ 3\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 4x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \alpha\widetilde{A}(\vec{x})$$

11.10. Berilgan $\widetilde{A}(\vec{x}) = (8x_2;\, 5x_1 - 3x_2 + x_3; 2x_1 - x_2 + 2x_3)$ operatorlarning chiziqli operator ekanligini isbotlang.

11.11. $\widetilde{A}(x_1; x_2) = (x_1 + 2x_2; 3x_1 - x_2)$, $\widetilde{B}(x_1; x_2) = (4x_1 - x_2; 7x_1 + x_2)$ operatorlarning chiziqli operator ekanligini isbotlang.

11.12. Chizqli A operator $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan. Chiziqli operatorning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0,\ \lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 7$$

$x_1 = C$ ga tegishli $\overrightarrow{X^{(1)}} = (x_1; x_2)$ xos vektorni topamiz. Buning uchun quyidagi tenglamani yechamiz:

$$\lambda_1 = -5,\ (A - \lambda E)\cdot \vec{x} = \theta,\ \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_2 = -1,5x_1$$

Agar $x_1 = C$ deb olsak, $x_2 = -1,5C$, $\overrightarrow{X^{(1)}} = (C; -1,5C)$ vektorlar har qanday $C = 0$ uchun A operatorni xos qiymati $\lambda_1 = -5$ ga tegishli xos vektor bo‘ladi. Huddi shunday $\lambda_2 = 7$ xos qiymati uchun A operatorni xos vektorlarni $\overrightarrow{X^{(2)}} = \left(\frac{2}{3}C_1;\ C_1\right)$, $C_1 \neq 0$ vektorlar tashkil etadi.

Berilgan matrisalarning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping:

11.13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

11.14. $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

11.15. $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

11.16. $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

11.17. $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

11.18. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11.20. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

11.21. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

11.22. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

11.23. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **11.24.** $A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$

11.25. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 7 & 3 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ **11.26.** $A=\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

11.27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11.28. Berilgan $\widetilde{A}\left(\vec{x}\right)=\left(3x_2-x_3;\,2x_1+x_2-x_3;\,-2x_1-x_2+4x_3\right)$ va $\widetilde{B}\left(\vec{x}\right)=\left(x_1-2x_2;\,x_2+x_3;\,-2x_2+3x_3\right)$ operatorlarga ko‘ra $\widetilde{C}=\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$ operator hamda uning C matrisasi topilsin.

11.29. Berilgan $\widetilde{A}(x_1;x_2)=(x_1+4x_2;\,2x_1-5x_2)$, $\widetilde{B}(x_1;x_2)=(x_1-2x_2;\,3x_1-x_2)$ operatorlarga ko‘ra $\widetilde{C}=\widetilde{A}\cdot\widetilde{B}$ operator hamda uning C matrisasini toping.

11.30. $\widetilde{A}\left(\vec{x}\right)=\left(4x_1-2x_2+4x_3;\,10x_1-6x_2+6x_3;\,-2x_1-4x_3\right)$ operatorning xos qiymat va unga mos keluvchi xos vektorlarini toping.

11.31. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ matrisa bilan berilgan chiziqli operatorning xos soni va xos vektorini toping.

$\vec{e_1},\vec{e_2}$ bazisda $\widetilde{A}$ operator A matrisaga ega. $\vec{e_1'},\vec{e_2'}$ bazisida $\widetilde{A}$ operatorning matrisasini toping.

11.32. $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \vec{e_1'}=2\vec{e_1}+\vec{e_2} \\ \vec{e_2'}=\vec{e_1}-3\vec{e_2} \end{cases}$; **11.33.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \vec{e_1'}=2\vec{e_1}+\vec{e_2} \\ \vec{e_2'}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2} \end{cases}$;

11.34. $A=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \vec{e_1'}=2\vec{e_1}+\vec{e_2} \\ \vec{e_2'}=4\vec{e_1}-3\vec{e_2} \end{cases}$; **11.35.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \vec{e_1'}=2\vec{e_1}+3\vec{e_2} \\ \vec{e_2'}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2} \end{cases}$;

11.36. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \vec{e_1'}=2\vec{e_1}+5\vec{e_2} \\ \vec{e_2'}=\vec{e_1}-3\vec{e_2} \end{cases}$; **11.37.** $A=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \vec{e_1'}=2\vec{e_1}+7\vec{e_2} \\ \vec{e_2'}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2} \end{cases}$

12-amaliy mashg‘ulot. Kvadratik formalar

12.1. $f(x_1;x_2;x_3)=4x_1^2-12x_1x_2-10x_1x_3+x_2^2-3x_3^2$ kvadratik formani matrisaviy ko‘rinishda yozing.

Yechish. Kvadratik formaning matrisasini topamiz:

$$f=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -6 & -5\\ -6 & 1 & 0\\ -5 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}4 & -6 & -5\\ -6 & 1 & 0\\ -5 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Quyidagi berilgan kvadratik formalarni matrisaviy ko‘rinishda yozing.

12.2. $f(x_1;x_2;x_3)=-3x_1^2-4x_1x_2-6x_1x_3+8x_2^2-x_3^2$

12.3. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2-6x_1x_2-8x_2x_3+14x_2^2-5x_3^2$

11.4. $f(x_1;x_2)=2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2$ kvadratik forma berilgan. $\begin{cases}x_1=2y_1-3y_2\\ x_2=y_1+y_2\end{cases}$ chiziqli almashtirish orqali hosil bo‘lgan $f(y_1;\,y_2)$ kvadratik formani toping.

Yechish. Berilgan kvadratik formaning matrisasi $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ chiziqli almashtirish matrisasi $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ bo‘ladi. Qidirilayotgan kvadratik formaning matrisasini quyidagicha topamiz:

$$A'=C^t\cdot A\cdot C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -17\\ -17 & 3\end{pmatrix}$$

kvadratik formaning ko‘rinishi: $f(y_1;y_2)=13y_1^2-34y_1y_2+3y_2^2$

12.5. $f(x_1;\,x_2)=3x_1^2+6x_1x_2-4x_2^2$ kvadratik forma berilgan $\begin{cases}x_1=-y_1-y_2\\ x_2=-3y_1+6y_2\end{cases}$ almashtirish yordamida hosil bo‘lgan kvadratik formani toping.

12.6. Kvadratik forma $f(x_1,\,x_2)=3x_1^2-x_2^2+4x_1x_2$, berilgan. $\begin{cases}x_1=2y_1-y_2\\ x_2=y_1-y_2\end{cases}$ chiziqli almashtirish orqali hosil bo‘lgan kvadratik formani toping.

12.7. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring.

$$f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2$$

Yechish. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2-x_1(3x_2-4x_3)+2x_2x_3+x_3^2$ x_1 o‘zgaruvchining kvadrati o‘rnida turgan koeffisiyenti no‘ldan farqli bo‘lgani uchun, x_1 o‘zgaruvchining to‘liq kvadratini topamiz:

$$f=\left[x_1^2-2x_1\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)+\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2\right]-\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2+2x_2x_3+x_3^2=$$

$$\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2$$

Endi o‘zgaruvchi x_2 uchun kvadratini topamiz:

$$f=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}\left(x_2-\frac{16}{9}x_3\right)^2+\frac{37}{9}x_3^2,$$

Demak, noldan farqli chiziqli almashtirish

$$y_1=x_1-\frac{3}{2}x_2-2x_3 \qquad y_2=x_2-\frac{16}{9}x_3 \qquad y_3=x_3$$

berilgan kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiradi:

$$f(y_1,y_2,\,y_3)=y_1^2-\frac{9}{4}y_2^2+\frac{37}{9}y_3^2$$

Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring:

12.8. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+12x_1x_2-15x_1x_3+5x_2^2-3x_3^2$

12.9. $f(x_1;x_2;x_3)=3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$

12.10. $f(x_1;x_2)=13x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2$ kadratik formaning ishorasini aniqlang.

Yechish. Kvadratik formaning matrisasi $A=\begin{pmatrix}13 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$ bo‘ladi. Xarakteristik tenglama tuzamiz: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}13-\lambda & -3\\ -3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0$ yoki $\lambda^2-18\lambda+56=0$ ya’ni $\lambda_1=14,\quad \lambda_2=4$ xarakteristik tenglamaning yechimlari musbat bo‘lgani uchun, f – musbat aniqlangan kvadratik forma bo‘ladi.

Quyidagi kvadratik formalarning ishorasini aniqlang:

12.11. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$

12.12. $f(x_1;x_2;x_3)=-2x_2^2-x_1^2-x_1x_3+2x_2x_3-2x_3^2$

Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring:

12.13. $f(x_1;x_2;x_3)=7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

12.14. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

12.15. $f(x_1;x_2;x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$

12.16. $f(x_1;x_2)=3x_1^2+6x_1x_2-4x_2^2$

12.17. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$

12.18. $f(x_1;x_2;x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

Quyidagi kvadratik formalarning ishorasini aniqlang:

12.19. $f(x_1;x_2)=x_1^2+26x_2^2+10x_1x_2$

12.20. $f(x_1;x_2)=-x_1^2+2x_1x_2-4x_2^2$

12.21. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+15x_2^2+4x_1x_2-2x_1x_3+6x_2x_3$

12.22. $f(x_1;x_2;x_3)=12x_1x_2-12x_1x_3+6x_2x_3-11x_1^2-6x_2^2-6x_3^2$

12.23. $f(x_1;x_2;x_3)=5x_1^2+36x_2^2+12x_1x_2$

12.24. $f(x_1;x_2;x_3;x_4)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+8x_4^2+8x_2x_4$

12.25. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$

12.26. $f(x_1;x_2;x_3)=9x_1^2+4x_2^2+x_3^2+6x_1x_3-42x_2x_3$

12.27. $f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2-4x_1x_2+12x_3^2+8x_1x_3-8x_2x_3$

12.28. $f(x_1;x_2;x_3)=4x_1^2+9x_2^2+x_3^2-12x_1x_2+4x_1x_3-6x_2x_3$

12.29. $f(x_1;x_2;x_3)=-x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-x_1x_3+2x_2x_3$

12.30. $f(x_1;x_2;x_3)=4x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_3-4x_2x_3$

12.31. $f(x_1;x_2)=9x_1^2+6x_2^2+10x_1x_2$

12.32. $f(x_1;x_2)=x_1^2+x_2^2-x_1x_2$

12.33. $(-1;\,3),\quad (0;\,2),\quad (1;\,-1)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi aylana tenglamasini yozing.

Yechish. Aylana tenglamasini $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ ko‘rinishida izlaymiz. Berilgan nuqtalar koordinatalarini tenglamaga qo‘yib quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} (-1-a)^2+(3-b)^2=R^2, \\ a^2+(2-b)^2=R^2, \\ (1-a)^2+(-1-b)^2=R^2. \end{cases}$$

Sistemadan a, b va R ning qiymatlarini aniqlaymiz.

Sistemaning birinchi ikkita tenglamasidan quyidagilarni olamiz:

$$(-1-a)^2+(3-b)^2=a^2+(2-b)^2,$$

$$1+2a+a^2+9-6b+b^2=a^2+4-4b+b^2,$$

$$a-b=-3;$$

sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamasidan quyidagilarni olamiz:

$$a^2+(2-b)^2=(1-a)^2+(-1-b)^2,$$

bu yerdan $a-3b=-1$.

$$\begin{cases} a-b=-3, \\ a-3b=-1. \end{cases}$$

sistemani yechib $a=-4,\ b=-1$ ni topamiz. a va b ning qiymatlarini boshlang‘ich sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo‘yib R^2 ni topamiz: $16+9=R^2,\ R^2=25.$ Izlanayotgan tenglama $(x+4)^2+(y+1)^2=25.$

Aylana tenglamasini $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$ ko‘rinishida ham izlash mumkin. Berilgan uchta nuqtaning koordinatalarini aylana tenglamasiga qo‘yib quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 10-2D+6E+F=0, \\ 4+4E+F=0, \\ 2+2D-2E+F=0. \end{cases}$$

Sistemani yechib, $D=4,\ E=1,\ F=-8$ ni topamiz, izlanayotgan aylana tenglamasi $x^2+y^2+8x+2y-8=0.$

12.34. $A(4;\,4)$ nuqtadan va $x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana bilan $y=-x$ to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

12.35. $A(-1;\,3)$, $B(0;\,2)$ va $C(1;\,-1)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

12.36. $A(-1;\,4)$, $B(1;\,2)$ va $C(2;\,1)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasini yozing.

12.37. $24x^2+49y^2=1176$ ellips tenglamasi berilgan

1) ellips yarim o‘qlari uzunliklari;

2) fokuslari koordinatalarini;

3) ellips ekssentrisiteti;

4) direktrisalari tenglamalari va ular orasidagi masofa;

5) ellipsning F_1 chap fokusidan 12 ga teng masofada yotuvchi nuqtasi koordinatalarini toping.

Yechish. $24x^2+49y^2=1176$ tenglamaning ikkala tomonini 1176 ga bo‘lib kanonik tenglamasiga keltiramiz: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$.

1) bu yerdan $a^2=49,\ b^2=24$ demak, $a=7,\ b=2\sqrt{6}$.

2) $c^2=a^2-b^2$ munosabatdan foydalanib, $c^2=7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2=25,\quad c=5$ ni topamiz. Demak, $F_1=(-5;\,0)$ va $F_2=(5;\,0)$.

3) $\varepsilon=\frac{c}{a}$ formuladan foydalanib $\varepsilon=\frac{5}{7}$ ni topamiz.

4) direktrisa tenglamasi $x=\pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$ $x=\frac{49}{5}$ va $x=-\frac{49}{5}$ Direktrisalar orasidagi masofa $d=\frac{49}{5}-\left(-\frac{49}{5}\right)=\frac{98}{5}=19{,}6$.

5) $r_1=a+\varepsilon x$ formula bo‘yicha F_1 nuqtadan 12 ga teng masofada yotuvchi nuqtasining absissasini topamiz: $12=7+\frac{5}{7}x,\quad x=7.$ x ning qiymatini ellips tenglamasiga qo‘yib, bu nuqtaning ordinatasini topamiz: $24\cdot 49+49y^2=1176$, $49y^2=0,\ y=0.$ $A(7;\,0)$ nuqta masala shartini qanoatlantiradi.

12.38. $16x^2+25y^2-400=0$ ellips yarim o‘qlari, fokuslari koordinatalarini, ekssentrisiteti va direktrisalari tenglamalarini toping.

12.39. Quyidagilarni bilgan holda ellips tenglamasini tuzing:

1) Katta yarim o‘qi 10 va fokuslari $F_1=(-6;\,0)$ va $F_2=(10;\,0)$.

2) $a=5,\ F_1=(-3;\,5)$ va $F_2=(3;\,5)$.

12.40. $M_1=\left(2;\,-4\sqrt{3}\right)$ va $M_2=\left(-1;\,2\sqrt{15}\right)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi ellips tenglamasini tuzing.

Yechish. Ellips $M_1=\left(2;\,-4\sqrt{3}\right)$ va $M_2=\left(-1;\,2\sqrt{15}\right)$ nuqtalar orqali o‘tadi, M_1 va M_2 nuqtalarning koordinatalari ellips tenglamasini qanoatlantiradi.

Quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{48}{b^2}=1, \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{60}{b^2}=1. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib $a^2=16,\ \ b^2=64$ ga ega bo‘lamiz. Shuning uchun izlanayotgan ellips tenglamasi $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1.$

12.41. Koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan ellips $M\left(2;\sqrt{3}\right)$ va $B(0;\,2)$ nuqtalaridan o‘tadi. Uning tenglamasi yozilsin va M nuqtadan fokuslarigacha bo‘lagan masofa topilsin.

12.42. Ellips $M\left(2\sqrt{3};\,\sqrt{6}\right)$ va $A(6;0)$ nutalardan o‘tadi. Uning tenglamasini, ekssentrisiteti va M nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofani toping.

12.43. $5x^2-4y^2=20$ giperbola tenglamasi berilgan. Quyidagilarni toping:

1) giperbola yarim o‘qlari uzunliklari;
2) fokuslari koordinatalari;
3) giperbola ekssentrisiteti;
4) asimptotalari va direktrisalari tenglamalari;
5) $M\,(3;\,2{,}5)$ nuqtadagi fokal radiuslari.

Yechish. $5x^2-4y^2=20$ tenglamaning ikkala tomonini 20 ga bo‘lib giperbolaning kanonik tenglamasiga keltiramiz: $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1.$ Bu yerdan:

1) $a^2=4,\ b^2=5,$ bundan $a=2,\ b=\sqrt{5};$

2) $c^2=a^2+b^2$ munosabatdan foydalanib, $c^2=4+5,\ \ c=3$ ni topamiz. Demak, $F_1=(-3;\,0)$ va $F_2=(3;\,0);$

3) $\varepsilon=\dfrac{a}{c}$ formuladan foydalanib $\varepsilon=\dfrac{3}{2}$ ni topamiz;

4) asimptotalari va direktrisalari tenglamalari $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$ va $x=\pm\dfrac{4}{3};$

5) $M\,(3;\,2{,}5)$ nuqta giperbolaning o‘ng pallasida yotadi. $r_1=a+\varepsilon x,$ $r_2=-a+\varepsilon x$ formulalardan foydalanib fokal radiuslarini topamiz: $r_1=2+\dfrac{3}{2}\cdot 3=6{,}5,\ r_2=-2+\dfrac{3}{2}\cdot 3=2{,}5.$

12.44. $16x^2 - 2y^2 = 400$ giperbola tenglamasi berilgan. Uning o‘qlari, fokuslari, ekssentrisitetini toping va asimptotasining tenglamasini tuzing.
12.45. Fokuslari Oy o‘qida yotgan va fokuslari orasidagi masofa 10 ga teng, haqiqiy o‘qi uzunligi 8 ga teng giperbola tenglamasini tuzing.

Yechish. Izlanayotgan giperbola tenglamasi $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ko‘rinishda. Masala shartidan $2c = 10,\ \ c = 5;\ \ 2b = 8,\ \ b = 4.$ $c^2 = a^2 + b^2$ munosabatdan foydalanib, kichik yarim o‘q a ni topamiz: $25 = a^2 + 16,\ \ a^2 = 9,\ \ a = 3.$ Izlanayotgan giperbola tenglamasi $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$

12.46. Giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing, agar:

1) $2c = 10,\ a = 3;$ 2) $c = 3,\ \varepsilon = 1{,}5;$

3) $b = 6,$ asimptotalar tenglamalari $y = \pm\frac{5}{3}x$ bo‘lsa.

12.47. Giperbolaning kanonik tenglamasini yozing, agar:

1) $c = 10$ va asimptota tenglamasi $y = \pm\frac{4}{3}x;$

2) $\varepsilon = 1{,}5$ va direktrisalari orasidagi masofa $\frac{8}{3}$ ga teng;

3) $\varepsilon = \sqrt{2}$ va $M\left(\sqrt{3};\ \sqrt{2}\right)$ nuqta giperbolada yotgan bo‘lsa.

12.48. $x^2 = 4y$ parabola berilgan. Parabolaning fokusi koordinatalarini, direktrisasi tenglamasini, $M(4;\ 4)$ nuqtadagi fokal radiusi uzunligini toping.

Yechish. Parabola $x^2 = 2py$ ko‘rinishidagi kanonik tanglamasi bilan berilgan. Shuning uchun, $2p = 4,\ \ p = 2.$ $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ formuladan fokusi $(0;\ 1)$ koordinataga ega, $y = -\frac{p}{2}$ formuladan direktrisa tenglamasi $y = -1;$ $M(4;\ 4)$ nuqtadagi fokal radiusi $r = y + \frac{p}{2} = 4 + 1 = 5$ ga teng.

12.49. Parabolaning quyida berilgan tenglamasi bo‘yicha uning fokusi koordinatalarini, direktrisasi tenglamasini toping:

$y^2 = 12x;$ $x^2 = -5y;$ $y^2 = -4x;$ $x^2 = 14y.$

12.50. $A(-4;\ 6)$ nuqta berilgan. Diametri OA kesma bo‘lgan aylana tenglamasini tuzing.

12.51. $A(-6;0)$ nuqtadan o‘tuvchi va Oy o‘qiga koordinatalar boshida urinuvchi aylana tenglamasini tuzing.

12.52. $x^2+y^2+4x-6y=0$ aylananing Oy o‘qi bilan kesishgan nuqtalariga o‘tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.

12.53. Katta yarim o‘qi $a=5$ va c parametri 1) 4,8; 2) 4; 3) 3; 4) 1,4; 5) 0. Bo‘lgan ellipsni kanonik tenglamasini yozing. Har bir ellipsni chizing va ularning ekstsentrisitetini toping.

12.54. Yer fokuslaridan birida Quyosh joylashgan ellips bo‘yicha harakat qiladi. Quyoshdan Yergacha bo‘lgan eng kichik masofa taxminan 147,5 million km ga, eng katta masofa 152,5 million km ga teng bo‘lsa, Yer orbitasining katta yarim o‘qi va ekssentrisiteti topilsin.

12.55. Ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{3}{4}$ bo‘lgan va $M\left(-4;\sqrt{21}\right)$ nuqtadan o‘tuvchi ellips tenglamasini yozing va M nuqtaning fokal radius-vektorlarini toping.

12.56. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda shunday $M(x;y)$ nuqta topilsinki, undan o‘ng fokusgacha bo‘lgan masofa chap fokusgacha bo‘lgan masofadan 4 marta katta bo‘lsin.

12.57. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa uning katta va kichik yarim o‘qlarining uchlari orasidagi masofaga teng bo‘lsa, uning ekstsentrisiteti topilsin.

12.58. $x^2+4y^2=4$ ellipsning, markazi shu ellipsning “yuqori” uchida bo‘lgan va uning fokuslaridan o‘tuvchi aylana bilan umumiy nuqtalari topilsin.

12.59. Giperbolaning ekssentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng va $M\left(2a;\sqrt{3}a\right)$ nuqtadan o‘tadi. Giperbolani sodda teglamasini tuzing.

12.60. Giperbolani fokuslari $F_1\left(-\sqrt{7};0\right)$ va $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$ nuqtalarda joylashgan. Agar Giperbola $A(2;0)$ nuqtadan o‘tsa, uning asimptotalari tenglamasini tuzing.

12.61. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola fokusidan asimptotalarigacha bo‘lgan masofalar va asimptotalari orasidagi burchak topilsin.

12.62. Biror uchidan fokuslarigacha bo‘lgan masofalari 9 va 1 ga teng bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

12.63. $M\left(6;\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ nuqtadan o‘tuvchi, koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan giperbolaning haqiqiy yarim o‘qi $a=4$. Giperbolaning chap fokusidan asimptotalariga tushirilgan perpendikulyarning tenglamalari yozilsin.

12.64. $y^2 = a^2 + x^2$ giperbola fokuslari koordinatalarini va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

12.65. Uchlari $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbola tenglamasini yozing.

12.66. Agar parabola $x = y$ to‘g‘ri chiziq va $x^2 + 6x + y^2 = 0$ aylananing kesishish nuqtalaridan o‘tsa, uning tenglamasi va direktrisasini yozing.

12.67. 1) $O(0;\,0)$ va $A(-1;\,2)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Ox o‘qiga simmetrik; 2) $O(0;\,0)$ va $B(2;\,4)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Oy o‘qiga simmetrik bo‘lgan parabola tenglamasini yozing.

12.68. $y^2 = 6x$ parabolada fokal radius vektor 4,5 ga teng bo‘lgan nuqtani toping.

12.69. Markazi $y^2 = 2px$ parabolaning fokusida bo‘lib, parabola direktrisasiga urinuvchi aylana tenglamasi yozilsin. Parabola va aylananing kesishgan nuqtalari topilsin.

13-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli programmalashtirish masalasining yechimlari va ularning xossalari

13.1. (Resurslardan optimal foydalanish masalasi). Korxonada *A*, *B* va *C* mahsulotlarni tayyorlash uchun tokarlik, frezerlik, payvandlash va silliqlash uskunalaridan foydalaniladi. Har bir mahsulotning bir birligini tayyorlash uchun sarf qilinadigan vaqt, har bir uskunaning umumiy ish vaqti fondi, hamda har bir turdagi birlik mahsulotni sotishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Uskunalar	**Har bir turdagi mahsulot birligini i/ch. uchun sarflanadigan vaqt (stanok-soat)**			**Uskunaning umumiy ish vaqti fondi (soat)**
	A	*B*	*C*	
Tokarlik	1	8	6	280
Frezerlik	2	4	5	120
Payvand-lovchi	7	4	5	240
Silliqlovchi	4	6	7	360
Daromad (shartli birlik)	10	14	12	

Korxona mahsulotlarni sotishdan oladigan daromadi eng ko‘p bo‘lishi uchun qaysi turdagi mahsulotdan qancha ishlab chiqarishi kerakligini aniqlash talab qilinadi. Masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish: Aytaylik, korxona x_1 dona A, x_2 dona B va x_3 dona C mahsulot tayyorlashni rejalashtirgan bo‘lsin, u holda shuncha miqdordagi mahsulotni tayyorlash uchun $1 \cdot x_1 + 8x_2 + 6x_3$ stanok-soat tokarlik uskunasining vaqti sarflanadi. Tokarlik uskunasidan foydalanish vaqti jami 280 soatdan oshmasligi kerak, ya’ni

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280,$$

tengsizlik bajarilishi lozim.

Xuddi shunga o‘xshash mulohazalar bilan frezerlik, payvandlash va silliqlash uskunalaridan foydalanish vaqtiga nisbatan quyidagi tengsizliklar hosil bo‘ladi.

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360.$$

Tayyorlanadigan mahsulotlar soni manfiy bo‘la olmaydi, shu sababli

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Shuningdek, agar x_1 birlik A, x_2 birlik B va x_3 birlik C mahsulot tayyorlansa, ularni sotishdan korxona oladigan jami daromad $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$ shartli birlikni tashkil etadi. Shunday qilib, quyidagi matematik masalaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360, \end{cases}$$

sistemani qanoatlantiruvchi shunday

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

noma’lumlarni topish kerakki, ular

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3,$$

funksiyaga maksimal qiymat bersin. Yuqorida keltirilgan munosabatlar masalaning matematik modelini ifodalaydi.

13.2. (Optimal ratsion tuzish masalasi). Chorva mollarini to‘yimli oziqlantirish uchun har bir chorva moli bir kunda A oziqa moddasidan kamida 60 birlik, B oziqadan kamida 50 birlik va C oziqa moddasidan kamida 12 birlik iste’mol qilishi kerak. Ko‘rsatilgan oziqa moddalar 3 xil turdagi yem mahsulotlari tarkibida mavjud. Har 1 kg yem mahsuloti tarkibidagi oziqa moddalarning miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

Oziqa moddalar	1kg yem mahsuloti tarkibidagi oziqa moddalar miqdori		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Agar1 kg I, II va III turdagi yem mahsulotlarining narxi mos ravishda 9, 12 va 10 shartli birlikdan iborat bo‘lsa, narxi eng arzon bo‘lgan hamda zarur to‘yimlilikka ega bo‘lgan kunlik ratsion qanday bo‘ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish: Kunlik ratsion tarkibidagi I xil yem miqdori x_1, II xil yem miqdori x_2 va III xil yem miqdori x_3 bo‘lsin. U holda ratsionning zarur to‘yimlilikka ega bo‘lishi talabi quyidagi tengsizliklar sistemasi orqali ifodalanadi.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \end{cases}$$

O‘z ma’nosiga ko‘ra x_1, x_2, x_3 noma’lumlar manfiy bo‘la olmaydi, ya’ni:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Kunlik ratsionning umumiy narxi esa $F = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3$ funksiya bilan ifodalanadi. Shunday qilib, qaralayotgan masalaning matematik modeli quyidagi munosabatlardan iboratdir:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$F = 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 \to \min.$$

13.3. (Optimal bichish haqida masala). O‘lchami 6x13 m^2 bo‘lgan tunuka materiallarini shunday qirqish kerakki, unda ikki xildagi qirqimlar, ya’ni har biri 4x5 m^2 o‘lchamli 400 ta, har biri 2x3 m^2 o‘lchamli 800 ta qirqimlar hosil bo‘lsin. Har bir tunukani qirqish usullari va bunda olinadigan turli o‘lchamdagi qirqimlar soni quyidagi jadvalda berilgan.

Qirqimlar o‘lchami (m^2)	Tunukani qirqish usullari			
	I	**II**	**III**	**IV**
4x5	3	2	1	0
2x3	1	6	9	13

Umumiy soni ko‘rsatilgan miqdordan kam bo‘lmagan va eng kam chiqindiga ega bo‘lgan qirqimlar tayyorlash rejasini topish masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish: Masalaning noma’lumlarini belgilaymiz: x_1 – I usulda, x_2 – II usulda, x_3 – III usulda va x_4 – IV usulda qirqiladigan tunukalar soni bo‘lsin. Unda,

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

bo‘lishi kerakligi ravshandir.

Agar bitta tunuka donasi I usulda qirqilsa, undan

$$6\text{x}13\text{m}^2\text{-}(3(4\text{x}5)+2\text{x}3)\text{m}^2=78\text{m}^2\text{-}66\text{m}^2=12\text{m}^2$$

chiqindi hosil bo‘ladi. Shunga o‘xshash, II usulda qirqilsa,

$$78\text{m}^2\text{-}(2(4\text{x}5)+6(2\text{x}3))\text{m}^2=78\text{m}^2\text{-}76\text{m}^2=2\text{m}^2$$

chiqindi, III usulda $78\text{m}^2\text{-}74\text{m}^2=4\text{m}^2$ va IV usulda chiqindi hosil bo‘lmaydi. Tunukalarni qirqishda hosil bo‘ladigan jami chiqindilar miqdori $F=12x_1+2x_2+4x_3+0x_4$ yig‘indidan iborat bo‘lib, maqsadimiz uni minimallashtirishdir. Masalaning matematik modeli quyidagicha

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 800, \\ x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \geq 400, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0,$$

$$F = 12x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min .$$

13.4. (Transport masalasi). Deylik, A_1, A_2, A_3 xo‘jaliklar B_1, B_2, B_3, B_4 punktlarnihar kuni mos ravishda 40, 50, 30 sentner sut bilan ta’minlashi kerak bo‘lsin. Iste’molchi punktlarining mahsulotga bo‘lgan bir kunlik talabi va 1 sentner sutni iste’molchilarga yetkazib berish uchun sarflanadigan transport xarajatlari quyidagi jadvalda berilgan.

Xo‘jaliklar	**1s. sutni tashish xarajatlari**				**Tashish uchun mo‘ljallangan sut hajmi (s)**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	2,5	3,5	4	40
A_2	2	4,5	5	1	50
A_3	6	3,8	4,2	2,8	30
Iste’molchilar talabi (s)	20	40	30	30	120

Xo‘jaliklardan iste’molchilarga sut tashishning shunday rejasini topingki, bunda xo‘jaliklardan barcha sut tashib ketilsin, iste’molchilarning talabi to‘la qondirilsin, hamda jami tashish xarajatlari eng kam bo‘lsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Yechish: Bu masalada x_{ij} – orqali i-xo‘jalikdan j-iste’molchi punktga tashish rejalashtirilgan sut miqdorini belgilaymiz. Xo‘jaliklardagi jami sut hajmi va iste'molchilarga zarur bo'lgan jami sut miqdori bir-biriga teng bo'lib, 120 sentnerni tashkil etadi. Demak, xo'jaliklardagi jami sut miqdori butunlay tashib ketilishi va iste'molchilarning talablari to'laligicha qondirilishi kerak bo'ladi. Masalaning ma'nosiga ko'ra, x_{ij} noma'lumlar manfiy bo'lmasligi kerak, ya'ni

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4\,.$$

Sutni tashishdagi jami transport xarajatlari

$$3x_{11} + 2,5x_{12} + 3,5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4,5x_{22} + 5x_{23} +$$
$$+ x_{24} + 6x_{31} + +3,8x_{32} + 4,2x_{33} + 2,8x_{34}$$

yig'indi bilan ifodalanadi. Shunday qilib, ushbu masalaning matematik modeli quyidagi munosabatlardan iboratdir:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 20\,, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40\,, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30\,, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30\,, \end{cases}$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, \ldots, x_{34} \geq 0,$$

$$\text{F} = 3x_{11} + 2,5x_{12} + 3,5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 4,5x_{22} +$$
$$+5x_{23} + x_{24} + 6x_{31} + 3,8x_{32} + 4,2x_{33} + 2,8x_{34} \rightarrow \min\,.$$

Bu modeldagi munosabat xo'jaliklardagi jami sut miqdori butunlay tashib ketilishni va munosabat esa iste'molchilarning talablari to'la qondirilishini ifodalaydi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

13.5. Qandolatchilik fabrikasi 3 turdagi *A*, *B* va*C* karamellarni ishlab chiqarish uchun 3 turdagi xom ashyodan, ya'ni shakar, meva qiyomi va shinnidan foydalanadi. Har bir turdagi karameldan 1 t ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom ashyolar miqdori (normalari) quyidagi jadvalda keltirilgan. Shuningdek, jadvalda fabrika ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi xom ashyolarning umumiy miqdori va har bir turdagi karamelning 1 tonnasini sotishdan olinadigan daromad ham keltirilgan.

Xom ashyo turi	**1 t. karamel uchun sarflanadi-gan xom ashyo normasi (t)**			**Xom ashyoning umumiy miqdori (t)**
	A	*B*	*C*	
Shakar	0,8	0,5	0,6	800
Shinni	0,4	0,4	0,3	600
Meva qiyomi	-	0,1	0,1	120
1t. mahsulotni	108	112	126	

sotishdan keladigan daromad (sh. p.b.)*				

(*) – shartli pul birligi

Fabrikaning oladigan daromadini maksimallashtiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

13.6. Sutni qayta ishlash zavodi shisha idishlarda qadoqlangan sut, qatiq va qaymoq ishlab chiqaradi. 1 tonnadan sut, qatiq, qaymoq ishlab chiqarish uchun mos ravishda 1010 , 1010 va 9450 kg sut zarur bo‘ladi. Bunda 1 tonna sut va qatiq tayyorlashda mos ravishda 0,18 va 0,19 mashina-soat ish vaqti sarflanadi. 1 tonna qaymoq tayyorlash uchun maxsus avtomatlar 3,25 soat ishlaydi. Zavod sut mahsulotlarini ishlab chiqarish uchun hammasi bo‘lib 136000 kg sut ishlatishi mumkin. Asosiy ishlab chiqarish uskunalari 21,4 mashina-soat, qaymoq quyish avtomatlari esa 16,25 soat ishlashi mumkin. 1 tonna sut, qatiq va qaymoqni sotishdan olinadigan daromad mos ravishda 30, 22 va 136 shartli pul birligiga teng. Zavod bir kunda 100 tonnadan kam bo‘lmagan miqdorda shisha idishga qadoqlangan sut ishlab chiqarishi kerak. Mahsulotning boshqa turlari uchun chegaralar yo‘q. Zavod har kuni mahsulotlarni qanday miqdorda ishlab chiqarsa, uni sotishdan keladigan daromad maksimal bo‘ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

13.7. Tikuvfabrikasida 4 turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun 3 artikuldagi gazlamalar ishlatiladi. Turli mahsulotning bittasini tikish uchun sarflanadigan turli artikuldagi gazlamalar normasi jadvalda keltirilgan. Fabrika ixtiyoridagi har bir artikuldagi gazlamalarning umumiy miqdori va mahsulotlar bahosi ham ushbu jadvalda berilgan. Fabrika har bir turdagi mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarsa, ishlab chiqarilgan mahsulotlar bahosi maksimal bo‘ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

Gazlama artikuli	**1 ta mahsulotga sarflanadigan gazlama normasi (m)**				**Gazlamalarning umumiy miqdori (m)**
	I	II	III	IV	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	210
3	4	2	-	4	800
Mahsulotlarbahosi (sh.p.b.)	9	6	4	7	

13.8. Korxona 4 xildagi mahsulot ishlab chiqarishda: tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlaridan foydalanadi. Har bir turdagi jihozning mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqt normasi jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning umumiy ish vaqti fondi, hamda turli mahsulot birliklarini sotishdan olinadigan daromad ham ushbu jadvalda berilgan.

Jihoz turi	**Har bir turdagi bir birlik mahsulot i/ch.ga sarflaydigan vaqt normasi**				**Umumiy ish vaqti fondi (stanok-soat)**
	I	II	III	IV	
Tokarlik	2	1	1	3	300
Frezerlik	1	-	2	1	70
Silliqlash	1	2	1	-	340
Bir birlik mahsulot sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	8	3	2	4	

Eng koʻp daromad keltiradigan ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

13.9. Korxona 3 turdagi mahsulotni ishlab chiqarmoqda. Ishlab chiqarishning bir oylik dasturiga asosan korxona kamida 2000 ta 1-turdagi, 1800 ta 2-turdagi va 1500 ta 3-turdagi mahsulot ishlab chiqarish kerar. Mahsulot ishlab chiqarish uchun bir oylik xarajati 61000 kgdan oshmaydigan xom-ashyo ishlatiladi. 1-turdagi mahsulotning bittasini ishlab chiqarish uchun 8 kg xom-ashyo, 2 va 3-turdagi mahsulotlarning bittasini ishlab chiqarish uchun esa mos ravishda 10 kg va 11 kg xom-ashyo sarfqilinadi. 1-turdagi mahsulotning ulgurji bahosi 70 pul birligini, 2 va 3-mahsulotlarniki esa mos ravishda 100 va 70 pul birligini tashkil qiladi. Korxonaga maksimal daromad keltiradigan mahsulot ishlab chiqarish rejasini topilsh masalasining matematik modeli tuzilsin.

13.10. Mexanika zavodi 2 turdagi detalni ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va payvandlash jihozlarini ishlatadi. Shu borada har bir detalni 2 xil texnologik usul bilan ishlab chiqarish mumkin. Har bir jihozning samarali vaqt fondi berilgan. Har bir texnologik usul bilan turli moslamada detallar birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan vaqt normasi va detallarni sotishdan olinadigan foydalar quyidagi jadvalda keltirilgan. Korxonaga maksimal foydani ta'minlovchi jihozlar yuklanishining optimal rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Jihoz turi	**1-detal**		**2-detal**		**Samarali vaqt fondi (stanok-soat)**
	Texnologik usullar				
	1	2	1	2	
Tokarlik	3	2	3	0	20

Frezerlik	2	2	1	2	37
Payvandlovchi	0	1	1	4	30
Foyda (sh.p.b.)	11	6	9	6	

13.11. Korxona omborida uzunligi 8,1 metr bo‘lgan temir quymalar mavjud. Bu quymalardan ancha kichik bo‘lgan 100 ta quyma mahsulotlar komplektini tayyorlash zarur bo‘lsin. Har bir komplekt tarkibiga 2 ta 3 metrli, 1 ta 2 metrli va 1 ta 1,5 metrli quyma mahsulotlar kiradi. Berilgan materiallardan shunday foydalanish kerakki, quyma mahsulotlar komplekti talab qilingan miqdorda minimal chiqim bilan tayyorlansin. Turli xil usullardagi kesish natijasida bir quymadan olinadigan xomaki mahsulotlar soni, hamda chiqindilar miqdori jadvalda keltirilgan.

Mahsulotlar o‘lchami (m)	**Kesish usullari**								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3 m	2	2	1	1	-	-	-	-	-
2 m	1	-	2	1	4	3	2	1	-
1,5 m	-	1	-	2	-	1	2	4	5
Chiqindilar (m)	0,1	0,6	1,1	0,1	0,1	0,6	1,1	0,1	0,6

13.12. Xo‘jalikkaram, kartoshkava ko‘p yillik o‘tlar ekishga moslashgan. Buning uchun xo‘jalik ixtiyorida 850 ga haydaladigan yer maydoni, 1500 tonna organik o‘g‘itlar, 50000 kishi-kun mehnat resurslari mavjud. 1 ga yerga ekiladigan mahsulotlar uchun sarf qilinadigan organik o‘g‘it va mehnat resurslari xarajati quyidagi jadvalda keltirilgan. Xo‘jalik karam, kartoshka va ko‘p yillik o‘tlardan qancha hajmda eksa, pul ifodasidagi jami mahsulot miqdori maksimal bo‘ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Ko‘rsatkichlar	**Ekin turi**		
	Karam	**Kartoshka**	**Ko‘p yillik o‘t**
Mehnat sarfi, (kishi-kun)	50	30	10
Organik o‘g‘itlar sarfi(t)	20	15	10
1 ga yerdan olinadigan mahsulot bahosi (sh.p.b.)	1000	800	200

13.13. Quyidagi jadvalda berilgan ma’lumotlarga ko‘ra hayvonlar ovqatlanishining optimal sutkalik ratsionini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Ovqatbop mahsulotlar	Bir birlik yemish turidagi ovqatbop mahsulotlar miqdori		Iste'molning minimal sutkalik normasi (sh.b.)
Xashak	1	0,5	5
Hazm qilinadigan protein	80	200	560
Kaltsiy	1	8	20
Bir birlik yemish narxi (sh.p.b.)	3	5	

13.14. Ratsion P_1 va P_2 mahsulotlardan tayyorlanadi. Ularning har biriga *A*, *B* va *C* vitaminlar kiradi. Bir sutkalik minimal iste'mol *A* vitamin uchun 100 birlik, *B* dan 80 birlik, *C* dan esa 160 birlikni tashkil qiladi. Bir birlik P_1 mahsulotning bahosi 2 shartli pul birligiga, P_2 niki esa 3 shartli pul birligiga teng. Quyidagi jadvalda har bir turdagi mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori keltirilgan. Eng arzon tushadigan ratsion variantini topish masalasining matematik modelinituzing.

Vitaminlar	Bir birlik mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori	
	P_1	P_2
A	0,1	0,5
B	0,25	0,1
C	0,2	0,4

13.15. Savdo tashkiloti 3 turdagi tovarlarni sotish uchun quyidagi resurslardan foydalanmoqda: vaqt va sotuv muassasalarining maydoni. Har bir turdagi mahsulotning bir partiyasini sotish uchun resurslar xarajati jadvalda berilgan. 1-mahsulot turining 1-partiyasini ayirboshlashdan tushadigan daromad 50000 so'm, 2-sidan 80000 so'm va 3-sidan 60000 so'm. Savdo tashkilotiga maksimal foydani ta'minlovchi optimal tovar ayirboshlash rejasini topishning matematik modelini tuzing.

Resurslar	Tovarlar turlari			Resurslar hajmi
	1	2	3	
Vaqt (soat)	0,5	0,7	0,6	970
Maydon(m^2)	0,1	0,3	0,2	90

13.16. Aholining talabini hisobga olgan holda poyafzal do'koni reja davrida charm poyafzallardan kamida 140000 (sh.p.b.) va boshqa poyafzallardan kamida 40000 (sh.p.b.) sotishi kerak. Ayirboshlashdan tushadigan daromad va xarajatlarni bilgan holda, do‘kon tovar oboroti kamida 200000 (sh.p.b.) va uning daromadi 2500 dan kam bo‘lmaslik shartida xarajatlarni minimallashtiruvchi sotuv rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Ko‘rsatkichlar	**Poyafzal**	
	Charm poyafzal	**Boshqa poyafzallar**
Daromad (%)	1	2
Xarajatlar (%)	6	5

13.17. Kichik korhonada uch xil P_1, P_2 va P_3 mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun to‘rt xil S_1, S_2, S_3 va S_4 xom-ashyolar ishlatiladi. Xom-ashyolar zahirasi, har bir mahsulotga sarf qilinadigan xom-ashyolarning texnologik normalari va bitta mahsulotning bahosi jadvalda keltirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotning pulli fodasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

Xom-ashyo turlari	**Xom-ashyo zahirasi (kg)**	**Bir mahsulotga ketgan xom-ashyolar normasi (kg)**		
		P_1	P_2	P_3
S_1	1500	4	2	1
S_2	1700	6	0	2
S_3	1000	0	2	4
S_4	2000	8	7	0
Bitta mahsulotning bahosi (sh.p.b.)		100	150	200

13.18. 30-40 kg og‘irlikdagi chorva mollarini oziqlantirib o‘rtacha 300-400 kg og‘irlikni ta’minlash uchun kunlik ratsion tarkibida quyidagi miqdorda oziqlantiruvchi moddalar bo‘lishi kerak: yem-xashak birligi – 1,6 dan kam emas, hazm qilinadigan protein – 200 g dan kam emas, karotin – 10 mg dan kam emas. Oziqlantirishda arpadan, dukkakli mahsulotlardan va somonli undan foydalaniladi. 1 kg yemdagi oziq moddalarning tarkibi va 1 kg yemning bahosi jadvalda keltirilgan. Kunlik ratsionning optimal rejasini tuzing.

Oziqlantiruvchi moddalarning nomlari	**1 kg yem tarkibidagi oziq moddalarning miqdori**		
	Arpa	**Dukkakli mahsulotlar**	**Somonli un**

Yem-xashak birligi (sh.b)	1,2	1,4	0,8
Hazm qilinadigan protein (g)	80	280	240
Karotin (mg)	5	5	100
1 kg yemning bahosi (sh.p.b.)	3	4	5

13.19. Yuzasi mos ravishda 0,8 va 0,6 mln. ga bo‘lgan ikkita tuproq zonasi bor. Zonalar bo‘yicha ekinlarning hosildorligi va 1s donning bahosi jadvalda keltirilgan. Kuzgi ekinlarni 20 mln.s. dan kam bo‘lmagan va bahorgi ekinlarni 6 mln.s. dan kam bo‘lmagan miqdorda ishlab chiqarish talab qilinadi. Kuzgi va bahorgi donli ekinlar maydoni qanday bo‘lganda pul ifodasidagi ishlab chiqarilgan jami mahsulotlar miqdori maksimal bo‘ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar turi	**Hosildorlik (s/ga)**		**1 s mahsulot bahosi**
	1-zona	**2-zona**	
Kuzgi ekinlar	20	25	8
Bahorgi ekinlar	25	20	7

13.20. Jadvalda berilgan ma’lumotlarga asoslanib mebel ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, bunda mehnat rezervlaridan to‘liq foydalangan holda ishlab chiqarilgan jami mahsulotning pul qiymati maksimallashtirilsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Ishlab chiqarish faktorlari	**Faner (m^3)**	**Taxta (m^3)**	**Mehnat (kishi/smena)**	**Narxi (ming so‘m)**
1 ta servantga	0,2	0,1	2	150
1 ta shifonerga	0,1	0,2	1	120
I/ch faktorlari zahirasi	60	40	500	

13.21. Fermer xo‘jalikka chorvachilikni rivojlantirish uchun 324 mln. so‘m ajratilgan. Shundan 180 mln. so‘mi ish haqiga, 144 mln. so‘mi moddiy xarajatlar (texnik xizmat ko‘rsatish) ga taqsimlangan. Jadvalda 1 s. sut va go‘sht uchun sarflanadigan resurslar va sotuv narxlari ko‘rsatilgan. Xo‘jalik kamida 6000 s. sut va 1000 s. go‘sht yetishtirishi kerak. Chorvachilik mahsulotlarini ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, unda xo‘jalikning chorvachilikdan oladigan daromadi maksimal bo‘lsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	Mehnat sarfi (ming so‘m)	Moddiy xarajatlar	Sotuv narxi (ming so‘m)
Sut	12	8	25
Go‘sht	90	80	200

13.22. Qog‘oz kombinati xilma-xil turdagi qog‘ozlarni ishlab chiqarish rejasini bajardi. Shuningdek, xom-ashyodan iqtisod qilib qoldi. 50 t sellyuloza, 80 t yog‘och massasi va 2 t kaolin foydalanilmay qoldi. Jadvalda 1 t har xil turdagi qog‘ozdan ishlab chiqarish uchun sarflanadigan sellyuloza, yog‘och massasi, kaolin normasi berilgan. 1 t bosmaxona qog‘ozidan 5 birlik, 1 t muqo va qog‘ozidan 6 birlik, yozuv qog‘ozidan 8 birlik foyda ko‘riladi. Iqtisod qilingan xom-ashyolardan foydalanib qanday qog‘oz turini ishlab chiqarilsa, korxona foydasi ko‘proq bo‘ladi? Bunda xom-ashyoning qaysi turi va qancha miqdori ortib qoladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	Xom-ashyolar		
	Sellyuloza	Yog‘och massasi	Kaolin
Bosmaxona qog‘ozi	206	829	20
Muqova qog‘ozi	424	627	10
Yozuv qog‘ozi	510	518	12

13.23. Maishiy xizmat uyidagi duradgorlik ustaxonasida savdo tarmoqlari uchun stolva tumbochkalar ishlab chiqarish yo‘lga qo‘yilgan. Ularni tayyorlash uchun ikki turdagi 72 m^3 va 56 m^3 yog‘och bor. Jadvalda bir dona mahsulot uchun ketadigan yog‘ochlar miqdori ko‘rsatilgan. Bitta stolni ishlab chiqarishdan ustaxona 44 birlik sof foyda oladi, bitta tumbochkadan 28 birlik foyda oladi. Ustaxona o‘zida bor materialdan qancha stol va tumbochka ishlab chiqarsa, ko‘proq foyda olish masalasining matematik modelini tuzing.

Mahsulot	Xom-ashyolar	
	1-turdagi yog‘och	2-turdagi yog‘och
Stol	0,18	0,08
Tumbochka	0,09	0,28

13.24. Aviakompaniya ikki xildagi samolyotda ma’lum bir yo‘nalishda yo‘lovchilarni tashishni amalga oshiradi. Birinchi xil samolyot ekipaji 3 kishidan iborat bo‘lib, bir reysda 45 ta yo‘lovchini tashiydi, ikkinchi xil samolyot ekipaji 6 kishidan iborat bo‘lib, bir reysda 80 ta yo‘lovchini tashiydi. Birinchi xil samolyotni eksplutatsiya qilishga 600 (sh.p.b.), ikkinchi xil samolyotni eksplutatsiya qilishga 900 (sh.p.b.) sarflanadi. Rejadagi davr ichida ushbu yo'nalishda kamida 5000 ta yo'lovchini tashish kerakligi ma'lum. Agar samolyot ekipajini shakllantirishda 360 kishi-reysdan ortiq foydalanishi mumkin bo'lmasa, u holda ikkala xil samolyotlardagi reyslar miqdori qancha bo'lganda samolyotlarni eksplutatsiya qilish xarajatlari minimal miqdorda bo'ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

13.25. Xususiy korxona ikki turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Bir kunlik reja bo'yicha birinchi turdagi mahsulotdan (№ 1) kamida 60 dona, ikkinchi turdagi mahsulotdan (№ 2) kamida 80 ta ishlab chiqarilishi kerak. Bir kunlik resurslar esa quyidagicha: ishlab chiqarish uskunalari 600 stanok-soat, xom ashyo 300 kg, 420 kishi-soat mehnat resursi va 450 kvt/soat elektroenergiya. Bir dona mahsulotga sarf qilinadigan resurslar miqdori quyidagi jadvalda berilgan. Birinchi mahsulotning narxi 5000 so'm, ikkinchi turdagi mahsulotning narxi 6000 so'm. Ishlab chiqariladigan mahsulotlardan maksimal foyda ko'rish uchun har bir mahsulotdan qanchadan ishlab chiqarish kerak? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	**I/ch uskunasi (st.-soat)**	**Xom-ashyo (kg)**	**Mehnat (kishi-soat)**	**Elektro-energiya (kvt/s)**
№ 1	4	2	2	3
№ 2	3	1	3	2

13.26. Chorva mollarini yaxshiroq boqish uchun kundalik ratsionda *A* vitamindan 6 birlik, *B* vitamindan 12 birlik, *C* vitamindan 4 birlik bo'lishi kerak. Mollarni boqish uchun ikki turdagi yemdan foydalaniladi. Jadvalda yem tarkibidagi foydali oziqa moddalari ulushi, oziqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoj va yemlar birligining narxi berilgan. Chorvani boqish uchun eng arzon bo'lgan kundalik ratsionni aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

Oziqa moddalari	**Bir birlik yemdagi oziqa moddalari miqdori**		**Mollarning oziqa moddalariga bo'lgan kundalik ehtiyoji**
	I	II	
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
Bir birlik yemning narxi (so'm)	5000	6000	

13.27. Benzinning 2 turidan A va B aralashmalar tayyorlanishi mumkin. A aralashma 60% 1-navli benzindan, 40% 2-nav benzindan tashkil topadi. B aralashma 80% 1-nav benzindan, 20% 2-nav benzindan tashkil topadi. 1 kg$A$ aralashmasining narxi 10 birlik, 1 kg$B$ aralashmasining narxi 12 birlik: 1-nav benzindan 50 t, 2-nav benzindan 30 t mavjud bo‘lgan holda eng qimmat narxli aralashma hosil qilish masalasining matematik modelini tuzing.
13.28. Donli ekinlar uchun 900 ga yer maydoni ajratilgan. Mavjud zahiralar 1400 s. mineral o‘g‘it va 52000 kishi-kun mehnatdan iborat. Masalaga oid ma’lumotlar quyidagi jadvalda berilgan.

Ko‘rsatkichlar	**Ekinlar**		
	Kuzgi bug‘doy	**Tariq**	**Arpa**
Hosildorlik(s/ga)	24	19	13
Mehnat sarfi(kishi-kun)	3	4	5
O‘g‘itlar sarfi (s/ga)	1,7	1,3	2
Tannarx (sh.p.b.)	2	3	14
Sotish narhi (sh.p.b.)	4,5	6	20

Eng ko‘p foyda keltiradigan ekin ekish rejasini aniqlash masalaning matematik modelini tuzing.
13.29. Savdo tashkiloti 4 ta guruhdagi tovarlarni sotishda maksimal foydani ta’minlovchi tovar ayirboshlash rejasi va hajmini aniqlashi kerak. Tovarlarni sotishda 3 xil resurslar: ish vaqti fondi – ko‘pi bilan 1100 kishi-soat, savdo zallari hajmi – 900 kv.m., muomala xarajatlari – ko‘pi bilan 1450 sh.p.b.da ishlatilishi mumkin. Guruhdagi bir birlik tovarlarni sotish uchun resurslarning sarflanish normasi quyidagicha:

Resurslar	**Guruhdagi bir-birlik tovarlarni sotish uchun sarf-xarajatlar**			
	1	2	3	4
Ish vaqti fondi (kishi-soat)	3	5	4	3
Savdo zallari (kv.m.)	4	3	2	4
Muomala xarajatlari (sh.p.b.)	2	2	5	2
Foyda (sh.p.b.)	7	6	5	8

Masalaning matematik modelini tuzing.
13.30. Korxona 4 xildagi mahsulot ishlab chiqarishda: tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlaridan foydalanadi. Har bir turdagi jihozning mahsulot birligini

ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqt normasi jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning umumiy ish vaqti fondi, hamda turli mahsulot birliklarini sotishdan olinadigan daromad ham ushbu jadvalda berilgan.

Jihoz turi	**Har bir turdagi bir birlik mahsulot i/ch.ga sarflaydigan vaqt normasi**				**Umumiy ish vaqti fondi (stanok-soat)**
	I	**II**	**III**	**IV**	
Tokarlik	2	1	1	3	300
Frezerlik	1	-	2	1	70
Silliqlash	1	2	1	-	340
Bir birlik mahsulot sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	8	3	2	4	

Eng ko‘p daromad keltiradigan ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

13.31. Quyidagi jadvalda berilgan ma’lumotlarga ko‘ra hayvonlar ovqatlanishining optimal sutkalik ratsionini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Ovqatbop mahsulotlar	**Bir birlik yemish turidagi ovqatbop mahsulotlar miqdori**		**Iste’molning minimal sutkalik normasi (sh.b.)**
Xashak	1	0,5	5
Hazm qilinadigan protein	80	200	560
Kaltsiy	1	8	20
Bir birlik yemish narxi (sh.p.b.)	3	5	

13.32. Ratsion P_1va P_2 mahsulotlardan tayyorlanadi. Ularning har biriga A, B va C vitaminlar kiradi. Bir sutkalik minimal iste’mol A vitamin uchun 100 birlik, B dan 80 birlik, C dan esa 160 birlikni tashkil qiladi. Bir birlik P_1 mahsulotning bahosi 2 shartli pul birligiga, P_2 niki esa 3 shartli pul birligiga teng. Quyidagi jadvalda har bir turdagi mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori keltirilgan. Eng arzon tushadigan ratsion variantini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Vitaminlar	**Bir birlik mahsulot tarkibidagi vitaminlar miqdori**	
	P_1	P_2
A	0,1	0,5

B	0,25	0,1
C	0,2	0,4

13.33. Savdo tashkiloti 3 turdagi tovarlarni sotish uchun quyidagi resurslardan foydalanmoqda: vaqt va sotuv muassasalarining maydoni. Har bir turdagi mahsulotning bir partiyasini sotish uchun resurslar xarajati jadvalda berilgan. 1-mahsulot turining 1-partiyasini ayirboshlashdan tushadigan daromad 50000 so‘m, 2-sidan 80000 so‘m va 3-sidan 60000 so‘m. Savdo tashkilotiga maksimal foydani ta’minlovchi optimal tovar ayirboshlash rejasini topishning matematik modelini tuzing.

Resurslar	**Tovarlar turlari**			**Resurslar hajmi**
	1	**2**	**3**	
Vaqt (soat)	0,5	0,7	0,6	970
Maydon(m^2)	0,1	0,3	0,2	90

13.34. Aholining talabini hisobga olgan holda poyafzal do‘koni reja davrida charm poyafzallardan kamida 140000 (sh.p.b.) va boshqa poyafzallardan kamida 40000 (sh.p.b.) sotishi kerak. Ayirboshlashdan tushadigan daromad va xarajatlarni bilgan holda, do‘kon tovar oboroti kamida 200000 (sh.p.b.) va uning daromadi 2500 dan kam bo‘lmaslik shartida xarajatlarni minimallashtiruvchi sotuv rejasini topish masalasining matematik modelini tuzing.

Ko‘rsatkichlar	**Poyafzal**	
	Charm poyafzal	**Boshqa poyafzallar**
Daromad (%)	1	2
Xarajatlar (%)	6	5

13.35. Kichik korhonada uch xil P_1, P_2 va P_3 mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun to‘rt xil S_1, S_2, S_3 va S_4 xom-ashyolar ishlatiladi. Xom-ashyolar zahirasi, har bir mahsulotga sarf qilinadigan xom ashyolarning texnologik normalari va bitta mahsulotning bahosi jadvalda keltirilgan. Ishlab chiqarilgan mahsulotning pul ifodasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlash masalasining matematik modelini tuzing.

Xom-ashyo turlari	**Xom-ashyo zahirasi (kg)**	**Bir mahsulotga ketgan xom-ashyolar normasi (kg)**		
		P_1	P_2	P_3
S_1	1500	4	2	1

S_2	1700	6	0	2
S_3	1000	0	2	4
S_4	2000	8	7	0
Bitta mahsulotning bahosi (sh.p.b.)		100	150	200

13.36. 30-40 kg og‘irlikdagi chorva mollarini oziqlantirib o‘rtacha 300-400 kg og‘irlikni ta’minlash uchun kunlik ratsion tarkibida quyidagi miqdorda oziqlantiruvchi moddalar bo‘lishi kerak: yem-xashak birligi – 1,6 dan kam emas, hazm qilinadigan protein – 200 gdan kam emas, karotin – 10 mgdan kam emas. Oziqlantirishda arpadan, dukkakli mahsulotlardan va somonli undan foydalaniladi. 1 kg yemdagi oziq moddalarning tarkibi va 1 kg yemning bahosi jadvalda keltirilgan. Kunlik ratsionning optimal rejasini tuzing.

Oziqlantiruvchi moddalarning nomlari	**1 kg yem tarkibidagi oziq moddalarning miqdori**		
	Arpa	**Dukkakli Mahsulotlar**	**Somonli un**
Yem-xashak birligi (sh.b)	1,2	1,4	0,8
Hazm qilinadigan protein (g)	80	280	240
Karotin (mg)	5	5	100
1 kg yemning bahosi (sh.p.b.)	3	4	5

13.37. Yuzasi mos ravishda 0,8 va 0,6 mln. ga bo‘lgan ikkita tuproq zonasi bor. Zonalar bo‘yicha ekinlarning hosildorligi va 1s donning bahosi jadvalda keltirilgan. Kuzgi ekinlarni 20 mln.s. dan kam bo‘lmagan va bahorgi ekinlarni 6 mln.s. dan kam bo‘lmagan miqdorda ishlab chiqarish talab qilinadi. Kuzgi va bahorgi donli ekinlar maydoni qanday bo‘lganda pul ifodasidagi ishlab chiqarilgan jami mahsulotlar miqdori maksimal bo‘ladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar turi	**Hosildorlik (s/ga)**		**1 s mahsulot bahosi**
	1-zona	**2-zona**	
Kuzgi ekinlar	20	25	8
Bahorgi ekinlar	25	20	7

13.38. Fermer xo‘jalikka chorvachilikni rivojlantirish uchun 324 mln. so‘m ajratilgan. Shundan 180 mln. so‘mi ish haqiga, 144 mln. so‘mi moddiy xarajatlar (texnik xizmat ko‘rsatish) ga taqsimlangan. Jadvalda 1 s. sut va go‘sht uchun sarflanadigan resurslar va sotuv narxlari ko'rsatilgan. Xo'jalik kamida 6000 s. sut va 1000 s. go'sht yetishtirishi kerak. Chorvachilik mahsulotlarini ishlab chiqarish rejasini shunday tuzingki, unda xo'jalikning chorvachilikdan oladigan daromadi maksimal bo'lsin. Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	**Mehnat sarfi (ming so'm)**	**Moddiy xarajatlar**	**Sotuv narxi (ming so'm)**
Sut	12	8	25
Go'sht	90	80	200

13.39. Qog'oz kombinati xilma-xil turdagi qog'ozlarni ishlab chiqarish rejasini bajardi. Shuningdek, xom-ashyodan iqtisod qilib qoldi. 50 t sellyuloza, 80 t yog'och massasi va 2 t kaolin foydalanilmay qoldi. Jadvalda 1 t har xil turdagi qog'ozdan ishlab chiqarish uchun sarflanadigan sellyuloza, yog'och massasi, kaolin normasi berilgan. 1 t bosmaxona qog'ozidan 5 birlik, 1 t muqova qog'ozidan 6 birlik, yozuv qog'ozidan 8 birlik foyda ko'riladi. Iqtisod qilingan xom-ashyolardan foydalanib qanday qog'oz turini ishlab chiqarilsa, korxona foydasi ko'proq bo'ladi? Bunda xom-ashyoning qaysi turi va qancha miqdori ortib qoladi? Masalaning matematik modelini tuzing.

Mahsulotlar	**Xom-ashyolar**		
	Sellyuloza	**Yog'och massasi**	**Kaolin**
Bosmaxona qog'ozi	206	829	20
Muqova qog'ozi	424	627	10
Yozuv qog'ozi	510	518	12

13.40. Quyida berilgan ChPMlarini vektor va matrisa ko'rinishida ifodalang.

13.40.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12, \end{cases}$
$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$
$F = x_1 + x_2 \to \max.$

13.40.2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \end{cases}$
$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$
$F = x_1 + 2x_2 \to \max.$

13.40.3. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$
$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$
$F = -2x_1 + x_2 \to \min.$

13.40.4. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$
$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5.$
$F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max.$

13.40.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$
$x_j \ge 0, \quad j = 1,2.$
$F = -2x_1 + x_2 \to \min.$

14-amaliy mashg'ulot. Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqini

14.1. Firma ikki xil A va B mahsulotlarni ishlab chiqaradi. Har bir mahsulotga I, II va III turdagi mashinalarning har birida ishlov beriladi. Mahsulotlarga mashinalarda ishlov berish soatlari quyidagicha berilgan:

	I	II	III
A	$0,5$	$0,4$	$0,2$
B	$0,25$	$0,3$	$0,4$

I, II, III mashinalarning haftalik vaqt fondlari mos ravishda 40, 36 va 36 soatni tashkil etadi. Sotilgan A va B mahsulotlardan mos ravishda 5 va 3 birlik foyda olinadi. Firmaga maksimal foyda keltiradigan haftalik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab qilinadi. Masalani ChPMsi shaklida ta'riflang va uni yeching.

Yechish: Hafta davomida ishlab chiqarish rejalashtirilgan A mahsulot miqdori x_1 va B mahsulot miqdori x_2 bo'lsin, u holda masalaning berilganlaridan foydalanib, quyidagi ChPMni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 \le 40 \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 \le 36 \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 \le 36 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

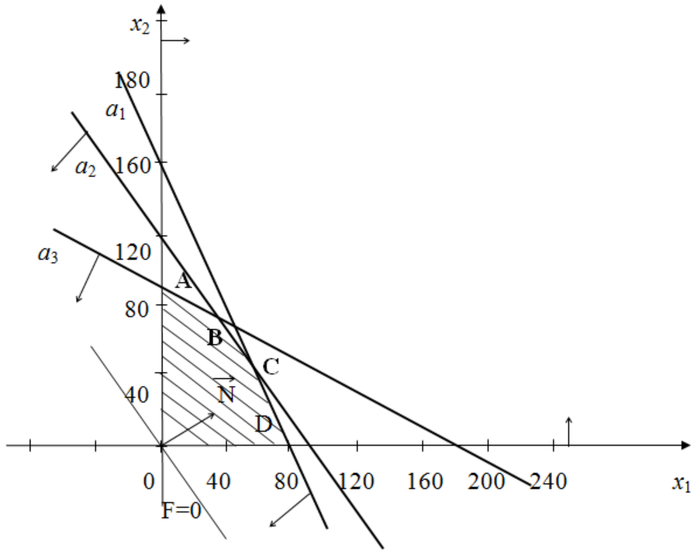
$$F = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

Bu masalada noma'lumlar soni ikkita, hamda chegaraviy shartlar tengsizliklar shaklida bo'lganligi uchun grafik usulni qo'llash mumkin. Masaladagi chegaraviy shartlardagi har bir tengsizlik x_1Ox_2 koordinata tekisligida chegaralari mos

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 = 40 \quad (a_1) \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 = 36 \quad (a_2) \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 = 36 \quad (a_3) \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlardan va koordinata o'qlaridan iborat yarim tekisliklarni ifodalaydi.

Ushbu yarim tekisliklarni va ularning kesishmasidan iborat bo'lgan rejalar ko'pburchagini chizib olamiz, hamda $\vec{N} = (5;3)$ yo'naltiruvchi vektor yordamida $F = 5x_1 + 3x_2$ maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beruvchi nuqtani aniqlaymiz.



Chizmadan ko‘rinib turibdiki, $F = 5x_1 + 3x_2$ maqsad funksiyasi o‘zining maksimal qiymatiga $ABCO$ – rejalar ko‘pburchagining C nuqtasida erishadi. Bu nuqta a_1 va a_2 to‘g‘ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo‘lganligi uchun uning koordinatasini

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 = 40 \quad (a_1) \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 = 36 \quad (a_2) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib topamiz. Sistemaning yechimi $x_1 = 60$ va $x_2 = 40$. Bu yechimga maqsad funksiyasining $F_{\max} = 5 \cdot 60 + 3 \cdot 40 = 420$ qiymati mos keladi.

Shunday qilib, firma 420 birlik foydaga erishish uchun A mahsulotdan 60 ta va B mahsulotdan 40 ta ishlab chiqarishni rejalashtirishi kerak bo‘ladi. Bunda I va II tur mashinalarning ish vaqti fondidan to‘laligicha foydalaniladi, hamda III tur mashina vaqtidan ($0,2x_1 + 0,4x_2 \le 36$ tengsizlikka ko‘ra) 8 soat ortib qoladi.

14.2. Quyidagi ChPMni yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5$$

$$F = -16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 \to \max$$

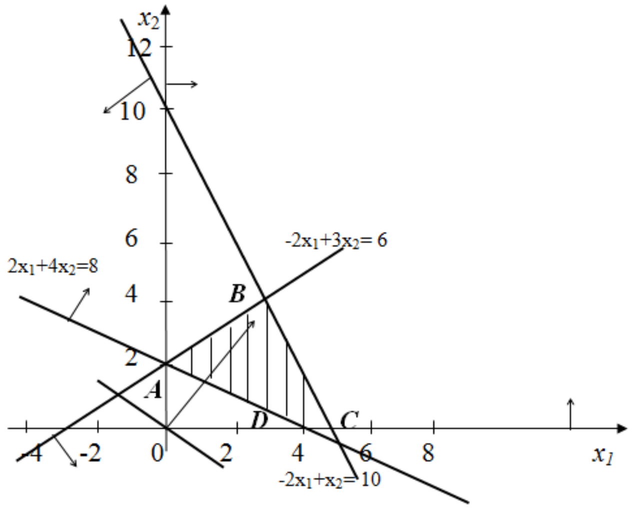
Yechish: Ushbu masaladagi tenglamalar sistemasidan nomanfiy x_3, x_4, x_5 noma’lumlarning har birini x_1 va x_2 noma’lumlar orqali ifodalab, ularni maqsad funksiyasiga qo‘ysak, ikki noma’lumli, chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan iborat bo‘lgan ChPM hosil bo‘ladi.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2 \qquad (2)$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max \qquad (3)$$

Bu masalaning rejalar ko‘pburchagini yasab olamiz:



Chizmadan rejalar ko‘pburchagining B nuqtasi optimal yechim ekanligi ravshandir. Bu nuqtaning koordinatasini

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$$

tenglamalar sistemasining yechimi sifatida topamiz. Sistemani yechib, $x_1 = 3$ va $x_2 = 4$ qiymatlarni olamiz. Bu qiymatlarni dastlabki berilgan (1) sistemaga qo‘yib $x_3 = 0$ va $x_4 = 0$ va $x_5 = 14$ qiymatlarni va ularga mos keluvchi maqsad funksiyasining $F_{\max} = 18$ qiymatini hosil qilamiz.

Shunday qilib, berilgan (1), (2) va (3) masalaning yechimi $X_{opt}(3;4;0;0;14)$ va $F_{\max} = 18$ dan iborat ekanligini aniqlaymiz.

Umuman, chegaraviy shartlari n ta noma’lum va m ta chiziqli erkli tenglamalarni o‘z ichiga olgan masalalarni ham, agar $n - m = 2$ munosabat bajarilsa, grafik usul yordamida yechish mumkin. Bunga oid quyidagi masalani keltiramiz.

14.3. ChPMsini grafik usul yordamida yeching.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38 \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \tag{5}$$

$$F = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \max \tag{6}$$

Yechish: Bu masalada $n = 5$ va $m = 3$ bo‘lib, $n - m = 2$ bo‘lganligi uchun grafik usulni qo‘llash mumkin. Dastlab, Jordan-Gauss usuli yordamida (4) sistemaning har bir tenglamasida bittadan bazis o‘zgaruvchilarni (masalan, x_1, x_2, x_3 – o‘zgaruvchilarni) ajratamiz.

Natijada (4) sistemaga teng kuchli bo‘lgan quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 = 6 \\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases} \tag{7}$$

Bundan esa, bazis o‘zgaruvchilarga nisbatan yechilgan sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5 \\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5 \end{cases} \tag{8}$$

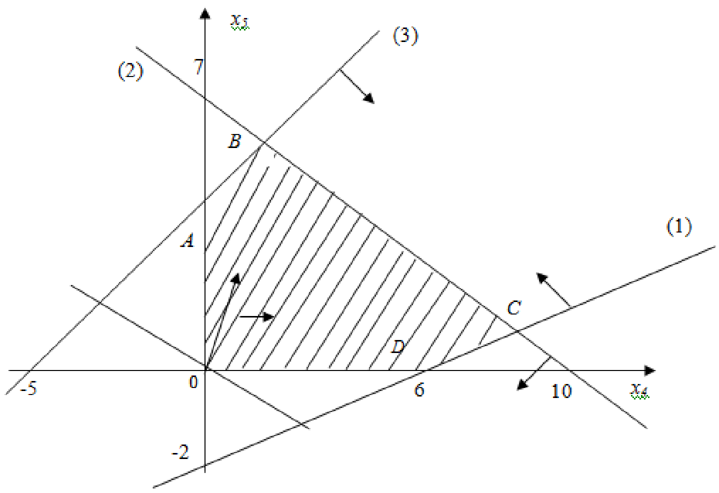
Bazis o‘zgaruvchilarning bu qiymatlarini maqsad funksiyasiga qo‘yib, hamda (7) sistemada bazis o‘zgaruvchilarni tashlab yuborib, ikki noma’lumli quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6 \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70 \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

$$F = 6x_4 + 15x_5 - 38 \to \max$$

x_4Ox_5 koordinata tekisligida rejalar ko‘pburchagini, maqsad funksiyasini va yo‘naltiruvchi vektorni tasvirlaymiz.



Chizmaga asosan maqsad funksiyani o‘zining maksimal qiymatiga rejalar ko‘pburchagining B nuqtasida erishishini ko‘ramiz.

Bu nuqta koordinatalarini

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ -4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

sistemani yechib topamiz: $x_4 = 2;\ x_5 = \dfrac{28}{5}.$

$$F_{\max} = -38 + 12 + 84 = 58.$$

Dastlabki berilgan (4), (5), (6) masalaning yechimini hosil qilish uchun $x_4 = 2$ va $x_5 = \dfrac{28}{5}$ qiymatlarni (8) sistemaga qo‘yamiz. Natijada $x_1 = \dfrac{104}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ qiymatlarni olamiz. Shunday qilib,

$$X_{opt} = \left(\frac{104}{5};\quad 0;\quad 0;\quad 2;\quad \frac{28}{5} \right) \quad \text{va} \quad F_{\max} = 58.$$

Quyidagi masalalarni matematik modelini tuzing va grafik usulda yeching.

14.4. Mebel fabrikasi shkaf va stollar ishlab chiqarish uchun zarur resurslardan foydalanadi. Har bir turdagi mahsulotga sarflanadigan resurslar normasi, 1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad va bor bo‘lgan resurslarning umumiy miqdori quyidagi jadvalda berilgan.

Resurslar	**1 ta mahsulotga sarflanadigan resurslar miqdori**		**Resurslarning umumiy miqdori**
1-xil yog‘och(m^2)	0,2	0,1	40
2-xil yog‘och(m^2)	0,1	0,3	60
Mehnat sarfi(kishi-soat)	1,2	1,5	371,4
1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	6	8	

Fabrika qancha stol va shkaf ishlab chiqarsa, ularni sotishdan keladigan daromad maksimal bo‘ladi.

14.5. *A* va *B* turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlari ishlatiladi. Har bir turdagi jihozning har bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqtlari normalari jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning ish vaqti umumiy fondi hamda 1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Jihoz turi	1 ta mahsulot tayyorlashga sarflanadigan vaqt (soat)		Jihozning foydali ish vaqti umumiy fondi (s)
	A	*B*	
Frezerlik	10	8	168
Tokarlik	5	10	180
Silliqlash	6	12	144
1 ta mahsulot sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	14	18	

A va B mahsulotlar ishlab chiqarishning shunday rejasi topilsinki, ulardan keladigan daromad maksimal boʻlsin.

14.6. Mebel fabrikasida standart faner listlardan 3 turdagi xom-ashyodan mos ravishda 24, 31 va 18 dona qirqishi kerak. Har bir faner listidan 2 usul bilan xom-ashyolar qirqish mumkin. Berilgan usul boʻyicha qirqish natijasida hosil boʻladigan xom-ashyolar soni jadvalda berilgan. Berilgan usul boʻyicha 1 ta faner listni qirqishdan hosil boʻlgan chiqindilar oʻlchami ham quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyolar turi	Usul boʻyicha qirqishdan hosil boʻlgan xom-ashyolar soni (dona)	
	1-usul	**2-usul**
1	2	6
2	5	4
3	2	3
Qirqimlar (chiqindilar) oʻlchami(kv.sm)	12	16

Qancha faner listi va qaysi usulda qirqilganda minimal chiqindi hosil boʻladi, hamda zarur xom-ashyolar sonidan kam boʻlmagan xom-ashyo olinadi

14.7. Fermada qoʻngʻir va sariq quyonlar parvarish qilinadi. Ularning normal parvarishi uchun 3 turdagi oziqa ishlatiladi. Qoʻngʻir va sariq quyonlar uchun har kungi zarur boʻlgan har bir turdagi oziqalar miqdori jadvalda keltirilgan. Hayvon fermasi ishlatishi mumkin boʻlgan har bir turdagi oziqaning umumiy miqdori va 1 ta qoʻngʻir va sariq quyon terisini sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Ozuqa turi	**Kunlik zarur bo'lgan ozuqa birligi miqdori**		Ozuqaning umumiy miqdori
	Qo'ng'ir quyon	**Sariq quyon**	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
1 ta terini sotishdan keladigan daromad (sh.p.b.)	16	12	

Ferma eng katta daromad olishi uchun ishni qanday tashkil etishi kerak?

Quyidagi masalalarni grafik usulda yeching.

14.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 12 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = x_1 + x_2 \to \max$

14.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = x_1 + 2x_2 \to \max$

14.10. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = -2x_1 + x_2 \to \min$

14.11. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5$

$F = -x_1 + 4x_2 + 2x_4 - x_5 \to \max$

14.12. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5$

$F = -5x_1 + x_2 - x_3 \to \max$

14.13. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ -2x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 - 2x_2 \to \max \ (\min)$

14.14. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \ge -1 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 - 3x_2 \to \max$

14.15. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 7 \\ x_1 - x_2 \ge 2 \\ 5x_1 - x_2 \ge 10 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$

$x_2 \ge 0$

$F = 4x_1 + 3x_2 \to \min$

14.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \end{cases}$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$

$F = 3x_1 - 10x_2 \to \min \ (\max)$

14.17. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ \dfrac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2$

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \min \ (\max)$

14.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$

$F = 4 + 6x_1 + 2x_2 \to \min \ (\max)$

14.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18 \\ x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ 0 \leq x_1 \leq 12 \\ 0 \leq x_2 \leq 8 \end{cases}$

$F = 4x_1 + 5x_2 \to \max \ (\min)$

14.20. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min(\max)$

14.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$

$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max(\min)$

14.22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$

$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}$

$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 \to \max$

14.23. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19 \end{cases}$

$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$

$F = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \to \max$

15-amaliy mashg'ulot. Chiziqli programmalashtirish masalasini simpleks usulida yechish

15.1. Quyidagi ChPMni simpleks usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4,5$$

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min$$

Yechish: Masalaning tenglamalar sistemasini vektor formada yozib olamiz:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 = P_0$$

bunda

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};\quad P_2=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};\quad P_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\quad P_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};\quad P_0=\begin{pmatrix}5\\9\\7\end{pmatrix};$$

$$C=(-2;-1;1;-1;1)$$

Berilgan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 vektorlar orasida uchta birlik P_3, P_4 va P_5 vektorlar bo‘lganligi uchun, masalaning boshlang‘ich tayanch rejasini bevosita yozish mumkin: $X_0=(0;\,0;\,0;\,5;\,9;\,7.)$

Birlik vektorlarga mos x_3, x_4 va x_5 – o‘zgaruvchilar bazis o‘zgaruvchilar bo‘lib, qolgan x_1, x_2 – o‘zgaruvchilar esa bazismas o‘zgaruvchilardir. Bazis o‘zgaruvchilarga mos keluvchi chiziqli funksiya koeffisiyentlaridan tuzilgan vektor $C_{baz}(1;\,-1;\,1)$ dan iborat.

Masalaning berilganlarini quyidagi simpleks jadvalga joylashtiramiz. Jadvalning $m+1$ qatoriga rejaning bahosi deb ataluvchi va

$$\Delta_j=F_j-C_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}c_i-C_j$$

formula orqali aniqlanuvchi ko‘rsatkichlar joylashtiriladi. Agar barcha $\Delta_j\le 0$ $(j=\overline{1,n})$ bo‘lsa, topilgan tayanch yechim optimal yechim bo‘ladi. Agar birorta $j=k$ uchun $\Delta_k>0$ bo‘lsa, u holda topilgan tayanch yechim optimal bo‘lmaydi. Uni boshqa tayanch rejaga almashtirish kerak. Tayanch rejalarni almashtirish jarayoni optimal yechim topilguncha yoki masalaning chekli yechimi yo‘q ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Simpleks usulni qo‘llab, I qadamda $\max\limits_{\Delta_j>0}\Delta_j=3$ ga mos keluvchi P_2 vektor bazisga kiritilib, P_5 vektor bazisdan chiqariladi. II qadamda $\Delta_1=\frac{1}{2}$ ga mos keluvchi P_1 vektor bazisga kiritilib, P_3 bazisdan chiqariladi va nihoyat III qadamda optimal yechim topiladi.

Bazis	C_b	P_0	-2	-1	1	-1	1	**a.k.**
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	1	5	1	1	1	0	0	5
P_4	–1	9	2	1	0	1	0	9
P_5	1	7	1	2	0	0	1	7/2*
$\Delta_j=F_j-C_j$		3	2	3*	0	0	0	

P_3 P_4 P_2	1 –1 –1	3/2 11/2 7/2	1/2 3/2 1/2	0 0 1	1 0 0	0 1 0	–1/2 –1/2 1/2	3* 11/3 7
$\Delta_j = F_j - C_j$		–15/2	1/2*	0	0	0	–3/2	
P_1 P_4 P_2	–2 –1 –1	3 1 2	1 0 0	0 0 1	2 –3 –1	0 1 0	–1 1 1	
$\Delta_j = F_j - C_j$		–9	0	0	–1	0	–1	

Bu jadvaldan ko‘rinib turibdiki, berilgan masalaning optimal rejasi $X^* = (3;\,2;\,0;\,1;\,0)$ bo‘lib, unga maqsad funksiyaning $F_{\min} = -9$ qiymati mos keladi. Topilgan yechim yagonadir, chunki nolga teng Δ_j baholar faqat bazis vektorlar uchun o‘rinlidir.

15.2. Quyidagi ChPMni simpleks usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3$$

$$F = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

Yechish: Berilgan masalani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ 3x_1 + x_3 \le 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3$$

$$F = x_1 - x_2 - 3x_3 \to \min$$

Chegaraviy shartlarda qo‘shimcha o‘zgaruvchilar kiritib tengsizliklardan tengliklarga o‘tamiz. (Qo‘shimcha o‘zgaruvchilarning chiziqli funksiyadagi koeffisiyentlari nolga mos kelishini eslatib o‘tamiz).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}$$

Sistemani vektor formada yozib olamiz:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0$$

bunda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$C = (1; -1; -3; 0; 0; 0), C_{baz} = (0; 0; 0).$$

Birlik vektorlarga mos bo‘lgan x_4, x_5, x_6 – bazis o‘zgaruvchilarni mos ozod hadlarga tenglab, bazismas x_1, x_2, x_3 o‘zgaruvchilarni esa nolga teng deb, boshlang‘ich tayanch rejani hosil qilamiz.

$$X_0 = (0; 0; 0; 1; 2; 5)$$

Keyingi hisoblash jarayonlarini quyidagi simpleks jadvalda bajaramiz:

Bazis	C_b	P_0	1	–1	–3	0	0	0	**a.k.**
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_4	0	1	2	–1	1	1	0	0	1*
P_5	0	2	–4	2	–1	0	1	0	–
P_6	0	5	3	0	1	0	0	1	5
$\Delta_j = F_j - C_j$		0	–1	1	3*	0	0	0	
P_3	–3	1	2	–1	1	1	0	0	–
P_5	0	3	–2	1	0	1	1	0	3*
P_6	0	4	1	1	0	–1	0	1	4
$\Delta_j = F_j - C_j$		–3	–7	4*	0	–3	0	0	
P_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	–
P_2	–1	3	–2	1	0	1	1	0	–
P_6	0	1	$\boxed{3}$	0	0	–2	–1	1	1/3
$\Delta_j = F_j - C_j$		–15	1*	0	0	–7	–4	0	
P_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	
P_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3	
P_1	1	1/3	1	0	0	–2/3	–1/3	1/3	
$\Delta_j = F_j - C_j$		–46/3	0	0	0	–19/3	–11/3	–1/3	

To‘rtinchi qadamda $(m+1)$ – satrda $\Delta_j = F_j - C_j \le 0$ optimallik sharti bajarilganligi uchun

$$X^* = (1/3; 11/3; 4; 0; 0; 0)$$

reja optimal bo‘lib, unga $F_{\min} = -46/3$ qiymat mos keladi. Dastlabki berilgan masalaning yechimi esa

$$X_{opt} = (1/3;\, 11/3;\, 4), \qquad F_{\max} = 46/3$$

bo‘lib, ushbu yechim yagona ekanligini simpleks jadvalda ko‘rish mumkin, ya’ni nolga teng $\Delta_j = F_j - C_j$ baholar faqat bazis vektorlar uchun o‘rinlidir.

Boshlang‘ich tayanch rejasi berilmagan ChPMlarning chegaraviy shartlaridan iborat tenglamalar sistemasida elementar almashtirishlar bajarib, biror tayanch yechimni (nomanfiy bazis yechimni) topish, so‘ngra simpleks usul yordamida optimal yechimni aniqlash mumkin. Chegaraviy shartlarda ozod hadi manfiy bo‘lgan tenglamalar qatnashsa, bunday tenglamalarning chap va o‘ng tomonini (–1) ga ko‘paytirib, ozod hadni musbat qilib olish kerak.

15.3. Dastlab ChPMsining biror tayanch rejasini toping va simpleks usuli yordamida optimal yechimni aniqlang.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 7x_5 = -8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,5}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$$

Sistemadagi ikkinchi tenglamaning ozod hadi manfiy bo‘lganligi uchun, uning ikkala qismini (–1) koeffisiyentga ko‘paytirib, ozod hadni musbat qilib olamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

Bu sistemaning nomanfiy bazis yechimlaridan birini, (yoki chiziqli programmalashtirish masalasining tayanch rejalaridan birini) yuqorida ko‘rilgan usul yordamida topib olaylik.

Hisoblash jarayonlarini quyidagi jadvalda bajaramiz.

i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_0	a.k
1	1	2	–3	1	–5	5	5
2	2	3	–5	2	–7	8	4
3	3	1	–2	6	2	5	1*
n.t.	6	6	–10	9*	–10	19	
1	1/2	11/6	–8/3	0	–16/3	4	24/11*
2	1	8/3	–13/3	0	–23/3	6	9/4

3	1/2	1/6	–1/3	1	1/3	1	6
n.t.	3/2	9/2*	–7	0	–13	10	
1 2 3	3/11 3/11 5/11	1 0 0	–16/11 –5/11 –1/11	0 0 1	–32/11 1/11 9/11	24/11 2/11 7/11	8 2/3* 7/5
n.t.	3/11	0	–5/11	0	1/11	2/11	
1 2 3	0 1 0	1 0 0	–1 –5/3 2/3	0 0 1	–3 1/3 2/3	2 2/3 1/3	
n.t.	0	0	0	0	0	0	

Jadvalning oxirgi bosqichida dastlab berilgan sistemaga teng kuchli bo‘lgan

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - 3x_5 = 2 \\ x_1 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x_3 + x_4 + \frac{2}{3}x_5 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

sistemani va boshlang‘ich $X_0 = \left(\frac{2}{3};2;0;\frac{1}{3};0\right)$ tayanch rejani hosil qilamiz.

Bu tayanch rejani optimallikka tekshirish uchun simpleks jadvalni tuzamiz va $\Delta_j = F_j - C_j$ baholarning qiymatlarini hisoblaymiz.

Bazis	C_b	P_0	–3	–4	–1	–2	1	**a.k**
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_2 P_1 P_4	–4 –3 –2	2 2/3 1/3	0 1 0	1 0 0	–1 –5/3 2/3	0 0 1	–3 1/3 2/3	– – 1/2
$\Delta_j = F_j - C_j$		–32/3	0	0	26/3*	0	26/3	
P_2 P_1 P_3	–4 –3 –1	5/2 3/2 ½	0 1 0	1 0 0	0 0 1	3/2 5/2 3/2	–2 2 1	
$\Delta_j = F_j - C_j$		–15	0	0	0	–13	0	

Shunday qilib, masalaning optimal rejasi $X_{opt} = \left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};0;0\right)$ bo‘lib, unga $F_{\max} = 15$ qiymat mos keladi. Shuni ta’kidlash kerakki, olingan

$X_{opt}=\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};\frac{1}{2};0;0\right)$ – optimal reja yagona emas, chunki bazisga kirmagan P_5 vektorga 0 ga teng bo‘lgan baho mos keladi.

Quyidagi masalalarda dastlab ChPMning biror tayanch rejasini toping va simpleks usulini qo‘llab optimal yechimni aniqlang.

15.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4$

$F = x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$

15.5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4,5$

$F = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 \to \min$

15.6. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4,5$

$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min$

15.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4$

$F = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$

15.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4$

$F = x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \to \min$

15.9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4$

$F = 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + x_4 \to \max$

15.10. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 15 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 15 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4,5$

$F = -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$

15.11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 12x_4 - 2x_5 = 7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 - 7x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4,5$

$F = -x_1 - x_2 + 7x_3 + 7x_4 - x_5 \to \min$

15.12. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4,5,6$

$F = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \to \max$

15.13. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2,3,4,5,6$

$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$

15.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2$

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

15.15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j=1,2$

$F = x_1 + 2x_2 \to \max$

15.16. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \le 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le 15 \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$

15.17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 15 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3$

$F = 7x_1 + 9x_2 - 5x_3 \to \max$

15.18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \le 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -1 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3$

$F = x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max$

15.19. $\begin{cases} -x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ -2x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2$

$F = -5x_1 + 5x_2 \to \min$

15.20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \le 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$

15.21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3$

$F = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

15.22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18 \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5,6$

$F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$

15.23. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5,6$

$F = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \to \max$

15.24. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max$

Yechish: Masalaning shartlaridagi tenglamalarda bazis o‘zgaruvchilar yo‘q. Har bir tenglamaga mos ravishda x_5, x_6 – sun’iy bazis o‘zgaruvchilarni qo‘shamiz va maqsad funksiyani (-1) ga ko‘paytirib, quyidagi kengaytirilgan masalani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}$$

$$F = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \to \min$$

Kengaytirilgan masala uchun $X=(0;0;0;0;3;3)$ boshlang‘ich tayanch reja hisoblanadi. Keyingi hisoblashlarni quyidagi simpleks jadvalda bajaramiz.

Bazis	C_b	P_0	–5	–3	–4	1	M	M	**a.k**
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_5	M	3	1	3	2	2	1	0	1^*
P_6	M	3	2	2	1	1	0	1	3/2
$\Delta_j=F_j-C_j$		$6M$	$3M+5$	$5M+3$	$3M+4$	$3M-1$	0	0	
P_2	–3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3
P_6	M	1	4/3	0	–1/3	–1/3	–2/3	1	3/4 *
$\Delta_j=F_j-C_j$		$M-3$	$\frac{4}{3}M+1$	0	$-\frac{1}{3}M+2$	$-\frac{1}{3}M-3$	$-\frac{5}{3}M-1$	0	
P_2	–3	3/4	0	1	3/4	3/4	½	–1/4	1^*
P_1	–5	3/4	1	0	–1/4	–1/4	–1/2	3/4	–
$\Delta_j=F_j-C_j$		–6	0	0	3*	–2	$-M+1$	$-M-3$	
P_3	–4	1	0	4/3	1	1	2/3	–1/3	
P_1	–5	1	1	1/3	0	0	–1/3	2/3	
$\Delta_j=F_j-C_j$		–9	0	–4	0	–5	$-M-1$	$-M-2$	

Oxirgi qadamdan ko‘ramizki, masala yagona $X=(1;0;1;0;0;0)$ optimal yechimga va $F_{min}=-9$ minimal qiymatga ega. Dastlabki berilgan masala yechimi esa

$$X_{opt}=(1;0;1;0); \qquad F_{\max}=9.$$

Quyidagi ChPMlarini sun’iy bazis usulida yeching.

15.25. $\begin{cases} -x_1+4x_2-2x_3\le 6 \\ x_1+x_2+2x_3\ge 6 \\ 2x_1-x_2+2x_3=4 \end{cases}$

$x_j\ge 0,\quad j=1,2,3$

$F=x_1+2x_2-x_3\to\max$

15.26. $\begin{cases} 5x_1+3x_2\le 90 \\ 3x_1+4x_2\le 70 \\ x_1+x_2=20 \end{cases}$

$x_j\ge 0,\quad j=1,2$

$F=16x_1+10x_2\to\min$

15.27. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3\ge 9 \\ x_1+2x_2+2x_3\ge 8 \end{cases}$

$x_j\ge 0,\quad j=1,2,3$

$F=3x_1+6x_2+30x_3\to\min$

15.28. $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3\le 14 \\ 2x_1-3x_2+2x_3\ge 4 \end{cases}$

$x_j\ge 0,\quad j=1,2,3$

$F=2x_1+2x_2+3x_3\to\max$

15.29. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 \to \max$

15.30. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = -2x_1 + 4x_2 - 9x_3 - x_4 \to \min$

15.31. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5$

$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min$

15.32. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max$

15.33. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 15 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 15 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5$

$F = -2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max$

15.34. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 200 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 50 \end{cases}$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4$

$F = 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 + x_4 \to \max$

Quyidagi ChPMlarini matematik modelini tuzing va sun’iy bazis usulida yeching.

15.35. (Optimal bichish haqida masala). O‘lchami $(6\times13)m^2$ bo‘lgan tunuka materiallarini shunday qirqish kerakki, unda ikki xildagi qirqimlar, ya’ni har biri $(4\times5)m^2$ o‘lchamli 400 ta, har biri $(2\times3)m^2$ o‘lchamli 800 ta qirqimlar hosil bo‘lsin. Har bir tunukani qirqish usullari va bunda olinadigan turli o‘lchamdagi qirqimlar soni quyidagi jadvalda berilgan.

Qirqimlar o‘lchami (m^2)	**Tunukani qirqish usullari**			
	I	**II**	**III**	**IV**
4×5	3	2	1	0
2×3	1	6	9	13

Umumiy soni ko‘rsatilgan miqdordan kam bo‘lmagan va eng kam chiqindiga ega bo‘lgan qirqimlar tayyorlash rejasini topish masalaning matematik modelini tuzing va sun’iy bazis usulida optimal yechimni toping.

15.36. Chorva mollarini yaxshiroq boqish uchun kundalik ratsionda A vitamindan 6 birlik, B vitamindan 12 birlik, C vitamindan 4 birlik bo‘lishi kerak. Mollarni boqish uchun ikki turdagi yemdan foydalaniladi. Jadvalda yem tarkibidagi foydali oziqa moddalari ulushi, oziqa moddalariga bo‘lgan kundalik ehtiyoj va yemlar birligining narxi berilgan. Chorvani boqish uchun eng arzon bo‘lgan kundalik ratsionni aniqlash masalasining matematik modelini tuzing va simpleks usulda optimal yechimini toping.

<table>
<tr><th rowspan="2">Oziqa moddalari</th><th colspan="2">Bir birlik yemdagi oziqa moddalari miqdori</th><th rowspan="2">Mollarning oziqa moddalariga bo‘lgan kundalik ehtiyoji</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th></tr>
<tr><td>A</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td></tr>
<tr><td>B</td><td>2</td><td>4</td><td>12</td></tr>
<tr><td>C</td><td>0</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Bir birlik yemning narxi (so‘m)</td><td>5000</td><td>6000</td><td></td></tr>
</table>

16-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli programmalashtirishda ikkilanish nazariyasi

16.1. Quyidagi masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max$$

Yechish: Qaralayotgan masala simmetrik bo‘lmagan masalaning II shakliga doir. Ikkilangan masalada o‘zgaruvchilarning soni berilgan masala sistemasining tenglamalari soniga teng, ya’ni uchga teng. Ikkilangan masala maqsad funksiyasining koeffisiyentlari berilgan masala tenglamalar sistemasining ozod hadiga, ya’ni 12, 24 va 18 sonlariga teng bo‘ladi.

Berilgan masala funksiyasining maksimumini topish talab qilingan bo‘lib, shartlar sistemasi faqat tenglamalardan iborat. Shu sababdan ikkilangan masalada maqsad funksiyasining minimumi topiladi va uning o‘zgaruvchilari ixtiyoriy qiymatlarni (jumladan, manfiy qiymatlarni ham) qabul qilishi mumkin bo‘ladi.

Berilgan masalaning har uchala o‘zgaruvchilari faqat nomanfiy qiymatlar qabul qilganligi sababli ikkilangan masala cheklamalari “≥” ko‘rininshdagi tengsizlikdan iborat bo‘ladi. Binobarin, berilgan masala uchun ikkilangan masala quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$G = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to \min$$

16.2. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \le 4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

Yechish: Bu masala shu ko‘rinishda jadvaldagi berilgan masalalarning hech biriga mos kelmaydi, lekin birinchi tengsizlikni chap va o‘ng qismlarini (–1) ga ko‘paytirib, III shakldagi simmetrik masalani hosil qilish mumkin:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge -4 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

$$F = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$$

Bu masalaga ikkilangan masala quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2 \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \le 5 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0$$

$$G = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max$$

16.3. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 11 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin.

Yechish: Bu masala ham jadvalda berilgan masalalarning hech biriga mos kelmaydi. Qaralayotgan masalani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_5 = 11 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

$$F = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$$

Bu II shakldа berilgan nosimmetrik masalaga mos keladi. Shu sababdan ikkilangan masala quyidagi koʻrinishda boʻladi:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1 \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq -4 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0$$

$$G = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to \min$$

16.4. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,6$$

$$F = x_2 - x_4 - 3x_5 \to \min$$

masala uchun ikkilangan masala tuzilsin va uning yechimi topilsin.

Yechish: Ikkilangan masalaning koʻrinishi quyidagicha boʻladi.

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3 \end{cases}$$

$$y_1 \leq 0, \quad y_2 \leq 0, \quad y_3 \leq 0$$

$$G = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \max$$

Berilgan masalani simpleks usulda yechamiz.

Bazis	C_b	P_0	0	1	0	–1	–3	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	1	1	2	0	–1	**1**	0
P_3	0	2	0	–4	1	2	–1	0
P_6	0	5	0	3	0	0	1	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		0	0	–1	0	1	3	0
P_5	–3	1	1	2	0	–1	1	0
P_3	0	3	1	–2	1	**1**	0	0
P_6	0	4	–1	1	0	1	0	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		–3	–3	–7	0	4	0	0

P_5	–3	4	2	2	1	0	1	0
P_4	–1	3	1	–2	1	1	0	0
P_6	0	1	–2	**3**	–1	0	0	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		–15	–7	1	–4	0	0	0
P_5	–3	4	2	0	1	0	1	0
P_4	–1	11/3	–1/3	0	1/3	1	0	2/3
P_2	1	1/3	–2/3	1	–1/3	0	0	1/3
$\Delta_j = F_j - C_j$		–46/3	–19/3	0	–11/3	0	0	–1/3

Berilganmasalani optimal yechimi: $X_{opt} = (0; 1/3; 0; 11/3; 4; 0)$ bo‘ladi. Aytib o‘tamizki,

$$D = \begin{pmatrix} P_5, & P_4, & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

va

$$D^{-1}B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Birinchi ikkilanish teoremasi asosida ikkilangan masalaning optimal yechimini topamiz:

$$Y_{opt} = C_b D^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{3}; & -\frac{11}{3}; & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ya’ni, ikkilangan masalaning optimal yechimi Y_{opt} ning i-komponentasini topish uchun simpleks jadvalning oxirgi satridagi boshlang‘ich bazis vektorlari ustuniga mos keluvchi sonlarga qarash kerak.

$$y_1 = -\frac{19}{3};\ y_2 = -\frac{11}{3};\ y_3 = -\frac{1}{3}.$$

16.5. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

masala berilgan bo‘lsin.

Yechish: Bu masalaga ikkilangan masala quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \le 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2 \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \le 3 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0, \quad y_4 \ge 0$$

$$G = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4 \to \max$$

Berilgan masalani simpleks usulda yechish uchun 4 ta qo‘shimcha va 1 ta sun’iy o‘zgaruvchi kiritish zarur bo‘ladi. Boshlang‘ich simpleks jadval 6 satr va 9 ustundan iborat bo‘ladi.

Ikkilangan masalani yechish uchun esa 3 ta qo‘shimcha o‘zgaruvchi kerak bo‘ladi. Uning boshlang‘ich simpleks jadvali 4 satr va 8 ustundan iborat bo‘ladi.

Bu holda albatta ikkilangan masalani yechish maqsadga muvofiqdir. Ushbu masalani simpleks usul bilan yechib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

Bazis	C_b	P_0	2	3	6	3	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
P_5	0	1	2	–1	1	2	1	0	0
P_6	0	2	2	1	1	–1	0	1	0
P_7	0	3	–1	4	–2	–2	0	0	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		0	–2	–3	–6	–3	0	0	0
P_3	6	1	2	–1	1	2	1	0	0
P_6	0	1	0	2	0	–1	–1	1	0
P_7	0	5	3	2	0	2	2	0	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		6	10	–9	0	9	6	0	0
P_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
P_2	3	1/2	0	1	0	–1/2	–1/2	1/2	0
P_7	0	4	3	0	0	3	3	–1	1
$\Delta_j = F_j - C_j$		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Ikkilangan masalaning optimal yechimi

$$Y_{opt} = (0;\ 1/2;\ 3/2;\ 0), \qquad G_{\max} = 21/2$$

bo'ladi. Berilgan masalaning yechimi esa

$$X_{opt} = (3/2;\ 9/2;\ 0), \qquad F_{\min} = 21/2.$$

Quyidagi masalalar uchun ikkilangan masalalar tuzilsin va ularning yechimi topilsin.

16.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0$

$F = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$

16.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0$

$F = 3x_1 + x_2 \to \max$

16.8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \ge 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 12 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0$

$F = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \to \min$

16.9. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0$

$F = x_1 - x_2 \to \max$

16.10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0,\quad x_4 \ge 0$

$F = 27x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 28x_4 \to \max$

16.11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0$

$F = 2x_1 - 3x_2 \to \max$

16.12. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0$

$F = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max$

16.13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \le 12 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \le 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1{,}5x_4 \le 5 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0,\quad x_4 \ge 0$

$F = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \max$

16.14. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 50 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0$

$F = -3x_1 - 4x_2 + x_3 \to \max$

16.15. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 40 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 30 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0$

$F = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$

16.16. $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12 \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15 \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32 \end{cases}$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$
$$F = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min$$

16.18. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28 \\ -3x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \; j = 1,2,3,4,5,6$$
$$F = 3x_1 + 2x_5 - 5x_6 \to \max$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$
$$F = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max$$

16.19. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$
$$F = 4x_1 + 9x_2 + 3x_3 \to \min$$

16.20. Korxona uch xil M_1, M_2 va M_3 mahsulotlar ishlab chiqarish uchun to‘rt xil A, B, C va D xom-ashyolardan foydalanadi. Ushbu xom-ashyolarning rejalashtirilgan davr uchun belgilangan zahiralari, har bir mahsulot birligiga sarflanish normalari hamda bir birlik mahsulotlarni sotishdan olinadigan daromadlar quyidagi jadvalda berilgan.

Xom-ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom-ashyo normasi**			**Xom-ashyolar zahirasi**
	M_1	M_2	M_3	
A	1	2	1	18
B	2	1	1	16
C	1	1	0	8
D	0	1	1	6
Bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad (sh.b.)	3	4	2	

a) korxonaga eng katta daromad keltiruvchi mahsulot ishlab chiqarish rejasini toping.

b) ikkilangan baholarni aniqlang va yechimni tahlil qiling.

Yechish: Dastlab masalaning matematik modelini tuzamiz. Aytaylik, x_1, x_2 va x_3 noma’lumlar mos ravishda ishlab chiqariladigan M_1, M_2 va M_3 mahsulotlar soni bo‘lsin. Masalaning matematik modeli quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}$$
$$F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$$

Ushbu masalaga ikkilangan masala tuzamiz.

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \ge 4 \\ y_1 + y_2 + y_4 \ge 2 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}$$

$$G = 18y_1 + 16y_2 + 8y_3 + 6y_4 \to \min$$

Bunda y_1, y_2, y_3 va y_4 o‘zgaruvchilar mos ravishda A, B, C va D xom-ashyolar bir birligining ikkilangan baholarini ifodalaydi.

Berilgan masalalardan birortasini simpleks usul bilan yechamiz. Bizning holda dastabki masalani yechish maqsadga muvofiqdir. Avvalo, masalaning matematik modelini quyidagi shaklga keltiramiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_7 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$$

Bu modeldagi x_4, x_5, x_6 va $x_7 -$ qo‘shimcha o‘zgaruvchilar bazis o‘zgaruvchilar bo‘lib, ular quyidagicha iqtisodiy ma’noga ega: $x_4 -$ ortib qoladigan A xom-ashyo miqdori; $x_5 -$ ortib qoladigan B xom-ashyo miqdori; $x_6 -$ ortib qoladigan C xom-ashyo miqdori; $x_7 -$ ortib qoladigan D xom-ashyo miqdori; Masalaning boshlang‘ich tayanch yechimi $X_0 = (0;0;0;18;16;8;6)$ bo‘lib, bu yechimdan optimal yechimga o‘tishni quyidagi simpleks jadvalda bajaramiz.

Bazis	C_b	P_0	3	4	2	0	0	0	0	**a.k.**
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_4	0	18	1	2	1	1	0	0	0	9
P_5	0	16	2	1	1	0	1	0	0	16
P_6	0	8	1	1	0	0	0	1	0	8
P_7	0	6	0	**1**	1	0	0	0	1	6*
$\Delta_j = F_j - C_j$		0	–3	–4*	–2	0	0	0	0	
P_4	0	6	1	0	–1	1	0	0	–2	6
P_5	0	10	2	0	0	0	1	0	–1	5
P_6	0	2	**1**	0	–1	0	0	1	–1	2*

P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1	–
$\Delta_j = F_j - C_j$		24	–3*	0	2	0	0	0	4	
P_4	0	4	0	0	0	1	0	–1	–1	–
P_5	0	6	0	0	**2**	0	1	–2	1	3*
P_1	3	2	1	0	–1	0	0	1	–1	–
P_2	4	6	0	1	1	0	0	0	1	6
$\Delta_j = F_j - C_j$		30	0	0	–1*	0	0	3	1	
P_4	0	4	0	0	0	1	0	–1	–1	
P_3	2	3	0	0	1	0	1/2	–1	1/2	
P_1	3	5	1	0	0	0	1/2	0	–1/2	
P_2	4	3	0	1	0	0	–1/2	1	1/2	
$\Delta_j = F_j - C_j$		33	0	0	0	0	1/2	2	3/2	

a) oxirgi simpleks jadvaldan berilgan masalaning optimal yechimini, ya’ni korxonaga eng katta daromad keltiruvchi yechimni topamiz.

$$X_0 = (5;3;3;4;0;0;0), \qquad F_{\max} = 33.$$

Optimal rejagako‘ra, korxona M_1 mahsulotdan 5 dona, M_2 mahsulotdan 3 dona, M_3 mahsulotdan 3 dona ishlab chiqarsa, uning maksimal daromadi 33 shartli birlikdan iborat bo‘ladi. Bunda A xom-ashyodan 4 birlik ($x_4 = 4$) ishlatilmay qoladi va B, C hamda D xom-ashyolar esa butunlay ishlatiladi.

b) oxirgi simpleks jadvaldan ikkilangan masala yechimini ham topamiz:

$$Y_0 = (0;1/2;2;3/2), \quad G_{\min} = 33.$$

Bu yechimga ko‘ra, $y_1 = 0$, ya’ni A xom-ashyoning bahosi 0 ga tengdir. Shu sababli A xom-ashyo tanqis emas. Aksincha, B, C va D xom-ashyolarning baholari mos ravishda $y_2 = 1/2 > 0$, $y_3 = 2 > 0$ va $y_4 = 3/2 > 0$ bo‘lganligi uchun ular tanqis hisoblanadi hamda ularning miqdorini oshirish, korxona optimal rejasiga binoan topilgan daromadni oshishiga olib keladi.

Ikkilanish nazariyasining uchinchi teoremasiga asosan, quyidagi xulosalarni qilish mumkin. A – xom-ashyoning miqdorini qo‘shimcha oshirish ishlab chiqarishning optimal rejasiga ta’sir qilmaydi $(y_1 = 0)$. B – xom-ashyo miqdorini bir birlikka oshirish umumiy daromadni 0,5 birlikka oshirish $(y_2 = 0{,}5)$ imkonini beradi. C – xom-ashyo miqdorini bir birlikka oshirish daromadni 2 birlikka $(y_3 = 2)$ oshishiga imkon beradi. Shunga o‘xshash, D xom-ashyo bir birlikka oshirilsa, daromad 1,5 birlikka oshadi $(y_4 = 1{,}5)$.

Ikkilangan baholarning qiymatlariga qarab yuqori tanqislikka ega xom-ashyo yoki resurslarni aniqlash mumkin. Bizning masalada C xom-ashyo eng tanqis hisoblanadi, chunki uning ikkilangan bahosi $(y_3 = 2)$ mavjud baholar ichida eng kattasidir. Yakuniy simpleks jadvaldagi ma'lumotlarga ko'ra, yana quyidagilarni aytish mumkin:

Agar ishlab chiqarishda C turdagi xom-ashyodan bir birlik ortiqcha sarflansa, ishlab chiqarish rejasi o'zgaradi. Yangi rejaga ko'ra, daromad $F_{\max} = 33 + 2 = 35$ (sh.b.) ni tashkil qiladi.

Jadvalning P_6 ustuniga qarab, quyidagilarni aniqlaymiz. Yangi rejada M_2 mahsulotni ishlab chiqarish bir birlikka oshadi, M_1 mahsulot hajmi o'zgarmaydi va M_3 mahsulot esa bir birlikka kamayadi. Buning natijasida A xom-ashyodan bir birlik ko'proq sarflanadi. Shu kabi xulosalarni P_5 va P_7 ustunlarga nisbatan ham aytish mumkin.

Ikkilangan optimal baholarni $y_1 = 0;\ y_2 = 0,5;\ y_3 = 2;\ y_4 = 1,5$ ikkilangan masala shartlariga qo'ysak,

$$\begin{cases} 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3 \\ 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 4 \\ 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$$

shartlar tenglikka aylanadi. Bu esa korxona tomonidan har uchala mahsulotni ham ishlab chiqarish maqsadga muvofiq ekanligini bildiradi. Uchala M_1, M_2 va M_3 mahsulotlarni ishlab chiqarish berilgan masalaning optimal yechimida ham nazarda tutiladi.

16.21. Korxona 4 xil mahsulotni ishlab chiqarishi uchun 3 tur resurslardan foydalanadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishda sarf qilinadigan resurslar normasi, resurslarning zahiralari, hamda bir birlik mahsulot narxi quyidagi jadvalda berilgan.

Resurs turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan resurslar normasi**				**Resurslar zahirasi**
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Bir birlik mahsulotning narxi	9	6	4	7	

Ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

I tur resurs zahirasi 60 birlikka kamaytirilib, II va III tur resurs zahiralari 120 va 160 birlikka oshirilganda mahsulot ishlab chiarishning eng katta daromadining o‘zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

16.22. Korxona har xil A, B, C buyumlarni ishlab chiqarishi uchun 3 tur xom-ashyolardan foydalanadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishda sarfqilingan xom-ashyolar normasi, xom-ashyolar zahiralari, hamda bir birlik mahsulotdan keladigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom-ashyolar normasi (kg)**			**Xom-ashyolar zahiralari (kg)**
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Bir birlik buyumdan olinadigan daromad	9	10	16	

a) ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) I, II va III tur xom-ashyolar zahiralari mos ravishda 30, 40 va 50 kgga oshirilganda mahsulot ishlab chiqarishning eng katta daromadining o‘zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

16.23. Uch xil A, B, C mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom-ashyolardan foydalanadi. Har bir xom-ashyodan mos ravishda 180, 210 va 236 kg hajmdan ko‘p bo‘lmagan miqdorda ishlatish mumkin. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun har bir tur xom-ashyolar sarfi, hamda bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Xom-ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom-ashyolar normasi (kg)**		
	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Bir birlik buyumdan keladigan daromad	10	14	12

a) ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) I, II va III tur xom-ashyolar zahiralari mos ravishda 30, 40 va 50 kgga oshirilganda maqsad funksiya maksimumining o‘zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

16.24. Korxona ikki xil M_1 va M_2 mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun A va B xom-ashyolardan foydalanadi. Bir birlik M_1 va M_2 xil mahsulotga sarf qilinadigan turli xom-ashyolar normasi, mahsulotning bir birligidan olinadigan daromad, hamda xom-ashyolar zahirasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xom-ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom-ashyo normasi**		**Xom-ashyolar zahirasi**
	M_1	M_2	
A	2	3	9
B	3	2	13
Bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad	3	4	

Ish tajribasi shuni ko‘rsatadiki, sutkasiga M_1 mahsulotga bo‘lgan talab M_2 mahsulotga bo‘lgan talabdan bir birlikdan ko‘p bo‘lmaydi. Bundan tashqari sutkasiga M_2 mahsulotga bo‘lgan talab 2 birlikdan ko‘p bo‘lmaydi.

a) mahsulot ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) ikkilangan baholarni aniqlang va yechimni tahlil qiling.

17-amaliy mashg‘ulot. Iqtisodiy masalalarning yechimlarini tahlil qilish

ChPMni optimal yechimiga korxonada vujudga keladigan real jarayonlar jiddiy ta’sir qiladi. Bunday iqtisodiy jarayonlarga quyidagilar kiradi:

1) resurslar zahirasining o‘zgarishi;

2) mahsulot ishlab chiqarishda yangi texnologik usulni qo‘llash natijasida xom ashyolar sarflanishining kamayishi;

3) korxona narx siyosatida yuz beradigan o‘zgarish;

4) yangi tur mahsulot ishlab chiqarishni rejalashtirish va h.k.

Yuqorida keltirilgan jarayonlarni optimal yechimga bo‘lgan ta’sirini tahlil qilishda ikkilanish nazariyasining ikkinchi teoremasidan foydalaniladi.

Teorema. Agar berilgan masalaning ***i-*** chegaralovchi shartilari uning optimal yechimida qat’iy tengsizlikka aylansa, u holda ikkilangan masalaning optimal yechimida ***i-*** komponenta nolga teng bo‘ladi; agar ikkilangan masalaning optimal yechimida ***i-*** komponenta musbat bo‘lsa, u holda berilgan masalaning ***i-*** sharti optimal yechimda tenglikka aylanadi.

Bundan ko‘rinadiki: optimal yechimning bahosi – resurslar tanqisligi darajasining o‘lchovidir. Mahsulot ishlab chiqarishda to‘la ishlatiladigan xom ashyo «tanqis (difisit) xom ashyo» deyiladi. Bunday xom ashyoni oshirib sarf qilish korxonada mahsulot ishlab chiqarish darajasini oshiradi. Mahsulot ishlab chiqarishda to‘la ishlatilmaydigan xom ashyo «notanqis (difisit bo‘lmagan) xom ashyo» hisoblanadi. Bunday xom ashyolarni ikkilangan bahosi nolga teng bo‘ladi. Ularning miqdorini oshirish ishlab chiqarish rejasini oshishiga ta’sir qilmaydi.

Shunday qilib:

1) ikkilangan baholar resurslarning tanqislik o‘lchovi bo‘ladi. Ikkilangan masala optimal yechimining y_i komponentasi i - resurs zahirasining bahosi bo‘ladi; y_i qancha katta bo‘lsa, resurs tanqisligi shuncha yuqori ekanligini ko‘rsatadi. Notanqis (ortiqcha) resurs uchun $y_i=0$ bo‘ladi.

2) ikkilangan baholar resurslar zahirasining o‘zgarishi maqsad funksiyaga qanday ta’sir qilishini ko‘rsatadi:

$$\Delta F = y_i \bullet \Delta b_i$$

bunda: y_i – i - resursning ikkilangan bahosi;

Δb_i - i -resurs zahirasining orttirmasi;

ΔF - maqsad funksiyasining o‘zgarishi.

17.1. Korxona ikki xil M_1 va M_2 mahsulotlar ishlab chiqarish uchun ikki tur ***A*** va **B** xom ashyolardan foydalanadi. Bir birlik M_1 va M_2 xil mahsulotga sarf qilinadigan turli xom ashyolar normasi, mahsulotning bir birligidan olinadigan daromad, hamda xom ashyolar zahirasi quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xom ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom ashyo normasi**		**Xom ashyolar zahirasi**
	M_1	**M_2**	
A	2	3	9
B	3	2	13
Bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad	3	4	

Ish tajribasi shuni ko‘rsatadiki, sutkasiga M_1 mahsulotga bo‘lgan talab M_2 mahsulotga bo‘lgan talabdan bir birlikdan ko‘p bo‘lmaydi. Bundan tashqari sutkasiga M_2 mahsulotga bo‘lgan talab 2 birlikdan ko‘p bo‘lmaydi.

Mahsulot ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

Yechish: Masalaning matematik modeli:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max .$$

Ikkilangan masala quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3, \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 + y_4 \ge 4, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0,$$

$$G = 9y_1 + 13y_2 + y_3 + 2y_4 \to min.$$

Berilgan masalaning yechimini topish maqsadga muvofiqdir. Bu masalani simpleks usulda yechamiz.

B	C_b	P_0	3	4	0	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	0	9	2	3	1	0	0	0
P_4	0	13	3	2	0	1	0	0
P_5	0	1	1	-1	0	0	1	0
P_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		0	-3	-4	0	0	0	0
P_3	0	7	0	5	1	0	-2	0
P_4	0	10	0	5	0	1	-3	0
P_1	3	1	1	-1	0	0	1	0
P_6	0	2	0	1	0	0	0	1
Δ_j		3	0	-7	0	0	3	0
P_2	4	7/5	0	1	1/5	0	-2/5	0
P_4	0	3	0	0	-1	1	-1	0
P_1	3	12/5	1	0	1/5	0	3/5	0
P_6	0	3/5	0	0	-1/5	0	2/5	1
Δ_j		64/5	0	0	7/5	0	1/5	0

Natijada ikkala masala uchun optimal yechimlarni topamiz. Berilgan masala uchun:

X_{opt}=(12/5; 7/5) **F_{max}=64/5=12,8.**

Ikkilangan masala uchun

Y_{opt}=(7/5; 0; 1/5; 0) **G_{min}=64/5=12,8**

bo‘ladi.

Ikkilangan masala yechimida $\mathbf{y_2 = y_4 = 0}$, binobarin, **II** va **IV** resurslar notanqis resurslardir. **II** resurs (**B** xom ashyoning) ortiqchasi 3 birlikni ($\mathbf{x_4=3}$) , **IV** resursning ortiqchasi esa 0,6 birlikni ($\mathbf{x_6=0,6}$) tashkil qiladi.

Ikkilangan masala yechimida $\mathbf{y_1 = 7/5}$ va $\mathbf{y_3 = 1/5}$. Demak, **I** va **III** resurslar to‘la ishlatilgan, ya’ni ularning tanqis resurslar ekanligini ko‘rsatadi. Qaralayotgan masalada **A** tur xom ashyo zahirasi $\Delta b_1 = 1$ birlikka oshirilsa, maqsad funksiyasining qiymati 1,4 birlikka oshadi:

$$\Delta F = y_1 \cdot \Delta b_1 = \frac{7}{5} \cdot 1 = 1{,}4.$$

Agar ishlab chiqarishda **A** tur xom ashyodan bir birlik ortiqcha sarf qilinsa, uning ishlab chiqarish rejasi o‘zgaradi. Shu yangi rejaga muvofiq mahsulot ishlab chiqarilsa, daromad

$$\mathbf{F_{max} = 12{,}8 + 1{,}4 = 14{,}2}$$

ni tashkil qiladi.

Jadvalni $\mathbf{A_4}$ ustuniga qarab xulosa chiqaramiz:

Yangi rejada $\mathbf{M_1}$ va $\mathbf{M_2}$ mahsulotlarning ishlab chiqarilishi **1/5=0,2** birlikka oshadi. Buning natijasida **A** tur xom ashyoni sarf qilishi bir birlikka ko‘proq bo‘ladi:

$$\frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 = 1.$$

Xuddi shuningdek, **III** resurs $\Delta b_3 = 1$ birlikka oshirilsa, ya’ni sutkasiga $\mathbf{M_1}$ mahsulotga bo‘lgan talab $\mathbf{M_2}$ mahsulotga qaraganda **2** birlikdan ko‘p bo‘lmasligi qaralsa, maqsad funksiyaning qiymati $\Delta F = y_3 \cdot \Delta b_3 = \frac{1}{5} \cdot 1 = 0{,}2$ birlikka oshadi.

Jadvalni $\mathbf{A_5}$ ustuniga qarab xulosa chiqaramiz. Yangi rejada $\mathbf{M_1}$ mahsulotni ishlab chiqarishi **3/5** birlikka oshadi va $\mathbf{M_2}$ mahsulotniki esa **2/5** birlikka kamayadi. Natijada **III** tur resurs $1 \cdot \frac{3}{5} - 1 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = 1$ birlikka ko‘proq bo‘ladi.

Ikkilangan optimal baholarni ikkilangan masala shartlariga qo‘yamiz:

$$2 \cdot \frac{7}{5} + 3 \cdot 0 + \frac{1}{5} = 3,$$

$$3 \cdot \frac{7}{5} + 2 \cdot 0 - \frac{1}{5} + 0 = 4,$$

shartlar tenglikka aylandi, ya’ni korxona har ikkala mahsulotni ham ishlab chiqarsa maqsadga muvofiq bo‘ladi. Bu ikkala mahsulotning ishlab chiqarilishi berilgan masalaning optimal yechimida ham nazarda tutilgan.

Mustaqil yechish uchun masalalar

17.2. Korxona 4 xil mahsulotni ishlab chiqarishi uchun 3 tur resurslardan foydalanadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishda sarf qilinadigan resurslar normasi, resurslarning zahiralari, hamda bir birlik mahsulot narxi quyidagi jadvalda berilgan.

Resurs turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan resurslar normasi**				**Resurslar zahirasi**
	A	B	C	D	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Bir birlik mahsulotning narxi	9	6	4	7	

Ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

I tur resurs zahirasi **60** birlikka kamaytirilib, **II** va **III** tur resurs zahiralari **120** va **160** birlikka oshirilganda mahsulot ishlab chiarishning eng katta daromadining o‘zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

17.3. Korxona har xil **A, B, C** buyumlarni ishlab chiqarishi uchun 3 tur xom ashyolardan foydalanadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarishda sarf qilingan xom ashyolar normasi, xom ashyolar zahiralari, hamda bir birlik mahsulotdan keladigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom ashyolar normasi (kg)**			**Xom ashyolar zahiralari (kg)**
	A	**B**	**C**	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Bir birlik buyumdan olinadigan daromad	9	10	16	

a) ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) I, II va **III** tur xom ashyolar zahiralari mos ravishda **30, 40** va **50** kg ga oshirilganda mahsulot ishlab chiqarishning eng katta daromadining o‘zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

17.4. Uch xil **A, B** va **C** mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun uch xil xom ashyolardan foydalanadi. Har bir xom ashyodan mos ravishda **180, 210** va **236** kg hajmdan ko‘p bo‘lmagan miqdorda ishlatish mumkin. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun har bir tur xom ashyolar sarfi, hamda bir birlik mahsulotdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo turi	**Bir birlik mahsulotga sarflanadigan xom ashyolar normasi (kg)**		
	A	B	C
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Bir birlik buyumdan keladigan daromad	10	14	12

a) ishlab chiqarishning eng katta daromad beradigan rejasi tuzilsin.

b) I, II va **III** tur xom ashyolar zahiralari mos ravishda **30, 40** va **50** kg ga oshirilganda maqsad funksiya maksimumining o‘zgarishi tahlil asosida aniqlansin.

18-amaliy mashg‘ulot. Transport masalasi

18.1. Quyidagi transport masalasining boshlang‘ich bazis yechimini “shimoliy-g‘arbiy burchak” usuli bilan toping.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**				**Zahirahajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Talab hajmi	150	120	80	50	

Yechish: Masalaning shartlarini quyidagi hisoblash matrisasi ko‘rinishda yozamiz.

b_j / a_i	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	2
170	5	8	12	7

Bu yerda a_i-ta'minotchilardagi mahsulot zahirasini, b_j-iste'molchilarning mahsulotga bo‘lgan talabini bildiradi.

Shimoliy-g‘arbiy burchakdagi (1;1) katakka $x_{11} = \min(100;150) = 100$ ni joylashtiramiz va 1-qatorni o‘chiramiz hamda b_1 ni $b_1' = 150 - 100 = 50$ ga almashtiramiz. So‘ngra (2;1) katakka $x_{21} = \min(130,50) = 50$ ni joylashtiramiz. Bu holda 1-ustun o‘chiriladi va 2-qatordagi a_2 ni $a_2' = 130 - 50 = 80$ ga almashtiramiz. Keyin (2;2) katakka o‘tib $x_{22} = \min(80,120) = 80$ ni yozamiz. Shunday yo‘l bilan (3;2) katakka $x_{32} = \min(170,40) = 40$ ni, (3;3) katakka $\min(130,80) = 80$ ni va (3;4) katakka $\min(50,50) = 50$ ni yozamiz. Natijada rejalar matrisasini hosil qilamiz:

b_j / a_i	150	120	80	50
100	3 100	5	7	11
130	1 50	4 80	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

topilgan boshlang‘ich bazis yechim quyidagidan iborat:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

Tuzilgan rejaga mos keluvchi xarajatni hisoblaymiz.

$$F(X) = 100 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 80 \cdot 4 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2300.$$

18.2. Yuqorida berilgan transport masalasining boshlang‘ich bazis yechimini “minimal xarajatlar” usuli bilan toping.

Yechish: Masalaning shartlarini quyidagi hisoblash matrisasi ko‘rinishda yozamiz.

b_j / a_i	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	2
170	5	8	12	7

So‘ngra $\min\limits_{i,j} c_{ij} = c_{21} = 1$ ni topib (2;1) katakka $x_{21} = \min(130,150) = 130$ ni yozamiz. 2-ta’minotchida mahsulot qolmagani uchun ikkinchi qatorni o‘chiramiz, b_1 ning qiymatini esa $b_1' = 150 - 130 = 20$ ga almashtiramiz. Ikkinchi qadamda qolgan xarajatlar ichida eng kichigini topamiz:

$$\min_{i,j} c_{ij} = c_{11} = 3$$

bo‘lgani uchun (1;1) katakka $x_{11} = \min(20,100) = 20$ ni yozamiz. Bu holda birinchi ustun ham o‘chiriladi va a_1 ning qiymati $a_1' = 100 - 20 = 80$ ga almashadi. Shunday yo‘l bilan 3-qadamga (1;2) katakka $x_{12} = 80$ ni, 4-qadamda (3;4) katakka $x_{34} = 50$ ni, 5-qadamda (3;2) katakka $x_{32} = 40$ ni va 6-qadamda (3;3) katakka $x_{33} = 80$ ni yozamiz. Natijada quyidagi rejalar matrisasiga ega bo‘lamiz.

b_j / a_i	150	120	80	50
100	3 20	5 80	7	11
130	1 130	4	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

Bu holda bazis yechim quyidagicha bo‘ladi.

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

Bunda ham band katakchalar soni $n + m - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ ga teng bo‘ldi, ya’ni tuzilgan boshlang‘ich bazis yechim xosmas bazis yechim bo‘ladi. Bunday yechim tuzilayotganda yo‘l xarajati inobatga olinadi. Shu sababdan tuzilgan rejaga mos keluvchi transport xarajati ko‘pincha “shimoliy-g‘arbiy burchak” usuldagi xarajatdan kichik va optimal yechimga yaqinroq bo‘ladi.

Haqiqatan ham

$$F(X) = 20 \cdot 3 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2200.$$

Boshlang'ich bazis yechim qurishning yana boshqa usullari ham mavjud.

Masalan, "ustundagi minimal xarajatlar usuli", "qatordagi minimal xarajatlar" usuli va boshqalar.

Bunday usullar yordamida transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini topish mumkin. Odatda optimal yechimga yaqin bo'lgan boshlanqich bazis yechimni topishga yordam beruvchi usullardan foydalangan ma'qul.

Tuzilgan boshlang'ich bazis yechimni optimal yechimga aylantirish uchun potensiallar usuli deb ataluvchi algoritmdan foydalanish mumkin.

Quyidagi masalalarning matematik modelini tuzing hamda "shimoliy-g'arbiy burchak" usuli va "minimal xarajatlar" usulidan foydalanib boshlang'ich bazis yechimlarini toping.

18.3.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	1	4	1	90
A_2	2	3	3	2	55
A_3	3	2	3	2	80
Talab hajmi	70	40	70	45	

18.4.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**			
	75	80	60	85
100	6	7	3	5
150	1	2	5	6
50	8	10	20	1

18.5.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	120	160	120
90	9	8	10
85	11	12	8
75	7	10	13
150	12	7	10

18.6.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	400	380	120
330	6	5	3
270	5	9	8
300	8	3	7

18.7.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	300	300	220
270	5	3	2
290	1	6	7
260	3	1	3

18.8.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	450	450	450
500	7	9	3
370	3	7	9
480	9	3	5

18.9.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	240	240	240
278	8	9	7
192	7	8	9
250	9	7	8

18.10.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	180	360	360
150	7	6	5
180	5	7	6
270	6	5	7
300	7	8	9

18.11.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	300	200	200
125	10	9	8
190	8	10	9
210	9	7	10
175	7	8	7

18.12.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	500	450	350
310	6	7	9
290	9	8	6
300	5	9	4
400	7	5	7

18.13. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini potensiallar usulidan foydalanib toping.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Iste'molchilarning talabi	150	120	80	50	

Yechish: Masalaning berilganlaridan foydalanib hisoblash jadvalini tuzamiz va boshlang'ich bazis rejani "minimal xarajatlar" usulidan foydalanib topamiz.

1-jadval

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 20	5 $80-\theta$	7 θ 2	11 –7	$U_1=0$
130	1 130	4 –1	6 –1	2 0	$U_2=-2$

170	5 1	8 $40+\theta$	12 $80-\theta$	7 50	$U_3=3$
V_j	$V_1=3$	$V_2=5$	$V_3=9$	$V_4=4$	$\theta=80$

Topilgan boshlang‘ich reja

$$X_0=\begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Ushbu rejaga mos kelgan umumiy transport xarajati

$$F(X_0)=2220.$$

Topilgan boshlang‘ich bazis rejani optimallikka tekshiramiz. Buning uchun ta’minotchilarga mos ravishda U_1, U_2, U_3 iste’molchilarga mos ravishda V_1, V_2, V_3, V_4 potensiallarni mos qo‘yamiz hamda band kataklar uchun potensial tenglamalar tuzamiz:

$$U_1+V_1=3; \quad U_1+V_2=5; \quad U_2+V_1=1;$$
$$U_3+V_2=8; \quad U_3+V_3=12; \quad U_3+V_4=7.$$

Hosil bo‘lgan sistemaning aniq bir yechimini topish uchun $U_1=0$ deb qabul qilamiz va qolgan potensiallarning son qiymatini topamiz.

$$U_1=0; \quad U_2=-2; \quad U_3=3;$$
$$V_1=3; \quad V_2=5; \quad V_3=9; \quad V_4=4.$$

Topilgan potensiallarning son qiymatini 1-jadvalning o‘ng tomoni va pastiga ($m+1$ – qator va $n+1$ – ustunga) joylashtiramiz. Ushbu hisob kitoblarni jadvalning o‘zida bajarsa ham bo‘ladi.

Endi bo‘sh katakchalarda optimallik baholarini hisoblaymiz:

$$\Delta_{13}=9+0-7=2; \quad \Delta_{14}=0+4-11=-7;$$
$$\Delta_{22}=5-2-4=-1; \quad \Delta_{23}=9-2-6=1;$$
$$\Delta_{24}=4-2-2=0; \quad \Delta_{31}=3+3-5=1.$$

Topilgan sonlarni 1-jadvaldagi bo‘sh kataklarning pastki chap burchagiga joylashtiramiz. Optimallik baholari orasida musbatlari ham bor:

$$\Delta_{13}=2>0; \quad \Delta_{23}=1>0; \quad \Delta_{31}=1>0.$$

Demak, topilgan bazis reja optimal reja emas. Unda

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\Delta_{ij}=\max(2;1;1)=2$$

shartni qanoatlantiruvchi (A_1,B_3) katakchaga $x_{13}=\theta$ sonni kiritamiz va to‘rtburchakli

$$(A_1,B_3)\to(A_3,B_3)\to(A_3,B_2)\to(A_1,B_2)\to(A_1,B_3)$$

yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymatini topamiz:

$$\theta=\min(80;80)=80.$$

Yuqoridagi formulalar yordamida yangi X_1 bazis rejani aniqlaymiz. X_1 xos reja bo‘lmasligi uchun (A_2,B_2) va (A_3,B_3) katakchalardan bittasini, ya’ni xarajati katta bo‘lgan (A_3,B_3) ni bo‘sh katakchaga aytantirib, (A_2,B_2) katakchadagi taqsimotni esa 0 ga teng, deb qabul qilmiz va bu katakchani band katakcha deb qaraymiz. Bu holda yangi bazis reja quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

2-jadval

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 $20-\theta$	5 $0-\theta$	7 80	11 -7	$U_1=0$
130	1 130	4 -1	6 -1	2 0	$U_2=-2$
170	5 θ 1	8 $120-\theta$	12 -2	7 50	$U_3=3$
V_j	$V_1=3$	$V_2=5$	$V_3=7$	$V_4=4$	$\theta=20$

Jadvaldan foydalanib band katakchalarga mos keluvchi potensial tenglamalar tuzib, potensiallarning son qiymatini topamiz:

$$U_1+V_1=3;\quad U_1+V_2=5;\quad U_1+V_3=7;$$
$$U_2+V_1=1;\quad U_3+V_2=8;\quad U_3+V_4=7;$$
$$U_1=0;\quad U_2=-2;\quad U_3=3;$$
$$V_1=3;\quad V_2=5;\quad V_3=7;\quad V_4=4.$$

Endi bo‘sh katakchalar uchun optimallik baholarini tuzamiz:

$$\Delta_{14}=0+4-11=-7;\quad \Delta_{23}=-2+7-6=-1;$$
$$\Delta_{22}=-2+5-4=-1;\quad \Delta_{31}=3+3-5=1;$$
$$\Delta_{24}=-2+4-2=0;\quad \Delta_{33}=3+7-12=-2.$$

Bundan ko‘rinadiki, (A_3,B_1) katakchadagi optimallik bahosi $\Delta_{31}=1>0$. Demak, X_1 reja optimal reja emas. (A_3,B_2) katakchaga $x_{31}=\theta$ ni kiritib, bazis rejani optimal rejaga yaqinlashtirish mumkin. (A_3,B_2) katakchaga θ ni kiritib, uni band katakchaga aytantiramiz va

$$(A_3,B_1)\to(A_3,B_2)\to(A_1,B_2)\to(A_1,B_1)$$

to‘rtburchakli yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymati 20 ga teng bo‘ladi. Uning yordamida yangi X_2 bazis rejani aniqlaymiz.

3-jadval

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 -1	5 20	7 80	11 -7	$U_1=0$
130	1 $130-\theta$	4 0	6 0	2 θ 1	$U_2=-1$
170	5 $20+\theta$	8 100	12 -2	7 $50-\theta$	$U_3=3$
V_j	$V_1=2$	$V_2=5$	$V_3=7$	$V_4=4$	$\theta=50$

$$X_2=\begin{pmatrix}0&20&80&0\\130&0&0&0\\20&100&0&50\end{pmatrix};\qquad F(X_2)=2040.$$

Yangi X_2 bazis rejani optimallikka tekshiramiz. Buning uchun potensiallarning son qiymatini va bo‘sh kaktaklardagi optimallik baholarini jadvalning o‘zida hisoblaymiz.

Jadvaldan ko‘riladiki, $\Delta_{24}=1>0$. Demak, X_2 bazis reja optimal reja bo‘lmaydi. (A_3,B_4) katakchaga θ sonni kiritib,

$$(A_2,B_4)\to(A_3,B_4)\to(A_3,B_1)\to(A_2,B_1)$$

yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymatini topamiz.

$$\theta=\min(130;50)=50$$

qiymatni topamiz va undan foydalanib yangi bazis yechimni topamiz.

4-jadval

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	3 -1	5 20	7 80	11 -8	$U_1=0$

130	1 80	4 0	6 0	2 50	$U_2 = -1$
170	5 70	8 100	12 –2	7 –1	$U_3 = 3$
V_j	$V_1 = 2$	$V_2 = 5$	$V_3 = 7$	$V_4 = 3$	

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad F(X_4) = 1990.$$

X_4 xosmas bazis yechim. Bu yechim optimal yechim bo‘ladi, chunki u optimallik shartlarini qanoatlantiradi:

$$\Delta_{11} = (U_1 + V_1) - c_{11} = -1; \quad \Delta_{23} = (U_2 + V_3) - c_{23} = 0;$$
$$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - c_{14} = -8; \quad \Delta_{33} = (U_3 + V_3) - c_{33} = -2;$$
$$\Delta_{22} = (U_2 + V_2) - c_{22} = 0; \quad \Delta_{34} = (U_3 + V_4) - c_{34} = -1.$$

Demak,

$$X_4 = X_{opt}; \qquad F_{\min} = F(X_4) = 1990.$$

18.14. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yopiq modelli transport masalasiga aylantiring va uning optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	3	3	3	2	2
4	3	2	1	2	3
5	5	4	3	1	1
7	4	2	3	4	5

Bu masalada

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 16 > \sum_{j=1}^{5} b_j = 13.$$

Shuning uchun talabi $b_6 = 16 - 13 = 3$ bo‘lgan “soxta iste’molchi”ni kiritamiz va rejalar jadvalini quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

b_j \ a_i	3	3	3	2	2	3
4	3	2	1	2	3	0
5	5	4	3	1	1	0
7	4	2	3	4	5	0

Hosil bo‘lgan yopiq modelli masalani potensiallar usulini qo‘llab yechamiz va 7-qadamda quyidagi optimal yechimni topamiz:

b_j \ a_i	3	3	3	2	2	3	U_i
4	3 -3	2 1	1 3	2 -1	3 -2	0 0	$U_1 = 0$
5	5 -5	4 -2	3 -2	1 2	1 2	0 1	$U_2 = 0$
7	4 3	2 2	3 -2	4 -3	5 -4	0 2	$U_3 = 0$
V_j	$V_1 = 4$	$V_2 = 2$	$V_3 = 1$	$V_4 = 1$	$V_5 = 1$	$V_6 = 0$	

Javob:

$$x_{12} = 1; \quad x_{13} = 3; \quad x_{24} = 2; \quad x_{25} = 2;$$
$$x_{26} = 1; \quad x_{31} = 3; \quad x_{32} = 2; \quad x_{36} = 2.$$
$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad F(X_{opt}) = 13.$$

Quyidagi transport masalalarining boshlang‘ich bazis yechimlarini hamda optimal yechimi potensiallar usuli bilan topilsin.

18.15.

Ta’minotchilar	**Iste’molchilar**				**Zahra hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	1	9	7	110
A_2	4	6	2	12	190
A_3	3	5	8	9	90
Talab hajmi	80	60	170	80	

18.16.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100
Talab hajmi	40	60	80	60	

18.17.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Talab hajmi	30	30	10	20	

18.18.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Talab hajmi	110	90	120	80	150	

18.19.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	230
A_3	3	8	1	2	160
Talab hajmi	130	220	90	70	

18.20.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Talab hajmi	80	100	80	100	

18.21.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	70
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	80
Talab hajmi	80	50	50	110	

18.22.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Talab hajmi	95	85	100	160	

18.23.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	3	5	2	180
A_2	4	1	6	7	140
A_3	1	9	4	3	200
Talab hajmi	100	60	280	80	

18.24.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	1	3	3	40
A_2	2	6	4	7	40
A_3	3	3	6	4	40
Talab hajmi	20	30	20	50	

18.25.

b_j / a_i	35	25	20
20	5	2	3
30	8	6	7
20	2	5	4

18.26.

b_j / a_i	60	60	60
50	5	7	6
40	6	3	1
110	1	9	11

18.27.

b_j / a_i	100	110	120	90
115	9	8	10	11
125	11	10	9	8
160	3	7	5	6

18.28.

b_j / a_i	90	90	90	90
100	2	7	9	10
120	3	3	6	8
180	4	2	7	4

18.29.

b_j / a_i	60	90	40	60
50	8	6	5	4
70	3	4	5	6
70	6	7	8	9
90	9	6	5	4

18.30.

b_j / a_i	120	45	90	55
110	2	5	3	6
100	5	2	7	9
90	9	6	5	3

18.31.

b_j / a_i	35	25	20
20	5	2	3
30	3	5	2
20	2	5	3

18.32.

b_j / a_i	120	120	120
150	2	1	3
140	1	3	2
110	3	2	4

18.33.

b_j / a_i	45	75	90	90
80	1	5	3	2
120	6	3	2	1
120	2	6	5	3

18.34.

b_j \ a_i	150	170	80	70
117	5	6	3	1
123	1	4	7	8
160	6	9	5	4

18.35. 3 ta omborxonaning har birida mos ravishda 750, 350 va 200 tonna bir jinsli mahsulot joylashgan. Ushbu mahsulotlarni talablari mos ravishda 300, 400, 250 va 350 tonna bo‘lgan 4 ta do‘konga yuborish kerak. Har bir omborxonadan har bir do‘konga bir tonna mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari quyidagi xarajatlar matrisasi ko‘rinishida berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Omborxonalardan do‘konlarga minimal xarajat sarf qilib mahsulot tashish rejasini aniqlang.

18.36. Uchta zavodda ishlab chiqarilgan betonlar 4 ta qurilish ob’ektiga yuboriladi. Har bir zavodning ishlab chiqarish quvvati, har bir qurilish ob’ektining betonga bo‘lgan talabi hamda har bir zavoddan har bir qurilish ob’ektiga bir tonna betonni tashish xarajatlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Beton zavodlari	**Qurilish ob’ektlari**				**Zavodlarning i/ch. quvvati**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	13	11	15	500
A_2	12	21	16	14	850
A_3	10	16	14	15	600
Betonga bo‘lgan talab hajmi	400	550	700	300	

Umumiy transport xarajatlarini minimallashtiruvchi tashish rejasini aniqlang.

18.37. 3 ta omborxonada guruch saqlanadi. Ulardan birinchisida 135 tonna, ikkinchi va uchinchisida mos ravishda 165 va 160 tonnadan guruch zaxirasi mavjud. Bu guruchlar 4 ta do‘konga yuboriladi. Birinchi do‘konning guruchga bo‘lgan talabi 110 tonna, ikkinchisiniki 120 t., uchinchi va to‘rtinchi do‘konlarning talabi mos ravishda 110 tonna va 120 tonnani tashkil qiladi. 1 tonna mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari matrisasi quyidagi ko‘rinishga ega.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Qaysi omborxonani qaysi do‘koniga biriktirilganda sarf qilinadigan umumiy transport xarajatlari minimal bo‘ladi?

18.38. Uchta fermer xo‘jaligidan 4 ta paxta tozalash zavodlariga paxta yuboriladi. Fermer xo‘jaliklardagi paxta zaxirasi, paxta tozalash zavodlarining talabi va bir tonna paxtani tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari quyidagi jadvalda aks ettirilgan.

Fermer xo‘jaliklar	**Paxta tozalash zavodlari**				**Paxta zahirasi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	6	125
A_2	2	5	6	3	155
A_3	5	2	3	5	150
Paxtaga bo‘lgan t/h.	100	110	105	115	

Xo‘jaliklardagi paxtani paxta tozalash zavodlariga optimal taqsimlash rejasini toping.

18.39. Uchta fermer xo‘jaligidan 4 ta omborga kartoshka tashish rejalashtirilmoqda. Fermer xo‘jaliklardagi kartoshka zahirasi, omborlarining kartoshkani saqlash imkoniyati (quvvati) va bir tonna kartoshkani tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Fermer xo‘jaliklari	**Omborlar**				**Kartoshka zahirasi (t)**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	4	5	8	145
A_2	4	7	8	5	175
A_3	7	4	5	7	170
Omborxonalar quvvati (t)	120	130	115	125	

Fermar xo‘jaliklaridan omborxonalarga kartoshkani optimal tashish rejasini toping.

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

1. Mike Rosser. Basic mathematics for economists. London and New York. 1993, 2003.
2. M.Harrison and P.Waldron Mathematics for economics and finance. London and New York. 2011.
3. M.Hoy, J.Livernois et.al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London&Cambridge. 2011.
4. Robert M. Leekley, Applied Statistics for Businiess and Economics, USA. 2010.
5. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright, Fundamental Methods of Mathematical Economics, New York. 2005.
6. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.
7. David G. Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming, Springer. 2008.
8. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O‘quv qo‘llanma. “Iqtisod-moliya”. 2017. 386 b.
9. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. “Iqtisod-moliya”. 2017. 746 с.
10. Safayeva Q., Shomansurova F. “Matematik programmalashtirish fanidan mustaqil ishlar majmuasi”. O‘quv qo‘llanma. T.: 2012.
11. Safayeva Q., Mamurov I., Shomansurova F. “Matematik programmalash fanidan masalalar to‘plami”. T.: 2013.

MUSTAQIL TA'LIM MASHG'ULOTLARI

“CHIZIQLI ALGEBRA ASOSLARI VA UNING TATBIQI”
MODULI BO`YICHA MUSTAQIL TA’LIM TOPSHIRIQLARI

Topshiriq

1-misolda berilgan matritsalarning chiziqli kombinatsiyasini toping.
2-misolda matritsalar ko’paytmasi AB va BA ni toping (agar ular mavjud bo’lsa).
3-misolda $f(A)$ matritsali ko’phadning qiymatini toping.

1-variant

1. $2A^T+3B,\ A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 6 & 0 & -2\\ 7 & 1 & 8\end{pmatrix}.$

3. $f(x)=-2x^2+5x+9,\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$

2-variant

1. $A^T-3E,\ A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$

3. $f(x)=3x^3+x^2+2,\ A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$

3-variant

1. $4A-5B^T,\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\5\\2\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=2x^3-3x^2+5$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$.

4-variant

1. $3A^T+4B$, $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & -5\\-2 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\-4 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 1\\7 & -1 & 0 & 4\\8 & -2 & 1 & 5\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6\\-1 & -3\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=3x^2-5x+2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & -1\\-2 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

5-variant

1. $3A-2B^T$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^3-6x^2+9x+4$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & -1\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

6-variant

1. $2B-5A^T$, $A=\begin{pmatrix}0 & -6\\2 & 4\\4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & 10\\-15 & 10 & 0\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=2x^2-3x+1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7-variant

1. A^T-2E, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=3x^2+2x+5$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8-variant

1. $4A^T-7B$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=2x^3-x^2+3$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

9-variant

1. $5A^T-3B$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2-3x+2,\ A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}.$

10-variant

1. $3A+2B^T,\ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}.$

3. $f(x)=4x^3-2x^2+3x-2,\ A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$

11-variant

1. $A^T-3B,\ A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 2 & -4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 5 & 4 & 4\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}.$

3. $f(x)=3x^2+5x-2,\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix}.$

12-variant

1. $7A^T-4B,\ A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$

3. $f(x)=x^3-x^2+5,\ A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

13-variant

1. $3A-2C^T$, $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=2x^3-x^2+3x-2$, $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 5 & -1\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

14-variant

1. $5B^T-2C$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -7\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

2. $A=(1 \quad -3)$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=2x^2-5x+3$ $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

15-variant

1. $3A-2C^T$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 7\\ -4 & 0 & 6\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ -5 & 1 & 5\\ 7 & 3 & 8\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 4 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=3x^2-2x+5$, $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

16-variant

1. $3B^T-2C$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 1\\ -3 & 0\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^3-7x^2+13x-5$, $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

17-variant

1. $2A^T+3B$, $A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -1 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2-2x$, $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

18-variant

1. A^T-3B, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2+4x$, $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

19-variant

1. A^T+B, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-6 & 4 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 6 & 11 & -8 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2-3x,\ A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

20-variant

1. $4A-B^T,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2+4x-1,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

21-variant

1. $A^T+2C,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2+3x-4,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

22-variant

1. $A^T-B,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2-4x+2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

23-variant

1. $A+B^T$, $A=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2+2x-3$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

24-variant

1. A^T+2B, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $f(x)=x^2-2x$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

25-variant

1. $A^T-5\cdot C$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

3. $f\left(x\right)=x^3-3x+1$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Topshiriq
1- misolda berilgan matritsa rangini toping;
2-misolda berilgan matritsaga teskari matritsani ikki usulda toping;
3-misolda matritsali tenglamani yeching. Natijani Mathcad dasturida tekshiring.

1-variant

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & -2\\ -3 & 10 & 2 & 1\\ 7 & -24 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

2-variant

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 9 & -12 & 15 & 0\\ -2 & 6 & -6 & 2\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

3-variant

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 61\\ 4 & 10 & 2 & -46\\ 34 & -20 & 40 & 0\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0\\ 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

4-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

5-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$

6-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

7-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 8 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 8 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

9-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 8 & 5 \\ -1 & 8 & -6 & 10 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

10-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 8 & -16 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

11-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

12-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & -6 & 8 & 4 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

13-variant

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 8 & -2 \\ 2 & -2 & -3 & -7 \\ 1 & 11 & -12 & 34 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

14-variant

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 & -61 \\ 2 & 5 & 1 & -23 \\ 17 & -10 & 20 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

3. $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15-variant

1. $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & -3 \\ -12 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

16-variant

1. $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & -3 \\ 6 & 4 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

17-variant

1. $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

3. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

18-variant

1. $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 6 \\ -5 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

3. $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

19-variant

1. $A=\begin{pmatrix} -3 & -24 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 8 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 8 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

20-variant

1. $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

21-variant

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 8 & 5 \\ 4 & -32 & 24 & -40 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$.

22-variant

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 16 \\ -5 & -10 & 5 & -10 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$

23-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ -2 & -6 & 8 & 4 \\ 7 & 21 & -28 & -14 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

3. $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

24-variant

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \\ -2 & 6 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

25-variant

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$

Topshiriq

1-misolda ikkinchi tartibli determinantlarni hisoblang.
2-misolda uchinchi tartibli determinantlarni qulay usulda hisoblang.
3-misolda tenglama yoki tengsizlikni yeching.

4-misolda to'rtinchi tartibli determinantlarni determinant xossalaridan foydalanib, nollar yig'ib hisoblang, biror satr yoki ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblang.

1-variant

1. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

2-variant

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$

3-variant

1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 8 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

4-variant

1. $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

5-variant

1. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\sin 3x \\ \cos 2x & \cos 3x \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 \\ b & 3 & 1 & 4 \\ c & 0 & 1 & 2 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

6-variant

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4-x & 4 \\ 2 & 3 & 7+x \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

7-variant

1. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 7-y & x+4 \end{vmatrix} = -34.$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

8-variant

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ x+2 & 0 & 1 \\ -2 & 3-x & 1 \end{vmatrix} < 0.$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$.

9-variant

1. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4 \\ -x & -3 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

10-variant

1. $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & (a-b)^2 \\ (a-b) & (a+b) \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} x+3 & x+1 \\ x-1 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

11-variant

1. $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & (a-b)^2 \\ (a-b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 6$

4. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$

12-variant

1. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1-y & x-2 \end{vmatrix} = -4.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$

13-variant

1. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} -3 & x-1 & 1 \\ x+2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$

14-variant

1. $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2+x+1 & x^2 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \le 4.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \\ 4 & -2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$

15-variant

1. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} x+2 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$

16-variant

1. $\begin{vmatrix} \alpha & 3\alpha \\ \beta & 3\beta \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

17-variant

1. $\begin{vmatrix} x^2 & x \\ xy^2 & y^2 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$

4. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$

18-variant

1. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} \sin 2x & \sin x \\ \cos x & \cos 2x \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$

19-variant

1. $\begin{vmatrix} tg\varphi & 1 \\ -1 & tg\varphi \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$

20-variant

1. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

21-variant

1. $\begin{vmatrix} a^2-b^2 & a^4-b^4 \\ 1 & a^2+b^2 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

22-variant

1. $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

23-variant

1. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

24-variant

1. $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6.$

4. $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

25-variant

1. $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

4. $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$

Topshiriq

1-misolda chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer, teskari matritsa va Gauss - Jordan metodida yeching.

2-misolda chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss metodida yeching.

3-misolda berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiring, birgalikda bo’lgan sistema uchun umumiy va bitta xususiy yechimini toping.

1-variant

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 11x_4 = 65 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 12x_4 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

2-variant

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -5x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -5 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -7 \\ -x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$

3-variant

1. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -9 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 44x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + \quad\quad + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 7x_4 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 20x_3 - 10x_4 = 4 \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 \quad\quad = -1. \end{cases}$

4-variant

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -12 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7 \end{cases}$

5-variant

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

6-variant

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

7-variant

1. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

8-variant

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{5}{3} \\ x_1 + 1{,}5x_2 = 2 \end{cases}$

9-variant

1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 28 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 36 \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

10-variant

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y - 3z - t = 10, \\ -2x - 3y + 7z = -23, \\ 2x + 6y - 5z - 5t = 18 \\ -x + 3z - 4t = -11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2\sqrt{5}x_1 - x_2 + \sqrt{5}x_3 = 1 \\ 10x_1 - \sqrt{5}x_2 + 5x_3 = \sqrt{5} \\ -2x_1 + \frac{\sqrt{5}}{5}x_2 - x_3 = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$

11-variant

1. $\begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + \ \ 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 19. \end{cases}$

12-variant

1. $\begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 3x_3 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19 \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 1 \end{cases}$

13-variant

1. $\begin{cases} x_1 + \ \ 2x_2 + \ \ 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + \ \ 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$

2. $$\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1, \\ x_1-x_2-x_3=-2. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1-\sqrt{3}x_2=1 \\ \sqrt{3}x_1-3x_2=\sqrt{3} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1+x_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

14-variant

1. $$\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=-10, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=16, \\ x_1-4x_2+3x_3=-18. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 2x_2-x_3+2x_4=-3, \\ x_1+x_2+3x_3=10, \\ -2x_1+x_2-3x_3+2x_4=-12, \\ 3x_1+2x_2-x_4=3. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8 \\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \end{cases}$$

15-variant

1. $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=-8 \\ 2x_1+3x_2+x_3=-3 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+2x_4=9, \\ 9x_1-8x_2+5x_3+10x_4=16, \\ 5x_1-8x_2+5x_3+8x_4=10, \\ 6x_1-5x_2+4x_3+7x_4=12. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

16-variant

1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$

17-variant

1. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$

18-variant

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$

19-variant

1. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 16. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

20-variant

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 18, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 24, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 13, \\ 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2 \\ x_1 + 2x_2 = 2{,}5 \\ -2x_1 - 4x_2 = -5 \\ 2\sqrt{3}x_1 - 3\sqrt{3}x_2 = -2\sqrt{3} \end{cases}$

21-variant

1. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -4, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 21. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 21 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$

22-variant

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

23-variant

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

24-variant

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 4, \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -26. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

25-variant

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 29, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 39, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = -6, \\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 33. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

Topshiriq
1-misol sharti variantda berilgan.
2-misolda bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimini toping.

1-variant

1. $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$, va $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, bu yerda $\vec{m}$ va $\vec{n}$–birlik vektorlar ular orasidagi burchak 120^0 ga teng. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

2. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

2-variant

1. $\vec{a} = (3;2;-4;1)$, $\vec{b} = (1;-7;2;0)$ vektorlar berilgan. $2\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) - 3\vec{a} + \vec{b} + 7\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ vektorni toping.

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

3-variant

1. $\vec{a} = -2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallari orasidagi burchakni toping.

2. $\begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_1 - 3x_2 = 0, \\ -\sqrt{2}x_1 + \sqrt{6}x_2 = 0, \\ 2x_1 - \sqrt{12}x_2 = 0. \end{cases}$

4-variant

1. Vektorlar uzunliklari berilgan $\left|\vec{a}\right| = 11;\ \left|\vec{b}\right| = 23;\ \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 30.\ \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ ni aniqlang.

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

5-variant

1. α va β ning qanday qiymatlarida $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ va $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ vektorlar a) kolleniar b) ortogonal bo‘ladi.

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

6-variant

1. Oxy tekisligida $\vec{OA} = \vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ va $\vec{OC} = \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$ vektorlarni yasang. $\vec{c}$ ni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali analitik va geometrik ifodalang.

2. $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0, \\ -x_3 + x_5 = 0, \\ -x_4 + x_6 = 0. \end{cases}$

7-variant

1. $\vec{a} = (2;1;0)$, $\vec{b} = (1;-1;2)$, $\vec{c} = (2;2;-1)$ va $\vec{d} = (3;7;-7)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ ni $\vec{b}$ $\vec{c}$, $\vec{d}$ vektorlar orqali ifodalang.

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

8-variant

1. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ vektor uzunligi va uning yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0, \\ 7x_1+8x_2+10x_3=0. \end{cases}$

9-variant

1.Vektor Oy va Oz o‘qlari bilan mos ravishda 60^0 va 120^0 burchak tashkil qiladi. Ox o‘qi bilan qanday burchak tashkil qiladi.

2. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

10-variant

1. $\vec{a}=6\vec{i}-8\vec{j}+5\sqrt{2}\vec{k}$ va $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}-\vec{b}$ vektorning Ox o‘qi bilan hosil qilgan burchakni toping.

2. $\begin{cases} 6x_1+9x_2+2x_3=0, \\ -4x_1+x_2+x_3=0, \\ 5x_1+7x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+3x_3=0. \end{cases}$

11-variant

1. m ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=m\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ va $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-m\vec{k}$ vektorlar perpendikulyar.

2. $\begin{cases} 3x_1+5x_2+3x_3+2x_4+x_5=0, \\ 5x_1+7x_2+6x_3+4x_4+3x_5=0, \\ 7x_1+9x_2+9x_3+6x_4+5x_5=0, \\ 4x_1+8x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$

12-variant

1. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ vektorning $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ vektordagi proeksiyasini toping.

2. $\begin{cases} 3x_1+5x_2-4x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+4x_2-6x_3+3x_4=0, \\ 11x_1+17x_2-8x_3+4x_4=0. \end{cases}$

13-variant

1. $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k},\ \vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}+\vec{c}$ vektorning $\vec{b}+\vec{c}$ vektordagi proeksiyasini toping.

2. $\begin{cases} 5x_1+7x_2+6x_3-2x_4+2x_5=0, \\ 8x_1+9x_2+9x_3-3x_4+4x_5=0, \\ 7x_1+x_2+6x_3-2x_4+6x_5=0, \\ 4x_1-x_2+3x_3-x_4+4x_5=0. \end{cases}$

14-variant

1. $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ vektordagi proeksiyasi 1 ga teng bo‘lgan, $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$, va $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$, vektorlarga perpendikulyar $\vec{d}$ vektorni toping.

2. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$

15-variant

1. $\vec{a}=(1;-1;2)$ va $\vec{b}=(1;0;1)$ vektorlar uzunliklarini va ular orasidagi burchakni toping.

2. $\begin{cases} -x_1+2x_2-3x_3+4x_4=0, \\ 3x_1-5x_2+2x_3-10x_4=0. \end{cases}$

16-variant

1. $M_1=(1;2;3)$ va $M_2=(3;-4;6)$ nuqtalar berilgan. $\overline{M_1M_2}$ vektorning uzunligi va uning yo‘naltiruvchi kosinuslarini toping.

2. $\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+3x_4=0, \\ -2x_1+x_2-x_3-5x_4=0. \end{cases}$

17-variant

1. M nuqtaning radius vektori Oy o‘qi bilan 60^0, Oz o‘qi bilan 45^0 li burchak tashkil qiladi, uning uzunligi $r=8$. M nuqtaning absissasi manfiy bo‘lsa uni toping.

2. $$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+5x_3+8x_4=0. \end{cases}$$

18-variant

1. $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ va $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchakni toping.

2. $$\begin{cases} x_1-x_2-2x_3+3x_4=0, \\ x_1+2x_2-4x_4=0, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ x_1-4x_2+x_3+10x_4=0. \end{cases}$$

19-variant

1. m ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ va $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$ vektorlar perpendikulyar.

2. $$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=0, \\ -x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-4x_2+6x_3=0. \end{cases}$$

20-variant

1. $\vec{a}=(1;6;1)$, $\vec{b}=(0;1;-2)$, $\vec{c}=(1;-1;0)$ va $\vec{d}=(2;-1;3)$ vektorlar berilgan. $\vec{a}$ ni $\vec{b}\ \vec{c}, \vec{d}$ vektorlar orqali ifodalang.

2. $$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

21-variant

1. α va β ning qanday qiymatlarida $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\alpha\vec{k}$ va $\vec{b}=\beta\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar kollinear.

2. $$\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3+x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ -2x_1+2x_2-3x_3+5x_4=0. \end{cases}$$

22-variant

1. $\vec{c}=(9;4),\ \vec{a}=(1;2),\ \vec{b}=(2;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{c}$ ni $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

2. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0, \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0. \end{cases}$

23-variant

1. $\vec{a}=(2;3),\ \vec{b}=(1;-3),\ \vec{c}=(-1;3)$ vektorlar berilgan. α ning qanday qiymatlarida $\vec{p}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$ va $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{c}$ vektorlar kollinear.

2. $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ 5x_1-3x_2-8x_3=0. \end{cases}$

24-variant

1. $\vec{a}=(1;1;1)$ va $\vec{b}=(0;1;1)$ vektorlar uzunliklarini va ular orasidagi burchakni toping.

2. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3-2x_4=0. \end{cases}$

25-variant

1. Tekislikda uch vektor joylashgan $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. va $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=5,\ \left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right)=60^0$, $\left(\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}\right)=60^0$. $\vec{d}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ vektorning uzunligini toping.

2. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3=0. \end{cases}$

Topshiriq
Misollar sharti variantda berilgan.

1-variant

1. $2x+7y-3=0$ to‘g‘ri chiziqqa koordinatalar boshidan perpendikulyar tushiring.
2. $3x^2+3y^2-6x+8y=0$ aylananing markazi va radiusini toping.

3. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}$ to'g'ri chiziqdan va $M_0(2;-1;2)$ nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

2-variant

1. Agar uchburchak uchlarining koordinatalari $A(4;-5)$, $B(7;6)$ va $C(-7;-2)$ bo‘lsa, bu uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lishi yoki bo‘lmasligini tekshiring.
2. $A(-1;5)$, $B(-2;-2)$ va $C(5;5)$ nuqtalardan o'tuvchi aylananing markazi va radiusini toping.
3. $\frac{x+3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ to'g'ri chiziqdan va $M_0(2;1;-3)$ nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

3-variant

1. $M(2;3)$ nuqtadan o‘tib, $P(1;7)$ va $Q(-2;-5)$ nuqtalarni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasini tuzingg‘ri chiziqqa koordinatalar boshidan perpendikulyar tushiring.
2. $A(5;3)$ nuqtadan o'tuvchi markazi $5x-3y-13=0$ va $x+4y+2=0$ to‘g‘ri kesishish nuqtasida yotuvchi aylana tenglamasini tuzing.
3. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z+2}{-3}$ to'g'ri chiziqdan va $M_0(-1;0;2)$ nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

4-variant

1. $M(-1;7)$ va $N(3;-1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesma o‘rtasiga o‘tkazilgan perpendikulyarning tenglamasini tuzing.
2. $x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana bilan $x+y=0$ to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalari va $M(4;4)$ nuqtadan o'tuvchi aylana tenglamasini tuzing.
3. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ to'g'ri chiziqdan va $M_0(2;0;1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

5-variant

1. Rombning ikkita qarama-qarshi uchining koordinatalari berilgan $M(-3;2)$ va $N(7;-6)$. Romb diagonallarining tenglamalarini tuzing.

2. $x^2+y^2+4x+12y+15=0$ parallel to‘g‘ri aylananing markazidan o‘tuvchi $x+y=0$ to‘g‘ri chiziqqa chiziq tenglamasini tuzing.

3. Ox o’qdan va $A(1;-1;3)$ nuqtadan o’tuvchi tekislik tenglamasi tuzing.

6-variant

1. $2x-5y-12=0$ to‘g‘ri chiziqda $A(-1;3)$ va $B(3;-5)$ nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtani toping.

2. Oy o‘qiga koordinatalar boshida uringan va Ox o‘qini $M(6;0)$ nuqtada kesib o‘tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

3. Oy o’qdan va $B(2;1;-1)$ nuqtadan o’tuvchi tekislik tenglamasi tuzing.

7-variant

1. $A(3;4)$ nuqtadan $2x+5y+3=0$ to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning asosini toping.

2. $A(3;1)$ va $B(-1;3)$ nuqtalardan o’tuvchi, markazi $3x-y-2=0$ to‘g‘ri chiziqda yotgan aylana tenglamasini tuzing.

3. $M_0(4;-4;2)$ nuqtadan o’tuvchi va xOz tekislikka parallel tekislik tenglamasini tuzing.

8-variant

1. $A(-1;3)$ nuqtadan $3x-4y+40=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

2. $3x^2+4y^2-12=0$ ellipsning yarim o‘qlari, fokuslarining koordinatalarini, ekssentrisitetini toping.

3. $M_0(2;3;4)$ nuqtadan o’tuvchi va Ox va Oy o’qlaridan $a=1$ va $b=-1$ kesmalar ajratuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

9-variant

1. Uchlarining koordinatalari $A(2;4)$, $B(-1;-2)$ va $O(11;13)$ bilan berilgan uchburchakning burchaklarini hisoblang.

2. $9x^2+4y^2=36$ ellipsning yarim o‘qlari, fokuslarining koordinatalarini, ekssentrisitetini toping.

3. $M_0(2;-3;1)$ nuqtadan o'tuvchi $\overline{a}=(-3;2;-1)$ va $\overline{b}=(1;2;3)$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasi yozilsin.

10-variant

1. $9x+3y-7=0$ to'g'ri chiziq va $A(1;-1)$ va $B(5;7)$ nuqtalardan o'tadigan to'g'ri chiziq orasidagi o'tkir burchakni toping.
2. Katta yarim o'qi 12 ga teng, ekssentrisiteti 0,8 ga teng ellipsning kanonik tenglamasini tuzing. Ellipsning fokuslari orasidagi masofani toping.
3. $M_1(2;-15;1)$ va $M_2(3;1;2)$ nuqtalardan o'tuvchi hamda $3x-y-4z=0$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

11-variant

1. $M(-1;2)$ nuqtadan o'tib $x-3y+2=0$ to'g'ri chiziq bilan 45^o li burchak tashkil qiladigan to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.
2. Ellips $M_1\left(2;\sqrt{3}\right)$ va $M_2(0;2)$ nuqtalar orqali o'tadi. Ellips tenglamasini tuzing va M_1 nuqtasidan fokuslarigacha masofani toping.
3. $M_0(-2;7;3)$ nuqtadan o'tuvchi $x-4y+5z+1=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi yozilsin.

12-variant

1. Uchburchakning uchlari berilgan: $A(-6;2)$, $B(10;10)$, $C(0;-10)$. A uchdan o'tkazilgan mediananing, balandlikning va bissektrissaning tenglamalarini tuzing va uzunliklarini hisoblang.
2. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda o'ng fokusigacha bo'lgan masofa chap fokusigacha bo'lgan masofadan to'rt marta katta bo'lgan nuqtani toping.
3. $A(5;-2;3)$ va $B(6;1;0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa parallel, $M_1(2;-15;1)$ va $M_2(-1;1;-1)$ nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi yozilsin.

13-variant

1. ABC uchburchakning $A(4;4)$ va $B(1;0)$ uchlari va uning medianalarining kesishgan nuqtasi $M(1;3)$ berilgan. Uchburchak tomonlarining tenglamalarini tuzing.

2. Fokuslari orasidagi masofa katta va kichik yarim o‘qlari orasidagi masofaga teng ellipsning ekssentrisitetini toping.
3. $M_1(3;-1;2), M_2(4;-1;-1)$ va $M_3(2;0;2)$, nuqtalardan o’tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

14-variant

1. ABC uchburchakda uning tomonlari o‘rtalarining koordinatalari ma’lum: $M_1(-1;5)$, $M_2(3;1)$, $M_3(-5;-1)$. Uchburchak tomonlarining tenglamalarini tuzing.
2. $9x^2-16y^2=144$ giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing. Uning uchi va fokuslari koordinatalarini, ekssentrisitetini, asimptotalarining tenglamalarini toping.
3. $M_0(-1;1;-3)$ nuqtadan o’tuvchi $\bar{a}=(1;-3;4)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

15-variant

1. $A(-1;3)$ nuqtadan o‘tuvchi, $2x+5y-1=0$ to‘g‘ri chiziqqa a) parallel, b) perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamalarini tuzing.
2. $A(2;1)$ va $B\left(-4;\sqrt{7}\right)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.
3. $M_1(2;-1;-1)$ va $M_2(3;3;-1)$ nuqtalardan o’tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

16-variant

1. Uchlari $A=(1;-1;2)$, $B=(5;-6;2)$, $C=(1;3;-1)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning B uchidan AC tomoniga tushirilgan balandlik uzunligini toping.
2. Giperbola $M\left(6;-2\sqrt{2}\right)$ nuqta orqali o‘tadi va kichik yarim o‘qi $b=2$. Giperbola tenglamasini tuzing va M nuqtadan giperbolagacha bo‘lgan masofani toping.
3. $M(1;-5;3)$ nuqtadan o’tuvchi koordinata o‘qlari bilan $\alpha=\frac{\pi}{4}, \beta=\frac{\pi}{3}, \gamma=\frac{2\pi}{3}$ burchaklar tashkil qilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

17-variant

1. Uchlari $A=(1;-2;3)$, $B=(0;-1;2)$, $C=(3;4;5)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak yuzini toping.

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning fokusidan asimptotalarigacha bo‘lgan masofani va asimptotalari orasidagi burchakni toping.

3. $M(1;-3;5)$ nuqtadan o’tuvchi $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

18-variant

1. $A(5;1)$ nuqtadan o‘tuvchi, $3x+2y-7=0$ to‘g‘ri chiziqqa a) parallel, b) perpendikulyar ikkita to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

2. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellips berilgan. Uchlari ellipsning fokuslarida, fokuslari ellipsning uchlarida bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing.

3. $M(3;-2;4)$ nuqtadan o’tuvchi $5x+3y-7z+1=0$ tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

19-variant

1. ABC uchburchakning $A(-7;2)$, $B(5;-3)$ va $C(8;1)$ uchlari berilgan. Uchburchakning B uchidan o‘tkazilgan medianasi, balandlik va bissektrisasi tenglamasini tuzing.

2. $x^2-4y^2=16$ giperbolaga $A(0;-2)$ nutada o‘tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

3. $A(4;-3;1)$ nuqtaning $x+2y-z-3=0$ tekislikdagi proeksiyasini toping.

20-variant

1. Uchburchakning $A(0;2)$ uchi va $(BM)\, x+y-4=0$, $(CM)\, y=2x$ balandliklari (bu yerda M – balandliklar kesishish nuqtasi) tenglamalari berilgan. Uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing.

2. Ox o‘qiga nisbatan simmetrik $(0;0)$ va $(1;-3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi parabola tenglamasini tuzing.

3. $A(1;2;1)$ nuqtaning $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$ to‘g‘ri chiziqdagi proeksiyasini toping.

21-variant

1. $3x+4y-1=0$ va $4x-3y+5=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak bissektrisasi tenglamasini tuzing.
2. Oy o‘qiga nisbatan simmetrik $(0;0)$ va $(2;-4)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi parabola tenglamasini tuzing.
3. $M_0(5;2;2)$ nuqtadan o’tuvchi va $M_1(3;4;6)$, $M_2(3;-2;-3)$ va $M_3(6;3;2)$ nuqtalardan o’tuvchi tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing.

22-variant

1. ABC uchburchakda uchburchakning tomoni $(AB)\,x+7y-6=0$ va bissektrisalari $(AL)\,x+y-2=0$, $(BM)\,x-3y-6=0$ tenglamalari berilgan. Uchlarining koordinatalarini toping.
2. $y=-3x^2+12x-9$ parabolaning uchi orqali o‘tuvchi, $\frac{x}{10}+\frac{y}{8}=1$ to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
3. $M_0(-6;1;3)$ nuqtadan o’tuvchi va $M_1(2;3;0)$, $M_2(1;2;2)$ va $M_3(-1;0;-3)$ nuqtalardan o’tuvchi tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing.

23-variant

1. $5x-y+10=0$ va $8x+4y+9=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o‘tuvchi va $x+3y=0$ to‘g‘ri chiziqqa parellel to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
2. $y^2=4x$ parabolaning fokusidan uning $x^2+y^2=12$ aylana bilan kesishish nuqtasi orasidagi masofani toping.
3. $M_0(6;1;2)$ nuqtadan o’tuvchi va $M_1(3;4;2)$, $M_2(4;5;2)$ va $M_3(7;3;-2)$ nuqtalardan o’tuvchi tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasini tuzing.

24-variant

1. $2x-3y+5=0$ va $3x+y-7=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o‘tuvchi va $y=2x$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

2. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ giperbola berilgan. Fokuslari giperbolaning uchlarida fokuslarida, uchlari giperbolaning fokuslarida bo‘lgan ellips tenglamasini tuzing.

3. $A(5;2;-1)$ nuqtaning $2x-y+3z+23=0$ tekislikdagi proeksiyasini toping.

25-variant

1. $8x+4y-3=0$ to‘g‘ri chiziqqa uning $x-y=0$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasiga tushirilgan perpendikulyar tenglamasini tuzing.

2. Agar parabola $x+y=0$ to‘g‘ri chiziq va $x^2+y^2+4y=0$ aylananing kesishish nuqtasi orqali o‘tsa va Oy o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lsa parabola va uning direktrisasi tenglamasini tuzing.

3. $M(-1;0;5)$ nuqtadan o’tuvchi koordinata o‘qlari bilan $\alpha=\frac{\pi}{3}, \beta=\frac{\pi}{4}, \gamma=\frac{2\pi}{3}$ burchaklar tashkil qilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

GLOSSARIY

“Iqtisodchilar uchun matematika” fanidan glossariy

Atamaning o’zbek tilida nomlanishi	Atamaning ingliz tilida nomlanishi	Atamaning rus tilida nomlanishi	Atamaning ma’nosi
Matritsa	Matrix	Матрица	Matritsa deb m ta satr va n ta ustunga ega bo‘lgan to‘rtburchakli sonlar jadvaliga aytiladi.
Satr matritsa	Matrix row	Матрица строка	(1 x n) o‘lchamli matritsaga satr matritsa deyiladi.
Ustun matritsa	Column matrix	Матрица столбец	(m x 1) o‘lchamli matritsaga esa ustun matritsa deyiladi.
Nol matritsa	Zero matrix	Нулевая матрица	Har bir elementi nolga teng bo‘lgan, ixtiyoriy o‘lchamli matritsaga nol matritsa deyiladi.
Kvadrat matritsa	A square matrix	Квадратная матрица	Ham satrlar soni, ham ustunlar soni n ga teng bo‘lgan, ya’ni (n x n) o‘lchamli matritsaga n - tartibli kvadrat matritsa deyiladi.
Diagonal matritsa	Diagonal matrix	Диагональная матрица	$A=(a_{ij})$ kvadrat matritsada $i \neq j$ bo‘lganda, $a_{ij}=0$ bo‘lsa, u holda A matritsaga *diagonal matritsa* deyiladi.
Birlik matritsa	The identity matrix	Единичная матрица	$A=(a_{ij})$ kvadrat matritsada $i \neq j$ bo‘lganda $a_{ij}=0$ va $i = j$ bo‘lganda esa $a_{ii}=1$ bo‘lsa, u holda bunday matritsaga birlik matritsa deyiladi.
Transponirlangan matritsa	The transposed matrix	Транспонированная матрица	Agar A matritsada barcha satrlar mos ustunlar bilan almashtirilsa, u holda hosil bo‘lgan A^T matritsaga A matritsaga transponirlangan matritsa deyiladi.
Skalyar matritsa	Scalar matrix	Скалярная матрица	Agar diagonal matritsaning barcha a_{ii} elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda bunday matritsaga skalyar matritsa deyiladi.
Simmetrik matritsa	The symmetric matrix	Симметрическая матрица	Agar A kvadrat matritsada $A = A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bunday matritsaga simmetrik matritsa deb ataladi.
Qiya simmetrik matritsa	Skew-symmetric matrix	Кососимметрическая матрица	Agar A kvadrat matritsada $A = -A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, bunday matritsaga qiya simmetrik matritsa deb ataladi.
Trapetsiyasimon (pog’onasimon) matritsa	Step matrix	Ступенчатая матрица	Trapetsiyasimon (pog’onasimon) matritsa deb biror satrini noldan farqli elementi k – o’rinda hamda qolgan barcha satrlarining birinchi k ta

			o'rnida nollar turgan matritsaga aytiladi.
Determinant elementlari	The elements of the determinant	Элементы определителя	$a_{ij}-$ determinantning i–satr j–ustunda joylashgan elementini ifodalaydi.
Ikkinchi tartibli determinant	The determinant of order 2	Определитель 2-го порядка	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ifoda ikkinchi tartibli determinant deyiladi.
Uchinchi tartibli determinant	The determinant of order 3	Определитель 3-го порядка	$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$ $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ ifoda uchinchi tartibli determinant deyiladi.
$n-$tartibli determinant	The determinant of order $n-$	Определитель $n-$го порядка	$n-$tartibli determinant deb $n!$ hadning quyidagi tartibda tuzilgan algebraik yig'indisiga aytiladi: hadlari matritsaning har qaysi satridan va har qaysi ustunidan bittadan olingan n ta elementdan tuzilgan bo'lib, mumkin bo'lgan barcha ko'paytmalar hizmat qiladi; shu bilan birga hadning indekslari juft o'rniga qo'yishni tashkil etsa, musbat ishora bilan, aks holda esa manfiy ishora bilan olinadi.
Minor	Minor	Минор	$n-$tartibli d determinantning $1 \le k \le n-1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy k ta satrlari va k ta ustunlari kesishgan joyda turgan, ya'ni bu satrlardan biriga hamda ustunlardan biriga tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan $k-$tartibli matritsa d determinantning $k-$tartibli minori deb ataladi.
Algebraik to'ldiruvchi	The algebraic addition	Алгебраическое дополнение	a_{ij} minorning (elementning) algebraik to'ldiruvchisi $$A_{ij}=(-1)^{i+j}M$$ formula bilan aniqlanadi.
Laplas teoremasi	Laplace theorem	Теорема Лапласа	Laplas teoremasi. Determinantning qiymati uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlari bilan, shu elementlarga mos algebraik to'ldiruvchilar ko'paytmalari yig'indisiga teng.
Matritsaning rangi	The rank of the matrix	Ранг матрицы	A matritsaning rangi deb, noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga

			aytiladi va $rang\left(A\right)=r(A)$ ko‘rinishida ifodalanadi.
Teskari matritsa	Inverse matrix	Обратная матрица	Agar A kvadrat matritsa uchun $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ tenglik bajarilsa, A^{-1} matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.
Xosmas matritsa	Improper matrix	Несобственная матрица	Kvadrat matritsa elementlaridan tuzilgan determinant noldan farqli bo‘lsa, u holda bunday matritsa xosmas yoki maxsusmas matritsa deyiladi.
Xos matritsa	En matrix	Собственная матрица	Agar matritsa determinanti nolga teng bo‘lsa, bu matritsa xos yoki maxsus matritsa deyiladi.
Chiziqli bog’liq va chiziqli erkli vektorlar	Linearly dependent and linearly independent vectors	Линейно зависимые и линейно независимые вектора	Agar $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\boldsymbol{n}}$ koeffitsentlardan aqqali bittasi noldan farqli bo’lganda $\lambda_1\boldsymbol{X}_1+\lambda_2\boldsymbol{X}_2+\cdots+\lambda_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{\Theta}$ tenglik o’rinli bo’lsa, u holda $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}$ vektorlar chiziqli bog’liq deyiladi. Bunda, Θ - nol vektor. Aks holda $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}$ vektorlar chiziqli erkli deyiladi.
Vektorlar sistemasining bazisi	The basis of the system of vectors	Базис системы векторов	n o’lchovli m ta a_1, a_2, …, a_m vektorlardan iborat vektorlar sistemasi berilgan bo’lib, chiziqli bog’liq sistemani tashkil etsin. $a^{(i)}$, $a^{(j)}$, …, $a^{(k)}$ ($1\leq i<j<\ldots<k\leq m$) sistema esa berilgan a_1, a_2, …, a_m sistemaning qism osti sistemalaridan biri bo’lsin. Agar: birinchidan, $a^{(i)}$, $a^{(j)}$, …, $a^{(k)}$ ($1\leq i<j<\ldots<k\leq m$) sistema chiziqli erkli; ikkinchidan, a_1, a_2, …, a_m sistemaning har bir vektori $a^{(i)}$, $a^{(j)}$, …, $a^{(k)}$ ($1\leq i<j<\ldots<k\leq m$) sistema vektorlari bo’yicha yagona usulda yoyilsa, u holda $a^{(i)}$, $a^{(j)}$, …, $a^{(k)}$ ($1\leq i<j<\ldots<k\leq m$) vektorlar sistemasiga a_1, a_2, …, a_m vektorlar sistemasining bazisi deyiladi.
Vektorlar sistemasining rangi	Rank system of vectors	Ранг системы векторов	Berilgan a_1, a_2, …, a_m vektorlar sistemasining ixtiyoriy bazisi tarkibidagi vektorlar soniga uning rangi deyiladi.
Chiziqli tenglamalar sistemasi	The system of linear equations	Система линейных уравнений	Quyidagi

			$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$ sistemaga n noma'lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (yoki soddalik uchun chiziqli tenglamalar sistemasi) deyiladi.
Birgalikda bo'lgan sistema	Co (permissible) system	Совместная (разрешимая) система	Chiziqli tenglamalar sistemasi kamida bitta yechimga ega bo'lsa, u holda bunday sistema birgalikda deyiladi.
Birgalikda bo'lmagan sistema	Incompatibility (insoluble) system	Несовместная (неразрешимая) система	Bitta ham yechimga ega bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.
Aniq sistema	Certain system	Определенная система	Birgalikda bo'lgan sistema yagona yechimga ega bo'lsa aniq sistema deyiladi.
Aniqmas sistema	Uncertain system	Неоп-ределенная система	Birgalikda bo'lgan sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa aniqmas sistema deyiladi.
Ekvivalent sistemalar	Equivalent (tantamount to) system	Эквивалентные (равносильные) системы	Agar ikkita sistemaning yechimlari bir xil sonlar to'plamidan iborat bo'lsa, bunday sistemalar teng kuchli yoki ekvivalent deyiladi.
Gauss usuli	Gauss method	Метод Гаусса	Номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули
Gauss - jordan usuli	The gauss method - jordan	Метод Гаусса – Жордана	$\left(A \middle| B\right) \sim (E \mid X^*).$
Matrisalar usuli	Matrix method of system solutions	Матричный способ решения системы	$X = A^{-1}B$ ifoda chiziqli tenglamalar sistemasining matrisalar usuli bilan yechish formulasi.
Kroneker-kapelli teoremasi	Theorem of kronecker - capelli	Теорема Кронекера – Капелли	Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglari teng bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni $r(A) = r\left(A \middle| B\right)$
Fundamental yechimlari sistemasi	The fundamental system of solutions	Фундаментальная система решений	Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari sistemasi quyidagicha quriladi: 1. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi topiladi; . $m-r$ o'lchovli $m-r$ ta vektorlardan iborat chiziqli erkli vektorlar sistemasi tanlaniladi. Bunda masalan, har bir vektori $m-r$ o'lchovli $e_1(1,0,...,0)$, $e_2(0,1,...,0)$, . .

			. , $e_1(0,0,...,1)$ sistemani tanlash mumkin; . Umumiy yechimni topish uchun erkli noma'lumlari o'rniga e_1 vektorning mos koordinatalarini qo'yib, bazis noma'lumlar aniqlanadi va mos ravishda F_1 fundamental yechim quriladi. Xuddi shunday usulda e_2, e_3, ..., e_{m-r} vektorlardan foydalanib, mos ravishda F_2, F_3, ..., F_{m-r} fundamental yechimlar quriladi.
Keltirilgan sistema	Present system	Приведенная система	m noma'lumli n ta chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo'lsin: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = b$ Sistemaning ozod xadlari ustuni nol ustun bilan almashtirilgan $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_mx_m = \theta$ ko'rinishiga dastlabki bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi deyiladi.
To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi	The general equation of a straight line	Общее уравнение прямой	$Ax + By + C = 0$, $(A^2 + B^2 \neq 0)$ tenglamaga to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.
Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak	The angle between the straight lines	Угол между прямыми	$tg\theta = \left\| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right\|$ ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasi.
To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi	Canonical equations of a straight line in space	Каноническое уравнение прямой	To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$.
Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi	The equation of a straight line passing through two points	Уравнение прямой проходящей через две точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
Burchak koeffitsiyenti	The quadratic	Угловой коэффициент	$k = tg\varphi$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti

	form		
To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi	He canonical form of the quadratic form	Уравнение прямой с угловым коэффициентом	$y = kx + b$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.
Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa	Definitely a positive quadratic form	Расстояния от точки до прямой	$d = \left\| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\|$ formulaga berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqacha masofani topish formulasi deyiladi.
Tekislikning umumiy tenglamasi	***n*** - dimensional coordinate space $\boldsymbol{R^n}$	Общее уравнение плоскости	$Ax + By + Cz + D = 0$ ko'rinishidagi tenglama tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi.
Fazoda to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi	Canonical equations of a straight line in space	Канонические уравнения прямой в пространстве	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. ko'rinishidagi tenglama fazoda to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi deyiladi.
Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi	The equation of a straight line passing through two points	Уравнение прямой проходящей через две точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ tenglamaga fazoda ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi.
Arifmetik vektor fazo	Arithmetic vector space	Арифметическое векторное пространство	n o'lchovli vektorlar to'plamiga chiziqli (vektorlarni qo'shish va vektorlarni songa ko'paytirish) amallar bilan birgalikda n o'lchovli arifmetik vektor fazo deyiladi.
Vektor uzunligi (moduli)	The length (module) of the vector	Длина (модуль) вектора	Vektor komponentalari kvadratlari yig'indisining kvadrat ildiziga teng $\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ songa n o'lchovli $\vec{x}$ vektor uzunligi (moduli) deyiladi.
Ortogonal vektorlar	Orthogonal vectors	Ортогональные вектора	Agar ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u holda bunday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.
Vektorlarning skalyar ko'paytmasi	The scalar product of vectors	Скалярное произведение векторов	Ikkita

			$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_1\end{pmatrix}$$ vektorning skalyar ko'paytmasi deb, shu vektorlar mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng $\boldsymbol{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}$ songa aytiladi va $\boldsymbol{X'Y}$ shaklda yoziladi.
Vektorlar orasidagi burchak	The angle between the vectors	Угол между векторами	Ikkita $\boldsymbol{n}$ o'lchovli $\boldsymbol{X}$ va $\boldsymbol{Y}$, vektorlar orasidagi burchak deb: $$a)\ \cos\phi=\frac{X'Y}{\|X\|\cdot\|Y\|}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}},$$ $$б)\ (\phi\in[0;\pi]$$ shartlarni qanoatlantiruvchi φ burchakka aytiladi, bunda $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{\Theta}$ va $\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{\Theta}$. Ta'rifdagi b) shart φ burchak qiymatini yagonaligini ta'minlaydi.
Koshi – bunyakovskiy tengsizligi	Cauchy inequality - bunyakovskii	Неравенство Коши – Буняковского	$\|X'Y\|\leq\|X\|\cdot\|Y\|$ yoki $\left\|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right\|\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$ tengsizlik Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi deyiladi.
Vektorlarning vektor ko'paytmasi	The vector product vectors	Векторное произведение векторов	$\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlar tekisligiga perpendikulyar $\vec{z}$ vektor quyidagi xossalarga: 1. $\vec{z}$ vektor uzunligi $$\|\vec{z}\|=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\sin\alpha$$ tenglik bilan aniqlanadi va son jihatidan $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuziga teng; 2. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ vektorlar ko'rsatilgan tartibda koordinatalar sistemasini tashkil qiladi ($\vec{z}$ vektor uchidan qaraganda $\vec{x}$ vektordan $\vec{y}$ vektorga o'tish soat strelkasiga qarama-qarshi); ega bo'lsa, $\vec{z}$ vektor $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlarning

			vektor ko'paytmasi deyiladi va $$\vec{z}=[\vec{x},\vec{y}]$$ ko'rinishda belgilanadi.
Vektorlarning aralash ko'paytmasi	The mixed product vectors	Смешанное произведение векторов	Agar $\vec{x}$ va $\vec{y}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $[\vec{x},\vec{y}]$ uchinchi $\vec{z}$ vektorga skalyar ko'paytirilsa hosil bo'lgan son $\left([\vec{x},\vec{y}],\vec{z}\right)$ga $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deyiladi.
Chiziqli fazo	The linear space	Линейное пространство	Agar elementlari ixtiyoriy tabiatli bo'lgan L to`plam berilgan va bu toplam elementlari orasida qo'shish va songa ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lsa u holda *L* to'plam *chiziqli* (yoki *vektor*) *fazo* deyiladi.
Yevklid fazosi	Euclidean space	Евклидово пространство	Agar n o'lchovli haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko'paytma aniqlangan bo'lsa, bu fazo n o'lchovli Evklid fazosi deyiladi va E^n ko'rinishda belgilanadi.
Ortogonal vektorlar	Orthogonal vectors	Ортогональные векторы	n o'lchovli vektorlardan tarkib topgan vektorlar sistemasi berilgan bo'lib, sistema vektorlarining har qanday ikki jufti o'zaro ortogonal bo'lsa, u holda sistemaga ortogonal vektorlar sistemasi deyiladi.
Kvadratik shakl	The quadratic form	Квадратичная форма	n ta $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumlarning $f(x)$ kvadratik shakli deb har bir hadi bu no'malumlarning kvadrati yoki ikkita noma'lumning ko'paytmasidan iborat bo'lgan $$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$ yig'ndiga aytiladi.
Kvadratik shaklning kanonik shakli	He canonical form of the quadratic form	Канонический вид квадратичной формы	Agar kvadratik shaklda turli noma'lumlar ko'paytmalari oldidagi barcha koeffitsiyentlar nolga teng bo'lsa, u holda bu shakl kanonik shakl deb ataladi. $$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+....+b_ny_n^2$$
Musbat aniqlangan kvadratik shakl	Definitely a positive quadratic form	Определенно положительная квадратичная форма	Agar n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsientli f kvadratik shakli n ta musbat kvadratdan iborat normal ko'rinishga keltirilsa bu shakl musbat aniqlangan deyiladi.

Manfiy aniqlangan kvadratik shakl	Definitely negative quadratic form	Определенно отрицательная квадратичная форма	Agar n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsientli f kvadratik shakli n ta manfiy kvadratdan iborat normal ko'rinishga keltirilsa bu shakl manfiy aniqlangan deyiladi.
Musbat matritsa	Positive matrix	Положительная матрица	Har bir koordinatasi musbat vektorga musbat vektor deyilsa, har bir elementi musbat sonlardan iborat matritsaga esa musbat matritsa deyiladi.
Silvestr mezoni	Criteria sylvester	Критерии сильвестра	Kvadratik shakl matritsasi bosh minorlari har birining musbat bo'lishi, uning musbat aniqlanishi uchun zarur va yetarli. Toq tartibli bosh minorlarning har biri manfiy bo'lib, juft tartibli bosh minorlar har birining musbat bo'lishi, kvadratik shaklning manfiy aniqlanishi uchun zarur va yetarli.
Aylana	Definitely negative quadratic form	Окружность	Fiksirlangan $M_0(a,b)$ nuqtadan bir xil R - masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rniga aylana deyiladi. $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$
Ellips	Positive matrix	Эллипс	Fiksirlangan F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas $2a$ kattalikka teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga ellips deyiladi. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Giperbola	A non-negative matrix	Гипербола	Fiksirlangan F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas $2a$ kattalikka teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga giperbola deyiladi. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Parabola	Negative matrix	Парабола	Berilgan F nuqtadan berilgan va berilgan to'g'ri chizig'idan bir xil uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga parabola deyiladi. $y^2=2px$
Kvadratik shakl	The quadratic form	Квадратичная форма	n ta $x_1,x_2,...,x_n$ noma'lumlarning $f(x)$ kvadratik shakli deb har bir hadi bu

			no'malumlarning kvadrati yoki ikkita noma'lumning ko'paytmasidan iborat bo'lgan $$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$ yig'ndiga aytiladi.
Kvadratik shaklning kanonik shakli	He canonical form of the quadratic form	Канонический вид квадратичной формы	Agar kvadratik shaklda turli noma'lumlar ko'paytmalari oldidagi barcha koeffitsiyentlar nolga teng bo'lsa, u holda bu shakl kanonik shakl deb ataladi. $f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+....+b_ny_n^2$
Musbat aniqlangan kvadratik shakl	Definitely a positive quadratic form	Определенно положительная квадратичная форма	Agar n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsientli f kvadratik shakli n ta musbat kvadratdan iborat normal ko'rinishga keltirilsa bu shakl musbat aniqlangan deyiladi.
Manfiy aniqlangan kvadratik shakl	Definitely negative quadratic form	Определенно отрицательная квадратичная форма	Agar n ta noma'lumning haqiqiy koeffitsientli f kvadratik shakli n ta manfiy kvadratdan iborat normal ko'rinishga keltirilsa bu shakl manfiy aniqlangan deyiladi.
Musbat matritsa	Positive matrix	Положительная матрица	Har bir koordinatasi musbat vektorga musbat vektor deyilsa, har bir elementi musbat sonlardan iborat matritsaga esa musbat matritsa deyiladi.
Silvestr mezoni	Criteria sylvester	Критерии сильвестра	Kvadratik shakl matritsasi bosh minorlari har birining musbat bo'lishi, uning musbat aniqlanishi uchun zarur va yetarli. Toq tartibli bosh minorlarning har biri manfiy bo'lib, juft tartibli bosh minorlar har birining musbat bo'lishi, kvadratik shaklning manfiy aniqlanishi uchun zarur va yetarli.
Matematik model	Mathematical model	Математическая модель	O'rganilayotgan iqtisodiy jarayonning asosiy xossalarini matematik munosabatlar yordamida tavsiflash tegishli iqtisodiy jarayonning matematik modelini tuzish deb ataladi.
Chiziqli programma-lashtirish	Linear programming	Линейное программирование	Agar $q_i(x_1,x_2,...,x_n)\le b_i,\ (i=\overline{1,m})$, $Z=f(x_1,x_2,...,x_n)\to\max$ masaladagi barcha $q_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ va $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ funksiyalar chiziqli bo'lsa, bu masala chiziqli programmalashtirish masalasi deyiladi.
Maqsad	Objective	Целевая	Boshqaruvchi o'zgaruvchilarning barcha

funksiya	function	функция	cheklamalarni qanoatlantiruvchi shunday qiymatini topish kerakki, u maqsad funksiyaga eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat bersin. Bundan ko'rinadiki, maqsad funksiya boshqaruvchi noma'lumlarning barcha qiymatlari ichida eng yaxshisini (optimalini) topishga yordam beradi. Shuning uchun ham maqsad funksiyani foydalilik yoki optimallik mezoni deb ham ataladi.
Chiziqli programma-lashtirishning umumiy masalasi	The overall objective of linear programming	Общей задачей линейного программирова-ния	Chiziqli programmalashtirish masalasi (ChPM) umumiy holda quyidagicha ifodalanadi: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min)$
Kanonik shaklda yozish	Canonical form	Каноническая форма записи	Chiziqli programmalashtirish masalasi (ChPM) kanonik ko'rinishi: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min$
Tayanch reja	Reference plan	Опорный план	Kanonik ko'rinishda berilgan ChPMning joiz yechimi (joiz rejasi) deb, masalaning shartlarini qanoatlantiruvchi har qanday $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorga aytiladi.
Aynimagan tayanch reja	Non-degenerate reference plan	Невырожденны опорный план	Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ bazis rejadagi musbat koordinatalar soni m ga teng bo'lsa, u holda bu reja aynimagan bazis reja deyiladi.
Aynigan	Degenerate	Вырожденны	Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ bazis rejadagi

tayanch reja	reference plan	опорный план	musbat koordinatalar soni *m* ga teng bo'lmasa, u holda bu reja aynigan bazis reja deyiladi.
Qavariq to'plam	Convex set	Выпуклое множество	Agar ixtiyoriy $A_1 \in C$ va $A_2 \in C$ nuqtalar bilan bir qatorda bu nuqtalarning $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ $(0 \le \alpha_1 \le 1,\ 0 \le \alpha_2 \le 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$ qavariq kombinatsiyasidan iborat nuqta ham C to'plamga tegishli bo'lsa, ya'ni $A_1 \in C,\ A_2 \in C \Rightarrow A \in C$ bo'lsa, u holda C to'plam qavariq to'plam deb ataladi.
Yechimlar ko'pburchagi	Creating polygons	Многогранник решений	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$ va $x_1,\ x_2 \ge 0$ cheklamalarni qanoatlantiruvchi qavariq ko'pburchak reja ko'pburchagi deb ataladi.
Simpleks usul	Simplex method	Симплексный метод	Simpleks usuli eng keng foydalaniladigan barcha raqamli algoritmlardan foydalanadigan keng tarqalgan chiziqli dasturlash usullaridan biri. Bu 1940 yilda ishlab chiqilgan bo'lib chiziqli dasturlash model sifatida ham iqtisodiy ham harbiy rejalalarni amalga oshirish uchun ishlatilgan.
Optimallik sharti	Optimality condition	Условие оптимальности	Agar biror bir $X^0 = (x_1^0,\ x_2^0, \dots, x_m^0, 0, \dots, 0)$ bazis reja uchun $\Delta_j \le 0$, $(j = \overline{1,n})$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.
Chiziqli tenglamalar sistemasining bazis yechimlari	Basic solution of the linear equation	Базисный решение системы линейных уравнение	Chiziqli tenglamalar sistemasida erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o'zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo'ladi. Natijada $X_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ bazis yechim hosil bo'ladi. Bu yechimni boshlang'ich bazis yechim deb ataymiz.
Sun'iy bazis	Induced basis	Искусственный базис	Sun'iy bazis o'zgaruvchilariga mos $P_{n+1},\ P_{n+2},\ \dots,\ P_{n+m}$ vektorlar "sun'iy bazis vektorlar" deb ataladi.
Kengaytirilgan masala	Extended problem	Расширенная задача	Berilgan masamaning tenglamalar sistemasida bazis vektorlar yo'q bo'lsa, unga yangi $x_{n+1},\ x_{n+2},\ \dots,\ x_{n+m}$ – sun'iy o'zgaruvchilar kiritib, uni kengaytirilgan sistemaga

			aylantiriladu. Shu sababli uni kengaytirilgan masala deyiladi.
Berilgan masala	The original problem	Исходная или прямая задача	$AX = B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$ yoki $AX = B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \min.$ masalaga berilgan masala deyiladi.
Ikkilangan masala	Dual problem	Двойственная задача	$A^T Y \ge C^T,$ $\tilde{F} = B^T Y \to \min.$ yoki $A^T Y \le C^T,$ $\tilde{F} = B^T Y \to \max.$ masalaga ikkilangan masala deyiladi.
Nosimmetrik masala	Non-symmetric problem	Не симметрическая задача	$AX \le B,$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n},$ $F = CX \to \max.$ masalaga nosimmetrik qo'shma masala $A^T Y \ge C^T,$ $y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,m},$ $\tilde{F} = B^T Y \to \min.$
Resurslar holati	Resource status	Статус ресурсов	Optimal yechimning ikkilangan bahosi – resurslar tanqisligi darajasining o'lchovidir.
Kamyob resurslar	Deficient resources	Дефицитные ресурсы	Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatiladigan xom-ashyo "tanqis (defitsit) xom-ashyo" deyiladi.
Kamyob bo'lmagan resurslar	Non-deficient resources	Недефицитные ресурсы	Mahsulot ishlab chiqarishda to'la ishlatilmaydigan xom-ashyo "notanqis (kamyob bo'lmagan) xom-ashyo" hisoblanadi.
Transport masalasi	The transportation problem	Транспортная задача	Transport masalasi – chiziqli programma-lashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo'lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo'llanish sohasi juda kengdir.
Ochiq modelli transport masalasi	The balanced transportation problem	Транспортная задача с закрытой моделью	Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng bo'lmasa, ya'ni $\sum_{i=1}^{m} a_i \ne \sum_{j=1}^{n} b_j$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bunday masalalar ochiq modelli transport masalasi deyiladi.
Yopiq modelli transport masalasi	The unbalanced transportation problem	Транспортная задача с открытой моделью	Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng, ya'ni $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bunday masala yopiq modelli transport masalasi deyiladi.
Aynimagan transport masalasi	A non degenerate transportation problem	Не вырожденная транспортная задача	Agar talablarning yig'ndisi takliflarning yig'indisiga teng emas, ya'ni $\sum_{i \in G} a_i \ne \sum_{j \in H} b_j,$

			$G \subset M = \{1, 2, ..., m\}$, $H \subset N = \{1, 2, ..., n\}$ bo'lsa, u holda bu transport masalasi aynimagan transport masalasi deyiladi.
Aynigan transport masalasi	A degenerate transportation problem	Вырожденная транспортная задача	Agar talablarning qismiy yig'ndisi takliflarning qismiy yig'indisiga teng, ya'ni $\sum_{i \in G} a_i = \sum_{j \in H} b_j$, $G \subset M = \{1, 2, ..., m\}$, $H \subset N = \{1, 2, ..., n\}$ bo'lsa, u holda bu transport masalasi aynigan transport masalasi deyiladi.
Ta'minotchi potensiali	Potential suppliers	Потенциалы поставщиков	Ikkilanish nazariyasiga asosan agar (U_i, V_j) ikkilangan baholar mavjud bo'lsa, u holda $\{x_{ij}\}$ tayanch reja optimal bo'ladi. Bu yerda U_i va V_j ikkilangan baholar mos ravishda "ta'minotchi va iste'molchilarning potensiallari" deyiladi.
Istemolchi potensiali	Potential customers	Потенциалы потребителей	
Potensiallar usuli	Potential method	Метод потенциалов	Potensiallar usuli – transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari L.V.Kantorovich va M.K.Gavurin tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul Amerikalik olim Dansig tomonidan yaratildi. Dansig usuli chiziqli programmalashtirishning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul modifitsirlangan taqsimot usuli deb yuritiladi.