САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

“ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ” МИЛЛИЙ ТАДҚИҚОТ УНИВЕРСИТЕТИ

АБДУЛЛАЕВ АКМАЛЖОН АБДУЖАЛИЛОВИЧ

АРАЛАШ ТИПДАГИ ИККИНЧИ ТУР ТЕНГЛАМА УЧУН ПУАНКАРЕ – ТРИКОМИ ТИПИДАГИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

Физика - математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

УДК: 517.95

Физика – математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) of physical and mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

“ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ” МИЛЛИЙ ТАДҚИҚОТ УНИВЕРСИТЕТИ

АБДУЛЛАЕВ АКМАЛЖОН АБДУЖАЛИЛОВИЧ

АРАЛАШ ТИПДАГИ ИККИНЧИ ТУР ТЕНГЛАМА УЧУН ПУАНКАРЕ – ТРИКОМИ ТИПИДАГИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

Физика - математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида № B 2019.2.PhD/FM333 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация "Тошкент ирригация ва қишлоқ хўжалигини механизациялаш муҳандислари институти" Миллий тадқиқот университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Исломов Бозор Исломович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Сатторов Эрмамат Норкулович** физика-математика фанлари доктори
	Бабажанов Базар Атажанович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Фарғона Давлат университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд Давлат университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «30» сентябр соат 10^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (1 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38.)

Диссертация автореферати 2022 йил «27» август куни тарқатилди.
(2022 йил «27» август даги 1 рақамли реестр баённомаси).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

М.А. Халхўжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, физика-математика фанлари доктори

А.Б. Хасанов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, физика-математика фанлари доктори, профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертация аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда олиб борилаётган газодинамика соҳасидаги кўплаб илмий-амалий тадқиқотл аксарият ҳолларда хусусий ҳосилали аралаш типдаги иккинчи дифференциал тенгламалар учун локал ва нолокал масалаларни тадқи қилишга олиб келинади. Ҳозирги кунда ривожланган мамлакатларда аралаш типдаги иккинчи тур тенгламалар устида олиб борилаётган илмий изланишлар газ динамикаси, магнитли гидродинамика, геология, овоз тезлигидан юқори тезликдаги тўлқинларнинг тарқалиш жараёнлари, геотехника ва бошқа кўплаб соҳалардаги тадқиқотларнинг энг кўп ўрганилаётган муҳим масалаларидан ҳисобланади. Бу борада, жумладан электронларнинг тарқалиш назарияси, сиртларнинг чексиз кичик эгилишлари назариялари, ер ости сувлари оқимлари ҳаракати жараёнларининг математик моделларини яратиш ва бошқа амалий муаммоларни ҳал қилиш билан боғлиқ масалаларни тадқиқ қилишга алоҳида эътибор қаратилмоқда.

Жаҳонда аралаш типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг коррект ечилишини тадқиқ қилишга қаратилган илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда. Ушбу йўналишда аралаш типдаги иккинчи тур тенгламалар учун конормал ҳосилали чегаравий шартга эга масалалар ечимларини бир қийматли аниқлашга оид муаммоларни ҳал этиш бўйича тадқиқотлар муҳим аҳамият касб этмоқда. Шу билан бирга каср тартибли интегро-дифференциал операторлар назариясининг қўлланилиши билан боғлиқ диффузия тизимларини бошқариш, динамик тизимлар ва механик манипуляторларни бошқаришда ишлатиладиган сигналларни таҳлил қилишга оид тадқиқотларни ривожлантириш долзарб вазифалардан ҳисобланмоқда.

Республикамизда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг муҳим фундаментал йўналишларига оид тадқиқотлар олиб бориш ва уларни амалда қўллаш бўйича кенг кўламли чора-тадбирлар амалга оширилмоқда. “Алгебра ва унинг татбиқлари, дифференциал тенгламалар ва унинг татбиқлари, чизиқсиз тизимлар, динамик тизимлар ва уларнинг татбиқларини математик моделлаштириш, стохастик таҳлил, тиббий-биологик информатика, ҳисоблаш математикаси[1]” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланган. Ушбу вазифаларни амалга оширишда, хусусан аралаш типдаги иккинчи тур тенгламалар учун локал ва нолокал Пуанкаре-Трикоми типидаги чегаравий масалалар назариясини ривожлантириш мухим илмий аҳамиятга эга ҳисобланади.

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2022 йил 28 январдаги ПФ-60-сон «2022-2026 йилларга мўлжалланган Янги Ўзбекистоннинг тараққиёт стратегияси тўғрисида»ги, 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида” Фармонлари, шунингдек 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сўнги йилларда биринчи турдаги гиперболик типдаги бузилувчи тенгламаларни ўз ичига олган эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун Пуанкаре-Трикоми типидаги чегаравий масалаларни ечишга доир фундаментал натижалар М.С.Салаҳитдинов ва Б.И. Исломовнинг монографиясида ўз аксини топган бўлиб, унда иккита бузилиш чизиғига эга эллиптик типдаги тенглама учун конормал ҳосилали Пуанкаре типидаги ҳам локал, ҳам нолокал масалалар тадқиқ қилинган, шунингдек Ж. Аманов ҳамда Л.С. Чубенколар томонидан умумий Лаврентев - Бицадзе тенгламаси учун Пуанкаре - Трикоми масаласи аналогларининг бир қийматли ечиш мумкинлиги исботлади. Шу ўринда А.Ўриновнинг монографиясини ҳам қайд этиш лозим, бу монографияда биринчи тур эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун чегаравий масалалар ечиш усуллари баён қилинган.

Иккинчи турдаги бузулувчи гиперболик тенгламаларнинг ўзига хос хусусияти шундаки, улар учун параболик бузилиш чизиғига қўйилган бошланғич шартлар билан берилган Коши масаласи ҳар доим ҳам коррект бўлавермайди. И.Л.Карол иккинчи тур тенгламага оид модел тенглама учун классик типда берилган Коши масаласининг коррект бўлишини исботлади. А.В.Бицадзе биринчилардан бўлиб Трикоми масаласи учун экстремум принципини ишлаб чиқди. Иккинчи турдаги бузулувчи гиперболик тенгламаларни ўз ичига олган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганиш йўналиши бўйича муҳим натижалар И.Л.Карол, М.С.Салаҳиддинов, М.М.Смирнов, С.С.Исамухамедов, Хе Канг Чер, А.М.Нагорний, Н.К. Мамадалиев, Т.Г.Ергашев ва Н.Б Исломовлар томонидан олинган. Иккинчи турдаги эллиптик - гиперболик типдаги тенглама учун

Пуанкаре - Трикоми типидаги чегаравий масалалар шу пайтга қадар ўрганилмаган.

Биринчи турдаги аралаш типдаги тенгламалар учун Трикоми шарти билан Франкл масаласи М.М.Смирнов, А.К.Ўринов, К.Б.Сабитов ва М.Мирсабуровларнинг ишларида ўрганилган. М. Мирсабуров ва уларнинг шогирдлари ишларида фақат биринчи турдаги аралаш типдаги тенгламалар учун узлуксиз Франкл шартли локал ва нолокал чегаравий масалалар ўрганилган. Лекин Франкл шартли иккинчи турдаги эллиптик-гиперболик типдаги тенглама учун конормал ҳосила билан берилган чегаравий масалалар илгари ўрганилмаган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим ёки илмий–тадқиқот муассасасининг илмий–тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти “Тошкент ирригация ва қишлоқ хўжалигини механизациялаш муҳандислари институти” – Миллий тадқиқот университети илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ № 6.2 рақамли “Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ечимлари ва уларнинг муҳандислик масалаларига тадбиқлари” мавзусида олиб борилаётган мажмуали илмий ишлар доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун Пуанкаре - Трикоми типидаги чегаравий масалалар ечимининг мавжудлик ва ягоналик шартларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

икки ўлчовли соҳада иккинчи тур эллиптик типдаги тенглама учун чегаравий шартларида каср тартибли интеграл оператор қатнашган масала ечимининг ягоналиги исботлаш, мавжудлик шартларини топиш;

аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун Пуанкаре - Трикоми шарти қатнашган нолокал масалалар ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаларини исботлаш;

иккинчи тур эллиптик – гиперболик типдаги тенгламалар учун экстремум принципини ишлаб чиқиш ва бу принцип ёрдамида иккинчи тур аралаш тенглама учун конормал ҳосилали Франкл масаласига ўхшаш масала ечимининг ягоналигини исботлаш, мавжудлик мезонини аниқлаш;

иккинчи турдаги эллиптик-гиперболик тенглама учун Франкл шарти қатнашган Бицадзе-Самарский типидаги нолокал масаланинг бир қийматли ечилишини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти бузиладиган эллиптик ва эллиптик-гиперболик типдаги иккинчи тур тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун локал ва нолокал шартли Пуанкаре – Трикоми типидаги чегаравий масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида иккинчи турдаги Фредголм интеграл тенгламалари назарияси, нормал типдаги сингуляр интеграл тенгламалар, Випер-Хопф интеграл тенгламалари ва энергия интеграллари назарияси, шунингдек оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни ечиш методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

икки ўлчовли соҳада иккинчи тур эллиптик типдаги тенглама учун чегаравий шартларида каср тартибли интеграл оператор қатнашган масала ечимининг ягоналиги интеграл энергия усулида исботланган, мавжудлик шартлари эса иккинчи тур Фредгольм тенгламасига келтириш ёрдамида топилган;

аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун Пуанкаре - Трикоми шарти қатнашган нолокал масалаларни ечишда каср тартибли операторларнинг янги типдаги айниятлари олинган ҳамда улар ёрдамида масала ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремалари исботланган;

иккинчи тур эллиптик – гиперболик типдаги тенгламалар учун экстремум принципи ишлаб чиқилган ва бу принцип ёрдамида иккинчи тур аралаш тенглама учун конормал ҳосилали Франкл масаласига ўхшаш масала ечимининг ягоналиги олинган, мавжудлиги эса иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламалар назарияси асосида исботланган;

иккинчи турдаги эллиптик-гиперболик тенглама учун Франкл шарти қатнашган Бицадзе-Самарский типидаги нолокал масала ечимининг ягоналик шартлари топилган, ечимнинг мавжудлиги масалани Винер-Хопф типидаги сингуляр интеграл тенгламасига келтириш йўли билан ҳал этилган ва мазкур интеграл тенгламанинг ечилиш шартлари топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун қўйилган Пуанкаре-Трикоми шартли чегаравий масалаларнинг умумий ечимини топиш усулидан фойдаланиб, сиртларнинг чексиз кичик эгилишлари назарияси масалалари, шунингдек, ўзгарувчан ишорали эгри чизиқларга эга моментсиз қобиқлар назарияси масалалари ечилган;

биринчи тартибли изолятсияланган сингулярликка эга бўлган тенгламанинг нохарактеристик қисмида Фредголм бўлмаган оператор билан берилган сингуляр интеграл тенгламани ечиш алгоритми ишлаб чиқилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, математик анализ, интеграл энергия ва интеграл тенгламалар назариясининг усулларидан фойдаланиб, математик дедуктив хулосалар қабул қилинганлиги ҳамда теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланади

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти чегарада ва соҳа ичида бузиладиган иккинчи турдаги эллиптик ва эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этиш билан боғлиқ муаммоларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг газодинамика жараёнларини, овоз тезлигидан юқори тезликда ҳаракатланувчи суюқлик ва газлар динамикасини, ер ости сувларининг аралаш муҳитларда ҳаракатланиш принципларини прогнозлаш каби жараёнларнинг моделларига татбиқ этилиши билан изохланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун Пуанкаре-Трикоми типидаги локал ва нолокал чегаравий масалаларга оид олинган натижалар асосида:

иккинчи тур эллиптик – гиперболик типдаги тенглама учун Пуанкаре-Трикоми типидаги чегаравий масалани ечишда олинган натижалардан етакчи хорижий журналларда (Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol.43, no. 2, 484-495; Azerbaijan National Academy of Sciences, 2022, Vol.42, no.1, 86-98; Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol.42, no.15, 3616-3625) эллиптик соҳада масала ечимининг ягоналик шартларини аниқлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши чексиз соҳада сингуляр коэффициентли кўп ўлчовли эллиптик тенглама учун Нейман типидаги ҳамда даврий типдаги нолокал чегаравий шартли чизиқли тескари масалалар ечимларини топиш имконини берган;

аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун Пуанкаре-Трикоми типидаги локал ва нолокал чегаравий масала ечимининг мавжудлик мезонларидан №21-19-00324 (2019-2021 йй.) "Кўмирни чуқур қайта ишлашнинг экологик тоза ва ресурсларни тежовчи энергиясига ўтиш билан ёнмайдиган кул шағалли янги бетонларнинг фундаментал илмий тадқиқотлари" номли хорижий лойиҳада соҳа ичида бузулувчи иккинчи тур тенглама учун нолокал чегаравий масаланинг ечимини ҳосил қилишда фойдаланилган (Буюк Пётр номидаги Санкт-Петербург политехника университетининг 2022-йил 7-июлдаги ОД-21-4-319-сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши эллиптик-гиперболик типдаги тенгламалар учун силжувчи шартли чегаравий масалалар ечимлар синфини ҳосил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 16 та илмий – амалий анжуманларида, жумладан 11 та ҳалқаро ва 5 та республика илмий – амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 22 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, диссертациянинг ҳажми 117 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг « **Иккинчи турдаги эллиптик ва аралаш типдаги тенгламалар учун конормал шартли масалалар** » деб номланган биринчи боби иккита параграфдан иборат бўлиб, иккинчи турдаги эллиптик ва аралаш типдаги тенглама учун конормал ва интеграл шартли чегаравий масалаларни қўйиш ва бир қийматли ечиш шартларини топишга бағишланган.

Ушбу бобнинг **биринчи параграфида** конормал ва интеграл шартлари билан боғлиқ чегаравий масалани қуйидаги иккинчи турдаги эллиптик типдаги тенглама:

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -1 < m < 0. \tag{1}$$

учун (x, y) текисликнинг $x > 0,\ y > 0$ да учлари $A(0,0), B(1,0)$ нуқталарда бўлган σ эгри чизиқ ва Ox ўқида AB кесма билан чегараланган бир боғламли D соҳада ўрганамиз. Қуйидаги белгилашларни киритамиз $J = \{(x, y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\},\ \partial D = \vec{\sigma} \cup \overline{J},\ 2\beta = \dfrac{m}{m+2},$ ва бу ерда

$$-\frac{1}{2} < \beta < 0. \tag{2}$$

Масала 1.1. Қуйидаги хоссаларга эга бўлган $u(x, y)$ функцияни топиш талаб этилади: 1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cup C^1(D \cup \sigma \cup J)$ ҳамда u_x ва u_y ҳосилалари $A(0,0)$ ва $B(1,0)$ нуқталарда -2β дан кам бўлган тартибда чексизликка интилиши мумкин. 2) D сохада икки марта узлуксиз дифференциалланувчи (1) тенгламанинг ечими; 3) $u(x, y)$ қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантиради

$$\left\{\delta(s) A_s[u] + \rho(s) u\right\}\Big|_{\sigma} = \varphi(s), \quad 0 < s < l, \tag{3}$$

$$a_0(x) u_y(x,0) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} u(x,0) + a_{n+1}(x) u(x,0) = b(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{4}$$

бу ерда $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $b(x)$, $a_j(x)$ $(j = \overline{0, n+1})-$ берилган функциялар бўлиб,

$$a_0(x) \neq 0,\ \sum_{j=0}^{n+1} a_j^2(x) \neq 0,\ \forall x \in \overline{J}\ , \tag{5}$$

$$\delta^2(s) + \rho^2(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0, l], \tag{6}$$

$$\delta(s), \rho(s), \varphi(s) \in C[0, l], \tag{7}$$

$$a_j(x),\ b(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J),\ (j = \overline{0, n+1}), \tag{8}$$

ва $A_s[u] = y^m \dfrac{dy}{ds}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{dx}{ds}\dfrac{\partial u}{\partial y}$, -- конормал ҳосила, $D_{0x}^{\alpha_j}[\bullet] -$ эса, каср тартибли инеграл оператор бўлиб $\alpha_j \in (-1, 0,$ $l-$ бу σ чизиқнинг тўла узунлиги, $s-$ $B(1,0)$ нуқтадан бошлаб ҳисобланувчи σ чизиқ ёйининг узунлиги.

Қуйидагилар исботланган

Теорема 1.1. Агар (2), (5) ,(6) ва

$$\delta(s)\rho(s) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l, \tag{9}$$

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_0(x)} \leq 0,\ \left(\frac{a_j(x)}{a_0(x)}\right)'_x \geq 0,\ \ \frac{a_j(1)}{a_0(1)} \leq 0,\ \ \left(j = \overline{1, n}\right), \tag{10}$$

шартлар бажарилса, унда 1.1 масала D соҳада биттадан кўп бўлган ечимга эга бўла олмайди.

Теорема 1.2. Агар (2), (5)-(8) ва

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leq const\ y^{m+1}(s), \tag{11}$$

шартлар бажарилса, унда D соҳада 1.1 масаланинг ечими мавжудир.

Биринчи бобнинг **иккинчи параграфида** Пуанкаре-Трикоми типидаги масаланинг бирқийматли ечилиши қуйидаги иккинчи тур эллиптик-гиперболик тенглама учун

$$sgny|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0 \tag{12}$$

$D = D_1 \cup D_2$, соҳада ўрганилган. Бу ерда D_1 - соҳа $y > 0$ да, учлари $A(0,0)$, $B(1,0)$ нуқталарда бўлган σ эгри чизиқ ва $AB(y=0)$ кесма билан, D_2 - соҳа эса, ўша AB кесма ва (12) тенгламанинг қуйидаги

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

характеристикалари билан чегараланган.

Масала 1.2. Қуйидаги хоссаларга эга бўлган $u(x, y)$ функцияни топиш талаб этилади: 1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C_x(D_1 \cup \sigma) \cap C_y(D_1 \cup \sigma \cup J) \cap C_y(D_2 \cup J)$ ҳамда u_x ва u_y ҳосилалари $A(0,0)$ ва $B(1,0)$ нуқталарда бирдан кам бўлган тартибда чексизликка интилиши мумкин. 2) $u(x,y) \in C^2(D_1)$ - D_1 сохада (12) тенгламанинг регуляр, D_2 - соҳада эса R_2[2] синфга тегишли бўлган умумлашган ечими; 3) бузилиш чизиғида қуйидаги улаш шарти бажарилади

$$u_y(x, -0) = -u_y(x, +0); \tag{13}$$

4) $u(x, y)$ - (3) чегаравий шартни ҳамда қуйидаги

[2] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва: «Высшая школа» 1985г. 304 с.

$$u(x,y)\big|_{AC}=\psi(x), \qquad 0\le x\le\frac{1}{2}\ , \tag{14}$$

шартни қаноатлантиради, бу ерда $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(x)$ - етарлича силлиқ берилган функциялар.

Қуйидагилар исботланган

Теорема 1.3. Агар (2), (9) ва $\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{\frac{m}{2}}u^2(1,y)=0$ шартлар бажарилса, унда D соҳада 1.2 масаланинг ечими ягонадир.

Теорема 1.4. Агар (2), (6)-(7), (10) ва

$$\psi(0)=0, \quad \psi(x)\in C^2\left[0,\frac{1}{2}\right], \tag{15}$$

шартлар бажарилса, унда D соҳада 1.2 масаланинг ечими мавжуд.

Ечимнинг ягоналик теоремаси интеграл энергия, мавжудлик теоремаси эса интеграл назарияси ёрдамида исботланган.

"**Иккинчи турдаги аралаш турдаги тенглама учун нолокал чегаравий масалалар**" деб номланган ва икки параграфдан иборат иккинчи боб (12) тенглама учун D соҳада нолокал чегаравий масалаларни шакллантириш ва ўрганишга бағишланган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида (12) тенглама учун D соҳада қуйидаги масала қўйилган.

Масала C_1. 1.2. масаладаги 1)-3) хоссалар, ҳамда (3) ва

$$\frac{d}{dx}u\left[\Theta_0(x)\right]+b\frac{d}{dx}u\left[\Theta_1(x)\right]=c(x), \qquad (x,0)\in J, \tag{16}$$

чегаравий шартни ваноатлантирувчи $u(x,y)$ функцияни топиш талаб этилади. Бу ерда

$$\Theta_0\left(\frac{x}{2},-\left(\frac{m+2}{4}x\right)^{\frac{2}{m+2}}\right) \quad \text{ва} \quad \Theta_1\left(\frac{x+1}{2};-\left(\frac{m+2}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right) \tag{17}$$

- $x\in J$ нуқтадан чиқиб (12) тенгламанинг мос равишда AC ва BC характеристикалари билан кесишиш нуқталари.

Қуйидагилар исботланган

Лемма 2.1. Агар $\tau'(x)$ функция $0<x<1$ да $k>-2\beta$ даража билан Гёлдер шартини қаноатлантирса, унда

$$T(x)=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x) \tag{18}$$

функцияни қуйидаги кўринишда

$$T(x)=\frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{2\beta}\tau'(t)dt.$$

ифодалаш мумкин.

Лемма 2.2.

$$\tau(x)\in C[0,1]\cap C^{(1,k)}(0,1), \quad k>-2\beta \tag{19}$$

шарт бажарилиб, $\tau\left(x\right)$ функция $x=x_0$ $\left(x_0\in\left(0,1\right)\right)$ нуқтада энг катта мусбат(ЭКМус) ва энг кичик манфий(ЭКМан) қийматни қабул қилсин. Унда

$$E(x)=\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{-2\beta}T(t)}{x-t}dt$$

функцияни $x=x_0$ нуқтада қуйидаги кўринишда

$$E\left(x_0\right)=(1-x_0)^{-2\beta}\left\{\left[x_0{}^{2\beta-1}cos2\beta\pi+\left(1-x_0\right)^{2\beta-1}\right]\tau\left(x_0\right)-\tau(1)\left(1-x\right)^{2\beta-1}+\right.$$

$$\left.+\left(1-2\beta\right)\left[\ cos2\beta\pi\int\limits_0^{x_0}\frac{\tau\left(x_0\right)-\tau\left(t\right)}{\left(x_0-t\right)^{2-2\beta}}d\,t-\int\limits_{x_0}^1\frac{\tau\left(t\right)-\tau\left(x_0\right)}{\left(t-x_0\right)^{2-2\beta}}d\,t\right]\right\}.$$

ифодалаш мумкин

Лемма 2.3. (2), (19) шартлар бажарилиб, $\tau\left(x\right)$ функция $x=x_0$ $\left(x_0\in\left(0,1\right)\right)$ нуқтада ЭКМус (ЭКМан) қийматни қабул қилсин. Унда $T(x)$ функцияни $x=x_0$ нуқтада қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин

$$T\left(x_0\right)\equiv\frac{1}{\Gamma\left(1-2\beta\right)}D_{0x}^{1-2\beta}\tau\left(x\right)\Big|_{x=x_0}=$$

$$=\frac{Sin2\beta\pi}{\pi}\left[x_0{}^{2\beta-1}\,\tau\left(x_0\right)+\left(1-2\beta\right)\int\limits_0^{x_0}\frac{\tau\left(x_0\right)-\tau\left(t\right)}{\left(x_0-t\right)^{2-2\beta}}d\,t\right],$$

бу ерда

$$T\left(x_0\right)<0\quad\left(T\left(x_0\right)>0\right),\quad x_0\in J\,.$$

2.1 – 2.3 леммалардан қуйидаги келиб чиқади.

Теорема 2.1.(А.В.Бицадзе экстремум принципининг аналоги) Агар (2) шарт ва $b<0$ бажарилса, унда C_1 масаланинг $u\left(x,y\right)$ ечими $c\left(x\right)\equiv0$ ва $\tau(1)=0$ шартларда ўзининг ЭКМус ва ЭКМан қийматларига фақат $\bar{D}_1$ соҳанинг $\bar{\sigma}$ чизиғида эришади.

Теорема 2.2. Агар 2.1 теореманинг шартлари ва (9) шарт бажарилиб, $A(0,0)$, $B(1,0)$ нуқталарнинг етарлича кичик атрофида $\delta(s)$, $\rho(s)$, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ лар қуйидаги

$$\rho(0)\neq0,\ \rho(l)\neq0,\tag{20}$$

$$\begin{gathered}\left|u_x\right|\le const\,R_j^{\delta-1},\quad\left|u_y\right|\le const\,R_j^{\delta-1},\quad 0<\delta<1,\quad R_j^2=(\theta-x)^2+\frac{2}{m+2}y^{m+2},\\ \left|q(s)\right|\le const\left[s\ \left(l-s\right)\right]^{\varepsilon_0},\quad \varepsilon_0>-m+\frac{m+2}{2}(1-\delta);\ j=1\text{ да }\theta=0,\ j=2\text{ да }\theta=1,\end{gathered}\tag{21}$$

шартларни қаноатлантирса, унда D соҳада C_1 масаланинг ечими биттадан кўп бўла олмайди.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида D соҳада (12) тенглама учун нолокал

$$D_{0x}^{1-\beta}u\left[\theta_0(x)\right]=c(x)u(x,0)+f(x), \qquad (x,0)\in J,$$

шартли C_2 масала ўрганилган, бу ерда $c(x)$, $f(x)-$ берилган функциялар бўлиб, $c(x),\ f(x)\in C(\bar{J})\cap C^2(J)$.

Қўйилган C_2 масаланинг бир қиймали ечилишининг исботи, ушбу бобнинг биринчи параграфидаги қўлланилган усул каби амалга оширилади.

Диссертациянинг учинчи боби **“Иккинчи турдаги аралаш типдаги тенглама учун Франкл типидаги шарт билан келувчи чегаравий масалалар”** деб номланган ва икки параграфдан иборат бўлиб, $D=D_1\cup D_2$ (1.2 масалага қаранг) соҳада (12) тенглама учун чегаравий масалаларни шакллантириш ва ўрганишга бағишланган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$D_1=D\cap\{\ y>0\}$, $\qquad D_2=D\cap\{\ y<0\}$, $\qquad D=D_1\cup D_2\cup J$,

$J=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$, $\qquad J_1=\{(\qquad x, \quad <\}$

$J_2=\{(x,y):c<x<1,\ y=0\}$, C_0 -- AC характеристиканинг $E(c,0)$ нуқтадан чиқувчи характеристика билан кесишиш нуқтаси бу ерда $c\in J$.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида (12) тенглама учун қуйидаги масала ўрганилган

Масала TF**.** Қуйидаги хоссаларга эга $u(x,y)$ функцияни топиш талаб этилади:

1) $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C_x^1\left(D_1\cup\sigma\right)\cap C_y^1\left(D_1\cup\sigma\cup J_1\cup J_2\right)\cap C_y^1\left(D_2\cup J_1\cup J_2\right)$,

ҳамда u_x ва u_y ҳосилалари $A\left(0,0\right)$, $E\ (c\ ,0$ ва $B\left(1,0\right)$ нуқталарда бирдан кам бўлган тартибда чексизликка интилиши мумкин. 2) $u(x,y)$ -функция D_j $(j=1,2)$ сохада R_2 синфга тегишли бўлган умумлашган ечим;

3) $J_1\cup J_2$ бузилиш чизиғида қуйидаги улаш шарти бажарилади

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=-\lim_{y\to-0}u_y(x,y), \quad (x,0)\in J_1\cup J_2 \tag{22}$$

бу ерда $u_y(x,0\pm 0)=\nu^{\pm}(x)$ функция J_j интервалда узлуксиз ва интегралланувчи;

4) (3) ҳамда қуйидаги чегаравий шартларни

$$u\left(x,y\right)\Big|_{AC_0}=\psi\left(x\right), \quad x\in[0,c/2], \tag{23}$$

$$u(p(x),0)=\mu u(x,0)+f(x), \ \ (x,0)\in\bar{J}_1, \quad u(c,0)=0, \tag{24}$$

қаноатлантиради, бу ерда $\mu=const>0,\ p\left(x\right)=\delta-kx,\quad p'\left(x\right)<0,\ p(c)=c,\ p(1)=0,$ $k=c/\left(1-c\right),\ \ \delta=c/\left(1-c\right),\ \ c\in J;$ $\quad l-$ бу σ чизиқнинг тўла узунлиги, $s-$ σ чизиқнинг $B(1,0)$ нуқтадан бошлаб ҳисобланган ёйи узунлиги, $\rho(s)$, $\delta(s)$, $\varphi(s)$, $f(x)-$ эса берилган функциялар бўлиб, $f(0)=0,\ f(c)=0,\ \psi(0)=0,$

$$\rho(s),\delta(s),\varphi(s)\in C[0,l], \quad \delta(s)\neq 0,\ \ \forall s\in\left[0;l\right], \tag{25}$$

$$\psi(x)\in C^2\left[0,\frac{c}{2}\right], \qquad f(x)\in C^2(\bar{J}_1). \tag{26}$$

(23) шарт Трикоми шарти аналоги, яъни изланаётган функция қиймати AC характеристиканинг AC_0 бўлагида биринчи турдаги шарт билан, J бузилиш чизиғида эса, $[0,c]$ ва $[c,1]$ кесмаларда $u(x,0)=\tau(x)$ функция қийматларини боғловчи нолокал (24) шарт билан берилган. Бунда берилган оралиқда узлукли Франкл (24) шарти берилади. Бу типдаги масалалар аввал М.Мирсабуров ва унинг шогирдлари томонидан ўрганилган.

Қуйидагилар исботланган

Теорема 3.1.(А.В.Бицадзе экстремум принципи аналоги). Агар (2) шарт ва $0<\mu<1$ бажарилса, унда TF масаланинг $u(x,y)$ ечими $\psi(x)\equiv 0,\quad f(x)\equiv 0$ шартларда ўзининг ЭКМус (ЭКМан) қийматига фақат $\bar{D}_1$ ёпиқ соҳанинг $\bar{\sigma}$ чизиғида эришади.

Теорема 3.2. Агар 3.1 теореманинг шартлари ва (9) бажарилиб, $A(0,0),\ B(1,0)$ нуқталарнинг етарлича кичик атрофида $\delta(s)$, $\rho(s)$, $u_x(x,y),\ u_y(x,y)$ функциялар (20), (21) шартларни қаноатлантирса, унда D соҳада TF масаланинг ечими биттадан кўп бўла олмайди.

Теорема 3.3. Агар (2), (24), (25) ва (26), шартлар бажарилса, унда D соҳада TF масаланинг ечими мавжуд.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида эллиптик-гиперболик типдаги иккинчи тур тенглама учун Франкл типидаги шарт билан келувчи Бицадзе-Самарский нолокал чегаравий масаласи ўрганилган.

Задача BCF**.** TF масаладаги 1)-3) хоссаларга ва 4) (3), (24) ҳамда

$$D_{0x}^{1-\beta}u\left[\theta_0(x)\right]=a(x)u(x,0)+b(x),\quad (x,0)\in J_1, \tag{27}$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функцияни топиш талаб этилади.

Бу ерда $a(x),\ b(x)-$берилган функциялар бўлиб,

$$0<\mu<1,\qquad a(x)\geq 0\quad \forall x\in \bar{J}_1, \tag{28}$$

$$a(x),\ b(x)\in C(\bar{J}_1)\cap C^1(J_1), \tag{29}$$

$$f(x)\in C^2(\bar{J}_1). \tag{30}$$

Қуйидагилар исботланган.

Теорема 3.4.(А.В.Бицадзе экстремум принципи аналоги). Агар (2) ва (28) шарт бажарилса, унда BCF масаланинг $u(x,y)$ ечими $f(x)\equiv 0,\ b(x)\equiv 0,$ шартларда ўзининг ЭКМус ва ЭКМан қийматларига фақат $\bar{D}_1$ ёпиқ соҳанинг $\bar{\sigma}$ чизиғида эришади.

Теорема 3.5. Агар 3.2 теореманинг шартлари ва (9) бажарилиб, $A(0,0),\ B(1,0)$ нуқталарнинг етарлича кичик атрофида $\delta(s)$, $\rho(s)$, $u_x(x,y),\ u_y(x,y)$ функциялар (20), (21) шартларни қаноатлантирса, унда D соҳада BCF масаланинг ечими биттадан кўп бўла олмайди.

Теорема 3.6. Агар (2), (24), (25), (29) ва (30), шартлар бажарилса, унда D соҳада BCF масаланинг ечими мавжуд.

ХУЛОСА

Диссертация иши аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун Пуанкаре – Трикоми типидаги локал ва нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ қилишга бағишланган.

Илмий изланишнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

икки ўлчовли соҳада иккинчи тур эллиптик типдаги тенглама учун чегаравий шартларида каср тартибли интеграл оператор қатнашган масала ечимининг ягоналиги интеграл энергия усулида исботланган, мавжудлик шартлари эса иккинчи тур Фредгольм тенгламасига келтириш ёрдамида топилган;

аралаш типдаги иккинчи тур тенглама учун Пуанкаре - Трикоми шарти қатнашган нолокал масалаларни ечишда каср тартибли операторларнинг янги типдаги айниятлари олинган ҳамда улар ёрдамида масала ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремалари исботланган;

иккинчи тур эллиптик – гиперболик типдаги тенгламалар учун экстремум принципи ишлаб чиқилган ва бу принцип ёрдамида иккинчи тур аралаш тенглама учун конормал ҳосилали Франкл масаласига ўхшаш масала ечимининг ягоналиги олинган, мавжудлиги эса иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламалар назарияси асосида исботланган;

иккинчи турдаги эллиптик-гиперболик тенглама учун Франкл шарти қатнашган Бицадзе-Самарский типидаги нолокал масала ечимининг ягоналик шартлари топилган, ечимнинг мавжудлиги масалани Винер-Хопф типидаги сингуляр интеграл тенгламасига келтириш йўли билан ҳал этилган ва мазкур интеграл тенгламанинг ечилиш шартлари топилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ИРРИГАЦИИ И МЕХАНИЗАЦИИ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА»

АБДУЛЛАЕВ АКМАЛЖОН АБДУЖАЛИЛОВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТИПА ПУАНКАРЕ – ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Ташкент – 2022

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2019.2.PhD/FM333.

Диссертация выполнена в Национальном исследовательском университете - Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства.

Автореферат диссертации на трёх языках (русский, узбекский, английский (резюме)) размещен на веб–странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Исломов Бозор Исломович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Сатторов Эрмамат Норкулович** доктор физико-математических наук **Бабажанов Базар Атажанович** доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ферганский Государственный университет**

Защита диссертации состоится «30» сентябр 2022 года в 10^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за № 1). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866)231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан « 27 » август 2022 года.
(протокол рассылки № 1 от «27» август 2022 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI • SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI •

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

М.А. Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

А.Б. Хасанов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования в области газовой динамики, проводимые на мировом уровне, в большинстве случаев сводятся к изучению локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными смешанного типа второго рода. В настоящее время исследования, проводимые по теории уравнениям смешанного типа второго рода, являются основными вопросами научных направлений газодинамики, магнитной гидродинамики, геологии, процессов распространения сверхзвуковых волн, геотехники и многих других областей науки. В связи с этим особое внимание уделяется исследованию вопросов, связанных с теорией рассеяния электронов, теорией бесконечно малых изгибаний поверхностей, созданием математических моделей процессов течения подземных вод и решением других практических задач.

В мире проводятся научные исследования, направленные на исследование корректного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. В этом направлении приоритет отдается исследованиям связанных с однозначной разрешимости решений краевых задач, с краевыми условиями содержащих конормальных производных, для уравнений смешанного типа второго рода. Вместе с тем, актуальной задачей считается развитие исследований, связанных с применением теории дробных интегро-дифференциальных операторов к управлению диффузионным системам, анализу сигналов, используемых при управлении динамическими системами и механическими манипуляторами.

В нашей республике осуществляются масштабные мероприятия по исследованию важных фундаментальных направлений теории уравнений в частных производных и их применению на практике. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются, проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебры и ее приложений, дифференциальных уравнений и их приложений, математического моделирования нелинейных систем, динамических систем и их приложений, стохастического анализа, медико-биологической информатики, вычислительной математики»[1]. В обеспечении исполнения данного постановления важное значение имеет развивать теории краевых задач типа Пуанкаре-Трикоми для уравнений смешанного типа второго рода.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле проблем, которые входят в тематику задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № УП-4947 от 7 февраля

[1]Указ Президента Республики Узбекистан ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан”.

2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», а также постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное научное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Последние годы в направлении исследования краевых задач типа Пуанкаре – Трикоми для уравнения эллитико-гиперболического типа, содержащих вырождающиеся гиперболические уравнения первого рода, основополагающие результаты получены в монографии М.С.Салахитдинова и Б.И.Исломова, где рассматривается как локальные так и нелокальные задачи типа Пуанкаре с конормальной производной для уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения, а в работах Дж. Аманов, Л.С.Чубенкой доказана однозначная разрешимость аналоги задачи Пуанкаре – Трикоми для общего уравнения Лаврентьева – Бицадзе. Также надо отметит монографию А.Уринова в которой описаны методы решения краевых задачи для уравнения эллиптико - гиперболического типа первого рода.

Вырождающиеся гиперболические уравнения второго рода обладают той особенностью, что для них задача Коши с начальными данными на линии параболического вырождения не всегда будет корректно поставленной. И.Л.Кароль, рассматривая модельное уравнение относящейся второму роду эллиптико-гиперболического типа, доказал корректность задачи Коши при обычной постановке. А.В.Бицадзе впервые разработал принцип экстремума для задачи Трикоми. В направлении исследования краевых задач для смешанных уравнений, содержащих вырождающиеся гиперболические уравнения второго рода, весомые результаты получены И.Л.Каролем, М.С.Салахитдиновым, М.М.Смирновым, С.С.Исамухамедовым, Хе Кан Чером, А.М.Нагорным, Н.К.Мамадалиевым, Т.Г.Эргашевым и Н.Б. Исламовым. Надо отметит, что краевые задачи типа Пуанкаре – Трикоми для уравнения эллиптико – гиперболического типа второго рода ранее не исследовались.

Задача Франкля с условием Трикоми для уравнений смешанного типов первого рода изучены работах М.М.Смирнова, А.К.Уринова, К.Б.Сабитова. В работах М.Мирсабурова и их учиников были исследованы локальные и нелокальные краевые задачи с разрывным условием Франкля для уравнений смешанного типов первого рода. Проведенный анализ состояния дел в этом направлении показывает, что в настоящее время, краевые задачи с конормальной производной для уравнения эллиптико - гиперболического типа второго рода с условием сопряжения типа Франкля ранее неизученные.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательской работы Национального исследовательского университета «Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства» в рамках комплексной научной работы № 6.2 «Решение дифференциальных уравнений в частных производных и его применения к инженерным задачам».

Целью исследования является изучение условий существование и единственности решения краевых задач типа Пуанкаре – Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода.

Задачи исследования:

доказать единственность решения задачи с интегральным оператором дробного порядка в граничных условиях и найти условия существования решения задачи;

доказать теоремы существования и единственности решения локальных и нелокальных краевых задач с условием Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода;

разработать принцип экстремума для эллиптико-гиперболических уравнений второго рода, доказать однозначной разрешимости решения аналога задачи Франкля с конормальной производной для смешанного уравнения второго рода;

найти условия существования и единственности решения нелокальной задачи типа Бицадзе-Самарского с условием Франкля для эллиптико-гиперболического уравнения второго рода.

Объектом исследования является вырождающиеся эллиптическое и эллиптико – гиперболическое уравнения второго рода.

Предметом исследования является локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода.

Методы исследований. В диссертации использованы теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода, сингулярных интегральных уравнений нормального типа, в том числе теория интегральных уравнений Винера – Хопфа и теории интегралов энергии, а также методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказана методом интегралов энергии единственность решения задачи с интегральным оператором дробного порядка в граничных условиях и найдены условия существования путем сведения задачи к уравнению Фредгольма второго рода;

при решении нелокальной задачи с условием Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода установлены тождества нового типа для операторов дробного порядка, с помощью которых доказаны теоремы единственности и существования решения поставленных задач;

разработан принцип экстремума для эллиптико-гиперболических уравнений второго рода, который применен к доказательству единственности решения аналога задачи Франкля с конормальной производной для смешанного уравнения второго рода, существование решения названной задачи доказано на основании теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода;

найдены условия единственности решения нелокальной задачи типа Бицадзе-Самарского с условием Франкля для эллиптико-гиперболического уравнения второго рода, существование решения установлено путем сведения задачи к сингулярному интегральному уравнению типа Винера-Хопфа и найдены условия решения этого интегрального уравнения.

Практическими результатами исследования являются следующие:

методы нахождения общего решения краевых задач типа Пуанкаре-Трикоми, для уравнения смешанного типа второго рода, были использованы нахождению решения задач, возникающих теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

разработан алгоритм решения сингулярного интегрального уравнения с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения с изолированной особенностью первого порядка.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов дифференциальных уравнений с частными производными, математического анализа, интегральной энергии и теории интегральных уравнений, дедуктивные выводы основаны на принятии, а также на строгом и полном доказательстве теорем

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе новые научные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории краевых задач для уравнений эллиптического и эллиптико–гиперболического типов второго рода, вырождающегося на границе и внутри области.

Практическая значимость результатов исследования определяется тем что, полученные научные результаты служат теоретической основой для моделирования газодинамических процессов различного характера, динамики жидкостей и газов, движущихся со сверхзвуковой скоростью и движение подземных вод в смешанных средах.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов по нахождению решения локальных и нелокальных краевых задач типа Пуанкаре-Трикоми для уравнения второго рода смешанного типа:

результаты о доказательстве существования и единственности решения краевой задачи с конормальным производным типа Пуанкаре-Трикоми для эллиптико-гиперболического уравнения второго рода были использованы в ведущих зарубежных журналах (Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol.43, no. 2, 484-495; Azerbaijan National Academy of Sciences, 2022, Vol.42, no.1, 86-98; Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol.42, no.15, 3616-3625) для определения условий единственности решения задачи в эллиптической области. Использование научного результата позволило найти решение нелокальных краевых линейных обратных задач типа Неймана и периодического типа для многомерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в бесконечном поле;

результаты, связанные с получением решения локальных и нелокальных краевых задач типа Пуанкаре – Трикоми для вырождающийся уравнений смешанного типа второго рода, были использованы в проекте №21-19-00324 на тему «Фундаментальные научные исследования новых бетонов с безобжиговым зольным гравием с переходом к экологически чистой и ресурсосберегающей энергетике и глубокой переработке угля» при получении решения нелокальной краевой задачи для вырождающийся уравнений внутри области(справка № ОД-21-4-319 Санкт-Петербургского политехнического университета имени Петра Великого от 7 июля 2022 г.). Полученные научные результаты позволила построить решений класса краевых задач со смещением для уравнений эллиптико-гиперболического типа.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 16 научно-практических конференциях, в том числе на 11 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 22 научных работ, из них 8 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе, 3 опубликованы в зарубежных журналах и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации 117 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава, названная **«Задачи с конормальным условием для уравнения эллиптического и смешанного типов второго рода»** и состоящая из двух параграфов, посвящена постановке и исследованию однозначной разрешимости краевых задач с конормальными и интегральными условиями для уравнения эллиптического и смешанного типа второго рода.

В первом параграфе этой главы исследуется краевая задача с конормальными и интегральными краевыми условиями для уравнения эллиптического типа второго рода вида

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad -1 < m < 0 \tag{1}$$

в конечной однозначной области D - в плоскости (x, y), ограниченной кривой σ при $x > 0,\ y > 0$ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$ и отрезком AB оси Ox ов. Введем обозначения $J = \{(x, y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}$, $\partial D = \vec{\sigma} \cup \overline{J}$, $2\beta = \dfrac{m}{m+2}$, причём

$$-\frac{1}{2} < \beta < 0. \tag{2}$$

Задача 1.1. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cup C^1(D \cup \sigma \cup J)$ причем u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше чем -2β в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$; 2) $u(x, y) -$ дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1.1) в области D; 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\left\{\delta(s) A_s[u] + \rho(s) u\right\}\Big|_{\sigma} = \varphi(s), \quad 0 < s < l, \tag{3}$$

$$a_0(x) u_y(x,0) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} u(x,0) + a_{n+1}(x) u(x,0) = b(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{4}$$

где $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $b(x)$, $a_j(x)$ $(j = \overline{0, n+1}) -$ заданные функции, причём

$$a_0(x) \neq 0,\ \sum_{j=0}^{n+1} a_j^2(x) \neq 0,\ \forall x \in \overline{J}, \tag{5}$$

$$\delta^2(s) + \rho^2(s) \neq 0, \quad \forall s \in [0, l], \tag{6}$$

$$\delta(s), \rho(s), \varphi(s) \in C[0, l], \qquad (7)$$

$$a_j(x),\ b(x) \in C\left(\bar{J}\right) \cap C^2(J),\ (j = \overline{0, n+1}), \qquad (8)$$

и $A_s[u] = y^m \dfrac{dy}{ds}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{dx}{ds}\dfrac{\partial u}{\partial y}$, -- конормальная производная, а $D_{0x}^{\alpha_j}[\bullet]$– интегральная оператор дробного порядка где $\alpha_j \in (-1, 0)$, l – длина всей кривой σ, s – длина дуги кривой σ, отсчитываемая от точки $B(1,0)$.

Доказана следующая

Теорема 1.1. Если выполнены условия (2), (5) ,(6) и

$$\delta(s)\rho(s) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq l, \qquad (9)$$

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_0(x)} \leq 0,\ \left(\frac{a_j(x)}{a_0(x)}\right)_x' \geq 0,\ \ \frac{a_j(1)}{a_0(1)} \leq 0, \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \qquad (10)$$

то задача 1.1 в области D не может иметь более одного решения.

Теорема 1.2. Если выполнены условия (2), (5)-(8) и

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leq const\ y^{m+1}(s), \qquad (11)$$

то в области D решение задачи 1.1 существует.

Во втором параграфе первой главы исследуется однозначная разрешимость краевой задачи типа Пуанкаре-Трикоми для уравнения эллиптическо – гиперболического типа второго рода вида

$$sgny|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0 \qquad (12)$$

в области $D = D_1 \cup D_2$, где D_1 - область, ограниченная кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(0,0),\ B(1,0)$ и отрезком $AB(y=0)$, а D_2 - область, ограниченная тем же отрезком AB и характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (12).

Задача 1.2. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right) \cap C_x\left(D_1 \cup \sigma\right) \cap C_y\left(D_1 \cup \sigma \cup J\right) \cap C_y\left(D_2 \cup J\right)$, причем производные u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше, чем единицы в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$; 2) $u(x,y) \in C^2(D_1)$ является регулярным решением уравнения (12) в области D_1, а в области D_2 – обобщенным решением из класса R_2[2]; 3) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$u_y(x, -0) = -u_y(x, +0); \qquad (13)$$

[2] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. Москва: «Высшая школа» 1985г. 304 с.

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (3) и

$$u(x,y)\big|_{AC} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}\ , \tag{14}$$

где $\delta(s)$, $\rho(s)$, $\varphi(s)$, $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Доказана следующая

Теорема 1.3. Если выполняются условия (2), (9) и $\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{\frac{m}{2}}u^2(1,y) = 0$, то решение задачи 1.2 в области D единственно.

Теорема 1.4. Если выполнены условия (2), (6)-(7), (10) и

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(x) \in C^2\left[0, \frac{1}{2}\right], \tag{15}$$

то в области D решение задачи 1.2 существует.

Теоремы единственности решение задач доказывается методом интеграл энергии, а существование с помощью теории интегралов.

Вторая глава, названная **«Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода»** и состоящая из двух параграфов, которое посвящена постановке и исследованию нелокальных краевых задач для уравнения (12) в области D, описанном в начале первой главы.

В первом параграфе второй главы в области D для уравнения (12) сформулирована следующая задача.

Задача C_1**.** Найти функцию $u(x,y)$, обладающую теми-же 1)-3) свойствами задачи 1.2, удовлетворяющим граничным условиям (3) и

$$\frac{d}{dx}u\left[\Theta_0(x)\right] + b\frac{d}{dx}u\left[\Theta_1(x)\right] = c(x), \qquad (x,0) \in J, \tag{16}$$

здесь

$$\Theta_0\left(\frac{x}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}x\right)^{\frac{2}{m+2}}\right) \quad \text{и} \quad \Theta_1\left(\frac{x+1}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right) \tag{17}$$

- точки пересечения характеристик уравнения (12), выходящих из точек $x \in J$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Доказана следующая

Лемма 2.1. Если функция $\tau'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $k > -2\beta$ при $0 < x < 1$, то функцию

$$T(x) = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta}\tau(x) \tag{18}$$

можно представить в виде

$$T(x) = \frac{\sin 2\pi\beta}{2\pi\beta}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x (x-t)^{2\beta}\,\tau'(t)\,dt.$$

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия

$$\tau(x) \in C[0,1] \cap C^{(1,k)}(0,1), \quad k > -2\beta \tag{19}$$

и функция $\tau(x)$ в точке $x = x_0$ $\left(x_0 \in (0,1)\right)$ принимает наибольшее положительное значение (НПЗ) и наименьшее отрицательное значение (НОЗ). Тогда функцию

$$E(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{-2\beta} T(t)}{x-t} dt$$

в точке $x = x_0$ можно представить в виде

$$E(x_0) = (1-x_0)^{-2\beta} \left\{ \left[x_0^{\,2\beta-1} cos 2\beta\pi + (1-x_0)^{2\beta-1} \right] \tau(x_0) - \tau(1)(1-x)^{2\beta-1} + \right.$$

$$\left. + (1-2\beta) \left[\ cos 2\beta\pi \int_0^{x_0} \frac{\tau(x_0) - \tau(t)}{(x_0 - t)^{2-2\beta}} d\,t - \int_{x_0}^1 \frac{\tau(t) - \tau(x_0)}{(t - x_0)^{2-2\beta}} d\,t \right] \right\}.$$

Лемма 2.3. Пусть выполнены условия (2), (19) и функция $\tau(x)$ в точке $x = x_0$ $\left(x_0 \in (0,1)\right)$ принимает НПЗ (НОЗ). Тогда функцию $T(x)$(см.(18)) в точке $x = x_0$ можно представить в виде

$$T(x_0) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x) \Big|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{Sin 2\beta\pi}{\pi} \left[x_0^{\,2\beta-1}\, \tau(x_0) + (1-2\beta) \int_0^{x_0} \frac{\tau(x_0) - \tau(t)}{(x_0 - t)^{2-2\beta}} d\,t \right],$$

причём

$$T(x_0) < 0 \quad \left(T(x_0) > 0\right), \quad x_0 \in J .$$

Из леммы 1-3 следует следующее

Теорема 2.1.(Аналог принципа экстремума А.В.Бицадзе). Если выполнены условия (2) и $b < 0$, то решение $u(x,y)$ задачи C_1 при $c(x) \equiv 0$ и $\tau(1) = 0$ своего НПЗ и НОЗ в замкнутой области $\bar{D}_1$ достигает лишь на $\bar{\sigma}$.

Теорема 2.2. Если выполнены условия теоремы 2.1, а функции $\delta(s)$ и $\rho(s)$ вблизи точек $A(0,0)$, $B(1,0)$ удовлетворяют условиям (9) и

$$\rho(0) \neq 0, \ \rho(l) \neq 0, \tag{20}$$

$$\begin{gathered} \left|u_x\right| \le const\, R_j^{\delta-1}, \quad \left|u_y\right| \le const\, R_j^{\delta-1}, \quad 0 < \delta < 1, \quad R_j^2 = (\theta - x)^2 + \frac{2}{m+2} y^{m+2}, \\ \left|q(s)\right| \le const \left[s\ (l-s) \right]^{\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 > -m + \frac{m+2}{2}(1-\delta); \ \theta = 0 \ \text{при } j = 1, \theta = 1 \ \text{при } j = 2, \end{gathered} \tag{21}$$

то в области D не может существовать более одного решения задачи C_1.

В втором параграфе второй главы в области D для уравнения (12) исследуется задача C_2 с нелокальным краевым условием

$$D_{0x}^{1-\beta}u\left[\theta_0(x)\right]=c(x)u(x,0)+f(x), \qquad (x,0)\in J,$$

где $c(x)$, $f(x)-$заданные функции, причём $c(x),\ f(x)\in C(\bar{J})\cap C^2(J)$.

Доказательства однозначной разрешимости поставленной задачи C_2 осуществляется аналогичным образом, как в первом параграфе этой главы.

Третья глава диссертации, названа **«Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода с условиями сопряжения типа Франкля»** и состоит из двух параграфов, посвящена постановке и исследованию краевых задач для уравления (12) в области $D = D_1 \cup D_2$.(см. задаче 1.2.)

Пусть $D_1 = D\bigcap\{\ y>0\}$, $D_2 = D\bigcap\{\ y<0\}$, $D=D_1\cup D_2\cup J$, $J=\{(x,y):0<x<1,\ y=0\}$, $J_1=\{($ $x,$ $<\}$ $J_2=\{(x,y):c<x<1,\ y=0\}$, C_0 -- точка пересечения характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c\in J$

В первом параграфе третьей главы для уравнения (12) исследована следующая

Задача TF**.** Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C\left(\bar{D}\right)\cap C_x^1\left(D_1\cup\sigma\right)\cap C_y^1\left(D_1\cup\sigma\cup J_1\cup J_2\right)\cap C_y^1\left(D_2\cup J_1\cup J_2\right)$, причем производные u_x и u_y могут обращаться бесконечность порядка меньше чем единицы в точках $A\left(0,0\right)$, $E(c,0)$ и $B\left(1,0\right)$; 2) $u(x,y)$ является обобщенным решением из класса R_2 в области D_j $(j=1,2)$; 3) на линии вырождения $J_1\cup J_2$ выполняется условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=-\lim_{y\to-0}u_y(x,y), \quad (x,0)\in J_1\cup J_2, \tag{22}$$

причем $u_y(x,0\pm0)=\nu^{\pm}(x)$ функция непрерывна и интегрируема в интервале J_j;
4) удовлетворяет следующим граничным условиям (3) и

$$u\left(x,y\right)\Big|_{AC_0}=\psi\left(x\right), \quad x\in[0,c/2], \tag{23}$$

$$u(p(x),0)=\mu u(x,0)+f(x), \ \ (x,0)\in\bar{J}_1, \qquad u(c,0)=0, \tag{24}$$

где $\mu=const>0,\ \ p\left(x\right)=\delta-kx,\ \ p'\left(x\right)<0,\ p(c)=c,\ p(1)=0,\ \ k=c/\left(1-c\right),\ \ \delta=c/\left(1-c\right),\ \ c\in J;$
$l-$ длина всей кривой σ, $s-$ длина дуги σ, отсчитываемой от точки $B(1,0)$, а $\rho(s)$, $\delta(s)$, $\varphi(s)$, $f(x)-$заданные функции, причём $f(0)=0$, $f(c)=0$, $\psi(0)=0$,

$$\rho(s),\delta(s),\varphi(s)\in C[0,l], \quad \delta(s)\neq0,\ \forall s\in\left[0;l\right], \tag{25}$$

$$\psi(x)\in C^2\left[0,\frac{c}{2}\right], \qquad f(x)\in C^2(\bar{J}_1), \tag{26}$$

Условие (23) является аналогом условия Трикоми, т.е. значения искомой функции на части AC_0 характеристики AC задается условие первого рода и на отрезке **в**ырождения J, нелокальное условие (24), связывающее значения искомой функции $u(x,0)=\tau(x)$ на отрезках $[0,c]$ и $[c,1]$. При этом на данном отрезке задается разрывное условие Франкля (24). Такие задачи исследовано в работах М.Мирсабурова и его учениками.

Доказана следующая

Теорема 3.1.(Аналог принципа экстремума А.В.Бицадзе). Если выполнены условия (2) и $0<\mu<1$, то решение $u(x,y)$ задачи ***TF*** при $\psi(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$ своего НПЗ и НОЗ в замкнутой области $\bar{D}_1$ достигает лишь на $\bar{\sigma}$.

Теорема 3.2. Если выполнены условия теоремы 3.1 и (9), а функции $\delta(s)$ и $\rho(s)$ вблизи точек $A(0,0)$, $B(1,0)$ удовлетворяют условиям (20) и (21) то в области D не может существовать более одного решения задачи ***TF***.

Теорема 3.3. Если выполнены условия (2), (24), (25) и (26), то в области D решение задачи ***TF*** существует.

В втором параграфе третьей главы исследуется следующая нелокальная краевая задача типа Бицадзе-Самарского для уравнения эллиптико – гиперболического типа второго рода с условием сопряжения типа Франкля

Задача BCF**.** Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую теми-же свойствами 1)-3) что и задача TF, 4) $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям (3), (24) и

$$D_{0x}^{1-\beta}u\left[\theta_0(x)\right]=a(x)u(x,0)+b(x),\quad (x,0)\in J_1, \tag{27}$$

где $a(x)$, $b(x)-$заданные функции, причем

$$0<\mu<1,\qquad a(x)\geq 0\quad \forall x\in \bar{J}_1, \tag{28}$$

$$a(x),\ b(x)\in C(\bar{J}_1)\cap C^1(J_1), \tag{29}$$

$$f(x)\in C^2(\bar{J}_1), \tag{30}$$

Доказана следующие.

Теорема 3.4.(Аналог принципа экстремума А.В.Бицадзе). Если выполнены условия (2) и (28), то решение $u(x,y)$ задачи BCF при $f(x)\equiv 0$, $b(x)\equiv 0$, своего НПЗ и НОЗ в замкнутой области $\bar{D}_1$ достигает лишь на $\bar{\sigma}$.

Теорема 3.5. Если выполнены условия теоремы 3.2 и (9) , а функции $\delta(s)$ и $\rho(s)$ вблизи точек $A(0,0)$, $B(1,0)$ удовлетворяют условиям (20) и (21) то в области D не может существовать более одного решения задачи BCF.

Теорема 3.6. Если выполнены условия (2), (24), (25), (29) и (30), то в области D решение задачи BCF существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена к исследованию локальных и нелокальных краевых задачи типа Пуанкаре – Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода.

Основные результаты исследования состоят в следующем

доказана методом интегралов энергии единственность решения задачи с интегральным оператором дробного порядка в граничных условиях и найдены условия существования путем сведения задачи к уравнению Фредгольма второго рода;

при решении нелокальной задачи с условием Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода установлены тождества нового типа для операторов дробного порядка, с помощью которых доказаны теоремы единственности и существования решения поставленных задач;

разработан принцип экстремума для эллиптико-гиперболических уравнений второго рода, который применен к доказательству единственности решения аналога задачи Франкля с конормальной производной для смешанного уравнения второго рода, существование решения названной задачи доказано на основании теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода;

найдены условия единственности решения нелокальной задачи типа Бицадзе-Самарского с условием Франкля для эллиптико-гиперболического уравнения второго рода, существование решения установлено путем сведения задачи к сингулярному интегральному уравнению типа Винера-Хопфа и найдены условия решения этого интегрального уравнения.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

“TASHKENT INSTITUTE OF IRRIGATION AND AGRICULTURAL MECHANIZATION ENGINEERS” NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY

ABDULLAYEV AKMALJON ABDUJALILOVICH

POINCARÉ - TRICOMI TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MIXED TYPE EQUATION OF THE SECOND KIND

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT of dissertation of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

Tashkent – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.PhD/FM333.

Dissertation has been prepared at "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers" National Research University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisors:	**Islomov Bozor Islomovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Sattorov Ermamat Norkulovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Babajanov Bazar Atajanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Fergana State University**

Defense will take place «30» September 2022 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2020.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered № /) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32), fax: (+99866) 235-19-38.

Abstract of dissertation sent out on «27» august 2022 year
(Mailing report № 1 on «27» august 2022 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

M.A. Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

A.B. Khasanov
Chairman of the Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD dissertation)

The aim of the research work is the study conditions for the existence and uniqueness of the solution of boundary value problems of the Poincaré - Tricomi type for mixed type equations of the second kind.

The object of the research work is the degenerate equations of elliptic and elliptic - hyperbolic types of the second kind.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the uniqueness of the solution of the problem with a fractional order integral operator in boundary conditions was proved by the method of energy integrals, and the existence conditions were found by reducing the problem to the Fredholm equation of the second kind;

when solving a nonlocal problem with the Poincaré-Tricomi condition for a mixed-type equation of the second kind, identities of a new type for fractional-order operators are established, with the help of which uniqueness and existence theorems for the solution of the problems posed are proved;

the extremum principle was developed for elliptic-hyperbolic equations of the second kind, which was applied to the proof of the uniqueness of the solution of an analogue of the Frankl problem with a conormal derivative for a mixed equation of the second kind, the existence of a solution to the named problem was proved on the basis of the theory of Fredholm integral equations of the second kind;

conditions for the uniqueness of the solution of a nonlocal problem of the Bitsadze-Samarsky type with the Frankl condition for an elliptic-hyperbolic equation of the second kind are found, the existence of a solution is established by reducing the problem to a singular integral equation of the Wiener-Hopf type, and conditions for solving this integral equation are found.

Implementation of the research results. Based on scientific results on finding a solution to local and non-local Poincaré-Tricomi-type boundary value problems for the mixed type equation of second kind:

results on the proof of the existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem with a Poincaré-Tricomi-type conormal derivative for an elliptic-hyperbolic equation of the second kind were used in leading foreign journals (Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol.43, no. 2, 484-495; Azerbaijan National Academy of Sciences, 2022, Vol.42, no.1, 86-98; Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol.42, no.15, 3616-3625) to determine the uniqueness conditions for the solution of a problem in an elliptic domain. The use of the scientific result made it possible to find a solution to non-local boundary linear inverse problems of the Neumann type and periodic type for a multidimensional elliptic equation with singular coefficients in an infinite field;

the results related to the solution of local and non-local boundary value problems of the Poincaré - Tricomi type for degenerate mixed-type equations of the second kind were used in project No. and resource-saving energy and deep processing of coal" when obtaining a solution to a non-local boundary value problem for degenerate equations within the region (Reference No. OD-21-4-319 of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University dated July 7, 2022). The obtained scientific results made it possible to construct solutions for a class of boundary value problems with a shift for equations of the elliptic-hyperbolic type.

The structure and volume of the dissertation. The thesis consists of introduction, three chapters, a conclusion and references. The volume of the dissertation is 117 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Салахитдинов М.С., Абдуллаев А.А. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа второго рода // ДАН РУз., 2013. -№1. -С. 3-5. (01.00.00; №7).
2. Islomov B.I., Abdullayev A.A. On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition // Journal Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 2018. Vol. 9(3), -pp. 307-318. (01.00.00; №5)
3. Abdullayev A.A. On uniqueness of a boundary value problem for an equation of elliptic hyperbolic type of the second kind // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2018. Vol. 5, -pp. 30-35. (01.00.00; №17)
4. Абдуллаев А.А. О единственности одной краевой задачи для уравнения эллиптико - гиперболического типа второго рода // Научный вестник НамГУ., 2019. -№8, -С. 25-33. (01.00.00; №14)
5. Abdullayev A.A., Ergashev T.G. Poincare-Tricomi problem for the equation of a mixed ellipticо-hyperbolic type of second kind // Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta, Matematika i Mekhanika, 2020. -№ 65. -pp. 5-21. (№3. IF = 0.9)
6. Абдуллаев А.А. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода // Научный вестник НамГУ., 2020. -№ 12. -С. 3-6. (01.00.00; №14)
7. Yuldashev, T.K., Islomov, B.I., Abdullaev, A.A. On Solvability of a Poincare–Tricomi Type Problem for an Elliptic–Hyperbolic Equation of the Second Kind // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021. Vol. 42(3), -pp. 663–675 (№3. IF = 0.378)
8. Абдуллаев А., Исломов Х. Об одной краевой задаче с конормальным условием для уравнения эллиптического типа второго рода // Бюллетень Института математики, 2021. Vol. 4, -№ 6, -С. 58-70 (01.00.00; №17)

II бўлим (II часть; part II)

9. Исломов Б. И., Абдуллаев А. А., Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2021. Том 201, -С. 65–79
10. Абдуллаев А.А. Сафарбаева Н. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода // Вестник Национального технического университета "ХПИ" Серия: Информатика и моделирование, 2018.-№ 28(1964). -С. 7-10.

11. Абдуллаев А.А. О единственности решения задачи типа Франкля для уравнения эллиптико – гиперболического типа второго рода // Вестник Национального технического университета "ХПИ" Серия: Информатика и моделирование 2019, -№ 13 (1338). -С. 7-10.

12. Абдуллаев А.А. Об одной краевой задаче с конормальной производной для уравнения смешанного типа // Международная научная конференция «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященная памяти академика А.В. Бицадзе. 16–18 июня, 2016. Москва. –С. 27-29.

13. Абдуллаев А.А. Об одной краевой задаче для уравнения эллиптико - гиперболического типа второго рода // Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2016» 9–10 ноябрь 2016 г. Бухара. -С. 327-330

14. Абдуллаев А.А. Об одной задаче типа Пуанкаре – Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода // "Академик Тошмуҳаммад Ниёзович Қори-Ниёзийнинг ҳаёти ва ижоди" мавзусидаги чет эл олимлари иштирокида илмий-амалий конференция тезислари тўплами Тошкент, 7-8 сентябрь 2017. –С. 97-98.

15. About one problem with a conormal and integral conditionfor the elliptic type equation of the second kind // Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» 15-17 декабря 2017, Ташкент, -С. 6-7.

16. Абдуллаев А.А. О разрешимости решения краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода. // Республиканская научно-практическая конференция "Новые результаты в математике и их применение" 14-15 Май 2018. Самарканд. -С. 19-21.

17. Абдуллаев А.А. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода // International conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics” September 17-20, 2018. Samarkand. -P.16-18

18. Abdullaev A. A. On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition. // Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Сборник научных статей международной научной конференции 24-26 октябрь 2019. Ташкент. -С.85-88.

19. Абдуллаев А. Об одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода // Тезисы докладов международной научной конференции на тему современные проблемы дифференциальных уравнений смежных разделов математики, 12-13 март, 2020. Фергана. С. 21-25.

20. Абдуллаев А., Исломов Б. Об одной краевой задаче с конормальным условием для урравнения эллиптического типа второго рода // Тезисы

докладов международной научной конференции “Современные проблемы математической физики” 12 – 15 сентября 2021. Стерлитамак, -С. 334-339.

21. Islomov B.I., Abdullayev A.A. A nonlocal boundary value problem of the Bitsadze-Samarskii type with an analogue of the Frankl condition for the mixed type equation of second kind. // “Modem problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021” Abstracts of the international scientic conference 15-17 November 2021. Fergana. –P. 126.

22. Islomov B.I., Abdullayev A.A. Boundary value problem of the Poincar´e-Tricomi type for the mixed type equation of the second kind // “Actual problems of stochastic analysis” dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician Sh.K.Formanov. February 20-21, 2021. Tashkent. –P.217-220.

Автореферат “Самарқанд давлат университети таҳририй-нашриёт бўлими” таҳририятида таҳрирдан ўтказилди ва ўзбек, рус, инглиз(резюме) тиллардаги матнлари мослиги текширилди (01.07.2022 й.)

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84х60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,5. Адади 100 дона. Буюртма № 45/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.