Бош илмий-методик марказ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

“ЗАМОНАВИЙ ГЕОМЕТРИЯ” МОДУЛИ БЎЙИЧА

ЎҚУВ –УСЛУБИЙ МАЖМУА

А.Юсупова – ФарДУ Математика кафедраси доценти, ф.м.ф.н.

2022

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил декабрдаги 648-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайѐрланди ва ФарДУ Илмий кенгашининг 2021 йил «30» декабрдаги 2-сонли қарори билан тасдиқланган.

Тузувчи: **А.Юсупова – ФарДУ Математика кафедраси доценти, ф.м.ф.н.**

Тақризчилар: **Э.Азизов – ФарДУ Математика кафедраси доценти, ф.м.ф.н.**

МУНДАРИЖА

I.Ишчи дастур

КИРИШ

Дастур Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда тасдиқланган “Таълим тўғрисида”ги Қонуни, Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сон, 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сон,2019 йил 8 октябрдаги “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”гиПФ-5847-сонли Фармонлари ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарорларида белгиланган устувор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касб маҳорати ҳамдаинновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдекамалиётга жорий этиш кўникмаларини такомиллаштиришни мақсад қилади.

Мазкур дастур замонавий талаблар ва ривожланган хорижий давлатларнинг олий таълим соҳасида эришган ютуқлар ҳамда орттирилган тажрибалар асосида «Математика» қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналиши учун тайёрланган намунавий ўқув режа ҳамда дастур мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришда хизмат қилади.

Модулнинг мақсади ва**вазифалари**

“Замонавий геометрия” модулининг мақсади: педагог кадрларни инновацион ёндошувлар асосида ўқув-тарбиявий жараёнларни юксак илмий-методик даражада лойиҳалаштириш, соҳадаги илғор тажрибалар, замонавий билим ва малакаларни ўзлаштириш ва амалиётга жорий этишлари учун зарур бўладиган касбий билим, кўникма ва малакаларини такомиллаштириш, шунингдек уларнинг ижодий фаоллигини ривожлантиришдан иборат.

“Замонавий геометрия” модулининг вазифаларига қуйидагилар киради:

- “Математика” йўналишида педагог кадрларнинг касбий билим, кўникма, малакаларини такомиллаштириш ва ривожлантириш;

-педагогларнинг ижодий-инновацион фаоллик даражасини ошириш;

-мутахассислик фанларини ўқитиш жараёнига замонавий ахборот-коммуникация технологиялари ва хорижий тилларни самарали татбиқ этилишини таъминлаш;

- мутахассислик фанлари соҳасидаги ўқитишнинг инновацион технологиялари ва илғор хорижий тажрибаларини ўзлаштириш;

“Математика” йўналишида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларини фан ва ишлаб чиқаришдаги инновациялар билан ўзаро интеграциясини таъминлаш.

Модул якунида тингловчиларнинг билим, кўникма ва малакалари ҳамда компетенцияларига қўйиладиган талаблар:

Математика фанлари бўйича тингловчилар қуйидаги янги билим, кўникма, малака ҳамда компетенцияларга эга бўлишлари талаб этилади:

Тингловчи:

- интеграл ва ўлчов тушунчаларини;
- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланишни;
- математик масалаларни математик тизимларда ечишни ва стандарт функциялардан фойдаланишни;
- математикани ўқитишда унинг татбиқлари билан тушунтиришни, ҳаётий ва соҳага оид мисолларни;
- математик фанларни ўқитишнинг замонавий усулларини ***билиши*** керак.

Тингловчи:

- ўлчовлар назариясидан математика, физика ва биология масалаларида кенг фойдаланиш;
- математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, иқтисодий соҳалар ва бошқа соҳаларда кенг қўллаш;
- математик фанларни ўқитишда инновацион таълим методлари ва воситаларини амалиётда қўллаш;
- талабанинг ўзлаштириш даражасини назорат қилиш ва баҳолашнинг назарий асослари ҳамда инновацион ёндашув услубларини тўғри қўллай олиш ***кўникмаларига*** эга бўлиши лозим.

Тингловчи:

- ўлчовлар назарияси ва унинг татбиқини турли фазоларда қўллай олиш;
- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланиш;
- математикани ўқитиш инновацион жараёнини лойиҳалаштириш ва ташкиллаштиришнинг замонавий усулларини қўллаш ***малакаларига*** эга бўлиши лозим.

Тингловчи:

- математикани ўқитишда фойдаланиладиган замонавий (matlab, mathcad, maple, GeoGebra ва бошқалар) математик пакетларини ўқув жараёнига татбиқ этиш;

-математиканинг хориж ва республика миқёсидаги долзарб муаммолари, ечимлари, тенденциялари асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;

- математикани турли соҳаларга татбиқ этиш;

- олий таълим тизимида математик фанлар мазмунининг узвийлиги ва узлуксизлигинитаҳлил қила олиш **компетенцияларига** эга бўлиши лозим.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар илғор хорижий мамлакатларда биология ўқитишни ташкил қилишнинг хорижий тажрибаларни ўрганиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар. Сўнгги йилларда математика соҳасидаги ютуқлар ва истиқболлар олий ўқув юртларидаги таълим жараёнининг мазмунини бойитишга хизмат қилади.

“Замонавий геометрия” модулининг соатлар бўйича тақсимоти

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат				
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси			Кўчма машғулот
			Жами	жумладан		
				Назарий	Амалий машғулот	
1.	Чизиқли фазо.	**4**	**4**	**2**	**2**	
2.	Евклид фазоси.	**4**	**4**	**2**	**2**	
3.	Псевдоевклид фазо.	**4**	**4**	**2**	**2**	
4.	Гиперболик фазо.	**4**	**4**	**2**	**2**	
5	Иккинчи тартибли сиртлар. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари.	**2**	**2**		**2**	
6.	Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари. Кўпхиллик геометрияси.	**2**	**2**		**2**	
Жами:		**20**	**20**	**8**	**12**	**0**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-Мавзу: Чизиқли фазо.

1. Чизиқли фазо ўлчами. Аффин фазо.
2. Аффин координаталар системаси.
3. Аффин алмаштиришлар ва текисликлари. Бичизиқли форма.

2-Мавзу:Евклид фазоси.

1. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.
2. Сирт дифференциал геометрияси.
3. Сирт ички геометрияси. Сирт ташқи геометрияси.

3-Мавзу: Псевдоевклид фазо.

1. Сферик фазо.
2. Риман геометрияси.

4-Мавзу:Гиперболик фазо.

1. Ярим Евклид фазолар.
2. Ярим гиперболик фазолар.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1-Амалий машғулот.Чизиқли фазо.

2-Амалий машғулот. Евклид фазоси.

3-Амалий машғулот. Псевдоевклид фазо.

4-Амалий машғулот. Гиперболик фазо.

5-Амалий машғулот.Иккинчи тартибли сиртлар. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари.

6-Амалий машғулот. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари. Кўпхиллик геометрияси.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 592 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 592 б.
4. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб ҳалқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.
5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.
7. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.
9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.
10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.
11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли

Фармони.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май "Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПФ-5729-сон Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь "2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август "Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида"ги ПФ-5789-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь "Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида"ги ПФ-5847-сонли Фармони.

Ш. Махсус адабиётлар

16. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

17. Bauer, H. Measure and Integration Theory, Berlin: de Gruyter,ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

18. Bear, H.S. A Primer of Lebesgue Integration, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.

19. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry//Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464

20. Bogachev, V. I. Measure theory, Berlin: Springer, 2006.

21. David Spencer "Gateway", Students book, Macmillan 2012.

22. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010. 204.

23. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts//2013, ISBN-13: 978-0313319983

24. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

25. H.Q. Mitchell "Traveller" B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

26. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni "PIONEER", B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

27. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

28. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

29. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

30. Lindsay Clandfield and Kate Pickering "Global", B2, Macmillan.

2013. 175.

31. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.

32. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

33. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.

34. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

35. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.

36. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

37. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

38. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.

39. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672 с.

40. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.

41. Гулобод Қудратуллоҳ қизи, Р.Ишмуҳамедов, М.Нормуҳаммедова. Анъанавий ва ноанъанавий таълим. – Самарқанд: “Имом Бухорий халқаро илмий-тадқиқот маркази” нашриёти, 2019. 312 б.

42. Ибраймов А.Е. Масофавий ўқитишнинг дидактик тизими. методик қўлланма/ тузувчи. А.Е.Ибраймов. – Тошкент: “Lesson press”, 2020. 112 бет.

43. Ишмуҳамедов Р.Ж., М.Мирсолиева. Ўқув жараёнида инновацион таълим технологиялари. – Т.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 б.

44. Кирянов Д. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.

45. Муслимов Н.Ава бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: “Sano-standart”, 2015. – 208 б.

46. Образование в цифровую эпоху: монография / Н. Ю. Игнатова; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

47. Олий таълим тизимини рақамли авлодга мослаштириш концепцияси. Европа Иттифоқи Эрасмус+ дастурининг кўмагида. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

48. Современные образовательные технологии: педагогика и психология: монография. Книга 16 / О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бугакова и др. – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

49. Усмонов Б.Ш., Ҳабибуллаев Р.А. Олий ўқув юртларида ўқув жараёнини кредит-модуль тизимида ташкил қилиш.–Т.: “ТКТИ” нашриёти, 2019.

IV. Интернет сайтлар

50. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги: www.edu.uz.

51. Бош илмий-методик марказ: www.bimm.uz

52. www. Ziyonet. Uz

53. Открытое образование. https://openedu.ru/

54. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma

55. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/

56. https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search

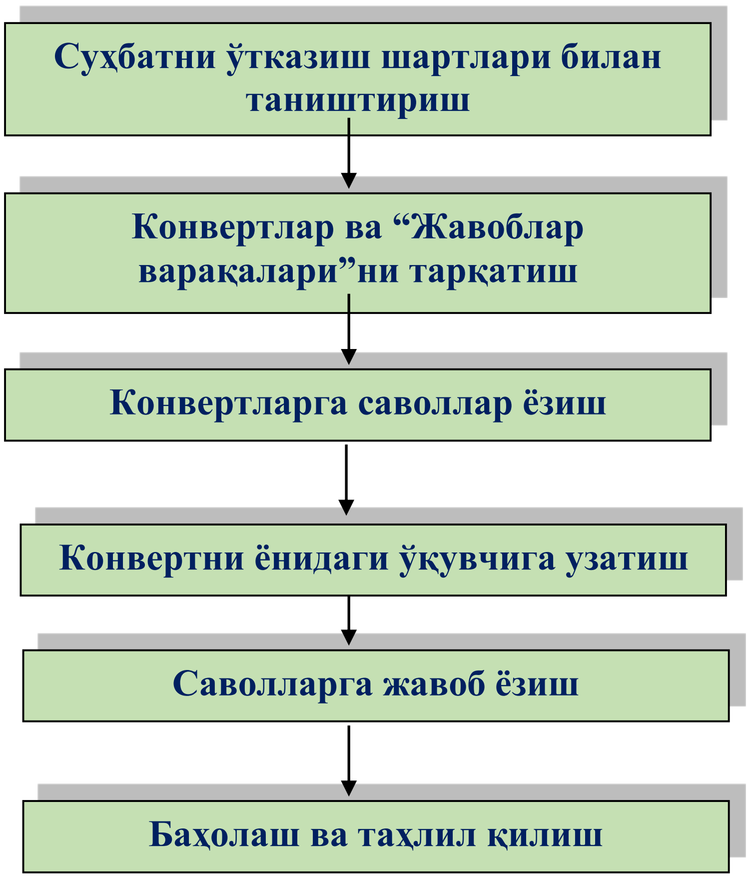
57. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html

58.https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics

II.МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

Давра столининг тузилмаси.

Ёзма давра суҳбатида стол-стуллар айлана шаклида жойлаштирилиб, ҳар бир таълим олувчига конверт қоғози берилади. Ҳар бир таълим олувчи конверт устига маълум бир мавзу бўйича ўз саволини беради ва “Жавоб варақаси”нинг бирига ўз жавобини ёзиб, конверт ичига солиб қўяди. Шундан сўнг конвертни соат йўналиши бўйича ёнидаги таълим олувчига узатади. Конвертни олган таълим олувчи ўз жавобини “Жавоблар варақаси”нинг бирига ёзиб, конверт ичига солиб қўяди ва ёнидаги таълим олувчига узатади. Барча конвертлар айлана бўйлаб ҳаракатланади. Якуний қисмда барча конвертлар йиғиб олиниб, таҳлил қилинади. Қуйида “Давра суҳбати” методининг тузилмаси келтирилган



“Давра суҳбати” методининг афзалликлари:

- ўтилган материалининг яхши эсда қолишига ёрдам беради;
- барча таълим олувчилар иштирок этадилар;
- ҳар бир таълим олувчи ўзининг баҳоланиши масъулиятини ҳис этади;

ўз фикрини эркин ифода этиш учун имконият яратилади**“Кейс-стади” методи**

«Кейс-стади» - инглизча сўз бўлиб, («case» – аниқ вазият, ҳодиса, «stadi» – ўрганмоқ, таҳлил қилмоқ) аниқ вазиятларни ўрганиш, таҳлил қилиш асосида ўқитишни амалга оширишга қаратилган метод ҳисобланади. Мазкур метод дастлаб 1921 йил Гарвард университетида амалий вазиятлардан иқтисодий бошқарув фанларини ўрганишда фойдаланиш тартибида қўлланилган. Кейсда очиқ ахборотлардан ёки аниқ воқеа-ҳодисадан вазият сифатида таҳлил учун фойдаланиш мумкин. Кейс ҳаракатлари ўз ичига қуйидагиларни қамраб олади: Ким (Who), Қачон (When), Қаерда (Where), Нима учун (Why), Қандай/ Қанақа (How), Нима-натижа (What).

“Кейс методи” ни амалга ошириш босқичлари.

Иш босқичлари	Фаолият шакли ва мазмуни
1-босқич: Кейс ва унинг ахборот таъминоти билан таништириш	✓ якка тартибдаги аудио-визуал иш; ✓ кейс билан танишиш(матнли, аудио ёки медиа шаклда); ✓ ахборотни умумлаштириш; ✓ ахборот таҳлили; ✓ муаммоларни аниқлаш
2-босқич: Кейсни аниқлаштириш ва ўқув топшириғни белгилаш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муаммоларни долзарблик иерархиясини аниқлаш; ✓ асосий муаммоли вазиятни белгилаш
3-босқич: Кейсдаги асосий муаммони таҳлил этиш орқали ўқув топшириғининг ечимини излаш, ҳал этиш йўлларини ишлаб чиқиш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил ечим йўлларини ишлаб чиқиш; ✓ ҳар бир ечимнинг имкониятлари ва тўсиқларни таҳлил қилиш; ✓ муқобил ечимларни танлаш
4-босқич: Кейс ечимини шакллантириш ва асослаш, тақдимот.	✓ якка ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил вариантларни амалда қўллаш имкониятларини асослаш; ✓ ижодий-лойиҳа тақдимотини тайёрлаш; ✓ якуний хулоса ва вазият ечимининг амалий аспектларини ёритиш

“Ассесмент” методи.

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур техника орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташхис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби:

“Ассесмент”лардан маъруза машғулотларида талабаларнинг ёки қатнашчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, семинар, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассесментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-МАВЗУ:ЧИЗИҚЛИ ФАЗО

РЕЖА:

1. Чизиқли фазо ўлчами. Афин фазо.
2. Афин координаталар системаси.
3. Афин алмаштиришлар ва текисликлари. Бичизиқли форма.

Таянч иборалар:*Чизиқли фазо, ўлчами,афин фазо, афин координаталар системаси, афин алмаштиришлар ва текисликлари,бичизиқли форма.*

Чизиқли фазо ўлчами. Афин фазо.

Кўп ҳолларда шундай обектлар билан иш кўришга тўғри келадики, бунда уларни қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш амалларини бажариш лозим бўлиб қолади. Бир неча мисол келтирамиз.

Геометрияда бундай объектлар уч ўлчамли фазодаги векторлар, яъни йўналишли кесмалардир. Агар йўналишли икки кесмани параллел кўчириш йўли билан устма-уст тушириш мумкин бўлса, улар айни бир векторни аниқлайди деб ҳисобланади. Шунинг учун бу кесмаларнинг ҳаммасини бир нуқтадан бошлаб чиқариш қулай. Бу нуқтани биз координаталар боши деб атаймиз. Маълумки, векторларни қўшиш амали қуйидагичадир: x ва y векторларнинг йиғиндиси деб, томонлари x ва y бўлган параллелограммнинг диогонали ҳисобланади. Векторни сонга кўпайтириш амали ҳам маълум усул биланкиритилади.

1. Алгебрада биз n та сондан иборат $x=\xi_1'e_1+\xi_2'e_2+\ldots+\xi_n'e_n$ кўринишдаги системалар (масалан: матрицанинг йўллари, чизиқли форма коэффициентлари, тўплами ва ҳ.к.) билан иш кўришга тўғри келади. Бундай системаларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари одатда қуйидагичакиритилади: $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ ва $y=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ системалар йиғиндиси деб, $x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\ldots,\xi_n+\eta_n)$ системага айтилади.$x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ система билан λсоннинг кўпайтмаси деб, $\lambda x=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\ldots,\lambda\xi_n)$ системага айтилади. Анализда функцияларни қўшиш ва уларни сонга кўпайтириш амаллари тўғрисида т таъриф берилади. Аниқлик учун бундан сўнг $[a,b]$ сегментдаберилган ҳамма узлуксиз функциялартўпламини текширамиз.

Келтирилган мисолларда қўшиш ва сонга кўпайтиришдан иборат худди бир хил амаллар мутлақо ҳар хил объектлар устида бажарилади. Бундай мисолларнинг ҳаммасини бир нуқтаи назар билан ўрганиш учун, биз чизиқли, яъни аффин фазо тушунчасини киритамиз.

1-таъриф. Агар қуйидаги шартлар бажарилса, x,y,z,... элементларнинг V тўплами чизиқли (афин) фазо дейилади:

а) хар икки x ва y элементларга x ва y элементлар йиғиндиси деб аталадиган z элемент мос қилиб қўйилган; x ва y элементларнинг йиғиндиси $x+y$ билан белгиланади;

б) бирор майдоннинг ҳар бир x элементи ва ҳар бир λсон билан x элемент кўпайтмаси деб аталган λx элемент мос қилиб қўйилган.

Бу амаллар қуйидаги талабларни (аксиомаларни) қаноатлантириши керак. 1^0.$x+y=y+x$ (коммутативлик), 2^0.$(x+y)+z=x+(y+z)$(ассоциативлик), 3^0.Хар қандай x учун шундай 0 элемент мавжудки, x+0=x бўлади. 0 элемент ноль элемент дейилади.

4^0 Хар қандайх учун –x билан белгиланадиган шундай элемент мавжудки, x+(-x)=0 бўлади.

1^0 $1 \cdot x=x$,

2^0 $\alpha(\beta x)=\alpha\beta(x)$.

3^0 $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

4^0 $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha x$.

Биз қўшиш ҳамда сонга кўпайтириш амалларини қандай таърифланиши ҳақида гапирмаганимиз бежиз эмас. Биз бу амалларни фақат юқорида таърифланган аксиомаларга буйсунишларини талаб қиламиз ҳолос. Шунинг учунҳар қачон юқорида қайд қилинган шартларни қаноатлантирувчи амаллар билан иш кўрар эканмиз, биз уларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари деб, элементлари устида бу амаллар бажарилган тўпламни эса чизиқли фазо деб хисоблашга ҳақлимиз. Юқорида келтирилган 1-3 мисоллар бу аксиомаларгабўйсунади.

Яна бир мисол кўриб чиқайлик;

1. Даражаси натурал n сондан ошмайдиган ва одатдагича қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш амаллари бажариладиган ҳамма кўпхадлар тўплами чизиқли фазо ҳосил қилади.

Ёлғиз n-даражали кўпхадлар тўплами чизиқли фазо ташкил қилмайди, чунки n-даражали икки кўпхад йиғиндиси n дан пастроқ бўлиб чиқиши ҳам мумкин; масалан, $(t^n+t)+(-t^n+t)=2t$.

Чизиқли фазо элементларини биз *векторлар* деб атаймиз. Бу сўзнинг кўпинча тор маънода (1-мисолдаги каби) ишлатиши бизни чалғитмаслиги керак. Бу чизиқ билан боғлик бўлган геометрик тасаввурлар бир қанча натижаларни ойдинлаштиришга, баъзи ҳолларда эса бу натижаларни олдиндан кўра билишга ёрдам беради.

Агар чизиқли фазо таърифида қатнашаётган $\lambda,\mu,\ldots$ сонлар хақиқий бўлса, у ҳолда фазо *хақиқий чизиқли фазо* дейилади.

Биз $\lambda,\mu,\ldots$ ларни ихтиёрий F майдон элементлари деб умумийроқ фараз этишимиз мумкин. Бу ҳолда V фазо F *майдондаги чизиқли фазо* дейилади. Қуйида баён этиладиган тушунча ва теоремаларнинг кўпчилиги ихтиёрий майдондаги чизиқли фазалар учун ҳам бевосита тўғри бўлади.

2. Афин координаталар системаси.

Бундан кейин векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги деган тушунчалар муҳим аҳамиятга эга бўлади.

2-таъриф. V–чизиқли фазо бўлсин. Агар камида биттаси нолдан фарқ қиладиган $\alpha,\ \beta,\gamma,\ldots,\theta$ сонлар мавжуд бўлиб, $\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\theta v=0$ (1) тенглик ўринли бўлса, бу ҳолда $x,y,z,\ldots,v$ векторлар чизиқли боғлиқ векторлар дейилади.

Чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар чизиқли эркли векторлар дейилади. Бошқача қилиб айтганда, $\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots+\theta v=0$ тенглик $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\theta=0$ бўлган ҳолдагина ўринли бўлса, $x,y,z,\ldots,v$ векторлар чизиқли эркли векторлар дейилади. $x,y,z,\ldots,v$ векторлар чизиқли боғлиқ, яъни улар (1) муносабат билан боғланган бўлсин ва ундаги коэффициентлардан камида биттаси, масалан, α нолдан фарқли деб фараз қилайлик. Бу ҳолда $\alpha x=-\beta y-\gamma z-\ldots-\theta v$ бўлади. Буни энди α га бўлиб ва деб фараз қилиб, $-\frac{\beta}{\ }=\lambda$, α $-\frac{\gamma}{\ }=\mu,\ldots,-\frac{\theta}{\ }=\varsigma$ α α тенгликни ҳосил қиламиз. $x=\lambda y+\mu z+\ldots+\varsigma v$ Агар x вектор $y,z,\ldots,v$ векторлар орқали (2) кўринишдаги тенглик билан ифода этилса, у ҳолда биз x вектор $y,z,\ldots,v$ векторларнинг чизиқли комбинацияси деб атаймиз.

Шундай қилиб, агар $x,y,z,\ldots,v$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда улардан камида биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади. Тескарисини, яъни биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлганвекторлар чизиқли боғлик векторлар бўлишининг ҳам тўғрилигини кўрсатиш мумкин.

Энди фазонинг ўлчамлар сони (ўлчамлиги) тушунчасини киритишга ўтамиз.

Тўғри чизиқдаги векторлар тўпламида ҳар қандай иккита вектор пропорционал, яъни чизиқли боғлиқдир. Текисликда иккита чизиқли эркли векторни топиш мумкин, аммо ундаги ҳар қандай учта вектор чизиқли боғлиқдир.

Агар V – уч ўлчамли фазодаги векторлар тўплами бўлса, у ҳолда V да учта чизиқли эркли векторни топиш мумкин, аммо бундаги ҳар қандай тўртта вектор чизиқли боғлиқ бўлади.

Биз кўрамизки, тўғри чизиқ, текислик ва уч ўлчамли фазодаги чизиқли эркли векторларнинг максимал сони геометриядаги тўғри чизиқ, текислик ҳамда фазонинг ўлчами сонига тўғри келади. Шунинг учун қуйидаги умумий таърифни қабул қилишимиз табиий.

3-таъриф. Агар V чизиқли фазода n та чизиқли эркли вектор мавжуд бўлиб, бундан ортиқ чизиқли эркли векторлар бўлмаса, V фазо n ўлчамли фазо дейилади ва dim V деб белгиланади. Агар *V* фазода чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда *V* фазо *чексиз ўлчамли* фазо дейилади.

Чексиз ўлчамли фазолар математиканинг махсус бўлимларида текширилади. Биз бу курсда фақат чекли ўлчамли фазолар билан шуғулланамиз.

Тестлар

№	Тест топшириғи	Тўғри жавоб	Муқобил жавоб	Муқобил жавоб	Муқобил жавоб	Мавзу
1.	*n* ўлчамли *V* фазонинг .... тўплами *V* нинг базиси деб аталади. Нуқталар ўрнини тўлдиринг	*n* та чизиқли эркли векторлари	*n* та векторлари	*n* та чизиқли векторлари	чизиқли эркли векторлари	1-мавзу
2.	*x,y,z,...* элементларнинг *V* тўплами чизиқли (аффин) фазо бўлиши учун нечта шарт бажарилиши керак?	2	3	1	4	1-мавзу
3.	Чизиқли фазо элементларини нима деб аталади?	векторлар	сонлар	тенгламалар	илдизлар	1-мавзу
4.	Чизиқли фазонинг ҳарбир элементи базис орқали........ чизиқли ифодаланишиникўрсатинг. Нуқталар ўрнини тўлдиринг	ягона равишда	Чексиз кўп	Икки кўринишда	Уч кўринишда	1-мавзу
5.	Чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар нима деб аталади?	чизиқли эркли векторлар	эркли векторлар	чизиқли векторлар	чизиқсиз эркли векторлар	1-мавзу
6.	Базис ўзгарганда векторнинг координаталари	ўзгаради	ўзгармайди	домийлигин и сақлайди	базис ўзгармайди	1-мавзу
7.	Уч ўлчамли фазода базис қандай ҳосил қилинади?	текисликда ётмаган ҳар қандай учта вектор	Бир текисликда ётган ҳар қандай учта вектор	текисликда ётмаган ҳар қандай иккита вектор	ҳар қандай учта вектор	1-мавзу
8.	Агар *V* фазода чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда *V* фазо ....фазо дейилади. Нуқталар ўрнини тўлдиринг	Чексиз ўлчамли	Чекли ўлчамли	Ўлчамга эга бўлмаган	Фазо бўлмайди	1-мавзу

9.	x ва y векторларни кўшишда	уларнинг координаталари қўшилади.	Биринчи координаталари қўшилади, қолган координаталари ўзгаришсиз қолади	уларнинг координаталари ўзгармайди	x ва y векторларни кўшиш амали аниқланмаган	1-мавзу
10.	x векторни □сонга кўпайтиришда	унинг координаталари шу сонга кўпайтирилади.	унинг координаталари 0 кўпайтирилади.	унинг координаталари бир сонига кўпайтирилади.	унинг координаталари шу сонга кўпайтирилмайди.	1-мавзу

Шаклан бир бирига яқин савол-жавоблар:

савол	жавоб
Агар V чизиқли фазода n та чизиқли эркли вектор мавжуд бўлиб, бундан ортиқ чизиқли эркли векторлар бўлмаса, V фазо қандай фазо деб аталади?	V фазо n ўлчамли фазо дейилади
V фазо n ўлчами қандай белгиланади?	dimV
Агар *V* фазода чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у холда V фазо қандай фазо деб аталади?	*V* фазо *чексиз ўлчамли* фазо дейилади.
Чизиқли фазо элементларини нима деб аталади?	векторлар

Ёпиқ тестлар

Савол	Жавоб
Уч ўлчамли фазода базис қандай ҳосил қилинади?	Бир текисликда ётмаган ҳар қандай учта вектор
Даражаси натурал *n* сондан ошмайдиган ва одатдагича қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш амаллари бажариладиган ҳамма кўпхадлар тўплами нима ҳосил қилади?	чизиқли фазо ҳосил қилади
n ўлчамли *V* фазонинг *n* та чизиқли эркли векторлари тўплами нима ҳосил қилади?	*V* нинг базисини ҳосил қилади
Агар *V* фазода чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда қандай фазо хосил қилинади?	Чексиз ўлчамли фазо ҳосил қилинади

Назорат саволлари:

1. Параллел тўғри чизиқлар боғлами деб нимага аталади ?
2. Чизиқли фазо таърифини айтинг.
3. Чизиқли фазога мисоллар келтиринг
4. Тўғри чизиқлар боғлами деб нимага аталади ?

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

2.Bauer, H. Measure and Integration Theory, Berlin: de Gruyter,ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

3.Bear, H.S. A Primer of Lebesgue Integration, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.
4.Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry//Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464
5.Bogachev, V. I. Measure theory, Berlin: Springer, 2006.
6.David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.
7.English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010. 204.
8.Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts//2013, ISBN-13: 978-0313319983
9.Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.
10.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.
11.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.
12.Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672peretti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

2-МАВЗУ: ЕВКЛИД ФАЗОСИ.

РЕЖА:

1. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.
2. Сирт дифференциал геометрияси.
3. Сирт ички геометрияси. Сирт ташқи геометрияси.

Таянч иборалар*:* Евклид фазоси,Ортогонал ва ортонормал системалар.

Е-ҳақиқий сонлар устида вектор фазо бўлиб, унда қандайдир қонун ёки қоида бўйича $\forall$ 2 векторнинг скаляр кўпайтириш деб аталувчи (x,y) сон аниқланган бўлиб, бу 4 та

1. $\forall x, y \in E$ учун $(x,y)=(y,x)$

2.$\forall x,y,z\in E$ учун $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

3.$\forall x\in E,\ \forall\lambda\in R,\ (\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

4. $\forall x\neq 0\quad (x\text{-}x)>0\quad (x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда бундай вектор фазони Евклид фазоси дейилади.

Масалан: $E = R^3;\quad x=(x_1,x_2,x_3),\quad y=(y_1,y_2,y_3)$

$$(x,y)=(x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3\cdot y_3) \qquad (1)$$

1) $(x,y)=(y,x)$

2) $(x+y,z)=(x_1+y_1)\cdot z_1+(x_2+y_2)\cdot z_2+(x_3+y_3)\cdot z_3=$

$$=(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)+(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)=(x,z)+(y,z)$$

3) $(\lambda x,y)\overset{(1)}{=}\lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2+\lambda x_3y_3=\lambda(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=\lambda(x,y)$

4) $(x,x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0$

Теорема: Евлид фазосида қуйидаги Коши-Буняковский тенгсизлиги ўринли.

$$(x,y)^2\leq(x,x)(y,y) \qquad (2)$$

Исбот. $\forall\lambda\in R,\quad \forall x\cdot y\in E,\quad (\lambda x-y,\lambda x-y)>0$

(λx-y, λx)+(λx-y,-y)>0

(λx, λx)+(-y, λx)+(λx₁-y)+(-y₁-y)≥0

$\lambda^2(x,x)-\lambda(y,x)-\lambda(x,y)+(y_1y)>0$

$\lambda^2(x,x)-2\lambda(x,y)+(y,y)\geq 0$

λ - нисбатан квадратик учхад $(x,x)\geq 0$ бўлгани учун

$$b^2-ac\leq 0\quad a=(x,x)\quad b=-(x,y),\quad c=(y,y)$$

$$(x,y)^2\leq(x,x)(y,y)$$

$$(x,y)=x_1y_1+....+x_ny_n=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leq\sum_{k=1}^{n}x_k^2\ \sum_{k=1}^{n}y_k^2$$

$$|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)} \qquad (3)$$

Таъриф $\sqrt{(x,x)}$ скаляр кўпайтмадан чиққан x ни $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$,

$\|x\|-x$ элементнинг нормаси.

1. $\|x\|\geq 0$

2. $\|\lambda x\|=\|\lambda\|\|x\|\quad \|\lambda x\|=\sqrt{(\lambda x,\lambda x)}=\sqrt{\lambda^2(x,x)}=|\lambda|+\sqrt{(x,x)}=|\lambda|\|x|$

3. $\|x+y\|<\|x\|+\|y\|$

$$|x+y|^2=(x+y,x+y)=(x+y,x)+(x+y,y)=$$

$$=(x,x)+(y,x)+(y,x)+(y,y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=$$

$$\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\|x+y\|^2\leq(\|x\|+\|y\|)^2$$

$\|x\|=\sqrt{x_1^2+....+x_n^2}$ x - элемент (вектори)

Таъриф. Норма аниқланган *E* фазони нормаллашган фазо дейилади.

$(E, \|\cdot\|)$ - нормалашган.

Таъриф. *(x,y)=0* бўлса, ортогонал дейилади, яъни $x \perp y$

$$|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \Rightarrow \frac{|(x,y)|}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1.$$

Таъриф. $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

Теорема: Агар *(x,y)=0* бўлса, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ бўлади ва аксинча $\dfrac{\pi}{2}$ бўлса *(x,y)=0*.

Таъриф. Ушбу $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторлар системаси берилган . Агар $(e_i, e_j)=0$ $i \neq j$ бўлса берилган системани артогонал векторлар системаси дейилади.

Таъриф. $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторлар системаси ортогонал системани ташкил этади,агар узунликлари 1 га тенг бўлса, ортогонал бўлса

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Теорема: $e_1, \dots, e_n$ ўрта нормал система чизиқли боғланмаган $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$$(ek_1 \lambda e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = (e_k, 0) = 0$$

$$\lambda_1 (e_k, e_1) + \lambda_2 (e_k, e_2) + \dots + \lambda_n (e_k, e_n) = 0$$

$$\lambda_k^{'} (e_k e_k) = 0 \qquad \lambda_k = 0 \quad k = \overline{1,0}$$

Теорема: E^n фазода $e_1, \dots, e_n$ ўрта нормал базисни ташкил этса $\Rightarrow (x,y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ бўлади ҳақиқатдан ҳам

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \qquad\qquad y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$$

$$(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j (e_{i, e_j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Агар *E* да ўрта нормал базис бўлса, $e_1, \dots, e_n$ $(x, e_k) = x_k$.

Теорема. Агар E^n да $f_1, \dots, f_n \forall$ базис бўлса

$$(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (f_i, f_j) =< (f_i, f_j) = a_{ij} >= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

бўлади.

Айтайлик E Евклид фазо бўлиб, $f_1,\dots,f_n$ (1) ундаги $\forall$ базис бўлсин. бизнинг мақсадимиз E да аниқланган (1) ни ортогонал базис сўнгра эса ортонормал базисга айлантириш мумкинлигини кўриб чиқамиз. Ушбу жараённи алгебра ва сонлар назариясида ортогоналлаш жараёни дейилади.

У куйидагича

$$n=1, \quad f_1 \quad f_1 \neq 0 \quad e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1, f_2)}}$$

$$n=2 \quad f_1 \; f_2; \quad e_1 = \frac{f_1}{\sqrt{(f_1, f_2)}}; \quad q_2 = f_2 \neq \lambda f_1 \quad (q_R, e_1 = 0)$$

$$e_2 = \frac{q_2}{\sqrt{(q_1 q_2)}} \qquad (f_2 + \lambda f_1, e_1) = 0 \qquad \lambda = \frac{(f_2 f_1)}{(f_1 e_1)} f$$

$$(f_2 e_1) + (f_1 e_1) = 0$$

Фаразқилайлик. $b_1,\dots,b_n$ (1) $b_1,\dots,b_m$, $c_{m+1},\dots,c_n$ (2)

$$(b_{m+1}, b_i) = 0(4) \qquad (i = \overline{1,m})$$

$$(c_{m+1} + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m; b_i) = 0 \quad (i = \overline{1,m})$$

$$(c_{m+1}, b_i) + \lambda_i (b_i, b_i) + \dots + \lambda_i (b_i, b_i) + \dots + \lambda_m (b_m, b_i) = 0$$

$$(c_{m+1}, b_i) + \lambda_i (b_i, b_i) = 0 \quad b_i \neq 0 \quad (b_i, b_i) \neq 0$$

$$\lambda_i = -\frac{(c_{m+1} b_i)}{(b_i, b_i)} \tag{5}$$

(5) бажарилса, $\Rightarrow$ (4) тенглик ўринли бўлади ва натижада $b_1, b_2, \dots, b_m, b_{m+1}$ $m+1=n$ бўлса ортогоналлаш жараёни тугайди.

Агарда $m+1<n$ бўлса, мулохазани такрорлаймиз.

$$b_{m+2} = c_{m-2} + \lambda_1^{'} b_1 + \dots + \lambda_{m+1}^{'} b_{m+1} \tag{6}$$

каби ажратиб, $(b_{m+2}, b_j)=0$ (8) $j = \overline{1,m}$.

$$\lambda' = -\frac{(c_{m+2}, b_j)}{(b_j, b_j)} \tag{7}$$

Шундай қилиб, $b_1,\dots,b_m,\dots,b_{m+1}$, b_{m+2} (7) ортогонал теоремани қурамиз. $m+2=n$.

Шундай қилиб E фараз ортогонал жараён кетма-кет қўллаб $b_1,\dots,b_n$ (8) ортогонал базисга эга бўламиз.

$$e_1 = \frac{b_1}{|b_1|} ... e_n = \frac{b_n}{|b_n|} \tag{9}$$

$$(e_i, e_j) = \left(\frac{b_i}{|b_i|}, \frac{b_i}{|b_j|}\right) = \frac{(b_i, b_j)}{|b_j| \cdot |b_i|} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (b_i, b_j) = (b_j)^2$$

1-теорема. E_n ўлчовли фазо бўлиб, (8) ортогонал чизиқли боғланмаган векторлар системаси чизиқли эркли

$$x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$$

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \quad \lambda_i = 0 \quad i = \overline{1, n}$$

$$e_k (1 \leq k < n) \quad (e_k;\ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n) = (e_k, \theta) = 0$$

$$\lambda_1 (e_1, e_k) + \lambda_2 (e_2, e_k) + ... + \lambda_k (e_k, e_k) + ... + \lambda_n (e_k, e_n) = 0$$

$$\lambda_e (e_k, e_k) = 0 \quad (e_k, e_k) = 1 \quad \lambda_k = 0 \quad k = \overline{1, n}$$

2-теорема: E ўлчовли Евклид фазоси $(e_1, ..., e_n)$ ортогонал базис бўлсин. $\Rightarrow$ $x_k = (x_1 e_k)$

$$(x, e_k) = (x_1 e_1 + ... + x_n e_n, e_k) = x_1 (e, e_k) + ... + x_k (e_k, e_2) + ... +$$

$$+ x_n (e_n, e_2) = x_k (e_k, e_k) = x_k \cdot 1 = x_k$$

Таъриф. E фазо $R_1 \subset E, \quad R_2 \subset E$ бўлсин $R_2 = \{y : \forall x \in R; \ \ (y, x) = 0\}$

Теорема: R_2,E аниқланган скаляр кўпайтмага нисбатан қисм фазо бўлади.

$$\forall y_1 y_2 \in R_2 \quad y_1 - y_2 \in R_2$$

$$\forall x \in R_1 \quad (y, x) = 0 \quad (y_2, x) = 0$$

$$(y_1 - y_2; x) = (y_1, x) - (y_2; x) = 0 - 0 = 0$$

$$y_1 - y_2 \in R_2$$

2) $\forall \lambda \in R, \ \ \forall y \in R_2 \quad (xy, x) = \lambda \ \ (y, x) = \lambda, \ 0 = 0 \ \ \lambda y \in R_2$

Таъриф. R_2-E нинг қисм фазосини R_1 қисм фазога ортогонал қисм фазо дейилади.

$$E = R_1 (+)\ R_2 \quad \dim\ E = n \quad \dim R_1 = k \quad \dim\ R_2 = n - k$$

$e_1 ... e_n$ (1) $\Rightarrow$ бундаги базисни $(q_1 ..., q_{n-k})$ (2) билан белгилайлик.

Ортогоналлаш жараёнига кўра (2) билан (1) ни ортогонал базисга келтириш мумкин.

$$x = \underbrace{x_1 e_1 + ... + x_n e_k}_{x'(\in) x''} + ... + x_n e_n -$$

$$x' = x_1 e_1 + ... + x_k e_k = R_1$$
$$x'' = (kx+1)\cdot x_{k+1} e_n + ... + x_k e_n = R_2$$

Масалан:

1 x x^2 (1)

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \quad q_1 = 1 \quad q_2 = q_1 + \lambda_1 x \quad (q_2 q_1) = 0$$

$$q_2 = 1 + (-2)x = 1 - 2x \quad q_3 = x^2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$$

$$(1 + \lambda_1 x_1 1) = \int_0^1 (1 + \lambda x)dx \neq 0$$

$$\left(x + \lambda, \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \quad 1 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = -2$$

$$q_2 = 1 + (-2)x = 1 - 2x$$
$$q_3 = x^2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \quad (q_3, q_1) = (x^2 + \lambda_1 + \lambda_2(1-2x)\cdot 1) = 0$$
$$(x^2 + \lambda_1 + \lambda_2(1-2x)\cdot 1 - 2x) = 0$$
$$(x^2, 1) + (\lambda_1, 1) + \lambda_2(1-2x, 1) = 0$$

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx + \lambda_2 \int_0^1 (1-2x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \lambda_1 x\Big|_0^1 - \frac{\lambda_2}{2}\frac{(1-2x)}{2}\Big|_0^1$$

Бундан $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ топамиз:

$$(x^2, 1-2x) + \left(-\frac{1}{3};\ 1-2x\right) + \lambda_2(1-2x, 2x) = 0$$

$$\int x^2(1-2x)dx - \frac{1}{3}\int (1-2x)dx + \lambda_2 \int_0^1 (1-2x)dx = 0$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{\lambda_0}{2}\frac{(1-2x)}{3}\Big|_0^1 = 0$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{\lambda_2}{3} = 0 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad q_3 = x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1-2x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$1; 1-2x;\ x^2 - x + \frac{1}{6}$ ортогонал векторлар системаси

$$e_1=1 \quad e_2=\frac{1-2x}{\sqrt{(1-2x)(1-2x)}}, \quad e_3=\frac{x^2-x+\frac{1}{6}}{\sqrt{\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)}}$$

$$(1-2x,1-2x)=\int_0^1(1-2x)^2\,dx=-\frac{1}{2} \quad \frac{(1-2x)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$e_2=\frac{1-2x}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\sqrt{3}(1-2x)$$

$$\left(x^2-x+\frac{1}{6},x^2-x+\frac{1}{6}\right)=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{36}x-2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{180}$$

$e_3=\sqrt{180}\quad\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\quad e_1,e_2,e_3-$ ортогонал базис.

Ёпиқ тестлар

Савол	Жавоб
$e_1,e_2,\dots,e_n$ векторлар системаси берилган . Агар $(e_i,e_j)=0 \quad i\neq j$ бўлса берилган системани қандай система деб аталади?	Ортогонал векторлар системаси дейилади.
Агар Евклид фазосида чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда бу фазо қандай фазо дейилади?	Чексиз ўлчамли фазо дейилади
Е-ҳақиқий сонлар устида вектор фазо евклид фазоси бўлиши учун унда қандайдир қонун ёки қоида бўйича ихтиёрий 2 векторнинг скаляр кўпайтириш деб аталувчи (x,y) сон аниқланган бўлиб, нечта хосса ўринли бўлиши керак?	**4**
Евлид фазосида қайси тенгсизлик ўринли?	Коши-Буняковский

Назорат саволлари:

1. Қандай жараён ортогоналлаш жараёни дейилади?
2. Ортогонал базис деганда ниманитушунасиз?
3. Евклид фазосининг қисм фазоси ҳақида нима биласиз ?

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003
2. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001
3. Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014
4. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., изд. МГУ,2004

3-мавзу: ПСЕВДОЕВКЛИД ФАЗО.

РЕЖА:

1. Сферик фазо.
2. Риман геометрияси.

Таянч иборалар: *Псевдоевклид фазо, Псевдоевклид фазода масофа*

Маълумки, Евклид фазосида координаталар бошидан ихтиёрий М нуқтагача бўлган масофа

$$OM^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (1)$$

формула билан аниқланар эди. Энди шу формулани ўзгартириб, масофани $OM^2=x^2+y^2-z^2$ бўйича топишни кўриб чиқайлик.

ОМ масофа $x^2+y^2>z^2$ бўлганда ҳақиқий мусбат сон, $x^2+y^2<z^2$ бўлганда эса мавхум сонни аниқлайди. $x^2+y^2=z^2$ бўлганда эса масофа 0га тенг бўлади (М нуқта 0 билан устма-уст тушмаса хам).

Бу формулани координаталар кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M_1M^2{}_2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

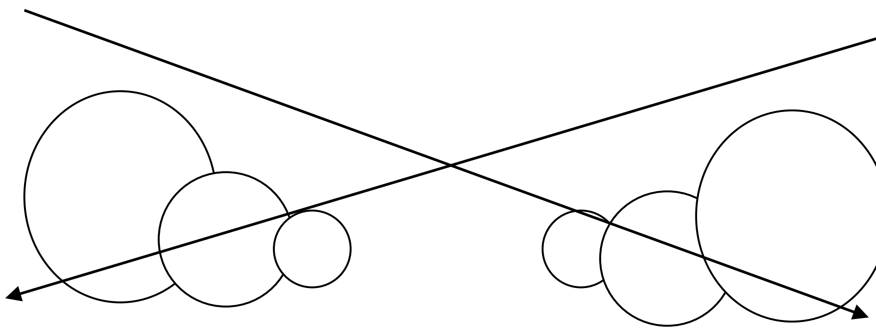
OM_1 ва OM_2 кесмалар орасидаги бурчакни эса

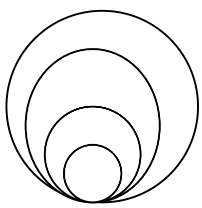
$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2-z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2-z_2^2}}$$

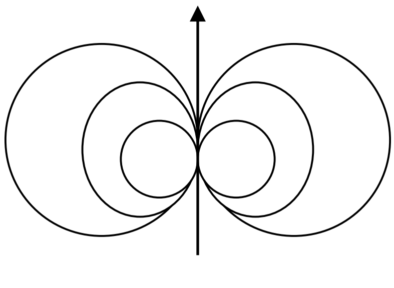
Узунлик ва бурчаклар шу формулалар асосида аниқланган фазолар ***псевдоевклид фазолар*** деб аталади. Бу фазода Евклид фазосининг кўпгина аксиома ва хоссалари сақланиши билан бир қаторда айрим муносабатлар кескин фарқ қилади.

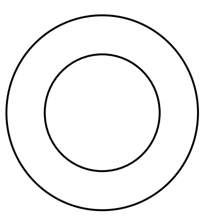
Псевдоевклид фазода масофани юқоридагича аниқланишидан кўринадики, унда уч хил тўғри чизиқлар бўлиши мумкин: барча кесмалари мусбат ҳақиқий узунликка эга тўғри чизиқлар; мавхум узунликдаги кесмаларга эга бўлган тўғри чизиқлар ва барча кесмалари 0 узунликка эга бўлган тўғри чизиқлар. Бу тўғри чизиқларни фазовий ўхшаш, вақтли ўхшаш ва изотроп тўғри чизиқлар деб юритилади.

Псевдоевклид фазодаги бу типдаги тўғри чизиқларни чизмадаги кўриниши қуйидагича бўлади:





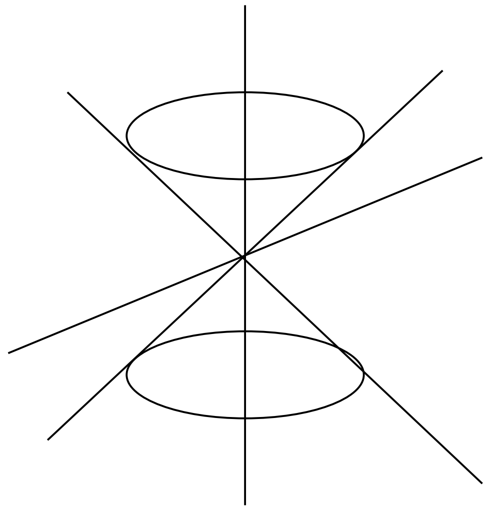




Юқоридаги формуладан ОМ=0 шартни қаноатлантирадиган барча М нуқталар $x^2+y^2-z^2=0$ тенглама билан аниқланадиган текисликда ётади.

Бу эса учи 0 нуқтада жойлашган конус сиртни ифодалайди.

Кўриниб турибдики, ҳақиқий узунликдаги тўғри чизиқлар конусдан ташқарида, мавхумлари ичида ва 0 га тенглари эса конус сиртда ётади.



Назорат топшириқлари

1. Конус сирт тенгламаси қандай кўринишга эга?
2. Псевдоевклид фазода масофа қандай аниқланади?
3. Қандай фазолар псевдоевклид фазолар деб аталади?
4. Псевдоевклид фазода Евклид фазосининг аксиома ва хоссалари сақланадими?

Ёпиқ тестлар

Савол	Жавоб
$x^2+y^2>z^2$ бўлганда ОМ масофа қандай аниқланади?	ҳақиқий мусбат сонни аниқлайди.
$x^2+y^2=z^2$ бўлганда ОМ масофа қандай аниқланади ?	масофа 0га тенг бўлади (М нуқта 0 билан устма-уст тушмаса хам).
$x^2+y^2<z^2$ бўлганда ОМ масофа қандай аниқланади?	мавхум сонни аниқлайди

Адабиётлар

1.Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

2.H.Q. Mitchell "Traveller" B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

3.H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni "PIONEER", B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

4. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

5.Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

6.Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

7.Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

8.Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.

9.Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672

10. Нарманов А.Я. Аналитикгеометрия. Т., “Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти”, 2008 й.

4-МАВЗУ: ГИПЕРБОЛИК ФАЗО

РЕЖА:

1. Ярим Евклид фазолар.
2. Ярим гиперболик фазолар.

Таянч иборалар: эллиптик фазо, гиперболик фазо

n ўлчовли эллиптик фазо деб, R_{n+1} фазонинг сферасидаги диаметриал қарама-қарши бўлган нуқталар тўпламига айтилади (изометрик жуфт).

Бу фазони S_n билан белгиланади.

S_n фазони ноевклид Риман фазо деб ҳам аталади.

R_{n+1} фазо сфераларига уринмалар R_n фазони ташкил этганлигидан, чексиз кичик орлиқларда $S_п$ геометрияси $R_п$ фазо геометриясига яқин бўлади.

$S_п$ фазонинг m ўлчовли текислиги S_m фазони ташкил этади.

Эллиптик фазода масофа масаласи қандай ўрнатилган?

Агар $S_п$ фазонинг X нуқтасини ифодаловчи векторлардан бири $\bar{x}$, иккинчиси ҳам $\bar{x}$ бўлса, у ъолда бу векторлар $\bar{x}^2 = \bar{p}$ муносабат билан боьланган бўлади.

$\bar{x}$ билан аниқланган $S_п$ фазонинг X нуқтасини X($\bar{x}$) билан боғланади.

Бунда, S–S_{Norton}фазодаги X($\bar{x}$) ва У() нуқталар орасидаги масофа, p эса эгрилик радиусидир.

$S_п$ фазо координаталари сифатида R_{n+1} фазонинг $\bar{x}$ векторининг x^2 координаталарини қараш мумкин.

Энди гиперболик фазонинг вектор аксиомаси асосида курилишини кўриб чиқайлик

Гиперболик фазони таърифлаш учун $E_п$афин фазонинг I+IV группа аксиомаларидан ташқари қуйидаги V группа аксиомалари бажарилиши керак:

V.1^0. Ҳар иккита $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб аталувчи К=$\bar{a}\,E\,\bar{b}$ сон мос қуйилган бўлсин.

V.2^0. Скаляр кўпайтма коммутатив, яони $\bar{a}\,E\,\bar{b}=\bar{b}\,E\,\bar{a}$

V.3^0. Скаляр кўпайтма векторларни қўшишга нисбатан дистрибутив яъни $\bar{a}\,E(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\,E\,\bar{b}+\bar{a}\,E\,\bar{c}$

V.4^0. Ҳақиқий кўпайтувчини скаляр кўпайтма ташқарисига чиқариш мумкин:$(k\bar{a})E\,\bar{b}=k\bar{a}\,E\,\bar{b}$

V.5^0. Шундай $\bar{a}_i$ кўринишдаги i та векторлар мавжудки, улар учун

$$\bar{a}_a E\,\bar{a}_a>0 \qquad (a\leq l)$$

$$\bar{a}_n E\,\bar{a}_n<0 \qquad (u>l),\ \bar{a}_i E\,\bar{b}_j,\ i\neq j$$

Бундай шартлар асосида қурилган l индексли псевдоевклид фазони $R_п$ кўринишда белгилаймиз.

1. Бизга маълумки F(x,y)=0 тенглама текисликда бирор тўғри чизиқни аниқлайди, яъни ОХУ текисликдаги координаталари х ва у бўлган барча нуқталар тўплами бу тенгламани қаноатлантиради. Шунингдек, фазода хам F(x,y,z)=0 (1)

Тенглама OXYZ да бирор сиртни, яони координаталари x,y,z бўлган ва (1) тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини аниқлайди. (1) тенглама сиртнинг тенгламаси, x,y,z лар эса унинг ўзгарувчи координаталари дейилади.

Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$a_1+x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_2xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \quad .$$

бу тенгламадаги $a_1,a_{22},a_{33},a_2,a_{13},a_{23}$ коэффициентларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиши керак. Айрим ҳолларда сирт тенгламаси билан эмас, балки у ёки бу хоссага эга бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни билан берилиши мумкин. бу ҳолда сиртнинг геометрик хоссаларидан фойдаланиб унинг тенгламаси тузилади.

13^0. Сферанинг OXYZ тўғри бурчакли Декарт координаталар системасидаги тенгламасини тузамиз.

Маркази $0'(a,b,c)$ нуқтада ва радиуси R бўлган сфера берилган бўлсин. Агар $\mu(x,y,z)$ нуқта сферанинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, у ҳолда $0'(a,b,c)$ ва $\mu(x,y,z)$ нуқталар орасидаги масофани тоипш формуласидан фойдалансак, сфера тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (1)$$

(*13*)–маркази $0'(a,b,c)$ бўлган нуқтада ётувчи ва радиуси R га тенг бўлган сфера тенгламаси дейилади. Агар (*13*) да a=b=c=0 бўлса, маркази координаталар бошида ётувчи ва радиуси R га тенг бўлган сфера тенгламасига эга бўламиз:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (2)$$

(*13*) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0 \qquad (3)$$

Сфератенгламасииккинчитартиблисиртбўлишиникўрсатайлик. Бунинг учун сиртнинг (2) тенгламасида $a_2=a_{13}=a_{23}=0$ ва $a_1=a_{22}=a_{33}$ деб олинса, (2) тенглама сферанинг тенгламаси эканини текширамиз. Бунинг учун $a_1\neq 0$ деб (4) нинг ҳамма ҳадларини a_1 га бўламиз ва қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A=\frac{2a_{14}}{a_{11}}, B=\frac{2a_{24}}{a_{11}}, C=\frac{2a_{34}}{a_{11}}, D=\frac{a_{44}}{aa_{11}}$$

Натижада

$$x^2+y^2+z_2+Ax+By+Cz+D=0$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Охирги тенгламани ушбу кўринишда ёзиб оламиз

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(A^2+B^2+C^2-4D\right)$$

Ёки $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2$ (5)

(5) тенгламадан кўринадики, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ бўлганда (4) тенглама маонога эга бўлади. Демак, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ бўлса, (5) тенглама маркази

$$\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$$

нуқтада ва радиуси

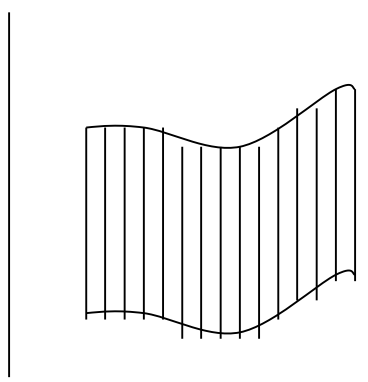
$$R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$$

бўлган сферани ифодалайди. Агар $A^2+B^2+C^2-4D=0$ бўлса, (5) тенглама

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$$

кўринишда бўлиб, у фақат битта $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$ нуқтани ифодалайди.

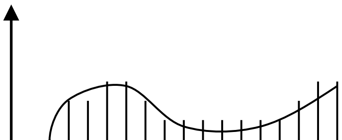
2^0. Бирор П текисликда ётувчи L чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан ўтувчи ва берилган l тўғри чизиққа параллел бўлган барча тўғри чизиқлардан ташкил топган сирт ***цилиндрик сирт*** дейилади. бунда L чизиқ цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси, l тўғри чизиққа параллел ва L чизиқни кесувчи чизиқлар унинг ясовчиси дейилади (1–чизма).



Йўналтирувчилари координата текисликларидан бирида ётувчи ясовчилари эса шу текисликка перпендикуляр бўлиб, координаталар ўқига параллел бўлган цилиндрик сиртларни кўрайлик.

OX текисликда тенгламаси F(x,y)=0 (6)

бўлган L чизиқ ва ясовчилари OZ ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртни ясаймиз (2–чизма). (6) тенглама OXYZ координаталар системасида цилиндрик сирт эканини кўрсатайлик.



M(x,y,z) –цилиндрик сиртнинг ихтиёрий тайинланган нуқтаси бўлсин. М нуқта орқали ўтувчи ясовчининг L йўналтирувчиси билан кесишган нуқтасини N билан белгилаймиз. N нуқта М нуқтанинг ОХУ текислигидаги проекциясидир. Шунинг учун М ва N нуқталар битта х абцисса ва битта у ординатага эга. N нуқта L чизиқда ётгани учун у эгри чизиқнинг (6) тенгламасини қаноатлантиради.

Демак, бу тенгламани M(x,y,z) нуқтанинг координаталари ҳам қаноатлантиради. OXYZ фазода L йўналтирувчи қуйидаги иккита тенглама системаси билан аниқланади:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ Z=0 \end{cases}$$

Худди шунга ўхшаш

$$\begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

тенгламалар цилиндрик сиртларнинг L йўналтирувчи чизиқларини мос равишда OXZ ва OYZ текисликдаги ҳолатини аниқлашни кўрсатиш мумкин.

Хусусий ҳолларда цилиндрик сиртларнинг йўналтирувчилари эллипс, гипербола, парабола, иккита кесишувчи тўғри чизиқ, иккита ўзаро параллел (устма-уст тушмаган) тўғри чизиқлардан иборат бўлиши мумкин. Бундай сиртларни мос равишда эллиптик цилиндр, параболик цилиндр, гиперболик цилиндр, иккита кесишувчи текислик, иккита параллел текислик деб юритилади ва уларнинг тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

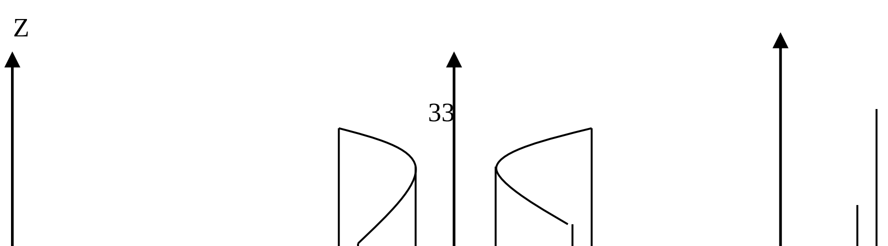
Эллиптик цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (3-чизма)

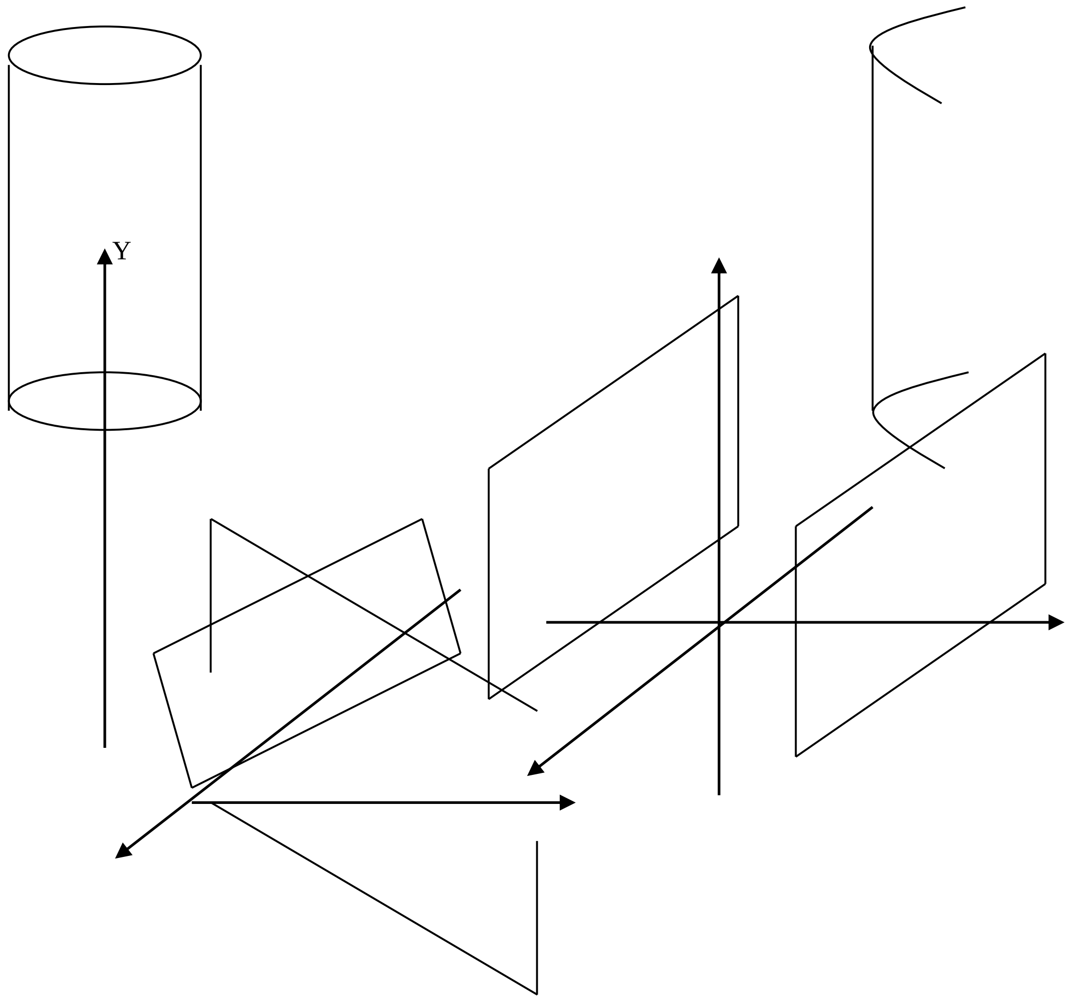
Гиперболик цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (4-чизма)

Параболик цилиндр: $y^2=-2px$ (5-чизма)

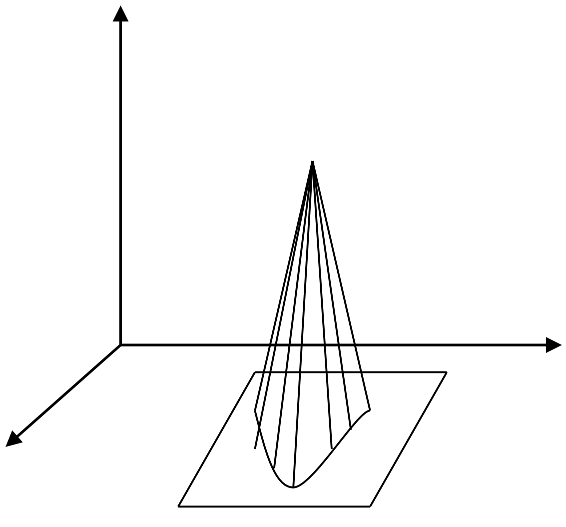
Икки кесишувчи текислик: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (6-чизма)

Икки параллел текислик: $x^2-a^2=0$ $(a\neq 0)$ (7-чизма)





3



1^0. Бирор Q текисликда L иккинчи тартибли чизиқ ва бў текисликка тегишли бўлмаган M_0 нуқта берилган бўлсин.

Таъриф. Фазодаги M_0 нуқтадан ўтиб, L ни кесиб ўтувчи барча тўғри чизиқлар тўплами иккинчи тартибли конус сирт (ёки конус) дейилади. M_0 нуқта конус учи, L чизиқ конус йўналтирувчиси, конусни ҳосил қилувчи чизиқлар эса унинг ясовчилари дейилади.

Конус ясовчилари бўлган тўғри чизиқлар маркази конус ичида бўлган тўғри чизиқлар боғламига тегишли бўлади. конус тенгламасини келтириб чиқарайлик. Q текислик ва ундаги L чизиқ OXУ текисликда ётган бўлсин. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқта эса OXУ текисликдаги ётмаган ихтиёрий нуқта бўлсин. конуснинг ихтиёрий M(x,y,z) нуқтасини олайлик, у ҳолда M_0M тўғри чизиқ конуснинг ясовчиси бўлиб, L чизиқ билан $M(x_1,y_1,z_1)$ нуқтада кесишади. M_0,M_1,M нуқталар бир тўғри чизиқда ётгани учун $\overrightarrow{M_0M_1}=\lambda\overrightarrow{M_0M}$ тенглик ўринли.

Бу тенгликдан

$$x_1-x_0=\lambda(x-x_0)\Rightarrow x_1=x_0+\lambda(x_0-x_0)$$

$$y_1-y_0=\lambda(y-y_0)\Rightarrow y_1=y_0+\lambda(y_0-y_0)$$

$$z_1-z_0=\lambda(z-z_0)\Rightarrow z_1=z_0+\lambda(z_0-z_0)$$

Охирги тенгликдан λ ни топиб, олдинги икки тенгликка қўямиз:

$$x_1=x_0+\frac{x-x_0}{z_0-z}z_0,\ y_1=y_0+\frac{z-z_0}{z_0-z}z_0 \qquad (7)$$

$$M_1\in L \quad\Rightarrow\quad F(x_1,y_1)=0$$

ёки

$$F\left(\frac{x-x_0}{z_0-z}z_0,\ y_0+\frac{z-z_0}{z_0-z}z_0\right)=0 \qquad (8)$$

(8) ифода конус тенгламаси дейилади. Иккинчи тенглама конуснинг Декарт координаталар системасидаги энг содда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (9)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

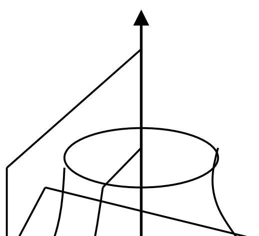
кўринишда бўлади.

2^0. Q текисликда бирор L чизиқ ва *l* тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Таъриф. L чизиқнинг *l* тўғри чизиқ атрофида айланишдан ҳосил бўлган Ф фигура айланма сирт дейилади. бунда L айланма сиртнинг меридиани, *l* айланиш ўқи дейилади.

Айланма сиртнинг тенгламасини келтириб чиқарайлик.

Декарт координаталар системасини шундай танлаймизки, бунда Q–(OYZ) текислик, *l*–(OZ) ўқ ҳамда L:F(x,z)=0 бўлсин.



L чизиқнинг (OZ) ўқ атрофида айланишидан қандайдир Ф сирт ҳосил бўлсин (9-чизма). M(x,y,z) шу сиртга тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин. M нуқтадан OZ ўққа перпендикуляр ўтказсак, кесимда маркази $0\in$(OZ) нуқтада бўлган бирор айлана ҳосил қилинадики, у айлана L чизиқ билан $M_1(0,y_1,z_1)$ нуқтада кесишсин. Кесим айланадан иборат бўлгани учун:

$$\rho(0,M)=\rho(0,M_1) \qquad (10)$$

Бу масофалар икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра қуйидагича бўлади:

$$\rho(0,M)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\rho(0,M_1)=\sqrt{(0-0)^2+(y_1-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{y_1^2}=|y_1|.$$

Бу қийматларни (10) тенгликка қўямиз:

$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$M\in$ L бўлгани учун:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0 \qquad (11)$$

(11) тенглама L чизиқни 0Z ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламасидир.

Агар L чизиқ мос равишда 0X ва 0У ўқлар атрофида айлантирсак, ҳосил бўлган сиртларнинг тенгламалари мос равишда

$$F\left(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0 \text{ ва } F\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0 \qquad (12)$$

кўринишларда бўлади.

Ёпиқ тестлар

Савол	**Жавоб**
Эллиптик цилиндр тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Гиперболик цилиндр тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Параболик цилиндр тенгламаси	$y^2=-2px$
Эллипсоид тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1$

Назорат саволлари

1. Қандай сирт цилиндрик сирт дейилади ?
2. Эллиптик цилиндр тенгламасини ёзинг
3. Гиперболик цилиндр тенгламасини ёзинг
4. Параболик цилиндр тенгламасини ёзинг
5. Икки кесишувчи текислик тенгламасини ёзинг
6. Икки параллел текислик тенгламасини ёзинг

Адабиётлар

1.Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

2.H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

3.H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

4. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

5.Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

6.Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

7.Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

III.Амалий машғулот материаллари

1-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАВЗУ:ЧИЗИҚЛИ ФАЗО

1-таъриф. Агар қуйидаги шартлар бажарилса, x,y,z,... элементларнинг V тўплами чизиқли (афин) фазо дейилади:

а) хар икки x ва y элементларга x ва y элементлар йиғиндиси деб аталадиган z элемент мос қилиб қўйилган; x ва y элементларнинг йиғиндиси $x+y$ билан белгиланади;

б) бирор майдоннинг ҳар бир x элементи ва ҳар бир λсон билан x элемент кўпайтмаси деб аталган λx элемент мос қилиб қўйилган.

Бу амаллар қуйидаги талабларни (аксиомаларни) қаноатлантириши керак.

1^0. $x+y=y+x$ (коммутативлик),

2^0. $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативлик),

3^0. Хар қандай x учун шундай 0 элемент мавжудки, x+0=x бўлади. 0 элемент ноль элемент дейилади.

4^0. Хар қандайх учун –x билан белгиланадиган шундай элемент мавжудки, x+(-x)=0 бўлади.

1^0. $1 \cdot x = x$,

2^0 $\alpha(\beta x) = \alpha\beta(x)$.

3^0 $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,

4^0 $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha x$.

Биз қўшиш ҳамда сонга кўпайтириш амалларини қандай таърифланиши ҳақида гапирмаганимиз бежиз эмас. Биз бу амалларни фақат юқорида таърифланган аксиомаларга буйсунишларини талаб қиламиз ҳолос. Шунинг учунҳар қачон юқорида қайд қилинган шартларни қаноатлантирувчи амаллар билан иш кўрар эканмиз, биз уларни қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари деб, элементлари устида бу амаллар бажарилган тўпламни эса чизиқли фазо деб хисоблашга ҳақлимиз. Юқорида келтирилган 1-3 мисоллар бу аксиомаларгабўйсунади.

Яна бир мисол кўриб чиқайлик;

1.Даражаси натурал n сондан ошмайдиган ва одатдагича қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш амаллари бажариладиган ҳамма кўпхадлар тўплами чизиқли фазо ҳосил қилади.

Ёлғиз n-даражали кўпхадлар тўплами чизиқли фазо ташкил қилмайди, чунки n-даражали икки кўпхад йиғиндиси n дан пастроқ бўлиб чиқиши ҳам мумкин;масалан,

$$(t^{n}+t) + (-t^{n}+t) = 2t\ .$$

Чизиқли фазо элементларини биз *векторлар* деб атаймиз. Бу сўзнинг кўпинча тор маънода (1-мисолдаги каби) ишлатиши бизни чалғитмаслиги керак. Бу чизиқ билан боғлик бўлган геометрик тасаввурлар бир қанча натижаларни ойдинлаштиришга, баъзи ҳолларда эса бу натижаларни олдиндан кўра билишга ёрдам беради.

Агар чизиқли фазо таърифида қатнашаётган $\lambda,\mu,\ldots$сонлар хақиқий бўлса, у ҳолда фазо *хақиқий чизиқли фазо* дейилади. Биз$\lambda,\mu,\ldots$ ларни ихтиёрий F майдон элементлари деб умумийроқ фараз этишимиз мумкин. Бу ҳолда V фазо *F майдондаги чизиқли фазо* дейилади. Қуйида баён этиладиган тушунча ва теоремаларнинг кўпчилиги ихтиёрий майдондаги чизиқли фазалар учун ҳам бевосита тўғри бўлади.

2. Афин координаталар системаси.

Бундан кейин векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги деган тушунчалар муҳим аҳамиятга эга бўлади.

2-таъриф. *V*–чизиқли фазо бўлсин. Агар камида биттаси нолдан фарқ қиладиган $\alpha, \beta, \gamma, ..., \theta$ сонлар мавжуд бўлиб, $\alpha x+\beta y+\gamma z+...+\theta v=0$ (1) тенглик ўринли бўлса, бу ҳолда $x,y,z,...,v$ векторлар чизиқли боғлиқ векторлар дейилади. Чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар чизиқли эркли векторлар дейилади. Бошқача қилиб айтганда, $\alpha x+\beta y+\gamma z+...+\theta v=0$ тенглик $\alpha=\beta=\gamma=...=\theta=0$ бўлган ҳолдагина ўринли бўлса, $x,y,z,...,v$ векторлар чизиқли эркли векторлар дейилади.

$x,y,z,...,v$ векторлар чизиқли боғлиқ, яъни улар (1) муносабат билан боғланган бўлсин ва ундаги коэффициентлардан камида биттаси, масалан, α нолдан фарқли деб фараз қилайлик. Бу ҳолда

$$\alpha x=-\beta y-\gamma z-...-\theta v$$

бўлади. Буни энди α га бўлиб ва деб фараз қилиб, $-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda, -\frac{\gamma}{\alpha}=\mu, ..., -\frac{\theta}{\alpha}=\varsigma$

тенгликни ҳосил қиламиз. $x=\lambda y+\mu z+...+\varsigma v$

Агар x вектор $y,z,...,v$ векторлар орқали (2) кўринишдаги тенглик билан ифода этилса, у ҳолда биз x вектор $y,z,...,v$ векторларнинг чизиқли комбинацияси деб атаймиз.

Шундай қилиб, агар $x,y,z,...,v$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлса, у ҳолда улардан камида биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади. Тескарисини, яъни биттаси қолганларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлганвекторлар чизиқли боғлик векторлар бўлишининг ҳам тўғрилигини кўрсатиш мумкин.

Энди фазонинг ўлчамлар сони (ўлчамлиги) тушунчасини киритишга ўтамиз.

Тўғри чизиқдаги векторлар тўпламида ҳар қандай иккита вектор пропорционал, яъни чизиқли боғлиқдир. Текисликда иккита чизиқли эркли векторни топиш мумкин, аммо ундаги ҳар қандай учта вектор чизиқлибоғлиқдир.

Агар *V* – уч ўлчамли фазодаги векторлар тўплами бўлса, у ҳолда *V* да учта чизиқли эркли векторни топиш мумкин, аммо бундаги ҳар қандай тўртта вектор чизиқли боғлиқ бўлади.

Биз кўрамизки, тўғри чизиқ, текислик ва уч ўлчамли фазодаги чизиқли эркли векторларнинг максимал сони геометриядаги тўғри чизиқ, текислик ҳамда фазонинг ўлчами сонига тўғри келади. Шунинг учун қуйидаги умумий таърифни қабул қилишимиз табиий.

3-таъриф. Агар V чизиқли фазода n та чизиқли эркли вектор мавжуд бўлиб, бундан ортиқ чизиқли эркли векторлар бўлмаса, V фазо n ўлчамли фазо дейилади ва dimV деб белгиланади.

Агар *V* фазода чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда *V* фазо *чексиз ўлчамли* фазо дейилади.

Чексиз ўлчамли фазолар математиканинг махсус бўлимларида текширилади. Биз бу курсда фақат чекли ўлчамли фазолар билан шуғулланамиз.

Топшириқлар

1.Чизиқли фазонинг ҳар бир элементи базис орқали ягона равишда ифодаланишини кўрсатинг.

2. Базис ўзгарганда вектор координаталари ўзгаришини кўрсатинг.

3. Даражаси натурал n сондан ошмайдиган ва одатдагича қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш амаллари бажариладиган ҳамма кўпхадлар тўплами чизиқли фазо ҳосил қилишини исботланг.

Ёпиқ тестлар

Савол	Жавоб
Уч ўлчамли фазода базис қандай ҳосил қилинади?	Бир текисликда ётмаган ҳар қандай учта вектор
Даражаси натурал n сондан ошмайдиган ва одатдагича қўшиш ва бирор сонга кўпайтириш амаллари бажариладиган ҳамма кўпхадлар тўплами нима ҳосил қилади?	чизиқли фазо ҳосил қилади
n ўлчамли V фазонинг n та чизиқли эркли векторлари тўплами нима ҳосил қилади?	V нинг базисини ҳосил қилади
Агар V фазода чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда қандай фазо хосил қилинади?	Чексиз ўлчамли фазо ҳосил қилинади

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Нарманов А.Я. Аналитик геометрия. Т., “Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти”, 2008 й.

2. Izu Vaisman. Analytical geometry.World scientific.2007.

3. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometruyadan masalalar to’plami.T,Universitet, 2006.

2-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАВЗУ: ЕВКЛИД ФАЗОСИ.

Е-ҳақиқий сонлар устида вектор фазо бўлиб, унда қандайдир қонун ёки қоида бўйича $\forall$ 2 векторнинг скаляр кўпайтириш деб аталувчи (x,y) сон аниқланган бўлиб, бу 4 та

1. $\forall x, y \in E$ учун $(x,y)=(y,x)$
2. $\forall x,y,z \in E$ учун $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$
3. $\forall x \in E, \forall \lambda \in R, \ (\lambda x,y)=\lambda (x,y)$
4. $\forall x \neq 0 \quad (x\text{-}x)>0 \quad (x,x)=0 \Leftrightarrow x=\theta$

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда бундай вектор фазони Евклид фазоси дейилади.

Масалан: $E=R^3; \quad x=(x_1,x_2,x_3), \quad y=(y_1,y_2,y_3)$

$$(x,y)=(x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3) \qquad (1)$$

3) $(x,y)=(y,x)$

4) $(x+y,z)=(x_1+y_1)\cdot z_1+(x_2+y_2)\cdot z_2+(x_3+y_3)\cdot z_3=$

$=(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)+(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)=(x,z)+(y,z)$

3) $(\lambda x,y)\overset{(1)}{=}\lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2+\lambda x_3y_3=\lambda(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=\lambda(x,y)$

4) $(x,x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 0$

Теорема: Евлид фазосида қуйидаги Коши-Буняковский тенгсизлиги ўринли.

$$(x,y)^2\leq (x,x)(y,y) \qquad (2)$$

Исбот. $\forall\lambda\in R, \quad \forall x\cdot y\in E, \quad (\lambda x-y,\lambda x-y)>0$

$(\lambda x\text{-}y,\ \lambda x)+(\ \lambda x\text{-}y,\text{-}y)>0$

$(\lambda x,\ \lambda x)+(\text{-}y,\ \lambda x)+(\ \lambda x_1\text{-}y)+(\text{-}y_1\text{-}y)\geq 0$

$\lambda^2(x,x)\text{-}\ \lambda(y,x)\text{-}\ \lambda(x,y)+(y_1y)>0$

$\lambda^2(x,x)\text{-}2\lambda(x,y)+(y,y)\geq 0$

λ - нисбатан квадратик учхад $(x,x)\geq 0$ бўлгани учун

$b^2-ac\leq 0 \quad a=(x,x) \quad b=-(x,y), \quad c=(y,y)$

$(x,y)^2\leq (x,x)(y,y)$

$(x,y)=x_1y_1+....+x_ny_n=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$

$\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2\leq\sum_{k=1}^{n}x_k^2\ \sum_{k=1}^{n}y_k^2$

$$|(x,y)|\leq\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)} \qquad (3)$$

Таъриф $\sqrt{(x,x)}$ скаляр кўпайтмадан чиққан x ни $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$,

$\|x\|-x$ элементнинг нормаси.

1. $\|x\|\geq 0$

2. $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$ $\quad \| \lambda x \| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = | \lambda | + \sqrt{(x,x)} = | \lambda | \| x |$

3. $\| x + y \| < \| x \| + \| y \|$

$$| x + y |^2 = (x+y, x+y) = (x+y, x) + (x+y, y) =$$

$$= (x,x) + (y,x) + (y,x) + (y,y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) =$$

$$\| x \|^2 + 2\| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$$

$$\| x + y \|^2 \leq (\| x \| + \| y \|)^2$$

$\| x \| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ x - элемент (вектори)

Таъриф. Норма аниқланган *E* фазони нормаллашган фазо дейилади.

$(E, \| \cdot \|)$ - нормалашган.

Таъриф. *(x,y)=0* бўлса, ортогонал дейилади, яъни $x \perp y$

$$| (x,y) | \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \Rightarrow \frac{| (x,y) |}{\| x \| \cdot \| y \|} \leq 1.$$

Таъриф. $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\| x \| \cdot \| y \|}$.

Теорема: Агар *(x,y)=0* бўлса, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ бўлади ва аксинча $\dfrac{\pi}{2}$ бўлса *(x,y)=0*.

Таъриф. Ушбу $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторлар системаси берилган . Агар $(e_i, e_j) = 0$ $i \neq j$ бўлса берилган системани артогонал векторлар системаси дейилади.

Таъриф. $e_1, e_2, \dots, e_n$ векторлар системаси ортогонал системани ташкил этади,агар узунликлари 1 га тенг бўлса, ортогонал бўлса

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Теорема: $e_1, \dots, e_n$ ўрта нормал система чизиқли боғланмаган $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$

$$(ek_1 \lambda e_1 + ... + \lambda_n e_n) = (e_k, 0) = 0$$

$$\lambda_1 (e_k, e_1) + \lambda_2 (e_k, e_2) + ... + \lambda_n (e_k, e_n) = 0$$

$$\lambda_k' (e_k e_k) = 0 \quad \lambda_k = 0 \quad k = \overline{1,0}$$

Теорема: E^n фазода $e_1,\dots,e_n$ ўрта нормал базисни ташкил этса $\Rightarrow (x,y)=x_1y_1+\dots+x_ny_n$ бўлади ҳақиқатдан ҳам

$$x=x_1e_1+\dots+x_ne_n \qquad\qquad y=y_1e_1+\dots+y_ne_n$$

$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i, \quad \sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_jy_j(e_{i,e_j})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=x_1y_1+\dots+x_ny_n$$

Агар E да ўрта нормал базис бўлса, $e_1,\dots,e_n$ $(x,e_k)=x_k$.

Теорема. Агар E^n да $f_1,\dots,f_n\forall$ базис бўлса

$$(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(f_i,f_j)=<(f_i,f_j)=a_{ij}>=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

бўлади.

Айтайлик E Евклид фазо бўлиб, $f_1,\dots,f_n$ (1) ундаги $\forall$ базис бўлсин. бизнинг мақсадимиз E да аниқланган (1) ни ортогонал базис сўнгра эса ортонормал базисга айлантириш мумкинлигини кўриб чиқамиз. Ушбу жараённи алгебра ва сонлар назариясида ортогоналлаш жараёни дейилади.

У куйидагича

$$n=1, \quad f_1 \quad f_1\neq 0 \quad e_1=\frac{f_1}{\sqrt{(f_1,f_2)}}$$

$$n=2 \quad f_1\ f_2; \quad e_1=\frac{f_1}{\sqrt{(f_1,f_2)}}; \quad q_2=f_2\neq\lambda f_1 \quad (q_R,e_1=0)$$

$$e_2=\frac{q_2}{\sqrt{(q_1q_2)}} \qquad (f_2+\lambda f_1,e_1)=0 \qquad \lambda=\frac{(f_2f_1)}{(f_1e_1)}f$$

$$(f_2e_1)+(f_1e_1)=0$$

Фаразқилайлик. $b_1,\dots,b_n$ (1) $b_1,\dots,b_m,\ c_{m+1},\dots,c_n$ (2)

$$(b_{m+1},b_i)=0(4) \qquad (i=\overline{1,m})$$

$$(c_{m+1}+\lambda_1b_1+\dots+\lambda_mb_m;b_i)=0 \quad (i=\overline{1,m})$$

$$(c_{m+1},b_i)+\lambda_i(b_i,b_i)+\dots+\lambda_i(b_i,b_i)+\dots+\lambda_m(b_m,b_i)=0$$

$$(c_{m+1},b_i)+\lambda_i(b_i,b_i)=0 \quad b_i\neq 0 \quad (b_i,b_i)\neq 0$$

$$\lambda_i=-\frac{(c_{m+1}b_i)}{(b_i,b_i)} \qquad (5)$$

(5) бажарилса, $\Rightarrow$ (4) тенгликўринлибўладиванатижада$b_1, b_2, \ldots, b_m, b_{m+1}$ (6) $m+1=n$бўлсаортогоналлашжараёнитугайди.

Агарда $m+1<n$ бўлса, мулохазани такрорлаймиз.

$$b_{m+2} = c_{m-2} + \lambda_1' b_1 + \ldots + \lambda_{m+1}' b_{m+1} \qquad (6)$$

каби ажратиб, $(b_{m+2}, b_j)=0$ (8) $j=\overline{1,m}$.

$$\lambda' = -\frac{(c_{m+2}, b_j)}{(b_j, b_j)} \qquad (7)$$

Шундай қилиб, $b_1, \ldots, b_m, \ldots, b_{m+1}, b_{m+2}$ (7) ортогонал теоремани қурамиз. $m+2=n$.

Шундай қилиб E fараз ортогонал жараён кетма-кет қўллаб $b_1, \ldots, b_n$ (8) ортогонал базисга эга бўламиз.

$$e_1 = \frac{b_1}{|b_1|} \ldots e_n = \frac{b_n}{|b_n|} \qquad (9)$$

$$(e_i, e_j) = \left(\frac{b_i}{|b_i|}, \frac{b_i}{|b_j|} \right) = \frac{(b_i, b_j)}{|b_j| \cdot |b_i|} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (b_i, b_j) = (b_j)^2$$

1-теорема. E_n ўлчовли фазо бўлиб, (8) ортогонал чизиқли боғланмаган векторлар системаси чизиқли эркли

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \quad \lambda_i = 0 \quad i = \overline{1,n}$$

$$e_k (1 \le k < n) \quad (e_k;\ \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n) = (e_k, \theta) = 0$$

$$\lambda_1 (e_1, e_k) + \lambda_2 (e_2, e_k) + \ldots + \lambda_k (e_k, e_k) + \ldots + \lambda_n (e_k, e_n) = 0$$

$$\lambda_e (e_k, e_k) = 0 \quad (e_k, e_k) = 1 \quad \lambda_k = 0 \quad k = \overline{1,n}$$

2-теорема: E ўлчовли Евклид фазоси $(e_1, \ldots, e_n)$ ортогонал базис бўлсин. $\Rightarrow x_k = (x_1 e_k)$

$$(x, e_k) = (x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n, e_k) = x_1 (e, e_k) + \ldots + x_k (e_k, e_2) + \ldots +$$

$$+ x_n (e_n, e_2) = x_k (e_k, e_k) = x_k \cdot 1 = x_k$$

Таъриф. E фазо $R_1 \subset E$, $R_2 \subset E$ бўлсин $R_2 = \{y : \forall x \in R;\ (y, x) = 0\}$

Теорема: R_2, E аниқланган скаляр кўпайтмага нисбатан қисм фазо бўлади.

$$\forall y_1 y_2 \in R_2 \quad y_1 - y_2 \in R_2$$
$$\forall x \in R_1 \quad (y,x)=0 \quad (y_2,x)=0$$
$$(y_1 - y_2; x) = (y_1, x) - (y_2; x) = 0 - 0 = 0$$
$$y_1 - y_2 \in R_2$$

2) $\forall \lambda \in R, \ \ \forall y \in R_2 \quad (xy, x) = \lambda \ \ (y,x) = \lambda, \ 0=0 \ \ \lambda y \in R_2$

Таъриф. R_2-E нинг қисм фазосини R_1 қисм фазога ортогонал қисм фазо дейилади.

$$E = R_1(+)\ R_2 \quad \dim\ E = n \quad \dim R_1 = k \quad \dim\ R_2 = n-k$$

$e_1 ... e_n \quad (1) \quad \Rightarrow$ бундаги базисни $(q_1 ..., q_{n-k})$ (2) билан белгилайлик.

Ортогоналлаш жараёнига кўра (2) билан (1) ни ортогонал базисга келтириш мумкин.

$$x = \underbrace{x_1 e_1 + ... + x_n e_k}_{x'(\in)x''} + ... + x_n e_n -$$

$$x' = x_1 e_1 + ... + x_k e_k = R_1$$
$$x'' = (kx+1)\cdot x_{k+1} e_n + ... + x_k e_n = R_2$$

Масалан:

2 x x^2 (1)

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = 0, \ \ \lambda_3 = 0 \quad q_1 = 1 \quad q_2 = q_1 + \lambda_1 x \quad (q_2 q_1) = 0$$

$$q_2 = 1 + (-2)x = 1 - 2x \quad q_3 = x^2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$$

$$(1 + \lambda_1 x_1 1) = \int_0^1 (1 + \lambda x) dx \neq 0$$

$$\left(x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 0 \quad 1 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = -2$$

$$q_2 = 1 + (-2)x = 1 - 2x$$
$$q_3 = x^2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 \quad (q_3, q_1) = (x^2 + \lambda_1 + \lambda_2(1-2x)\cdot 1) = 0$$
$$(x^2 + \lambda_1 + \lambda_2(1-2x)\cdot 1 - 2x) = 0$$
$$(x^2, 1) + (\lambda_1, 1) + \lambda_2(1-2x, 1) = 0$$

$$\int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dx + \lambda_2 \int_0^1 (1-2x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \lambda_1 x \Big|_0^1 - \frac{\lambda_2}{2} \frac{(1-2x)}{2}\Big|_0^1$$

Бундан $\lambda_1 = -\dfrac{1}{3}$ топамиз:

$$(x^2,1-2x)+\left(-\frac{1}{3};\ 1-2x\right)+\lambda_2(1-2x,2x)=0$$

$$\int x^2(1-2x)dx-\frac{1}{3}\int(1-2x)dx+\lambda_2\int_0^1(1-2x)dx=0$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{1}{3}x\Big|_0^1+\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{\lambda_0}{2}\frac{(1-2x)}{3}\Big|_0^1=0$$

$$-\frac{1}{6}+\frac{\lambda_2}{3}=0\quad \lambda_2=\frac{1}{2}\quad q_3=x^2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(1-2x)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

$1;1-2x;\ x^2-x+\frac{1}{6}$ ортогонал векторлар системаси

$$e_1=1\quad e_2=\frac{1-2x}{\sqrt{(1-2x)(1-2x)}},\quad e_3=\frac{x^2-x+\frac{1}{6}}{\sqrt{\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)}}$$

$$(1-2x,1-2x)=\int_0^1(1-2x)^2dx=-\frac{1}{2}\quad\frac{(1-2x)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$e_2=\frac{1-2x}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\sqrt{3}(1-2x)$$

$$\left(x^2-x+\frac{1}{6},x^2-x+\frac{1}{6}\right)=\int_0^1\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)^2dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{36}x-2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{180}$$

$e_3=\sqrt{180}\quad\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\quad e_1,e_2,e_3-$ ортогонал базис.

Назорат саволлари:

4. Қандай жараён ортогоналлаш жараёни дейилади?
5. Ортогонал базис деганда ниманитушунасиз?
6. Евклид фазосининг қисм фазоси ҳақида нима биласиз ?

Ёпиқ тестлар

Савол	Жавоб

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторлар системаси берилган . Агар $(e_i, e_j)=0 \quad i \neq j$ бўлса берилган системани қандай система деб аталади?	Ортогонал векторлар системаси дейилади.
Агар Евклид фазосида чексиз кўп чизиқли эркли векторлар топиш мумкин бўлса, у ҳолда бу фазо қандай фазо дейилади?	Чексиз ўлчамли фазо дейилади
Е-ҳақиқий сонлар устида вектор фазо евклид фазоси бўлиши учун унда қандайдир қонун ёки қоида бўйича ихтиёрий 2 векторнинг скаляр кўпайтириш деб аталувчи (x,y) сон аниқланган бўлиб, нечта хосса ўринли бўлиши керак?	**4**
Евлид фазосида қайси тенгсизлик ўринли?	Коши-Буняковский

Фойдаланилган адабиётлар:

1.Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003

2.Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001

3.Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014

4.Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., изд. МГУ,2004

3-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАВЗУ: ПСЕВДОЕВКЛИД ФАЗО.

Маълумки, Евклид фазосида координаталар бошидан ихтиёрий М нуқтагача бўлган масофа

$$OM^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (1)$$

формула билан аниқланар эди. Энди шу формулани ўзгартириб, масофани $OM^2=x^2+y^2-z^2$ бўйича топишни кўриб чиқайлик.

ОМ масофа $x^2+y^2>z^2$ бўлганда ҳақиқий мусбат сон, $x^2+y^2<z^2$ бўлганда эса мавхум сонни аниқлайди. $x^2+y^2=z^2$ бўлганда эса масофа 0га тенг бўлади (М нуқта 0 билан устма-уст тушмаса хам).

Бу формулани координаталар кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$M_1M^2_2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$$

OM_1 ва OM_2 кесмалар орасидаги бурчакни эса

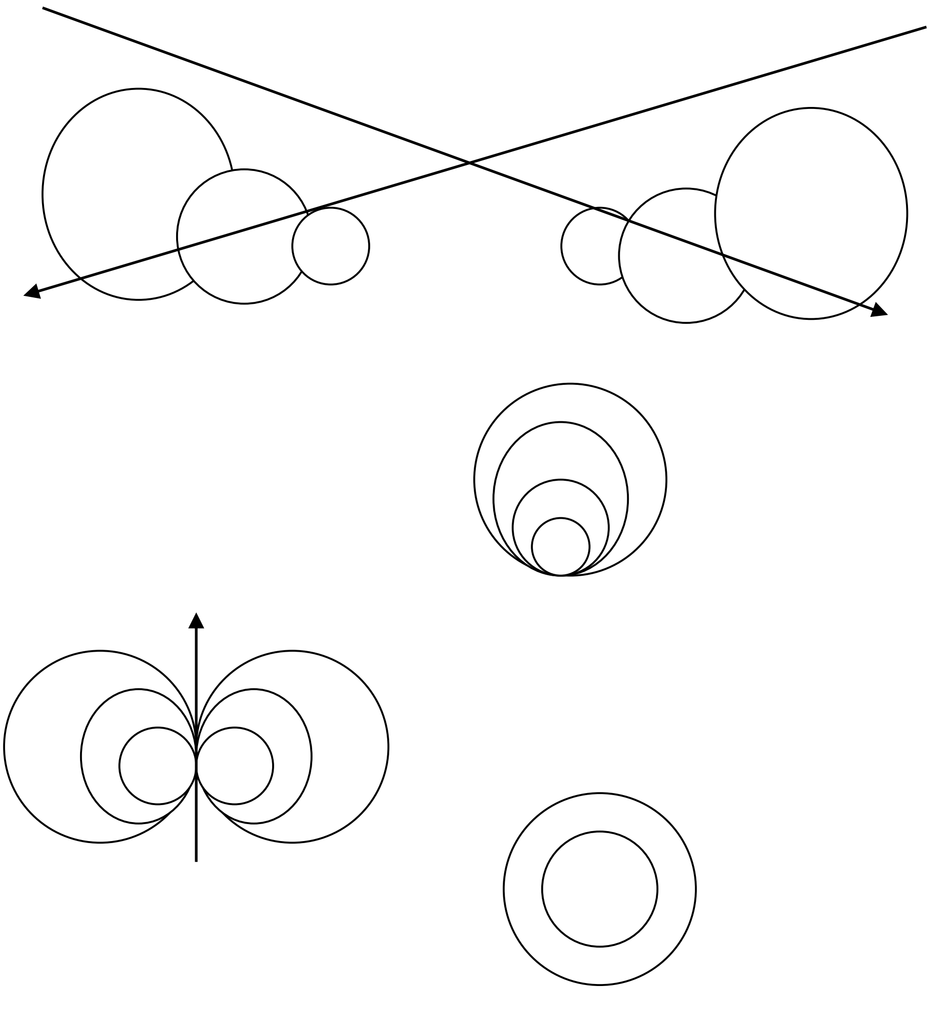
$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 - z_2^2}}$$

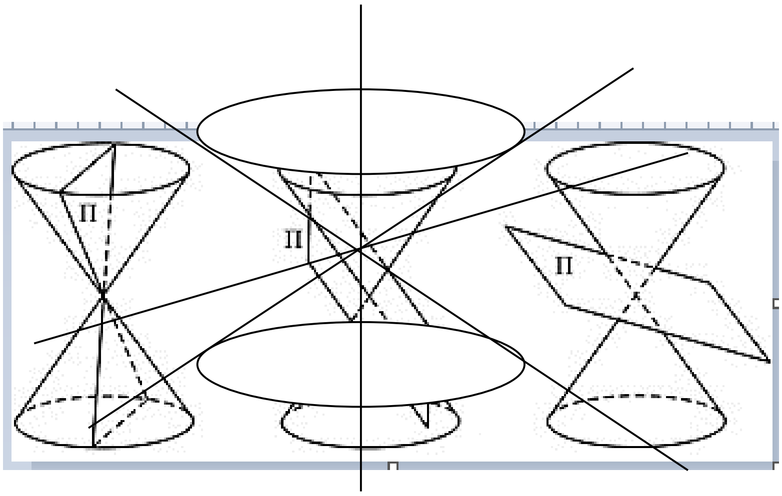
Узунлик ва бурчаклар шу формулалар асосида аниқланган фазолар ***псевдоевклид фазолар*** деб аталади. Бу фазода Евклид фазосининг кўпгина аксиома ва хоссалари сақланиши билан бир қаторда айрим муносабатлар кескин фарқ қилади.

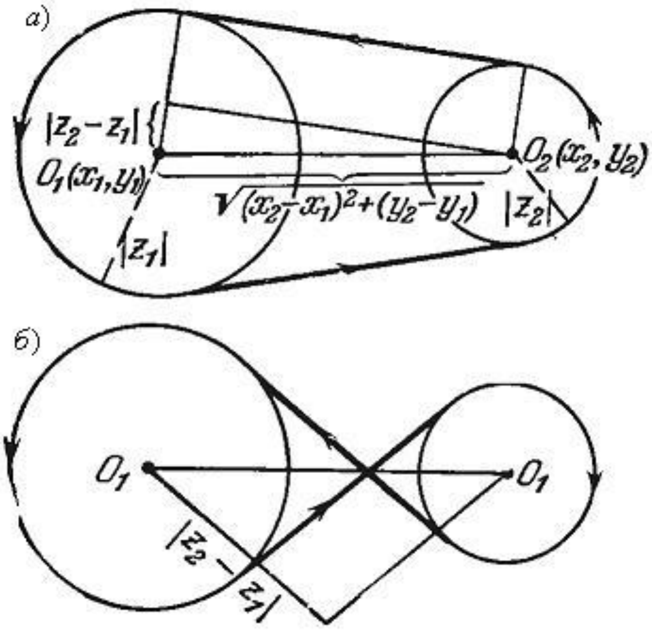
Псевдоевклид фазода масофани юқоридагича аниқланишидан кўринадики, унда уч хил тўғри чизиқлар бўлиши мумкин: барча кесмалари мусбат ҳақиқий узунликка эга тўғри чизиқлар; мавхум узунликдаги кесмаларга эга бўлган тўғри чизиқлар ва барча кесмалари 0 узунликка эга бўлган тўғри чизиқлар. Бу тўғри чизиқларни фазовий ўхшаш, вақтли ўхшаш ва изотроп тўғри чизиқлар деб юритилади.

ТОПШИРИҚ

Псевдоевклид фазодаги бу типдаги тўғри чизиқларни чизмадаги аналитик кўринишини топинг:




П
П
П


а)
$|z_2 - z_1|$
$O_1(x_1, y_1)$
$O_2(x_2, y_2)$
$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$|z_2|$
$|z_1|$
б)
O_1
O_1
$|z_2 - z_1|$

Ёпиқ тестлар

Савол	Жавоб
$x^2+y^2>z^2$ бўлганда ОМ масофа қандай аниқланади?	ҳақиқий мусбат сонни аниқлайди.
$x^2+y^2=z^2$ бўлганда ОМ масофа қандай аниқланади?	масофа 0га тенг бўлади (М нуқта 0 билан устма-уст тушмаса хам).
$x^2+y^2<z^2$ бўлганда ОМ масофа қандай аниқланади?	мавхум сонни аниқлайди

Адабиётлар

1. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003

2.Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001

3.Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014

4.Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., изд. МГУ,2004

4-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАВЗУ: ГИПЕРБОЛИК ФАЗО.

n ўлчовли эллиптик фазо деб, R_{n+1} фазонинг сферасидаги диаметриал қарама-қарши бўлган нуқталар тўпламига айтилади (изометрик жуфт).

Бу фазони S_n билан белгиланади.

S_n фазони ноевклид Риман фазо деб ҳам аталади.

R_{n+1} фазо сфераларига уринмалар R_n фазони ташкил этганлигидан, чексиз кичик орлиқларда $S_п$ геометрияси $R_п$ фазо геометриясига яқин бўлади.

$S_п$ фазонинг m ўлчовли текислиги S_m фазони ташкил этади.

Эллиптик фазода масофа масаласи қандай ўрнатилган?

Агар $S_п$ фазонинг X нуқтасини ифодаловчи векторлардан бири $\bar{x}$, иккинчиси ҳам $\bar{x}$ бўлса, у ъолда бу векторлар $\bar{x}^2 = \bar{p}$ муносабат билан боьланган бўлади.

$\bar{x}$ билан аниқланган $S_п$ фазонинг X нуқтасини X($\bar{x}$) билан боғланади.

Бунда, S–S_{Norton}фазодаги X($\bar{x}$) ва У() нуқталар орасидаги масофа, р эса эгрилик радиусидир.

$S_п$ фазо координаталари сифатида R_{n+1} фазонинг $\bar{x}$ векторининг x^2 координаталарини қараш мумкин.

Энди гиперболик фазонинг вектор аксиомаси асосида қурилишини кўриб чиқайлик

Гиперболик фазони таърифлаш учун $E_п$ афин фазонинг I+IV группа аксиомаларидан ташқари қуйидаги V группа аксиомалари бажарилиши керак:

V.1^0. Ҳар иккита $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб аталувчи К=$\bar{a}$ Е$\bar{b}$ сон мос қуйилган бўлсин.

V.2^0. Скаляр кўпайтма коммутатив, яони $\bar{a}$ E $\bar{b}$ = $\bar{b}$ E $\bar{a}$

V.3^0. Скаляр кўпайтма векторларни қўшишга нисбатан дистрибутив яъни $\bar{a}$ E($\bar{b}$ + $\bar{c}$)= $\bar{a}$ E $\bar{b}$ + $\bar{a}$ E $\bar{c}$

V.4^0. Ҳақиқий кўпайтувчини скаляр кўпайтма ташқарисига чиқариш мумкин:(k $\bar{a}$)E $\bar{b}$ =k $\bar{a}$ E $\bar{b}$

V.5^0. Шундай $\bar{a}_i$ кўринишдаги i та векторлар мавжудки, улар учун

$\bar{a}_a$E$\bar{a}_a$>0 (a≤l)

$\bar{a}_n$E$\bar{a}_n$<0 (u>l), $\bar{a}_i$E$\bar{b}_j$, i≠j

Бундай шартлар асосида қурилган l индексли псевдоевклид фазони R_n кўринишда белгилаймиз.

1. Бизга маълумки F(x,y)=0 тенглама текисликда бирор тўғри чизиқни аниқлайди, яъни OXУ текисликдаги координаталари x ва у бўлган барча нуқталар тўплами бу тенгламани қаноатлантиради. Шунингдек, фазода хам

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

Тенглама OXУZ да бирор сиртни, яони координаталари x,y,z бўлган ва (1) тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини аниқлайди. (1) тенглама сиртнинг тенгламаси, x,y,z лар эса унинг ўзгарувчи координаталари дейилади.

Иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$a_1+x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_2xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \qquad .$$

бу тенгламадаги $a_1,a_{22},a_{33},a_2,a_{13},a_{23}$ коэффициентларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлиши керак. Айрим ҳолларда сирт тенгламаси билан эмас, балки у ёки бу хоссага эга бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни билан берилиши мумкин. бу ҳолда сиртнинг геометрик хоссаларидан фойдаланиб унинг тенгламаси тузилади.

13^0. Сферанинг OXУZ тўғри бурчакли Декарт координаталар системасидаги тенгламасини тузамиз.

Маркази 0'(a,b,c) нуқтада ва радиуси R бўлган сфера берилган бўлсин. Агар μ(x,y,z) нуқта сферанинг ихтиёрий нуқтаси бўлса, у ҳолда 0'(a,b,c) ва μ(x,y,z) нуқталар орасидаги масофани тоипш формуласидан фойдалансак, сфера тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (1)$$

(*13*)–маркази 0'(a,b,c) бўлган нуқтада ётувчи ва радиуси R га тенг бўлган сфера тенгламаси дейилади. Агар (*13*) да a=b=c=0 бўлса, маркази координаталар бошида ётувчи ва радиуси R га тенг бўлган сфера тенгламасига эга бўламиз:

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \qquad (2)$$

(*13*) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0 \qquad (3)$$

Сфератенгламасииккинчитартиблисиртбўлишиникўрсатайлик. Бунинг учун сиртнинг (2) тенгламасида $a_2=a_{13}=a_{23}=0$ ва $a_1=a_{22}=a_{33}$ деб олинса, (2) тенглама сферанинг тенгламаси эканини текширамиз. Бунинг учун $a_1 \neq 0$

деб (4) нинг ҳамма ҳадларини a_1 га бўламиз ва қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A=\frac{2a_{14}}{a_{11}},B=\frac{2a_{24}}{a_{11}},C=\frac{2a_{34}}{a_{11}},D=\frac{a_{44}}{aa_{11}}$$

Натижада $x^2+y^2+z_2+Ax+By+Cz+D=0$ кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Охирги тенгламани ушбу кўринишда ёзиб оламиз

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(A^2+B^2+C^2-4D\right)$$

ёки

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2 \quad (5)$$

(5) тенгламадан кўринадики, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ бўлганда (4) тенглама маонога эга бўлади. Демак, $A^2+B^2+C^2-4D>0$ бўлса, (5) тенглама маркази

$$\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$$

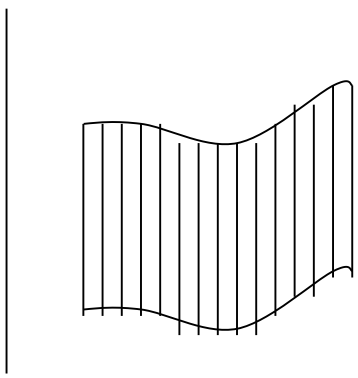
нуқтада ва радиуси $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$

бўлган сферани ифодалайди. Агар $A^2+B^2+C^2-4D=0$ бўлса, (5) тенглама

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$$

кўринишда бўлиб, у фақат битта $\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$ нуқтани ифодалайди.

2^0. Бирор П текисликда ётувчи L чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан ўтувчи ва берилган *l* тўғри чизиққа параллел бўлган барча тўғри чизиқлардан ташкил топган сирт ***цилиндрик сирт*** дейилади. бунда L чизиқ цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси, *l* тўғри чизиққа параллел ва L чизиқни кесувчи чизиқлар унинг ясовчиси дейилади (1–чизма).



Йўналтирувчилари координата текисликларидан бирида ётувчи ясовчилари эса шу текисликка перпендикуляр бўлиб, координаталар ўқига параллел бўлган цилиндрик сиртларни кўрайлик.

ОХ текисликда тенгламаси

$$F(x,y)=0 \qquad (6)$$

бўлган L чизиқ ва ясовчилари OZ ўққа параллел бўлган цилиндрик сиртни ясаймиз (2–чизма). (6) тенглама OXYZ координаталар системасида цилиндрик сирт эканини кўрсатайлик.

M(x,y,z) –цилиндрик сиртнинг ихтиёрий тайинланган

нуқтаси бўлсин. М нуқта орқали ўтувчи ясовчининг L йўналтирувчиси билан кесишган нуқтасини N билан белгилаймиз. N нуқта М нуқтанинг ОХУ текислигидаги проекциясидир. Шунинг учун M ва N нуқталар битта x абцисса ва битта y ординатага эга. N нуқта L чизиқда ётгани учун у эгри чизиқнинг (6) тенгламасини қаноатлантиради.

Демак, бу тенгламани M(x,y,z) нуқтанинг координаталари ҳам қаноатлантиради. OXYZ фазода L йўналтирувчи қуйидаги иккита тенглама системаси билан аниқланади:

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ Z=0 \end{cases}$$

Худди шунга ўхшаш

$$\begin{cases} F(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} F(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

тенгламалар цилиндрик сиртларнинг L йўналтирувчи чизиқларини мос равишда OXZ ва ОУZ текисликдаги ҳолатини аниқлашни кўрсатиш мумкин.

Хусусий ҳолларда цилиндрик сиртларнинг йўналтирувчилари эллипс, гипербола, парабола, иккита кесишувчи тўғри чизиқ, иккита ўзаро параллел (устма-уст тушмаган) тўғри чизиқлардан иборат бўлиши мумкин. Бундай сиртларни мос равишда эллиптик цилиндр, параболик цилиндр, гиперболик цилиндр, иккита кесишувчи текислик, иккита параллел текислик деб юритилади ва уларнинг тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

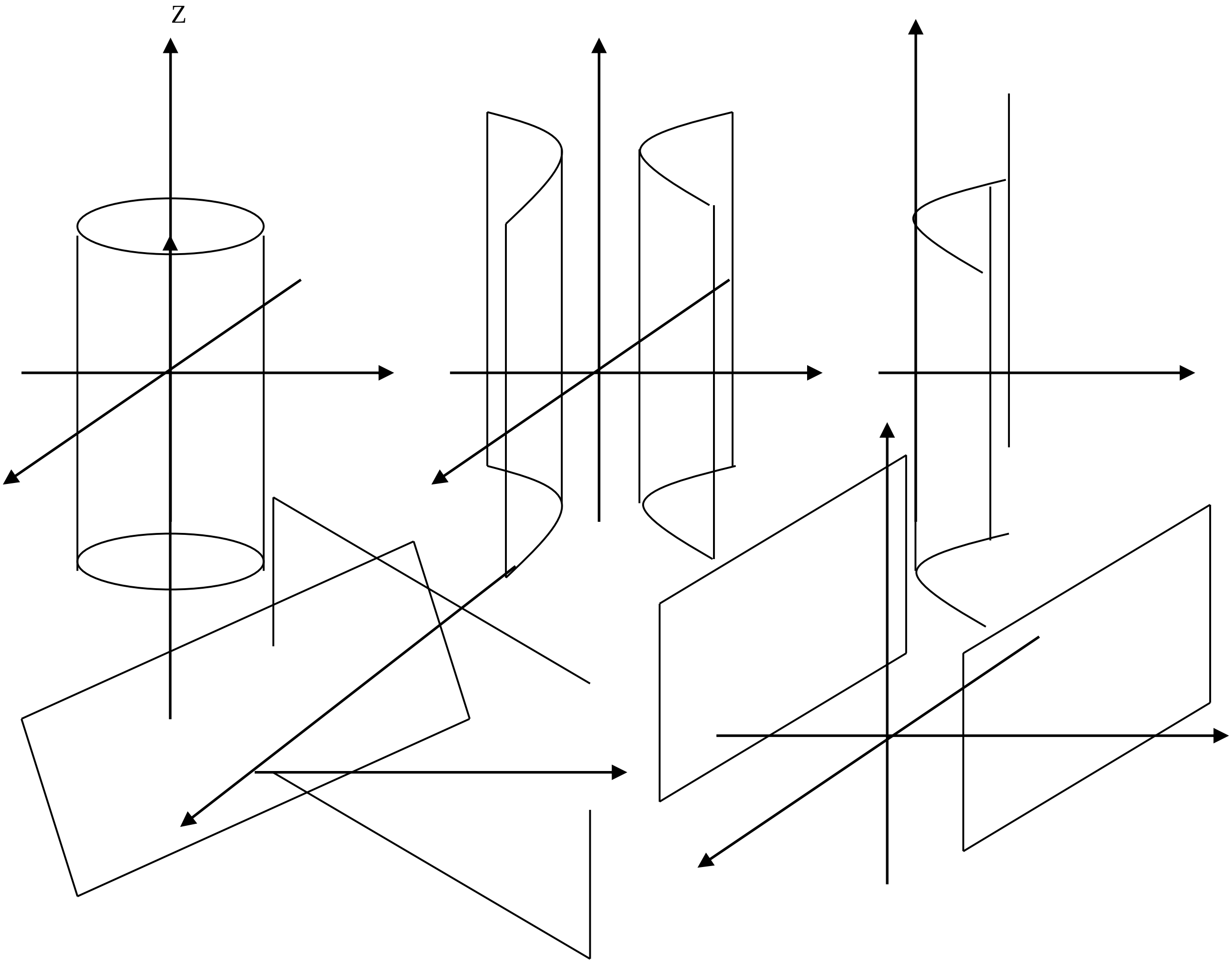
Эллиптик цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (3-чизма)

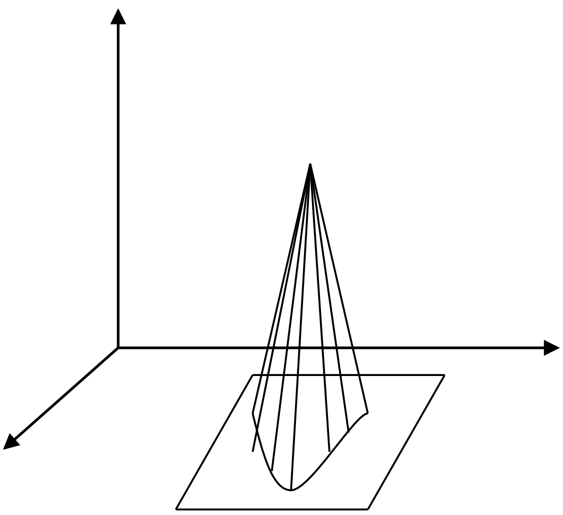
Гиперболик цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (4-чизма)

Параболик цилиндр: $y^2=-2px$ (5-чизма)

Икки кесишувчи текислик: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ (6-чизма)

Икки параллел текислик: $x^2-a^2=0$ $(a\neq 0)$ (7-чизма)





3.1^0. Бирор Q текисликда L иккинчи тартибли чизиқ ва бў текисликка тегишли бўлмаган M_0 нуқта берилган бўлсин.

Таъриф. Фазодаги M_0 нуқтадан ўтиб, L ни кесиб ўтувчи барча тўғри чизиқлар тўплами иккинчи тартибли конус сирт (ёки конус) дейилади. M_0 нуқта конус учи, L чизиқ конус йўналтирувчиси, конусни ҳосил қилувчи чизиқлар эса унинг ясовчилари дейилади.

Конус ясовчилари бўлган тўғри чизиқлар маркази конус ичида бўлган тўғри чизиқлар боғламига тегишли бўлади. конус тенгламасини келтириб чиқарайлик. Q текислик ва ундаги L чизиқ ОХУ текисликда ётган бўлсин. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нуқта эса ОХУ текисликдаги ётмаган ихтиёрий нуқта бўлсин. конуснинг ихтиёрий $M(x,y,z)$ нуқтасини олайлик, у ҳолда M_0M тўғри чизиқ конуснинг ясовчиси бўлиб, L чизиқ билан $M(x_1,y_1,z_1)$ нуқтада кесишади. M_0,M_1,M нуқталар бир тўғри чизиқда ётгани учун $\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda\overrightarrow{M_0M}$ тенглик ўринли. Бу тенгликдан

$$x_1 - x_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow x_1 = x_0 + \lambda(x_0 - x_0)$$

$$y_1-y_0=\lambda(y-y_0) \Rightarrow y_1=y_0+\lambda(y_0-y_0)$$

$$z_1-z_0=\lambda(z-z_0) \Rightarrow z_1=z_0+\lambda(z_0-z_0)$$

Охирги тенгликдан λ ни топиб, олдинги икки тенгликка қўямиз:

$$x_1=x_0+\frac{x-x_0}{z_0-z}z_0,\ y_1=y_0+\frac{z-z_0}{z_0-z}z_0 \qquad (7)$$

$$M_1\in L \quad \Rightarrow \quad F(x_1,y_1)=0$$

ёки

$$F(\frac{x-x_0}{z_0-z}z_0,\ y_0+\frac{z-z_0}{z_0-z}z_0)=0 \qquad (8)$$

(8) ифода конус тенгламаси дейилади. Иккинчи тенглама конуснинг Декарт координаталар системасидаги энг содда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (9)$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

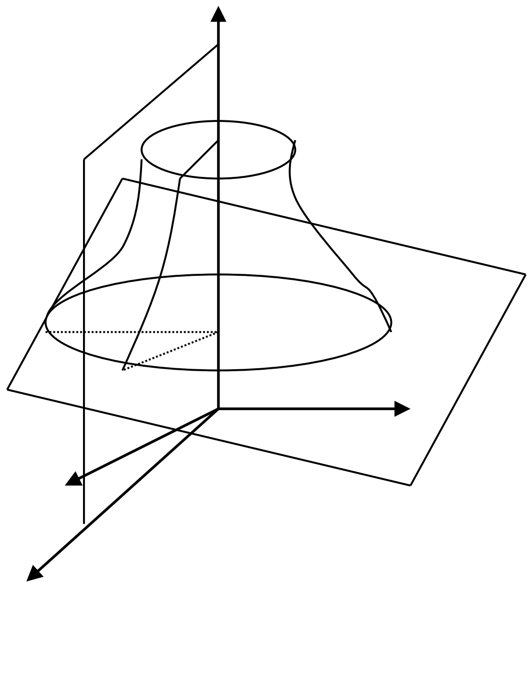
кўринишда бўлади.

2^0. Q текисликда бирор L чизиқ ва *l* тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Таъриф. L чизиқнинг *l* тўғри чизиқ атрофида айланишдан ҳосил бўлган Ф фигура айланма сирт дейилади. бунда L айланма сиртнинг меридиани, *l* айланиш ўқи дейилади.

Айланма сиртнинг тенгламасини келтириб чиқарайлик.

Декарт координаталар системасини шундай танлаймизки, бунда Q–(OYZ) текислик, *l*–(OZ) ўқ ҳамда L:F(x,z)=0 бўлсин.



L чизиқнинг (OZ) ўқ атрофида айланишидан қандайдир Ф сирт ҳосил бўлсин (9-чизма). M(x,y,z) шу сиртга тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин. M нуқтадан OZ ўққа перпендикуляр ўтказсак, кесимда маркази $0\in$(OZ) нуқтада бўлган бирор айлана ҳосил қилинадики, у айлана L чизиқ билан $M_1(0,y_1,z_1)$ нуқтада кесишсин. Кесим айланадан иборат бўлгани учун:

$$\rho(0,M)=\rho(0,M_1) \qquad (10)$$

Бу масофалар икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласига кўра қуйидагича бўлади:

$$\rho(0,M)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\rho(0,M_1)=\sqrt{(0-0)^2+(y_1-0)^2+(z-z)^2}=\sqrt{y_1^2}=|y_1|.$$

Бу қийматларни (*1*0) тенгликка қўямиз:

$$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$M\in L$ бўлгани учун:

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0 \qquad (11)$$

(11) тенглама L чизиқни 0Z ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртнинг тенгламасидир.

Агар L чизиқ мос равишда 0X ва 0У ўқлар атрофида айлантирсак, ҳосил бўлган сиртларнинг тенгламалари мос равишда

$$F\left(x,\ \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0 \text{ ва } F\left(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0 \qquad (12)$$

кўринишларда бўлади.

Торширик

1.Гиперболик фазоларга мисоллар келтиринг

Ёпиқ тестлар

Савол	Жавоб
Эллиптик цилиндр тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Гиперболик цилиндр тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Параболик цилиндр тенгламаси	$y^2=-2px$
Эллипсоид тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1$

Адабиётлар

1.Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003

2.Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001

3.Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014

4.Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., изд. МГУ,2004

5-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАВЗУ: Иккинчи тартибли сиртлар. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари.

1.Сиртлар назарияси. Йўналиш бўйича эгриликлар.

Текисликдаги очиқ доирага гомеоморф тўпламни э*лементар соҳа* деб атаймиз.

1-таъриф. Фазодаги $\hat{O}$ тўплам элементар соҳанинг топологик акслантиришдаги образи бўлса, у элементар сирт деб аталади.

Демак, $\hat{O}$ тўплам элементар сирт бўлса, $f: G \to \hat{O}$ - топологик акслантириш мавжуд бўлиши керак. Бу ерда $G \subset R^2$елементар соҳа, $\hat{O}$ эса R^3 дан келтирилган топология ёрдамида топологик фазога айлантирилган. Агар $\hat{O}$ элементар сирт бўлса, (f, G) жуфтлик$\hat{O}$ *сиртни параметрлаш усули* дейилади.

Албатта G_1 бошқа элементар соҳа бўлса, G ва G_1 соҳалар ўзаро гомеоморф бўлади ва агар $g: G_1 \to G$ гомеоморфизм берилган бўлса, $f \cdot g: G_1 \to \hat{O}$ гомеоморфизм$\hat{O}$ сиртни параметрлашнинг бошқа усулидир.

Демак, элементар сирт учун чексиз кўп параметрлаш усуллари мавжуддир. Бирорта тўпламнинг элементар сирт эканлигини кўрсатиш учун, унинг учун бирорта параметрлаш усулини кўрсатиш керак.

Агар $\hat{O}$ сирт (f, G) параметрлаш усули билан берилиб, $(u, v) \in G$учун *ф(у,в)* нуқтанинг координаталари $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$кўринишда белгилсак

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (1)$$

система $\hat{O}$ сиртнинг *параметрик тенгламалари системаси* дейилади.

2-таъриф. Фазодаги боғланишли $\hat{O}$ тўплам ўзига тегишли ҳар бир нуқтанинг бирорта атрофида элементар сиртга айланса, $\hat{O}$ сода сирт дейилади.

Иккинчи таърифга изоҳ берамиз. Демак, $\hat{O}$ сода сирт бўлши учун унга тегишли ҳар бир $p \in \hat{O}$ нуқта учун шундай$U(p)$ атроф (R^3фазода) мавжуд бўлиб, кесишма$U(p) \cap \hat{O}$ элементар сирт бўлиши керак.

Кейинчалик курс давомида сирт деганда элементар ёки содда сиртни тушунамиз.

Мисоллар.

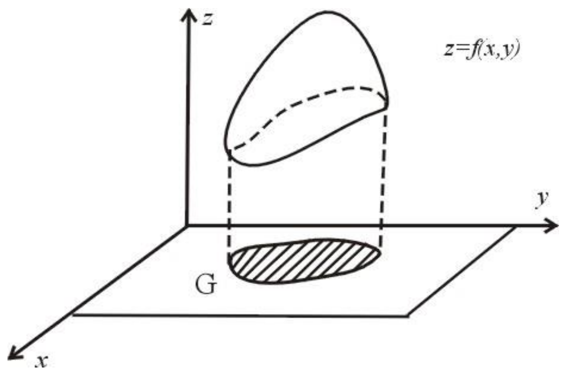
1) Ҳар қандай текислик элементар сиртдир, чункитекисликдоирагагомеоморфдир.

Агар $M(x_0, y_0, z_0)$текисликнуқтаси, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлартекисликкапараллелбўлса, уни

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v, -\infty < u < +\infty, -\infty < v < \infty$$

кўринишидапараметрлашмумкин. Бу ерда $\vec{r}_0=\{x_0, y_{0,} z_0\}$ вектор M нуқтанинг радиус векторидир.

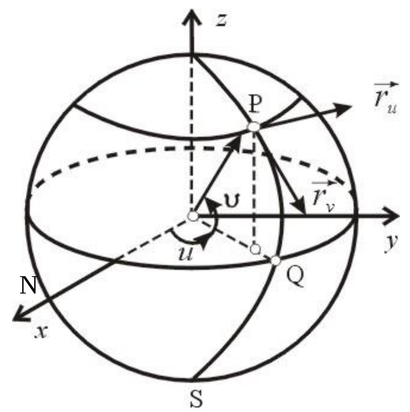
2) элементар G соҳадааниқланган $z=f(x,y)$ – узлуксиз функциянинг графиги элементар сиртдир. Сабаби, $(x,y,f(x,y))\to(x,y)$ – акслантириш (проектсия) гомеоморфизмдир.



Чизма-1

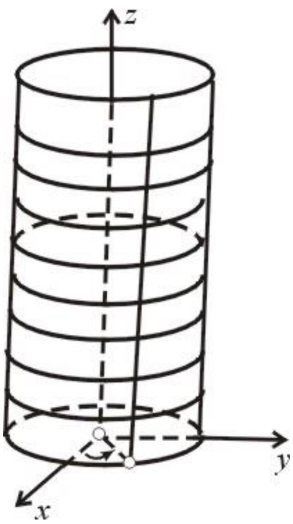
3) Иккиўлчамлисфера S^2 элементарбўлмагансодасиртдир. Радиуси R га тенг S^2 сферанингмарказигакоординаталарбошинижойлаштирсак, уни $S^2=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=R^2\}$ тўпламсифатидақарашимизмумкин.

Бусферанингсиртэканлигиниисботлашучунунгатегишлибирорта P нуқтаниолайлик. Бу P нуқтаданфарқли S нуқтанижанубийқутбсифатида, унгадиаметрикқарама-қаршибўлган N нуқтанишимолийқутбҳисоблаб, z ўқини координата бошидан N нуқтаорқалиўтказамиз, Oxy текислигиэса O нуқтаданўтувчива ON га перпендикуляр текисликдир. Бутекисликва сфера кесишишиданҳосилбўлганайланани ***экватор***дебатаймиз. Энди u Билан OQ нурва Ox ўқиорасидагибурчакни, v билан OP ва OQ нурларорасидагибурчакнибелгилаймиз. Буерда Q нуқта NPS меридианнинг экватор Биланкесишишнуқтасидир, $0<u<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$. Шунда S^2 сферанинг NS меридиан чиқарибташланганқисми $\phi : P\to(u,v)$ акслантиришёрдамида $[0;2\pi]\times\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ лементарсоҳагагомеоморфакслантириладива $x=R\cos u\cos v,\ y=R\sin u\cos v,\ z=\sin v$ тенгламаларёрдамидапараметрланади.



Чизма-2

4) Доиравий цилиндрни $x = R\cos u,\ y = R\sin u,\ z = v$ тенгламалар системаси ёрдамида параметрлаш мумкин. Буерда $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$. Албаттасилиндрҳамэлементарсиртэмас (3 -чизма).



3 -чизма

Агар биз $\vec{r}(u,v) = \{x(u;v); y(u;v); z(u;v)\}$ вектор функсияни киритсак (1) тенгламалар системасини битта

$$\vec{r} = \vec{r}(u;v)\,,\ (u,v) \in G \qquad (2)$$

вектор тенглама ёрдамида ёза оламиз. Бутенглама $\hat{O}$ сиртнинг***вектор кўринишдаги тенгламаси*** дейилади. Табиийки, $\hat{O}$ сирт элементар сирт бўлмаса, (1) ва (2) тенгламалар уни бирорта нуқта атрофида аниқлайди. Агар $\hat{O}$ элементар сирт бўлса, уни тўлиқ (1) ёки (2) тенгламалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

2. Сиртнинг ошкормас кўринишда берилиши.

Бизга $G \subset R^3$ очиқ тўплам ва G да аниқланган силлиқ $F(x;y;z)$ функсия берилган бўлсин.

Шунда $\hat{O} = \{(x;y;z) \in G : F(x;y;z) = 0\}$ тўплам F функсиянинг ***сатҳ тўплами*** ёки ***сирти*** дейилади. Агар $gradF \neq 0$ бўлса, $\hat{O}$ ҳақиқатдан ҳам содда сирт бўлади. Ҳақиқатдан, агар $p = (x_0; y_0; z_0) \in \hat{O}$ нуқтада $F_z \neq 0$ бўлса, ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра, шундай $\delta > 0, \varepsilon > 0$ сонлари ва $G_0 = \{(x;y) : |x_0 - x| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ соҳада аниқланган $z = f(x;y)$ функция мавжуд бўлиб, $(x;y) \in G_0$ бўлганда $F(x;y, f(x;y)) = 0$ тенглик ва $z_0 = f(x_0;y_0)$, $|z_0 - f(x;y)| < \varepsilon$ муносабатлар бажарилиб,

$$\ddot{I} = \{(x;y;z) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta, |z_0 - z| < \varepsilon\}$$

Параллелипипеднинг $\hat{O}$ Биланкесишмаси $z = f(x;y)$ функциянинграфигиданиборатдир. Демак, $\hat{O}$ ўзигатегишлиҳарқандайнуқтанингетарликичикатрофидаэлементарсиртбўлади.

Бизнингкурсимиздаасосий метод математик анализ бўлганлигиучун, бизсиртлардандқўшимчашартларниталабқиламиз.

Таъриф. *Берилган* $\hat{O}$ *сирт учун унга тегишли ихтиёрий нуқта атрофида* (f, G) *параметрлаш усули мавжуд бўлиб, бунда* $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ *функциялар узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва* $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ *матритцанинг ранги иккига тенг бўлса,* $\hat{O}$ *сирт* ***регуляр сирт*** *дейилади, параметрлаш усули эса регуляр параметрлаш дейилади.*

Сиртнинг регулярлик шартини $\left[\vec{r_u}, \vec{r_v}\right] = \vec{0}$ кўринишда ҳам ёзишимиз мумкин. Бизкурсимиздаасосанрегулярсиртларниўрганамиз.

Эндисиртларнингберилишусуллариҳақидақуйидагитеоремаларниисботлайлик.

Теорема-1. *Бизга* G *соҳада аниқланган силлиқ* $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ *функциялар берилиб, ҳар бир нуқтада* $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ *тенглик ўринли бўлса,*

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \ (u;v) \in G \\ z = z(u;v) \end{cases}$$

система регулярсиртнианиқлайди.

Исбот. Теоремани исботлаш учун

$$\Phi = \left\{(x;y;z) : x = x(u;v), y = y(u;v), z = z(u;v), (u;v) \in G\right\}$$

тўпламнинг сода сирт эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун эса $\hat{O}$ тўпламга тегишли ихтиёрий $p_0 = \left(x(u_0;v_0), y(u_0;v_0), z(u_0;v_0)\right)$ нуқтанинг етарли кичик атрофида $\hat{O}$ элементар сирт эканлигини кўрсатамиз. Бирорта $\varepsilon > 0$ ва $G_{\varepsilon} = \left\{(u;v) \in G : (u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2 < \varepsilon\right\}$ очиқ доира учун $f : (u;v) \to (x(u;v), y(u;v), z(u;v))$ қоида Билан аниқланган $f : G_{\varepsilon} \to f(G_{\varepsilon})$ акслантиришни қараймиз. Берилган $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ функциялар узлуксиз бўлганлиги учун f ҳам узлуксиз акслантиришдир. Агар f ўзаро бир қийматли бўлса, унинг тескариси f^{-1} мавжуд ва узлуксиз бўлади (f^{-1} узлуксизлиги ҳам $x(u;v), y(u;v)$ ва $z(u;v)$ функциялар узлуксизлиги ва теорема шартидан келиб чиқади), демак $\hat{O}$ нинг p_0 нуқтани ўз ичига олувчи $f(G_{\varepsilon})$ қисми элементар сирт бўлади.

Шунинг учун бирорта $\varepsilon > 0$ учун f акслантиришнинг ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, $\varepsilon_i > 0,\ \varepsilon_i \to 0,\ i = 1,2,3,...$ва G_{ε_i} доирага тегишли $(u_i^1;v_i^1)$ ва $(u_i^2;v_i^2)$ ҳар хил нуқталар учун $f(u_i^1;v_i^1) = f(u_i^2;v_i^2)$ тенглик ўринли бўлсин. Умумийликни чегараламасдан аниқлик учун $u_i^1 \le u_i^2$ ва $v_i^1 \le v_i^2$ деб фараз қилайлик. Шунда,

$$x(u_i^1;v_i^1) - x(u_i^2;v_i^2) = 0,\ y(u_i^1;v_i^1) - y(u_i^2;v_i^2) = 0,\ z(u_i^1;v_i^1) - z(u_i^2;v_i^2) = 0$$

тенгликлардан ва Лагранж теоремасидан

$$x_u(p_i^1, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + x_v(u_i^2, q_i^1)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

$$y_u(p_i^2, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + y_v(u_i^2, q_i^2)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

$$z_u(p_i^3, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + z_v(u_i^2, q_i^3)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

тенгликларни оламиз.Бу ерда $p_i^1,\ p_i^2,\ p_i^3 \in \left[u_i^1, u_i^2\right],\ q_i^1,\ q_i^2,\ q_i^3 \in \left[v_i^1, v_i^2\right], u_i^2 - u_i^1$ ва $v_i^2 - v_i^1$ сонлари бир вақтда нолга айлана олмайди.

Шунинг учун юқоридаги тенгликлардан

$$\frac{x_u(p_i^1;v_i^1)}{x_v(u_i^2;q_i^1)} = \frac{y_u(p_i^2;v_i^1)}{y_v(u_i^2;q_i^2)} = \frac{z_u(p_i^3;v_i^1)}{z_v(u_i^2;q_i^3)}$$

Муносабатни оламиз. Бумуносабатда $x_u,\ x_v,\ y_u,\ y_v$ ва $z_u,\ z_v$ функциялар узлуксизлигидан фойдаланиб, $i \to \infty$ лимитгаўтсак,

$$\frac{x_u(u_0,v_0)}{x_v(u_0,v_0)} = \frac{y_u(u_0,v_0)}{y_v(u_0,v_0)} = \frac{z_u(u_0,v_0)}{z_v(u_0,v_0)}$$

Муносабатни оламиз. Бумуносабатэса теорема шартигазидбўлган,

$$rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}_{(u_0,v_0)} < 2$$

Тенгсизликка тенгкучлидир. Демак, фаразимизнотўғри, ва $\varepsilon > 0$ етарли кичик бўлганда $f: G_\varepsilon \to f(G_\varepsilon)$ акслантириш топологик акслантиришдир. Бунданэса, $\hat{O}$ тўпламнинг p_0 нуқтани ўз ичига олувчи $f(G_\varepsilon)$ қисми элементар сирт эканлиги келиб чиқади.

Теорема-2.*Регуляр $\hat{O}$ сирт унга тегишли $p(u_0,v_0)$ нуқта атрофида,*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v),\ (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Параметрик тенгламалар ёрдамида берилиб, p нуқтада $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ детерминант нолдан фарқли бўлса, шундай силлиқ $f(x,y)$ функция мавжудки p нуқтанинг атрофида $\hat{O}$ сирт $z =$

$f(x,y)$ *функциянинг графигидан иборатдир.*

Изоҳ. Биз регуляр сиртларнинг параметрлаш усулини танлаганимизда ҳар доим x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v ҳосилалар мавжуд ва узлуксиз бўлишини талаб қиламиз.

Исбот. Теоремани исботлаш учун,

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(u_0,v_0) = x_0 \\ y(u_0,v_0) = y_0 \end{matrix}$$

системага математик анализ курсидаги тескари функциялар ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Бу теоремага асосан шундай $\delta > 0$ сони ва $\Pi_\delta = \{(x,y): |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$

Соҳада аниқланган шундай дифференциалланувчи $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$ функциялар мавжудки, улар $x(\ u(x;y),\ v(x;y)\ ) \equiv x$, $y(\ u(x;y),\ v(x;y)) \equiv y$ тенгликларниқаноатлантирадива $u(x_0;y_0) = u_0$, $v(x_0;y_0) = v_0$, муносабатлар ўринли бўлади. Демак, p нуқта атрофида $\hat{O}$ сирт $z = z(\ u(x;y)$, $v(x;y)) = f(x;y)$ функциянинг графигидан иборатдир.

3. Сирт устида ётувчи эгри чизиқлар.

Регуляр $\hat{O}$ сиртнинг $p \in \hat{O}$ нуқта атрофида регуляр (f,G) параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

тенглама ёрдамида берилган, сирт устида M нуқтадан ўтувчи γ эгри чизиқ берилган бўлиб, у

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t),\ a < t < b. \ (2)$$

тенглама ёрдамида параметрланган ва $\gamma \subset f(G)$ бўлсин.

Аниқлик учун, M сирт нуқтаси сифатида $(u_0;v_0)$ координаталарга, эгри чизиқ нуқтаси сифатида t параметрнинг t_0 қийматига мос келсин. Табиийки, ҳар бир $t \in (a;b)$ учун шундай $(u(t),v(t)) \in G$ нуқта мавжуд бўлиб,

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t),v(t)) \ (3)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар γ силлиқ эгри чизиқ бўлса, $u(t),v(t)$ функсиялар ҳам дифференсиалланувчи функсиялар бўлади. Бунии сботлашучун $\hat{O}$ сиртнинг регуляр сирт эканлигидан фойдаланамиз. $\hat{O}$ регуляр сирт бўлганлиги учун $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ тенглик ўринли. Аниқлик учун $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ бўлсин деб фараз қилиб, $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$ системани қараймиз.

Агар γ силлиқ эгричизиқ бўлса, $\vec{\rho}(t)$ вектор функсиянинг координаталари $x(t), y(t), z(t)$ дифференсиалланувчи функсиялар бўлади. Бирорта $t^* \in (a;b)$ учун $x^* = x(t^*)$, $y^* = y(t^*)$, $z^* = z(t^*)$. ва $u^* = u(t^*)$, $v^* = v(t^*)$ белгилашларкиритиб, $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$

системани

$$\begin{cases} x(u^*,v^*) = x^* \\ y(u^*,v^*) = y^* \end{cases}$$

Назорат саволлари ва топшириқлар:

1. Йўналтирувчи чизиғи $\vec{p}=\vec{p}(u)$ тенглама билан берилган, ясовчилари $\vec{e}$ векторга параллел бўлган силиндрнинг параметрик тенгламалари тузилсин.

2. Фазода $x=ach\left(\dfrac{u}{a}\right), \quad y=0, \quad z=u$ тенгламалар билан берилган чизиқнинг Oz ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг (катеноид) тенгламаларини ёзинг.

3. Гиперболик параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

каноник тенглама билан берилган бўлса, унинг шундай параметрик тенгламаларини ёзингки, координата чизиқлари ясовчилардан иборат бўлсин.

4. Сфера $x=a\cos u\cos v, \quad y=a\sin u\cos v, \quad z=a\sin v$ параметриктенгламаларибиланберилганбўлса, унингбиринчи квадратик формасинитопинг.

Эллиптик параболоид $x=\sqrt{p}v\cos u, \quad y=\sqrt{q}v\sin u, \quad z=\dfrac{v^2}{2}$ тенгламаларбиланберилган, унингбиринчи квадратик формасинитопинг.

5. Биринчи квадратик формаси $I=du^2+(u^2+a^2)dv^2$ кўринишдабўлгансиртда $u=\dfrac{1}{2}av^2, \quad u=-\dfrac{1}{2}av^2, \quad v=1$ чизиқларҳосилқилганучбурчакнингпериметринивабурчакларинитопинг.

6. Биринчи квадратик форма 6-масаладаги кўринишдабўлгансиртда $u=av, u=-av, v=1$ чизиқларбиланчегаралангануачбурчакнингюзиниҳисобланг.

7. Биринчи квадратик форма 6-масаладаги кўринишдабўлгансиртда $u+v=0, u-v=0$ чизиқларорасидагибурчакнитопинг.

8. Бирпаллали гиперболоид $x=achu\cos v, \ y=achu\sin v, \ z=cchu$ тенгламаларбиланберилганбўлса, унингиккинчи квадратик формасинитопинг.

9. Доиравий цилиндр $x=R\cos v, y=R\sin v, z=u$ тенгламаларбиланберилганбўлса, унингиккинчи квадратик формасинитопинг.

10. Сирт $F(x,y,z)=0$ тенгламабиланберилган. Унинг Гаусс эгрилигинитопинг.

11. Сиртдифференсиалланувчи $z=f(x,y)$ функциянинггрaфигиданиборатбўлса, унинг Гаусс ва ўрта эгрилигиниҳисобланг.

12. Сфера $x^2+y^2+z^2=169$ тенглама билан берилган. Унинг $M(3,4,12)$ нуқтадан ўтувчи уринма текислиги ва нормал тенгламалари тузилсин.

13. Геликоид $x=u\cos v, y=u\sin v, z=av$ тенгламаларбиланберилган. Унингўртаэгрилигинитопинг.

14. Сирт $xyz=1$ тенгламабиланберилган.Унинг $x+y+z-3=0$ текисликкапараллелуринматекисликларинитопинг.

15. Геликоид учунгеодезикчизиқларнингтенгламалариниёзинг

16. Сирт $x=u^2+v^2, y=u^2-v^2, z=uv$ тенгламаларбиланберилган. Унинг $P(u=1, v=1)$ нуқтасидаги $v=u^2$ чизиқ йўналишибўйичанормалэгрилигинитопинг.

17. Сирт $z=2x^2+\frac{9}{2}y^2$ тенглама билан берилган.Унинг $M(0,0,0)$ нуқтасидаги Дюпен индикатрисаси тенгламасини тузинг.

Ёпиқ тестлар

Савол	Жавоб
Эллиптик цилиндр тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Гиперболик цилиндр тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Параболик цилиндр тенгламаси	$y^2=-2px$
Эллипсоид тенгламаси	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1$

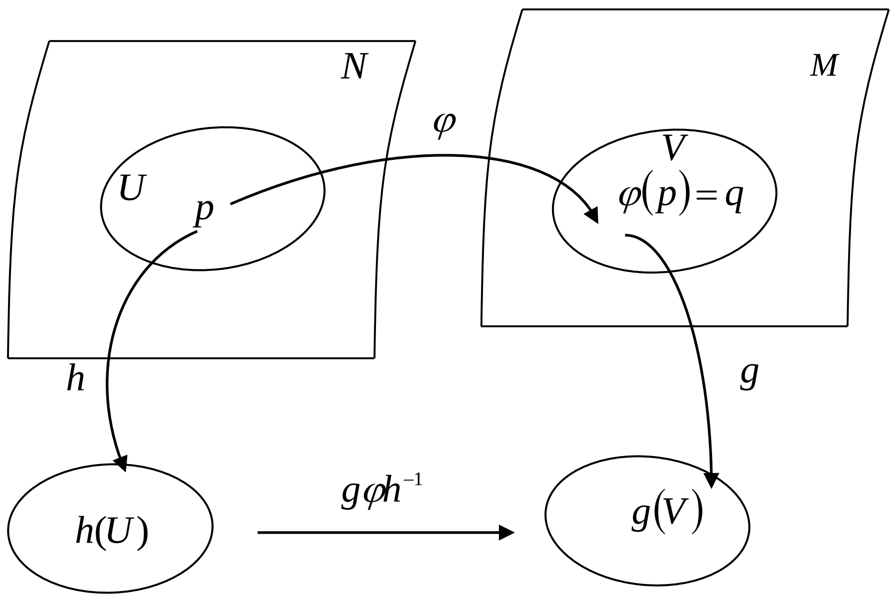
Фойдаланилган адабиётлар:

1. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003
2. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001
3. Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014
4. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., изд. МГУ, 2004

6-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАВЗУ: КЎПХИЛЛИКЛАР. КЎПХИЛЛИКЛАР ТУРЛАРИ. КЎПХИЛЛИК ГЕОМЕТРИЯСИ.

1. Риман геометрияси элементлари.

Силлиқ k -ўлчамли N кўпхилликни силлиқ n-ўлчамли кўпхилликка узлуксиз акслантириш $\phi : N \longrightarrow M$ силлиқ дейилади, агар ихтиёрий $p\in N$ нуқтанинг атрофида N ва M даги бирор картада силлиқ функциялар билан берилса, яъни $g\phi h^{-1}$ функция M да силлиқ функция бўлса (2-расм). Эслатиб ўтамиз, бунда N, M кўпхилликларнинг ўлчамлари k, n ихтиёрий бўлиши мумкин.



2-расм.

Икки силлиқ кўпхилликни ўзаро бир қийматли икки томонлама силлиқ акслантириш диффеоморфизм, бундай акслантириш ўрнатиш мумкин бўлган кўпхилликлар эса диффеоморф дейилади.

M да силлиқ йўл деб $\gamma:[a,b]\longrightarrow M$ силлиқ акслантиришга айтамиз. Локал координаталарда йўл нуқталарининг ҳар бир $x^i\circ\gamma$ координатаси силлиқ функция бўлади. $\gamma(a)$ ва $\gamma(b)$ нуқталар йўлнинг боши ва охири дейилади.

Теорема 3. $\varphi: N \longrightarrow M$ - силлиқ кўпхилликларни силлиқ акслантириш ва $\forall q\in M$ φ акслантиришнинг регуляр нуқтаси бўлсин. У ҳолда p нуқтанинг тўла прообрази $B=\varphi^{-1}(q)_N$ да ўлчами $\dim B=\dim N-\dim M=k-n$ бўлган силлиқ қисм кўпхиллик бўлади.

Исбот. $B=\varphi^{-1}(q)$ қатламнинг кўпхиллик эканини исботлаш учун, ҳар бир $p\in B$ нуқтанинг атрофида ошкормас функция ҳақидаги теоремани қўллаш етарли. Натижада ҳар бир $p\in B$ нуқтанинг R^{k-n} евклид фазосидаги соҳага гомеоморф $p\in U$ атрофга эга бўлади. U атрофда локал координиталар сифатида N кўпхилликнинг p нуқтаси атрофидаги $(x_1,\ldots,x_n)$ локал координаталардан бирор $(n-m)$ тасини олиш мумкин. Агар бу координаталар $\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-m}}\right)$ бўлса, у ҳолда қолган (x_j) локал координаталар $\left(x_{i_1},\ldots,x_{i_{n-m}}\right)$ орқали силлиқ функциялар билан ифодаланади. Бундан $B=\varphi^{-1}(q)$ нинг силлиқ кўпхиллик эканлиги келиб чиқади. $(y_1,...,y_n)_N$ кўпхилликнинг p нуқтаси атрофидаги бошқа координата системаси бўлсин. $(y_{j_1},...,y_{j_{n-m}})$ система B да локал координаталар системасини ташкил этади. У ҳолда

$$y_{j_k} = y_{j_k}(x_1,...,x_n) = y_{j_k}\left(x_1\left(x_{i_1},...,x_{i_{n-m}}\right),...,x_n\left(x_{i_1},...,x_{i_{n-m}}\right)\right)$$

Силлиқ функция бўлади. Теорема исботланди.

Бу эса ошкормас функция ҳақидаги теоремадан келиб чиқади.

Акслантириш дифференциали.

φ : N → M — силлиқ N кўпхилликни силлиқ M кўпхилликка силлиқ акслантириш бўлсин. N даги ҳар бир γ йўлга M да $\varphi \circ \gamma$ йўл мос келади.

M да бирор φ(p) нуқта атрофида берилган ҳар бир f функцияларга, N да бирор p нуқта атрофида берилган $f \circ \varphi$ функция мос келади.

Силлиқ φ акслантиришнинг p нуқтадаги дифференциали $d_p\varphi$ деб $d_p\varphi$:T_pN→$T_{\varphi(p)}$M акслантиришга айтилади, у ҳар бир u∈T_pN векторга $d_p\varphi$(u)∈ $T_{\varphi(p)}$M векторни мос қўйади, M да ихтиёрий f силлиқ функцияга қуйидаги қоида бўйича таъсир этади:

$$(d_p\varphi(u))f=u(f\circ\varphi) .$$

Агар u вектор γ йўлнинг p = γ(t) нуқтада тезлик вектори бўлса, у ҳолда $d_p\varphi$(u) вектор $\varphi \circ \gamma$ йўлнинг t да тезлик вектори бўлади (3-расм),

$d_p\varphi$ (γ '(t))= ($\varphi \circ \gamma$)'(t).

Юқоридаги формулалардан кўринадики, ихтиёрий u, v∈T_pN, a∈R да $d\varphi(u+v) = d\varphi(u) + d\varphi(v)$, $d\varphi(au) = ad\varphi(u)$, яъни φ:N→M силлиқ акслантиришнинг дифференциали $d_p\varphi$ чизиқли акслантириш ва шунинг учун, хусусий ҳолларда силлиқ акслантириш бўлади,

$d_p\varphi$:T_pN → $T_{\varphi(p)}M$

Табиий қоида бўйича аниқланган $d_p\varphi$(p, u)= (φ(p), $d_p\varphi$(u)) уринма қатламаларни акслантириш $d\varphi$:TN→TM ни қараймиз. Бу акслантириш умуман олганда чизиқли эмас, балки қатламда чизиқли.

Ботириш, жойлаштириш, субмерсия.

Агар ҳар бир p∈N нуқтада $d_p\varphi$ чизиқли акслантириш ядроси фақат нолдан иборат бўлса, яъни $d_p\varphi T_pN$ фазони $T_{\varphi(p)}M$ нинг қисм фазосига чизиқли изоморф акслантирса, у ҳолда φ акслантириш N кўпхилликни M га (силлик) ботириш дейилади. Табиийки, бунда k=dimN ≤ dimM=n бўлишизарур.

N да p нуқтани ўз ичига олувчи (V, g) картанинг локал координаталари x^1 *, ...,* x^k *ва M да* $\varphi(p)$ *нуқтани ўз ичига олувчи (U, h) картанинг* y^1 *, ...,* y^n *локал координаталарида* φ *акслантириш силлиқ функциялар билан берилади*

$$y^i = y^i(x^1,\dots,x^k);\ i=1,\dots,n.$$

φ *акслантириш ботириш бўлиши учун* $k \le n$ *бўлиб, ҳар бир* $p \in N$ *нуқтада Якоби матрицаси* $\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,k}$ *нинг ранги к га тенг бўлиши, яъни максимал бўлиши зарур ва етарлидир.*

Якоби матрицасининг ранги локал координаталарни қандай танлашга боғлиқ эмас ва φ *акслантиришнинг p нуқтадаги дифференциали* $d\varphi$ *нинг ранги дейилади.*

Агар $\varphi : N \to M$ *акслантиришда N ўзининг образига диффеоморф бўлса, у ҳолда* φ *акслантириш (силлиқ) жойлаштириш дейилади. Бу ботиришнинг хусусий ҳолидир.*

Ихтиёрий ботириш локал жойлаштириш бўлади.

Агар $k>n$ *да Якоби матрицасининг ранги ҳар бир нуқтада максимал бўлса, яъни n га тенг бўлса, у ҳолда* φ *акслантириш субмерсия дейилади.*

Мисоллар. 1. Силлиқ акслантириш $\pi : TM^{2n} \to M^n$ *проекциялаш* TM *даги ҳар бир* (p,u) *(бунда* $p \in M, u \in T_pM$ *) векторга унинг нуқтасини* $\pi(p,u) = p$ *мос қўяди. Бу акслантиришнинг ҳар бир нуқтада ранги максимал, яъни* n *га тенг бўлгани учун субмерсия бўлади.*

2. $\varphi : R^2 \to R^1$ *акслантириш қуйидаги қоида бўйича аниқланади:* $\varphi(x,y) = x$*, унинг ранги 1 га тенг субмерсия бўлади. Унинг* $\varphi^{-1}(c) = 0$ *қатламлари тўғри чизиқлар бўлади.*

4.2. Эгрилиги номанфий кўпхилликлар геометрияси.
Кўпхилликларда вектор майдонлар.

M силлиқ кўпхилликнинг A қисм тўпламида X вектор майдон берилган дейилади, агар ҳар бир $x \in A$ нуқтага бирор $X_x \in T_xM$ вектор мос қўйилса.

X вектор майдонни $x \mapsto X_x$ акслантириш сифатида қараш учун барча X_xвекторлар ётувчи ягона тўпламни кўрсатиш лозим, чунки турли нуқталарга турли уринма фазолардан векторлар мос қўйилади. Бундай тўплам Уринма қатлама TM ҳисобланади. Шунинг учун вектор майдонни қуйидаги акслантириш каби аниқлаш қулайдир:

$$X : A \to TM, \text{ бунда } A \subset M$$

қўшимча хоссани қаноатлантирувчи : итхтиёрий $x \in A$ нуқта учун проекция $\pi(X_x) = x$, яъни $\pi \circ X = id_A$. Бундай акслантиришлар ТМ нинг кесимлари ҳам дейилади.

G⊂Мсоҳада берилган X вектор майдон силлиқ дейилади, агар уч тенгкучли тасдиқлардан бири бажарилса:

а)X : A → ТМакслантириш сифатида қаралаётган вектор майдонA = Gсиллиқ кўпхилликниТМ силлиқ кўпхилликка акслантирса,силлиқ бўлади;

б) Мдаги G соҳада берилан ихтиёрий силлиқ функцияfучун(Xf)(x) = X_xfтенглик билан аниқланувчиXfфункция силлиқ бўлса;

в) ҳар бир$x \in G$ учун (U, h) карта топилсаки, ундaX_x векторнинг координатлари X_x^i ларx нуқтанингx^1 , ..., x^nкоординаталарига силлиқ боғлиқ бўлса.

A⊂M тўпламда аниқланган Хвектор майдонсиллиқ дейилади, агар камида битта G⊃A очиқ тўпламда аниқланган силлиқ Yвектор майдон мавжуд бўлиб,Атўпламда Хвектор майдон билан устма-уст тушади, $Y|_A = X$. БундайYмайдонXвектор майдоннинг кенгайтмаси дейилади.

Вектор майдонлар фазоси. Битта A⊂M тўпламда берилган X, Y вектор майдонларни қуйидаги қоида бўйича қўшиш ва сонга кўпайтириш мумкин: $(aX + bY)_x = aX_x + bY_x$, бунда $a, b \in R$. Бу амалларга нисбатан А даги вектор майдонлар чизиқли фазо ташкил этади. Бундан ташқари, A⊂M даги вектор майдонларни функцияга қуйидагича кўпайтириш мумкин:

$$fX)_x = f(x)\, X_x$$

М даги силлиқ вектор майдонлар чизиқли фазосини (R устида) χ билан белгилаймиз.

Ли қавси

V вектор фазо унда аниқланган [,] (Ли қавси деб номланувчи) бинар амал билан Ли алгебраси дейилади, агар ихтиёрий $u,v,w \in V$ ва $a,b \in R$ учун қуйиаги аксиомалар бажарилса:

1)кососимметриклик[u, v] = -[v, u];

2)чизиқлилик[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w];

3)Якоби айнияти[[u, v], w]+ [[v, w], u]+ [[w, u], v] = 0.

Таъкидлаб ўтамизки, ассоциативлик талаб этилмайди.

Ли алгебрасига мисол қилиб R^3 евклид вектор фазосидаги оддий вектор кўпайтмани келтириш мумкин.

G⊂M соҳанинг $x \in G$ нуқтасидаги ҳар икки силлиқ вектор майдонга силлиқ функцияларга фуйидаги қоида бўйича таъсир этувчи $[X, Y]_x$ функционал мос қўйилади

$$[X, Y]_x f = X_x(Yf) - Y_x(Xf)$$

Бу функционал ҳам вектор бўлади. Бу функционалнилокал координаталарда қарасак,

$$[X,Y]_x f = X_x(Y^i\partial_i f) - Y_x(X^i\partial_i f) =$$
$$= X_x^j(\partial_j Y^i)\partial_i f + X_x^j Y_x^i \partial_j\partial_i f - Y_x^j(\partial_j X^i)\partial_i f - Y_x^j X_x^i \partial_j\partial_i f =$$ Худди
$$= (X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i)_x \partial_i f,$$

шундай, M да (ёки соҳада) X, Y$\in\aleph$ ҳар икки вектор майдонларга [X, Y]янги вектор майдонни мос қўямиз. У X ва Y вектор майдонларнинг Ли қавси дейилади.

Агар X, Y вектор майдонлар C^k –силлиқ бўлса, у ҳолда уларнинг Ли қавси C^{k-1} – силлиқ вектор майдон бўлади.

Ли қавси хоссалари:

а. Ихтиёрий локал координаталар системасининг базис майдонлари учун

$$[\partial_i, \partial_j] = 0.$$

Ҳақиқатдан ҳам X = ∂_jвектор майдон $X^i = \delta_j^i$ локал координаталарга эга, бунда δ_j^i — Кронекер символи. Шунинг учун барча$\partial X^i/\partial x^k = 0$ ва $[\partial_i, \partial_j] = 0$. ■

б. Ихтиёрий X, Y$\in\aleph$ ваφ силлиқ функциялар учун

$$[X,\varphi Y]_x = \varphi(x)[X, Y]_x + (X_x\varphi)Y_x.$$

в. Агар N — M га жойлаштирилган қисм кўпхиллик ва X, Y — N да силлиқ вектор майдонлар, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, — уларнинг N қисм кўпхилликнинг M даги атрофида кенгайтмаси бўлса, у ҳолда x$\in$N да

$[X, Y]_x = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_x$.

Риман кўпхиллиги.

Агар ҳар бир T_xM уринма фазода x нуқтага силлиқ боғлиқ $\langle\,,\rangle$скаляр кўпайтма аниқланган бўлса, M кўпхилликда риман структураси берилган дейилади, яъни M даги ихтиёрий X, Y силлиқ вектор майдонлар учун $\langle X, Y\rangle$ M да силлиқ функция бўлади.

Боғланишли силлиқ M кўпхилликда риман структураси берилган бўлса, Mриман кўпхиллиги дейилади.

(U,h) локал координаталарда M даги ихтиёрий x $\in$ h(U) нуқта учун қуйидагини ҳосил қиламиз: $\langle X,Y\rangle_x = \langle X^i\partial_i, Y^j\partial_j\rangle_x = X_x^i Y_x^j\langle\partial_i,\partial_j\rangle_x = g_{ij}(x)X_x^i Y_x^j$, бунда ∂_i — хнуқтанинг (U, h) координаталарининг базис$g_{ij}(x)$билан эса $\langle\partial_i,\partial_j\rangle_x$ белгиланган. $g_{ij}(x)$қиймат Mриман кўпхиллигининг x нуқтасининг(U, h)координаталарининг „метрик тензори" коеффициетлари дейилади.

$\langle X, Y\rangle$ функция M да ихтиёрий X, Y силлиқ вектор майдонлар учун силлиқ бўлиши учун барча g_{ij}функциялар силлиқ бўлиши зарур ва етарлидир, бу $(x^1, ..., x^n)$ локал кординаталардаги $\overline{g}_{ij} = g_{ij}\circ h$ функция билан тенг кучлидир.

Икки M_1, M_2 риман кўпхилликлари изометрик дейилади, агар улар ўртасида ихтиёрий $x \in M_1$нуқта ва ихтиёрий $u,v \in T_xM$ векторлар учун шундай диффеоморфизм ϕ:$M_1 \to M_2$ ўрнатиш мумкин бўлсин: $\langle u,v\rangle_{M_1} = \langle d\phi(u), d\phi(v)\rangle_{M_2}$

φ акслантиришнинг ўзи эса изометрия дейилади.

Агарϕ — изометрия,(U, h) — M_1 даги карта, (U, $\phi \circ h$) —эса M_2 даги карта бўлса, у ҳолда $\overline{g}_{ij}$ функциянинг қийматлари x^1 , ..., x^n локал координаталарда бир хил бўлади.

Мисол.Риман кўпхиллигига энг содда мисол нуқтавий евклид фазосидир.

γ : [a, b] → ММ да бўлакли-силлиқ йўл бўлсин.

Ҳар бир $t \in [a, b]$учун $\gamma^{'}(t)$ тезлик вектори аниқланган . $\gamma^{'}$ вектор$\gamma^{'}$ $| = \sqrt{\langle \gamma^{'}, \gamma^{'} \rangle}$ узунликка эга. γ йўл узунлиги қуйидагича аниқланади:

$$s(\gamma) := \int_a^b \left|\gamma^{'}(t)\right| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle} dt.$$

М — риман кўпхиллиги бўлсин. Таърифга кўра у боғланишли. Боғланишли силлиқ кўпхилликнинг ихтиёрий икки нуқтасини силлиқ йўл билан туташтириш мумкин. p, q $\in$ М нуқталар орасидаги масофа деб $\rho(p,q) = \inf s(\gamma)$ сонга айтилади, бунда p ва q ни туташтирувчи бўлакли-силлиқ γ йўлларнинг inf олинади.

Теорема 4.$\rho(p,q) = \inf s(\gamma)$ тенглик билан аниқланган ρ функция М да метрика бўлади, яъни

1) ρ(p, q) > 0,

2) ρ(p, q) = ρ(q, p),

3) ρ(p, l) + ρ(l, q)>ρ(p, q),

4) ρ(p, p) = 0,

5) агар p $\neq$ q бўлса, у ҳолдаρ(p, q)>0 бўлади.

ρ функцияга риман метрикаси дейилади.

N риман кўпхиллигини М риман кўпхиллигига ботириш ϕ:N→M изометрик дейилади, агар если ϕ ботириш индуцирлаган скаляр кўпайтма N даги билан устма-уст тушади, яъни ихтиёрий $x \in N$ нуқта ва $u,v \in T_xN$ учун $\langle d_x\phi(u), d_x\phi(V)\rangle_M = \langle u,v\rangle_N$ бажарилса.

4.3. Замонавий геометрия бўйича ҳалқаро конференцияларда таклиф этилган муаммолар ва уларнинг ечимларининг таҳлили

Ковариант дифференциаллаш.

М — силлиқ кўпхиллик ва x$\in$M бўлсин. ∇қоида ҳар бир $u \in T_x M$ вектор ва хнуқта атрофида берилган X силлиқ вектор майдонга бирор $\nabla_u X \in T_x M$ векторни мос қуйса, x нуқтада ковариант дифференциаллаш дейилади, агар ихтиёрий u, v $\in$ $T_x M$, a, b$\in$R лар, X, Y силлиқ вектор майдонлар ва f силлиқ функциялар учун x нуқта атрофида қуйидаги тенглик бажарилса:

$$\nabla_{au+bv} X = a\nabla_u X + a\nabla_v X,$$
$$\nabla_u (aX + bY) = a\nabla_u X + b\nabla_u Y,$$
$$\nabla_u (fX) = (uf) X_x + f(x)\nabla_u X$$

Бу ерда, одатдагидек, uf - f функциянинг u вектор йўналишидаги ҳосиласи, X_x —эса X майдоннинг x нуқтадаги қиймати. $\nabla_u X$ вектор X вектор майдоннинг uвектор йўналишидаги ковариант ҳосиласи дейилади.

G$\subset$M соҳанинг барча нуқталарида берилган ковариант дифференциаллаш ∇ ҳар жуфт X, Y силлиқ вектор майдонларга G да янги $\nabla_X Y$ вектор майдонни мос қўяди. Таърифга кўра бу майдоннинг x$\in$G нуқтадаги қиймати X_xвекторга боғлиқ ва X майдоннинг бошқа нуқталардаги қийматига боғлиқ эмас. Агар $\nabla_X Y$майдон ихтиёрий силлиқ X и Y майдонлар учун силлиқ бўлса, у холда ковариант дифференциаллаш ∇силлиқ дейилади. Силлиқ ковариант дифференциаллаш чизиқли боғлиқлик ҳам дейилади.

Л е м м а. Агар u$\in$$T_p M$ ва X, $\tilde{X}$ вектор майдонлар p нуқтанинг бирор атрофида устма-уст тушса, у ҳолда p нуқтада $\nabla_u X = \nabla_u \tilde{X}$.

Леви-Чивита боғланиши.

1.Т е о р е м а. Ихтиёрий М риман кўпхиллигида симметрик риман богланиши мавжуд ва у ягонадир. У М даги Леви-Чивита боғланиши дейилади.

2. Исбот. Ягоналиги. ∇ — шундай боғланиш бўлсин. Риччи айниятини X, Y, Z майдонларни циклик алмаштириб уч марта ёзамиз:

$$\begin{aligned} &X\langle Y,Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0,\\ &Y\langle Z,X\rangle - \langle \nabla_Y Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle = 0,\\ &Z\langle X,Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Дастлабки икки тенгликни қўшиб, учинчисини айирамиз.

$$\begin{aligned} &X\langle Y,Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle \nabla_Y Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle +\\ &+\langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0. \end{aligned} \qquad (4^*)$$

Боғланиш симметрик эканидан:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],\ \nabla_X Z - \nabla_Z X = [X,Z], \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y,Z].$$

(4*) тенгликнинг чап томонига $\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ ҳадни қўшиб, айирсак қуйидагига эга бўламиз:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \{X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle\} + \{Y,\langle Z,X\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle\} -$$
$$-\{Z\langle X,Y\rangle - \langle Z,[X,Y]\rangle\}. \qquad (5)$$

бўларни ҳисоблаб,Кошуль формуласи деб номланувчи (5) формулани ҳосил қиламиз: (5) нинг ўнг томони ∇ га боғлиқ эмас. Шунинг учун амалда иккита шундай ∇ и ∇' боғланиш мавжуд бўлади, иҳтиёрийх$\in$M нуқтада қуйидаги тенглик бажарилади:

$$\langle \nabla_{X_x} Y, Z_X\rangle = \langle \nabla'_{X_x} Y, Z_x\rangle$$

ихтиёрий Z майдон учун бажарилишидан,яъни

$$\langle \nabla_{X_x} Y - \nabla'_{X_x} Y, Z_x\rangle = 0$$

Натижада, $(\nabla_{X_x} Y)_x = (\nabla'_{X_x} Y)_x$. Бу тенглик иҳтиёрий хнуқтада ва иҳтиёрий X, Y майдонлар учун ўринли. Демак, $\nabla = \nabla'$.■

Ҳисоб-китобни осонлаштириш учун аввал исботланганлардан фойдаланамиз. M да иҳтиёрий симметрик $\tilde{\nabla}$ боғланиш киритамиз. (4) нинг ҳар бир тенглигининг чап томони талаб қилинган хоссаларни қаноатлантиради, 8.1.3 леммага кўра, (5) тенгликнинг ўнг ва чап томонлари айирмаси ҳам X,Y,Z вектор майдонларнинг x нуқтадаги қийматига боғлиқ. Лекин (5) нинг чап томони, яъни $2\langle \tilde{\nabla}_{X_x} Y, Z_x\rangle$, ва худди шундай ўнг томони ҳам Z майдоннинг x нуқтадан бошқа нуқтадаги қийматига боғлиқ эмас.

Энди аниқки, (5) нинг ўнг томони X, Y майдонларнинг фиксирланган қийматида x$\in$M нуқтада фақат $Z_x \in T_xM$ га боғлиқ бўлса, у ҳолда (5) ўнг томони T_xM да L чизиқли функционални аниқлайди.

Шунинг учун барча $Z_x \in T_xM$ учун $\langle w, Z_X\rangle = L(Z_x)$ бўладиган (X, Y майдонларга боғлиқ) $w \in T_xM$ мавжуд бўлади.

Таърифга кўра $\nabla_{X_x} Y = w/2$ деб олсак, Леви-Чивита боғланишини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, киритилган ∇ амал 7.2 даги (6) нинг дастлабки икки шартини қаноатлантиради. Қурилишига кўра ∇ иҳтиёрий X, Y, Z майдонлар учун (5) муносабатни қаноатлантиради. (5) ни X, Y, Z ва X, Z, Y учун қўлласак ва натижаларни қўшсак, ∇ амал Риччи (1) айниятини қаноатлантиришига амин бўламиз:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + 2\langle \nabla_X Z, Y\rangle = \{X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle\} + \{Y\langle Z,X\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle\} - \{Z\langle X,Y\rangle -$$
$$-\langle Z,[X,Y]\rangle\} + \{X\langle Z,\mathrm{Y}\rangle - \langle Z,[X,\mathrm{Y}]\rangle\} + \{\mathrm{Z}\langle Y,X\rangle - \langle X,[\mathrm{Z},\mathrm{Y}]\rangle\} - \{\mathrm{Y}\langle X,\mathrm{Z}\rangle - \langle Y,[X,\mathrm{Z}]\rangle\}.$$
$$\Rightarrow\ 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + 2\langle \nabla_X Z, Y\rangle = 2X\langle Y,Z\rangle$$

(1) ни иҳтиёрий X, fY, Z майдонлар учун қўлласак,

$$X\langle fY,Z\rangle_x=\langle\nabla_{X_x}fY,Z_x\rangle+\langle f(x)Y_x,\nabla_{X_x}Z\rangle=f(x)\langle\nabla_{X_x}Y,Z_x\rangle+X(f)\langle Y_x,Z_x\rangle+$$
$$+\langle f(x)Y_x,\nabla_{X_x}Z\rangle$$

$$\Rightarrow\langle(Xf)\cdot Y,Z\rangle+f\cdot\langle\nabla_X Y,Z\rangle=\langle\nabla_X(fY),Z\rangle$$

га эга бўламиз.

Бундан, Z майдоннинг иҳтиёрийлигидан келиб чиқиб, қуйидагига эга бўламиз

$$\nabla_x(fY)=(Xf)\cdot Y+f\cdot\nabla_X Y,$$

бу эса 7.2 даги (6) нинг учинчи шарти бажарилини билдиради ва ∇ — боғланиш эканини исботлайди. (5) ни X, Y,Z ваY, X, Z учликларга қўллаб, натижаларни айирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$2\langle\nabla_X Y,Z\rangle-2\langle\nabla_Y X,Z\rangle=\{X\langle Y,Z\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}+\{Y,\langle Z,X\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}-\{Z\langle X,Y\rangle-$$
$$-\langle Z,[X,Y]\rangle\}-\left(\{Y\langle X,Z\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}+\{X,\langle Z,Y\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}-\{Z\langle Y,X\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle\}\right)$$

$$\langle\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],Z\rangle=0.$$

Бу $\langle\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]\rangle$ эканини кўрсатади, яъни киритилган богланиш симметриклигини кўрсатади. ■

(2) Риччи айнияти локал координаталарда қуйидаги тенгламалар системасига тенг кучли

$$\partial_i g_{jk}-\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_k\rangle-\langle\partial_j,\nabla_{\partial_i}\partial_k\rangle=0;\quad \text{i, j, k=1,…,n,}\qquad(6)$$

ёки

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma^s_{ij}\partial_s,\ \langle\partial_s,\partial_k\rangle=g_{sk}.\ (8)$$

эканини ҳисобга олсак қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\partial_i g_{jk}-\Gamma^s_{ij}g_{sk}-\Gamma^s_{ik}g_{sj}=0\ (7)$$

Ҳақиқатан, (6) нинг ҳар бир тенгламаси $\partial_i,\partial_j,\partial_k$ базис майдонларга қўлланган (2) Риччи айниятини беради, шунинг учун (6) тенгликлар (2) дан келиб чиқади. (2) ни (6) дан келтириб чиқариш учун, вспомним, 8.1.3 га кўра (2) нинг чап томонининг қиймати ҳар бир x $\in$ M нуқтада фақат X, Y, Z вектор майдонларнинг шу нуқтадаги қийматлари X_x, Y_x, Z_x га боғлиқ бўлади. Шунинг учун иҳтиёрий X, Y, Z майдонлар учун (2) нинг чап томонини мумкин бўлган барча базис майдонлар учлиги учун аналогик ифодаларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш мумкин. Лекин улар учун (6) га кўра бу ифодалар нолга тенг.

Локал координаталарда $\partial_i,\partial_j,\partial_k,$ базис майдонлар учун (5) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$2\Gamma^s_{ij}g_{sk}=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\ (9)$$

i, jфиксирланганда (9) тенгламалар системасидан s = 1, ..., пда Кристоффел символларини аниқ топиш мумкин

$$\Gamma_{ij}^{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}\right) g^{sk}, \qquad (10)$$

бунда (g^{sk}) — матрица, (g_{sk}) га тескари матрица.

Лекин ҳар бир симметрик боғланиш бирор риман метрикаси учун Леви-Чивита боғланиши бўлавермайди.

Назорат саволлари:

2. Дифференциал 1-формалар. Функция дифференциали – дифференциал 1-форма.
3. Функция градиенти ва функция дифференциали.
4. Сиртларнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари – дифференциал формалар.
5. Риман кўпхилликлари таърифи ва мисоллар. Ковариант дифференциал ва Кристоффел символлари.
6. Симметрик боғланишлик. Риман ва Леви – Чивита боғланишлиги.
7. Акслантириш бўйлаб вектор майдон. Йўл бўйлаб ковариант дифференциаллаш. Параллел вектор майдонлар.
8. Параллел кўчириш ва геодезик чизиқлар. Геодезик чизиқларнинг мавжудлиги.
9. Экспоненциал ва геодезик акслантиришлар.
10. Экспоненциал акслантиришларнинг хосслари. Геодезик акслантиришларнинг хосслари.
11. Гаусс леммаси. Шарлар ва қисқа чизиқлар.
12. Хопф-Ринов теоремаси.
13. Ёпиқ геодезик чизиқлар. Берже лемаси.
14. Эгрилик тензори ва унинг алгебраик хоссалари.
15. Риман эгрилиги. Секцион эгрилик. Эгрилиги ўзгармас фазолар.
16. Риччи эгрилиги ва скаляр эгрилик. Локал изометриялар.
17. Риман субмерсиялари ва О'Нейл формулалари.
18. Қисм кўпхилликлар. Индуцирланган боғланишлик. Иккинчи асосий форма.

Ёпиқ тестлар

Савол	**Жавоб**
V вектор фазо Ли алгебраси дейилиши учун нечта аксиома ўринли?	4
k>n да Якоби матрицасининг ранги ҳар бир нуқтада n га тенг бўлса, у ҳолда	акслантириш субмерсия дейилади
Икки силлиқ кўпхилликни ўзаро бир қийматли икки томонлама силлиқ акслантириш нима деб аталади?	диффеоморфизм
Ихтиёрий ботириш	локал жойлаштириш бўлади

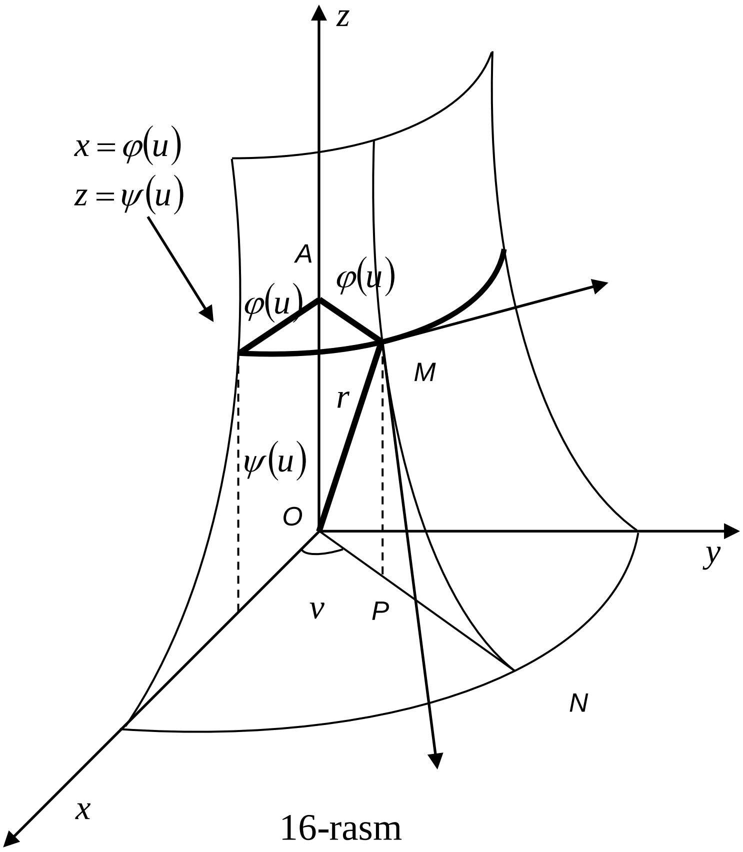
Фойдаланилган адабиётлар:

1. Izu Vaisman Analytical Geometry World Scientific 1997
2. Narmanov A. Ya. Analitik geometriya.T. OЪzbekiston Respublikasi faylasuflar milliy jamiyati nashriyoti, 2008 y.
3. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 1. М., Наука, 1983.
4. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadanmasalalar toЪplami T. Universitet, 2006.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М. Наука, 1981.
6. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под ред. Феденко А.С. М., 1979.

VI. КЕЙСЛАР БАНКИ

1-масала. xOz текислигида Oz ўқини кесмайдиган $x=\varphi(u),\ z=\psi(u)$ чизиқ берилган. Бу чизиқни Oz ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Умумийликка зиён етказмасдан берилган $x=\varphi(u),\ z=\psi(u)$ чизиқ учун $\varphi(u)>0$ шарт ўринли деб фараз қиламиз. Эгри чизиқли координаталар сифатида $\angle XOP=v$ бурчакни ва берилган чизиқнинг u параметрини оламиз (16-расм).



16-rasm

Чизиқ устидаги ҳар бир $L(u)$ нуқта маркази Oz ўқида ётган ва радиуси $x=\varphi(u)$ га тенг бўлган айланани чизади: $MA=OP=\varphi(u)$.

Координат чизиқлари: $u=const-$ параллеллар (айланалар), $v=const-$ меридианлар бўлади. Сиртнинг вектор тенгламаси:

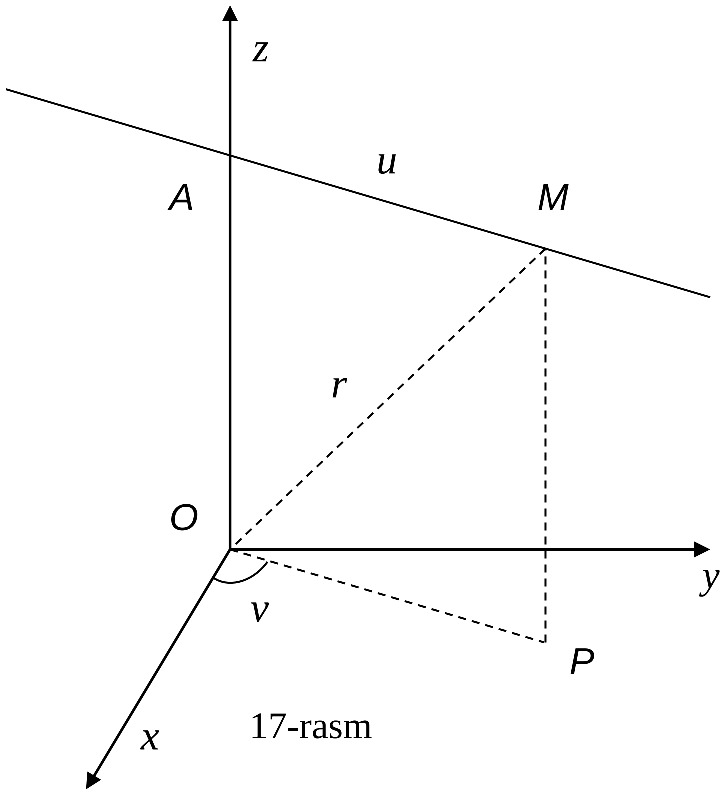
$$\vec{r}=\varphi(u)\cos v\vec{i}+\varphi(u)\sin v\vec{j}+\psi(u)\vec{k},$$

Координат кўринишдаги тенгламалари эса:

$$x=\varphi(u)\cos v,\ y=\varphi(u)\sin v,\ z=\psi(u).$$

Берилган чизиқ билан айланма сиртнинг учинчи координатаси бир хилдир, чунки чизиқ Oz ўқ атрофида айланмоқда.

2-масала. Oz ўққа перпендикулар AB тўғри чизиқнинг шу ўқ атрофида айланишидан ва шунингдек, айланиш бурчагига пропорсионал тезлик билан Oz бўйлаб силжишидан ҳосил бўлган сирт тўғри геликоид дейилади. Тўғри геликоид тенгламасини тузинг.



17-rasm

Ечиш. Координаталарни қуйидагча танлаймиз (17-расм):

$$MA = u, \ \angle XOP = v$$

Шартга кўра $OA = av$, бунда $a = const$. Координата чизиқлари: $u = const$-винт чизиқлар, $v = const$–ясовчилар (ҳаракатланувчи тўғри чизиқлар)дан иборат бўлади.

1-масаладан фойдалб геликоиднинг вектор тенгламаси

$$\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k},$$

параметрик тенгламалари эса

$$x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = av$$

кўринишда бўлишини ҳосил қиламиз.

2-кейс

1. Қуйидаги сфера марказининг координаталари ва радиуси аниқлансин.

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0,$

2) $x^2+y^2+z^2+8x=0,$

3) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0,$

4) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0.$

2. Қуйидаги айлана марказининг координаталари ва радиуси аниқлансин.

$x^2 +y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0, 2x+2y+z+1=0.$

3. Қуйидаги айлананинг маркази аниқлансин.

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ Ax+By+Cz+D=0$$

4. $A(3;0;4)$, $B(3;5;0)$,$C(3;4;4)$,$D(5;4;6)$ нуқталарнинг

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49$

сферага нисбатан вазияти аниқлансин.

5. Қуйидаги текистликларнинг ушбу

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$

сферага нисбатан вазияти аниқлансин.

1) $2x+2y+z+2=0$,

2) $2x+2y+z+5=0$,

3) $2x+2y+z+11=0$.

6. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

сферанинг ушбу

$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$

тўғри чизиққа қўшма бўлган диаметриал текислигининг тенгламаси тузилсин.

7. Ушбу

$(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=25$

Сферанинг $M(3,5,1\ )$нуқтада тенг иккига бўлинадиган ватарларининг геометрик ўрни топилсин.

8. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

сферанинг$S(x_0\ y_0\ z_0)$ нуқтадан ўтувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни топилсин.

9. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

сферанинг$(-R,0,0)$ нуқтадан ўтувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни топилсин.

10. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

сферанинг$M_0(x_0y_0z_0)$ нуқтадан ўтувчи ва тарлари ўрталарининг геометрик ўрни топилсин.

11. $S(x_0\ y_0\ z_0)$ нуқтадан $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферага ўтказилган урин матекисликка туширилган перпендикулар асоcлариниг геометрик ўрни топилсин.

12. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$сферага$M\ (7,\ -1,\ 5)$ нуқтада ўтказилган урин матекислик тенгламаси тузилсин.

13. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$сферага$M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ нуқтада ўтказилган урин матекислик тенгламаси тузилсин.

14. $x^2+y^2+z^2=R^2$сферага$M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ нуқтада ўтказилган урин матекислик тенгламаси тузилсин.

15. $x^2+y^2=9,\ z=0$ va $x^2+y^2=25,\ z=2$ айланалардан ўтувчи сфера тенгламаси тузилсин.

16. Координаталар бошидан ва $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=49$, $2x+2y-z+4=0$ айланадан ўтадиган сфера тенгламаси тузилсин.

17. $(1, -2, 0)$ нуқтадан ва $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=49$, $2x+2y-z+4=0$ айланадан ўтувчи сфера тенгламаси тузилсин.

3-кейс

18.Тўғри чизиқларнинг боғлами S_1 ва бу боғламдаги тўғри чизиқларг аперпендикулар бўлган текисликлар боғлами S_2 берилган. S_1 боғламининг тўғри чизиқлари ва S_2 боғламнинг текисликлари кесишади. Кесиш нуқталарининг геометрик ўрни топилсин. S_1 боғлам текисликлари билан S_2 боғламнинг шу текисликларга перпендикулар бўлган тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталаридан ҳосил бўлган геометрик ўрни аввалги геометрик ўрнининг ўзидан иборатлиги исботлансин.

19. ҚандайзарурийваетарлишартбажарилгандаAx+By+Cz+D=0текислик$x^2+y^2+z^2=R^2$сферагауринади? Бушартбажарилгандебуринишнуқтасинингкоординаталаритопилсин.

20. Ўқларикоординатаўқларибиланустма-усттушувчи, OxzваOyzтекисликларнимосравишда$y=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$, $x=0$ $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$чизиқларбўйлабкесибўтувчиэллипсоидтенгламаситузилсин.

4-кейс

21. Ўқларикоординатаўқларидан иборат, $z=0$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$эллипсва$M(1, 2, \sqrt{23})$ нуқтаорқалиўтувчиэллипсоидтенгламаситузилсин.

22Ўқларикоординатаўқлариданиборатбўлганва $x^2+y^2+z^2=9$, $z=x$ айланаданҳамда$M(3, 1,1)$нуқтаданўтганэллипсоидтенгламаситузилсин.

23. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1$эллипсоиднинг$M(3,2,5)$нуқтасидагиуринматекислигитенгламаситузилсин.

24.$Ax+By+Cz+D=0$текисликнинг$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

эллипсоидгауринишиучунзарурийваетарлишарттопилсин.

25. $Ax+By+Cz+D=0$текисликнинг $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

эллипсоидбиланкесишишиучунқандайшартнингбажарилишизарурваетарли?

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

эллипсоиднингмарказиданунингуринматекислигигатушурилганперпендикулярла расосларининггеометрикўрнитопилсин.

27. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

эллипсоиднинг$Ax+By+Cz+D=0$текисликбиланкесишишчизиғининнгмарказитопил син.

28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг$M(x_1, y_1, z_1)$нуқтадатенгиккигабўлинадиганватарларининггеометрикўрнитопилсин.

29. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоиднинг$\boldsymbol{a}(2,1,2)$векторгапараллел, ватарларинитенгиккигабўлувчидиаметралтекислигинингтенгламаситузилсин.

30. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг$P(x_0, y_0, z_0)$нуқтаданўтувчиватариўрталарининггеометрикўрнианиқлансин.

31. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

эллипсоидбилан$x^2+y^2+z^2=R^2$сферауринматекисликларинингкесишишиданҳосилқи линганэллипсмарказларининггеометрикўрнианиқлансин.

5-кейс

32. Ўқларикоординатаўқларигапараллел, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

эллипсоидбилан$Ax+By+Cz+D=0$текисликнингкесишишчизиғиданўтувчиэллипсо идтенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\lambda(Ax+By+Cz+D)$кўринишдабўлишиисботлансин.

33. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$-1-$\lambda$

$(Ax+By+Cz+D)=0$тенгламабилананиқланганэллипсоидлармарказларининггеометрикўрнитопилсин (λ – ихтиёрийқийматларниқабўлқилади).

34. Иккита $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b)$эллипсоидқандайчизиқбўйлабкесишади?

35. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a>b>c)$ эллипсоидниайланаларбўйичакесибўтадиганҳамматекисликлартенгламаситузилсин.

36. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднингмарказиданбарчануқталаридаунгаўтказилгануринматекисликларга чабўлганмасофаларdгатенгбўладиганнуқталарнинггеометрикўрнитопилсин.

37. 36-масалани $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ эллипсоидучунечинг.

38. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c)$эллипсоиддоиравийкесимларимарказларидантузилганнуқталарнинггеометрикўрнитопилсин.

ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
аналитик геометрия	иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртларни ўрганувчи фан	the subject which studies second order lines and second order surfaces
иккинчи тартибли чизиқнинг маркази	иккинчи тартибли чизиқнинг симметрия маркази	symmetry center of the second order line
иккинчи тартибли чизиқнинг диаметри	параллел ватарлар ўрталаридан ўтувчи тўғри чизиқ	The line which through centers of parallel hords
конус кесимлар	конусни текислик билан кесиш натижасида ҳосил бўлган иккинчи тартибли чизиқлар	Second order lines which are intersection of the cone and plane
дифференциал геометрия	дифференциалланувчи функциялар ёрдамида параметрланган чизиқлар ва сиртларни ўрганувчи фандир	the subject which studies curves and surfaces, parametrized by differentsiable functions
элементар эгри чизиқ	очиқ интервалнинг топологик (гомеоморф) акслантиришдаги образи	The image of open segment under topological (gomeomorf) mapping
содда эгри чизиқ	ўзига тегишли ҳар қандай нуқтанинг бирорта атрофида элементар эгри чизиқ бўладиган боғланишли тўплам	Connected set which is a elementary curve in some neighborhood of any point
Топология	геометрк объектларнинг топологик хоссаларини ўрганувчи фандир	the subject which studies topological properties of geometric objects
Геодезик чизиқ	сиртларда евклид геометриясидаги тўғри чизиқларнинг аналогидир	It is analog of strigth line of Euclidean geometry
Топологик хоссалар	геометрик фигураларнинг гомеоморф акслантиришда сақланувчи хоссаларидир	Properties of geometric figures which is preserved under homeomorf mappings
сиртнинг қалби (soul)	сиртнинг абсолют қаварик компакт қисм тўпламидир	absolute convex compact subset of a surface

сиртнинг йўналиш бўйича нормал эгрилиги	берилган йўналишга параллел ва сиртни тик кесувчи текислик билан кесиш ёрдамида ҳосил бўлган чизиқнинг эгрилиги	The curvature of a curve which is normal section
пуанкаре гипотезаси	компакт чегарасиз бир боғланишли уч ўлчамли сирт уч ўлчамли сферага гомеоморфдир	simply connected compact three-dimensional manifold without boundary is homeomorphic to the three-dimensional sphere
Г.Я.Перелман	Пуанкаре гипотезасини ҳал қилган Санкт-Петербурглик математик	Mathematician from Saint Petersburg who solved Puankare hypothesis
Громол-Чигер гипотезаси	ҳар қандай номанфий эгриликли тўлиқ нокомпакт сирт ўз қалбининг нормал қатламасига диффеоморфдир	complete non-compact surface of negative curvature is diffeomorphic to the normal bundle of its soul

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 592 б.

2. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.

3. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 592 б.

4. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб ҳалқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.

5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.

7. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни.

8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.

9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.

10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.

Ш. Махсус адабиётлар

16. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

17. Bauer, H. Measure and Integration Theory, Berlin: de Gruyter,ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

18. Bear, H.S. A Primer of Lebesgue Integration, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.

19. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry//Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464

20. Bogachev, V. I. Measure theory, Berlin: Springer, 2006.

21. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.

22. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010. 204.

23. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts//2013, ISBN-13: 978-0313319983

24. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

25. H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

26. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

27. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

28. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

29. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

30. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

31. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.

32. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

33. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.

34. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

35. Steve Taylor "Destination" Vocabulary and grammar", Macmillan 2010.

36. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

37. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

38. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.

39. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672 с.

40. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.

41. Гулобод Қудратуллоҳ қизи, Р.Ишмуҳамедов, М.Нормуҳаммедова. Анъанавий ва ноанъанавий таълим. – Самарқанд: "Имом Бухорий халқаро илмий-тадқиқот маркази" нашриёти, 2019. 312 б.

42. Ибраймов А.Е. Масофавий ўқитишнинг дидактик тизими. методик қўлланма/ тузувчи. А.Е.Ибраймов. – Тошкент: "Lesson press", 2020. 112 бет.

43. Ишмуҳамедов Р.Ж., М.Мирсолиева. Ўқув жараёнида инновацион таълим технологиялари. – Т.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 б.

44. Кирянов Д. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.

45. Муслимов Н.Ава бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: "Sano-standart", 2015. – 208 б.

46. Образование в цифровую эпоху: монография / Н. Ю. Игнатова; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

47. Олий таълим тизимини рақамли авлодга мослаштириш концепцияси. Европа Иттифоқи Эрасмус+ дастурининг кўмагида. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

48. Современные образовательные технологии: педагогика и психология: монография. Книга 16 / О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Булгакова и др. – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

49. Усмонов Б.Ш., Ҳабибуллаев Р.А. Олий ўқув юртларида ўқув жараёнини кредит-модуль тизимида ташкил қилиш.–Т.: "ТКТИ" нашриёти, 2019.

IV. Интернет сайтлар

50. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги: www.edu.uz.

51. Бош илмий-методик марказ: www.bimm.uz

52. www. Ziyonet. Uz

53. Открытое образование. https://openedu.ru/

54. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma

55. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/

56. https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search

57. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html

58. https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics.