BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

MATEMATIKANING SOHALARGA TATBIQLARI

2022

Durdiev D.Q. fizika-matematika fanlari doktori, professor

Jumaev J.J. o‘qituvchi

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“MATEMATIKANING SOHALARGA TATBIQLARI”

MODULI BO‘YICHA

O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

Matematika

Buxoro-2022

Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv dasturi va o‘quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan.

Tuzuvchi: **D.Q.Durdiev** fizika-matematika fanlari doktori, professor.
J.J.Jumaev o‘qituvchi

Taqrizchilar: **Xayotov A.R.** fizika-matematika fanlari doktori, professor.
H.R.Rasulov fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

O‘quv-uslubiy majmua Buxoro davlat universiteti Ilmiy Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan
(2021 yil “30” dekbardagi 5-sonli bayonnoma)

MUNDARIJA

I. IShChI DASTUR

Kirish

«Matematikaning sohalarga tatbiqlari» moduli hozirgi kunda matematikani o‘qitishda uning tatbiqlari bilan tushuntirishni, hayotiy va sohaga oid misollarni, matematik analizning biomatematika, mexanika, ommaviy xizmat nazariyasi, iqtisodiy sohalar va boshqa sohalarda keng qo‘llashni, tenglamalar, matrisalar, vektorlar, funksiyalar, hosila, integral va differensial tenglamalarning tatbiqlarini amaliyotga keng qo‘llash, hamda ularning kelajakdagi o‘rni masalalarini qamraydi.

Modulning maqsadi va vazifalari

«**Matematikaning sohalarga tatbiqlari**» **modulining maqsadi:** pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malaka oshirish kurs tinglovchilarining bu borada mamlakatimizda va xorijiy davlatlarda to‘plangan matematika fanlarini o‘qitishning zamonaviy usullarini o‘rganish, amalda qo‘llash, ko‘nikma va malakalarini shakllantirish.

«**Matematikaning sohalarga tatbiqlari**» **vazifalari:**

- zamonaviy talablarga mos holda oliy ta’limning sifatini ta’minlash uchun zarur bo‘lgan pedagoglarning kasbiy kompetentlik darajasini oshirish;
- matematika fanini o‘qitish jarayoniga zamonaviy axborot-kommunikasiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali tadbiq etilishini ta’minlash;
- matematika sohasidagi o‘qitishning innovasion texnologiyalar va o‘qitishning eng so‘nggi zamonaviy usullaridan foydalanishni o‘rgatish;
- tinglovchilarga «matematika» masalalari bo‘yicha konseptual asoslar, mazmuni, tarkibi va asosiy muammolari bo‘yicha ma’lumotlar berish hamda ularni mazkur yo‘nalishda malakasini oshirishga ko‘maklashish;
- ta’lim-tarbiya jarayonida fanning mazmuni, funksiyalari, tarkibiy qismlarini yoritish va tinglovchilarda ulardan foydalanish mahoratini oshirish;

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetentligiga qo‘yiladigan talablar

«Matematikaning sohalarga tatbiqlari» modulini o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida**:**

Tinglovchi:

- matematikani oʻqitishda uning tatbiqlari bilan tushuntirishni, hayotiy va sohaga oid misollarni;

- tenglamalar, matrisalar, vektorlar, funksiyalar, hosila, integral va differensial tenglamalarning tatbiqlarini;

- matematik fanlarni oʻqitishning zamonaviy usullarini ***bilishi*** kerak.

Tinglovchi:

- matematik analizning biomatematika, mexanika, ommaviy xizmat nazariyasi, iqtisodiy sohalar va boshqa sohalarda keng qoʻllash;

- matematik fanlarni oʻqitishda innovasion taʼlim metodlari va vositalarini amaliyotda qoʻllash;

- talabaning oʻzlashtirish darajasini nazorat qilish va baholashning nazariy asoslari hamda innovasion yondashuv uslublarini toʻgʻri qoʻllay olish ***koʻnikmalariga*** ega boʻlishi lozim.

Tinglovchi:

- matematikani oʻqitish innovasion jarayonini loyihalashtirish va tashkillashtirishning zamonaviy usullarini qoʻllash ***malakalariga*** ega boʻlishi lozim.

Tinglovchi:

-matematikaning xorij va respublika miqyosidagi dolzarb muammolari, yechimlari, tendensiyalari asosida oʻquv jarayonini tashkil etish;

- matematikani turli sohalarga tatbiq etish;

- oliy taʼlim tizimida matematik fanlar mazmunining uzviyligi va uzluksizliginitahlil qila olish ***kompetensiyalariga*** ega boʻlishi lozim.

Modulning oʻquv rejadagi boshqa modullar bilan bogʻliqligi va uzviyligi

« Matematikaning sohalarga tatbiqlari » moduli oʻquv rejadagi boshqa modullar va mutaxassislik fanlarining barcha sohalari bilan uzviy bogʻlangan holda pedagoglarning bu soha boʻyicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar matematika fanlarini o‘qitishda zamonaviy usullar yordamida ta’lim jarayonini tashkil etishda pedagogik yondashuv asoslari va bu boradagi ilg‘or tajribalarni o‘rganadilar, ularni tahlil etish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy layoqatga ega bo‘lish, ilmiy-tadqiqotda innovasion faoliyat va ishlab chiqarish faoliyati olib borish kabi kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Modul mavzulari</th><th colspan="5">Tinglovchining o‘quv yuklamasi, soat</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Hammasi</th><th colspan="3">Auditoriya o‘quv yuklamasi</th><th rowspan="3">Ko‘chma mashg‘ulot</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Jami</th><th colspan="2">jumladan</th></tr>
<tr><th>Nazariy mashg‘ulot</th><th>Amaliy mashg‘ulot</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Tenglamalar va ularning tatbiqlari.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>Funksiyalar va ularning tatbiqlari.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Hosila va uning tatbiqlari.</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Differensial tenglamalarning tatbiqlari.</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Matematika va sa’nat.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Jami</td><td>20</td><td>20</td><td>8</td><td>12</td><td>0</td></tr>
</table>

NAZARIY MAShG‘ULOTLAR MAZMUNI

1 – mavzu.Tenglamalar va ularning tatbiqlari.

1. Matematikaningsohalarga tatbiqlari.
2. Tenglamalar va ularning tatbiqlari.
3. Matrisalar va ularning tatbiqlari.
4. Vektorlar va ularning tatbiqlari.

2-mavzu. Funksiyalar va ularning tatbiqlari.

1. Funksiya ta’rifi va ularning tatbiqlari.
2. Funksiyalar yordamida tabiiy jarayonlarni modellashtirish.
3. Hosila ta’rifi va uning tatbiqlari.
4. Integral va uning tatbiqlari.
5. Qatorlar va ularning tatbiqlari.

3-mavzu.Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari.

1. Differensial tenglamalarga keltiriladigan tabiiy fanlar masalalari. Yechim, umumiy yechim tushunchalari.
2. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar. Koshi masalasi. Koshi masalasining yechimi hakidagi teorema.
3. Matematik fizika, mexanika va astronomiya hamda iktisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni taxlil etishda va boshka ko‘p sohalardagi jarayonlarni matematik modeli differensial tenglamalar orqali ifodalanilishi.

4-mavzu.Matematika va sa’nat.

1. Ilm-fan, ta’lim, raqamli iqtisodiyot, yuqori texnologiyalar va boshqa sohalar rivojlanishining negizida matematikaning o‘rni.
2. Muhandislik, bank-moliya, xavfsizlik, pul-kredit sohalaridagi mavjud muammolarni yechish bo‘yicha matematik olimlar tomonidan tadqiqotlar

o‘tkazilishi, mutaxassis kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashning zarurligi.

3. Matematika sohasidagi ilg‘or mamlakatlarida olib borilayotgan ishlar bilan bir qatorda mavjud muammolar, matematikani o‘rganish va yoshlarni matematika ilmiga qiziqtirish, matematika orqali aniq va sohaga bog‘liq boshqa fanlarni rivojlanishiga ko‘maklashishning axamiyati.

AMALIY MAShG‘ULOTLAR MAZMUNI

1–Mavzu: Tenglamalar va ularning tatbiqlari.

1. Matematikaning sohalarga tatbiqlari.
2. Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Yechimni tekshirish. Tenglamalarni sonli yechish usullari.
3. Matrisalar va ularning tatbiqlari.
4. Vektorlar va ularning tatbiqlari.

2–Mavzu: Funksiyalar va ularning tatbiqlari.

1. Funksiya ta’rifi va ularning tatbiqlari.
2. Funksiyalar yordamida tabiiy jarayonlarni modellashtirish.
3. Qatorlar va ularning tatbiqlari.

3–Mavzu: Hosila va uning tatbiqlari.

1. Hosila ta’rifi va uning tatbiqlari.
2. Funksiyalarning monotonligi, eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.
3. Integral va uning tatbiqlari.
4. Yuzalarni integrallar yordamida hisoblash.

4–Mavzu: Differensial tenglamalar .

1. Differensial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim tushunchalari.

2. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar.
3. Koshi masalasi. Koshi masalasining yechimi hakidagi teorema.

5–Mavzu: Differensial tenglamalarning tatbiqlari.

1. Differensial tenglamalarga keltiriladigan tabiiy fanlar masalalari.
2. Matematik fizika, mexanika va astronomiya hamda iktisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni taxlil etishda va boshka ko‘p sohalardagi jarayonlarning matematik modelini differensial tenglamalar orqali ifodalash.

6–Mavzu: Matematika va sa’nat.

1. Ilm-fan, ta’lim, raqamli iqtisodiyot, yuqori texnologiyalar va boshqa sohalar rivojlanishining negizida matematikaning o‘rni.
2. Muhandislik, bank-moliya, xavfsizlik, pul-kredit sohalaridagi mavjud muammolarni yechish bo‘yicha matematik olimlar tomonidan tadqiqotlar o‘tkazilishi, mutaxassis kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashning zarurligi.
3. Matematika sohasidagi ilg‘or mamlakatlarida olib borilayotgan ishlar bilan bir qatorda mavjud muammolar, matematikani o‘rganish va yoshlarni matematika ilmiga qiziqtirish, matematika orqali aniq va sohaga bog‘liq boshqa fanlarni rivojlanishiga ko‘maklashishning axamiyati.

II. MODULNI O‘QITIShDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

AQLIY XUJUM METODI

Aqliy xujum - g‘oyalarni generatsiya (ishlab chiqish) qilish metodidir. «Aqliy xujum» metodi biror muammoni yechishda talabalar tomonidan bildi - rilgan erkin fikr va mulohazalarni to‘plab, ular orqali ma’lum bir yechimga kelinadigan eng samarali metoddir. Aqliy xujum metodining yozma va og‘zaki shakllari mavjud. Og‘zaki shaklida o‘qituvchi tomonidan berilgan savolga ta -labalarning har biri o‘z fikrini og‘zaki bildiradi. Talabalar o‘z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. Yozma shaklida esa berilgan savolga talaba - lar o‘z javoblarini qog‘oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko‘rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki «pinbord» doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. «Aqliy xujum» metodining yozma shaklida javoblarni ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to‘g‘ri va ijobiy qo‘llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va no - standart fikrlashga o‘rgatadi.

Aqliy xujum metodidan foydalanilganda talabalarning barchasini jalb etish imkoniyati bo‘ladi, shu jumladan talabalarda muloqot qilish va munozara olib borish madaniyati shakllanadi. Talabalar o‘z fikrini faqat og‘zaki emas, balki yozma ravishda bayon etish mahorati, mantiqiy va tizimli fikr yuritish ko‘nikmasi rivojlanadi. Bildirilgan fikrlar baholanmasligi talabalarda turli g‘oyalar shakllanishiga olib keladi. Bu metod talabalarda ijodiy tafakkurni rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

Vazifasi. “Aqliy xujum” qiyin vaziyatlardan qutulish choralarini topishga, muammoni ko‘rish chegarasini kengaytirishga, fikrlash bir xilli - ligini yo‘qotishga va keng doirada tafakkurlashga imkon beradi. Eng asosiysi, muammoni yechish jarayonida kurashish muhitidan ijodiy hamkorlik kayfiyatiga o‘tiladi va guruh yanada jipslashadi.

Ob’ekti. Qo‘llanish maqsadiga ko‘ra bu metod universal hisoblanib tadqiqotchilikda (yangi muammoni yechishga imkon yaratadi), o‘qitish jarayonida (o‘quv materiallarini tezkor o‘zlashtirishga qaratiladi), rivojlantirishda (o‘z-o‘zini bir muncha samarali boshqarish asosida faol fikrlashni shakllanti - radi) asqotadi.

<u>Qo'llanish usuli.</u>"Aqliy xujum" ishtirokchilari oldiga qo'yilgan muammo bo'yicha xar qanday muloxaza va takliflarni bildirishlari mumkin. Aytilgan fikrlar yozib borildi va ularning mualliflari o'z fikrlarini qay - tadan xotirasida tiklash imkoniyatiga ega bo'ldi. Metod samarasi fikrlar xilma-xilligi bilan tavsiflandi va xujum davomida ular tanqid qilin - maydi, qaytadan ifodalanmaydi. Aqliy xujum tugagach, muhimlik jixatiga ko'ra eng yaxshi takliflar generatsiyalanadi va muammoni yechish uchun zarurlari tanlanadi.

«Aqliy xujum» metodi o'qituvchi tomonidan qo'yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. Talabalarning boshlang'ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo'yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.
2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog'lash maqsad qilib qo'yilganda - yangi mavzuga o'tish qismida amalga oshiriladi.
3. O'tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo'yilganda - mavzudan so'ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

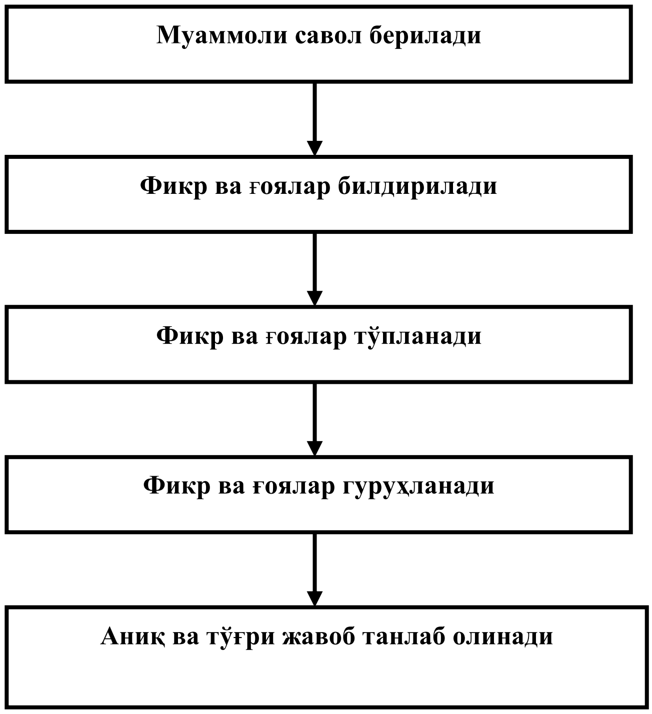
«Aqliy xujum» metodining afzallik tomonlari:

- natijalar baholanmasligi talabalarni turli fikr-g'oyalarning shakl - lanishiga olib keladi;
- talabalarning barchasi ishtirok etadi;
- fikr-g'oyalar vizuallashtirilib boriladi;
- talabalarning boshlang'ich bilimlarini tekshirib ko'rish imkoniyati mavjud;
- talabalarda mavzuga qiziqish uyg'otish mumkin.

«Aqliy xujum» metodining kamchilik tomonlari:

- o'qituvchi tomonidan savolni to'g'ri qo'ya olmaslik;
- o'qituvchidan yuqori darajada eshitish qobiliyatining talab etilishi.

«Aqliy xujum» metodining tarkibiy tuzilmasi



«Aqliy xujum» metodining bosqichlari:

1. Talabalarga savol tashlanadi va ularga shu savol bo‘yicha o‘z javoblarini (fikr, mulohaza) bildirishlarini so‘raladi;
2. Talabalar savol bo‘yicha o‘z fikr-mulohazalarini bildirishadi;
3. Talabalarning fikr-g‘oyalari (magnitafonga, videotasmaga, rangli qog‘ozlarga yoki doskaga) to‘planadi;
4. Fikr-g‘oyalar ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlanadi;
5. Yuqorida qo‘yilgan savolga aniq va to‘g‘ri javob tanlab olinadi.

«Aqliy xujum» metodini qo‘llashdagi asosiy qoidalar:

a) Bildirilgan fikr-g‘oyalar muhokama qilinmaydi va baholanmaydi.

b) Bildirilgan har qanday fikr-g‘oyalar, ular hatto to‘g‘ri bo‘lmasa ham inobatga olinadi.

v) Bildirilgan fikr-g‘oyalarni to‘ldirish va yanada kengaytirish mumkin.

Mavzu bo‘yicha asosiy tushuncha va iboralar

Замонавий таълим воситаси тушунчаси , таълим воситаси турлари, таълим воситасини қўллаш усуллари

Кластер
Кластер - (ўрам, боглам). Билимларни актуаллашишини рагбатлантиради, мавзу бўйича фикрлаш жараёнига янги бирлашган тассавурларни очик ва эркин кириб боришига ёрдам беради.

«Кластерни тузиш коидалари» билан танишадилар. Катта когознинг марказига калит сўзи ёзилади.

Калит сўзи билан бирлашиши учун унинг ён томонларига кичик айланалар ичига «йўлдошлар» ёзилади ва «Катта» айланага чизикчалар билан бирлаштирилади. Бу «йўлдошлар» нинг «кичик йўлдошлари» бўлиши мумкин ва х.о. Мазкур мавзу билан боглик бўлган сўзлар ва иборалар ёзилади.

Мулохаза килиш учун кластерлар билан алмашишади.

Guruxlarda ish olib borish qoidalari

- ✓ O‘zaro hurmat va iltifot ko‘rsatgan xolda har kim o‘z do‘stlarini tinglay olishi kerak;
- ✓ Berilgan topshiriqga nisbatan har kim aktiv, o‘zaro hamkorlikda va ma’suliyatli yondashishi kerak;
- ✓ Zarur paytda g‘ar kim yordam so‘rashi kerak;
- ✓ So‘ralgan paytda har kim yordam ko‘rsatishi kerak;
- ✓ Gurux ish natijalari baholanayotganda hamma qatnashishi kerak;
- ✓ Har kim aniq tushunishi kerakki:
- ✓ O‘zgalarga yordam berib, o‘zimiz o‘rganamiz!
- ✓ Biz bir qayiqda suzayapmiz: yo birga ko‘zlagan manzilga yetamiz, yoki birga cho‘kamiz!

“Davra suhbati” munozarasini o‘tkazish bo‘yicha yo‘riqnoma

1. So‘zga chiqqanlarni diqqat bilan, bo‘lmasdan tinglang.
2. Ma’ruzachining fikriga qo‘shilmasang, o‘z fikringni bildirishga ruxsat so‘ra.
3. Ma’ruzachining fikriga qo‘shilsang, ko‘rib chiqilayotgan masala bo‘yicha qo‘shimcha fikrlar bildir.

III. NAZARIY MAShG‘ULOT MATERIALLARI

1-MAVZU: Tenglamalar va ularning tatbiqlari..(2 soat)

Reja:

1. Matematikaning sohalarga tatbiqlari.
2. Tenglamalar va ularning tatbiqlari.
3. Matrisalar va ularning tatbiqlari.
4. Vektorlar va ularning tatbiqlari.

Tayanch tushunchalar: Algebra, algoritm, 2,3 va n-tartibli determinantlar, bosh diagonal, yordamchi diagonal, minor, algebraik to‘ldiruvchi, uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, matrisa, matrisaning o‘lchami, matrisaning determinanti, maxsus matrisa, maxsusmas matrisa, bosh diagonal, diagonal matrisa, birlik matrisa, transponirlangan matrisa, teng matrisalar, matrisalarning yig‘indisi,matrisani songa ko‘paytirish, matrisalar ko‘paytmasi,matrisaning k-tartibli minori, matrisaning rangi, elementar almashtirishlar,teskari matrisa, determinantlarning xossalari, determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo‘yicha yoyish.

Matematikaning sohalarga tatbiqlari. Mamlakatimizda matematika 2020 yildagi ilm-fanni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlaridan biri sifatida belgilandi. O‘tgan davr ichida matematika ilm-fani va ta’limini yangi sifat bosqichiga olib chiqishga qaratilgan qator tizimli ishlar amalga oshirildi:

birinchidan, ilg‘or ilmiy markazlarda faoliyat yuritayotgan vatandosh matematik olimlarning taklif qilinishi va xalqaro ilmiy-tadqiqotlar olib borilishi uchun zarur shart-sharoit yaratildi;

ikkinchidan, xalqaro fan olimpiadalarida g‘olib bo‘lgan yoshlarimiz va ularning murabbiy ustozlari mehnatini rag‘batlantirish tizimi joriy etildi;

uchinchidan, oliy ta’lim va ilmiy-tadqiqotlarning o‘zaro integratsiyalashuvini ta’minlash maqsadida Talabalar shaharchasida Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining (keyingi o‘rinlarda — Institut) yangi va zamonaviy binosi barpo etildi. Matematika sohasidagi fundamental tadqiqotlarni moliyalashtirish hajmi bir yarim barobarga oshirildi, byudjet mablag‘lari hisobidan superkompyuter, zamonaviy texnika va asbob uskunalar xarid qilindi;

to‘rtinchidan, ilmiy darajali kadrlarni tayyorlashning birlamchi bosqichi sifatida stajyor-tadqiqotlik instituti joriy etildi;

beshinchidan, ilm-fan sohasidagi ustuvor muammolarni tezkor bartaraf etish, fan, ta’lim va ishlab chiqarish integratsiyasini kuchaytirish masalasini Hukumat darajasida belgilash maqsadida O‘zbekiston Respublikasining Bosh vaziri raisiligida Fan va texnologiyalar bo‘yicha respublika kengashi tashkil etildi.

Shu bilan birga, sohada yechimini topmagan qator masalalar matematika sohasidagi ta’lim sifati va ilmiy-tadqiqot samaradorligini oshirishga qaratilgan chora-tadbirlarni amalga oshirish zaruratini ko‘rsatmoqda. Jumladan:

birinchidan, matematika ta’limotining ta’lim olish bosqichlari o‘rtasidagi uzviylik to‘liq ta’minlanmagan;

ikkinchidan, umumta’lim maktablarida matematika darsliklari o‘quvchilarning yoshiga nisbatan fanni o‘zlashtirishni qiyinlashtiruvchi murakkab masalalardan iborat va boshqa fanlarda o‘tiladigan mavzular bilan uyg‘unlashtirilmagan;

uchinchidan, matematikaga qiziquvchan, xalqaro olimpiadalar g‘oliblari bo‘lgan aksariyat iqtidorli yoshlarimiz hududlardan bo‘lishiga qaramasdan ularning kelgusi rivojlanishi uchun oliy ta’lim va ilm-fan sohasida zarur shart-sharoit yaratib berilmagan;

to‘rtinchidan, matematika sohasidagi ilmiy-tadqiqotning amaliyot va ishlab chiqarish bilan bog‘liqligi zaifligicha saqlanib qolmoqda;

beshinchidan, sohadagi olimlarning xorijiy ilmiy va ta’lim muassasalari bilan aloqalari milliy matematikani jahon miqyosiga olib chiqish, xalqaro hamjamiyatda nufuzini oshirish uchun yetarli emas.

Ta’limning barcha bosqichlarida matematika fanini o‘qitish tizimini yanada takomillashtirish, pedagoglarning samarali mehnatini qo‘llab-quvvatlash, ilmiy-tadqiqot ishlarining ko‘lamini kengaytirish va amaliy ahamiyatini oshirish, xalqaro hamjamiyat bilan aloqalarni mustahkamlash, shuningdek, 2017 — 2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini rivojlantirishning beshta ustuvor yo‘nalishi bo‘yicha Harakatlar strategiyasini «Ilm, ma’rifat va raqamli iqtisodiyotni rivojlantirish yili»da amalga oshirishga oid davlat dasturida belgilangan vazifalar ijrosini ta’minlash maqsadida:

1. Quyidagilar matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish, ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish va ilmiy ishlanmalarni amaliyotga joriy qilishning ustuvor yo‘nalishlari etib belgilandi:

maktabgacha, umumiy o‘rta, o‘rta maxsus, professional, oliy ta’lim tashkilotlari va ilmiy muassasalar o‘rtasidagi yaqin hamkorlikni ta’minlovchi yaxlit tizimni shakllantirish;

ilg‘or xorijiy tajriba asosida maktabgacha yoshdagi bolalarda ilk matematik tasavvurlarni shakllantirish bo‘yicha zamonaviy pedagogik texnologiyalarni joriy qilish;

umumiy o‘rta va o‘rta maxsus ta’lim muassasalarida matematika fanlarini o‘qitish sifatini oshirish, hududlarda matematika faniga ixtisoslashtirilgan maktablar faoliyatini rivojlantirish hamda yangi maktablarni tashkil etish;

matematika fani bo‘yicha kadrlarni, xususan qishloq joylardagi maktablarning kadrlarini tayyorlash va qayta tayyorlash tizimini rivojlantirish, matematika fani bo‘yicha darsliklar va o‘quv qo‘llanmalarni takomillashtirish;

iqtidorli yoshlarni aniqlash hamda ularning matematika fani bo‘yicha mahalliy va xalqaro fan olimpiadalarida muvaffaqiyatli ishtirok etishini hamda sovrinli o‘rinlarni egallashini ta’minlash;

ta’lim berishning onlayn platformasini yaratish va amaliyotga tatbiq etish, masofadan o‘qitish tizimi samaradorligini oshirish, baholash tizimining shaffofligini ta’minlash mexanizmlarini joriy qilish;

Matematika fanini bilish darajasini baholash bo‘yicha milliy sertifikatlashtirish tizimini joriy qilish, oliy ta’limning tegishli yo‘nalishlari va mutaxassisliklarida matematika fani bo‘yicha mashg‘ulotlarni ko‘paytirish hamda ta’lim berish sifatini oshirish;

matematika sohasidagi ilmiy-tadqiqotlarning ishlab chiqarish bilan uzviy bog‘liqligini ta’minlash, amaliy matematikani rivojlantirish va iqtisodiyot tarmoqlaridagi muammolarni modellashtirish asosida matematik yechimlarni ishlab chiqish;

matematika sohasida ta’lim olayotgan va ilmiy-tadqiqotlar bilan shug‘ullanayotgan iqtidorli yoshlarni qo‘llab-quvvatlash, chet eldagi oliy ta’lim muassasalari hamda ilmiy tashkilotlar bilan aloqalarni rivojlantirish;

mamlakatimizning ilmiy va ta’lim tashkilotlarini bosqichma-bosqich jahonning matematika fani bo‘yicha yetakchi ilmiy markazlari darajasiga yetkazish.

Hozirgi zamonda iqtisodga, ishlab chiqarishga qo‘yilayotgan yuksak talablarni bajarishda kadrlarning umumiy malakasi oldingi o‘ringa qo‘yilmoqda. Bu yuksak talablar hamma mutaxassislarga tegishlidir.

Bunday yuksak vazifalarni har tomonlama kamol topgan, yuksak ma’lakali mutaxassislar amalga oshiradi. Yuksak malakali mutaxassislar tayyorlashda «Matematika» fanining katta ahhamiyatga ega ekanligi hech kimda shubha tug‘dirmasa kerak.

Hamma sohalarda matematik qonuniyatlarga asoslangan zamonaviy komp’yuterlarning muvaffaqiyat bilan tatbiq etilishi hamda uning kundan-kunga rivojlanib borayotganligi, yosh mutaxassislarning tegishli sohalar, masalalarining matematik modellarini tuza bilishi va unda hisoblash texnikasini joriy etish vazifalarini qo‘ymoqda. Bu masalalarni modellashtirish matematik amallar va usullar yordamida amalga oshiriladi.

Ma’lumki, matematikadagi mavjud, natural sonlar, arifmetik amallardan boshlab, hozirgi zamonaviy, chiziqli algebra va analitik geometriya, differensial va integral hisob hamda differensial tenglamalargacha tushunchalar real dunyoning modellaridir. Bu tushunchalarning hammasi insoniyat ehtiyojlaridan-narsalarni sanash, xo‘jalik hisobi kabi tirikchilik uchun zarur masalalardan kelib chiqqan va rivojlanib bormoqda.

Matematika o‘z rivojlanish tarixida mexanika, fizika, biologiya kabi fanlardan tashqari ijtimoiy fanlarga ham jadal kirib, rivojlanib bormoqda. Matematikani insoniyat taraqqiyotida vujudga kelgan va uning rivojlanishida katta ahamiyatga ega bo‘lgan fanlarning yetakchilaridan desak xato qilmagan bo‘lamiz. Bu fikrimizning isbotini matematika iborasi yunoncha “matema” - “bilim, ilm, fan” deyilishi bilan ham izohlasa bo‘ladi.

Ma’lumki, matematik tushuncha va modellar universallik xususiyatiga ega, ya’ni aynan bitta model fizikada o‘z ma’nosiga, biologiyada ham, iqtisodiyotda ham ma’lum ma’nolarga ega. Bunday modellar tabiiy fanlarda bir necha asrlardan beri qo‘llanib rivojlanib kelmoqda. Lekin, ijtimoiy (iqtisodiyot, psixologiya, jamiyatshunoslik va boshqalar) fanlarda qo‘llash XIX-XX asrlarda intensiv rivojlanishi bilan xarakterlanadi. XX asrda ijtimoiy fanlar muammolarini yechadigan matematikaning sohalari vujudga kela boshladi. Keyingi o‘n yilliklarda matematika usullari, kishilik jamiyatining jarayonlarini va munosabatlarini o‘rganishda yanada chuqurroq kirib bormoqda. Matematika, shunday universal qurolki, real borliqdagi mavjud bog‘lanish va munosabatlarni aniqlashda, hamda ulardan hodisa va jarayonlarni ilmiy baholab bashorat qilishda foydalanish imkoniyatlari rivojlanib bormoqda.

Matematikani o‘rganishning bevosita amaliy tatbiqlaridan tashqari yosh mutaxassislarni har taraflama rivojlangan komil inson qilib tarbiyalashda uning alohida o‘ringa egaligini ta’kidlamasdan bo‘lmaydi. Tahliliy mulohaza, mantiqiy mushohada, fazoviy tasavvur, abstrakt tafakkur inson faoliyatining barcha sohasi uchun zarur
qobiliyatki, bular matematikani o‘rganish jarayonida shakllanib, rivojlanadi.

Matematika va modellar hamda modellashtirish tushunchalari

Model lotincha modulus so‘zidan olingan bo‘lib, narsa yoki hodisalarning asosiy xususiyatlarini o‘zida ifodalovchi shartli (moddiy yoki abstrakt) tasvirdir.

xususiyatlari (tuzilishi, o‘zaro bog‘liqligi, xossalari va hokazo)ni tekshirish maqsadiga muvofiq holda taxminan ifodalaydi. Model iborasi inson faoliyatining ko‘p sohalarida ishlatiladi. Modelni tekshirish natijasida original haqida yangi axborotlar olinadi. Modellarning oddiy turlari qadim zamonda ham bo‘lgan. Modellarga misol sifatida Yer sharining modeli globusni, rassom yasagan rasmni, biror joyning haritasini va hokazolarni ko‘rsatish mumkin.

Har bir ob’ektni sistema (tizim) deb qarash mumkin. ***Sistema*** - (grekchadan olingan bo‘lib. qismlardan tuzilgan butun, birlashma, tizim) o‘zaro bog‘liq elementlardan tuzilgan to‘plam bo‘lib, aniq yaxlitlikni ifodalaydi. Sistemalar o‘ta xilma-xil bo‘lib, inson ilmiy va amaliy faoliyatining hamma jabhalarida uchraydi. Biz ko‘proq **iqtisodiy sistemalar** haqida fikr yuritamiz. Iqtisodiy sistemalarning misollari qilib, xalq xo‘jaligining turli tarmoqlarini, ishlab chiqarish korxonalarini, firmalarni va hokazolarni ko‘rsatish mumkin.

Iqtisodiy sistema deb biror mahsulot ishlab chiqarishni olsak, uning elementlari sifatida ishchi kuchi -odamlarni, stanoklarni, xom ashyolarni qarash mumkin.

Sistemaning elementlari o‘zaro bir-biri bilan bog‘liq bo‘ladi. Masalan, xalq xo‘jaligi sistemasining elementlari ishlab chiqarish korxonalari va birlashmalari bir-biriga xom ashyolar, materiallar, jihozlar yetishtirib beradi. Ishlab chiqarish korxonalari, birlashmalar o‘z navbatida, transport, qurulish va boshqa tashkilotlardan tashkil topgan sistemalarni tashkil etadi. Yuqoridagi har bir sistema elementini yana mustaqil sistema sifatida qarash mumkin.

Sistema tushunchasi favqulodda keng sohalarda foydalaniladi.

Sistemalarni shartli ravishda ***moddiy*** **va** ***abstrakt***(g‘oyaviy) turlarga ajratish mumkin.

Moddiy (material) sistema insondan tashqarida real olamdagi elementlar to‘plamidan tashkil topgan sistemadir. Bunga stanoklarni, mexanizmlarni va boshqalarni kiritish mumkin.

Abstrakt sistema inson fikri, tasavvuri bo‘lib unga bilimlar, nazariyalar, gipotezalar sistemasini kiritish mumkin.

Sistemalarni tahlil qilish jarayonida ko‘p sondagi tekshirishlar, tajribalar o‘tkazilib ulardan eng qulayini tanlash masalasi kelib chiqadi. Buni mavjud (real) sistemalarda o‘tkazish juda murakkab va juda ko‘p vaqtni oladi, hamda iqtisodiy tomondan katta harajatlarga olib keladi.

Sistemaning modelini tuzish va unda tajriba, tekshirishlar o‘tkazish masalasi yuzaga keladi.

Modellashtirishdeganda mavjud sistemani almashtira oladigan o‘xshashini, modelini tuzish va uni tekshirish natijasida original (asli) haqida yangi axborotlar olish tushuniladi. Tuzilgan model, modellashtirilayotgan sistemani to‘liq yoki qisman xususiyatlarini mujassamlashtiradi.

Modellashtirishda uchta: 1) ***sub'ekt*** sifatida tekshiruvchi, inson shaxsi; 2) ***tekshirish ob'ekti*** (sistema); 3) ob'ektning modeli elementlarining mavjudligini payqash lozim.

Modellashtirish jarayoni qaytarilish xususiyatiga ega bo'lib, ko'rsatilgan bosqichlr bir necha marta takrorlanish jarayonida model ketma-ket mukammallashtiriladi. Masalan, kemaning modeli yasalib uni bir necha marta o'rganib, tekshirib, natijada suvda suzadigan **asl kema** yasaladi. Bichuvchi oldin buyumning modelini yasab uni har taraflama tekshirib, keyin uni materialga qo'yib kiyimni bichadi va bu jarayonda material iqtisod qilinadi.

Amaliyotda qo'llaniladigan modellarni shartli ravishda ikki, ***fizik*** **va** ***simvolik***(belgilik) turlarga ajratish mumkin. O'z navbatida fizik model ***geometrik o'xshashlik*** modeli va ***analog-modellarda***ifodalanadi.

Geometrik o'xshashlik modelida asosan originalning tuzilishi va uning geometrik xususiyatlari mujassamlashadi. Modelning o'lchamlari originalga nisbatan proporsional holda kichiraytirilishi yoki kattalashtirilishi mumkin. Masalan, tekshirish uchun samolyot, kema, mashina, ko'prik,binolarning modellari originalga nisbatan kichiraytiriladi. Atomning modeli kattalashtiriladi.

Geometrik o'xshashlik modellarini yasashda har bir tekshiriladigan sistema uchun model tuziladi yoki eskisini qaytadan yasaladi, bunga ko'p vaqt ketadi hamda ancha moddiy harajatlarga olib keladi. Bundan tashqari bunday turdagi modellar sistema dinamikasini tekshirishda qiyinchiliklarga olib keladi.

Analog-modellarda originalda kechadigan fizik jarayonlar mo'jassamlashadi. Modellarning bunday turi texnik qurilmalar modellarini yasashda ishlatiladi

Simvolik modellarda original tuzilishi hamda ularga tegishli bog'liqliklar simvollar va ular orasidagi munosabatlar yordamida ifodalanadi. Simvolik modellar orasida matematik va mantiqiy bog'lanishni ifodalaydigan ***matematik*** **(tenglama, tengsizlik, funksiya va boshqalar)** ***modellar***asosiy o'rinni egallaydi.

Ma’lumki, insoniyat jamiyatining uzluksiz o‘sib boruvchi ehtiyojini to‘laroq qondirish uchun matematika fani vujudga keldi va rivojlandi. Buni arifmetika, geometriya va algebra fanlarining kelib chiqishi hamda rivojlanishi tarixidan ham tushunish mumkin. Masalan, tomonlari a dan iborat kvadrat yuzining modeli $s = a \cdot a = a^2$ dir. A mahsulot 5 kg ning narxi 200 so‘m bo‘lsa, uning 1 kg ning narxi x uchun $5x$=200 tenglama o‘rinli bo‘lib, x=40 so‘m ekanligini topamiz. Xulosa qilib, matematikadagi har bir ifoda, tenglama, tengsizlik, formula, funksiya, hosila, integral va hokazolar borliqning modellari ekanligini payqash qiyin emas.

Matematik modelda mavjud sistema (original) tuzilishi hamda elementlarining bog‘liqligi matematik va mantiqiy munosabatlar sistemasi orqali ifodalanadi. Matematik model o‘zining tabiati bilan originaldan farq qiladi. Originalning xususiyatlarini matematik model orqali tekshirish juda qulay va arzon bo‘ladi. Bundan tashqari ko‘p matematik modellar ***universal***bo‘lib, ular yordamida turli sistemalarni tekshirish mumkin. Masalan, ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

berilgan bo‘lsin. (1) sistemaning ma’nosi nima? Har xil yo‘nalishdagi mutaxassislar: bu aktiv qarshilikli elektr zanjiridagi kuchlanish yoki tok kuchi modeli, stanoklarni yuklash tenglamasi, bu sistema orqali tovarlarni realizatsiya qilish shartlari ifodalangan deyish mumkin. Bu a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 o‘zgarmas koeffisientlar va x_1, x_2 noma’lumlar simvollarining nimani ifodalashi bilan bog‘liq. Bu matematik yozuvning universalligi shundaki, u yuqoridagi hamma holatlar, asosiy qonuniyatlarini ifodalaydi.

Matematik modellashtirish rivojlanishida har xil murakkablikdagi hisoblashlarni va mantiqiy amallarni katta tezlik bilan bajaradigan zamonaviy komp’yuterlarning ahamiyati kattadir.

Iqtisodiy hodisa va jarayonlarning matematik modellari qisqacha ***iqtisodiy-matematik model*** (IMM)lar deb ataladi.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish tabiiy fanlardagiga nisbatan ancha murakkabroq kechadi, bu birinchi navbatda iqtisod, ishlab chiqarish jarayonlaridan tashqari, ***ishlab chiqarish munosabatlarini*** ham qamrab olishidadir. ***Ishlab chiqarish munosabatlarida*** esa odamlarning xulq-odat, hatti-harakatlari, qiziqishi va shaxsan yechim qabul qilishlarini hisobga olmasdan modelni yasab bo‘lmaydi.

Bu fikrning to‘g‘riligini quyidagi oddiy misoldan ham payqash mumkin. Usta (master) boshchiligida bir necha kishi ishlaydigan jamoa kam seriyali mahsulot ishlab chiqarishini olaylik. Usta har kuni ishchilar o‘rtasida har xil detallarni yasashni taqsimlaydi. Ishchilar bir-biridan umumiy malakasi bilan ham ishlab chiqarish amallarini bajarishi bilan ham farq qiladi. Har bir ishchining, har bir amalni bajarishini ish unumdorligiga qarab detallarni eng kam vaqt sarf qilgan holda topshirilgan vazifani bajarishning matematik modelini yasab uni chiziqli dasturlash masalasiga keltirib yechish mumkin. Lekin yechilgan masala boshliqni (ustani) qanoatlantirmasligi mumkin. Gap shundaki amallar (detallarni) bajarish ish haqiga nisbatan qulay, noqulay bo‘lishi va bu amallarni bajarayotgan ishchilar uchun ish haqi ular hohlagan hamda usta hohlaganday muayyan normada bo‘lishini modellashtirish qiyin. Bunda ustani, ishchini nima qiziqtiradi ***buni oddiy holda ham matematik ifodalash ancha murakkab***. Bu sohada ham e’tiborga molik ishlar qilinmoqda.

Iqtisodiy-matematik modellashtirish amaliyotida shunday aniq qonun-qoidalar ishlab chiqilganki, ularni keyingi kurslarda o‘rganiladigan matematik (matematik dasturlash, iqtisodiy matematik modellar va usullar va boshqalar) kurslarda qaraladi.

Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Iqtisodiy jarayon yoki hodisalarning matematik modelini tuzishda va uni tekshirishda koordinatlar usulidan keng foydalaniladi. Misol tariqasida ushbuni qaraymiz.

1-misol. Biror xil mahsulotdan ikki donasini ishlab chiqarish uchun 6 ming so‘m harajat qilinadi, o‘n donasi uchun esa harajat 26 ming so‘m bo‘lsin. Xarajat funksiyasi chiziq (to‘g‘ri chiziq) li bo‘lsa, shu mahsulotdan sakkiz dona ishlab chiqarish harajatini topish uchun masalaning matematik modelini tuzing.

Echish. Ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdorini x , uni ishlab chiqarish uchun ketgan harajat miqdorini y bilan belgilasak, xOy koordinatlar tekisligida masala shartiga asosan $A(2;\,6)$ *ва* $B(10;\ 26)$ berilgan nuqtalar hosil bo‘ladi. berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{x-2}{10-2}=\frac{y-6}{26-6} \quad \text{ёки} \quad y=2{,}5x+1$$

matematik modelni hosil qilamiz va $x=8$ bo‘lganda $y=2{,}5\cdot 8+1=21$ ming so‘m harajat bo‘lishi kelib chiqadi, koordinatlar usuli **tekislik va fazodagi analitik geometriya mavzulari**da o‘rganiladi.

Turli xil iqtisodiy sistemalarning matematik modellarini tuzish va uni tahlil qilishda chiziqli va nochiziqli (chiziqli bo‘lmagan) modellar deb ataluvchi matematik modellar qo‘llaniladi. Ushbu misollarni qaraymiz.

2-misol. Firma palto va kurtka (kalta kamzul) ishlab chiqarish uchun to‘rtta turdagi resurslardan foydalanadi. Resurslar sarfi quyidagicha: bitta palto ishlab chiqarish uchun 1-turdagi resursdan a_1 birlik, 2-turdagi resursdan a_2 birlik, 3-turdagi resursdan a_3 birlik, 4-turdagi resursdan esa a_4 birlik miqdorda ishlatiladi; bitta kurtka uchun esa 1,2,3,4-turdagi resurslardan mos ravishda b_1, b_2, b_3, b_4 birlik miqdorda ishlatiladi. Resurslar chegaralangan bo‘lib, ular mos ravishda c_1, c_2, c_3, c_4 birlik miqdorda berilgan bo‘lsin.

Palto va kurtka ishlab chiqarish uchun resurslar sarfi matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan paltolar miqdorini x_1, ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan kurtkalar miqdorini x_2 bilan belgilaylik. Bu holda $a_1 \cdot x_1$ ko‘paytma palto ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur resurs miqdorini xuddi shunga o‘xshash $b_1 x_2$ kurtka ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur resurs miqdorini ifodalaydi. Demak, 1-tur resursning umumiy sarfi $a_1x_1 + b_1x_2$ bo‘lib,

$$a_1x_1 + b_1x_2 = c_1$$

tenglik hosil bo‘ladi. Yuqoridagiga o‘xshash 2, 3, 4-tur resurslar sarfi uchun mos ravishda

$$a_2x_1 + b_2x_2 = c_2$$
$$a_3x_1 + b_3x_2 = c_3$$
$$a_4x_1 + b_4x_2 = c_4$$

tengliklarni hosil qilamiz. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modeli

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 &= c_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 &= c_3 \\ a_4x_1 + b_4x_2 &= c_4 \end{aligned}$$

ikki noma’lumli, to‘rtta chiziqli tenglamalar sistemasi bo‘ladi. Bu modelda o‘zgaruvchilar (noma’lumlar) faqat birinchi darajali bo‘lganligi uchun chiziqli model deb yuritiladi.

Bu sistemaning koeffisientlaridan hamda ozod hadlardan ushbu jadvallarni tuzish mumkin:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

Bunday jadvallarga matrisalar deb aytiladi. Yuqoridagiga o‘xshash modellarni tuzishda va tahlil qilishda oliy algebra (determinantlar, matrisalar, chiziqli tenglamalar sistemasi va boshqalar) elementlaridan keng foydalaniladi , bu matematik apparat **oliy algebra**(**chiziqli algebra**)elementlari mavzusida o‘rganiladi.

3-misol. Ma’lumki, biror mahsulotni sotishdan olingan ja’mi daromad y, mahsulot narxi p bilan, uning miqdori x ning ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$y = px \qquad (2)$$

bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan sotiladigan mahsulotning miqdori uning narxiga bog‘liq, odatda narx qancha arzonroq qo‘yilsa ko‘proq miqdorda, narx ko‘tarilsa esa kamroq miqdorda mahsulot sotiladi. Bu bog‘lanish oddiy, chiziqli deb olaylik, ya’ni

$$p = ax + b \qquad (3)$$

ko‘rinishda bo‘lsin. Narxning (3) formuladagi qiymatini (2) tenglikka qo‘ysak

$$y = px = (ax + b)x = ax^2 + bx$$

matematik model kelib chiqadi. Bu model **nochiziqli modellar**ga misol bo‘ladi (x o‘zgaruvchi ikkinchi darajada).

Tekshirilayotgan iqtisodiy sistema butun xalq xo‘jaligi bo‘ladimi yoki uning tarmoqlarimi, ayrim fermer xo‘jaliklari bo‘ladimi ularni modellashtirishda ko‘rsatkichlar orasidagi funksional bog‘lanishni, ya’ni mahsulot ishlab chiqarish uchun u yoki bu resurslarning sarfi orasidagi bog‘lanishni topishdan iborat bo‘ladi. Bunday funksiyani odatda **ishlab chiqarish funksiyasi** deb ataladi. Ishlab chiqarish funksiyasini umumiy holda

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (4)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bunda x resurslarning sarfi, y ishlab chiqarish ko‘rsatkichi (miqdori), a parametr (son). Bu bog‘lanish analitik (formulalar) ko‘rinishida yoki jadval ko‘rinishida bo‘lishi mumkin. Bu funksiyaning ko‘rinishini umumiy iqtisodiy yoki texnologik mulohazalardan hamda axborotlarni statistik o‘rganishlardan olish mumkin. (4) tenglikni

$$y = f(x, a) \ \text{ёки} \ x = \varphi(y,\ a)$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin, bular mos ravishda ishlab chiqarish va sarf funksiyalari deb ataladi. Funksiyalar haqidagi boshlang‘ich tushunchalar matematik tahlilga kirish bobida qaraladi.

Ma’lumki, o‘rtacha miqdor tushunchasi ko‘p sohalarda ishlatiladi, masalan, biror yer maydoniga ekilgan bug‘doy ekinining o‘rtacha hosildorligi, sutdagi bo‘lgan o‘rtacha yog‘ miqdori, bozorda sotilayotgan tovarning o‘rtacha miqdori, ma’lum oyning kunlaridagi biror shaharga kelgan turistlar soni va boshqalar. Tijorat ishlarida ham o‘rtacha miqdor ahamiyatga ega, misol uchun haftaning kunlarida sotilgan mahsulot miqdori, kunning soatlarida oshxonaga kelgan xo‘randalar soni, yilning oylaridagi korxonaning o‘rtacha daromadi va boshqalar. Lekin o‘rtacha miqdorni bilish bilan ko‘p hollarda maqsadga erishib bo‘lmaydi. Istalgan tadbirkorlik ishlarini amalga oshirishda ushbu savolga to‘g‘ri kelish mumkin, mahsulot ishlab chiqarishda qilinayotgan harajatni biror miqdorga oshirganda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori qanchaga ko‘payadi yoki aksincha harajat biror miqdorga qisqartirilganda mahsulot ishlab chiqarish qanday bo‘ladi. Bunday hollarda o‘zgaruvchi miqdorlar ortishi haqida fikr yuritilib, qaralayotgan o‘zgaruvchilar orttirmasi nisbatining limiti qiymatini yoki limitik samaradorlik haqida mulohaza qilishga olib keladi. Misol uchun limitik harajat tushunchasini qaraylik. Tabiiyki, biror mahsulot ishlab chiqarilganda ishlab chiqarish harajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdoriga bog‘liq. Mahsulot miqdorini x birlik bilan, ishlab chiqarish harajatlarini y bilan belgilasak,

$$y = f(x)$$

funksional bog‘lanish kelib chiqadi. Mahsulot ishlab chiqarishni Δx ga orttirilsa, $x + \Delta x$ mahsulotga mos keluvchi harajat $f(x + \Delta x)$ bo‘ladi. Demak, mahsulot miqdorining Δx orttirmasiga, mahsulot ishlab chiqarish harajatining

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

orttirmasi mos keladi. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatga mahsulot ishlab chiqarishning o‘rtacha harajati deyiladi.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ga esa ishlab chiqarishning limitik harajati deyiladi, bunday masalalarni yechish matematikadagi **funksiya hosilasi** tushunchasiga olib keladi , bu tushunchalar **differensial hisob** mavzusida o‘rganiladi.

4-misol. Mahsulot ishlab chiqarish harajati y va mahsulot hajmi x orasida ushbu funksional bog‘lanish bo‘lsin:

$$y = 200x - \frac{1}{20}x^2.$$

Ishlab chiqarish hajmi:

a) $x = 100$; b) $x = 150$ bo‘lgandagi limitik harajatlarni toping.

Echish. Berilgan funksiyadan hosila olsak $y' = 200 - \frac{1}{10}x$ bo‘lib, $x = 100$ bo‘lganda, $y'(100) = 200 - \frac{1}{10}\cdot 100 = 190$ va $x = 150$ bo‘lganda esa, $y'(150) = 200 - \frac{1}{10}\cdot 150 = 185$ bo‘ladi. Bu topilganlarning iqtisodiy ma’nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 100 birlik bo‘lganda, mahsulot ishlab chiqarish harajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o‘tishda, 190 birlikni tashkil etadi, ishlab chiqarish hajmi 150 birlik bo‘lganda esa, u 185 ni tashkil etadi.

Qaralayotgan masalalarda bir necha variantlardan optimal (eng qulay) ini topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsa, uning uchun tuzilgan matematik modelda uning optimal qiymatini topish masalasi qo‘yiladi. Masalan, biror firma yaqin kelajak rejasida ishlab chiqarish funksiyasi, faqat ishlab chiqarishda band bo‘lgan shaxslar soniga bog‘liq bo‘lib,

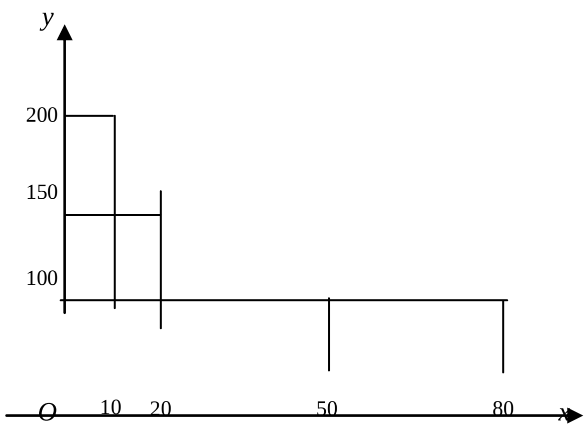
$$y = 4{,}5x^2 - 0{,}1x^3$$

ko‘rinishda bo‘lsin, bunda y ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori, x ishlovchi shaxslar soni. Ishlovchi shaxslar sonining shunday qiymatini topish kerakki ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori maksimal bo‘lsin. Bu holda ishlab chiqarish funksiyasidan hosila olib, uni 0 ga tenglashtirib kritik (stasionar) nuqtalarni topamiz:

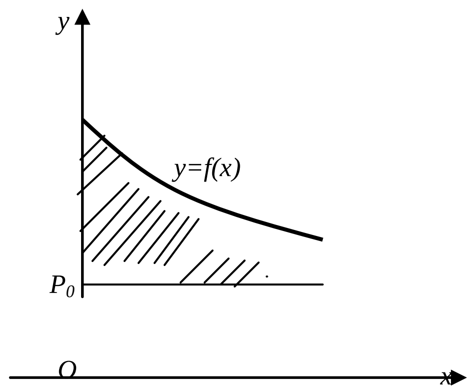
$y' = 9x - 0{,}3x^2$, $9x - 0{,}3x^2 = 0$, bundan $x_1 = 0$ bo‘lganda funksiya minimumga $x_2 = 30$ da maksimumga ega bo‘ladi. Tabiiyki ishchilar soni 0 bo‘lganda hech qanday mahsulot ishlab chiqarilmasligi tushunarli, $x_2 = 30$ bo‘lganda, $y(30) = 4{,}5\cdot 30^2 - 0{,}3\cdot 30^3 = 1250$

bo‘lib, maksimum qiymatga ega bo‘ladi. Optimallik sharti qatnashgan modellarga **optimizatsiyaviy** (optimizasion) modellar deb ataladi.

Ma'lumki, iste'molchi biror tovarni bozordagi narxdan yuqoriroq narxda sotib olishga qodir bo'lib, uni pastroq, bozor narxida harid qilib ortiqcha pul mablag'iga ega bo'ladi. Iste'molchining bunday jami pul mablag'iga iste'molchilar ortiqcha pul mablag'i deb ataylik. Biror tovarga talab quyidagicha ifodalansin: tovarning narxi 200 so'm bo'lsa uni 10 nafar iste'molchi bir donadan, 150 so'm bo'lsa 20 nafar, 100 so'm bo'lsa yana 50 nafar iste'molchi bir donadan harid qilsin, bunda iste'molchilarning umumiy sarfi $S_1 = 200 \cdot 10 + 150 \cdot 20 + 100 \cdot 50 = 10000$ so'm bo'ladi. Tovarga narx birdaniga 100 so'm bo'lganda uni 80 nafar iste'molchi bir donadan harid qilib umumiy sarf $S_2 = 100 \cdot 80 = 8000$ so'm bo'lar edi. Demak iste'molchilar
$S_1 - S_2 = 10000 - 8000 = 2000$ so'm pulni iqtisod qilar edi. Bu holatni grafik ko'rinishda 1-chizmadagi yuzalar ayirmasi sifatida ifodalash mumkin.



1-chizma.



2-chizma

Umumiy holda, talab $y = f(x)$ funksiya bilan berilgan bo'lib, p_0 bozordagi muvozanat narx bo'lsa, iste'molchilar ortiqcha mablag'ini hisoblash, yuqoridan talab chizig'i quyidan $y = p_0$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yuzani hisoblashga olib keladi (2-chizma). Bunday ko'rinishdagi masalalar matematikaning integral hisob deb ataluvchi apparatini o‘rganishga olib keladi, bu apparat **aniqmas va aniqintegral hisob** mavzularida qaraladi.

Tabiat va jamiyatdagi hodisa hamda jarayonlar bir necha faktorlarga bog‘liq bo‘ladi. Masalan, biror yer maydoniga ekilgan bug‘doydan olinadigan hosilning miqdori, bir necha faktorlarga: ekilgan bug‘doy urug‘iga, yerning tuzilishiga, uning sug‘orilishiga, o‘g‘it berilishiga, ob-havoning kelishiga, parvarish qilayotgan shaxsning saviyasiga va boshqalarga bog‘liq.

Iqtisodiyotni qaraydigan bo‘lsak, umuman yuqorida qayd etilgan mahsulot ishlab chiqarish, ishlab chiqarish uskunalari, ishchi kuchi, ishchi shaxs saviyasi, uning kayfiyati, ishlab chiqaruvchining moliyaviy ahvoli va boshqalarga bog‘liq, ya’ni uni

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

ko‘rinishda ifodalash kerak bo‘ladi. Bunday turdagi masalalarni modellashtirish va tekshirish matematikaning ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi bo‘limi yordamida amalga oshiriladi.

Shuni ta’kidlaymizki, ,,Matematika’’ fani oliy ta’limda asosiy tayanch fan ekanligi, uning usullari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, informatika, chiziqli va nochiziqli dasturlash, makro va mikro iqtisod, ekonometriya, iqtisodiy tahlil, moliyaning miqdoriy metodlari, logistika va boshqa fanlarning asosiy bilimlarini egallashda asosiy qurol sifatida ishlatilishi e’tiborga olindi.

3.Matrisalar va ularning tatbiqlari. Sistemalarni modellashtirishda **m*atrisalar algebrasi*** degan tushuncha muhim ahamiyatga ega . Rejalashtirish muammolari, yalpi mahsulot, jami mehnat sarfi, narxni aniqlash va boshqa masalalar hamda ularda kompyuterlarni qo‘llash matrisalar algebrasini qarashga olib keladi. Ishlab chiqarishni rejalashtirish, moddiy ishlab chiqarish orasidagi mavjud bog‘lanishlarni ifodalashda va boshqalarda, ma’lum darajada tartiblangan axborotlar sistemasiga asoslangan bo‘lishi lozim. Bu tartiblangan axborotlar sistemasi muayyan jadvallar ko‘rinishida ifodalangan bo‘ladi. Misol o‘rnida moddiy ishlab chiqarish tarmoqlari orasidagi o‘zaro bog‘liqlik axborotlari sistemasini qaraylik. Ishlab chiqarish 5 ta (masalan, mashinasozlik, elektroenergiya, metal, ko‘mir, rezina ishlab chiqarish sanoatlari) tarmoqdan iborat bo‘lsin. Bunda ular orasidagi o‘zaro bog‘liqlik 1-jadval bilan ifodalansin.

1-jadval.

Tarmoq-lar	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Bu jadvalda a_{ij} $(i, j = 1,2,3,4,5)$ lar bilan, i-tarmoqning j- tarmoqqa yetkazib beradigan (ta’minlaydigan) mahsuloti miqdori belgilangan, chunonchi, a_{21}, a_{22}, ..., a_{25} lar 2-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga; a_{31}, a_{32}, ..., a_{35} lar esa 3-tarmoqning mos ravishda hamma tarmoqlarga yetkazib beradigan mahsulotlari miqdorini bildiradi. a_{22}, a_{33} lar mos ravishda 2,3-tarmoqlarning o‘z ehtiyojlariga sarfini ifodalaydi.

Yuqoridagiga o‘xshash ishlab chiqarish mezoni (normasi) axborotlari sistemasiga sonli misol qaraylik. Korxona 3 turdagi xom ashyo ishlatib 4 xildagi mahsulot ishlab chiqaradigan bo‘lsin, bunda xom ashyo sarfi normasi sistemasi 2-jadval bilan berilgan bo‘lsin.

2-jadval.

Xom ashyolar	Mahsulotlar			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-jadvalda masalan, 1-turdagi xom ashyo sarfi normasi mos ravishda 1,2,3,4-xildagi mahsulotlar ishlab chiqarish uchun 2,3,2,0 bo‘ladi.

1 va 2 jadvallar, matematikada o‘rganiladigan matrisalar tushunchasining misollari bo‘laoladi. Matrisalar iqtisodiy izlanishlarda keng qo‘llanilmoqda, xususan, ulardan foydalanish ishlab chiqarishni rejalashtirishni osonlashtirib, mehnat sarfini kamaytiradi, hamda rejaning har xil variantlarini tuzishni ixchamlashtiradi. Bundan tashqari har xil iqtisodiy ko‘rsatkichlar orasidagi bog‘liqlikni tekshirishni osonlashtiradi. Bu holatlar matrisalarni umumiy holda qarashga olib keladi.

1-ta’rif. m ta satrli va n ta ustunli to‘g‘ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadval

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - & - - - - \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ ***o‘lchamli matrisa*** deyiladi. A matrisani qisqacha (a_{ij}) $(i = 1,...m,\ \ j = 1,...n)$ bilan ham belgilash mumkin. Matrisalarda satrlar soni ustunlar soniga teng bo‘lsa, bunday matrisalar **kvadrat matrisa** deb ataladi.

Har bir n tartibli kvadrat matrisa uchun uning elementlaridan tuzilgan *determinantni* hisoblash mumkin, bu determinantga A matrisaning ***determinanti*** deyiladi va $\det A$ yoki $|A|$ bilan belgilanadi. $\det A = 0$ bo‘lsa, A matrisaga ***maxsus matrisa***, $\det A \neq 0$ bo‘lsa, ***maxsusmasmatrisa*** deyiladi. Kvadrat matrisaning $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elementlar joylashgan diagonali ***bosh diagonal***, $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ elementlari joylashgan diagonali ***yordamchi diagonal*** deyiladi. Bosh diagonaldagi elementlar 0dan farqli boshqa barcha elementlari 0 ga teng kvadrat matrisa ***diagonal matrisa*** deyiladi.Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisa diagonal matrisadir. Diagonaldagi barcha elementlari 1 ga teng diagonal matrisa ***birlik matrisa*** deyiladi va

$$E = \begin{pmatrix} 1\,0 \ldots 0 \\ 0\,1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

bilan belgilanadi.

Faqat bitta satrdan iborat $\left(a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \right)$matrisaga satr matrisa deyiladi. Faqat bitta ustunga ega

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

matrisaga ustun matrisa deb ataladi.

Barcha elementlari 0 lardan iborat bo‘lgan matrisaga no‘l matrisa deyiladi va O bilan belgilanadi.

A matrisaga quyidagi matrisani mos qo‘yish mumkin:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12}a_{22} \cdots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}a_{2n} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning har bir satri A matrisaning unga mos ustunidan iborat. A^T matrisani A matrisaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

$A = \left(a_{ij}\right)$ va $B = \left(b_{ij}\right)$ $(i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ matrisalarning mos elementlari $a_{ij} = b_{ij}$ teng bo‘lsa, bunday matrisalar teng deyiladi.

2. Matrisalar ustida amallar. Matrisalarni qo‘shish, songa ko‘paytirish va bir-biriga ko‘paytirish mumkin.

Bir xil o‘lchamli $A=(a_{ij})$va $B=(b_{ij})$ $(i=\overline{1m},\ j=\overline{1n})$matrisalarning yig‘indisi deb, elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ravishda aniqlanadigan uchinchi $C=(c_{ij})$ matrisaga aytiladi. Ravshanki, C matrisaning o‘lchami oldingi matrisalarning o‘lchami bilan bir xil bo‘ladi. Masalan:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix} \quad \textit{ва} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & 4 & 2\\ 5 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

matrisalar yig‘indisi

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & 2+1 & 0+3\\ 3-2 & 1+4 & -1+2\\ 0+5 & 4+0 & 5+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 5 & 1\\ 5 & 4 & 9\end{pmatrix}=C$$

bo‘ladi. Matrisalarni qo‘shish amali quyidagi o‘rin almashtirish va guruhlash xossalariga ega, ya’ni

$$A+B=B+A, \qquad (A+B)+C=A+(B+C).$$

Matrisalarni qo‘shishda biror matrisaga$O$ matrisani qo‘shish odatdagi sonlarni qo‘shishdagi no‘l soni rolini o‘ynaydi, ya’ni

$$A+O=A.$$

masalan,

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

A matrisani λ songa ko‘paytirish deb uning hamma elementlarini shu songa ko‘paytirishga aytiladi, ya’ni

$$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33}\end{pmatrix}$$

masalan,

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

matrisani $\lambda=3$ ga ko‘paytirsak,

$$\lambda A=3\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12\end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

$m\cdot k$ o‘lchamli $A=(a_{ij})$ matrisaning $k\cdot n$ o‘lchamli $B=(b_{ij})$ matrisaga, ko‘paytmasi deb $m\cdot n$ o‘lchamli shunday $C=(c_{ij})$ matrisaga aytiladiki uning c_{ij} elementi A matrisa i-satri elementlarini B matrisa j-ustunining mos elementlariga ko‘paytmalari yig‘indisiga teng, ya’ni:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}$$

Matrisalar ko‘paytmasi $C=AB$ bilan belgilanadi. Demak, matrisalarni ko‘paytirish uchun birinchi ko‘paytuvchining ustunlari soni, 2- ko‘paytuvchining satrlari soniga teng bo‘lishi talab qilinadi. Shu sababli, umuman $AB\neq BA$.

1-misol. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0\end{pmatrix}$ matrisalar berilgan. A va B matrisalarni ko‘paytiring.

Ye*chish*. Birinchi matrisaning ustunlar soni, ikkinchi matrisaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matrisalarni ko‘paytirish mumkin:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 4 & -3 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & 2\\ 5 & 4\\ 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot 5+3\cdot 6 & 1\cdot 7+0\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 0\\ 4\cdot 2+(-3)\cdot 0+1\cdot 5+0\cdot 6 & 4\cdot 7+(-3)\cdot 2+1\cdot 4+0\cdot 0\\ 2\cdot 2+5\cdot 0+3\cdot 5+1\cdot 6 & 2\cdot 7+5\cdot 2+3\cdot 4+1\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30 & 15\\ 13 & 26\\ 25 & 36\end{pmatrix}.$$

Matrisalarni ko‘paytirish ushbu

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

guruhlash hamda

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

taqsimot xossasiga ega. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

bo‘lsin. Bu holda

$$A\cdot(BC)=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+2\cdot 0 & 0\cdot 2+2\cdot(-3)\\ 3\cdot(-1)+4\cdot 0 & 3\cdot 2+4\cdot(-3)\\ 1\cdot(-1)+(-3)\cdot 0 & 1\cdot 2+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -6\\ -3 & -6\\ -1 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 14\\ -14 & -110\end{pmatrix}.$$

Endi $(AB)\cdot C$ ko‘paytirishni bajaramiz:

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 4\\ 14 & 46\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13\cdot(-1)+4\cdot 0 & 13\cdot 2+4\cdot(-3)\\ 14\cdot(-1)+46\cdot 0 & 14\cdot 2+46\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 14\\ -14 & -110\end{pmatrix}$$

Shunday qilib

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

xossa o‘rinli bo‘ladi. Endi taqsimot xossasini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\\ & & \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

bo‘lsin. Oldin taqsimot xossasining chap tomonini

$(A+B)\cdot C$

hisoblaymiz:

$$(A+B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 6 & -5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

O‘ng tomoni

$$AC+BC=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 19\\ -1 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 6 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

bo‘ladi.

Shunday qilib

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Istalgan kvadrat matrisa A ni mos birlik E matrisaga ko‘paytirganda

$AE=EA=A$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, masalan

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 \\ -1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1 \\ -3\cdot1+0\cdot0+0\cdot(-2) & -3\cdot0+0\cdot1+(-2)\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot0+(-2)\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Xuddi shunga o‘xshash $EA=A$ tenglikni ham tekshirib ko‘rish mumkin (buni bajarishni o‘quvchiga havola qilamiz).

3.Matrisaning rangi va uni hisoblash. A $m\times n$ o‘lchovli matrisada k satr va k ta ustunini ajratamiz, bunda, k,m va n sonlardan kichik yoki ularning kichigiga teng bo‘lishi mumkin. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishuvida hosil bo‘lgan k -tartibli determinantga A ***matrisaning*** k ***-tartibli minori deyiladi.***

Ta’rif. A matrisaning 0 dan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga A ***matrisaning rangi*** deyiladi. A matrisaning rangi $rangA$ yoki $r(A)$ bilan belgilanadi.

Matrisa rangini bevosita hisoblashda ko‘p sondagi determinantlarni hisoblashga to‘g‘ri keladi. Quyidagi amallardan foydalanib matrisa rangini hisoblash qulayroq. Matrisada: 1)faqat 0 lardan iborat satri (ustuni)ni o‘chirishdan; 2) ikkita satr (ustun)ning o‘rinlarini almashtirishdan; 3) biror satr (ustun)ning elementlarini biror $\lambda\neq0$ songa ko‘paytirib, boshqa satr (ustun) mos elementlariga qo‘shish; 4) matrisani transponirlashdan, uning rangi o‘zgarmaydi. Bu amallarga odatda ***elementar almashtirishlar*** deyiladi.

1-misol. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

matrisaning rangini hisoblang.

Ye*chish*. A matrisaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini ikkinchi satr elementlariga, birinchi satr elementlarini (–2)ga ko‘paytirib, uchinchi satr elementlariga, hamda uchinchi satr elementlarini to‘rtinchi satr elemntlariga qo‘shib quyidagi matrisani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Keyingi matrisada 2-satrini (–1) ga ko‘paytirib to‘rtinchi satriga qo‘shsak

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisa hosil bo‘ladi. Bu matrisada

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

bo‘lib, to‘rtinchi tartibli minorlar 0 ga teng. Shunday qilib, berilgan matrisaning rangi 3 ga teng.

4. Teskari matrisa va uni topish. A kvadrat matrisa uchun $AB = BA = E$ birlik matrisa bo‘lsa, B kvadrat matrisa A matrisaga ***teskari matrisa*** deyiladi. Odatda, A matrisaga teskari matrisa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema: A kvadrat matrisa teskari matrisaga ega bo‘lishi uchun A matrisaning determinanti 0 dan farqli bo‘lishi zarur va yetarlidir. (Bu teoremani isbotsiz keltirdik, uning isbotini kengroq dasturli kurslardan topish mumkin, masalan, V.E.Shneyder va boshqalar. «Oliy matematika qisqa kursi» 1tom. T. O‘qituvchi. 1985. 407 b.)

A kvadrat matrisa uchun $\det A \neq 0$ bo‘lsa , unga teskari bo‘lgan yagona matrisa A^{-1} mavjud.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - & - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisaga teskari A^{-1} matrisa

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ - - - - & - - - - \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to‘ldiruvchilari va $\Delta = \det A$.

Teskari matrisani topishga misol qaraymiz.

2-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

matrisaga teskari matrisani toping.

Yechish. Oldin A matrisaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=18+4+3-2-12-9=2\neq 0.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan teskari matrisa mavjud, chunki

$\Delta=2\neq 0$

ya’ni, berilgan matrisa maxsusmas matrisadir. A^{-1} ni topish uchun A matrisa hamma elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix}=6,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}=-5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&9\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&9\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

Teskari matrisani topish

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

formulasiga asosan

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2,5&4&-1,5\\0,5&-1&0,5\end{pmatrix}$$

bo‘ladi. A^{-1} teskari matrisaning to‘g‘ri topilganligini

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

tenglikning bajarilishi bilan tekshirib ko‘rish mumkin, haqiqatan ham,

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -2.5 & 4 & -1.5\\ 0.5 & -1 & 0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+1\cdot(-2.5)+1\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+1\cdot4+1\cdot(-1) & 1\cdot1+1\cdot(-1.5)+1\cdot0.5\\ 1\cdot3+2\cdot(-2.5)+4\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+2\cdot4+4\cdot(-1) & 1\cdot1+2\cdot(-1.5)+4\cdot0.5\\ 1\cdot3+3\cdot(-2.5)+9\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+3\cdot4+9\cdot(-1) & 1\cdot1+3\cdot(-1.5)+9\cdot0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

ya’ni, $AA^{-1}=E$ birlik matrisa hosil bo‘ladi, bu A^{-1} teskari matrisaning to‘g‘ri topilganligini isbotlaydi.

2-mavzu. Funksiyalar va ularning tatbiqlari.(2 soat)

Reja:

1. Funksiya ta’rifi va ularning tatbiqlari.
2. Funksiyalar yordamida tabiiy jarayonlarni modellashtirish.
3. Hosila ta’rifi va uning tatbiqlari.
4. Integral va uning tatbiqlari.
5. Qatorlar va ularning tatbiqlari.

Tayanch iboralar va tushunchalar

O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar, funksiya tushunchasi, funksiya aniqlanish sohasi, qiymatlar to‘plami, analitik usul, grafik usul, jadval usul, oshkor va oshkormas funksiyalar, funksiyaning algoritmik berilishi, murakkab funksiya, teskari funksiya, Sonli qator, cheksiz yig‘indi, umumiy had, garmonik qator, qator yig‘indisi, qismiy yig‘indi, yaqinlashuvchi qator, uzoqlashuvchi qator, zaruriy belgi, yetarli belgi, taqqoslash belgisi, Dalamber belgisi, Koshi belgisi, integral belgi, ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar, o‘zgaruvchan ishorali qatorlar, Leybnis belgisi, absolyut va shartli yaqinlashish.

1. **Funksiya ta’rifi va ularning tatbiqlari.** ***Funksiya tushunchasi*** matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko‘p jarayon va hodisalar modellashtiriladi.

Matematik tahlilda elementlari haqiqiy sonlardan iborat, bo‘lgan to‘plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. $x \in X$ to‘plamda, $y \in Y$ to‘plamda o‘zgarsin.

Ta’rif. $x \in X$ har bir x ga biror qoida yoki qonun bo‘yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo‘yilsa, X to‘plamda ***funksiya berilgan*** **(aniqlangan)** deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = xf$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to‘plamga funksiyaning **aniqlanish sohasi,** Y to‘plamga o‘zgarish sohasi yoki ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D, qiymatlar to‘plamini E bilan belgilanadi.

Shunday qilib, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu moslikka X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga **erklio‘zgaruvchi** yoki **argument,** y ga esa **erksiz o‘zgaruvchi** yoki x **ning funksiyasi** deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun: 1) X to‘plam berilishi kerak (ko‘p hollarda uni x bilan y o‘zgaruvchilarning bog‘lanishiga ko‘ra topiladi); 2) x o‘zgaruvchining X to‘plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo‘yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta’rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan; 1) f $X=(-\infty,\ +\infty)$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir songa uning o‘zini o‘ziga ko‘paytirib, ya’ni kvadratga ko‘tarib mos qo‘yuvchi qoida bo‘lsin. Bu holda $y=x^2$ funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiya $(-\infty,\ +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x\in[0,\ +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo‘ysin. Bu $y=\sqrt{x}$ funksiyani ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0,\ +\infty)$ bo‘ladi.

1-misol. $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Echish. Ma’lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to‘plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo‘lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x-3\geq 0,$$
$$4-x>0$$

bo‘lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo‘ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x\geq 3$, $x<4$ bo‘lib, ya’ni $3\leq x<4$ bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3,\ 4)$ bo‘ladi.

<u>Funksiyaning berilish usullari.</u> Funksiya ta’rifida keltirilgan x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo‘yiladigan y ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo‘lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya ***<u>analitik</u>*****,** ***<u>jadval</u>*** **va** ***<u>grafik</u>*** **hamda kompyuter** usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaing ***analitik usul*** bilan berilishida, x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati, x argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya’ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y=x^3+1,\quad y^2=\frac{x+5}{x^2-3},\quad y=3^{x+1},\quad y=\log_2(x+3);$$

2) o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish **jadval** ko‘rinishida berilishi mumkin. Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda P_1 bosim ostida uning

qaynash temperaturasi t_1, P_2 bosim ostida qaynash temperaturasi t_2 va h.k. bo‘lishini topganda qo‘yidagi jadval kelib chiqadi.

Bosim P	P_1	P_2	$\dots$	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	$\dots$	t_n

Bundan ko‘rinadiki P bosim bilan t temperatura orasida bog‘lanish bo‘lib, P argument, t funksiya bo‘ladi. Funksiyaning bunday berilishiga ***jadval usulda***berilgan deyiladi. Bunday usul ko‘proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning ***grafik usulida***berilishida, x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to‘plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. XOY tekis-likda l chiziq berilgan bo‘lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o‘tadi. A nuqtadan OY o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz, bu perpendikulyarning OY o‘qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo‘ladi. Ma’lumki, bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, **grafik usulda berilgan** deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo‘lgan hollarda va funksiyaning sifat o‘zgarishi grafik usulda yaxshi ko‘rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) *algoritmik yoki kompyuter usuli*. Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritim yoki programma berilgan bo‘ladi. Bunday programma EHMga qo‘yilgan bo‘lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

Funksiyaning ayrim hollari

Oshkor va oshkormas funksiyalar. Funksiya $y = f(x)$ ko‘rinishda, ya’ni y ga nisbatan yechilgan bo‘lsa, unga ***oshkor funksiya***deyiladi. Funksiya $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni y ga nisbatan yechilmagan bo‘lsa,

oshkormasfunksiya ko‘rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y=3x^2+5,\quad y=\sin x,\quad y=4^x$ funksiyalar oshkor ko‘rinishda; $2x-3y+6=0,\qquad x^2+e^{xy}+3=0$ funksiyalar oshkormas ko‘rinishda berilgan. Shuni ta’kidlaymizki hamma $F(x,\ y)=0$ ko‘rinishdagi tenglik ham funksiyani ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2+y^2+4=0$ tenglama funksiyani ifodalamaydi, chunki x ning har bir qiymatiga y ning haqiqiy son qiymatini mos qo‘yish mumkin emas.

Murakkab funksiya. $y=f(u)$ bo‘lib, $u=\varphi(x)$ funksiya berilgan bo‘lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ **funksiyaning funksiyasi** yoki y ga x ning ***murakkab funksiyasi*** deyiladi. Masalan, $y=\lg(x^2+1)$ funksiyada $u=x^2+1$ bo‘lib. y x ning murakkab funksiyasi bo‘ladi. Bundan tashqari $y=\sin(x^2+1),\quad y=3^{x+5},\quad y=\sqrt[3]{(x^3-1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo‘laoladi.

Teskari funksiya*.** $y=f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. y funksiyaning qiymatlar to‘plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, berilgan funksiyaga ***teskari $x=d(y)$ ***funksiya*** berilgan bo‘ladi va $D(f)=E(d)$ va $E(f)=D(d)$ har bir $x_0\in D(f)=E(d)$ va $y_0=E(f)=D(d)$ bo‘lib. $y_0=f(x_0)$ faqat $x_0=d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y=2x-3$ funksiyaga teskari funksiya $2x=y+3,\ x=(y+3)/2$ bo‘ladi. $y=x^3$ funksiya $x=\sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo‘ladi. O‘zaro teskari bo‘lgan funksiyalarning grafiklari $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi.

2. Funksiyalar yordamida tabiiy jarayonlarni modellashtirish.

Chiziqli funksiya. Ma’lumki,

$$y=ax+b \qquad (1)$$

formula bilan aniqlangan funksiyaga chiziqli funksiya deyiladi. Bu burchak koeffisienti $k=a$, boshlang‘ich ordinatasi b bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasidir.

1-misol. Biror korxonada ishlab chiqarilayotgan bir xil mahsulot xarajatini ikki guruh:

1) mahsulot hajmiga, proporsional o‘zgaruvchi xarajat, masalan, materiallar sarfi;

2) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas xarajatlar, masalan, ma’muriyat binosi ijarasiga, uni isitishga ketadigan va boshqa xarajatlar deb qarash mumkin.

O‘zgarmas xarajatlarni b bilan, o‘zgaruvchi xarajatlarni, mahsulotning hir bir birligi uchun a bilan belgilasak, biror davrda x birlik hajmdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan umumiy xarajat

$$y = b + ax$$

bo‘lib, bu chiziqli funksiyadir.

2-misol. Mahsulotning umumiy bahosi uning soniga proporsional bo‘lsin. a bitta mahsulot narxi bo‘lsa, x birlik mahsulotning umumiy bahosi

$$y = ax$$

chiziqli funksiya bilan ifodalanadi, ma’lumki bu koordinatlar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasidir.

Chiziqli funksiya va uning grafigi, iqtisodiy miqdorlar orasida proporsionallik mavjud bo‘lgan bog‘lanishlarda ishlatiladi.

Darajali funksiya. Bunday funksiya

$$y = x^{\alpha} \qquad (2)$$

formula bilan ifodalanadi, bunda α 0 dan farqli ixtiyoriy haqiqiy son. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi α ko‘rsatgichga bog‘liq. α natural son bo‘lsa, hamma haqiqiy sonlar uchun aniqlangan, α butun manfiy son bo‘lsa,

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

bo‘lib, $x \neq 0$ bo‘lgan hamma x lar uchun aniqlangan (bunda n natural son). $\alpha = 1/n$ ko‘rinishdagi son bo‘lsa,

$$y = f(x) = x^{\alpha} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

bo‘lib, n toq son bo‘lsa, $(-\infty, \ +\infty)$ intervalda, n juft son bo‘lsa, $[0, \infty)$ intervalda aniqlangan.

Umuman olganda darajali funksiya o‘zining aniqlanish sohasida uzluksizdir.

3-misol. Italyan iqtisodchisi Pareto jamiyatda foydani taqsimlashning quyidagi qoidasini taklif etdi: y bilan x dan kichik bo‘lmagan foydaga ega bo‘lgan shaxslar sonini belgilasak,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

bo‘ladi, bunda a va m o‘zgarmaslar.

Pareto qonuni katta foydaga ega bo‘lganda, taqsimotni yetarli darajada aniqlik bilan ifodalaydi, past darajadagi foydaga ega bo‘lganda aniq emas.

Biror jamiyatda foydani taqsimlash

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

formula bilan aniqlansin:

1) 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘lgan shaxslar soni;

2) 100 nafar eng boy shaxslar orasida, eng kam foydani toping.

Yechish. 1) masala sharti bo‘yicha, $x = 100000$, uni taqsimot formulasiga qo‘ysak:

$$y = \frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni logarifmlasak:

$$\lg y = \lg\frac{2000000000}{100000^{1.5}} = \lg 2000000000 - 1,5\lg 100000 = \lg 2\cdot 10^9 - 1.5\lg 10^5 =$$
$$= 9 + 0,301 - 1,5\cdot 5 = 9,301 - 7,5 = 1,801,$$

ya’ni $\lg y = 1.801$ bo‘ladi. Logarifmlar jadvalidan $y = 63,2$ ni topamiz. Shunday qilib, Pareto taqsimoti bo‘yicha 63 kishi 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘ladi;

2) masala sharti bo‘yicha $y=100,$ taqsimot formulasidan

$$100=\frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $x=73700$ ekanligini aniqlash mumkin (uni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

Shunday qilib, 100 nafar eng boy kishilar ichida eng kichik foyda 73700 ni tashkil etadi.

Funksiyalarning iqtisodda qo‘llanilishiga misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Bu mavzu bo‘yicha tinglovchilarni shug‘ullanishini taklif etamiz.

4. Hosila ta’rifi va uning tatbiqlari.

Oniy tezlik haqidagi masala. Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo‘ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma’lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o‘zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o‘tilgan yo‘lning shu yo‘lni o‘tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o‘zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko‘pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og‘ir moddiy nuqtaning bo‘shliqda og‘irlik kuchi ta’sirida erkin tushushi masalasini qaraylik. Fizikadan ma’lumki, bo‘shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S=\frac{g}{2}t^2 \qquad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu yerda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o‘tgan yo‘l, g erkin tushish tezlanishi, $g\approx 9{,}81\text{м}/\text{сек}^2$. Bu harakat notekis bo‘lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo‘lsin. OA yo‘lning miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya’ni t, Δt orttirma qabul qiladi. $t+\Delta t$ momentda nuqta B holatda bo‘ladi. AB, vaqt Δt orttirma olgandagi yo‘l orttirmasi, uni $AB=\Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t+\Delta t$ qo‘yib,

$S+\Delta S=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2$, bundan $\Delta S=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{gt^2}{2}$

yoki $\Delta S=\frac{g}{2}(2t\Delta t+\Delta t^2)$.

Oxirgi tenglikni Δt ga bo‘lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{g}{2}(2t+\Delta t) \qquad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma’lumki, $\Delta S/\Delta t$ nisbat t va Δt ga bog‘liq. Masalan: $\Delta t=0{,}1$ sek, $t=1$sek bo‘lganda,

$\frac{\Delta S}{\Delta t}-\frac{g}{2}(2\cdot 1+0{,}1)=1{,}05g$ bo‘lib, $t=3$ sek bo‘lganda

$\frac{\Delta S}{\Delta t}-\frac{g}{2}(2\cdot 3+0{,}1)=3{,}05g$ bo‘ladi.

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo‘ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi ***oniy tezlik*** haqida gapirish kerak bo‘ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma’lumki, t o‘zgarmas bo‘lganda, $\Delta S/\Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o‘rtacha tezlik bo‘lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma’lumki, Δt qancha kichik bo‘lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o‘rtacha tezlikning $\Delta t\to 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya’ni

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo‘yidagi ko‘rinishdagi limitni hisoblash kerak bo‘ladi.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (3)$$

(3) ko‘rinishdagi limitni hisoblashga ko‘p sondagi amaliy masalalarni yechishda to‘g‘ri keladi.

Umuman, o‘zgaruvchi miqdor o‘zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Shuning uchun (3) ko‘rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo‘ladi.

Funksiya hosilasining ta’rifi. 1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo‘lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi <u>hosilasi</u> deyiladi. Bu limit

$$y',\ f'(x_0),\ \ \frac{dy}{dx},\ \ \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, ta’rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo‘ladi, bu limit mavjud bo‘lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni ***<u>differensiallash</u>*** **deb** ataladi.

Biz o‘rganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflan-masin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

Chunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori bo‘lsa, demak $Q\,\tau$ ning funksiyasi bo‘ladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror o‘tkazgich kesim yuzidan vaqt birligida o‘tayotgan elektr miqdori bo‘lsa, Q hosila tok kuchining o‘zgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning o‘zgaruvchi temperaturasini tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila ta’rifiga asosan topishga bir necha misollar qaraymiz:

1-misol. $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila ta’rifiga asosan toping.

Yechish. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni hisoblaymiz.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Shunday qilib, $y' = 3x^2$.

2-misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila ta’rifiga asosan, toping.

Yechish. argument x, Δx orttirma olganda, funksiya Δy orttirma oladi.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)};$$

$$\Delta x \to 0 \quad \partial a \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x. \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = 1.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x, \quad y' = (\sin x)' = \cos x$

bo‘ladi.

Umuman, x va y o‘zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma’nolaridan voz kechsak, y dan x bo‘yicha olingan hosila, y ning x ga bog‘liq bo‘lib o‘zgarishining tezligini ifodalaydi.

Hosilaning geometrik ma’nosi. Hosila muhim geometrik ma’noga ega. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0, f(x_0))$ ***nuqtada o‘tkazilgan urinmaning*** OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan ***o‘tkazilgan urinma tenglamasi***

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

bo‘ladi, bunda $y_0 = f(x_0)$. Funksiya grafigiga urinish nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ da o‘tkazilgan normalning tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \ (f'(x_0) \neq 0)$$

bo‘ladi.

3-misol. $y = \frac{x^3}{3} + 4$ egri chiziqqa abssissasi $x_0 = 2$ nuqtada o‘tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

Yechish. $y_0 = \frac{20}{3}$, $\quad y'(2) = 2^2 = 4$, $\quad y - \frac{20}{3} = 4(x - 2)$

yoki

$3y - 20 = 12(x - 2)$, $\quad 12x - 3y - 4 = 0$, bu $M_0(2{,}20/3)$ nuqtadan o‘tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffisienti

$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{4}$, $\quad$ demak, $y - \frac{20}{3} = -\frac{1}{4}(x - 2)$

yoki

$$12y - 80 = -3(x - 2), \ 3x + 12y - 86 = 0$$

bo‘lib, bu M_0 nuqtadan o‘tkazilgan normalning tenglamasi bo‘ladi.

4. Integral va uning tatbiqlari.

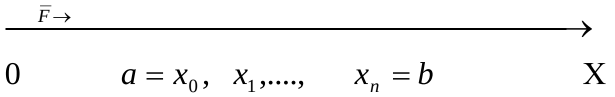
Aniq integralmatematik tahlilning eng asosiy amallaridan biridir.

Yuzalarni, yoy uzunliklarini, hajmlarni, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishini hamda iqtisodning bir qancha masalalari aniq integralga keltiriladi.

O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi masalasi

Masala. Material nuqta F o‘zgaruvchan kuch ta’sirida OX o‘qi bo‘yicha harakatlanayotgan bo‘lsin. F kuch ta’sirida material nuqta *a* nuqtadan *v* nuqtaga o‘tganda bajarilgan ishni hisoblang. F kuch x ning funksiyasi bo‘ladi. $F(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin.

Yechish: $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ nuqtalar orqali $\lfloor x_{i-1,} x_i \rfloor$ šismiy kesmalarga ajratamiz.



1-chizma.

Mexanikadan ma’lumki kuch o‘zgarmas bo‘lsa, bajarilgan ish $A = F \cdot 1$, bunda F kuch miqdori, l - siljish uzunligi. Har bir qismiy kesmada bittadan nuqta tanlaymiz. Bu nuqtalardagi kuchning qiymatini $F(c_i)$larni hisoblaymiz $(i = \overline{1,n})$. Bunda har bir qismiy kesmada bajarilgan ish

$$A_i = F(c_i)\Delta x_i$$

bo‘ladi. $[a,b]$ kesmada bajarilgan ish taqriban

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$$

bo‘ladi.

$\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i = \lambda$ deb belgilasak, bajarilgan ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, F ***o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash*** uchun (1) ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p sondagi cheksiz kichiklar yig‘indisining limitini hisoblash kerak ekan. Bunday limitni hisoblashga juda ko‘p sondagi geometrik, texnik, texnologik va iqtisodiy jarayonlardagi masalalar keltiriladi.

Aniq integralning ta’rifi va uning geometrik ma’nosi. Yuqoridagi masalani umumiy holda qaraymiz. kesmada uzluksiz funksiya berilgan bo‘lsin. $[a,b]$ kesmani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ i = \overline{1, \ n}$ qismiy kesmalarga ajratamiz, har bir qismiy kesmada bittadan $c_1, \ c_2, \ .... \ , c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda $f(c_i)$ funksiya qiymatlarini hisoblab $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + ... + f(c_n)\Delta x_n$ yig‘indini tuzamiz? bu yig‘indiga $y = f(x)$ fugksiya uchun $[a,b]$kesmadagi integral yig‘indi deyiladi. $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash kiritamiz.

Ta’rif. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ integral yig‘indining $[a,b]$ kesmaning $[x_{i-1},\ x_i]\,(i = 1,2,3,...,n)$ qismiy kesmalarga bo‘linish usuliga va ularda $c_1,\ c_2,\ ....\ ,c_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmagan $\lambda \to 0$ dagi chekli limiti mavjud bo‘lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***aniq integrali***deyiladi va

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta’rifga asosan

$$\int\limits_a^b f(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

bo‘lib, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u***integrallanuvchi*** ya’ni bunday funksiyaning ***aniq integrali*** mavjuddir.

Aniq integral quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int\limits_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_3(x)dx;$$

2) o‘zgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya’ni

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx;$$

3) $[a,b]$ kesmada $f(x) \ge 0$ bo‘lsa,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0.$$

bo‘ladi;

4) $[a,b]$ kesmada $f(x) \le g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

bo‘ladi;

5) c $[a,b]$ kesmadagi biror nuqta bo‘lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi;

6) m va M sonlar $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo‘lsa,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi;

7) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

8) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

9) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn$

bo‘ladi;

10) $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bunga o‘rta qiymat haqidagi teorema deb ham aytiladi.

Aniq integralni hisoblash. N’yuton-Leybnis formulasi.

Aniq integralning ta’rifiga asosan, ya’ni cheksiz ko‘p sondagi cheksiz kichiklar yig‘indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog‘lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x), [a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri bo‘lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

formula o‘rinli bo‘lib, bunga **N’yuton-Leybnis formulasi** deyiladi. Bundan foydalanib ***aniq integralning kattaligi*** hisoblanadi.

Shunday qo‘yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang‘ich funksiyani topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to‘laroq shug‘ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o‘z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

1-misol. $\int_1^4 x^2 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang‘ich funksiyasini oldik, buning o‘rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3} + C$ boshlang‘ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo‘ladi. Haqiqatan, ham

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Bigg|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

bo‘ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo‘lgan boshlang‘ich funksiyani olamiz.

2-misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$ integralni hisoblang:

Yechish; $\sqrt{x+4}=t$ almashtirish olamiz, $x=t^2-4,\ dx=2tdt$ bo‘lib,

$x=0$ bo‘lganda, $\sqrt{0+4}=t,\ \ t=2,\ \sqrt{5+4}=t,\ t=3$ bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx=\int_2^3 (t2-4)t2tdt=\int_2^3 (2t^4-8t^2)dt=2\int_2^3 t^4dt-8\int_2^3 t^2dt=2\frac{t^5}{5}\Bigg|_2^3-8\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{2}{3}(3^5-2^5)-\frac{8}{3}(3^3-2^3)=\frac{2}{5}\cdot 211-\frac{8}{3}\cdot 19=\frac{506}{15}=33\frac{11}{15}.$$

Demak,***__aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirilganda__***o‘zgaruvchilar bo‘yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o‘zgaruvchiga qaytish kerak emas.

3-misol. $\int_0^{\pi} x\sin xdx$ integralni hisoblang.

Yechish: ***__Bo‘laklab integrallash__***

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b udv$$

formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^{\pi} x\sin xdx=\left|\begin{array}{l} u=x \\ du=dx \\ dv=\sin xdx \\ v=-\cos x \end{array}\right|=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos xdx=-\pi(\cos\pi+\sin x\pi)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-\pi(-1)+\sin\pi-\sin 0=\pi.$$

5.Qatorlar va ularning tatbiqlari.

1-ta’rif. $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ sonlar ketma-ketligidan tuzilgan.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

cheksiz yig‘indiga sonli qator deyiladi.

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ larga qatorning hadlari, u_n ga esa n ***- hadi*** yoki ***umumiy hadi*** deyiladi.

Qatorlarga bir necha misollar keltiramiz:

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

qatorga ***garmonik qator*** deyiladi;

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

qator birinchi hadi $a_1 = \frac{1}{2}$, maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo‘lgan geometrik progressiyani ifodalaydi;

3) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$

2. Qator yig‘indisi va uning yaqinlashuvi. Sonli qator ta’rifidan ma’lumki, uning hadlari cheksiz ko‘p bo‘lib, yig‘indisini oddiy yo‘l bilan qo‘shib, topib bo‘lmaydi. Shuning uchun qatorning yig‘indisi tushunchasini kiritamiz. (1) qator hadlaridan

$$u_1 = S_1, \;\; u_1 + u_2 = S_2, \;\; u_1 + u_2 + u_3 = S_3, \ldots,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. + u_n = S_n$$

qismiy yig‘indilar tuzamiz.

2-ta'rif. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ chekli limit mavjud bo‘lsa, S ga ***qatoryig‘indisi***deyiladi va ***qator yaqinlashuvchi*** deb ataladi.

Chekli limit mavjud bo‘lmasa, qatorning yig‘indsi bo‘lmaydi va u***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

1-misol. $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorning n qismiy yig‘indisi

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+....+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

Shunday qilib, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S=1$ bo‘ladi.

3. <u>Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi(sharti).</u>

Teorema. $u_1+u_2+...+u_n+...$ (2)

qator yaqinlashuvchi bo‘lsa,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

shart bajariladi.

Isbot. (2) qator yaqinlashuvchi bo‘lganligi uchun

$$u_n = S_n - S_{n-1};\quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ kelib chiqdi.

Natija. Qator umumiy hadining $n \to \infty$ dagi limiti 0 ga teng bo‘lmasa, u uzoqlashuvchi bo‘ladi. Lekin $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ shartdan qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqmaydi. Bu shart faqat zaruriy shart bo‘lib, yetarli emas.

4. Musbat hadli qatorlar yaqinlashishining yetarli belgilari

1) Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \quad , \tag{3}$$

$$v_1 + v_2 + ... + v_n + ... \tag{4}$$

qatorlar uchun $u_1 \le v_1,\ u_2 \le v_2, . . u_n \le v_n, . .$ tengsizliklar hamma n lar uchun bajarilib: (4) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (3) qator ham yaqinlashuvchi bo‘lidi va uning yig‘indisi (4) qator yig‘indisidan katta bo‘lmaydi; (3) qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, (4) qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

2-misol. $1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + ... + \frac{1}{n\cdot 2^n} + ...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

qator bilan taqqoslayimz. Ma’lumki, keyingi qator maxraji $q = \frac{1}{2}$ ga teng bo‘lgan geometrik progressiya bo‘lib, yaqinlashuvchidir. Hamma n lar uchun

$$. \qquad \frac{1}{n\cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n}$$

tengsizliklar bajariladi, demak taqqoslash belgisiga asosan, berilgan qatorning ham yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2). *Dalamber alomati.*Musbat hadli

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1} + ...$$

qator berilgan bo‘lsin. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ limit mavjud bo‘lib: $d < 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi; $d>1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi; $d=1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, bunday hollarda qatorni boshqa belgilardan foydalanib tekshirish kerak bo‘ladi.

3-misol. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$

Demak, berilgan qator Dalamber belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

4-misol. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+...+\frac{n}{2n-1}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish.

$$d=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}/\frac{n}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}=\frac{2}{2}=1.$$

Bu holda Dalamber belgisi savolga javob bermaydi. Berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy belgisini tekshiraylik.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, demak berilgan qator uzoqlashuvchi.

3) ***Koshi alomati***

$a_1+a_2+...+a_n+...$

musbat hadli qator berilgan bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$$

limit mavjud va $k<1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi; $k>1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi; $k=1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, bu holda Koshi belgisi savolga javob bermaydi.

5-misol. $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^{2}+\left(\frac{3}{7}\right)^{3}+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Koshi belgisidan

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Shunday qilib, berilgan qator Koshi belgisiga asosan yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) Qator *yaqinlashishining integral alomati*

$$a_1+a_2+...+a_n+...$$

musbat hadli qator berilgan bo‘lsin.

$f(n)=a_n$ natural argumentli funksiya tuzamiz. $f(n)$ uzluksiz, musbat va kamayuvchi funksiya bo‘lsin.

$\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}f(n)dn$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, berilgan qator ham yaqinlashuvchi, xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

6-misol. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n)=\frac{1}{n^2}$ *yoki* $f(x)=\frac{1}{x^2}$ funksiyani tuzib, ushbu xosmas integralni hisoblaymiz:

$$\int_{1}^{\infty}f(x)dx=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi, integral belgiga asosan, tekshirilayotgan qator ham yaqinlashuvchidir.

7-misol. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+...$

garmonik qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n)=\frac{1}{n}$ *yoki* $f(x)=\frac{1}{x}$ bo‘lganligi uchun

$$\int_1^\infty f(x)dx=\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty.$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi, integral belgiga asosan, garmonik qator ham uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

5. Ishoralari almashinuvchi qatorlar(Leybnis qatori). Ishoralari har xil bo‘lgan qatorlarga ***o‘zgaruvchan ishorali*** qatorlar deyiladi.

O‘zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holi ***ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlardir*.**

Masalan, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$

qator birinchi hadi musbat bo‘lgan ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatordir.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yaqinlashishini **Leybnis belgisi** bilan tekshiriladi.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi

$$a_1-a_2+a_3+...+(-1)^{n+1}a_n+... \qquad (5)$$

qator berilgan bo‘lsin. Bu yerda $a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...\ ,a_n,...$ musbat sonlar.

***Leybnis belgisi*.** Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qator hadlari absolyut qiymati bo‘yicha kamayuvchi, ya’ni 1) $a_1>a_2>a_3>...$

va 2) umumiy hadining $n\to\infty$ dagi limiti no‘lga teng, ya’ni $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ bo‘lsa, ishoralari navbat bilan almashinuvchi (5) qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi birinchi haddan katta bo‘lmaydi. Bu shartlardan birontasi bajarilmasa qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

8 –misol. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Leybnis belgisi shartlarini tekshiramiz:

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Demak, Leybnis belgisining ikkala sharti ham bajariladi. Shunday qilib, berilgan qator Leybnis belgisiga asosan, qator yaqinlashuvchi.

9-misol. $1{,}1-1{,}01+1{,}001+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $1{,}1>1{,}01>1{,}001>...$

birinchi shart bajariladi. Lekin $a_n = 1+0{,}1^n$ bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{10^n}) = 1 \neq 0,$$

Leybnis belgisining ikkinchi sharti bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Qatorlar nazariyasidan taqribiy hisoblashlarda keng qo‘llaniladi. Taqribiy hisoblashlarda yo‘l qo‘yilgan xatolikni baholash katta amaliy ahamiyatga ega. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlarda xatolik, hisobga olinmayotgan birinchi had absolyut qiymatidan katta bo‘lmaydi, ya’ni

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

10-misol. $S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+...$

ni 0,1 aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: Shartga asosan $|r_n| < 0{,}1$ bo‘lishi kerak.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9. \quad Demak,$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$$

Bunda $S \approx 0{,}7$; $0{,}1$ gacha aniqlikda hisoblandi.

Endi o‘zgaruvchan ishorali qatorlarning ayrim xossalarini qaraymiz.

Absolyut va shartli yaqinlashish.

1-ta’rif. O‘zgaruvchan ishorali qator hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, o‘zgaruvchan ishorali qator ***absolyut yaqinlashuvchi***deyiladi.

2-ta’rif. O‘zgaruvchan ishorali qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, o‘zgaruvchan ishorali qator ***shartli yaqinlashuvchi*** deyiladi.

11-misol. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$$

bu qator maxraji $q = \frac{1}{3}$ bo‘lgan geometrik progressiya bo‘lib yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

12-misol. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$

qator shartli yaqinlashuvchidir. Chunki, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

garmonik qator uzoqlashuvchi edi.

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a\ )^n + ... \qquad (4)$$

funksional qatorga darajali qator deyiladi. $a_0,\ a_1,\ a_2,...,a_n,...$ o‘zgarmas sonlar, darajali qatorning koeffisientlari deb ataladi.

Darajali qator shunday xossaga egaki, u $x = b_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘lsa, $|x - x_0| < |b_0 - x_0|$ tengsizlikni qonoatlantiruvchi hamma x lar uchun ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Darajali qator uchun shunday R son mavjudki, $|x - x_0| < R$ uchun, qator absolyut yaqinlashuvchi $|x - x_0| > R$ uchun qator uzoqlashuvchi, ya’ni $-x_0 - R < x < -x_0 + R$ oraliqda darajali qator absolyut yaqinlashuvchi, $x = -x_0 \pm R$ nuqtalarda hosil bo‘lgan qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lishi mumkin. Har ikki nuqtada qator yaqinlashishini alohida tekshirish kerak bo‘ladi. $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ intervalga ***yaqinlashish intervali,*** ga darajali qatorning ***yaqinlashish radiusi*** deyiladi. Yaqinlashish radiusi $R = 0$ *yoki* $R = \infty$ bo‘lishi mumkin $R = 0$ bo‘lsa, darajali qator faqat $x = x_0$ nuqtada, $R = +\infty$ bo‘lsa, butun sonlar o‘qida yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Yaqinlashish intervalini, berilgan qatorning absolyut qiymatidan tuzilgan qator uchun Dalamber va Koshi belgilaridan foydalanib topish mumkin. Darajali qatorning hamma koeffisientlari 0 dan farqli bo‘lsa, yaqinlashish radiusini topishda

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

formuladan foydalaniladi. Boshqa hollarda bevosita Dalamber belgisidan foydalanib yaqinlashish intervalini topish mumkin.

2-misol. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ...$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}$. Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Demak, $-1 < x < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma x lar uchun qator yaqinlashuvchi.

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz: $x = 1$ bo‘lsin. Bu holda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

garmonik qator hosil bo‘lib, u uzoqlashuvchidir. $x = -1$ bo‘lsin, bu holda

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

sonli qator hosil bo‘lib, u Leybnis belgisi shartlarini qanoatlantirgani uchun yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $-1 \le x < 1$ dan iboratdir.

3-misol. $(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + ... + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + ...$

darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ bo‘lganligi uchun

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^2 = 1.$$

Demak, $-1 < x-2 < 1$ *yoki* $1 < x < 3$ intervalda qator yaqinlashuvchi. Intervalning chetki nuqtalarida qator yaqinlashishini tekshiramiz. $x=3$ bo‘lsin, bunda

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$$

sonli qator hosil bo‘lib, integral belgidan foydalansak uning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi(bajarib ko‘ring). $x=1$ bo‘lsa,

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...$$

sonli qator hosil bo‘lib, u absolyut yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $1 \le x \le 3$ bo‘ladi.

3. Teylor va Makloren qatorlari. $y = f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada $(n+1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsa, u holda qo‘yidagi Teylor formulasi o‘rinlidir:

$$f(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^2+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n+R_n(x),$$

bu yerda $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\left[a+Q(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $(0<Q<1)$ bo‘lib, Lagranj shaklidagi qoldiq hadi deyiladi.

$a=0$ da Teylor formulasining xususiy holi - Makloren formulasi hosil bo‘ladi:

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x), \quad \textit{bu erda}$$

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[Qx\right]}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0<Q<1).$$

$y = f(x)$ funksiya a nuqta atrofida istalgan marta differensiallanuvchi bo‘lsa va bu nuqtaning biror atrofida

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

bo‘lsa, Teylor va Makloren formulalaridan

$$f(x)= f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+.... \; va$$

$$f(x)= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+....$$

qatorlar hosil bo‘ladi. Bularning birinchisi ***Teylor qatori***, ikkinchisiga***Makloren qatori*** deyiladi.

Bu qatorlar x ning $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ bo‘ladigan qiymatlarida $f(x)$ ga yaqinlashadi.

A nuqtani o‘z ichiga oluvchi biror intervalda istalgan n uchun $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, ($M$ biror musbat son) tengsizlik bajarilsa, $\lim\limits_{n\to\infty} R(x)=0$ bo‘ladi va $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi.

4. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish

Ayrim funksiyalarni darajali qatorga yoyyamiz.

1) $f(x)=e^x$, istalgan x uchun

$$f'(x)=e^x,\; f''(x)=e^x,...,\; f^{(n)}(x)=e^x,... \quad x=0 \quad deb$$

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=1,\; ...,\; f^{(n)}(0)=1,...$$

Bularni Makloren qatoriga qo‘yib,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \quad (-\infty<x<+\infty)$$

hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan $x=1$ desak,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}+....$$

bo‘lib, e soni qator yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanadi. Bundan foydalanib e sonining taqribiy qiymatini istalgan darajadagi aniqlikkacha hisoblash mumkin.

2) $f(x)=\sin x$. Istalgan x uchun

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,\quad f''''(x)=\sin x,....$$

Bundan

$$f(0)=0,\ \ f'(0)=1,\ \ f''(0)=0,\ \ f'''(0)=-1,\ \ f''''(0)=0,\ ...$$

bo‘lib,bularni Makloren qatoriga qo‘ysak,

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+...$$

hosil bo‘ladi.

Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchi $-\infty<x<+\infty$. Oxirgi qatorni hadlab differensiallasak,

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1-1}}{(2n-2)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

qator hosil bo‘ladi, bu $f(x)=\cos x$ funksiya uchun Makloren qatori bo‘ladi.

3) Xuddi yuqoridagidek usul bilan $f(x)=(1+x)^m$ funksiya uchun

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+....+...$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qatorga ***binomial qator*** deyiladi. U $(-1,1)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun yuqoridagi usul bilan

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+....\quad(-1<x\le 1)$$

yoyilmani hosil qilish mumkin.

5-misol. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ funksiyani x ning darajalari bo‘yicha qatorga yoying.

Yechish. Yuqoridagi $\cos x$ uchun keltirilgan qatorda x ni $\sqrt{x}$ bilan almashtirsak,

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - .... + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + ...$$

bo‘ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchidir, biroq $\cos\sqrt{x}$ funksiya $x < 0$ da aniqlanmaganligini hisobga olib, hosil qilingan qator $\cos\sqrt{x}$ funksiyaga $0 \le x < +\infty$ da yaqinlashadi.

5. Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari. Bir necha misollar qaraymiz.

6-misol. $\cos x$ ning yoyilmasidan foydalanib $\cos 18^0$ ni $0{,}0\ 0$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. $\cos x$ funksiyaning qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\cos 18^0 = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - ...$$

qatorni hosil qilamiz.

$$\frac{\pi}{10} = 0{,}31416; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0{,}09870; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0{,}00974.$$

va $\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001$ bo‘lganligi uchun, taqribiy hisoblashda qatorning birinchi uchta hadi bilan chegaralanamiz, demak

$$\cos 18^0 \approx 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24}; \quad yoki \quad \cos 18^0 \approx 0{,}9511.$$

7-misol. $\sqrt[5]{1{,}1}$ ni $0{,}0001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish: $\sqrt[5]{1{,}1} = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{5}}$ deb, binomial qatordan foydalansak:

$$\sqrt[5]{1{,}1}=(1+0{,}1)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}\cdot 0{,}1+\frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)}{2!}0{,}01+\frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)\cdot(\frac{1}{5}-2)}{3!}0{,}001+$$
$$+\ldots=1+0{,}02-0{,}0008+0{,}000048-\ldots.$$

bo‘ladi. To‘rtinchi had $0.000048 < 0.0001$ bo‘lganligi uchun, hisoblashda birinchi uchta hadini olib, hisoblaymiz:

$$\sqrt[5]{1{,}1}\approx 1+0{,}02-0{,}0008=1{,}0192.$$

8-misol. $\sqrt[3]{130}$ *ni* $0{,}001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. 5^3 130 ga eng yaqin butun sonning kubi bo‘lganligi uchun $130=5^3+5$ deb olish qo‘lay bo‘lib,

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{5^3+5}=\sqrt[3]{5^3(1+\frac{1}{25})}=5(1+\frac{1}{25})^{\frac{1}{3}}=5(1+\frac{1}{3}0{,}04+\frac{\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}-1)}{2!}0{,}0016+$$
$$+\frac{(\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdot(\frac{1}{3}-2))}{3!}0{,}000064+\ldots)=5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2\cdot\frac{1}{9}\cdot 0{,}0016+5\frac{25}{81}\cdot 0{,}000032-\ldots$$

oxirgi qatorda to‘rtinchi had $0{,}001$ dan kichik bo‘lganligi uchun, birinchi uchta had bilan chegaralanamiz:

$$\sqrt[3]{130}\approx 5+0{,}0667-0{,}0009\approx 5{,}066.$$

9-misol. $\ln 1{,}04$ *ni* $0{,}0001$ gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: $\ln(1+x)$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\ln(1+0{,}04)=0{,}04-\frac{0{,}04^2}{2}+\frac{0{,}04^3}{3}-\frac{0{,}04^4}{4}+\ldots,\quad \text{yoki}$$

$$\ln 1{,}04=0{,}04-0{,}0008+0{,}000021-0{,}00000064+\ldots$$

qatorni hosil qilamiz, hamda uchinchi had $0{,}0\,0\,0$ dan kichik bo‘lganligi uchun birinchi ikki hadni hisobga olib hisoblaymiz:

$$\ln 1{,}04\approx 0{,}0392.$$

3-mavzu.Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari.

Reja:

1. Differensial tenglamalarga keltiriladigan tabiiy fanlar masalalari. Yechim, umumiy yechim tushunchalari.
2. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar. Koshi masalasi. Koshi masalasining yechimi hakidagi teorema.
3. Matematik fizika, mexanika va astronomiya hamda iktisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni taxlil etishda va boshka ko‘p sohalardagi jarayonlarni matematik modeli differensial tenglamalar orqali ifodalanilishi.

Mavzuning tayanch tushunchalari

Differensial tenglama, oddiy differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama, differensial tenglamaning tartibi, differensial tenglama yechimi, integral chiziq, birinchi tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, boshlang‘ich shartlar, o‘zgaruvchilari ajralgan, o‘zgaruvchilari ajraladigan, birinchi tartibli bir jinsli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi, to‘la differensialli tenglama, integrallovchi ko‘paytuvchi.

1. Differensial tenglamalarga keltiriladigan tabiiy fanlar masalalari. Yechim, umumiy yechim tushunchalari. 1-ta’rif. Erkli o‘zgaruvchi, noma’lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatga ***differensial tenglama***deyiladi.

Noma’lum funksiya faqat bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga***oddiy differensial tenglama*** *deyiladi*.

Noma’lum funksiya ikki yoki undan ko‘p o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglamalarga, ***xususiy hosilali differensial*** *tenglamalar* deyiladi.

2-ta’rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga***differensial tenglamaning tartibi*** deyiladi.

$y'' = 3x^2$, $y''' = \cos x$ tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo‘ladi.

Umumiy holda n-tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

ko‘rinishda belgilanadi.

3-ta’rif.***Differensial tenglamaning yechimi*** **yoki** ***integrali*** deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigiga ***integral chiziq***deyiladi. Masalan, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $y = x^2$ bu berilgan differensial tenglamaning yechimi bo‘lib, bu holda integral chiziq paraboladan iborat bo‘ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va bu yechimlarning hossalarini o‘rganishdan iborat.

Algebraik tenglamalardagidek hamma differensial tenglamalarni yechish mumkin bo‘ladigan umumiy usullar yo‘q. Differensial tenglamalarning har bir turiga xos yechish usulidan foydalaniladi.

Birinchi tartibli tenglamalar.Birinchi tartibli tenglama *umumiy* holda

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishda yoziladi. (1) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y' = f(x, y) \quad yoki \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

bo‘ladi. (2) tenglamaning o‘ng tomoni faqat x ning funksiyasi bo‘lsa, tenglama

$$y' = f(x) \qquad (3)$$

ko‘rinishida bo‘lib, oxirgi tenglikdan bevosita ko‘rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni $y = F(x) + C,\quad [F(x)]' = f(x)$. Shunday qilib, (3) ko‘rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

1-ta’rif. $y = \varphi(x, C)$ x ning funksiyasi har bir C ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘lganda (2) tenglamani qanoatlantirsa, uning ***umumiy yechimi*** deyiladi.

2-ta’rif. C ixtiyoriy o‘zgarmasning muayyan qiymatida umumiy yechimdan olinadigan yechimga ***xususiy yechim*** deyiladi.

Umumiy yechimdan yagona yechimni olish uchun ko‘pincha qo‘shimcha

$$y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

shartdan foydalaniladi, bu yerda x_0, y_0 lar berilgan sonlar bo‘lib, bu shartga boshlang‘ich shart deb ataladi.

3-ta’rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga ***Koshi masalasi*** deyiladi.

1-misol. $y' = \dfrac{5}{\cos^2 x}$, differensial tenglama uchun $y(0) = 3$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

Yechish. Oldin berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5tgx + C$$

Endi boshlang‘ich shartdan foydalanib, $5tg0 + C = 3,$ bundan $C = 3$ kelib chiqadi. Demak, Koshi masalasining yechimi $y = 5tgx + 3$ bo‘ladi.

O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar

4-ta’rif. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko‘rinishdagi tenglamaga ***o‘zgaruvchilari ajralgan*** differensial tenglama deyiladi.

Bunday differensial tenglamani bevosita, tenglikni integrallab uning umumiy yechimi topiladi, ya’ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo‘ladi.

2-misol. $xdx + ydy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani bevosita integrallab

$$\int xdx + \int ydy = C, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad yoki \quad x^2 + y^2 = C_1,$$

umumiy yechim bo‘ladi .

5-ta’rif. $y' = f_1(x) f_2(y)$ *yoki* $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ ko‘rinishdagi tenglamaga ***o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama*** deyiladi.

Bunday differensial tenglamani $f_2(y)$ ga bo‘lib, dx ga ko‘paytirib

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

3-misol. $\dfrac{dy}{dx} = x(1 + y^2)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O‘zgrauvchilarini ajratib $\dfrac{dy}{1 + y^2} = xdx$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamani bevosita integrallab,

$$arctg\, y = \frac{x^2}{2} + C$$

likka ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = tg(\frac{x^2}{2} + C)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. $f(x,y)$ funksiya uchun $f(kx,ky)=k^{\alpha}f(x,y)$ tenglik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiyaga α tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, bunda α biror son. Masalan, $f(x,y)=xy-y^2$ funksiya uchun $f(kx,ky)=kx\cdot ky-(ky)^2=k^2(xy-y^2)$ bo‘lib, $f(x,y)=xy-y^2$ funksiya $\alpha=2$ tartibli bir jinsli funksiya bo‘ladi. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}, \alpha=0$ tartibli bir jinsli funksiyadir(buni tekshirib ko‘ring).

6-ta’rif. $y'=f(x,y)$ differesial tenglamada $f(x,y)$ funksiya no‘linchi tartibli bir jinsli funksiya bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga ***birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi.

Bir jinsli, tenglama $y=xv(x)$ almashtirish bilan o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$xv'=f(1,v)-v$$

differensial tenglamaga keltiriladi.

4-misol. $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y=x\cdot v$ almashtirish olib, $y'=x'v+xv'$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$v+xv'=\frac{x\cdot xv+x^2v^2}{x^2}$$

bo‘lib, $v+xv'=v+v^2$ yoki $xv'=v^2$, $\frac{xdv}{dx}=v^2$

bo‘ladi. Oxirgi tenglamada o‘zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dv}{v^2}=\frac{dx}{x};$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{v}=\ln|x|+\ln c,$$

bo‘lib,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

bo‘lganligi uchun

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad yoki \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar**.**Bunday tenglama

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

ko‘rinishda bo‘lib, $p(x)$ va $g(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun $z = u(x)y$ almashtirish olib

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. $u(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 0$$

bo‘lsin. Bundan $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ bo‘lib, bu holda (1) tenglama

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bevosita integrallasak

$$z = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

hosil bo‘ladi.

Endi izlanayotgan y funksiyaga qaytib

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \qquad (2)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

1-misol. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘lib $p(x) = x, \quad g(x) = x$ ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$y = e^{-\int xdx}\left[C + \int x \cdot e^{\int xdx}dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\, dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int \cdot\, e^{\frac{x^2}{2}}\, d(\frac{x^2}{2})\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C).$$

umumiy yechim bo‘ladi.

***Bernulli tenglamasi*.**Bunday differensial tenglama

$$y' + p(x)y = y^n g(x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamada n=0 yoki n=1bo‘lsa, chiziqli tenglama hosil bo‘ladi. Demak $n \neq 0{,}1$ bo‘lgan ,o‘zgarmas. Bernulli tenglamasini y^n ga bo‘lib,

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = g(x), \qquad \frac{1}{y^{n-1}} = z$$

almashtirish bajarsak,

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y'$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = g(x) \;\; yoki \;\; z' + (1-n)p(x)z = (1-n)g(x)$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama hosil bo‘ladi.

2-misol. $y' + xy = xy^3$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y^3 bo‘lib,

$$\frac{y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = x$$

tenglamani hosil qilamiz. $\frac{1}{y^2}=z$ almashtirish olsak $z'=\frac{2y'}{y^3}$ bo‘ladi. Bularni tenglamaga qo‘yib,

$$\frac{z'}{2}+xz=x, \quad z'-2xz=-2x$$

chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini (6) formulaga asosan topish mumkin:

$$z=e^{2\int xdx}\left[C+\int(-2x)e^{-2\int xdx}dx\right]=e^{x^2}\left[C-\int 2xe^{-x^2}dx\right]=$$
$$e^{x^2}\left[C+\int e^{-x^2}d(-x^2)\right]=e^{x^2}\left[C+e^{-x^2}\right]=Ce^{x^2}+1.$$

Shunday qilib

$$z=C\cdot e^{x^2}+1$$

bo‘ladi, z ning o‘rniga $\frac{1}{y^2}$ni qo‘yib,

$$\frac{1}{y^2}=C\cdot e^{x^2}+1, \quad y^2=\frac{1}{Ce^{x^2}+1},$$

yechimni olamiz. Bu berilgan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi bo‘ladi.

Rikkati tenglamasi. Ushbu

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y^2+b(x)y+c(x) \qquad \textbf{(4)}$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamaga Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunda $a(x), b(x), c(x)$ funksiyalar biror intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalar. (4) tenglamada $a(x)=0$ bo‘lsa, chiziqli tenglama, $c(x)=0$ bo‘lsa, Bernulli tenglamasi kelib chiqadi.

Umuman olganda Rikkati tenglamasi yechimini elementar funksiya va ularning integrallari yordamida yechib(kvadraturada integrallab) bo‘lmaydi.

Ushbu xususiy holni qaraymiz: Rikkati tenglamasining bitta xususiy yechimi ma’lum bo‘lsa , bu tenglama yechimi kvadraturalarda integrallanadi. $y=\varphi(x)$

Rikkati tenglamasining biror xususiy yechimi bo‘lsin. $y=\varphi(x)+z$ almashtirish bajaramiz: bu holda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{dz}{dx}$$

bo‘lib, (4) tenglama

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{dz}{dx}=a(x)[\varphi(x)+z]^2+b(x)[\varphi(x)+z]+c(x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan, $y=\varphi(x)$ (4) tenglama yechimi, ya’ni

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=a(x)[\varphi(x)]^2+b(x)\varphi(x)+c(x)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{dz}{dx}=[2a(x)\varphi(x)+b(x)]z+a(x)z^2$$

tenglama hosil bo‘lib, bu Bernulli tenglamasidir. Bunday differensial tenglamaning umumiy yechimini qanday topishni yuqorida o‘rgandik.

3- misol. Ushbu

$$\frac{dy}{dx}=-y^2+2xy+\left(5-x^2\right)$$

Rikkati tenglamasining umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamaning xususiy yechimini $y=\varphi(x)=ax+b$ ko‘rinishda izlash maqsadga muvofiq, bu holda

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=a,\ a=-(ax+b)^2+2x(ax+b)+5-x^2$$

bo‘lib, bir xil darajali x lar koeffisientlarini tenglashtirsak $a=1, b=\pm 2$ kelib chiqadi.

Demak, $\varphi(x)=x+2,\ \varphi(x)=x-2$ xususiy yechimlar bo‘ladi. $\varphi(x)=x+2$ xususiy yechim uchun Bernulli tenglamasi

$$\frac{dz}{dx}=-4z-z^2$$

bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$y = x + 2 + \frac{4}{C\,e^{4ч} - 1}$$

bo‘ladi.

To‘la differensialli tenglamalar va integrallovchi ko‘paytuvchi.

To‘la differensialli tenglama.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

ko‘rinishdagi tenglamaning chap qismi biror $u(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya’ni

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

bo‘lsa, bunday tenglama to‘la differensialli tenglama deyiladi.(1) tenglama to‘la differensialli tenglama bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilishi kerak. To‘la differensialli tenglama ta’rifidan $du = 0$ bo‘lib, bundan $u(x,y) = C$ kelib chiqadi(C ixtiyoriy o‘zgarmas). $u(x,y)$funksiyani topish uchun y ni o‘zgarmas deb hisoblaymiz, u holda $dy = 0$ ekanligidan $du = M(x,y)dx$ bo‘ladi. Oxirgi tenglikni x bo‘yicha integrallasak,

$$u = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha differensiallaymiz va natijani $N(x,y)$ ga tenglaymiz, chunki $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ edi.

$$\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

yoki

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha integrallab, $\varphi(y)$ ni topamiz:

$$\varphi(y)=\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right)dy+C$$

Shunday qilib,

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}\,dx\right)dy+C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

1-misol. Ushbu

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2y}{x^3}\,dy=0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to‘la differensialli bo‘lish yoki bo‘lmasligini tekshiramiz: berilgan tenglamada

$$M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}\quad ,N=\frac{2y}{x^3}$$

bo‘lganligi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-6y}{x^4}\quad ,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-6y}{x^4}$$

bo‘lib,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

bo‘ladi, ya’ni berilgan differensial tenglama to‘la differensialli tenglamadir. Demak, berilgan tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘ladi. Endi $u(x,y)$ funksiyani topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}$$

bo‘lganligi uchun

$$u=\int\frac{x^2-3y^2}{x^4}\,dx+\varphi(y)=\int\left(x^{-2}-3y^2x^{-4}\right)dx+\varphi(y)=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+\varphi(y)\quad (2)$$

bo‘lib, bunda $\varphi(y)$ hozircha noma’lum funksiyadir. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha differensiallab,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{2y}{x^3}$$

ekanligini hisobga olib,

$$\frac{2y}{x^3}+\varphi'(y)=\frac{2y}{x^3}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan $\varphi'(y)=0$ bo‘lib,

$$\varphi(y)=C_1.$$

bo‘ladi. (2) tenglikdan

$$u=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1$$

Shunday qilib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$du=d\left(-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1\right)=0$$

bo‘lganligi uchun

$$-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1=C_2$$

bo‘lib, yoki

$$-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}=C$$

bo‘ladi, bunda $C=C_2-C_1$.

Integrallovchi ko‘paytuvchi.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

differensial tenglamaning o‘ng tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lgan holni qaradik. Bu tenglamaning o‘ng tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lmasin. Ayrim hollarda shunday $\mu(x,y)$ funksiyani tanlab olish mumkin bo‘ladiki, berilgan tenglamani shu funksiyaga ko‘paytirilganda, uning chap tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lishi mumkin. Hosil qilingan differensial tenglamaning umumiy yechimi Bilan dastlabki berilgan tenglamaning umumiy yechimi bir xil bo‘ladi. Bunday $\mu(x,y)$ funksiyaga berilgan tenglamaning integrallavchi ko‘paytuvchisi deyiladi. Integrallovchi ko‘paytuvchini topish uchun , berilgan tenglamani hozircha noma’lum bo‘lgan μ ga ko‘paytirib,

$$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglama to‘la differensialli bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak. Bundan

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

bo‘lib,

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglamani μ ga bo‘lcak,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\mu \partial y}$$

bo‘lganligi uchun

$$M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

bo‘ladi.

Umumiy holda μ x, y larga bog‘liq, ya’ni $\mu(x,y)$. Berilgan tenglama faqat x ga bog‘liq integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$ bo‘lib,

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{4}$$

bo‘ladi. Differensial tenglama faqat y o‘zgaruvchiga bog‘liq integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, $\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=0$ bo‘lib,

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} \tag{5}$$

bo‘ladi. Bu hollarda (4) va (5) tengliklarni bevosita integrallab

$$\mu=e^{\int\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/Ndx}, \quad \mu=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)/Mdx}$$

integrallovchi ko‘paytuvchini topamiz. Bunda (4) va (5) nisbatlar, birinchi holda y o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan, ikkinchi holda x o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan integrallovchi ko‘paytuvchilarning mavjudligini bildiradi.

2-misol.

$$(x^2-3y^2)\,dx+2xydy=0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to‘la differensialli yoki to‘la differensialli emasligini tekshiramiz. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ shartni tekshiraylik:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\left(x^2-3y^2\right)_y'=-6y \quad , \frac{\partial N}{\partial x}=\left(2xy\right)_x'=2y\,.$$

Demak, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajarilmaydi. (4) nisbatni qaraymiz:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-6y-2y}{2xy}=-\frac{4}{x}$$

bo‘lib,

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{4}{x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{\text{ч}}dx}=e^{-4\ln x}=e^{\ln x^{-4}}=\frac{1}{x^4}$$

hosil bo‘ladi. Berilgan tenglamani $\mu(x)=\dfrac{1}{x^4}$ funksiyaga ko‘paytirsak,

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2xy}{x^4}dy=0$$

bo‘lib, keyingi tenglama uchun $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajariladi, ya’ni oxirgi differensial tenglama to‘la differensialli tenglamadir. Bunday differensial tenglamalarning yechimini topishni yuqorida o‘rgandik.

$y^{(n)}=f(x)$ **ko‘rinishdagi differensial tenglama *ketma-ket*** n marta integrallash bilan uning yechimi topiladi. Har bir integrallashda bittadan ixtiyoriy o‘zgarmas hosil bo‘lib, natijada n ta ixtiyoriy o‘zgarmasga bog‘liq umumiy yechim hosil bo‘ladi.

1-misol. $y''=\cos 2x$ differensial tenglamaning $x=0$ bo‘lganda $y=0,\ y'=0$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. $y'=p(x)$ desak, $y''=p'$ bo‘lib, berilgan tenglama

$$p'=\cos 2x \ \ yoki \ \ \frac{dp}{dx}=\cos 2x, \quad dp=\cos 2x\,dx$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Oxirgi tenglamani integralab,

$$p=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1$$

tenglamani hosil qilamiz.

$p = y'$ bo‘lganligi uchun

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$$

ya’ni,

$$dy = \frac{1}{2}\sin 2xdx + C_1 dx.$$

Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int dy = \frac{1}{2}\int \sin 2xdx + \int\ C_1 dx,\ \ y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x$$

umumiy yechimni olamiz.

Endi berilgan boshlang‘ich shartlarda Koshi masalasini yechamiz: $x = 0$ bo‘lganda $y = 0,\ \ y' = 0$ bo‘lganligi uchun,

$$-\frac{1}{4}\cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\sin 0 + C_1 = 0,\ \ C_1 = 0,\ \ \ C_2 = \frac{1}{4}\ .$$

Shunday qilib, Koshi masalasining yechimi

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$$

bo‘ladi.

2.Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar. Koshi masalasi. Koshi masalasining yechimi hakidagi teorema.

$F(x, y', y'') = 0$ ***ko‘rinishdagi differensial tenglama*** $y' = p$, $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ almashtirish orqali $F(x, p, \dfrac{dp}{dx}) = 0$ birinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

2-misol. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: $y' = p$ bilan almashtirib olsak

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}+x$$

birinchi tartibli chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani yechib:

$$P=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[C_1+\int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right]=e^{\ln x}\left[C_1+\int xe^{-\ln x}dx\right]=x(C_1+\int xe^{-\ln x}dx)=$$

$$=x(C_1+\int x\cdot\frac{1}{x}dx)=x(C_1+x),\quad p=y'=C_1x+x^2,\quad y=C_1\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+C_2$$

umumiy yechimni olamiz.

<u>$F(y,y',y'')=0$ ***(erkli o'qzgaruvchi oshkor qatnashmagan) bunday differensial tenglamaning***</u> umumiy yechimini $y'=z(y)$ almashtirish olib, birinchi tartibli tenglamaga keltirib yechim topiladi.

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot z(y).$$

bo'ladi.

3-misol. $yy''-2y'^2=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y'=z(y)$ almashtirish olib, $y''=z\dfrac{dz}{dy}$ ekanligini hisobga olsak,

$yz\dfrac{dz}{dy}-2z^2=0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama:

$$\frac{ydz}{dy}=2z\quad yoki\quad \frac{dz}{z}=2\frac{dy}{y},$$

oxirgi tenglamani integrallab,

$$\ln z=2\ln y+\ln C_1$$

bundan

$$z=C_1y^2$$

bo'ladi. $z=\dfrac{dy}{dx}$ ni hisobga olsak ,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \quad yoki \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx$$

bo‘ladi.Oxirgi tenglikdan

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \quad yoki \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$$

bo‘ladi.Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko‘p masalalarini yechish *ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga* keltiriladi.

Differensial tenglamada noma’lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. ***Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama*** quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \qquad (1)$$

bu yerda y noma’lum funksiya, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ lar biror (a,b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x) = 0$ bo‘lsa, (1) tenglamaga **bir jinsli chiziqli differensial tenglama** deyiladi. $f(x) \neq 0$ **bo‘lsa bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog‘langan va chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a,b]$ kesmada berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Shunday α_1, α_2 o‘zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi no‘ldan farqli bo‘lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (2)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog‘langan funksiyalar** deyiladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘langan bo‘lsa, ular proporsianal bo‘ladi, ya’ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo‘lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsa,

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x) \;\; yoki \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{-\alpha_2}{-\alpha_1},\;\; \frac{y_1(x)}{y_2(x)}=const$$

bo‘ladi.

Masalan, $y_1(x)=4x^2$ va $y_2=x^2$ funksiyalar chiziqli bog‘langan, chunki $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\frac{4x^2}{x^2}=4.$

2-ta’rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1=\alpha_2=0$ bo‘lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar** deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog‘langan yoki chiziqli bog‘lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1 y_2{}'-y_2 y_1{}'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda chiziqli bog‘langan bo‘lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘lga teng bo‘ladi. Bu funksiyalar uchun (a,b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli bo‘lsa ular chiziqli bog‘lanmagan bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Fan va texnika hamda iqtisodning ko‘p masalalari (1) tenglamada $p(x)$ va $g(x)$ funksiyalar o‘zgarmas sonlar bo‘lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o‘zgarmas koeffisientlar bo‘lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y''+py'+gy=0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda bo‘lib $p,\ g$ lar o‘zgarmas koeffisientlar. Bunday ko‘rinishdagi tenglamaga ***ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffisientli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi. (3) ko‘rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog‘lanmagan yechimlari bo‘lsa,

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x) \qquad (4)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo‘ladi, bu yerda c_1 *va* c_2 ixtiyoriy o‘zgarmaslar. Bu funksiyani (3) tenglamaga bevosita qo‘yib ko‘rsatish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

1-misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo‘yish bilan tekshirib ko‘rish mumkinki,

$y_1(x) = e^x$ *va* $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog‘lanmagan yechimlar bo‘ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1-1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Shunday qilib, (3) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $r -$ noma’lum son. $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, bo‘lib,(3) tenglamadan

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + ge^{rx} = 0 \quad yoki \quad r^2 + pr + g = 0, \ (e^{rx} \neq 0) \qquad (5)$$

bo‘ladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo‘lib, bunda quyidagi uchta hol bo‘lishi mumkin:

1) r_1 *va* r_2 lar haqiqiy va har xil, ya’ni $r_1 \neq r_2$;

2) r_1 *va* r_2 haqiqiy va teng (karrali), ya’ni $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$;

3) r_1 *va* r_2 kompleks sonlar, ya’ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimlar bo‘lib, umumiy yechim

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad (6)$$

bo‘ladi.

2-misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \qquad r_2 = 3$$

bo‘lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo‘ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng

$r_1 = r_2$ *va* $y_1(x) = e^{r_1 x}$ bitta xususiy yechim bo‘ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ ko‘rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = xe^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x}(1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x}(r_1^2 + 2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo‘yib

$$x(r_1^2 + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun oxirgi tenglikdagi birinchi qavs aynan no‘lga teng, $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ bo‘lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no‘lga teng.

Demak, $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, hamda $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog‘lanmagan (tekshirib ko‘ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \qquad (7)$$

umumiy yechim bo‘ladi.

3-misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

bo‘lib, ildizlari $r_1 = r_2 = -3$ bo‘ladi (tenglamani yechib ko‘rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o‘zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo‘shma:

$r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta$ bo‘lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x}$$

ko‘rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$$e^{\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

tengliklar hosil bo‘ladi. Ma’lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad va \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog‘lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli (tekshirib ko‘ring).

Demak,

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \qquad (8)$$

(3) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

4-misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i, \quad r_2 = -3 - 2i$ bo‘ladi. Bu ildizlar kompleks qo‘shma bo‘lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha = -3, \ \beta = 2$ ekanligini hisobga olib (8) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

bo‘ladi.

Endi ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisientli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya’ni Koshi masalasini qaraymiz.

5-misol. $y'' - y' - 2y = 0$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo‘lganda $y = 8, \quad y' = 7$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisientli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$r^2 - r - 2 = 0$$

bo‘lib, $r_1 = -1, \quad r_2 = 2$ uning ildizlari bo‘ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

bo‘lib , $x = 0$ bo‘lganda $y = 8, \quad y' = 7$ boshlang‘ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3, \ C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo‘ladi.

3.Matematik fizika, mexanika va astronomiya hamda iktisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni taxlil etishda va boshka ko‘p sohalardagi jarayonlarni matematik modeli differensial tenglamalar orqali ifodalanilishi.

Differensial tenglamalarning iqtisoddagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

1). *Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o‘sish modeli*. Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo‘lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo‘lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investisiyasiga sarflansin, ya’ni

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

bo‘lsin, bunda m investisiya me’yori bo‘lib o‘zgarmas son, hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya qilinayotgan bo‘lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o‘sishi ta’minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o‘sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investisiyaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$Q(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me’yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q(t) = emPQ \quad yoki \quad Q(t) = kQ(t) \qquad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln c \quad yoki \quad Q = ce^{kt}$$

bo‘ladi, bunda c ixtiyoriy o‘zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo‘lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = ce^{kt_0} \quad yoki \quad c = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo‘ladi. (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi modeli eksponensial bo‘lar ekan (tabiiy o‘sish deganimizda raqobat yo‘qligi tushuniladi).

Matematik modellar **umumiylik xossasiga ega.** Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma’lumki bakteriyalarning ko‘payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish: radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya bo‘ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya’ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish miqdorini ko‘paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo‘lib

$\frac{dP}{dQ} < 0$ bo‘ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek

$$Q = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em$. (5) tenglamaning o‘ng tomonidagi ko‘paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo‘ladi, ya’ni $Q(t)$ o‘suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog‘lanish chiziqli, ya’ni

$$P(Q) = a - bQ, \quad a >, \; b > 0$$

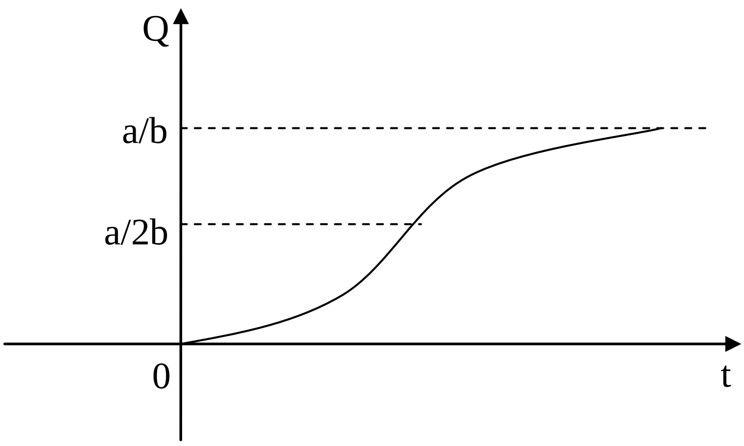
bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (6) tenglikni differensiallasak

$$Q'' = (\alpha a Q - \alpha b Q^2)' = \alpha a Q' - 2\alpha b Q Q' \quad yoki \quad Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \qquad (7)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0$ *va* $Q = \dfrac{a}{b}$ bo‘lganda, $Q' = 0$, $Q < \dfrac{a}{2b}$ bo‘lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \dfrac{a}{2b}$ bo‘lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi. Bulardan $\dfrac{a}{2b}$ nuqtadan o‘tishda Q ishorasini o‘zgartirganligi uchun, bu nuqta $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi. Bu funksiya grafigi, ya’ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 1-chizmada tasvirlangan bo‘lib, bu egri chiziqqa iqtisodda ***logistik chiziq*** deb ataladi.



. 1-chizma.

<u>Talab va taklifni tahlil qilish</u>. Ma'lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o'zgarish sur'ati bilan bog'liq bo'ladi. Bunday sur'at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan xarakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo'lib ushbu bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6 \qquad (1)$$

Bunday bog'liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur'ati oshsa bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya'ni $p'' > 0$ bo'ladi. Narxning tez o'sishi xaridorni cho'chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur'atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffisienti talab funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o'sishi tezligi taklifning ham o'sishiga olib keladi, ya'ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo'ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o'zgarishi orasidagi bog'lanishni tahlil qilaylik. Ma'lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

ikkinchi tartibli, o'zgarmas koeffisientli, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma'lumki bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig'indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo'ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bir jinsli bo'lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o'zgarmas, ya'ni qaror topgan narxni olamiz, hamda buni (3) tenglamaga qo'yib $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib (9) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = p(t) + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

bo'ladi.

Bu yechimdan $t \to \infty$ *da* $p(t) \to 3$ bo'ladi, ya'ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo'lganda, narx $p(0) = 4$ va o'sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo'lsin. $t = 0$ bo'lganda $p(0) = 4$ bo'lganligi uchun (10) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va t=0 bo'lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak C_2=4 kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4\sin t)$$

bo'ladi.

4-mavzu. Matematika va sa'nat.

1. Ilm-fan, ta'lim, raqamli iqtisodiyot, yuqori texnologiyalar va boshqa sohalar rivojlanishining negizida matematikaning o'rni.
2. Muhandislik, bank-moliya, xavfsizlik, pul-kredit sohalaridagi mavjud muammolarni yechish bo'yicha matematik olimlar tomonidan tadqiqotlar o'tkazilishi, mutaxassis kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashning zarurligi.
3. Matematika sohasidagi ilg'or mamlakatlarida olib borilayotgan ishlar bilan bir qatorda mavjud muammolar, matematikani o'rganish va yoshlarni matematika ilmiga qiziqtirish, matematika orqali aniq va sohaga bog'liq boshqa fanlarni rivojlanishiga ko'maklashishning axamiyati.

1.Ilm-fan, ta’lim, raqamli iqtisodiyot, yuqori texnologiyalar va boshqa sohalar rivojlanishining negizida matematikaning o‘rni.

Davlatimiz rahbarining «Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V. I. Rammanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi qarori mamlakatimizda ta’lim, ilm-fan sohasida amalga oshirilayotgan islohotlarni yangi bosqichga olib chiqishi bilan ahamiyatlidir.

Ilm-fan va texnikaning zamonaviy tarmoqlari jadal rivojlanishi taraqqiyotning tezlashib ketishida, yangidan-yangi texnika va texnologiyalarning yaratilishida matematika fani, uning rivoji asos bo‘layotgani sir emas. Bugun dunyo iqtisodiy siyosatida yetakchi o‘rinlarga chiqib olgan axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, tibbiyot, biologiya, raqamli iqtisodiyot va boshqa ko‘plab sohalar rivoji matematik yondashuvlar, uning ushbu sohalarga samarali tatbiqi asosida ro‘y bermoqda.

Matematika — barcha fanlarning otasi, deya e’tirof etiladi. U kirib bormagan fan sohasi yo‘q. Nafaqat tabiiy fanlar, balki ijtimoiy-gumanitar fanlar sohalarida ham matematikaga, hisob-kitobga uning tahlilida ehtiyoj seziladi. Qaysidir ma’noda matematikaning aloqasi bo‘lmagan sotsiologiya, psixologiyada ham matematik analiz dolzarb hisoblanadi. Bugun hayotimizning barcha jabhasida, hattoki, madaniyat, sport sohalarida ham matematik tahlillarsiz ularning natijadorligini aniqlashimiz qiyin kechadi. Ushbu fanning rivoji, uning boshqa fanlar orqali sohalarga tatbiqi yuzaki xulosalar chiqarishdan tiyilishga sabab bo‘ladi, masala mohiyatiga chuqur kirish, tizimli tahlil va yondashuvlarga olib keladi.

Bu borada matematika fanining asoschilari va uni o‘z ilmiy faoliyatida rivojlantirgan ulug‘ ajdodlarimiz Muhammad al-Xorazmiy, Ahmad Farg‘oniy, Abu Rayhon Beruniy, Mirzo Ulug‘beklar davomchilari mamlakatimizda matematika ilm-fanini yanada yuksaltirish borasida o‘tgan davrda muayyan ishlarni amalga oshirdilar. Qabul qilingan qarorda mazkur sohadagi e’tiborga molik ishlar e’tirof etilgan holda, bugungi davr talablari, ta’lim va ilm-fanni rivojlantirish, kadrlar tayyorlash, ilmning fundamental, qidiruv va amaliy sohalarini rivojlantirish, dunyo ilm-fani, u bilan integratsiyalashuv, sohani dunyo ilm-fani darajasiga olib chiqish, ushbu maqsadlarda sohani muvofiqlashtirish va davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlashga qaratilgan vazifalar belgilab berilgan.

Ushbu maqsadlarda O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutida matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishga taalluqli kompleks chora-tadbirlarni amalga oshirish nazarda tutilgan. Ustuvor vazifalarni ado etish bo‘yicha maqsadli dastur qabul qilingan. Unda ilm-fanning turdosh sohalarida va iqtisodiyot tarmoqlarida ilmiy natijalardan foydalanishga, institutning ayrim ilmiy yo‘nalishlarini fundamental izlanishlardan amaliy tadqiqotlarga qayta yo‘naltirish dasturlarini ishlab chiqish belgilangan. Bu, o‘z navbatida, natijali ilmiy ishlar qamrovining oshishiga olib kelish bilan birga, amaliy ahamiyatga ega ilmiy ishlar salmog‘ining ortishiga olib keladi. Shuningdek, 2020-2022 yillarda iqtisodiyot tarmoqlari va ijtimoiy soha uchun matematika bo‘yicha oliy malakali kadrlar tayyorlash chora-tadbirlari dasturini ishlab chiqish vazifasi belgilab berilmoqda. Bu esa, istiqbolda matematikaning barcha sohalarga tatbiqining kuchayishiga, chuqur tizimli tahlilga asoslangan xulosalarga ega bo‘lishga zamin yaratadi.

Davlatimiz rahbarining qarorida ta’lim va ilm-fan aloqalarini mustahkamlashga alohida o‘rin berilgan. Xususan, Matematika instituti xodimlari Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti, Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti talabalarining tajriba start-up loyihalarining amalga oshirilishida ko‘maklashishi lozimligi qayd etilgan. Bu, o‘z navbatida, malakali kadrlar tayyorlash siyosatini amalga oshirishda ham muhim ahamiyatga ega.

Shu bilan birga, matematika sohasida jahon ilmiy markazlari — MDH, Yevropa, Amerika va Osiyo mamlakatlarining yetakchi universitetlari bilan hamkorlikda tadqiqotlar tashkil etish vazifasining belgilab qo‘yilishi institut xodimlariga yuksak mas’uliyat yuklaydi. Ilmiy izlanishlarni ular darajasida tashkil etish imkoniyatini yaratadi. Ingliz tilidagi «O‘zbekiston matematika jurnali» ilmiy nashri faoliyati takomillashtirilishi ilm-fanimizning jahonga yuz tutishida, o‘zaro aloqalarni mustahkamlashda, shuningdek, ilmiy ishlanmalarning jahon aql bozoriga chiqishida boshlang‘ich nuqtalaridan biri bo‘lib xizmat qiladi.

E’tiborlisi, qarorga muvofiq, iqtidorli yoshlarni tanlash va saralash ishlariga, ularga sharoitlar yaratishga ham alohida e’tibor berilgan. Ushbu maqsadlarda institutda «Yosh matematiklar o‘quv markazi»ga asos solinadi. Unda matematika fani bo‘yicha o‘quv kurslari tashkil etilib, ularda umumta’lim maktablari, litseylarning o‘quvchilari, oliy ta’lim muassasalarining talabalari, doktorantlari qatnashishi nazarda tutilgan. Shuningdek, O‘zbekiston terma jamoasini xalqaro matematika olimpiadalariga tayyorlash uchun zarur shart-sharoitlar yaratiladi. Iqtidorli yoshlarni saralab olish va maqsadli tayyorlash jarayonlariga o‘qitishning zamonaviy usullari, pedagogik innovatsiyalar joriy etiladi. Markazga yetakchi olimlar va yuqori malakali mutaxassislar bilan bir qatorda, xorijiy olimlar va mutaxassislar jalb etilishi ko‘zda tutilgan.

Bir so‘z bilan aytganda, mazkur qaror mamlakatimizda matematika fanining yangi bosqichga chiqishini nazarda tutadi. Ta’lim va ilm-fanda matematikaning o‘rnini kuchaytirish, mazkur fanning yanada rivojlanishiga keng imkoniyat yaratadi.

Matematika hamisha fanlarning otasi, fanlarning podshosi kabi ta’riflar bilan ulug‘lanib kelingan. Aslida ham mazkur fansiz hech bir sohani mukammal egallab bo‘lmaydi.Shu sababli mamlakatimizda matematika 2020 yildagi ilm-fanni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlaridan biri sifatida belgilandi.

2.Muhandislik, bank-moliya, xavfsizlik, pul-kredit sohalaridagi mavjud muammolarni yechish bo‘yicha matematik olimlar tomonidan tadqiqotlar o‘tkazilishi, mutaxassis kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashning zarurligi.

O‘tgan davr ichida matematika ilm-fani va ta’limini yangi sifat bosqichiga olib chiqishga qaratilgan qator tizimli ishlar amalga oshirildi. Xususan, matematik olimlar uchun shart-sharoitlar yaratilib, ularni rag‘batlantirish tizimi yo‘lga qo‘yildi. Shuningdek, yana qator masalalarda samarali ishlar qilindi.

Shunga qaramay, sohada yechimini kutayotgan masalalar ham oz emas. Prezidentimizning 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida“gi qarori ana shunday kamchiliklarni bartaraf etish hamda sohani rivojlantirishga xizmat qilishi bilan ahamiyatlidir. Umumiy qilib aytganda, qaror orqali ta’limning har bir bosqichi qamrab olingan. Ya’ni, maktabgacha ta’limdan tortib, ilmiy izlanishlargacha bo‘lgan jarayondagi masalalarning yechimi bosqichma-bosqich ko‘rsatib o‘tilgan.

Shu o‘rinda quyidagi ma’lumotlarni aytib o‘tishni lozim topdik. Ayni paytda yurtimizda 357 ta ixtisoslashtirilgan maktab va maktab-internati mavjud bo‘lib, ularning 229 tasi matematika va aniq fanlarga ixtisoslashtirilgan. Bosqichma-bosqich matematika faniga ixtisoslashtirilgan maktablar soni ko‘paytiriladi. Asosiysi, maktablardagi ta’lim berish bilan bog‘liq natijalar ko‘rsatkichi yuqori bo‘lishi kerak. Buning uchun ham muhim chora-tadbirlar olib borilmoqda. Qaror esa mazkur yo‘nalishdagi ishlarni yanada rivojlantirish hamda takomillashtirishda asosiy vazifani o‘taydi.

Misol uchun, shu paytgacha bo‘lmagan maktabgacha, umumiy o‘rta, o‘rta maxsus, professional, oliy ta’lim tashkilotlari va ilmiy muassasalar o‘rtasidagi yaqin hamkorlikni ta’minlovchi yaxlit tizim shakllantiriladi. Bu orqali ta’limning keyingi bosqichlari hamda o‘quvchida tasavvur hosil qilinadi. Shuningdek, pedagoglar o‘zaro fikr almashib, o‘qitishni yaxshilash, ko‘proq yangiliklar joriy etish imkoniga ega bo‘ladilar.

Endilikda farzandingiz bog‘cha yoshidanoq matematika haqidagi tasavvurga ega bo‘lib ulg‘ayadi. Buning uchun ilg‘or xorijiy tajriba asosida maktabgacha yoshdagi bolalarda ilk matematik tasavvurlarni shakllantirish bo‘yicha zamonaviy pedagogik texnologiyalar joriy qilinadi. Shu bilan birga, har bir hududda va ta’limning har bir bosqichida matematika fanlarini o‘qitish sifatini oshirish, ixtisoslashtirilgan maktablar faoliyatini rivojlantirish hamda yangi maktablarni tashkil etish ham ustuvor vazifa sifatida belgilanmoqda. Buning uchun, albatta, bizga malakali kadrlar kerak bo‘ladi. Ana shu maqsadda mazkur fan bo‘yicha kadrlarni, xususan qishloq joylardagi maktablarning kadrlarini tayyorlash va qayta tayyorlash tizimini rivojlantirish, matematika fani bo‘yicha darslik va o‘quv qo‘llanmalarni takomillashtirish chora-tadbirlari ham birinchi galdagi masalalar sifatida baholanmoqda.

Qaror ko‘lami jihatdan va mazmunan juda keng hamda boy bo‘lib, uni soha ahli ko‘tarinki kayfiyatda kutib oldi. Sababi unda matematika fani o‘qituvchilari, pedagoglar hamda olimlarning mehnatini munosib rag‘batlantirish, o‘quvchilarni esa fanga yanada qiziqishini oshirish bilan bog‘liq islohotlar ham aks etgan.Ta’kidlash kerakki, Prezident, ijod va ixtisoslashtirilgan maktablarni rivojlantirish agentligi tasarrufida ham matematikaga yo‘naltirilgan maktablar mavjud. Bugungi kunda 4 Prezident va 2 ixtisoslashtirilgan, ya’ni, Mirzo Ulug‘bek va Al-Xorazmiy maktablarida 1 ming 420 nafar o‘quvchiga asosan matematika fani chuqurlashtirilgan holda o‘qitiladi. Ushbu maktablarga saralash imtihonlari ham asosan matematika fanidan amalga oshiriladi.Ushbu muassasalarda ish samaradorligiga erishish uchun qator tadbirlar joriy etilgan. Jumladan, matematika institutining olimlari mazkur maktablarga biriktirilgan. Olimlar o‘quvchilar uchun maxsus mahorat darslari olib boradi. Joriy yilning fevral oyida Toshkent shahridagi Prezident maktabida Akademik Shavkat Ayupov tomonidan mahorat darsi o‘tkazildi. Tabiiyki, bu amaliyot o‘quvchilarda ijobiy o‘zgarishlarni hosil qildi. Ulardagi qiziqish va intilish yanada oshgani darslar davomida ko‘zga tashlandi.Bundan tashqari, poytaxtimizdagi Prezident maktabida Matematika insitituti bilan hamkorlikda xalqaro matematika olimpiadasiga respublika terma jamoasini tayyorlash markazini tashkil qilish ishlari olib borilmoqda. Shuningdek, matematika boshqa STEAM fanlari kabi ingliz tilida ham o‘rgatilmoqda. Bu, o‘z navbatida, o‘quvchilarimizning kelgusida matematika sohasidagi bilimini xalqaro maydonda namoyon qilishiga keng imkoniyat beradi.

Yana bir gap. Agentlik va “SixCloudsPteLtdSingapore” kompaniyasi o‘rtasida imzolangan memorandumga ko‘ra, “SixClouds” kompaniyasi 4 Prezident va 3 ixtisoslashtirilgan maktabga, kompaniya tomonidan ishlab chiqilgan matematika fani bo‘yicha raqamli o‘quv metodikasi va dasturi beg‘araz taqdim etildi. Bu dastur 5-8 sinf o‘quvchilari uchun qo‘shimcha mashg‘ulotlar tashkil qilishda qo‘llanilmoqda.Albatta, bajarilgan ishlarimiz hali qo‘l bilan sanarli. Oldinda qilinishi kerak bo‘lgan muhim vazifalar bisyor. Biz ularni qay tartibda amalga oshirish haqida ko‘proq bosh qotirishimiz lozim. Iqtidorli yoshlarni aniqlash hamda ularning matematika fani bo‘yicha mahalliy va xalqaro fan olimpiadalarida muvaffaqiyatli ishtirok etib, sovrinli o‘rinlarni egallashini ta’minlash muhimdir. Onlayn platforma asosida ta’lim berishni amaliyotga tatbiq etish, masofadan o‘qitish tizimi samaradorligini oshirish, baholash mezonining shaffof mexanizmlarini joriy qilish talab etiladi.

IV.AMALIY MAShG‘ULOT MATERIALLARI

1–Mavzu: Tenglamalar va ularning tatbiqlari.

1.Matematikaning sohalarga tatbiqlari.

2.Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Yechimni tekshirish. Tenglamalarni sonli yechish usullari.

3.Matrisalar va ularning tatbiqlari.

4.Vektorlar va ularning tatbiqlari.

Mavzu maqsadi: Tinlovchilarga Matematikaning sohalarga tatbiqlari bo‘yicha tassavur shallantirish. Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Yechimni tekshirish. Tenglamalarni sonli yechish usullarini o‘rganish. Matrisalar, vektorlar va ularning tatbiqlariga doir misollar yechish.

Topshiriqni bajarish uchun ko‘rsatma va tavsiyalar:

1-misol. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval.

xom ashyo xillari	Mahsulot turlari bo‘yicha xom ashyo sarflari			xom ashyo zahirasi
	1	2	3	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo‘yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

Yechish: Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan mahsulotlar hajmini mos ravishda x_1, x_2, x_3 lar bilan belgilaymiz. 1-tur mahsulotga, 1-xil xom ashyo, bittasi uchun sarfi 5 birlik bo'lganligi uchun $5x_1$ 1-tur mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyoning sarfini bildiradi. Xuddi shunday 2,3-tur mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan 1-xil xom ashyo sarflari mos ravishda $12x_2$, $7x_3$ bo'lib, uning uchun quyidagi tenglama o'rinli bo'ladi: $5x_1+ 12x_2+ 7x_3$=2000. Yuqoridagiga o'xshash 2,3-xil xom ashyolar uchun

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$

$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

tenglamalar hosil bo'ladi. Demak, masala shartlarida quyidagi uch nomalumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$5x_1+ 12x_2+ 7x_3=2000\ ,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070 \end{cases}$$

$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070.$$

Bu masalaning matematik modeli uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat bo'ldi. Bu masala tenglamalar sistemasining yechimini topish bilan yechiladi. Bunday tenglamalar sistemasini yechishni umumiy holda qaraymiz.

2-misol. Firma palto va kurtka (kalta kamzul) ishlab chiqarish uchun to'rtta turdagi resurslardan foydalanadi. Resurslar sarfi quyidagicha: bitta palto ishlab chiqarish uchun 1-turdagi resursdan a_1 birlik, 2-turdagi resursdan a_2 birlik, 3-turdagi resursdan a_3 birlik, 4-turdagi resursdan esa a_4 birlik miqdorda ishlatiladi; bitta kurtka uchun esa 1,2,3,4-turdagi resurslardan mos ravishda b_1, b_2, b_3, b_4 birlik miqdorda ishlatiladi. Resurslar chegaralangan bo'lib, ular mos ravishda c_1, c_2, c_3, c_4 birlik miqdorda berilgan bo'lsin.

Palto va kurtka ishlab chiqarish uchun resurslar sarfi matematik modelini tuzing.

Yechish. Ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan paltolar miqdorini x_1, ishlab chiqarilishi kerak bo‘lgan kurtkalar miqdorini x_2 bilan belgilaylik. Bu holda $a_1 \cdot x_1$ ko‘paytma palto ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur resurs miqdorini xuddi shunga o‘xshash $b_1 x_2$ kurtka ishlab chiqarish uchun sarflangan 1-tur resurs miqdorini ifodalaydi. Demak, 1-tur resursning umumiy sarfi $a_1 x_1 + b_1 x_2$ bo‘lib,

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$$

tenglik hosil bo‘ladi. Yuqoridagiga o‘xshash 2, 3, 4-tur resurslar sarfi uchun mos ravishda

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2$$
$$a_3 x_1 + b_3 x_2 = c_3$$
$$a_4 x_1 + b_4 x_2 = c_4$$

tengliklarni hosil qilamiz. Shunday qilib, berilgan masalaning matematik modeli

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= c_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 &= c_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 &= c_3 \\ a_4 x_1 + b_4 x_2 &= c_4 \end{aligned}$$

ikki noma’lumli, to‘rtta chiziqli tenglamalar sistemasi bo‘ladi. Bu modelda o‘zgaruvchilar (noma’lumlar) faqat birinchi darajali bo‘lganligi uchun chiziqli model deb yuritiladi.

3-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ matrisalar berilgan. A va B matrisalarni ko‘paytiring.

Y*echish*. Birinchi matrisaning ustunlar soni, ikkinchi matrisaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matrisalarni ko‘paytirish mumkin:

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\4&-3&1&0\\2&5&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&7\\0&2\\5&4\\6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot0+2\cdot5+3\cdot6 & 1\cdot7+0\cdot2+2\cdot4+3\cdot0\\4\cdot2+(-3)\cdot0+1\cdot5+0\cdot6 & 4\cdot7+(-3)\cdot2+1\cdot4+0\cdot0\\2\cdot2+5\cdot0+3\cdot5+1\cdot6 & 2\cdot7+5\cdot2+3\cdot4+1\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30&15\\13&26\\25&36\end{pmatrix}.$$

Matrisalarni ko‘paytirish ushbu

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

guruhlash hamda

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

taqsimot xossasiga ega.

Masalan, $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}$

bo‘lsin. Bu holda

$$A\cdot(BC)=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+2\cdot0 & 0\cdot2+2\cdot(-3)\\3\cdot(-1)+4\cdot0 & 3\cdot2+4\cdot(-3)\\1\cdot(-1)+(-3)\cdot0 & 1\cdot2+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-6\\-3&-6\\-1&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&14\\-14&-110\end{pmatrix}.$$

Endi $(AB)\cdot C$ ko‘paytirishni bajaramiz:

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&4\\14&46\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13\cdot(-1)+4\cdot0 & 13\cdot2+4\cdot(-3)\\14\cdot(-1)+46\cdot0 & 14\cdot2+46\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&14\\-14&-110\end{pmatrix}$$

Shunday qilib

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

xossa o‘rinli bo‘ladi. Endi taqsimot xossasini qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\\ & & \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

bo‘lsin. Oldin taqsimot xossasining chap tomonini

$(A+B)\cdot C$

hisoblaymiz:

$$(A+B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 6 & -5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

O‘ng tomoni

$$AC+BC=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 19\\ -1 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 6 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

bo‘ladi.

Shunday qilib

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Istalgan kvadrat matrisa A ni mos birlik E matrisaga ko‘paytirganda

$AE=EA=A$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, masalan

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 \\ -1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1 \\ -3\cdot1+0\cdot0+0\cdot(-2) & -3\cdot0+0\cdot1+(-2)\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot0+(-2)\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Xuddi shunga o‘xshash $EA=A$ tenglikni ham tekshirib ko‘rish mumkin (buni bajarishni o‘quvchiga havola qilamiz).

4-misol. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

matrisaning rangini hisoblang.

Ye*chish.* A matrisaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini ikkinchi satr elementlariga, birinchi satr elementlarini (–2)ga ko‘paytirib, uchinchi satr elementlariga, hamda uchinchi satr elementlarini to‘rtinchi satr elemntlariga qo‘shib quyidagi matrisani hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Keyingi matrisada 2-satrini (–1) ga ko‘paytirib to‘rtinchi satriga qo‘shsak

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisa hosil bo‘ladi. Bu matrisada

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5+2=7\neq 0$$

bo‘lib, to‘rtinchi tartibli minorlar 0 ga teng. Shunday qilib, berilgan matrisaning rangi 3 ga teng.

5-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

matrisaga teskari matrisani toping.

Yechish. Oldin A matrisaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18+4+3-2-12-9=2\neq 0.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan teskari matrisa mavjud, chunki

$\Delta = 2 \neq 0$

ya’ni, berilgan matrisa maxsusmas matrisadir. A^{-1}ni topish uchun A matrisa hamma elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix}=6,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}=-5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&9\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&9\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

Teskari matrisani topish

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

formulasiga asosan

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2{,}5&4&-1{,}5\\0{,}5&-1&0{,}5\end{pmatrix}$$

bo‘ladi. A^{-1} teskari matrisaning to‘g‘ri topilganligini

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

tenglikning bajarilishi bilan tekshirib ko‘rish mumkin, haqiqatan ham,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2.5 & 4 & -1.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3+1\cdot(-2.5)+1\cdot 0.5 & 1\cdot(-3)+1\cdot 4+1\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot(-1.5)+1\cdot 0.5 \\ 1\cdot 3+2\cdot(-2.5)+4\cdot 0.5 & 1\cdot(-3)+2\cdot 4+4\cdot(-1) & 1\cdot 1+2\cdot(-1.5)+4\cdot 0.5 \\ 1\cdot 3+3\cdot(-2.5)+9\cdot 0.5 & 1\cdot(-3)+3\cdot 4+9\cdot(-1) & 1\cdot 1+3\cdot(-1.5)+9\cdot 0.5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ya’ni, $AA^{-1} = E$ birlik matrisa hosil bo‘ladi, bu A^{-1} teskari matrisaning to‘g‘ri topilganligini isbotlaydi.

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Matematik modellarga bir necha misollar keltiring.

2. Oila daromadini x, uning harajatini y desak $y = \frac{x}{2}$ modelda daromadning ortishi bilan nimani kuzatasiz?

3. Respublikamiz xalq xo‘jaligi tarmoqlari va ularning elementlarini iqtisodiy sistemaga misol qilib bo‘ladimi? Mumkin bo‘lsa sistema va uning elementlari nimalar bo‘ladi? Muayyan tarmoqlar misolida tushuntiring.

4. Yashash joyingiz yoki unga yaqin, biror mahsulot ishlab chiqarishni sistema deb olib uning elementlarini sanab chiqing(birnecha misollar keltiring).

5 Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ matrisalarni ko‘paytiring.

6. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

matrisalarni ko‘paytiring.

7. Ushbu

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & -9\end{pmatrix}$;

2) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ -5 & -4 & -1\end{pmatrix}$ matrisalarga teskari matrisalarni toping.

8. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & -3\\ 1 & -2 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 4 & 34\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0 & -2\\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2\\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

matrisalarning rangini hisoblang.

2–Mavzu: Funksiyalar va ularning tatbiqlari.

1. Funksiya ta’rifi va ularning tatbiqlari.
2. Funksiyalar yordamida tabiiy jarayonlarni modellashtirish.
3. Qatorlar va ularning tatbiqlari.

Mavzu maqsadi: Tinlovchilarga Funksiya ta’rifi va ularning tatbiqlari bo‘yicha tassavur shallantirish. Funksiyalar yordamida tabiiy jarayonlarni modellashtirish. Qatorlar va ularning tatbiqlarini o‘rganish.

Topshiriqni bajarish uchun ko‘rsatma va tavsiyalar:

1-misol. Biror korxonada ishlab chiqarilayotgan bir xil mahsulot xarajatini ikki guruh:

1) mahsulot hajmiga, proporsional o‘zgaruvchi xarajat, masalan, materiallar sarfi;

2) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas xarajatlar, masalan, ma’muriyat binosi ijarasiga, uni isitishga ketadigan va boshqa xarajatlar deb qarash mumkin.

O‘zgarmas xarajatlarni b bilan, o‘zgaruvchi xarajatlarni, mahsulotning hir bir birligi uchun a bilan belgilasak, biror davrda x birlik hajmdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan umumiy xarajat

$$y = b + ax$$

bo‘lib, bu chiziqli funksiyadir.

2-misol. Mahsulotning umumiy bahosi uning soniga proporsional bo‘lsin. a bitta mahsulot narxi bo‘lsa, x birlik mahsulotning umumiy bahosi

$$y = ax$$

chiziqli funksiya bilan ifodalanadi, ma’lumki bu koordinatlar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasidir.

Chiziqli funksiya va uning grafigi, iqtisodiy miqdorlar orasida proporsionallik mavjud bo‘lgan bog‘lanishlarda ishlatiladi.

3-misol. Italyan iqtisodchisi Pareto jamiyatda foydani taqsimlashning quyidagi qoidasini taklif etdi: y bilan x dan kichik bo‘lmagan foydaga ega bo‘lgan shaxslar sonini belgilasak,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

bo‘ladi, bunda a va m o‘zgarmaslar.

Pareto qonuni katta foydaga ega bo‘lganda, taqsimotni yetarli darajada aniqlik bilan ifodalaydi, past darajadagi foydaga ega bo‘lganda aniq emas.

Biror jamiyatda foydani taqsimlash

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

formula bilan aniqlansin:

1) 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘lgan shaxslar soni;

2) 100 nafar eng boy shaxslar orasida, eng kam foydani toping.

Yechish. 1) masala sharti bo‘yicha, $x = 100000$, uni taqsimot formulasiga qo‘ysak:

$$y = \frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni logarifmlasak:

$$\lg y = \lg\frac{2000000000}{100000^{1.5}} = \lg 2000000000 - 1{,}5\lg 100000 = \lg 2\cdot 10^9 - 1.5\lg 10^5 =$$
$$= 9 + 0{,}301 - 1{,}5\cdot 5 = 9{,}301 - 7{,}5 = 1{,}801,$$

ya’ni $\lg y = 1.801$ bo‘ladi. Logarifmlar jadvalidan $y = 63{,}2$ ni topamiz. Shunday qilib, Pareto taqsimoti bo‘yicha 63 kishi 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘ladi;

2) masala sharti bo‘yicha $y = 100,$ taqsimot formulasidan

$$100 = \frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $x = 73700$ ekanligini aniqlash mumkin (uni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

Shunday qilib, 100 nafar eng boy kishilar ichida eng kichik foyda 73700 ni tashkil etadi.

Funksiyalarning iqtisodda qo‘llanilishiga misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Bu mavzu bo‘yicha talabalarning shug‘ullanishini taklif etamiz.

4-misol. $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping. *Echish.* Ma’lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to‘plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo‘lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x-3\geq 0,$$
$$4-x>0$$

bo‘lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo‘ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x\geq 3$, $x<4$ bo‘lib, ya’ni $3\leq x<4$ bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3,\ 4)$ bo‘ladi.

5-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Ye*chish*. $x\to\infty$ da limitga o‘tsak, 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x=\alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x=3/\alpha$ hamda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ bo‘ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3=e^3$$

kelib chiqadi.

Shundayqilib, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x=e^3$.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x\to 1$da $1/(x-1)\to\infty$ va $2/(x^2-1)\to\infty$ bo‘lib, $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1-2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x\to 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

7-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \to +\infty$ da $\infty - \infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Oxirgi ifoda $x \to \infty$ da (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, 6-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo‘lib,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

bunda $x \to +\infty$ da $3/x \to 0$ bo‘ladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y = x^2$ funksiyaning uzluksizligini, $x_0 = 3$, $x = 5$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

2. 1) $y = 3x^3 + 5x^2 - 7$, 2) $y = 4x^3 + 3x^2 + 5$ funksiyalar uzluksizligini $x_0 = 2$; $x_1 = -3$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

3. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning x ning hamma qiymatlari uchun uzluksiz ekanligini ko‘rsating.

4. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

1) $f(x)=\dfrac{8}{x+4}$; 2) $f(x=\dfrac{x}{x-4}$.

5. Ushbu funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping va topilgan funksiyalarning aniqlanish va o‘zgarish sohalarini aniqlang:

1) $f(x)=x^2-1,\ x\in[0,+\infty)$; 2) $f(x)=2x+3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 3) $f(x)=(x-1)^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 4) $f(x)=x^2-1,\ x\in(-\infty,0]$.

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va ularning grafiklarini yasang.

1) $y=\dfrac{1}{x}$; 2) $y=-\dfrac{3}{x}$; 3) $y=2-\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\dfrac{2}{x-1}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{5x}=\dfrac{4}{5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7)=5$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8)=3$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2)-4x+6=10$

ekanligini funksiya limiti ta’rifidan foydalanib isbotlang xamda x va berilgan funksiyalar kiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

9. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossalaridan foydalanib hisoblang:.

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 6) $\lim\limits_{t\to 3}\left[2t+\sqrt{t^2-8}+\lg(3t+\sqrt{t^2-8})\right]$.

10. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5+6x^3+4x^2-2x+11}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x-17}$.

11. Quyidagi limitlarni hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

12. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x/3}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x/2}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin 1/x$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2/n)^n$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-5/n)^n$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/3n)^n$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x)^{1/x}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n/(n+1)]^n$.

13. Quyidagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

3–Mavzu: Hosila va uning tatbiqlari..

1. Hosila ta’rifi va uning tatbiqlari.
2. Funksiyalarning monotonligi, eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.
3. Integral va uning tatbiqlari.
4. Yuzalarni integrallar yordamida hisoblash.

Mavzu maqsadi: Tinlovchilarga Hosila ta’rifi va ularning tatbiqlari bo‘yicha tassavur shaklantirish. Funksiyalarning monotonligi, eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. Integral va uning tatbiqlari. Yuzalarni integrallar yordamida hisoblashlarni o‘rganish.

Topshiriqni bajarish uchun ko‘rsatma va tavsiyalar:

1-misol. $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Ye*chish.* Oldin birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot x / \sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1+x^2 - x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Shunday qilib,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \text{ va } d^2y = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx^2$$

bo‘ladi.

2-misol. $f(x) = 3x^2 - 7$ funksiyaning, argument 2 dan 2,001 gacha o‘zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

Ye*chish.* (3) formuladan foydalanamiz. $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.001.$

$f'(x) = 6x,\quad f'(x_0) = 6 \cdot 2 = 12$, $\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\ \Delta x = 12 \cdot 0.001 =$
$= 0.012.$

Funksiya orttirmasi o‘rniga uning differensialini olib qancha xatoga yo‘l qo‘yilganini baholaymiz: buning uchun haqiqiy orttirmani topamiz,

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 7 - (3x_0^2 - 7) =$$
$$= 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 7 - 3x_0^2 + 7 =$$
$$= 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 6 \cdot 2 \cdot 0.001 + 3 \cdot 0.000001 = 0.012003.$$

Demak, absalyut xato

$$|\Delta y - dy| = |0.012003 - 0.012| = 0.000003.$$

Nisbiy xato

$$\frac{|\Delta y - dy|}{dy} = \frac{0.000003}{0.012} = 0.00025 \quad \text{yoki} \quad 0{,}025\%.$$

Taqribiy hisoblash xatosi ancha kichik, bu esa yuqoridagi taqribiy tenglikdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinligini ko‘rsatadi.

3-misol. $y = f(x) = x^3 - 3/2 \cdot x^2 - 6x + 4$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Ye*chish.* Birinchi tartibli hosilani topamiz:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2),\ x^2 - x - 2 = 0,$$

bundan $x_1 = -1,\ x_2 = 2$ kritik nuqtalar bo‘lib, ular funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty; -1), (-1; 2), (2; +\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

Bu oraliqlarning har birida hosilaning ishorasini tekshiramiz. $(-\infty; -1)$ oraliqdan ixtiyoriy nuqta olib, masalan, $x = -2$ bo‘lsa, $f'(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$ bo‘ladi. Bunday tengsizlik oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi (buni tekshirib ko‘ring). Demak, $(-\infty; -1)$ oraliqda funksiya o‘suvchi (o‘suvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan).

$(-1;2)$ oraliqning $x = 0$ nuqtasida $f'(0) = -2 < 0,$ bo‘lib, bu oraliqning istalgan nuqtasi uchun, $f'(x) < 0$ tengsizlik bajariladi. Kamayuvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan, $(-1;2)$ oraliqda funksiya kamayuvchi bo‘ladi.

$(2; +\infty)$ oraliqning $x = 3$ nuqtasi uchun, $f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4 > 0,$ bo‘lib, bu tengsizlik ham oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi, demak, funksiya $(2; +\infty)$ oraliqda o‘suvchi.

4-misol. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaninshg ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Kritik nuqtalarni topamiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, bunda $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$;

bo‘lib, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ bo‘ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o‘tishda funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, $x < -2$ bo‘lsa, $x + 2 < 0$, $x - 3 < 0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3) > 0$, bo‘ladi, ya’ni ishora musbat $(+)$. $x > -2$ bo‘lsa, $x + 2 > 0$; $x - 3 < 0$, $(x+2)(x-3) < 0$, ya’ni ishora manfiy(-). Demak, $x_1 = -2$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgaradi. Birinchi qoidaga asosan $x_1 = -2$ nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 8/3 = 10 .$$

Endi -2< x <3 bo‘lsa, $(x+2) > 0$; $(x-3) < 0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3) < 0$, hosilaning ishorasi manfiy $(-)$, $x > 3$ bo‘lsa, $(x+2) > 0$; $(x-3) > 0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3) > 0$, musbat (+) bo‘ladi. Demak, $x_2 = 3$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasi ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\min} = 1/3 \cdot 3^3 - 1/2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8/3 = -65/6.$$

5-misol. $f(x) = 1/4 \cdot x^4 - 2x^3 + 11/2 \cdot x^2 - 6x + 9/4$ funksiya ekstremumini ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \qquad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11 .$$

endi kritik nuqtalarni topaylik:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$$
$$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6), \qquad x^2 - 5x + 6 = 0, \; x - 1 = 0$$

bundan, $x = 1$ va

$$x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}\ ;\ x_2=2\ ,\ x_3=3$$

bo‘ladi. Demak, kritik nuqtalar: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ bo‘ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(1)=3\cdot 1^2-12\cdot 1+11=2>0,$$

$$f''(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+11=-1<0,$$

$$f''(3)=3\cdot 3^3-12\cdot 3+11=2>0.$$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo‘lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1=1,\ x_3=3$ nuqtalarda minimum, $x_2=2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo‘ladi. $\min f(1)=0$; $\max f(2)=0.25$; $\min f(3)=0$.

6-misol. Perimetri $2p(p>0)$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar orasida eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak topilsin.

Y*echish:* Bunday to‘g‘ri to‘rtburchakning asosi x bo‘lsin. Bu holda to‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi $p-x$ ga, yuzi esa,

$$S=S(x)=x(p-x),\ (0<x<p)$$

bo‘ladi.

$S(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$S'(x)=p-2x,\ p-2x=0,\quad x=\frac{p}{2}$$

kritik nuqta bo‘ladi. $S''(x)=-2;$ $S''(p/2)=-2<0.$

Demak, $S(x)$ funksiya, $x=\frac{p}{2}$ nuqtada maksimumga ega bo‘ladi.

$$S_{\max}=\frac{p}{2}(p-\frac{p}{2})=\frac{p^2}{4}.$$

Shunday qilib, eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak tomoni $\frac{p}{2}$ teng bo‘lgan kvadratdan iborat ekan.

Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi. Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o‘zgarishini tekshirish;

2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;

3) funksiyaning davriyligini aniqlash;

4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;

5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;

6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;

8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;

9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;

10) imkoniyati bo‘lsa funksiya grafigining koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;

11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

7-misol. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ funksiyani tekshiring.

Ye**chish.** Funksiyani tekshirishning umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no‘lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1 = -2, x_2 = 2$ nuqtalarda no‘lga teng, demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty, -2)$, $(-2;+2)$, $(2, +\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o‘zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to-\infty} x = -\infty, \lim_{x\to-2-0} \lim \frac{x^3}{x^2-4} = +\infty,$$

$\lim\limits_{x\to -2+0} \lim \dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty,\quad \lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4}=\infty$
;

$$2)\ f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$$

bo'lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T)=f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x=\pm 2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2},\quad f'(x)=0,\ x=0,\ x=\pm 2\sqrt{3}..$$

Bundan tashqari $f'(x),\ \ x=\pm 2$ nuqtalarda mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar: $x_1=-2\sqrt{3},\ x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=2,\ x_5=2\sqrt{3}$
bo'ladi;

6) $(-\infty,-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},+\infty)$
oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty,-2\sqrt{3})$ *ва* $(-2\sqrt{3},+\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya'ni funksiya bu oraliqlarda o'suvchi; $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x)<0,$ ya'ni kamayuvchi $x_1=-2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5=2\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega bo'ladi. $x=0$ kritik nuqtadan o'tishda $f'(x)$ ishorasi o'zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo'q.

$\max f(x)=f(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3};\ \min f(x)=f(2\sqrt{3})=3\sqrt{3};$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$f''(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-x^2(x^2-12)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)-4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ .$$

$$f''(x)=0,\quad 8x(x^2+12)=0,\quad x=0,\quad x=\pm 2$$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

$$x_1=-2;\quad x_2=0;\quad x_3=2$$

bo‘ladi ;

8) $(-\infty,-2),(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$ oraliqlarda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $x=-3$ bo‘lsin.

$$f''(-3)=\frac{8(-3)\left[(-3)^2+12\right]}{\left[(-3)^2-4\right]}=\frac{-24\cdot 21}{5^3}=-\frac{504}{125}<0,$$

xuddi shunday

$f''(-1)>0,\quad f''(1)<0,\quad f''(3)>0$ bo‘lib, $(-\infty,-2)$ *ва* $(0,2)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $(-2,0)$ *ва* $(2,+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo‘ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o‘zgartiradi, lekin $x=\pm 2$ da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat $x=0$ nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo‘ladi $f(0)_{эгл}=0$;

9) funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty \quad ва \quad \lim_{x\to -2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty.$$

Demak, $x=-2,\ x=2$ funksiya grafigining vertikal asimgtotalari bo‘ladi.

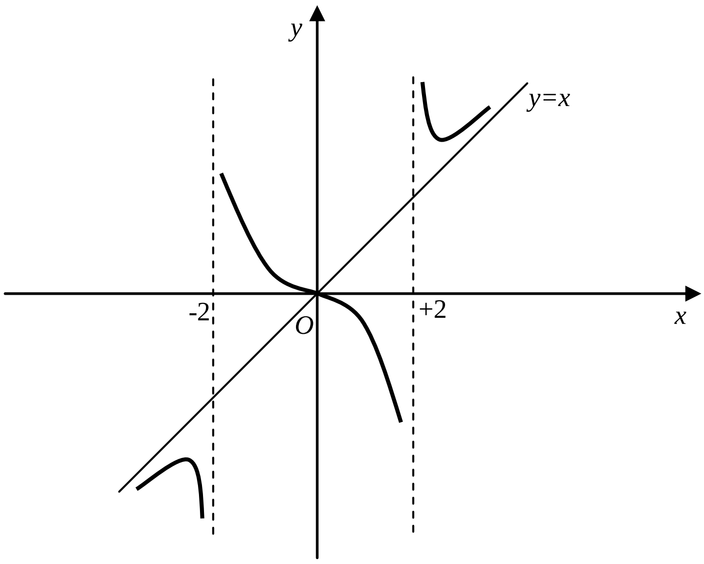
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}==\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x}=\frac{0}{1}=0.$$

Shunday qilib, $y=x$ og‘ma asimptota bo‘ladi;

10) $x=0$ bo‘lganda $y=0$ bo‘lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o‘tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (2-chizma)



2-chizma

8-misol. Mahsulot ishlab chiqarish xarajati va mahsulot hajmi x orasida

$$y = 100x - \frac{1}{30}x^3$$

bog‘lanish bo‘lsin. Ishlab chiqarish hajmi, 5 birlik va 10 birlik bo‘lganda limitik xarajatni toping.

Y*echish.* masala shartiga asosan, $x = 5,\ x = 10.$Funksional bog‘lanish hosilasi

$$y' = 100 - \frac{1}{10}x^2$$

bo‘lib,

$$f'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97.5, \quad f'(10) = 90$$

bo‘ladi.

Bularning iqtisodiy ma’nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 5 birlik bo‘lganda, mahsulot ishlab chiqarish xarajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o‘tishda 97,5 ni tashkil etadi; ishlab chiqarish hajmi 10 birlik bo‘lganda, esa u 90 ni tashkil etadi.

9-misol. $xy = 8,\ x = 1,\ x = e,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang

Y*echish.* $y = 8/x$ bo‘lib, (3) formulaga asosan,

$$S_1 = \int ydx = \int \frac{8}{x}dx = 8\ln x\Big| = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

10-misol. $y = x^2, y^2 = x$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani toping.

Y*echish:* $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$

tenglamalar sistemasidan $x^4 = x, x^4 - x = 0,\ x_1 = 0; x_2 = 1$ kesishish nuqtalarining abssissalari bo‘lib, bu yuza

$$S = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$$

bo‘ladi.

11-misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yuzini toping.

Y*echish.* Ellips koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, hamda $x = 3\cos t$ tenglamada $x = o, x = 3$ bo‘lganda $t_1 = \pi/2$ $, t_2 = 0$ bo‘lganligini hisobga olib,

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ydx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t(-3\sin t)dt = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = 24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 12t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} 12\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 6(\sin\pi - \sin 0) = 6\pi.$$

12-misol. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroidayoyininguzunliginitoping.

Ye*chish:*Astroidakoordinato‘qlariganisbatansimmetrikbo‘lganligiuchun 1/4 yoyuzunliginitopamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$\frac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}}y'=0$ bundan, $y'=-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$. Yoy uzunligi formulasiga asosan,

$$l=4\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}dx=4\int_0^a\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{y}/\sqrt[3]{x}\right)^2}dx=$$

$$=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4\int_0^a\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=4\sqrt[3]{a}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx=4\sqrt[3]{a}\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^a=4\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right)=6a.$$

13-misol. $y^2=2x$ parabola, $x=3$ to‘g‘ri chiziq va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini hisoblang.

Ye*chish.* Masala shartiga ko‘ra x o dan 3 gacha o‘zgaradi. Demak,

$$V_x=\pi\int_0^3 y^2dx=\pi\int_0^3 2xdx=\pi x^2\Big|_0^3=\pi(3^2-0^2)=9\pi\ .$$

14-misol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Ye*chish.* Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$ bo‘lib, integralning chegaralari $c=-b,\ d=b$ bo‘ladi. (8) formulaga asosan,

$$V_y=\pi\int_{-b}^{b}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\pi a^2\int_{-b}^{b}dy-\frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2dy=\pi a^2\,y\Big|_{-b}^{b}-\pi\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b}=$$

$$=\pi a^2[b-(-b)]-\pi\frac{a^2}{3b^2}\left[b^3-(-b)^3\right]=2\pi a^2b-\frac{2}{3}\pi a^2b=\frac{4}{3}\pi a^2b.$$

Demak, $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

$a = b = R$ bo‘lsa, shar hosil bo‘lib $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3$ bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Kuyidagi funksiyalarning o‘sishi va kamayishi oraliqlari tekshirilsin.

1) $y = x^2$;
2) $y = x^3$;
3) $y = \frac{1}{x}$;
4) $y = \ln x$;
5) $y = tg\, x$;
6) $y = e^x$;
7) $y = 4x - x^2$.

2. Kuyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va ularning grafiklari yasalsin.

1) $y = x^2 + 4x + 5$;
2) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;
3) $y = \frac{x^4}{4} - x^3$;
4) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;
5) $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$;
6) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$;
7) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;
8) $y = \frac{1}{1 + x^2}$
9) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$;
10) $y = x^2(1 - x)$;
11) $y = 1 - \sqrt[3]{(x - 4)^2}$;
12) $y = 4x - tg\, x$ $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oralikda
13) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$;
14) $y = x \ln x$.

3. Kuyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va jadvallari tuzilsin.

1. $y=4x-x^2$;

2. $y=x^2+2x+3$;

3. $y=\dfrac{x^3}{3}+x^2$;

4. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$

5. $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2$;

6. $y=x^3+6x^2+9x$;

7. $y=x^3+\dfrac{x^4}{4}$;

8. $y=x-2\ln x$;

9. $y=\sin 2x-x,\ \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ oralikda.

4. Quyidagi funksiyalarning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini toping.

1) $f(x)=x^{\alpha},\ \alpha>1,\ x>0$;

2) $f(x)=e^x$;

3) $f(x)=\ln x$;

4) $f(x)=x^5-10x^2+3x$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;

6) $y=x^5+5x-6$;

7) $y=(x-4)^5+4x+4$;

8) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;

9) $y=2+\dfrac{12}{x^2-4}$;

5. Quyidagi funksiyalar grafiklarining egilish nuqtalarini toping.

1) $y=x^5+5x-6$

2) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$

3) $y = xe^{1-x}$

4) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$

5) $y = \cos x$

6) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$

6. Quyidagi funksiyalarning asimptotalarini toping.

1) $y = \frac{x^2+1}{x}$

2) $y = \frac{x^2}{x-2}$

3) $y = x - \ln x$

4) $y = \frac{e^x}{x}$

5) $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$

7. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang.

1) $y = 3x - x^3$;

2) $y = -x^3 + 4x - 3$;

3) $y = -4x + x^3$;

4) $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3$;

5) $y = x(x-1)^3$;

8. Qo‘yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y = x^2 - 6x + 8, \quad y = 0$; 2) $x = 4 - y^2, \quad x = 0$; 3) $y = \ln x, \quad x = e, \ y = 0$;

4) $y = \dfrac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1$, $x = 3$ to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan;

5) $x = 2 - y^2 - y^2$, $x = 0$; 6) $y = 2 - x^2$, $y = x^2$;

7) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$; 8) $x = 3t^2$, $y = {}^3 t - t^3$.

9. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

10. 1) $y^2 = (x+4)^3$ va $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

4–Mavzu: Differensial tenglamalar .

1. Differensial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim tushunchalari.
2. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar.
3. Koshi masalasi. Koshi masalasining yechimi hakidagi teorema.

Mavzu maqsadi: Tinlovchilarga differensial tenglamalar. Yechim, umumiy yechim tushunchalari bo‘yicha tassavur shaklantirish. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglamalar. Koshi masalasi. Koshi masalasining yechimi hakidagi teoremani o‘rganish.

Topshiriqni bajarish uchun ko‘rsatma va tavsiyalar:

1-misol. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Ye*chish.* Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘lib $p(x) = x$, $g(x) = x$ ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$y = e^{-\int xdx}\left[C + \int x \cdot e^{\int xdx} dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}} d(\frac{x^2}{2})\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C).$$

umumiy yechim bo‘ladi.

2-misol. $y' + xy = xy^3$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Y*echish.* Berilgan tenglamani y^3 bo‘lib,

$$\frac{y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = x$$

tenglamani hosil qilamiz. $\frac{1}{y^2} = z$ almashtirish olsak $z' = \frac{2y'}{y^3}$ bo‘ladi. Bularni tenglamaga qo‘yib,

$$\frac{z'}{2} + xz = x, \quad z' - 2xz = -2x$$

chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini (6) formulaga asosan topish mumkin:

$$z = e^{2\int xdx}\left[C + \int (-2x)e^{-2\int xdx} dx\right] = e^{x^2}\left[C - \int 2xe^{-x^2} dx\right] =$$

$$e^{x^2}\left[C + \int e^{-x^2} d(-x^2)\right] = e^{x^2}\left[C + e^{-x^2}\right] = Ce^{x^2} + 1.$$

Shunday qilib

$$z = C \cdot e^{x^2} + 1$$

bo‘ladi, z ning o‘rniga $\frac{1}{y^2}$ ni qo‘yib,

$$\frac{1}{y^2} = C \cdot e^{x^2} + 1, \quad y^2 = \frac{1}{Ce^{x^2} + 1},$$

yechimni olamiz. Bu berilgan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi bo‘ladi.

3-misol. Ushbu

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2y}{x^3}dy=0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Y*echish.* Berilgan tenglamaning to‘la differensialli bo‘lish yoki bo‘lmasligini tekshiramiz: berilgan tenglamada

$$M=\frac{x^2-3y^2}{x^4} \quad ,N=\frac{2y}{x^3}$$

bo‘lganligi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-6y}{x^4} \quad ,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-6y}{x^4}$$

bo‘lib,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

bo‘ladi, ya’ni berilgan differensial tenglama to‘la differensialli tenglamadir. Demak, berilgan tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘ladi. Endi $u(x,y)$ funksiyani topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}$$

bo‘lganligi uchun

$$u=\int\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\varphi(y)=\int\left(x^{-2}-3y^2x^{-4}\right)dx+\varphi(y)=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+\varphi(y) \quad (2)$$

bo‘lib, bunda $\varphi(y)$ hozircha noma’lum funksiyadir. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha differensiallab,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{2y}{x^3}$$

ekanligini hisobga olib,

$$\frac{2y}{x^3}+\varphi'(y)=\frac{2y}{x^3}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan $\varphi'(y) = 0$ bo‘lib,

$\varphi(y) = C_1$.

bo‘ladi. (2) tenglikdan

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1$$

Shunday qilib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$du = d(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1) = 0$$

bo‘lganligi uchun

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1 = C_2$$

bo‘lib, yoki

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$$

bo‘ladi, bunda $C = C_2 - C_1$.

4-misol.

$$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xydy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Ye*chish.* Berilgan tenglamaning to‘la differensialli yoki to‘la differensialli emasligini tekshiramiz. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ shartni tekshiraylik:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(x^2 - 3y^2\right)_y' = -6y \quad , \frac{\partial N}{\partial x} = \left(2xy\right)_x' = 2y\,.$$

Demak, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajarilmaydi. (4) nisbatni qaraymiz:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$$

bo‘lib,

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{4}{x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{\text{ч}}dx}=e^{-4\ln x}=e^{\ln x^{-4}}=\frac{1}{x^4}$$

hosil bo‘ladi. Berilgan tenglamani $\mu(x)=\frac{1}{x^4}$ funksiyaga ko‘paytirsak,

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2xy}{x^4}dy=0$$

bo‘lib, keyingi tenglama uchun $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajariladi, ya’ni oxirgi differensial tenglama to‘la differensialli tenglamadir.

5-misol. $yy''-2y'^2=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Y*echish.* $y'=z(y)$ almashtirish olib, $y''=z\frac{dz}{dy}$ ekanligini hisobga olsak,

$yz\frac{dz}{dy}-2z^2=0$ tenglama hosil bo‘ladi. Bu birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama:

$$\frac{ydz}{dy}=2z \quad yoki \quad \frac{dz}{z}=2\frac{dy}{y},$$

oxirgi tenglamani integrallab,

$$\ln z=2\ln y+\ln C_1$$

bundan

$$z=C_1y^2$$

bo‘ladi. $z=\frac{dy}{dx}$ ni hisobga olsak ,

$$\frac{dy}{dx}=C_1y^2 \quad yoki \quad \frac{dy}{y^2}=C_1dx$$

bo‘ladi.Oxirgi tenglikdan

$$-\frac{1}{y}=C_1x+C_2 \quad yoki \quad y=-\frac{1}{C_1x+C_2}$$

bo‘ladi.Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y'-\frac{y}{x}=-1$; 2) $y'+y=e^{-x}$; 3) $x^2y'-2xy=3$; 4) $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$;
5) $(a^2+x^2)y'+xy=1$; 6) $(2x+1)y'+y=x$; 7) $y'-ytgx=ctgx$;
8) $y'+y\cos x=\sin 2x.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

1) $xy'+y=3,\ x=1\ da\ \ y=1$; 2) $(1+x^2)y'-xy=2x,\ x=0\ \ bo'\lg anda\ \ y=0$;
3) $xy'+y=x+1,\ \ x=2\ \ bo'\lg anda\ \ y=3.$

3. 1) $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x=-1$ bo‘lganda $y=1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2) $y'+\frac{y}{3}=\frac{x+1}{3y^3}$ tenglama uchun $x=1$ bo‘lganda $y=-1$ boshlang‘ich shart bajariladigan Koshi masalasini yeching.

4. Ushbu to‘la differensialli tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $(x^2+y)\,dx+(x-2y)\,dy=0$; 2) $(y-3x^2)\,dx-(4y-x)\,dy=0$;

3) $2(3xy^2+2x^2)\,dx+3(2x^2y+y^2)\,dy=0$; 4) $(3x^2+2y)\,dx+(2x-3)\,dy=0$;
5) $(3x^2y-4xy^2)\,dx+(x^3-4x^2y+12y^3)\,dy=0$; 6) $3x^2e^y\,dx+(x^3e^y-1)dy=0$.

5. Quyidagi differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko‘paytuvchilarni toping va tenglamalarning umumiy yechimlarini aniqlang:

1) $\left(x^2 - y\right)dx + x\,dy = 0$;   2) $\left(y + xy^2\right)dx - x\,dy = 0$;

3) $y^2\,dx + (xy - 1)\,dy = 0$;   4) $\left(\sin x + e^y\right)dx + \cos x\,dy = 0$;

5) $(x\cos y - y\sin y)dx + (x\sin y + y\cos y)dy = 0$;   6) $2xtgx\,dx + \left(x^2 - 2\sin y\right)dy = 0.$

6. $y''' = \dfrac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda $y = 2,\ \ y' = 1,\ y'' = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

7. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $x^3y'' + x^2y' = 1;$ 2) $yy'' + y'^2 = 0;$ 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0;$ 4) $y''y^3 = 1;$

5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3;$ 6) $y'' + y'tgx = \sin 2x;$ 7) $y'' + 2y'^2 = 0;$

8) $xy'' - y'tgx = e^x x^2;$ 9) $2yy'' = (y^1)^2;$ 10) $t\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{ds}{dt} + t = 0.$

8. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0;$ 2) $y'' - 2y' - 5y = 0;$ 3) $y'' - y = 0;$

4) $4y'' - 12y' + 9y = 0;$ 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0;$ 6) $y'' - 2y' + 50y = 0;$

7) $y'' - 4y' + 7y = 0;$ 8) $y'' + 6y' = 0.$

9. $y'' + 10y' + 25y = 0$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda, $y = e^{-5}$, $y' = 3e^{-5}$ bo‘ladiganboshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

5–Mavzu: Differensial tenglamalarning tatbiqlari.

1. Differensial tenglamalarga keltiriladigan tabiiy fanlar masalalari.
2. Matematik fizika, mexanika va astronomiya hamda iktisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni taxlil etishda va boshka ko‘p sohalardagi

jarayonlarning matematik modelini differensial tenglamalar orqali ifodalash.

Mavzu maqsadi: Tinlovchilarga matematik fizika, mexanika va astronomiya hamda iktisodiy masalalarni yechishda, biologik jarayonlarni taxlil etishda va boshka ko‘p sohalardagi jarayonlarning matematik modelini differensial tenglamalar orqali ifodalashni o‘rgatish.

Topshiriqni bajarish uchun ko‘rsatma va tavsiyalar:

Differensial tenglamalarning iqtisoddagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o‘sish modeli. Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo‘lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo‘lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investisiyasiga sarflansin, ya’ni

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

bo‘lsin, bunda m investisiya me’yori bo‘lib o‘zgarmas son, hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya qilinayotgan bo‘lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o‘sishi ta’minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o‘sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investisiyaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$Q(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me’yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q(t) = emPQ \quad yoki \quad Q(t) = kQ(t) \qquad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln c \quad yoki \quad Q = ce^{kt}$$

bo‘ladi, bunda c ixtiyoriy o‘zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo‘lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = ce^{kt_0} \quad yoki \quad c = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo‘ladi. (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi modeli eksponensial bo‘lar ekan (tabiiy o‘sish deganimizda raqobat yo‘qligi tushuniladi).

Matematik modellar **umumiylik xossasiga ega.** Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma’lumki bakteriyalarning ko‘payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish: radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya bo‘ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya’ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish miqdorini ko‘paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo‘lib

$\frac{dP}{dQ} < 0$ bo‘ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek

$$Q = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em$. (5) tenglamaning o‘ng tomonidagi ko‘paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo‘ladi, ya’ni $Q(t)$ o‘suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog‘lanish chiziqli, ya’ni

$$P(Q) = a - bQ, \quad a >, \ b > 0$$

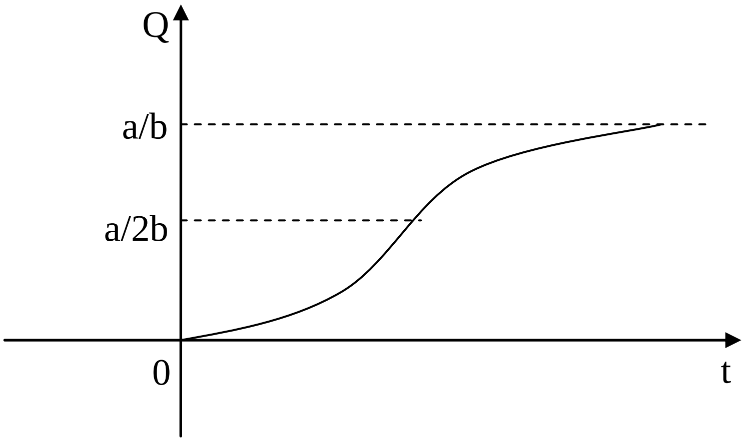
bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (6) tenglikni differensiallasak

$$Q'' = (\alpha aQ - \alpha bQ^2)' = \alpha aQ' - 2\alpha bQQ' \ \ yoki \ \ Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \qquad (7)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0 \ va \ Q = \dfrac{a}{b}$ bo‘lganda, $Q' = 0, \quad Q < \dfrac{a}{2b}$ bo‘lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \dfrac{a}{2b}$ bo‘lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi. Bulardan $\dfrac{a}{2b}$ nuqtadan o‘tishda Q ishorasini o‘zgartirganligi uchun, bu nuqta $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi. Bu funksiya grafigi, ya’ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 1-chizmada tasvirlangan bo‘lib, bu egri chiziqqa iqtisodda ***logistik chiziq*** deb ataladi.



. 1-chizma.

<u>Talab va taklifni tahlil qilish</u>. Ma’lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o‘zgarish sur’ati bilan bog‘liq bo‘ladi. Bunday sur’at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan xarakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo‘lib ushbu bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6 \qquad (1)$$

Bunday bog‘liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur’ati oshsa bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya’ni $p'' > 0$ bo‘ladi. Narxning tez o‘sishi xaridorni cho‘chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur’atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffisienti talab funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o‘sishi tezligi taklifning ham o‘sishiga olib keladi, ya’ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo‘ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o‘zgarishi orasidagi bog‘lanishni tahlil qilaylik. Ma’lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffisientli, chiziqli, bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma’lumki bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig‘indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo‘ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Bir jinsli bo‘lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o‘zgarmas, ya’ni qaror topgan narxni olamiz, hamda buni (3) tenglamaga qo‘yib $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib (9) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = p(t) + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

bo‘ladi.

Bu yechimdan $t \to \infty$ da $p(t) \to 3$ bo‘ladi, ya’ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo‘lganda, narx $p(0) = 4$ va o‘sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo‘lsin. $t = 0$ bo‘lganda $p(0) = 4$ bo‘lganligi uchun (10) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va t=0 bo‘lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak C_2=4 kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4 \sin t)$$

bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$;   2) $y'' + y' + 7y = 8\sin 2x$;   3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;
4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$;   5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;
6) $y'' + 6y' + 10y = 9\cos x + 27\sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2\sin 2x$

2. $y'' + 16y = \sin 4x$ tenglama uchun $x = 0$ bo‘lganda $y = 1,\ y' = \frac{7}{8}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarda, Koshi masalasini yeching.

3. Aniqmas koeffisientlar usuli nimadan iborat?

4. Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sish modeli qanday bo‘ladi?

5. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli nima?

6. Logistik chiziq deb nimaga aytiladi?

7. Talab va taklifni differensial tenglama yordamida qanday tahlil qilinadi?

6–Mavzu: Matematika va sa’nat..

1. Ilm-fan, ta’lim, raqamli iqtisodiyot, yuqori texnologiyalar va boshqa sohalar rivojlanishining negizida matematikaning o‘rni.
2. Muhandislik, bank-moliya, xavfsizlik, pul-kredit sohalaridagi mavjud muammolarni yechish bo‘yicha matematik olimlar tomonidan tadqiqotlar o‘tkazilishi, mutaxassis kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashning zarurligi.
3. Matematika sohasidagi ilg‘or mamlakatlarida olib borilayotgan ishlar bilan bir qatorda mavjud muammolar, matematikani o‘rganish va yoshlarni matematika ilmiga qiziqtirish, matematika orqali aniq va sohaga bog‘liq boshqa fanlarni rivojlanishiga ko‘maklashishning axamiyati.

Mavzu maqsadi: Tinlovchilarga Ilm-fan, ta’lim, raqamli iqtisodiyot, yuqori texnologiyalar va boshqa sohalar rivojlanishining negizida matematikaning o‘rni. Muhandislik, bank-moliya, xavfsizlik, pul-kredit sohalaridagi mavjud muammolarni yechish bo‘yicha matematik olimlar tomonidan tadqiqotlar o‘tkazilishi, mutaxassis kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashning zarurligi. Matematika sohasidagi ilg‘or mamlakatlarida olib borilayotgan ishlar bilan bir qatorda mavjud muammolar, matematikani o‘rganish va yoshlarni matematika ilmiga qiziqtirish, matematika orqali aniq va sohaga bog‘liq boshqa fanlarni rivojlanishiga ko‘maklashishning axamiyatini o‘rgatish.

V. GLOSSARIY

Termin	O‘zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Assesment	angl. assessment «baholash», bilimni, ko‘nikma va malakalarni bir necha xil yondashuvlar orqali baholash, tahlil qilish, sinab ko‘rishdan pedagogik texnologiyasi.	the technology of teaching.by documenting of knowledge, skills, attitudes, with using of different ways of assesment, analysis and testing.
Guruhli ta’lim Group traning	bir o‘qituvchi bir necha o‘qituvchini o‘qitadigan ta’lim shakli. Guruhlar o‘quvchilar soniga qarab: kichik (3-6 o‘quvchi), o‘rta (7-15 o‘quvchi), katta (15 dan ortiq o‘quvchi, guruhlar) ga ajratiladi. Shuningdek, har bir guruhdagi ta’lim oluvchilarning yoshiga, ta’lim yo‘nalishiga va shu kabilarga qarab ham guruhlarga ajratiladi. Bu shaklni qo‘llash jarayonida yakka ta’lim shakllari ham amalga oshiriladi. Biologiyadan dars o‘tishda eng samarali guruxlar 3-5 kishi	A form of teaching in which a person teaches a few students. Depending on the number of students the groups can be small (3-6 students), medium (7-15 students) and large (more than 15 students, groups). In addition the each group can be devided by age, training, direction, and etc. In this form of traning the individual education is also used/ For teaching biology the groups from 3-5 students is the most effective
Vektor	(lot. vector — eltuvchi) — bu son qiymati va yo‘nalishi bilan aniqlanadigan kattalikdir, yani	(Lat. vector - carrier) - is a quantity determined by the value

	vektor deb yo‘nalishga ega bo‘lgan kesmaga aytiladi.	and direction of the number, that is, a vector is said to be an intersection with a direction.
Funksiya	matematikaning eng muhim va umumiy tushunchalaridan biri. Funksiyaning turlari ko‘p bo‘lib, eng ko'p qo‘llaniladigani bu chiziqli funksiyadir ya’ni y=kx+b. O‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi va muhim.	one of the most important and general concepts of mathematics. There are many types of functions, the most commonly used is the linear function, ie y = kx + b. Represents the relationship between variables and is important.
Matrisa	ixtiyoriy elementlardan tuzilgan to‘g‘ri burchakli jadval. M. elementlari yo‘l (satr)lar va ustunlar bo‘ylab joylashadi. Satr va ustunlar, ko‘pincha, umumiy atama bilan "M.ning qatorlari" deyiladi. M. elementlari, odatda, as juft indekslar bilan belgilanadi. Birinchi /’ indeks M.ning a;j element turgan satri raqamini, ikkinchi u indeks esa M.ning a.tj element turgan ustuni raqamini bildiradi.	a right-angled table composed of arbitrary elements. M. elements are placed along rows (rows) and columns. Rows and columns are often referred to by the general term "rows of M." M. The elements are usually defined by ats double indices. The first / 'index represents the row number of M. where the element a; j is located, and the second index indicates the number of the column where M. has the element a.tj.

Hosila	differensial hisobning asosiy tushunchasi. U funksiya o'zgarishi tezligini ifodalaydi. x0 nuqtaning atrofida berilgan f(x) nuqta uchun mavjud bo'lsa, u funksiyaning x0 nuqtadagi hosilasi deyiladi	the basic concept of differential calculus. It represents the rate of change of a function. If x0 exists for a given point f (x) around the point, it is called the product of the function at point x0
Integral	(lot. integer — butun) — matematik analiz (tahlil)ning asosiy tushunchalaridan biri (qarang Integral hisob)	lot. integer - whole) - one of the basic concepts of mathematical analysis (see Integral calculus)
Gipermatn	assotsiativ bog'langan bloklar ko'rinishida taqdim etilgan (boshqamatnli hujjatlarga yo'l ko'rsatuvchi) matn.	**Hypertext**is text displayed on acomputer display or otherelectronic devices with references (hyperlinks) to other text which the reader can immediately access, or where text can be revealed progressively at multiple levels ofdetail
Giperma tinli tizim	elektron hujjatlar kutubxonasini yaratishni ta'minlaydiganvosita.	a database management system tha t allows strings of text (`objects') to be processed as acomplex network of nodes that are linked together in an arbitrary way

Giperme-dia	matndan tashqari multimedia imkoniyatlarini ham o'zida mujassamlashtirgan ma'lumotlarga yo'l	**Hypermedia**, an extension of the term hypertext, is a nonlinear medium of information which includes graphics, audio, video, plain text and hyperlinks.

VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoev Sh. M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.

2. Mirziyoev Sh. M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”,2017. – 592 b.

3. Mirziyoev Sh. M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.

4. Mirziyoev Sh. M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.

5. Mirziyoev Sh. M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.–T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiyhujjatlar

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.

7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentyabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.

8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2012 yil 10 dekabrdagi “Chet tillarni o‘rganish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-1875-sonli qarori.

9. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliyta’limmuasasalariningrahbarvapedagogkadrlariniqaytatayyorlashvamalakasinioshirishtiziminiyanadatakomillashtirishchora-tadbirlarito‘g‘risida”giPF-4732-sonliFarmoni.

10. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekistonRespublikasiniyanadarivojlantirishbo‘yichaHarakatlarstrategiyasito‘g‘risida”gi 4947-sonliFarmoni.

11. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliyta’limtiziminiyanadarivojlantirishchora-tadbirlarito‘g‘risida”giPQ-2909-sonliqarori.

12. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021

yillardaO‘zbekistonRespublikasiniinnovasionrivojlantirishstrategiyasinitasdiqlashto‘g‘risida”giPF-5544-sonliFarmoni.
13. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekistonRespublikasidakorrupsiyagaqarshikurashishtiziminiyanadatakomillashtirishchora-tadbirlarito‘g‘risida”giPF-5729-sonFarmoni.
14. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillardaMirzoUlug‘beknomidagiO‘zbekistonMilliyuniversitetidatalabyuqoribo‘lganmalakalikadrlartayyorlashtiziminitubdantakomillashtirishvailmiysalohiyatinirivojlantirichora-tadbirlarito‘g‘risida”giPQ-4358-sonliQarori.
15. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliyta’limmuassasalarirahbarvapedagogkadrlarininguzluksizmalakasinioshirishtiziminijoriyetishto‘g‘risida”giPF-5789-sonliFarmoni.
16. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2019 yil 8 oktabr “O‘zbekistonRespublikasioliyta’limtizimini 2030 yilgacharivojlantirishkonsepsiyasinitasdiqlashto‘g‘risida”giPF-5847-sonliFarmoni.
17. O‘zbekistonRespublikasiVazirlarMahkamasining 2019 yil 23 sentabr “Oliyta’limmuassasalarirahbarvapedagogkadrlariningmalakasinioshirishtiziminiyanadatakomillashtirishbo‘yichaqo‘shimchachora-tadbirlarto‘g‘risida”gi 797-sonliqarori.

III. Maxsusadabiyotlar

18. Q.M. Karimov, I.D. Razzoqov. MathCAD va MatLAB muhitidaishlash. Oliyo‘quvyurtlarifizika-matematikavakasbiyta’limfakultetlaritalabalariuchu. O‘quv-uslubiyqo‘llanma. Qarshi. “Nasaf” nashriyoti, 2014 y. 80 bet.
19. Matematikmodellashtirish. / KamilovM.M. ErgashevA.K., TATU, Toshkent 2007-176 b.
20. IshmuxamedovR.J., YuldashevM. Ta’limvatarbiyadainnovasionpedagogiktexnologiyalar.– T.: “Nihol” nashriyoti, 2013, 2016.–279b.
21. KarimovaV.A., ZaynutdinovaM.B. Informasionniesistemi.- T.: Aloqachi, 2017.- 256 str.

22. Visshayamatematikanakompyuterevprogramme Maple 14: uchebnoeposobiepolaboratornimrabotam / S.T. Kasyuk, A.A. Logvinova. — Chelyabinsk: IzdatelskiysentrYuUrGU, 2011. — 57 s.
23. P.A. Velmisov, S.V. Kireyev. Differensialnieuravneniyav MathCAD. Uchebnoeposobie. Ulyanovsk, 2016. 109 s.
24. KiryanovD.V. MathCAD 15/MathCAD Prime 1.0 SPb.:VXV-Peterburg, 2012. 432 s.
25. O.I. Korolkov, A.S. Chebotarev, Yu.D. Щeglova. Maple vprimeraxizadachax. Uchebnoeposobiedlyavuzov. Voronej, 2011. 82 s.
26. V.A. Oxorzin. Prikladnayamatematikavsisteme MATHCAD. Uchebnoeposobie. – SPb: «Lan». 2008. -352 s.
27. V.P. Dyakonov. Maple 9.5/10 vmatematike, fizikeiobrazovanii.-M.:SOLON-Press. 2006. -720 s.

IV. Internetsaytlar

28. http://edu.uz – O‘zbekistonRespublikasiOliyvao‘rtamaxsusta’limvazirligi
29. http://lex.uz – O‘zbekistonRespublikasiQonunhujjatlarima’lumotlarimilliybazasi
30. http://bimm.uz – Oliyta’limtizimipedagogvarahbarkadrlariniqaytatayyorlashvaularningmalakasinioshirishnitashkiletishboshilmiy-metodikmarkazi
31. www.ziyonet.uz –Ta’limportali