BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

O'LCHOV NAZARIYASI VA UNING QO'LLANISHI

2022

Rasulov T.H. **fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent**

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUSTA’LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

“O‘LCHOV NAZARIYASI VA UNING QO‘LLANISHI”

MODULI BO‘YICHA

O‘QUV-USLUBIYMAJMUA

Matematika

Buxoro-2022

Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy va o‘rtamaxsus ta’limvazirligining 2020yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangano‘quv dasturi va o‘quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan.

Tuzuvchi: **T.H.Rasulov** fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

Taqrizchi: **H.R.Rasulov** fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

O‘quv-uslubiy majmua Buxoro davlat universiteti Ilmiy Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan
(2021 yil“30”dekbardagi 5-sonli bayonnoma)

MUNDARIJA

I.IShChI DASTUR..5

II.MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI...10

III.NAZARIY MATERIALLAR 12

IV.AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI...69

V.GLOSSARIY...82

VI.ADABIYOTLAR RO‘YXATI...85

I. IShChI DASTUR

Kirish.

“O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi” moduli hozirgi kunda o‘lchovlar nazariyasidan matematika, fizika va biologiya masalalarida keng foydalanish, o‘lchovlar nazariyasi va uning tatbiqini turli fazolarda qo‘llay olish, integral va o‘lchov tushunchalarini amaliyotga keng qo‘llash bo‘yicha, hamda ularning kelajakdagi o‘rni masalalarini qamraydi.

Modulning maqsadi va vazifalari

«**O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi**» **modulining maqsadi:** pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malaka oshirish kurs tinglovchilarining bu borada mamlakatimizda va xorijiy davlatlarda to‘plangan zamonaviy usullarini o‘rganish, amalda qo‘llash, ko‘nikma va malakalarini shakllantirish.

«**O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi**» **modulning vazifalari:**

- zamonaviy talablarga mos holda oliy ta’limning sifatini ta’minlash uchun zarur bo‘lgan pedagoglarning kasbiy kompetentlik darajasini oshirish;
- o‘lchov nazariyasi fanini o‘qitish jarayoniga zamonaviy axborot-kommunikasiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali tadbiq etilishini ta’minlash;
- matematika sohasidagi o‘qitishning innovasion texnologiyalar va o‘qitishning eng so‘nggi zamonaviy usullaridan foydalanishni o‘rgatish;
- tinglovchilarga «Matematika» masalalari bo‘yicha konseptual asoslar, mazmuni, tarkibi va asosiy muammolari bo‘yicha ma’lumotlar berish hamda ularni mazkur yo‘nalishda malakasini oshirishga ko‘maklashish;

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikma, malaka va kompetentligiga qo‘yiladigan talablar

«**O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi**» o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida:

Tinglovchi:

- o‘lchov tushunchasi va xossalarini;
- ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi;

- biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar va ularning tatbiqlarini **bilishi** kerak.

Tinglovchi:

- o‘lchovlar nazariyasidan matematika, fizika va biologiya masalalarida keng foydalanish;

- matematik analizning biomatematika, mexanika, ommaviy xizmat nazariyasi, iqtisodiy sohalar va boshqa sohalarda keng qo‘llay olish **ko‘nikmalariga ega bo‘lishi** lozim.

Tinglovchi:

- o‘lchovlar nazariyasi va uning tatbiqini turli fazolarda qo‘llay olish **malakalariga ega bo‘lishi** lozim.

Tinglovchi:

-matematikaning xorij va respublika miqyosidagi dolzarb muammolari, yechimlari, tendensiyalari asosida o‘quv jarayonini tashkil etish;

- matematikani turli sohalarga tatbiq etish;

- oliy ta’lim tizimida matematik fanlar mazmunining uzviyligi va uzluksizliginitahlil qila olish**kompetensiyalariga ega bo‘lishi** lozim.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

«**O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi**» moduli o‘quv rejadagi boshqa modullar va mutaxassislik fanlarining barcha sohalari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning bu soha bo‘yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar matematika fanlarini o‘qitishda zamonaviy usullar yordamida ta’lim jarayonini tashkil etishda pedagogik yondashuv asoslari va bu boradagi ilg‘or tajribalarni o‘rganadilar, ularni tahlil etish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy layoqatga ega bo‘lish, ilmiy-tadqiqotda innovasion faoliyat va ishlab chiqarish faoliyati olib borish kabi kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o‘quv yuklamasi, soat			
		Hammasi	Auditoriya o‘quv yuklamasi		
			Jami	jumladan	
				Nazariy mashg‘ulot	Amaliy mashg‘ulot
1.	O‘lchov tushunchasi va xossalari.	4	4	2	2
2	O‘lchovsiz to‘plamlar.	4	4	2	2
3	Ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi.	2	2		2
4	Invariant o‘lchovlar.	4	4	2	2
5	Biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.	4	4	2	2
6	Noarximed fazolarda o‘lchovlar va ularning tatbiqlari.	2	2		2
	Jami	**20**	**20**	**8**	**12**

NAZARIY MAShG‘ULOTLAR MAZMUNI

1 – mavzu.O‘lchov tushunchasi va xossalari.

1. O‘lchov tushunchasi va xossalari.
2. σ – additivlik.
3. Lebeg o‘lchovlari.
4. Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar sinfi.

2-mavzu. O‘lchovsiz to‘plamlar.

1. O‘lchovsiz to‘plamlar.
2. O‘lchovli funksiyalar.
3. Turli fazolar va ular ustidagi o‘lchovlarga misollar.
4. Integrallar.
5. Ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi.

3 – mavzu. Invariant o‘lchovlar.

1. Invariant o‘lchovlar.
2. Ergodik teoremalar.
3. Gibbs o‘lchovlari (fizikada qo‘llanishi).

4 – mavzu.Biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.

1. Biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.

Biologik dinamik sitemalar ustidagi o‘lchovlarga misollar.

AMALIY MAShG‘ULOTLAR MAZMUNI

1–Mavzu: O‘lchov tushunchasi va xossalari.

1. O‘lchov tushunchasi va xossalari.
2. σ – additivlik. Lebeg o‘lchovlari.
3. Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar sinfi.

2–Mavzu: O‘lchovsiz to‘plamlar.

1. O‘lchovsiz to‘plamlar.
2. O‘lchovli funksiyalar.
3. Turli fazolar va ular ustidagi o‘lchovlarga misollar.

3–Mavzu: Ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi.

1. Ehtimollik o‘lchovlari va ularning qo‘llanishi.

2. Ehtimollik o‘lchovlarining qo‘llanishi.
3. Integrallar.

4–Mavzu: Invariant o‘lchovlar.

1. Invariant o‘lchovlar.
2. Ergodik teoremalar.
3. Gibbs o‘lchovlari va ularning fizikada qo‘llanishi.

5–Mavzu: Biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.

1. Biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.
2. Biologik dinamik sitemalar ustidagi o‘lchovlarga misollar.

6–Mavzu: Noarximed fazolarda o‘lchovlar va ularning tatbiqlari.

1. Noarximed fazolarda o‘lchovlar.
2. Noarximed fazolarda o‘lchovlarning tatbiqlari.

O‘QITISh ShAKLLARI.

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi: ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);

bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

II. MODULNI O‘QITIShDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

«FSMU» metodi

Texnologiyaning maqsadi: Mazkur texnologiya ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, taqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o‘zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur texnologiyadan ma’ruza mashg‘ulotlarida, mustahkamlashda, o‘tilgan mavzuni so‘rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg‘ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Texnologiyani amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo‘lgan yakuniy xulosa yoki g‘oya taklif etiladi;
- har bir ishtirokchiga FSMU texnologiyasining bosqichlari yozilgan qog‘ozlarni tarqatiladi:

- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhiy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o‘zlashtirilishiga asos bo‘ladi.

“Brifing” metodi

“Brifing”- (ing. briefing-qisqa) biror-bir masala yoki savolning muhokamasiga bag‘ishlangan qisqa press-konferensiya.

O‘tkazish bosqichlari:

1. Taqdimot qismi.

2. Muhokama jarayoni (savol-javoblar asosida).

Brifinglardan trening yakunlarini tahlil qilishda foydalanish mumkin. Shuningdek, amaliy o‘yinlarning bir shakli sifatida qatnashchilar bilan birga dolzarb mavzu yoki muammo muhokamasiga bag‘ishlangan brifinglar tashkil etish mumkin bo‘ladi. Talabalar yoki tinglovchilar tomonidan yaratilgan mobil ilovalarning taqdimotini o‘tkazishda ham foydalanish mumkin.

III. NAZARIY MA’LUMOTLARMATERIALLARI

1-mavzu: O‘LChOV TUShUNChASI VA XOSSALARI.

REJA:

1.1 O‘lchov tushunchasi va xossalari.
1.2 σ – additivlik.
1.3 Lebeg o‘lchovlari.
1.4 Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar sinfi.

Tayanch iboralar: O‘lchov, *halqa, yarim halqa,*minimal halqa, *ochiq shar, yopiq shar,* additivlik, yarim additivlik

1 O‘lchov tushunchasi va xossalari.

Faraz qilaylik, $a,b,c,d \in R$ lar ixtiyoriy sonlar bo‘lsin. Tekislikda

$$a \le x \le b, a \le x < b, a < x \le b, a < x < b,$$

$$c \le y \le d, c \le y < d, c < y \le d, c < y < d$$

tengsizliklarning istalgan bir jufti bilan aniqlangan to‘plamlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamlarni to‘g‘ri to‘rtburchaklar deb ataymiz.

Bizga $a \le x \le b, c \le y \le d$ tengsizliklari bilan aniqlangan to‘g‘ri to‘rtburchak berilgan bo‘lsin. Agar $a < b,\ c < d$ bo‘lsa, u chegarasi o‘ziga qarashli bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni, agar $a = b$ va $c > d$ yoki $a < b$ va $c = d$ bo‘lsa kesmani, agar $a = b,\ c = d$ bo‘lsa nuqtani, agar $a > b$ yoki $c > d$ bo‘lsa, bo‘sh to‘plamni aniqlaydi.

σ orqali tekislikdagi barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasini belgilaymiz.

1-lemma. Tekislikdagi barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi yarim halqani tashkil qiladi.

Isbot. a, b, c va d sonlari bilan aniqlanuvchi ochiq to‘g‘ri to‘rtburchak $a = b$ bo‘lganda bo‘sh to‘plam bo‘ladi, demak $\varnothing \in \sigma$. Ikkita to‘g‘ri to‘rtburchakning kesishmasi yana to‘g‘ri to‘rtburchakdir, ya’ni $P_1, P_2 \in \sigma \Rightarrow P_1 \cap P_2 \in \sigma$.

Faraz qilaylik $P = P_{abc}$ to‘g‘ri to‘rtburchak $P_1 = P_{a_1 b_1 c_1 d_1}$ to‘g‘ri to‘rtburchakni o‘zida saqlasin. Uholda

$$a \le a_1 \le b_1 \le b, \quad c \le c_1 \le d_1 \le d$$

munosabatlar o‘rinli. $P \setminus P_1$ ni quyidagicha tasvirlash mumkin :

$$P \setminus P_1 = P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5,$$

buerda

$$P_2 = P_{aa_1cd}, \; P_3 = P_{a_1bd_1d}, \; P_4 = P_{b_1bcd_1}, \; P_5 = P_{a_1b_1cc_1}.$$

Demak G – yarim halqa bo‘lar ekan.

1-ta’rif. G yarim halqadan olingan va a, b, c, d sonlari bilan aniqlangan (yopiq, ochiq yoki yarim ochiq) $P = P_{abcd}$ to‘g‘ri to‘rtburchak uchun $m(P) = (b - a)(d - c)$ sonni mos qo‘yamiz. Agar $P = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $m(P) = 0$ deymiz va $m : G \to R$ to‘plam funksiyasini o‘lchov deb ataymiz.

Shunday qilib, G dagi har bir P to‘g‘ri to‘rtburchakka uning o‘lchovi $m(P) = (b - a)(d - c)$ son mos qo‘yiladi. Bu moslik quyidagi shartlarni qanoatlantiradi :

1) $m(P) \ge 0;$

2) $m : G \to R$ o‘lchov additiv, ya’ni agar

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k, P_i \cap P_k = \varnothing, \; i \ne k$$

bo‘lsa, u holda $m(p) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$ tenglik o‘rinlidir.

1) va 2) xossalarni saqlagan holda m o‘lchovni barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi σ dan kengroq sinfga davom ettirish maqsadida σ yarim halqa ustida qurilgan $m(\sigma)$ minimal halqani qaraymiz.

2-ta’rif. $M(\sigma)$ halqa elementlari elementar to‘plamlar deyiladi.

Ixtiyoriy $A \in m(\sigma)$ to‘plam chekli sondagi o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri to‘rtburchaklar birlashmasi shaklida ifodalanadi va aksincha.

2-lemma. Ikkita elementar to‘plamning birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi va simmetrik ayirmasi yana elementar to‘plam bo‘ladi.

1.2 σ additivlikxossasi

3-ta’rif. Har bir $A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k \in m(\sigma)$ elementar to‘plamga

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

sonni mos qo‘yuvchi $m': M(\sigma) \to R$ moslikni aniqlaymiz. $m'(A)$ miqdorga A to‘plamning o‘lchovi deyiladi.

m' funksiyaning qiymati A elementar to‘plamni chekli sondagi to‘g‘ri to‘rtburchaklar yig‘indisiga yoyish usulidan bog‘liq emasligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $\{P_k, k = 1, \dots, m\}$ va $\{Q_j, j = 1, \dots, n\}$ larning har biri o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi bo‘lib,

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$$

tenglik o‘rinli bo‘lsin. U holda

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (P_k \cap Q_j)$$

tenglik o‘rinlidir. Shu sababli

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{m} m(P_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m(P_k \cap Q_j);$$

$$m'(A) = \sum_{j=1}^{n} m(Q_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m(P_k \cap Q_j).$$

Demak, elementar to‘plam o‘lchovi m' ning aniqlanishi korrekt ekan.

1) Agar $A \in M(\sigma)$ to‘plam to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lsa, u holda $m'(A) = m(A)$ bo‘ladi.

2) Agar $A\in M(\sigma)$ to‘plam chekli sondagi o‘zaro kesishmaydigan $A_1,\dots,A_n$ elementar to‘plamlarning yig‘indisi shaklida tasvirlansa, ya’ni $A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ bo‘lsa, u holda

$$m'(A)=\sum_{k=1}^{n}m'(A_k).$$

1-teorema. Agar $A\in M(\sigma)$ va $\{A_n\}$ - elementar to‘plamlarning chekliyoki sanoqli sistemasi bo‘lib, $A\subset\bigcup_{n}A_n$ bo‘lsa, u holda

$$m'(A)\le\sum_{n}m'(A_n) \qquad (1.1)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

(1.1) tengsizlikga m' o‘lchovning yarim additivlik xossasi deyiladi.

2-teorema. A elementarto‘plamsanoqlisondagio‘zarokesishmaydigan $A_1,\dots,A_n,\dots$ elementarto‘plamlarningyig‘indisidaniborat, ya’ni $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ bo‘lsa, uholda

$$m'(A)=\sum_{k=1}^{\infty}m'(A_k) \qquad (1.2)$$

tengliko‘rinli.

Isbot. m' o‘lchovningchekliadditivlikxossasigako‘raixtiyoriy $N\in N$ uchun

$$m'(A)\ge m'\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right)=\sum_{n=1}^{N}m'(A_n)$$

tengsizlik o‘rinli. Agar $N\to\infty$ da limitga o‘tsak,

$$m'(A)\ge\sum_{n=1}^{\infty}m'(A_n)$$

bo‘ladi. 1.1-teoremaga ko‘ra

$$m'(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}m'(A_n)$$

Oxirgi ikki munosabatdan (1.2) tenglik kelib chiqadi. (1.2) ga m' ning σ additivlik xossasi deyiladi.

3 Tekislikdagi to‘plamlarning Lebeg o‘lchovi

Bizga

$$E=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$$

birlik kvadrat berilgan bo‘lsin.

4-ta’rif. Ixtiyoriy $A\subset E$ to‘plam uchun

$$\mu^*(A)=\inf_{A\subset\bigcup_k P_k}\sum_k m(P_k) \qquad (1)$$

son A to‘plamning tashqi o‘lchovi deyiladi. Bu yerda aniq quyi chegara A to‘plamni qoplovchi to‘g‘ri to‘rtburchaklarning barcha chekli yoki sanoqli sistemalari bo‘yicha olinadi.

Agar A-elementar to‘plam bo‘lsa, u holda $\mu^*(A)=m'(A)$. Haqiqatan ham, A-elementar to‘plam $P_1,P_2,\dots,P_n$ to‘g‘ri to‘rtburchaklarning birlashmasi ko‘rinishida tasvirlansin, u holda

$$\mu^*(A)\le\sum_{k=1}^{n}m(P_k)=m'(A)$$

$\{P_k\}$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi A to‘plamni to‘liq qoplaydi, shuning uchun (1) tenglik o‘rinli.

Ikkinchi tomondan, $\{Q_j\}$ sistema A to‘plamni qoplovchi chekli yoki sanoqli sondagi ixtiyoriy to‘g‘ri to‘rtburchaklar sistemasi bo‘lsa, 1.1-teoremaga ko‘ra $m'(A)\le\sum_j m(Q_j)$ kelib chiqadi. Shuning uchun

$$m'(A)\le\inf\sum_j m(Q_j)=\mu^*(A) \qquad (2)$$

Demak, (1) va (2)lardan $m'(A)=\mu^*(A)$ ga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, $M(G)$ ga m' va μ^* o‘lchovlar ustma-ust tushar ekan.

3-teorema. Agar chekli yoki sanoqli sondagi $\{A_n\}$ to‘plamlar sistemasi uchun $A\subset\bigcup_n A_n$ bo‘lsa, u holda

$$\mu^*(A)\le\sum_n\mu^*(A_n)$$

tengsizlik o‘rinli. Xususiy holda, agar $A\subset B$ bo‘lsa, $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$ bo‘ladi.

Isbot. Itiyoriy $\varepsilon > 0$ va har bir A_n uchun tashqi o‘lchov ta’rifiga ko‘ra to‘g‘ri to‘rtburchaklarning shunday chekli yoki sanoqli P_{nk} sistemasi mavjudki,

$$A_n \subset \bigcup_k P_{nk} \text{ va } \sum_k m(P_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

bo‘ladi. U holda

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk} \text{ va } \mu^*(A) \le \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli. $\varepsilon > 0$ sonning ixtiyoriyligidan teoremaning isboti kelib chiqadi.

5-ta’rif. Bizga $A \subset E$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $B \subset E$ elementar to‘plam mavjud bo‘lib, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda A Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plam deyiladi. Agar A Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plam bo‘lsa , uning o‘lchovi deb tashqi o‘lchovni qabul qilamiz.

Faqat o‘lchovli to‘plamlar sistemasida aniqlangan μ^* to‘plam funksiyasi Lebeg o‘lchovi deb ataladi va u μ bilan belgilanadi.

Shunday qilib, o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ va unda Lebeg o‘lchovi μ aniqlanadi. Demak, ixtiyoriy $A \in M(E)$ uchun $\mu(A) = \mu^*(A)$.

O‘lchovli to‘plamlarning xossalarini keltiramiz:

4-teorema. O‘lchovli to‘plamlarning to‘ldiruvchisi o‘lchovlidir.

Isbot. Teoremaning tasdig‘i elementar to‘plamning to‘ldiruvchisi elementar to‘plam ekanligidan va

$$A \Delta B = (E \setminus A) \Delta (E \setminus B)$$

tenglikdan kelib chiqadi.

5- teorema. O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ halqa bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun o‘lchovli to‘plamlarning kesishmasi va simmetrik ayirmasi yana o‘lchovli to‘plam ekanligidan ko‘rsatish etarli. A_1, A_2 o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $B_1 \in M(G)$ va $B_2 \in M(G)$ elementar to‘plamlar mavjud bo‘lib, quyidagi tengsizliklar bajariladi

$$\mu^*(A_1\Delta B_1)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2\Delta B_2)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

U holda $(A_1\cap A_2)\Delta(B_1\cap B_2)\subset(A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$ munosabatdan va tashqi o‘lchovning yarim additivlik xossasidan

$$\mu^*((A_1\cap A_2)\Delta(B_1\cap B_2))\le\mu^*(A_1\Delta B_1)+\mu^*(A_2\Delta B_2)<\varepsilon$$

ga ega bo‘lamiz. $B_1\cap B_2$ ning elementar to‘plam ekanligidan $A_1\cap A_2$ ning o‘lchovli to‘plam ekanligi kelib chiqadi.

Ikki to‘plam simmetrik ayirmasining o‘lchovli ekanligi

$$(A_1\,\Delta\, A_2)\Delta(B_1\Delta\, B_2)=(A_1\Delta B_1)\,\Delta\,(A_2\Delta B_2)$$

tenglikdan kelib chiqadi.

Agar o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ da birlik element mavjud bo‘lsa, u algebra tashkil qiladi. $M(E)$ da $E=\{(x,y):0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}$ to‘plam birlik element shartlarini qanoatlantiradi. Demak, o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ algebra tashkil qiladi.

1- natija. O‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi va ayirmasi yana o‘lchovlidir.

2- natija. Chekli sondagi o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o‘lchovli to‘plamdir.

6- teorema (O‘lchovning additivlik xossasi). Agar $A_1,\,..A_n$ lar o‘zaro kesishmaydigan o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsa, u holda

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$$

tenglik o‘rinli.

1-lemma. Ixtiyoriy A va B to‘plamlar uchun

$$\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|\le\mu^*(A\Delta B)$$

tenglik o‘rinlidir.

3- natija. Ixtiyoriy $A\subset E$ o‘lchovli to‘plamlar uchun

$$\mu(E\setminus A)=1-\mu(A)$$

tenglik o‘rinlidir.

7- teorema. Sanoqli sondagi o'lchovli to'plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o'lchovli to'plamdir.

4- natija. O'lchovli to'plamlar sistemasi $M(E), \sigma-$ algebra tashkil qiladi.

8- teorema (O'lchovning $\sigma-$additivlik xossasi). Agar $\{A_n\}$ o'zaro kesishmaydigan o'lchovli to'plamlar ketma - ketligi uchun

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

9- teorema (O'lchovning uzliksizlik xossasi). Agar o'lchovli to'plamlarning $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ ketma- ketligi uchun $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsa, u holda

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

bo'ladi.

5- natija. Agar $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ o'lchovli to'plamlar ketma - ketligi uchun $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsa, u holda

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

bo'ladi.

6-ta'rif. Agar istalgan m, n butun sonlar uchun $A_{mn}=A\bigcap E_{mn}$

to'plamlar o'lchovli bo'lsa, u holda A to'plam o'lchovli deyiladi. Agar A to'plam o'lchovli bo'lsa,

$$\mu(A)=\sum_{m,n\in Z} \mu(A_{mn})$$

qator yig'indisi A to'plamning Lebeg o'lchovi deyiladi.

Agar (2.1) tenglikdan aniq quyi chegara $A\subset R$ to'plamni qoplovchi barcha B sodda to'plamalr olinsa, A to'plamning Jordan ma'nosidagi *tashqi o'lchovi hosil* bo'ladi, u $j^*(A)$ bilan belgilanadi, ya'ni

$$j^*(A) = \inf_{B \supset A} m'(B), \quad B \in M(G).$$

Ushbu

$$j_*(A) = \sup_{B \subset A} m'(B), \quad B \in M(G),$$

son A to‘plamning Jordan ma’nosidagi *ichki o‘lchovi deyiladi.*

7-ta’rif. Agar $j^*(A) = j_*(A)$ bo‘lsa, A Jordan ma’nosida o‘lchovli to‘plam deyiladi. Hozir biz qurilishi Kantor to‘plami K bilan bog‘liq bo‘lgan Kantorning zinapoya funksiyasi keltiramiz. Kantorning zinapoya funksiyasi k bilan belgilaymiz va uni R da quyidagicha aniqlaymiz. $k(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0]$ va $k(x) = 1, \quad x \in [1, \infty).$

Endi $[0,1] \setminus K$ da quyidagicha aniqlaymiz. $K_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ to‘plam va uning chegarasida

$$k(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

$K_2 = K_{21} \bigcup K_{22} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \bigcup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ to‘plam va uning chegaralarida

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & agar \ x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \\ \frac{3}{4}, & agar \ x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]. \end{cases}$$

Endi

$$K_3 = \bigcup_{k=1}^{4} K_{3k} = \left(\frac{1}{3^3}, \frac{2}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{7}{3^3}, \frac{8}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{19}{3^3}, \frac{20}{3^3}\right) \bigcup \left(\frac{25}{3^3}, \frac{26}{3^3}\right)$$

to‘plam va uning chegaralarida

$$k(x) = \frac{2k-1}{2^3}, \quad x \in K_{3k}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Xuddi shunday $K_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} K_{nk}$ to‘plamning k - qo‘shni intervali va uning chegarasida

$$k(x)=\frac{2k-1}{2^n}, \quad x\in K_{nk}, \quad k=1,2,3,\dots,2^{n-1}.$$

Shunday qilib, K_n to‘plamlar va ularning chegaralarida k funksiya aniqlanadi. Bu $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n=[0,1]\setminus K$ to‘plam [0, 1] kesmada zich. Endi $x_0\in K$ soni k funksiya aniqlanmagan boror nuqta bo‘lsin, u holda

$$k(x_0)=\sup\left\{k(x): x<x_0,\ x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right\}$$

deymiz. Hosil qilingan funksiya Kantorning zinapoya funksiyasi deyiladi. Kantorning zinapoya funksiyasi [0,1] kesmada uzlyuksiz, monoton kamaymaydigan funksiya bo‘ladi. Xususan $k(0)=0,\ k(1)=1.$

1.4 O‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomi

Birli (birlikelementli) yarimhalqadaaniqlangano‘lchovningLebegbo‘yichadavomi. Agar G_m yarimhalqadaaniqlangan m o‘lchovadditivlikxossasigaegabo‘lib, ammo $\sigma-$ additivbo‘lmasa, uholda m ning G_m dan $M(G_m)$ gachadavomibilano‘lchovnidavomettirishjarayonitugaydi, ya’ni m o‘lchovni $M(G_m)$ dankengroqsinfgadavomettiribbo‘lmaydi.Agar G_m daaniqlangan m o‘lchov $\sigma-$ additivbo‘lsa, uholda, m ni G_m dan $M(G_m)$ ganisbatankengroqbo‘lganvaqandaydirma’nodamaksimalsinfgadavomettirishmumkin. BuniLebegbo‘yichadavomettirishyordamidaamalgaoshirishmumkin.Bubanddabirliyarimhalqadaberilgano‘lchovniLebegbo‘yichadavomettirishmasalasiniqaraymiz.

Bizgabiror G_m birliyarimhalqadaaniqlangan $\sigma-$ additiv m o‘lchovberilganbo‘lsinva E to‘plam G_m halqaningbiribo‘lsin. E ningbarchaqismto‘plamlaridantashkiltopgan $\Im(E)$ sistemadatashqio‘lchovdebataluvchi μ^* funksiyaniquyidagiusuldaaniqlaymiz.

1-ta’rif. Ixtiyoriy $A\subset E$ to‘plam uchun

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n) \qquad (1)$$

son A to‘plamning tashqi o‘lchovi deyiladi. Bu yerda aniq quyi chegara A to‘plamni qoplovchi barcha chekli yoki sanoqli $\{B_n\},\ B_n \in G_m$ to‘plamalar sistemalari bo‘yicha olinadi.

1-teorema (Sanoqli yarim additivlik). Agar A va sanoqlita $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ to‘plamlar uchun $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo‘lsa, u holda quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\mu^* \leq \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Bu teorema tasdig‘ining 2.1-teorema tasdig‘i isbotiga(aynan) o‘xshash amalga oshorildi.

2-ta’rif. Agar $A \subset E$ to‘plam va istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday $B \in M(G_m)$ to‘plam mavjud bo‘lib,

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A (Lebeg bo‘yicha) o‘lchovli to‘plam deyiladi.

2-teorema. O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ halqa bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy A_1 va A_2 to‘plamlar uchun

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2) \qquad (2)$$

va

$$A_1 \cup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)] \qquad (3)$$

tengliklar o‘rinli bo‘lgani uchun quyidagini isbotlash yetarli. Agar $A_1 \in M(E),\ A_2 \in M(E)$ bo‘lsa, u holda $A = A_1 \setminus A_2 \in M(E)$ bo‘ladi, ya’ni o‘lchovli to‘plamlarning ayirmasi o‘lchovlidir. Haqiqatdan ham, A_1 va A_2 o‘lchovli to‘plamlar uchun shunday $B_1 \in M(G)$ va $B_1 \in M(G)$ to‘plamlar mavjudki,

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ va } \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. $B = B_1 \setminus B_2 \in M(G)$ bo‘lganligi uchun

$$(A_1 \setminus A_2)\Delta(B_1 \setminus B_2) \subset (A_1\Delta B_1)\bigcup(A_2\Delta B_2)$$

munosabatdan foydalanib, $\mu^*(A\,\Delta\,B) < \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. Demak, $A_1 \setminus A_2 \in M(E)$ u holda (4.2) va (4.3) munosabatlardan $A_1 \bigcap A_2 \in M(E)$ va $A_1 \bigcup A_2 \in M(E)$ ekanligini olamiz. A_1 va A_2 to‘plamlarning simmetrik ayirmasining o‘lchovli ekanligi

$$A_1\Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2)\bigcup(A_2 \setminus A_1)$$

tenglikdan kelib chiqadi.

1-eslatma. G_m ning birlik elementi – E o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ uchun ham birlik element bo‘ladi, shuning uchun o‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ algebra tashkil etadi.

3-teorema. O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ da aniqlangan μ to‘plam funksiyasi additivdir.

4-teorema. O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $M(E)$ da aniqlangan μ to‘plam funksiyasi σ - additivdir.

Isbot. Aytaylik $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in M(E)$ bo‘lib $A_i \bigcap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$ bo‘lsin. 4.1-teoremaga ko‘ra,

$$\mu'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(A_n) \text{ yoki } \mu'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\;(A_n) \qquad (4)$$

tengsizlik o‘rinli. 4.3-teoremaga ko‘ra, har bir n da

$$\mu(A) \geq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad (5)$$

tengsizlikni olamiz. (4.5) dan $n \to \infty$ da limitga o‘tib,

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (6)$$

ga ega bo‘lamiz. (4.4) va (4.6) lardan teorema tasdig‘i kelib chiqadi.

5-teorema. Lebeg bo‘yicha o‘lchovli bo‘lgan barcha to‘plamlar sistemasi $M(E)$, E birlik elementli σ - algebradir.

3-ta'rif. O'lchovli to'plamlar sistemasi $M(E)$ da aniqlangan va $M(E)$ da tashqi o'lchov μ^* bilan ustma-ust tushuvchi μ funksiya m o'lchovning $\mu = L(m)$ Lebeg davomi deb ataladi.

2. Birlik elementga ega bo'lmagan yarim halqada berilgan o'lchovni davom ettirish.

6-teorema. Istalgan boshlang'ich m o'lchov uchun Lebeg bo'yicha o'lchovli to'plamlar sistemasi $M(E)\,\sigma$- halqa bo'ladi. Sanoqli sondagi o'lchovli $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ to'plamlar birlashmasi bo'lgan $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ to'plamning o'lchovli bo'lishi uchun $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k)$ miqdorning n ga bog'liqsiz o'zgarmas bilan chegaralangan bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Ye*tarliligi*. O'lchovli to'plamlarning $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sanoqli sistema berilgan bo'lib,

$$\sup_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = K < \infty$$

bo'lsin. Yangi

$$A_1' = A_1,\ A_2' = A_2 \setminus A_1,\ A_3' = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \ldots$$

o'lchovli to'plamlar ketma-ketligini tuzamiz. Tuzilishiga ko'ra, $A_1', A_2', \ldots, A_n', \ldots$ to'plamlar o'zaro kesishmaydi. Bundan tashqari, istalgan n da $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k' = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ tenglik o'rinli. Bundan tashqari

$$\sup_n \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sup_n \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k') = \sup_n \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k') \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k') \leq K$$

shart bajariladi. Demak, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n \in N$ mavjudki,

$$\mu(\bigcup_{k=n+1}^{n} A_k') \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k') < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. $C=\bigcup_{k=1}^{n}A_k^{'}$ to‘plam o‘lchovli bo‘lgani uchun, shunday $B\in G_m$ to‘plam mavjud bo‘lib,

$$\mu^*(C\Delta B)<\frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajariladi.

$$A\Delta B\subset(C\Delta B)\bigcup\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}A_k^{'}\right)$$

munosabatdan foydalansak,

$$\mu^*(A\Delta B)<\varepsilon$$

tengsizlikni olamiz. Demak, A o‘lchovli to‘plam ekan.

Zaruriyligi. Aytaylik sanoqlita $A_1,A_2,\dots A_n,\dots$ o‘lchovli to‘plamlar uchun $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ to‘plam o‘lchovli bo‘lsin va $\mu(A)$ chekli bo‘lsin. U holda istalgan $n\in N$ uchun $\bigcup_{k=1}^{n}A_k\subset A$ munosabatdan va $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ o‘lchovli to‘plam bo‘lgani uchun

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)\le\mu(A)\quad\Leftrightarrow\quad\sup_n\mu(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)\le\mu(A)<\infty.$$

1-natija. O‘lchovli to‘plamlar sinfi $M(E)$ va $A\in M(E)$ to‘plam berilgan bo‘lsin. A to‘plamning barcha $B\in M(E)$ qism to‘plamlaridan tuzilgan $B(M(A))$ sistema σ - algebra bo‘ladi.

4-ta’rif. Agar $\mu(A)=0$ va $A'\subset A$ bo‘lishidan A' ning o‘lchovli ekanligi kelib chiqsa, μ o‘lchov to‘la deyiladi.

Umuman olganda σ- algebrada aniqlangan har qanday σ- additiv o‘lchovi to‘la o‘lchovgacha davom ettirish mumkin. Buning uchun nol o‘lchovi to‘plamning ixtiyoriy qismiga nolni mos qo‘yish kifoya qiladi.

1Nazorat savollari:

1. Lebegma’nosidao‘lchovli, ammoJordanma’nosidao‘lchovlibo‘lmaganto‘plamgamisolkeltiring.

2. Kantorto‘plami $K \subset [0,1]$ningJordanma’nosidao‘lchovliemasliginiisbotlang.

3. $A \subset R$ to‘plamningo‘lchovinolgatengbo‘lsa, $\mu(\bar{A}) = 0$ bo‘lishishartmi? Buerda $\bar{A}$– $A$to‘plamningyopig‘i.

4. $A \subset R$ chegaralanmaganmusbato‘lchovlito‘plambo‘lsin, uholdashunday $x, y \in A$ larmavjudki $x - y \in Q$ bo‘ladi. Isbotlang.

2-mavzu: O‘LChOVSIZ TO‘PLAMLAR.

REJA:

2.1. O‘lchovsiz to‘plamlar.
2.2 O‘lchovli funksiyalar.
2.3 Turli fazolar va ular ustidagi o‘lchovlarga misollar.
2.4 Integrallar.
2.5 Ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi.

Tayanch iboralar: o‘lchovlito‘plam, o‘lchovli funksiya, *garmonik funksiyalar, subgarmonik funksiyalar, monoton kamayuvchi, tekis yaqinlashuvchi, maksimumlar prinsipi.*

2.2 O‘lchovli funksiyalar va ular ustida amallar.

Bizga $E \subset R \left(E \subset R^2\right)$o‘lchovlito‘plamvaundaaniqlanganhaqiqiyqiymatli f funksiyaberilganbo‘lsin.

1-ta’rif. Agar ixtiyoriy $c \in R$ uchun $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ to‘plam o‘lchovli bo‘lsa, u holda f funksiya E to‘plamda o‘lchovli funksiya deyiladi.

1-misol. Biz $E \in R$ to‘plam sifatida $[0,1]$ kesmani f funksiya sifatida o‘zgarmas bir funksiyani olamiz, ya’ni $f(x) = 1$ aniqlanishiga ko‘ra ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$E(f < c) = \{x : f(x) < c\} = \begin{cases} [0,1], & agar\, c > 1, \\ \varnothing, & agar\, c \le 1 \end{cases}$$

tenglik o‘rinli. $[0, 1]$kesma va $\varnothing$ to‘plam o‘lchovli. Demak, ixtiyoriy $c \in R$ uchun $E\left(f < c\right)$ to‘plam o‘lchovli ekan.Ta’rifga ko‘ra, $f(x) = 1$ funksiya $[0, 1]$ da o‘lchovli funksiya bo‘ladi.

1-teorema. Agar f va g funksiyalar E to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi $f + g$, ayirmasi $f - g$ va ko‘paytmasi $f \cdot g$ o‘lchovli bo‘ladi. Agar $g(x) \ne 0$ bo‘lsa, u holda $\dfrac{f}{g}$ funksiya ham*E* da o‘lchovli bo‘ladi.

Teoremani isbotlashda quyidagi lemmalardan foydalanamiz.

1-lemma. Agar f funksiya*E* to‘plamda o‘lchovli bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $a, b \in R$ lar uchun quyidagi to‘plamlarning har biri o‘lchovli bo‘ladi.

1) $E(f \ge a)$; 2) $E(a \le f < b)$; 3) $E(f = a)$; 4) $E(f \le a)$; 5) $E(f > a)$.

2- lemma. Agar ixtiyoriy $a, b \in R$ lar uchun 1), 2), 4), 5) to‘plamlarning birortasi o‘lchovli bo‘lsa, u holda f funksiya E to‘plamda o‘lchovli bo‘ladi.

Isbot. f o‘lchovli bo‘lsin, u holda ta’rifga ko‘ra, ixtiyoriy $a, b \in R$ uchun $E(f < a)$ to‘plam o‘lchovli bo‘ladi.

1) $E(f \ge a) = E \setminus E(f < a)$ tenglikdan, hamda o‘lchovli to‘plamning to‘ldiruvchisi o‘lchovli ekanligidan $E(f \ge a)$ to‘plamlarning o‘lchovliligi kelib chiqadi.

2) $E(a \le f < b) = E(f \ge a) \cap E(f < b)$ tenglikdan, hamda o‘lchovli to‘plamlar kesishmasi o‘lchovli ekanligidan $E(a \le f < b)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi.

3) $E(f = a)$to‘plamni o‘lchovliligini ko‘rsatamiz

$$E(f=a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(a\le f<a+\frac{1}{n})$$

Bu yerda $E\left(a\le f<a+\dfrac{1}{n}\right)$ to‘plam 2) ko‘rinishdagi to‘plam bo‘lgani uchun o‘lchovli. O‘lchovli to‘plamlarning sanoqli sondagi kesishmasi o‘lchovli bo‘lgani uchun $E(f=a)$ to‘plam o‘lchovli bo‘ladi.

4) $E(f\le a)$ to‘plamning o‘lchovli ekanligi ta’rifidan, 3) dan hamda $E(f\le a)=E(f<a)\bigcup E(f=a)$ tenglikdan kelib chiqadi.

5) $E(f>a)=E\setminus E(f\le a)$ tenglikdan hamda to‘ldiruvchi to‘plamning o‘lchovliligidan kelib chiqadi.

3-lemma. Agar f va g lar E da o‘lchovli funksiyalar bo‘lsa, u holda

$$\{x\in E:\ f(x)>g(x)\}=E(f>g)$$

to‘plam o‘lchovli bo‘ladi.

Isbot. Ratsional sonlar to‘plami Q sanoqli bo‘lgani uchun uning elementlarini nomerlab chiqamiz, ya’ni $Q=\{r_1,\, r_2,\, ...,r_k\, ,...\}$ va quyidagi tengsizlikni isbotlaymiz:

$$\{x\in E:\ f(x)>g(x)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{x:\ f(x)>r_k\}\bigcap\{x: g(x)<r_k\}\right),\quad r_k\in Q \qquad (5.1)$$

faraz qilaylik, $x_0\in\{x\in E:\ f(x)>g(x)\}$ bo‘lsin, u holda ratsional sonlarning zichlik xossasiga ko‘ra shunday $r_k\in Q$ mavjudki $f(x_0)>r_k>g(x_0)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Demak,

$$\{x_0\in E:\ f(x)>g(x)\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{x:\ f(x)>r_k\}\bigcap\{x: g(x)<r_k\}\right),\quad r_k\in Q.$$

Bundan

$$x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{x:\ f(x)>r_k\}\bigcap\{x: g(x)<r_k\}\right)$$

ekanligi kelib chiqadi. Endi

$$x_0\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{x:\ f(x)>r_k\}\bigcap\{x: g(x)<r_k\}\right)$$

ixtiyoriy nuqta bo‘lsin, u holda x_0 yig‘indining birortasiga tegishli bo‘ladi, ya’ni shunday $r_k \in Q$ mavjudki bir vaqtda $f(x_0) > r_k$ va $g(x_0) < r_k$ bo‘ladi. Bundan $f(x_0) > g(x_0)$ ekanligi va demak $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ ekanligi kelib chiqadi.

Biz (1) tenglikni isbotladik. 3-lemmaning isboti (1) tenglikdan, hamda o‘lchovli to‘plamlarning sanoqli birlashmasi yana o‘lchovli ekanligidan kelib chiqadi.

Teoremani isbotini bir necha qismga ajratamiz.

1) agar f – o‘lchovli funksiya bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $k \in R$ uchun $k \cdot f$ va $f + k$ funksiyalar ham o‘lchovli bo‘ladi. Haqiqatan ham

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\} \qquad (2)$$

(5.2) tenglikning o‘ng tomonidagi to‘plamlarning har bir o‘lchovi bo‘lgani uchun $k \cdot f$ funksiya o‘lchovli bo‘ladi. $f + k$ funksiyaning o‘lchovligi quyidagi tenglikdan

$$\{x \in E : f(x) + k < c\} = \{x \in E : f(x) < c - k\}$$

kelib chiqadi.

2) Agar f va g o‘lchovli funksiyalar bo‘lsa, u holda 3-lemmaga ko‘ra

$$\{x \in E : f(x) + g(x) > c\} = \{x \in E : f(x) > c - g(x)\}$$

to‘plam ixtiyoriy $c \in R$ da o‘lchovli bo‘ladi. Demak, ta’rifga ko‘ra $f + g$ o‘lchovli bo‘ladi.

3) 1) va 2) dan kelib chiqadiki $f - g$ o‘lchovli funksiya bo‘ladi.

4) Agar f o‘lchovli bo‘lsa $|f|$ va f^2 lar ham o‘lchovlilar ham o‘lchovli funksiyalar bo‘ladi. Haqiqatan ham

$$E(|f| > c) = \begin{cases} E, \ agar \ c < 0 \\ E(f < -c) \cup E(f > c), \quad agar \quad c \geq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

$$E(f^2 > c) = \begin{cases} E, \quad agar \quad c < 0 \\ E(|f| > \sqrt{c}), \quad agar \quad c \geq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

(3) va (4) tengliklarning o‘ng tomonidagi to‘plamlar ixtiyoriy $c \in R$ da o‘lchovli bo‘lgani uchun $|f|$ va f^2 lar o‘lchovli funksiyalar bo‘ladi.

5) O‘lchovli funksiyalarning ko‘paytmasi o‘lchovli ekanligi quyidagi

$$f\cdot g=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$$

ayniyatdan, ham 1), 2), 3) va 4) xossalardan kelib chiqadi.

6)Agar f o‘lchovli bo‘lib, $f(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{f}$ o‘lchovli bo‘ladi.

Isboti:

$$E\left(\frac{1}{f}<c\right)=\begin{cases} E(f<0)\bigcup E\left(f>\frac{1}{c}\right), & agar \quad c>0 \\ E\left(\frac{1}{c}<f<0\right), & agar \quad c<0 \\ E(f<0), & agar \ \ c=0 \end{cases}$$

tenglikning o‘ng tomoni o‘lchovli to‘plamlar bo‘lgani uchun $E\left(\frac{1}{f}<c\right)$ o‘lchovli to‘plam ekan. Demak $\frac{1}{f}$ o‘lchovli funksiya. 5-xossaga ko‘ra, $g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$ funksiya ham o‘lchovli bo‘ladi, bunda $f(x)\neq 0$.

Shunday qilib, biz o‘lchovli funksiyalar to‘plamining arifmetik amallarga nisbatan yopiqligini ko‘rsatdik.

2-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $n_0>0$ mavjud bo‘lib, barcha $n>n_0$ va hamma $x\in E$ larda $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ bo‘lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to‘plamda f funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

3-ta’rif. Agar har bir $x\in E$ da $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ bo‘lsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f funksiyaga nuqtali yaqinlashadi deyiladi.

Quyidagi teorema o‘lchovli funksiyalar to‘plamining limitga o‘tish amaliga nisbatan ham yopiqligini ifodalaydi.

2-teorema. Agar $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi har bir $x \in E$ da $f(x)$ga yaqinlashsa, u holda limitik funksiya f o‘lchovli bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $x \in E$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ bo‘lsin. Agar biz

$$E(f < c) = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m>n}^{\infty}\left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\} \qquad (5.5)$$

tenglikni isbotlasak teorema isbotlangan bo‘ladi. Chunki, sanoqli sondagi o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi va kesishmasi yana o‘lchovli to‘plamdir. (5.5) tenglik amaliyot darsida ko‘rsatiladi.

O‘lchovli funksiyalar ketma- ketliklarining yaqinlashishlari

1-ta’rif. E o‘lchovli to‘plamda aniqlangan f va g funksiyalar uchun

$$\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

bo‘lsa u holda f va g lar ekvivalent funksiyalar deyiladi va $f \equiv g$ kabi belgilanadi

1-misol. $E = [0,1]$

$$F(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \cap Q \\ 0, x \in [0,1] \cap I \end{cases}, \quad g(x) = 0$$

Funksiyalar ekvivalentdir chunki

$$\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\} = [0,1] \cap Q$$

va $\mu([0,1] \cap Q) = 0$ tengliklar o‘rinlidir .

2-ta’rif. Agar biror xossa E to‘plamning nol o‘lchovli qism to‘plamidan boshqa barcha nuqtalarida bajarilsa , bu xossa E to‘plamda deyarli bajariladi deyiladi .

1-teorema: Agar f funksiya Y o‘lchovli to‘plamda aniqlangan bo‘lib , o‘lchovli $G : E \to R$ funksiyaga ekvivalent bo‘lsa u holda f ham E ga o‘lchovli funksiya deyiladi.

2-misol. $E = [0, 2\pi]$

$$F(x)=\begin{cases}\cos x, x\in[0,2\pi]/\left\{\dfrac{\pi}{n}, n\in N\right\}\\ \sin^2(\cos x), x\in\left\{\dfrac{\pi}{n}, n\in N\right\},\end{cases};\ g(x)=\cos x$$

$f\equiv g$ va g o‘lchovli funksiyalar. Shu sababli 6.1- teoremaga asosan, f ham o‘lchovli funksiyadir.

Deyarli yaqinlashish.

3-ta’rif. Agar E to‘plamda aniqlangan $\{f_n\}$ funksiyalar ketma- ketligining f funksiyaga yaqinlashmaydigan nuqtalari to‘plamning o‘lchovi 0 bo‘lsa. U holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to‘plamda funksiyaga deyarli yaqinlashadi deyiladi, yani

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

Tenglik E dagi deyarli barcha x lar uchun o‘rinli, yoki

$$A=\left\{x\in E:\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\right\},\ \mu\in(E/A)=0$$

3-misol. $f_n(x)=\cos^n(x), x\in[0,2\pi]$ funksiyalar ketma –ketligi 0 funksiyaga deyarli yaqinlashishini ko‘rsating .

Ma’lumki, $x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ lar uchun $|\cos x|<1$ tengsizlik o‘rinli hamda $\cos 0=\cos 2\pi=1, \cos\pi=-1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0,\ agar\ x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}\\ mavjud\ \ emas,\ agar\ \ x=\pi\\ 1,\ agar\ \ x=\{0,2\pi\};\end{cases}$$

Agar $A=\left\{x:\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\right\}=(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ belgilash kiritsak , u holda

$$\mu(E\setminus A)=\mu\{0,\pi,2\pi\}=0$$

Ta’rifga asosan $f_n(x)=\cos^n x$ funksiyalar ketma-ketligi $E=[0,2\pi]$ ga $\theta(x)=0$ funksiya deyarli yaqinlashadi.

2-teorema. Agar E to‘plamda $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma- ketligi f ga deyarli yaqinlashsa, u holda limitik funksiya f ham o‘lchovlidir.

Tekis yaqinlashishdan nuqtali yaqinlashish, nuqtali yaqinlashishdan esa deyarli yaqinlashish kelib chiqadi .

Quyidagi teorema deyarli yaqinlashish, va tekis yaqinlashish orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi

3-teorema (Egorov). E chekli o‘lchovli to‘plamda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi f ga deyarli yaqinlashsin .U holda $\nabla\delta > 0$ soni uchun shunday $E_\delta \subset E$ to‘plam mavjudki, uning uchun quyidagilar o‘rinli:

1) $\mu(E_\delta \setminus E) < \delta,$

2) E_δ to‘plamga $\{f_n\}$ funksiyalar ketma- ketligi f ga tekis yaqinlashadi.

2. O‘lchov bo‘yicha yaqinlashish. Bizga E to‘plamda aniqlangan $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi va f o‘lchovli funksiya berilgan bo‘lsin.

O‘lchov bo‘yicha yaqinlashish.

Bizga $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi va f funksiya berilgan.

4-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} = 0$$

tenglik bajarilsa, u holda $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi E to‘plamda f funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi.

Deyarli yaqinlashishdan o‘lchov bo‘yicha yaqinlashish kelib chiqadi. Quyidagi teorema shu haqda.

4-teorema. Agar $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi $E(\mu(E) < \infty)$ to‘plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashsa, u holda $\{f_n\}$ ketma-ketlik E to‘plamda f ga o‘lchov bo‘yicha ham yaqinlashadi.

Isbot. 2-teoremaga ko‘ra, limitik funksiya f o‘lchovli bo‘ladi.

$$A = \{x : \lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)\}$$

bo‘lsin, u holda $\mu(E \setminus A) = 0$ bo‘ladi. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$E_k(\delta) = \{x : | f_k(x) - f(x)| \geq \delta\};$$

$$R_n(\delta) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k(\delta), \quad M = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\delta),$$

o‘lchovli to‘plamlarning xossalaridan foydalanib ko‘rsatish mumkinki, yuqorida kiritilgan barcha to‘plamlar o‘lchovli bo‘ladi. Ravshanki,

$$R_1(\delta) \supset R_2(\delta) \supset \ldots\ldots \supset$$

O‘lchovning uzlyuksizlik xossasidan

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(R_n(\delta)\big) = \mu(M)$$

tenglik kelib chiqadi.

Ko‘rsatamizki $M \subset E \setminus A$ bo‘ladi, haqiqatan ham $x_0 \in A$ bo‘lsin, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Limit ta’rifiga ko‘ra berilgan $\delta \succ 0$ son uchun shunday n mavjudki,

$$| \ f_k(x_0) - f(x_0) \ | < \delta$$

tengsizlik barcha $k \geq n$ lar uchun o‘rinli, ya’ni $x_0 \notin R_n(\delta)$ demak, albatta $x_0 \notin M$. Bundan $A \subset E \setminus M \Rightarrow M \subset E \setminus A$. O‘lchovning yarim additivlik xossasidan

$$\big(\mu(M) \leq \mu(E \setminus A) = 0\big) \quad \mu(M) = 0$$

Demak $\mu\big(R_n(\delta)\big) \to 0,\ n \to \infty$ yana bir marta o‘lchovning yarim additivlik xossasidan foydalansak, $E_n(\delta) \subset R_n(\delta)$ munosabatdan

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(E_n(\delta)\big) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Umuman olganda o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishdan deyarli yaqinlashish kelib chiqmaydi. Quyidagi misol shu fikrni to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

4-misol. Har bir $k \in N$ uchun $[0,1]$ yarim intervalda $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ funksiyalarni quyidagi usul bilan aniqlaymiz.

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1 \quad агар \quad \dfrac{i-1}{k}\prec x\le \dfrac{i}{k}\\ 0, \quad агар \quad x\in[0,1]\setminus\left[\dfrac{m}{k},\dfrac{i}{k}\right]\end{cases}$$

Bu funksiyalarni tartib bilan nomerlab, $\{g_{\text{n}}(x)\}$ ketma-ketlikni hosil qilamiz. Ko‘rsatish mumkinki $\{g_{\text{n}}(x)\}$ ketma-ketlikning nol funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishini va biror nuqtada ham nolga yaqinlashmasligi isbotlang.

Isbot. Har bir $n\in N$ uchun shunday *k* va *i* sonlar topiladiki, $f_i^{(k)}(x)=g_n(x)$ tenglik bajariladi va n cheksizga intilishi bilan *k* ham cheksizga intiladi. Demak, ixtiyoriy $\sigma>0$ uchun

$$\mu\{x:|g_n(x)|\ge\sigma\}=\mu\{x:f_i^{(k)}\ge\sigma\}\le\mu\left[\frac{i-1}{k},\frac{1}{k}\right]=\frac{1}{k}\underset{k\to 0}{\to}0.$$

Endi $\{g_n\}$ ketma-ketlikni $Q(x)$ ga deyarli yaqinlashmasligini ko‘rsatamiz.Ixtiyoriy $x_0\in(0,1]$ nuqtani olamiz. Shunday k_n va $i_n\ (k_1<k_2<\ldots k_n<)$ sonlar topiladiki,

$$x_0\in\left(\frac{i_n-1}{K_n},\frac{in}{K_n}\right]$$

bo‘ladi. Demak

$$\lim_{n\to\infty}f_{i_n}^{(k_n)}(x_0)=1\ne 0.$$

6-teorema. Agar $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik $f(x)$ ga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashsa undan $f(x)$ ga deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

Isbot. Biz musbat va nolga intiluvchi $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\ldots$ ketma-ketlikni va $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n,\ldots$ musbat sonlarni $\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n+\ldots$ qator yaqinlashuvchi bo‘ladigan qilib tanlaymiz. Indekslar ketma-ketligi $n_1<n_2,\ldots$ larni quyidagicha tanlaymiz n_1 indeksni shunday tanlaymizki,

$$\mu(\{x:|f_{n_1}(x)-f(x)|\ge\varepsilon_1\})\ge\eta_1$$

tengsizlik bajarilsin. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_1 mavjudligi $\{f_n\}$ ketma-ketlikning f ga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashuvchi ekanligidan kelib chiqadi. Endi $n_2 > n_1$ indeks shunday tanlanadiki,

$$\mu(\{x : \left| f_{n_2}(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon_2\}) \geq \eta_2$$

tengsizlik bajarilsin. Umuman $n_k > n_{k-1}$ indeks shunday tanlanadiki,

$$\mu(\{x : \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon_k\}) \geq \eta_k$$

tengsizlik bajarilsin. Tanlangan $\{f_{n_k}\}$ ketma-ketlikning f ga deyarli yaqinlashuvchi bo‘lishini ko‘rsatamiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty}\{x : \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon_k\} \text{va} R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Tanlanishiga ko‘ra, $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$. O‘lchovning uzlyuksiz xossasiga ko‘ra, $\mu(R_n) \to \mu(R)$. Ikkinchi tomondan, ravshanki,

$$\mu(R_i) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$$

tengsizlik o‘rinli. So‘ngi qator yaqinlashuvchi qatorning qoldig‘I bo‘lganligi uchun, u $i \to \infty$ da nolga intiladi. Demak, $\mu(R) = \lim_{i\to\infty} \mu(R_i) = 0$. Endi $E \setminus R$ to‘plamda $f_{n_k}(x) \to f(x)$ ni ko‘rsatish qoldi.Faraz qilaylik, $x_0 \in E \setminus R$, yani $x_0 \notin R$ bo‘lsin.U holda shunday i_0 mavjudki, $x_0 \notin R_{i_0}$. Bu shni anglatadiki, barcha $k > i_0$ lar uchun

$$x_0 \notin \{x : \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon_k\} \text{ ya'ni } \left| f_{n_k}(x_0) - f(x_0) \right| < \varepsilon_k .$$

shartga ko‘ra $\varepsilon_k \to 0$, shuning uchun $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$.

7-teorema. (Luzin).$[a,b]$da aniqlangan f funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $[a,b]$ da uzlyuksiz bo'lgan shunday φ funksiya mavjud bo‘lib, $\mu\{x \in [a,b] : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

1-natija. $[a,b]$ kesmada uzlyuksiz funksiya o‘lchovlidir.

5-misol. $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in[0,\pi]\setminus Q\\ \cos^2 x(\sin x) & x\in Q\end{cases}$ Luzin teoremasiga ko‘ra funksiya o‘lchovli, chunki $\varphi(x)=\sin x,\ x\in[0,\pi]$ va

$$\mu\{x: f(x)\neq\varphi(x)\}=\varphi[0,\pi\cap Q]=0.$$

Ixtiyoriy o‘lchovli funksiya uchun Lebeg integrali va uning xossalari

Biz doim chekli o‘lchovli $A\,(\mu(A)<+\infty)$ to‘plam va unda aniqlangan f o‘lchovli funksiyani qaraymiz.

1-ta’rif. Agar A to‘plamda f funksiyaga tekis yaqinlashuvchi, integrallanuvchi sodda funksiyalarning $\{f_n\}$ ketma-ketligi mavjud bo‘lsa, u holda f funksiya A to‘plamda Lebeg ma’nosida integrallanuvchi deyiladi va uning integrali

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu=\int_A f(x)d\mu \qquad (1)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Bu ta’rif korrekt, ya’ni kamchiliklardan holi bo‘lishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

1) Har qanday tekis yaqinlashuvchi va A to‘plamda integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi uchun (8.1) limit mavjud bo‘lishi kerak.

2) Berilgan f funksiya uchun (8.1) limit $\{f_n\}$ ketma-ketlikning tanlashiga bog‘liq emas.

3) Agar f funksiya sodda funksiya bo‘lsa, bu ta’rif 7-mavzudagi sodda funksiyalar uchun berilgan 2-ta’rif bilan ustma-ust tushishi kerak.

1-3 shartlarning bajarilishini ko‘rsatamiz.

1) Sodda funksiyalar uchun integralning A, B va C xossalaridan

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu-\int_A f_m(x)d\mu\right|\leq\left|\int_A (f_m(x)d\mu-f_n(x)d\mu\right|\leq\mu(A)\cdot\sup_{x\in A}\left|f_n(x)-f_m(x)\right|$$

tengsizlik kelib chiqadi.

2) (1) limitning $\{f_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog‘liq emasligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, f ga tekis yaqinlashuvchi ikkita $\{f_n\}$ va $\{f_n'\}$ ketma-

ketliklar uchun (1) limit har xil qiymatlar qabul qilsin. U holda $f_1, f_1', f_2, f_2',...., f_n, f_n',...$ ketma-ketlik f ga tekis yaqinlashadi, lekin bu ketma-ketlik uchun (1) limit mavjud emas. Bu esa hozirgina isbotlangan 1) shartga zid.

3) shartni isbotlash uchun ixtiyoriy n da $f_n(x) = f(x)$ deb olish yetarli.

2-ta'rif. Agar har bir $n \in N$ uchun (1) tenglik bilan aniqlanuvchi f_n^{but} sodda funksiya integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamda Lebeg ma'nosida integrallanuvchi deyiladi va uning integrali

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{but}(x)d\mu$$

1-teorema. *(Lebeg integralining $\sigma -$additivlik xossasi).* O'lchovli A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ o'lchovli to'plamning birlashmasidan iborat bo'lsin, ya'ni

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

va f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsin. U holda har bir A_n to'plam bo'yicha f funksiyaning integrali mavjud,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu$$

qator absolyut yaqinlashadi va quyidagi tenglik o'rinli

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f(x)d\mu. \qquad (2)$$

1-natija. Agar f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya A to'plamning ixtiyoriy o'lchovli A' qismida ham integrallanuvchi bo'ladi.

2-teorema. O'lchovli A to'plam o'zaro kesishmaydigan $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ o'lchovli to'plamning birlashmasidan iborat bo'lsin, ya'ni

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

Har bir A_n to'plamda f funksiya integranallanuvchi va

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|d\mu$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda A to‘plamda integranallanuvchi va (2) tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun f funksiyaning A to‘plamda integrallanuvchi ekanligini ko‘rsatish etarli.Avvalo isbotni B_i to‘plamlarda f_i qiymatlarni qabul qiluvchi f sodda funksiya uchun keltiramiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$B_i=\{x\in A: f(x)=f_i\}, \quad A_{ni}=A_n\cap B_i.$$

U holda quyidagi o‘rinli

$$\bigcup_n A_{ni}=B_i \text{ va } \int_{A_n}|f(x)|d\mu=\sum_i|f_i|\mu(A_{ni}).$$

(2) qatorning yaqinlashuvchiligidan

$$\sum_n\sum_i|f_i|\mu(A_{ni})$$

qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Yaqinlashuvchi musbat hadli qator hadlarining o‘rinlarini ixtiyoriy tartibda almashtirish mumkin. Shuning uchun

$$\sum_n\sum_i|f_i|\mu(A_{ni})=\sum_i|f_i|\sum_n\mu(A_{ni})=\sum_i|f_i|\mu(B_i).$$

Oxirgi qatorning yaqinlashuvchiligi

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_i f_i\mu(B_i)$$

integralning mavjudligini bildiradi.

Umumiy holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$son va f funksiya uchun shunday $\tilde{f}$ sodda funksiya mavjudki, barcha $x\in A$ uchun

$$\left|f(x)-\tilde{f}(x)\right|<\varepsilon. \qquad (3)$$

tengsizlik o‘rinli. U holda VII xossaga ko‘ra, har bir A_n to‘plamda $\tilde{f}$ funksiyaning integrali mavjud va

$$\int_{A_n}\left|\tilde{f}(x)\right|d\mu \leq \int_{A_n}\left|f(x)\right|d\mu + \varepsilon\mu(A_n)$$

tengsizlik o‘rinli. (2) qatorning yaqinlashuvchi ekanligidan, hamda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}\left|\tilde{f}(x)\right|d\mu$$

qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bundan $\tilde{f}$ sodda funksiyaning A da integrallanuvchi ekanligi, (3) tengsizlikdan esa f funksiyaning A to‘plamda integrallanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

3-teorema. *(Chebishev tengsizligi).* A o‘lchovli to‘plamda manfiymas φ funksiya va $c > 0$ son berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizlik o‘rinli

$$\mu(\{x \in A : \varphi(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu$$

Isbot. Aytaylik, $A_c = \{x \in A : \varphi(x) \geq c\}$ bo‘lsin. U holda

$$\int_A \varphi(x)d\mu = \int_{A_c}\varphi(x)d\mu + \int_{A\setminus A_c}\varphi(x)d\mu \geq \int_{A_c}\varphi(x)d\mu \geq c\cdot\mu(A_c).$$

Bu yerdan

$$\mu(A_c) \leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu$$

tengsizlik kelib chiqadi.

2-natija. Agar

$$\int_A |f(x)|d\mu = 0$$

bo‘lsa, u holda deyarli barcha $x \in A$ uchun $f(x) = 0$ bo‘ladi.

4-teorema. *(Lebeg integralining absolyut uzlyuksizlik xossasi).* Agar f funksiya A $(\mu(A) < +\infty)$ to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjudki, $\mu(D) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $D \subset A$ to‘plam uchun

$$\left|\int_D f(x)d\mu\right| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. Agar f funksiya A to‘plamda M soni bilan chegaralangan bo‘lsa, teoremani isbotlash uchun $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ deb olish yetarli, chunki

$$\left|\int_D f(x)d\mu\right| < M\cdot\mu(D) < M\cdot\delta = M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Endi f ixtiyoriy o‘lchovli va integrallanuvchi funksiya bo‘lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A_n = \{x\in A : n \le |f(x)| < n+1\},\quad B_n = \bigcup_{n=0}^{N} A_n,\quad C_n = A\setminus B_N.$$

U holda Lebeg integralining additivlik xossasiga ko‘ra,

$$\int_A |f(x)|d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|d\mu$$

tenglik o‘rinli. Berilgan $\varepsilon > 0$ son uchun N ni shunday tanlaymizki,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|d\mu = \int_{C_N}|f(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin va

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$$

bo‘lsin. Agar $\mu(D) < \delta$ bo‘lsa u holda

$$\left|\int_D f(x)d\mu\right| \le \int_D |f(x)|d\mu = \int_{D\cap B_N}|f(x)|d\mu + \int_{D\cap C_N}|f(x)|d\mu \le$$

$$\le (N+1)\mu(D) + \int_{C_N}|f(x)|d\mu < (N+1)\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lebeg integrali belgisi ostida limitga o‘tish.

1-teorema. (Lebeg). Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik A to‘plamning har bir nuqtasida f funksiyaga yaqinlashsa va barcha $n\in N$ lar uchun $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ tengsizlik bajarilib, φ fuhksiya A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, u holda limitik funksiya f ham A da integrallanuvchi bo‘ladi va

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu=\int_A f(x)d\mu$$

Isbot. Teorema shartidan limitik funksiya f uchun $|f(x)|\le\varphi(x)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi.Lebeg integralining VII xossasiga kora, f integrallanuvchi funsiya bo‘ladi.Endi $\varepsilon<0$ ixtiyoriy son bo‘lsin.Lebeg integralining absolyut uzlyuksizlik xossasiga ko‘ra shunday $\delta<0$ son mavjudki,agar $\mu(B)<\delta$ bo‘lsa,u holda

$$\int_B \varphi(x)d\mu<\frac{\varepsilon}{4} \qquad (9.1)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. 6.3-Egorov teoremasiga ko‘ra, B to‘plamni shunday tanlash mumkinki, $\{f_n\}$ ketma-ketlik $C=A\setminus B$ to‘plamda f funksiyaga tekis yaqinlashadi. Demak,shunday N mavjudki, ixtiyoriy $n>N$ lar va ixtiyoriy $x\in C$ uchun

$$|\ f(x)-f_n(x)\ |<\frac{\varepsilon}{2\mu(C)} \qquad (9.2)$$

tengsizlik bajariladi.U holda

$$\int_A f(x)d\mu-\int_A f_n(x)d\mu=\int_C[f(x)-f_n(x)]d\mu+\int_B f(x)d\mu-\int_B f_n(x)d\mu$$

bo‘ladi. Endi

$$|f(x)|\le\varphi(x),\ |f_n(x)|\le\varphi(x)$$

ekanligidan hamda (9.1) va (9.2) lardan

$$\left|\int_A f(x)d\mu-\int_A f_n(x)d\mu\ \right|\le$$

$$\le\int_C|f(x)-f_n(x)\ |d\mu+\int_B\ |f(x)\ |d\mu+\int_B\ |f_n(x)\ |d\mu\le\frac{\varepsilon}{2\mu(C)}\mu(C)+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Δ

1-natija. Agar $|f_n(x)\ |\le M=const$ va $f_n(x)\to f(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu=\int_A f(x)d\mu.$$

1-eslatma. Nol o‘lchovli to‘plamda funksiyaning qiymatini o‘zgartirish integral qiymatiga (VI xossaga qarang) ta’sir qilmaydi, shuning uchun 9.1-teoremada $\{f_n\}$ ketma- ketlikning f funksiyaga deyarli yaqinlashishini va $|f(x)| \le \varphi(x)$ tengsizlikning ham deyarli barcha x lar uchun bajarilishini talab qilish yetarli.

2- teorema. (Levi). A to‘plamda monoton

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le f_n(x) \le \ldots,$$

integrallanuvchi $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo‘lib, barcha $n \in N$ lar uchun

$$\int_A f_n(x)d\mu \le K$$

tengsizlik bajarilsin. U holda A to‘plamning deyarli hamma yerida $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ chekli limit mavjud hamda f funksiya A da integrallanuvchi va integral belgisi ostida limitga o‘tish mumkin, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

Isbot. Faraz qilaylik $f_1(x) \ge 0$ bo‘lsin. Umumiy hol $\overline{f_n}(x) = f_n(x) - f_1(x)$ almashtirish yordamida $\overline{f_1}(x) \ge 0$ holga keltiriladi.

$$\Omega = \{x \in A : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$$

to‘plamni qaraymiz. Agar biz $\Omega_n^{(r)} = \{x \in A : f_n(x) > r\}$ to‘plamni kiritsak, u holda quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\Omega = \bigcap_{r=1}^{\infty}\Omega^{(r)}, \Omega^{(r)} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n^{(r)}.$$

Chebishev tengsizligiga (8.3-teoremaga qarang) ko‘ra,

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \le \frac{1}{r}\int_A f_n(x)d\mu \le \frac{K}{r}.$$

Har bir tayinlangan r da $\Omega_1^{(r)} \subset \Omega_2^{(r)} \subset \ldots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \ldots$ munosabat o‘rinli. O‘lchovning uzlyuksizlik xossasiga ko‘ra

$$\mu(\Omega^{(r)}) = \lim_{n\to\infty}\mu(\Omega_n^{(r)}) \le \frac{K}{r}.$$

Har bir r uchun $\Omega \subset \Omega^{(r)}$ ekanligidan $\mu(\Omega) \le \frac{K}{r}$ ekanligi kelib chiqadi va r ixtiyoriy bo‘lgani uchun $\mu(\Omega) = 0.$

Shu bilan monoton $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik deyarli barcha $x \in A$ larda chekli $f(x)$ limitga ega ekanligi kelib chiqadi.

Endi $f^{but}(x) = [f(x)],\ A_r = \{x \in A:\ f^{but}(x) = r\},\ r = 0,1,2,...$ deb olamiz. f^{but} funksiyaning A to‘plamda integrallanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. $B_s = \bigcup_{r=0}^{s} A_r$ deymiz. B_s da f_n va f funksiyalar chegaralangan va har doim $f^{but}(x) \le f(x)$ bo‘lgani uchun 9.1- natijaga ko‘ra

$$\int_{B_s} f^{but}(x)d\mu \le \int_{B_s} f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x)d\mu \le K.$$

Ikkinchi tomondan,

$$\int_{B_s} f^{but}(x)d\mu = \sum_{r=0}^{s} r\mu(A_r) \le K.$$

Bu yig‘indining chegaralanganligi

$$\sum_{r=0}^{s} r\mu(A_r)$$

qatorning yaqinlashuvchiligini bildiradi. Demak,

$$\int_{A} f^{but}(x)d\mu = \sum_{r=0}^{\infty} r\mu(A_r).$$

Shunday qilib, f^{but} ning A da integrallanuvchi ekanligi isbotlandi. Δ

Teoremani monoton o‘smaydigan ketma – ketliklar uchun ham isbotlash mumkin.

2- natija. Agar $\psi_n(x) \ge 0$ bo‘lib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A} \psi_n(x)d\mu < +\infty$$

bo‘lsa, u holda A to‘plamning deyarli barcha nuqtalarida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

qator yaqinlashadi va qatorni hadlab integrallash mumkin, ya’ni

$$\int_A (\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu$$

tenglik o‘rinli.

3- teorema (Fatu). Agar manfiymas, o‘lchovli $\{f_n\}$ funksiyalar ketma – ketligi A to‘plamning deyarli barcha nuqtalarida f funksiyaga yaqinlashsa va

$$\int_A f_n(x) d\mu \le K$$

bo‘lsa, u holda f funksiya A to‘plamda integrallanuvchi va

$$\int_A f(x) d\mu \le K$$

tengsizlik o‘rinli.

Isbot. $\varphi_n(x) = \inf_{k \ge n} f_k(x)$ deb belgilaymiz. φ_n o‘lchovli, chunki

$$\{x : \varphi_n(x) < c\} = \bigcup_{k \ge n} \{x : f_k(x) < c\}.$$

Bundan tashqari $0 \le \varphi_n(x) \le f_n(x)$ bo‘lgani uchun φ_n integrallanuvchi va

$$\int_A \varphi_n(x) d\mu \le \int_A f_n(x) d\mu \le K.$$

Nihoyat, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \ldots \le \varphi_n(x) \le \ldots$ deyarli barcha x lar uchun

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Shuning uchun 9.2 – teoremani $\{\varphi_n\}$ ketma–ketlikka qo‘llab, 9.3 – teoremaning isbotiga ega bo‘lamiz.

3-teorema. Aytaylik A to‘plamning o‘lchovi cheksiz bo‘lsin. Cheklita nolmas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qiymatlarni qabul qiluvchi $f : A \to R$ sodda funksiya A da integrallanuvchi bo‘lishi uchun $A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\},\ k = 1,2,\ldots,n$ to‘plamlarning o‘lchovi chekli bo‘lishi zarur va etarli. Xususan $B \subset A$ to‘plamning xarakteristik funksiyasi - $\chi_B(x)$ integrallanuvchi bo‘lishi uchun $\mu(B) < \infty$ bo‘lishi zarur va yetarli.

1-ta’rif. Aytaylik A cheksiz o‘lchovli to‘plam , $f : A \to R$ sanoqlita $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ qiymatlarni qabul qiluvchi sodda funksiya bo‘lsin. Agar har bir nolmas y_k chun $A_k = \{x \in A: f(x) = y_k\}$ to‘plam chekli o‘lchovli bo‘lib, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n)$ qator absolyut yaqinlashuvchi bo‘lsa, $f: A \to R$ sodda funksiya A to‘plamda Lebeg ma’nosida integrallanuvchi deyiladi.

Ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi.

Yelementar hodisalar fazosi cheksiz bo‘lgan umumiy holda biz barcha hodisalarni qarash o‘rniga, hodisalarning algebralari yoki σ- algebralari deb ataluvchi ba’zi sinflarinigina qaraymiz. Shunday **qilib, e**lementar hodisalar fazosi Ω-ixtiyoriy to‘plamdan iborat va$\mathcal{A}$ ***e*** sa Ω to‘plamning qism to‘plamlaridan tashkil topgan birorta sistema bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar

1. $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{A}$;

2°. $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$ va $B \in \mathcal{A}$munosabatdan$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \in \mathcal{A}$ ekani kelib chiqsa;

3**.** $\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$ munosabatdan $\bar{A} \in \mathcal{A}$ ekani kelib chiqsa, u holda $\mathcal{A}$sistema **algebra** deb ataladi.

2-ta’rif.$\mathcal{A}$ - hodisalar algebrasi, $P = P(A); A \in \mathcal{A}esa\mathcal{A}$da aniqlangan va [0;1] to‘plamdan qiymatlar qabul qiladigan to‘plam funksiyasi bo‘lsin. Agar $\mathcal{A}$ dan olingan va birgalikda bajarilmaydigan ixtiyoriy $\boldsymbol{A}$ va$\boldsymbol{V}$ hodisalar uchun

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\mathcal{A}$ da **chekli additiv o‘lchov** kiritilgan deyiladi.$\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$ shartni qanoatlantiruvchi chekli additiv o‘lchovga esa$\mathcal{A}$ da aniqlangan **chekli additiv ehtimollik o‘lchovi** deyiladi.

Agar$\mathcal{A}$ hodisalar algebrasi bo‘lsa, u holda$\boldsymbol{A} \in \mathcal{A}$**v a** $\boldsymbol{B} \in \mathcal{A}$hodisalar uchun$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \overline{\bar{\boldsymbol{A}} \cup \bar{\boldsymbol{B}}}$va $A \backslash B = A \cap \bar{B}$ munosabatlarga ko‘ra $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \in \mathcal{A}$ va $A \backslash B \in \mathcal{A}$ ekanligi kelib chiqadi. Shu kabi 1^0 va 3^0 shartdan $\emptyset = \bar{\Omega} \in \mathcal{A}$, yani$\emptyset \in \mathcal{A}$ ***e***kanligi kelib chiqadi.

Hodisalarning$\mathcal{A}$ algebrasi ba’zan hodisalar halqasi deb ham ataladi, chunki$\mathcal{A}$ da halqaning barcha shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita algebraik amal (qo‘**shish** va ko‘paytirish:∪; ∩**)** kiritilgan. Hodisalarning$\mathcal{A}$algebrasi,$\mathcal{A} \cap \boldsymbol{\Omega} = \mathcal{A}$ bo‘lgani uchun birlik halqani tashkil etadi.

Algebra tashkil qiluvchi hodisalar sistemasining “eng kichigi” $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \{\emptyset; \boldsymbol{\Omega}\}$ekanligi ravshan. Shu bilan birga $\Omega$to‘plamning barcha qism to‘plarnlaridan tashkil topgan hodisalar sistemasi$\mathcal{M}(\Omega)$ ham algebradan iborat ekanligini tekshirish mumkin.

Agar Ω chekli fazo bo‘lsa, u holda uning barcha qism to‘plamlaridan tashkil topgan$\mathcal{M}(\Omega)$sistema ham chekli to‘plam bo‘ladi.

1-misol Tajriba bir jinsli simmetrik tangani ikki marta tashlashdan iborat bo‘lsin. U holda elementar hodisalar fazosi $\Omega = \{gg, gr, rg, rr\}$ 4 ta elementdan tashkil topgan chekli to‘plamdan iborat bo‘ladi va $\mathcal{M}(\Omega)$ algebraning barcha hodisalarini yozib chiqish mumkin:

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{\emptyset; \{\mathrm{gg}\};\ \{\mathrm{gr}\};\ \{\mathrm{rg}\};\ \{rr\};\ \{\mathrm{gg},\mathrm{gr}\};\ \{\mathrm{gg},\mathrm{rg}\};\ \{\mathrm{gg},\mathrm{rr}\};\ \{\mathrm{gr},\mathrm{rg}\};$$
$$\{\mathrm{gr},\mathrm{rr}\};\ \{\mathrm{rg},\mathrm{rr}\};\ \{\mathrm{gg},\mathrm{gr},\mathrm{rr}\};\ \{\mathrm{gg},\mathrm{rr},\mathrm{gr}\};\ \{\mathrm{gg},\mathrm{rr}\ ,\mathrm{gr}\};\ \{\mathrm{gr},\mathrm{rg},\mathrm{rr}\};\ \Omega\}$$

Bu misolda $\mathcal{M}(\Omega)$ algebra $2^4 = 16$-ta elementar hodisalardan tashkil topgan. Agar Ω to‘plam$\boldsymbol{N}$ ta elementdan tashkil topgan bo‘lsa, u holda $\mathcal{M}(\Omega)$ to‘plam 2^Nta elementdan iborat. Haqiqatan ham 0 va 1 lardan tashkil topgan uzunliklari$\boldsymbol{N}$ ga teng bo‘lgan ketma-ketliklarning soni 2^N ga teng va bunday ketma-ketliklar bilan $\mathcal{M}(\Omega)$ orasida o‘zaro birqiymatlik moslik o‘rnatish mumkin ($2^N = C_N^0 + C_N^1 + \ldots + C_N^N$).

3-ta’rif. Agar Ω to‘plamning qism to‘plamlaridan tashkil topgan hodisalarning $\boldsymbol{\mathcal{A}}$-algebrasida (2° shart o‘rnida):

2^*. $A_n \in \boldsymbol{\mathcal{A}}; \boldsymbol{n = 1, 2}, \ldots$ **dan** $\bigcup_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ ekanligi kelib chiqsa, u holda**$\boldsymbol{\mathcal{A}}$-algebra** yoki **Borel algebrasi** deyiladi. Ω fazo va uning qism to‘p-lamlaridan tashkil topgan $\boldsymbol{\mathcal{A}\sigma}$-algebra birgalikda **o‘lchovli fazo** deb ataladi va $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}})$orqali belgilanadi.

2-misol. 1) $\Omega = R = (-\infty; +\infty)$ sonli to‘g‘ri chiziq bo‘lsin. $\mathcal{F}_0$ orqali chekli yoki cheksiz kesmalardan, intervallar va yarim intervallardan tashkil topgan to‘plamlar sistemasini belgilaymiz. $\mathcal{F}_0$ algebra tashkil qilmaydi. Masalan, $A = (-\infty; -1)$ va $B = (1; +\infty)$ to‘plamlar yig‘indisi $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ to‘plam $\mathcal{F}_0$ sistemaga kirmaydi. Agar $\mathcal{F}_0$ni, undan olingan to‘plamlarning barcha chekli yig‘indilari bilan to‘ldirsak, u holda hosil bo‘lgan yangi to‘plamlar sistemasi $\mathcal{F}$ algebrani tashkil qiladi.

$\mathcal{F}$ algebrani o‘z ichiga olgan barcha -algebralani qaraymiz. $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ va $\mathcal{M}(\Omega)\sigma$ -algebrani tashkil qilgani sababli, $\mathcal{F}$ algebrani o‘z ichiga olgan kamida bitta σ-algebra mavjud. Bunday σ - algebralarning kesishmasi (ya’ni σ-algebralarning barchasiga tegishli bo‘lgan to‘plamlar sinfi) yana σ -algebrani tashkil qiladi. Bu barcha intervallarni o‘z ichiga olgan minimalσ-algebra bo‘lib, **Borel σ - algebrasi deyiladi** va $\mathcal{B} = \mathcal{B}(R)$ orqali belgilanadi.

4-ta’rif. Bizga $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}})$-o‘lchovli fazo berilgan bo‘lsin. Agar$\boldsymbol{\mathcal{A}}\sigma$-algebrada aniqlangan P sonli funksiya uchun quyidagi aksiomalar o‘rinli bo‘lsa:

K1. Istalgan$\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ uchun$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \geq \boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{P}$ ning nomanfiyligi);

K2. $P(\Omega) = 1$ (P ning normalanganligi);

KZ. Juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ hodisalar ketma-ketligi uchun

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$ (P ning sanoqli additivligi),

u holda$\boldsymbol{\mathcal{A}}\sigma$-algebrada $\boldsymbol{P}$ ehtimollik o‘lchovi yoki ehtimol kiritilgan deyiladi.

$(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \boldsymbol{P})$ uchlikka ehtimollar fazosi yoki ehtimollik modeli deyiladi, bu yerda$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ hodisalarning σ -algebrasi, $P\boldsymbol{\mathcal{A}}$ da aniqlangan ehtimol,$P(A)(\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{A}})$songa $\boldsymbol{A}$ hodisaning ehtimoli deyiladi.

Demak, ehtimollik modelini yaratish o‘lchovli fazoda manfiy bo‘lmagan, sanoqli additiv Ω fazoning o‘lchovi 1 bo‘lgan o‘lchov kiritishdan iborat ekan.

Yehtimollar nazariyasining, yuqorida kiritilgan, aksiomatikasini A.N.Kolmogorov taklif qilgan. K1, K2, KZ aksiomalar sistemasi, ularni qanoatlantiruvchi real obektlar mavjud bo‘lgani sababli o‘zaro zid emas

Nazorat savollari:

1. $A \subset R$ ixtiyoriymusbato‘lchovlito‘plambo‘lsin, uholdashunday $x, y \in A$ mavjudki $x - y \in Q$ bo‘ladi. Isbotlang.

2. R daginolo‘lchovlito‘plamlarsistemasi σ - halqabo‘lishiniisbotlang.

3.O‘lchovlito‘plamlarsistemasi $U(R)$ halqatashkilqiladi. Isbotlang.

4. Cheklisondagio‘lchovlito‘plamlarningbirlashmasivakesishmasiyanao‘lchovlito‘plamdir.Isbotlang.

3-mavzu: Invariant o‘lchovlar.

REJA:

3.1. Invariant o‘lchovlar.
3.2.Ergodik teoremalar.
3.3.Gibbs o‘lchovlari (fizikada qo‘llanishi).

Tayanch iboralar: o‘lchov, chekli o‘lchov, Invariant o‘lchov, Gibbs o‘lchov

Berilgan model uchun topiladigan Gibbs o‘lchovlari sonini topishda algebraning asosiy teoremasidan foydalaniladi. Shu maqsadda, ushbu bobda algebraning asosiy teoremasini bayon etamiz.

1.-teorema: Darajasi birdan kichik bo‘lmagan haqiqiy koeffitsientli har qanday ko‘phad kamida bitta kompleks ildizga ega.

Isbot: Toq darajali ko‘phad ildizga ega ekanligidan faqat teorema uchun ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, n- darajali f(x) ko‘phad berilgan bo‘lib, unda $n = 2^k * m$bo`lsin ($k \geq o, m$-toq son).Isbotniga nisbatan induksiya asosida olib boramiz. $m = 1$ vabo‘lsa, $n = 1$ bo‘lib, teorema chin.

Yendi teoremani darajasi 2^{k-1} $(k > 0)$ ga bo‘linib,2^kga bo‘linmaydigan barcha haqiqiy koeffitsientli ko‘phadlar uchun to‘g‘ri deb faraz qilamiz.

Har qanday ko‘phad uchun yoyilma maydon mavjud edi. Shunga ko‘ra biror P maydonni $f(x)$ ko‘phadni kompleks sonlar maydoni ustidagi yoyilma maydoni deb olamiz.$f(x)$ ko‘phad yoyilma maydonda n ta $\alpha_i$ildizga ega bo‘lganidan $\alpha_i \in P$ $(i = \overline{1,n})$ bo‘ladi..Endi P maydonning elementlari va $\forall \boldsymbol{c}$ haqiqiy sondan foydalanib,

$$\beta_{i,j} = \alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i+\alpha_j)$$

ko‘rinishda tuzilgan elementlarni qaraymiz. O‘z-o‘zidan ma’lumki,$\beta_{i,j} \in P$ larning soni n ta elementdan ikkitadan gruppalashlar soniga, ya`ni

$$n(n-1)/2$$

ga tengdir.

Ikkinchi tomondan

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k*m(2^k*m-1)}{2} = 2^{k-1}*m(2^k*m-1) = 2^{k-1}*q` \quad (1)$$

Bu yerda m va $2^k m - 1$ lar toq son bo‘lganidan

$$q` = m(2^k m - 1)$$

ham toq sondir. Endi ildizlari faqat $\beta_{i,j}$ lardan iborat bo`lgan va $P[x]$ halqaga tegishli

$$G(x) = \prod_{1=i<j=2}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(x - \beta_{i,j}\right) \quad (2)$$

ko‘phadni tuzib olamiz. Bu ko‘phadning koeffitsientlari $\beta_{i,j}$ lardan tuzilgan elementlar simmetrik ko‘phadlardan iborat bo‘ladi.Agar $\beta_{i,j}$ larni almashtirsakning koeffisientlari ham $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ larga bog‘liq bo‘lgan simmetrik ko‘phadlar bo‘lib bu simmetrik ko‘phadlarning koeffitsientlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘ladi. g(x) ning koeffitsientlari ham haqiqiysonlar bo‘ladi. g(x) ko‘phadning darajasi bu $\beta_{i,j}$ ildizlar soniga teng bo‘lgani uchun va (2)ga asosan bu daraja 2^{k-1}ga bo‘linib,2^kga bo‘linmaydi.Induktiv farazimizga asosan $g(x)$ ning $\beta_{i,j}$, $(i < j)$ ildizlaridan kamida bittasi kompleks son bo‘ladi.

Demak,

$$\beta_{i,j} = \alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i+\alpha_j)$$

yelementlar uchun shunday bir juft $(i_1 j_1)$ nomer mavjud ekanki, bu nomerlarga mos keluvchi $\beta_{i,j}$ kompleks sonlar bo`lar ekan.

Agar $c \neq c_1$ haqiqiy sonni oladigan bo‘lsak, unga mos keluvchi $(i_2 j_2)$ nomerlar ham $(i_1 j_1)$ bilan ustma – ust tushmaydi.

Demak,shunday o‘zaro har xil (c_1 dan c_2)haqiqiy sonlar mavjudki bularga bir xil (i, j) juftlar mos keladi, ya’ni

$$\begin{cases} \alpha_i\alpha_j + c_1(\alpha_i + \alpha_j) = a \\ \alpha_i\alpha_j + c_2(\alpha_i + \alpha_j) = b \end{cases} \qquad (3)$$

bo`lib $a$va b lar kompleks sonlardir.

Asosiy teoremaning natijalari.

1- natija. Kompleks sonlar maydoni ustida n-darajali ko`phadning rosa n ta ildizi bor.

2-natija. n darajali $f(x)$ ko`phad $x$ ning $n$ tadan ortiq har xil qiymatlarida nolga teng bo`lsa, u holda ko`phad $f(x)$ nol ko`phad bo`ladi.

3-natija. Darajalari n dan yuqori bo`lmagan ikki $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko`phad x ning n tadan ortiq har xil qiymatlarida bir-biriga teng bo`lsa,$f(x)$ va $\varphi(x)$o`zaro teng ko`phadlar bo`ladi.

1-ta`rif.X ixtiyoriy to‘plam va uning qism to‘plamlaridan tuzilgan biror E to‘plamlar algebrasi berilgan bo‘lsin. Aniqlanish sohasi e bo‘lgan m(A) to‘plam funksiyasi uchun:

- ixtiyoriy $A \in E$ uchun $m(A) \geq 0$;
- $m(A)$sanoqli-additiv.

shartlari bajarilsa, m to‘plam funksiyasi X da chekli o‘lchov deyiladi.

Demak, o‘lchov deganda qiymatlari chekli va musbat bo‘lgan sanoqli-additiv to‘plam funksiyasini tushunar ekanmiz.

Qulaylik uchun kelgusida "chekli o‘lchov" o‘rniga, oddiy qilib, o‘lchov so‘zi ishlatiladi.

O‘lchovlarning ba`zi xossalarini ko‘rib o‘taylik.

1)Bo`sh to‘plamning o‘lchovi nolga teng $m(\emptyset) = 0$

2)Agar Ava B to‘plamlar E ning elementlari bo‘lib, $B \subset A$ Bo‘lsa, u holda $m(B) \leq m(A)$ bo‘ladi (o‘lchovning monotonlik xossasi).

$m(A) - m(B) = m(A \backslash B) \geq 0.$

3)Har bir A uchun $m(A) \leq m(X)$ o‘rinli. Bu 2) dan kelib chiqadi.

Shunday qilib, berilgan o‘lchov to‘plamlar algebrasi E da chegaralangan ekan.

4)Agar e ning ixtiyoriy A elementi uchun

$$A \subset \cup_i A_i$$

bo‘lib, bu yerdagi qo‘shiluvchilarning soni chekli yoki sanoqli bo‘lsa, u holda

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bu xossani isbotlash uchun xar bir A_i to‘plamdan A_i qism to‘plamlarni quyidagicha ajratib olamiz

$B_1 = A_1 \cap A, B_2 = (A_2 \setminus A_1) \cap A$,

$$B_3 = [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \cap A, \ldots$$

Ko`rinib turibdiki, B_i lar E ning elementi va o‘zaro kesishmaydi.Qolaversa, $A \supset \cup B_i$ endi A to‘plam $\cup B_i$ birlashmaga tekshirish qoldi.Agar $x \in A$ bo‘lsa u holda shunday bir nomeri topiladiki shartga ko‘ra $x \in A_i$ bo‘ladi. Agar x bir nechta $A_j$larga tegishli bo‘lib qolsa u xolda bu indekslardan eng kichigi i bo‘lsin deymiz.Bundan $x \in B_i$ bo‘ladi va kerakli munosabat kelib chiqadi.

endi o‘lchovning sanoqli –additivligini va monotonligini e’tiborga olsak ,

$$m(A) = \sum_i m(B_i) \leq \sum_i m(A_i)$$

bo‘ladi. O‘lchovning uzluksizligi isbotlanadi.

Quyidagicha belgilashlar qilib olamiz, ixtiyoriy fiksirlangan $x^0 \in V$ nuqta uchun bu yerda $d(x, y)$ - $\Im^k$ daraxtning x va y uchlari orasidagi masofa, ya’ni x va y uchlarni tutashtiruvchi yo‘ldagi (yeng qisqa yo‘ldagi) qirralar sonidir. Faraz qilaylik, $\Phi = \{-1, 1\}$ va $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ –konfiguratsiya, ya’ni $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$ hamda $A \subset V$ bo‘lsin. Ω_A bilan A to‘plamda aniqlangan va $\Phi = \{-1, 1\}$ to‘plamdan qiymat qabul qiluvchi barcha konfiguratsiyalar fazosini belgilaymiz.

IzingmodeliGamiltonianiniqaraymiz, uquyidagichabo‘lishibizgama’lumedi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y> \in L} \xi_{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{4}$$

bu yerda, $J \in R, < x, y >$ -eng yaqin qo‘shnilar.

Faraz qilaylik, $h_x \in R,\ x \in V$ bo‘lsin. Har bir n uchun μ_n o‘lchovni Ω_{V_n} da quyidagicha aniqlaymiz :

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\{-\beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\}, \tag{5}$$

bu yerda $\beta = \frac{1}{T}$ $(T > 0$ - temperatura), $\sigma_n = \{\sigma(x),\ x \in V_n\} \in \Omega_{V_n}$, Z_n^{-1} esa normallashtiruvchi ko‘paytuvchi.

$$H(\sigma_n) = -J \sum_{<x.y> \in L_n} \xi_{\sigma_n(x)\sigma_n(y)} \ .$$

$\mu_n(\sigma_n),\ n \geq 1,$ o‘lchov uchun muvofiqlik sharti quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\sum_{\sigma^{(n)}} \mu_n\left(\sigma_{n-1}, \sigma^{(n)}\right) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}) \ , \tag{6}$$

bu yerda $\sigma^{(n)} = \{\sigma(x), x \in W_n\}$.

Faraz qilaylik, $\mu_n,\ n \geq 1$lar Ω_{V_n} dagi o‘lchovlar ketma-ketligi bo‘lsin hamda bu ketma-ketlik (6) muvofiqlik shartini bajarsin. U holda Kolmogorov teoremasiga ko‘ra $\Omega_V = \Omega$da aniqlangan limit o‘lchov mavjud va u yagona bo‘ladi, (Uni limit Gibbs o‘lchovi deb ataladi) bu o‘lchov, har bir $n = 1,2,...$uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiradi:

$$\mu(\sigma_n) = \mu_n(\sigma_n) \ .$$

Gibbs o‘lchovlariga oid ilmiy maqolalar va risolalardan bizga ma’lumki, (5) o‘lchov (6) shartni faqat va faqatgina bajaradiki, bunda quyidagi $h = \{h_x, x \in G_k\}$ qiymatlar ushbu tenglikni bajaradi

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \tag{7}$$

bu yerda $S(x)$ -to‘plam $x \in V$ nuqtaning «bevosita avlodlari» to‘plami va $f(x,\theta) = arcth(\theta\, th\, x),\ \theta = th(J\beta),\ \beta = \frac{1}{T},\ T > 0$ temperatura.

Xuddi shunga o‘xshash g‘oyalarni quyidagi modellar uchun ham keltirish mumkin.

1) Keli daraxtida o‘zaro ta’siri 2 ga teng bo‘lgan Potts modelining Gamiltonyani quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\substack{<x,y> \\ x,y\in V}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V \\ d(x,y)=2}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

bu yerda

$$J_1 \text{ , } J_2 \in R \text{ va } \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} = \begin{cases} 1, & \sigma(x) = \sigma(y) \\ 0, & \sigma(x) \neq \sigma(y) \end{cases}$$

$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$ -Kroniker simvoli deyiladi.

Potts modeli uchun topilgan asosiy holatlar Rozikov va Botirovlar tomonidan Throry Mathematical Physics nomli journalda nashr etilgan. Bu maqolada ikkinchi tartibli Keli daraxtida aniqlangan spin qiymati uchga teng bo‘lgan Potts modeli uchun asosiy holatlar va ularning sonlari topilgan.

Roziqov tomonidan Kroniker simvolining umumlashmasi quyidagi funksiya ko‘rinishida kiritilgan.

$$U(\tau a) : \Omega a \rightarrow \{|A|-1, |A|-2, ... |A| - \min\{|A|, |\Phi| \ \}$$

bu quyidagicha ifodalanadi:

$$\mathrm{V}\ (\tau a\ ) = |A| - |\tau a \cap \phi| - \tau(x), x \ni A$$

Masalan, agar G_A o‘zgarmas konfiguratsiya bo‘lsa u holda $|\tau A \cap \Phi| = 1$ bo‘ladi.

Shuni ta’kidlash lozimki agar $|A| = 2$ bo‘lib A= $\{x, y\}$ bo‘lsa, u holda:

$U(\{\tau(x), \tau(y)\ \}) = \sqrt{\tau(x)\tau(y)}$ bu yerda (a) – a ning butun qismi.

$$\sqrt{\tau(x)\tau(y)} = \begin{cases} 1, \tau(x) = \tau(y) \\ 0, \tau(x) \neq \tau(y) \end{cases}$$

$r \ni N$ va $r^1 = \left[\frac{r+1}{2}\right]$ bo‘lsin bu yerda $(a) -$ a ning butun qismi. μ_r bilan barcha

$(x) = \{y \ni V : d(x, y) \leq r^1 \ \}$ radiusi r^1 bo‘lgan barcha sharlar to‘plamini belgilaymiz, ya’ni

$$\mu_r = \{br(x) : x \ni V \ \}$$

Roziqov tomonidan quyidagi gamiltanian kiritilgan:

$$H(T)=-J\sum_{b\ni Mr}V(\tau b) \text{ bu yerda } J\in R$$

Bu model uchun Keli daraxtining asosiy holatlari va ularning soni topilgan hamda Botirov tomonidan Mathematical Notes nomli jurnalda natijalar nashr etilgan.

2) q- komponentli model. Bu modelning Gamiltanian ya`ni quyidagicha aniqlanadi

$$H(G)=\sum_{<x,y>eL}\lambda(G(x)G(y))+\sum_{xev}h(G(x))$$

bu yerda,

$$\lambda(V_i,V_j)=\lambda_{ij},\ i,j=1,2,$$

q- esa konfiguratsiyaning qabul qiladigan spin qiymatlari:

$$q*q,h(Vj)\in R,\ \ j=1,2,....,q$$

va ($\tau\in\Omega$) simmetrik matritsani tashkil qiladi. Ω - barcha konfiguratsiyalar to‘plami.

Bu model uchun Rozikov va Botirovlarning olingan natijalari 2007 yilda Journal Statistical Mechanics: Theory and exprement nomli jurnalda nashr etilgan.

3) 2- o‘lchovli nazariya kvant maydonida panjarali model $d=2$ bo‘lsin. H-qadam bilan Z^2 panjarani qaraymiz. Mo Gans statsionar taqsimotiga mos keluvchi gamiltanian quyidagicha aniqlanadi.

$$\frac{1}{2}\sum_{ч}\left[\left(\vartheta(x_1+h,x_2)-\vartheta(x_2,x_2+h)-\vartheta(x_2,x_2)\ \right)^2+m^2{}_0h^2\vartheta^2(x_1,x_2)\right]$$

$X=(x_1,x_2)$ bu yerda $h\in Z^2$ dan olingan nuqta.

Keli daraxtida spin qiymatlari $\tau(x)x\ni V$ F=$\{\pm1,\pm2,...,\pm q\}$ to‘plam elementlari qabul qiluvchi λ modellarning gamiltaniani quyidagicha aniqlanadi.

$$\text{H (T)=H}\lambda(\tau)=\sum_{<x,y>\ni L}\lambda(\tau(x),\tau(y),J) \text{ bu yerda J}\in R^n, n\in N$$

barcha yon qo‘shnilar bilan jamlanuvchidir.

Bu model uchun, M. Rakhmatullaev tomonidan kuchsiz asosiy holatlar tushunchasi kiritilgan va olingan natijalar Theory Mathematical Physics nomli jurnalda nashr etilgan.

4) 2- o‘lchovli panjarada Izing modeli quyidagicha aniqlanadi:

$$H_0 = J \sum_{At - t^{V}11=1} \vartheta(t^1)\vartheta(t) = \pm 1, t^1, t^{11} \ni z^2$$

Agar $J > 0$ bo‘lsa ferramagnit holati bo‘ladi, bu yerda 2 ta davriy

$\vartheta^+ = \{\vartheta(t) = 1\}$, $\vartheta = \{\vartheta(t) = -1\}$ asosiy holat bo‘ladi. Keli daraxtining birlik sharida energiyasini hisoblash:

$$\sqrt{\tau(x)\tau(y) = \begin{cases} 1, agar\, \tau(x = \tau(y) \\ 0, agar\, \tau(x) \pm \tau(y) \end{cases}}.$$

Nazorat savollari:

1. Keli daraxtida o‘zaro ta’siri 2 ga teng bo‘lgan Potts modelining Gamiltonyani ko‘rinishini ayting.
2. **q- komponentli modelini kurinishini yting**.
3. Mo Gans statsionar taqsimotini ayting

4-mavzu: Biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.

REJA:

4.1. Biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.
4.2. Biologik dinamik sitemalar ustidagi o‘lchovlarga misollar.
4.3. Noarximed fazolarda o‘lchovlar va ularning tatbiqlari.

Tayanch iboralar: kompakt, σ- kompakt , topologik fazo, o‘lchov, μ (f) integral Riman yig‘indisi.

Noarximed qiymatli o‘lchovga nisbatan integrallashning Monna-Springer nazariyasi.

X orqali nol o‘lchamli local kompakt σ- kompakt topologik fazoni, $\Delta(x)$ orqali X to‘plamning kompakt ochiq qism to‘plamlari halqsini, $c_c(x)$ orqali esa kompakt tashuvchili $f: X \to K$ uzluksiz funksiyalar fazosini belgilaymiz. Bu fazoda tekis normani

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|_K \qquad (1)$$

kabi kiritamiz.

1-ta’rif. Agar K-chiziqli $\mu: C_c(x) \to K$ funksional uchun $\forall A \in \Delta(x)$ uchun shunday $M_A \geq 0$ soni topilib, $\mathrm{suppf} \subset A$ bo‘ladigan barcha $\boldsymbol{f \in C_c(x)}$ lar uchun

$$|\mu(f)|_K \leq M_A \|f\| \qquad (2)$$

tengsizlik bajarilsa, μ ga o‘lchov deyiladi.

2-ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas $M \geq 0$ soni topilib,

$$|\mu(f)|_K \leq M\|f\|, \ f \in C_c(x) \qquad (3)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa,o‘lchovga chegaralangan deyiladi.

Chegaralangan μ o‘lchovning normasi $C^{'} f(x)$ ikkili fazosidagi elementning normasi kabi aniqlanadi:

$$\|\mu\| = \sup_{f \neq 0} \|f\|^{-1} |\mu(f)|_K \qquad (4)$$

Istalgan $B \subset X$ qism to‘plam uchun B to‘plamning xarakteristik funksiyasi Φ_B orqali belgilanadi. Agar $B \in \Delta(x)$, u holda $\Phi_B \in C_c(x)$. Har bir μ o‘lchov $\mu: \Delta(x) \to K, \mu(A) = \mu(\Phi_A)$ to‘plam funksiyasini aniqlaydi.

1-teorema. Faraz qilaylik F-X topologiya bazasi bo‘lib, kompakt ochiq qism to‘plamlardan tashkil topgan bo‘lsin va $\mu: F \to K$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.

1.Faraz qilaylik $A_1, ..., A_k \in F, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$ va $A = \bigcup_{j=1}^{k} A_i \in F$. (5) bo‘lsin. U holda

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \qquad (6)$$

2.Faraz qilaylik $\{A\}, A \in F$ -fiksirlangan $B \in \Delta(x)$ to‘plamning qism to‘plamlari to‘plami bo‘lsin. U holda $\{|\mu(A)|_K\}$-Kda chegaralangan bo‘ladi. U holda μ to‘plam funksiyasini $C_c(x)$ o‘lchovgacha davom ettirish mumkin. Aksincha,har bir μ o‘lchov 1 va 2 shartlarni qanoatlantiradi. 1 va 2 shartlarni qanoatlantiruvchi $\mu : F \to K$ funksiya uchun μ(f) integral Riman yig‘indisining limiti sifatida aniqlanadi,ya’ni

$$S_u(f) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i)\mu(A_i), \tag{7}$$

bu yerda $u = (U, a_1,..., a_k), U = (A)_{i=1}^{k} - B = \sup pf$ to‘plamning qoplamasi, $A_i \in F, A_i \cap A_j =$ Ø$, i \neq j, a_j \in A_j$.

$C_c(x)$ fazoda haqiqiy qiymatli N_f funksiyani kiritamiz:

$$N_\mu(f) = \sup_{g\neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(fg)|_K, g \in C_c(X) \tag{8}$$

Bu $C_c(x)$ dagi noarximed yarim normasi bo‘lib,quyidagi xossalarga ega:

a) $|\mu(f)|_K \leq N_\mu(f)$;

b) $N_\mu(fg) \leq N_\mu(f)\|g\|$ (Telder tengsizligi).

Agar $U_i \cap U_j =$ Ø$, i \neq j, U_i \in \Delta(x)$ bo‘lsa, $U = (U_i) - X$ uchun qoplama deyiladi. $f \in C_c(x)$ uchun

$$N_\mu(f, U) = \sup_i \left(\sup_{x\in U_i} |f(x)| N_\mu(\phi u_i) \right) \tag{9}$$

deb olamiz. U holda

$$N_\mu(f) = \inf_U N_\mu(f, U). \tag{10}$$

$x \in X$ uchun $\boldsymbol{N_\mu(x) = \inf N_\mu(\Phi_U)}$ deb olamiz,bu yerda $\{U\}$-x nuqtaning kompakt ochiq atroflari sistemasi.

2-teorema. $f \in C_c(x)$ bo‘lsin. U holda

$$N_\mu(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|_K N_\mu(x). \tag{11}$$

$\forall \alpha > 0$uchun

$$X_\alpha = \{x \in X : N_\mu(x) \geq \alpha\}, X_+ = \cup_{\alpha>0} X_\alpha$$

$$X_0 = \{x \in X : N_\mu(x) \geq 0\}, X = X_+ \cup X_0. \tag{12}$$

ni hosil qilamiz. (1) dan foydalanib, $\forall f : X \to K$ funksiya uchun $N_{\mu}(f)$ ni aniqlash mumkin,xususan, $N_{\mu}(x) = N_{\mu}(\Phi\{x\})$.

3-ta'rif. Agar $N_{\mu}(f) = 0$ bo'lsa,f funksiya μ -e'tiborsiz deyiladi.

1-tasdiq. f funksiya μ -e'tiborsiz bo'lishi uchun istalgan x, $f(x) \neq 0$ uchun $N_{\mu}(f) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

4-ta'rif. Agar (f-g) funksiya μ -e'tiborsiz bo'lsa , f va g funksiyalar ekvivalent deyiladi.

$F(\mu)$ orqali $N_{\mu}(f) < \infty$ bo'ladigan μ -ekvivalent f funksiyalarning fazosini belgilaymiz.

5-ta'rif. μ o'lchovga nisbatan inegrallanuvchi funksiyalarning $L^1(x, \mu)$ sinfi $F(\mu)$ da $c_c(x)$ fazoning yopig'I sifatida aniqlanadi.

2-tasdiq. $f \in L^1(x, \mu)$ bo'lsin. U holda f funksiyaning istalgan X_{α} to'plamdagi qisqartmasi uzluksiz bo'ladi.

6-ta'rif. Agar quyidagi shartlar bajarilsa, $f : X \to K$ funksiya N_{μ} ga nisbatan absolyut uzluksiz deyiladi:

a) $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ soni topilib, $N_{\mu}(\Phi_U) < \delta, U \in \Delta(x)$ lar uchun $N_{\mu}(f\Phi_U) < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi;

b) $\lim_V N_{\mu}(f\Phi_U) = 0,$ bu yerda V-X to'plamning kompakt qism to'plamlari to'ldiruvchisi bo'ladigan to'plamlar filtri.

3-teorema. $f : X \to K$ funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun

a)f funksiyaning istalgan X_{α}, α dagi qismi uzluksiz

b) f funksiya N_{μ} ga nisbatan uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

3-tasdiq. $f \in L^1(x, \mu)$ bo'lsin. U holda

$$N_{\mu}(f) = \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(f, g)|_K, g \in C_C(x) \qquad (13)$$

$\overline{A}$ orqali X to'plamnig A qism to'plamining to'ldiruvchisi belgilangan, $\overline{A} = A \setminus A.$

7-ta'rif. Agar istalgan $B \subset K$ kompakt va $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday $B_1 \subset B$ kompakt t'plam topilib, $N_\mu(B \subset \overline{B_1}) < \varepsilon$ va f funksiyaning B_1dagi qismi uzluksiz bo'lsa,u holda $f : X \to K$ funksiya μ-o'lchovli deyiladi.

4-tasdiq. $f : X \to K$ funksiya μ-o'lchovli bo'lishi uchun $\forall \alpha > 0$uchun f funksiyaning X_α dagi qismi uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

8-ta'rif. Agar $\forall B$ kompakt to'plam va $\forall \varepsilon > 0$ Uchun B kompakt to'plamning B_1 kompakt qism to'lami topilib $N_\mu(B \subset \overline{B_1}) < \varepsilon$ va $\{f_n\}$ ketma-ketlik B_1da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa,Xda μ-o'lchovli bo'lgan $\{f_n\}$ funksiyalar ketma-ketligi Yegorov bo'yicha yaqinlashuvchi deyiladi.

5-tasdiq. Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik istalgan $X_\alpha, \alpha > 0$da tekis yaqinlashuvchi bo'lsa, $\{f_n\}$ ketma-ketlik Yegorov bo'yicha yaqinlashuvchi bo'ladi.

4-teorema.*(Monna-Springer integrali uchun limit teoremasi).* $\{f_n\}$- Yegorov bo'yicha yaqinlashuvchi integrallanuvchi funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin. Faraz qilaylik shunday g integrallanuvchi g funksiya topilib,barcha $x \in X$ larda $|f_n(x)|_K \le |g(x)|_K$ bo'lsin. U holda f limitik funksiya integrallanuvchi va $\mu(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(f_n)$.

X dagi μ va Ydagi ν o'lchovlarning $\mu \otimes \nu$-to'g'ri ko'paytmasini

$$N_{\mu\otimes\nu}(x, y) = N_\mu(x) N_\nu(y). \qquad (3)$$

kabi aniqlaymiz.

Monna-Springer nazariyasida Radon-Nikodim teoremasining analogi yoq.

Biz ko'pincha $Q_p$da aniqlangan va qiymatlari $Q_q$da bo'lgan Xaar o'lchovi mavjud deb hisoblaymiz,bu yerda $p \ne q$. Bu o'lchov $\mu(Z_p) = 1$ shart bo'yicha yagonadir. Bu holda $N_\mu(x)$ funksiya c=1 o'zgarmasga teng va L^1 fazo C_C fazo bilan ustma-ust tushadi

***Cheksizda kamayuvchi o'lchovlar*.**

Biz Q_p-qiymatli ehtimollik o'lchovini aniqlamoqchimiz. Bizni σ-additivlik shartining P-adik analogi qiziqtiradi.

μ o'lchovga qo'yiladigan 1-shart-bu chegaralanganlik shartidir.

1-teorema. μ o‘lchov chegaralangan bo‘lishi uchun N_μ funksiya X da chegaralangan va

$$\|\mu\| = \sup N_\mu(x).$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. μ chegaralangan bo‘lsin ,{U} esa x nuqtaning yopiq-ochiq ayroflari sistemasi bo‘lsin. U holda

$$N_\mu(x) = \inf_U \sup_{g\neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(g\phi_U)|_K \leq \|\mu\| \sup_{g\neq 0} \|g\|^{-1} \|g\phi_U\| \leq \|\mu\|.$$

Ikkinchi tomondan, $\forall f \in C_C(x)$ uchun

$$|\mu(f)|_K \leq N_\mu(f) = \sup_x |f(x)|_K N_\mu(x) \leq \sup_x N_\mu(x)\|f\|.$$

Q_p qiymatli ehtimollik o‘lchovini aniqlash uchun quyidagi shartdan foydalanamiz. Tatbiq uchun bizga nafaqat $\Delta(x)$ dagi,balki barcha yopiq-ochiq qism to‘plamlar algebrasidagi o‘lchov kerak bo‘ladi.

2-ta’rif. Agar $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday $U_\varepsilon \in \Delta(x)$ topilib,

$$\sup\{N_\mu(x) : x \in \overline{U_\varepsilon}\} < \varepsilon$$

bo‘lsa, μ o‘lchov cheksizda kamayuvchi deyiladi.

1-teoremaga ko‘ra kamayuvchi μ o‘lchov chegaralangandir.

1-misol. X=K=Q_p, $\{x_n = p^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ va $\mu(\{x_n\}) = 1, n = 0,1,...$. bo‘lsin. U holda μ chegaralangan,lekin emas.

X fazoning yopiq ochiq to‘plamlari algebrasini F(x) bilan belgilaymiz.

2-teorema. μ kamayuvchi o‘lchov bo‘lsin. U holda $\forall A \in \Phi(x)$ to‘plam kamayuvchi bo‘ladi.

Isboti. $N_\mu(\Phi_A - G_n) \to 0$ bo‘ladigan $g_n \in C_C(x)$ ketma-ketlikni qurishimiz kerak. $\{B_n\} - \Delta(x)$ dagi qism to‘plamlar ketma-ketligi bo‘lib, $\sup\{N_\mu(x) : x \in B_n\} < 1/n$ bo‘lsin. Bundan tashqari,

$$N_\mu(\phi_A - \phi_{C_n}) = \sup_{x\in X} |\phi_A(x) - \phi_{C_n}(x)|_K N_\mu(x) < 1/n.$$

Xususan,bu teoremani qo‘llab X fazo jamlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

μ kamayuvchi o'lchovni F(x) algebraga chekli additivlik va chegaralanganlik xossalarini saqlagan holda davom ettirish mumkin: $\forall A \in \Phi(x)$ uchun

$\sup\{|\mu(B)|_K : B \subset A, B \in \Delta(X)\} < \infty.$ Bu

tasdiqni isbotlash uchun

$|\mu(B)|_K = N_\mu(\phi_B) = \sup\limits_x \phi_B(x) N_\mu(x) \le \|\mu\|$.

yekanligini ko'rsatish kerak.

$\forall A \in \Phi(x)$ uchun shunday $(C_n), C_n \in \Delta(x)$ ketma-ketlik topilib, $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n)$ bo'ladi.

Uzluksiz chegaralanagan $f : X \to K$ gunksiyalar fazosini $C_b(x)$ bilan belgilaymiz. Bu fazo $\|\cdot\|$ tekis norma bilan tasdiqlanadi.

1-tasdiq. μ kamayuvchi o'lchov bo'lsin. U holda $\forall f \in C_b(X)$ funksiya uchun $f \in L^1(X, \mu)$ element mos keladi va

$$|\mu(f)|_K \le N_\mu(f) \le \|f\| \|\mu\|.$$

tengsizlik bajariladi.

Isboti. Faraz qilaylik (B_n)-2.2.2-teoremada aytilgan ketma-ketlik bo'lsin. U holda

$$N_\mu(f - f\phi_{B_n}) \le \sup_{x \in \overline{B_n}} |f(x)|_K N_\mu(x) \le \|f\|/n.$$

2-tasdiq. μ o'lchov kamayuvchi bo'lishi uchun X_α to'plam $\forall \alpha > 0$ uchun kompakt bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. 1. X_α to'plam yopiq-ochiqdir. μ o'lchov kamayuvchi bo'lgani uchun shunday $U_\alpha \in \Delta(x)$ topilib, barcha $x \in \overline{U_\alpha}$ larda $N_\mu(x) < \alpha$ bo'ladi. Shu sababli, $X_\alpha \subset U_\alpha$.

2. Endi aksincha barcha $X_\alpha + \forall \alpha > 0$ uchun kompakt bo'lsin. U holda har bir $x \in X_\alpha$ nuqta uchun U(x) yopiq-ochiq atrof mavjud bo'ladi. Bunday atroflar sistemasi X_α kompakt qism to'plamning ochiq qoplamasi bo'ladi. $(U(x_j))_{j=1}^n$ chekli qism qoplama mavjud. $G_j = \bigcup\limits_{j=1}^n U(x_j)$ ni hosil qilamiz. Bu to'plam $\Delta(x)$ ga tegishli, lekin

$$\sup\{N_\mu(x) : x \in \overline{G_a}\} \le \sup\{N_\mu(x) : x \in \overline{X_\alpha}\} < \alpha.$$

Funksiyalar va o‘lchovlarning ko‘paytmasi.

μ-X dagi $\forall$ o‘lchov bo‘lib , $f \in L^1(X,\mu)$ bo‘lsin. Barcha $g \in C_c(x)$ uchun $\nu = f\mu, \nu(g) = \mu(fg)$ funksionalni qaraymiz. Bunda

$$|\nu(g)|_K \leq N_\mu(fg) \leq N_\mu(f)\|g\|.$$

Shu sababli ν – chegaralangan o‘lchov bo‘ladi.

1-teorema. . μ o‘lchov, $f \in L^1(X,\mu), \nu = f\mu,$ bo‘lsin. U holda

$$N_\nu(x) = |f(x)|_K N_\mu(x). \qquad (1)$$

Isbot. $N_\nu(x)$ va $N_\mu(x)$ larning ta’rifidan x nuqtaning shunday ochiq-kompakt U atrofi topilib,

$$N_\nu(\phi_U) - N_\nu(x) \leq \varepsilon \qquad (2)$$

bo‘lishi va $N_\mu(\phi_U) - N_\nu(x) \leq \varepsilon$ bo‘lishi kelib chiqadi. $f \in L^1$ bo‘lgani uchun shunday $g \in C_C(x)$ topilib, $N_\mu(f-g) \leq \varepsilon$ bo‘ladi, $\forall y \in U$ uchun $|g(y) - g(x)|_K \leq \varepsilon$ bo‘ladigan U atrofni qarash mumkin. (2.3.2)ga ko‘ra

$$\left| N_\mu(f\phi_U) - |f(x)|_K N_\mu(x) \right|.$$

ni baholash yetarli.

$$\left| N_\mu(f\phi_U) - |f(x)|_K N_\mu(x) \right| \leq \sup_{y \in Y} |g(x) - g(y)|_K N_\mu(y) + |g(x)|_K \left| N_\mu(f\phi_U) - N_\mu(x) \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left(\sup_{y \in Y} N_\mu(y) + |g(x)|_K \right) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

o‘rinli. Ya’ni

$$\left| N_\mu(f\phi_U) - N_\mu(g\phi_U) \right| \leq \varepsilon$$

va

$$\left| |g(x)|_K N_\mu(x) - |f(x)|_K N_\mu(x) \right| \leq \sup_x |g(x) - f(x)|_K N_\mu(x) \leq \varepsilon .$$

ni hosil qilamiz.

1-tasdiq. μ-o‘lchov bo‘lib, $f \in L^1(X,\mu)$ bo‘lsin. U holda $\nu = f\mu$ kamayuvchi bo‘ladi.

Kamayuvchi o‘lchov uchun Monna-Springer integralida o‘zgaruvchilarni almashtirish formulasi.

Lokal-kompakt to‘la noarximed maydonni S bilan belgilaymiz. S-qiymatli o‘lchov va funksiyalarni qaraymiz.

2-teorema. μ kamayuvchi o‘lchov va $\eta \in L^1(X,\mu)$ bo‘lsin. U holda $fog \in L^1(X,\mu)$.

Isbot. $\eta \in L^1(X,\mu)$ bo‘lgani uchun $\eta - X_\alpha$ da uzluksiz bo‘ladi. Shu sababli $M_\alpha = \eta(X_\alpha)$ kompakt bo‘ladi. V_α orqali S maydondagi markaz O nuqtada bo‘lgan va $M_\alpha \subset V_\alpha$ bo‘lgan sharni belgilaymiz.

Faraz qilaylik $U_\alpha \in \Delta(x)$ uchun $\sup\{N_\mu(x) : x \in \overline{U_\alpha}\} < \alpha$ bo‘lsin. $\eta \in L^1$ bo‘lgani uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $\eta_\delta \in C_C(x)$ va $N_\mu(\eta - \eta_\delta) < \eta$ bo‘ladi.

Yendi

$$g_{\delta\alpha}(x) = [(f\phi_{V_a}) \circ \eta_\delta]\phi_{U_\alpha}.$$

funksiyalar sistemasini qaraymiz. Bu funksiyalar $C_C(x)$ ga tegishli. Barcha $x \in X_\alpha \subset U_\alpha$ uchun

$$g_{\delta\alpha}(x) = f(\eta_\delta(x))\phi_{V_a}(\eta_\delta(x))$$

o‘rinli. $\delta, \alpha \to 0$ bo‘lganda $N_\mu(f \circ \eta - g_{\delta\alpha}) \to 0$ bo‘lishini ko‘rsatamiz.

Avval α ni shunday tanlaymizki, $\|f\|\alpha < \varepsilon$ bo‘lsin. U holda

$$N_\mu(f \circ \eta - g_{\delta\alpha}) \le \max\left[\sup_{x \in X_\alpha} \left| f(\eta(x)) - g_{\delta\alpha}(x) \right|_S N_\mu(x), \sup_{x \in X_\alpha} \left| f(\eta(x)) - g_{\delta\alpha}(x) \right|_S N_\mu(x)\right] =$$
$$= \max[\gamma_{\delta\alpha}, \lambda_{\delta\alpha}.]$$

$\lambda_{\delta\alpha} \le \|f\|\alpha < \varepsilon$ bo‘lgani uchun

$$\gamma_{\delta\alpha} = \sup_{x \in X_\alpha} \left| f(\eta(x)) - (\eta_\delta(x))\phi_{V_a}(\eta_\delta(x)) \right|_S N_\mu(x) =$$
$$= \sup_{x \in X_\alpha} \left| \left(f\phi_{V_a}\right)(\eta(x)) - \left(f\phi_{V_a}\right)(\eta_\delta(x)) \right|_S N_\mu(x).$$

$\delta = \theta\alpha$ deb olamiz. U holda $N_\mu(\eta - \eta_\delta) \le \theta\alpha$. Shunday qilib, $|\eta(x) - \eta_\delta(x)|_S N_\mu(x) \le \theta\alpha$. Bu $x \in X_\alpha$ uchun $|\eta(x) - \eta_\delta(x)|_S \le \theta$ bo‘lishini bildiradi. $f\Phi_{V_\alpha}$ funksiya kompakt tashuvchiga ega va shu sababli u tekis uzluksizdir. Demak, $\forall \varepsilon < 0$ uchun shunday $\theta_\varepsilon > 0$ topilib, $|y_1 - y_2|_{S_1} \le \theta_\varepsilon$ bo‘lganda $|f(y_1) - f(y_2)|_S < \varepsilon / \|\mu\|$ bo‘lishi kerak.

Isbotni yakunkash uchun $\delta=\delta_\varepsilon=\theta_\varepsilon\alpha$ deb olish kerak.

3-teorema. μ -kamayuvchi o‘lchov, $\eta\in L^1(X,\mu)$ bo‘lsin. U holda $\mu(f)=\mu(f\circ g)$ tenglama yordamida aniqlngan $\mu:C_C(S)\to S$ funksional $C_C(S)$ dagi chegaralangan o‘lchov bo‘ladi.

Agar μ o‘lchov chegaralangan,lekin kamayuvchi bo‘lmasa, $f\in C_C(S)$ uchun $f\circ g\notin L^1(X,\mu)$ bo‘lishi mumkin.

1-misol. μ teoremadagi o‘lchov bo‘lsin. $\eta(x_n)=y_n=p^n$ va $x\neq x_n$ da $\eta(x)=0$ bo‘ladigan funksiyani qaraymiz. $\eta\in L^1$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. Har bir x_n nuqta uchun turli nuqtalar uchun bo‘sh kesishmaga ega yopiq-ochiq V_n sharlar mavjud. Kompakt tashuvchili uzluksiz funksiyalarni qaraymiz:

$$\eta_N(x)=\sum_{k=1}^{N}y_k\phi_{V_k}(x)$$

U holda $N_\eta(\eta-\eta_N)\to 0$. Endi f funksiya $U_1(0)$ da 1+y ga va undan tashqarida 0 ga teng bo‘lsin. U holda $z_n=f(y_n)=1+p^n$ va $\alpha_n z_n$ nolga intilmaydi,n→0.

2-tasdiq. μ kamayuvchi o‘lchov, $\eta\in L^1(X,\mu)$ bo‘lsin. U holda

$$N_{\mu\eta}(f)\leq N_\mu(f\circ\eta). \qquad (3)$$

Isbot.

$$N_{\mu_\eta}(f)=\sup_{g\neq 0,g\in C_c}\|g\|^{-1}\left|\mu_\eta(fg)\right|_S\leq\sup_x\left|f(\eta(x))\right|_S N_\mu(x).$$

Bu tengsizlik qat’iy bo‘lishi mumkin.

1-lemma. Agar $y\notin M_\alpha=\eta(x_\alpha)$ bo‘lsa, u holda $N_{\mu\eta}(y)<\alpha.$

Isboti. M_α yopiq to‘plam,shu sababli $\forall y\in\overline{M_\alpha}$ uchun $V_\alpha\cap M_\alpha=\text{Ø}$ bo‘ladigan V_α atrof mavjud. (2.3.1) tenglik va (2.3.3) tengsizlikni qo‘llab,

$$N_{\mu\eta}(y)=\inf_{y\in V\in\Delta(x)}N_{\mu_\eta}(\phi v)\leq\inf_{y\in V\in\Delta(x)}N_{\mu_\eta}(\phi v\circ\eta)\leq\leq\sup_x\left|\phi_{V_\alpha}(\eta(x))\right|_S N_\mu(x)<\alpha.$$

ni hosil qilamiz.

3-tasdiq. $\forall\eta\in L^1(x,\mu)$ uchun μ_η o‘lchov kamayuvchi bo‘ladi.

Bu tasdiq 2.3.1-lemmaning natijasi hisoblanadi. 2.3.2-teoremada f funksiyaga kuchsizroq shart qo‘yish mumkin.

$\eta \in L^1$ bo‘lsin. $\forall \alpha > 0$ uchun M_α da uzluksiz f:S→S funksiyalarning funksional fazosi $\Gamma(\eta)$ ni kiritamiz. $\Gamma_b(\eta)$ orqali $\Gamma(\eta)$ ga kiruvchi chegaralangan funksiyalar qism fazosini belgilaymiz.

4-teorema. μ-kamayuvchi o‘lchov, $\eta \in L^1(x,\mu)$, $f \in \Gamma_b(\eta)$ bo‘lsin. U holda $f \circ \eta \in L^1(x,\mu), f \in L^1(S,\mu_\eta)$ va

$$\mu_\eta(f) = \mu(f \circ \eta). \qquad (2.3.4)$$

tenglik o‘rinli.

Isboti.

1. $(f \circ g) \in L^1(x,\mu)$ ni ko‘rsatamiz. f funksiyaning M_α dagi qismi f_α ning tekis uzluksizligini qo‘llab, $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $|x-y|_S < \delta$ da $|f(x) - f(y)|_S < \varepsilon$ ni hosil qilamiz. $U_\delta(x), x \in M_\alpha$ qoplamani qaraymiz. $\bigcup_{j=1}^{n} U_\delta(x_j) \supset M_\alpha$ chekli qism qoplama mavjud. $\varepsilon = \beta$ uchun

$$f_{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\phi_{U_\delta(x_j)}(x)$$

bo‘lsin. U holda $f_{\alpha\beta} \in C_c$ va

$$\sup_{x \in M_\alpha} \left| f_{\alpha\beta}(x) - f(x) \right|_S < \beta.$$

η_δ funksiyalar 2.3.2-teoremadagi kabi bo‘lsin. $g_{\alpha\beta\delta}(x) = f_{\alpha\beta}(\eta(x))\phi_{U_\alpha}(x)$ funksiyani qaraymiz, bu yerda U_α avvalgi teoremadagi kabi. 6.1-teoremaga o‘xshash

$$\rho_{\alpha\beta\delta} = N_\mu(f \circ \eta - g_{\alpha\beta\delta}) \to 0, \alpha, \beta, \delta \to 0.$$

ni isbotlash mumkin. Shunday qilib,(2.3.4) tenglamaning o‘ng tomonini aniqlangan.

Yendi $f \in L^1(S,\mu_\eta)$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun shunday $\{\Phi_n\}, \Phi_n \in C_c(S)$ ketma-ketlik topilib, $N_{\mu_\eta}(f - \Phi_n) \to 0$ bo‘lishini ko‘rsatish yetarli. Lemmaga ko‘ra

$$N_{\mu_\eta}(f - f_{\alpha\beta}) = \sup_{y\in S}\left| f(y) - f_{\alpha\beta}(y)\right|_S N_{\mu_\eta} \le$$

$$\le \max\left[\sup_{y\in \underline{M_\alpha}}\left| f(y)\right|_S N_{\mu_\eta}(y); \sup_{y\in M_\alpha}\left| f(y)\right|_S N_{\mu_\eta}(y)\right] \le$$

$$\max\left[\alpha\| f\|, \beta\|\mu\|\right] \to 0, \alpha, \beta \to 0.$$

Shu sababli, (2.3.4) tenglamaning chap tomoni aniqlangan. Endi o‘ng tomon chap tomonga tengligini ko‘rsatamiz. Avvalgi mulohazalarni qo‘llab, $\mu_\alpha(f\circ\eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta})$ ni hosil qilamiz. Shunga ko‘ra $N_\mu(f\circ\eta - f_{\alpha\beta}\circ\eta) \to 0.$ Demak, $\mu(f\circ\eta) = \lim \mu(f_{\alpha\beta}\circ\eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta}).$

1-eslatma. Olingan natijalarni vector qiymatli $\eta : X \to S^n, \eta = (\eta_1,...,\eta_n), \eta_j \in L^1$ holga umumlashtirish mumkin. μ_η o‘lchov $\Phi(S^n)$ da aniqlangan bo‘ladi.

P-adik qiymatli ehtimollik o‘lchovi.

Kamayuvchi o‘lchovlarga asoslangan aksiomatika.

Kamayuvchi o‘lchovlar nazariyasi p-adik ehtimollar nazariyasi aksiomatik darajada paydo bo‘lishiga asos bo‘lgan.

1-ta’rif.$(\Omega, \Phi(\Omega), P)$-uchlik bu ehtimollik fazosidir,bu yerda Ω-nol o‘lchamli lokal kompakt σ-kompakt topologic fazo,$\Phi(\Omega)$-yopiq-ochiq qism to‘plamlar algebrasi, P-kamayuvchi Q_p-qiymatli $\Phi(\Omega)$ dagi o‘lchov bo‘lib, $P(\Omega) = 1$.

1-eslatma. Kolmogorov aksiomatikasiistalgan abstrakt Ω to‘plam va uning qism to‘plamlari algebrasi asosida qurilgan.Lekin bunday mulohaza bizni holga to‘g‘ri kelmaydi.Bizning mulohazalarda Ω fazoning topologic xossalari muhim rol o‘ynaydi.Bizning aksiomatika Freshe va Kramerning geometrik ehtimollar nazariyasiga biroz o‘xshash.

S bu Q_p ni qism maydon sifatida o‘zida saqlovchi local kompakt noarximed maydon bo‘lsin.

2-ta’rif. L^1 sinfdan olingan $\xi : \Omega \to S$ funksiyaga tasodifiy miqdor deyiladi.

Odatdagi

$$M\xi \equiv \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) = P(\xi),$$

ta’rif yordamida ξ matematik kutilmani kiritamiz, $m_K(\xi) = M\xi^K$-momentlar,agar $\xi^K \in L^1$ bo‘lsa,bu momentlar korrekt aniqlangan, va $\upsilon_\xi A) = \rho(\xi \in A)$ ehtimollik taqsimoti. $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ vektorga tasodifiy miqdor deyiladi, bu yerda ξ_K-tasodifiy miqdor. ξ tasodifiy vector uchun P_ξ tasoddifiy taqsimotni tasodifiy miqdor uchun ham kiritish mumkin. Shu bilan birga $m_\alpha(\xi) = M_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_m}$ tasodifiy vektorlarning aralash momentlarini kiritish mumkin.

IV. AMALIY MAShG‘ULOT MATERIALLARI

1- amaliy mashg‘ulotlar:O‘lchov tushunchasi va xossalari.

1. $A=\bigcup_{n=1}^{8}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{8},\ \frac{1}{n}+\frac{1}{8}\right).$

$P_n=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{8},\ \frac{1}{n}+\frac{1}{8}\right),\ n=1,2,\ldots,8$ belgilash olamiz va P_n oraliqlarning kesishish yoki kesishmasligini tekshiramiz.

$$P_1=\left[\frac{7}{8},\frac{9}{8}\right),\ P_2=\left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right),\ P_3=\left[\frac{5}{24},\frac{11}{24}\right), P_4=\left[\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right),\ldots,P_8=\left[0,\ \frac{1}{4}\right).$$

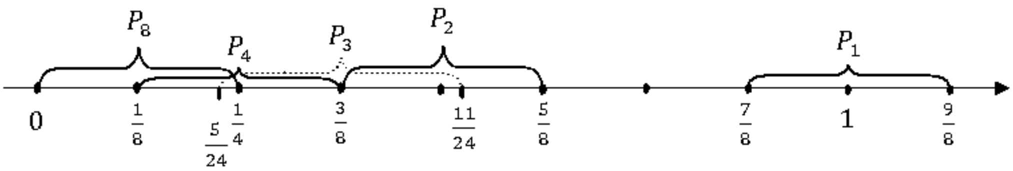
1-chizmadan ma’lum bo‘ldiki, $P_1\cap P_2=\varnothing,\ P_k\cap P_{k+1}\neq\varnothing,\ \ k=2,3,\ldots,8$. Shuning uchun

$$A=P_1\cup Q_1,\quad Q_1=\bigcup_{n=2}^{8}P_n=\left[0,\ \frac{5}{8}\right),\ \ P_1,Q_1\in S$$

tasvir eng kam sonli yoyilma bo‘ladi. Demak, A sodda to‘plam. Bu yoyilmadan

$$m(A)=\ m(P_1)+\ m(Q_1)=\ \frac{2}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$$

tenglikni olamiz. D



2. $A=\{(x,y):0\le x\le 7,\ 0\le y\le 7\}$,

$A_1=\{(x,y):4\le x<7,\ 3\le y\le 7\}.$

5-teorema. Agar chekli yoki sanoqli sondagi $\{A_n\}$ to‘plamlar sistemasi uchun $A\subset\bigcup_n A_n$ bo‘lsa, u holda

$$\mu^*(A)\le\sum_n\mu^*(A_n)$$

tengsizlik o‘rinli. Xususiy holda, agar $A\subset B$ bo‘lsa, $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$ bo‘ladi.

Isbot. Itiyoriy $\varepsilon > 0$ va har bir A_n uchun tashqi o‘lchov ta’rifiga ko‘ra to‘g‘ri to‘rtburchaklarning shunday chekli yoki sanoqli P_{nk} sistemasi mavjudki,

$$A_n \subset \bigcup_k P_{nk} \text{ va } \sum_k m(P_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

bo‘ladi. U holda

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk} \text{ va } \mu^*(A) \le \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli. $\varepsilon > 0$ sonning ixtiyoriyligidan teoremaning isboti kelib chiqadi.

μ-kamayuvchi o‘lchov, $\eta \in L^1(x,\mu)$, $f \in \Gamma_b(\eta)$ bo‘lsin. U holda $f \circ \eta \in L^1(x,\mu), f \in L^1(S,\mu_\eta)$ va

$$\mu_\eta(f) = \mu(f \circ \eta). \qquad (2.3.4)$$

tenglik o‘rinli.

Isboti.

1. $(f \circ g) \in L^1(x,\mu)$ni ko‘rsatamiz. f funksiyaning M_α dagi qismi f_α ning tekis uzluksizligini qo‘llab, $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $|x-y|_S < \delta$ da $|f(x) - f(y)|_S < \varepsilon$ ni hosil qilamiz. $U_\delta(x), x \in M_\alpha$ qoplamani qaraymiz. $\bigcup_{j=1}^n U_\delta(x_j) \supset M_\alpha$ chekli qism qoplama mavjud. $\varepsilon = \beta$ uchun

$$f_{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j)\phi_{U_\delta(x_j)}(x)$$

bo‘lsin. U holda $f_{\alpha\beta} \in C_c$ va

$$\sup_{x \in M_\alpha} \left| f_{\alpha\beta}(x) - f(x) \right|_S < \beta.$$

η_δ funksiyalar 2-teoremadagi kabi bo‘lsin. $g_{\alpha\beta\delta}(x) = f_{\alpha\beta}(\eta(x))\phi_{U_\alpha}(x)$ funksiyani qaraymiz, bu yerda U_α avvalgi teoremadagi kabi. 6.1-teoremaga o‘xshash

$$\rho_{\alpha\beta\delta} = N_\mu(f \circ \eta - g_{\alpha\beta\delta}) \to 0, \alpha, \beta, \delta \to 0.$$

ni isbotlash mumkin. Shunday qilib,(2.3.4) tenglamaning o‘ng tomonini aniqlangan.

Yendi $f \in L^1(S, \mu_\eta)$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun shunday $\{\Phi_n\}, \Phi_n \in C_c(S)$ ketma-ketlik topilib, $N_{\mu_\eta}(f - \Phi_n) \to 0$ bo‘lishini ko‘rsatish yetarli. Lemmaga ko‘ra

$$N_{\mu_\eta}(f - f_{\alpha\beta}) = \sup_{y\in S}\left|f(y) - f_{\alpha\beta}(y)\right|_S N_{\mu_\eta} \leq$$

$$\leq \max\left[\sup_{y\in M_\alpha}\left|f(y)\right|_S N_{\mu_\eta}(y); \sup_{y\in M_\alpha}\left|f(y)\right|_S N_{\mu_\eta}(y)\right] \leq$$

$$\max\left[\alpha\|f\|, \beta\|\mu\|\right] \to 0, \alpha, \beta \to 0.$$

Shu sababli, (4) tenglamaning chap tomoni aniqlangan. Endi o‘ng tomon chap tomonga tengligini ko‘rsatamiz. Avvalgi mulohazalarni qo‘llab, $\mu_\alpha(f \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta})$ ni hosil qilamiz. Shunga ko‘ra $N_\mu(f \circ \eta - f_{\alpha\beta} \circ \eta) \to 0.$ Demak,
$\mu(f \circ \eta) = \lim \mu(f_{\alpha\beta} \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta}).$

2-– amaliy mashg‘ulot: O‘lchovsiz to‘plamlar.

1. a O$(0, 1)$ ixtiyoriy son bo‘lsin. $[0, 1]$ kesmaning o‘rtasidan uzunligi $\frac{a}{2}$ ga teng $A_1 = \left(\frac{2-a}{4}, \frac{2+a}{4}\right)$ intervalni chiqarib tashlaymiz. A_1 ni o‘rta interval deb ataymiz. Ikkinchi qadamda qolgan ikki kesmaning uzunligi $\frac{a}{8}$ ga teng bo‘lgan o‘rta intervalini chiqarib tashlaymiz. Bu intervallar birlashmasini A_2 bilan belgilaymiz. Uchinchi qadamda qolgan to‘rtta kesmaning har biridan uzunligi $\frac{a}{32}$ ga teng bo‘lgan o‘rta intervalini chiqarib tashlaymiz. Ularning birlashmasini A_3 orqali belgilaymiz. Bu jarayonni cheksiz davom ettiramiz. A bilan $[0, 1]\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to‘plamni belgilaymiz. A ning o‘lchovli ekanligini ko‘rsating va uning o‘lchovini toping.

2. 5.36-misolda keltirilgan A to‘plam $[0, 1]$ kesmaning hech yerida zich emasligini isbotlang.

3. $A \subset [a, b]$ o‘lchovli to‘plam va $\mu(A) = l > 0$ bo‘lsin. U holda $f(x) = \mu\big([a, x) \cap A\big)$ funksiyaning uzlyuksizligini isbotlang. $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

4. $[0, 1]$ kesmada $[0, 1]$ dan farqli va o‘lchovi 1 bo‘lgan yopiq to‘plam mavjudmi?

5. Tekislikda shunday o‘lchovli $A \subset \mathbf{R}^2$ to‘plamga misol keltiringki, uning koordinata o‘qlariga proeksiyalari o‘lchovsiz bo‘lsin.

Quyidagi misollarda $A_1 \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi A va A_1 to‘plamlar berilgan. $A \setminus A_1$ to‘plamni eng kam sondagi o‘zaro kesish-maydigan $P_1, P_2, \ldots, P_n$ to‘g‘ri to‘rtburchaklar birlashmasi ko‘rinishida tasvirlang. $A \setminus A_1 = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ yoyilmadan foydalanib $A \setminus A_1$ to‘plam o‘lchovini toping.

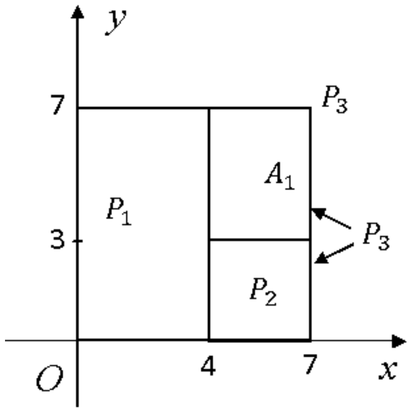
1. $A = \{(x, y) : 0 \le x < 7,\ 0 \le y < 7\}$,

$A_1 = \{(x, y) : 4 \le x < 6,\ 3 \le y < 5\}$.

2. $A = \{(x, y) : 0 \le x \le 7,\ 0 \le y \le 7\}$,

$A_1 = \{(x, y) : 4 \le x < 7,\ 3 \le y \le 7\}$.

2-misolning yechimi. Tekislikda A va A_1 to‘plamlarni chizmada tasvirlaymiz. 5.6-chizmadan $A \setminus A_1 = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ yoyilmani olamiz. Bu yerda $P_1 = \{(x, y) : 0 \le x < 4, 0 \le y \le 7\}$, $P_2 = \{(x, y) : 4 \le x < 7, 0 \le y \le 3\}$, $P_3 = \{(x, y) : x = 7, 0 \le y \le 7\}$. Bu to‘g‘ri to‘rtburchaklar o‘zaro kesish-maydi. O‘lchovning additivlik xossasiga ko‘ra $\mu(A \setminus A_1) = \mu(P_1) + \mu(P_2) + \mu(P_3) = 2\ \ +8$ bo‘ladi. □



5.6-chizma

6. $A \subset \mathbf{R}$ to‘plam o‘lchovli bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ ga ko‘ra shunday G $(G \supset A)$ ochiq to‘plam mavjud bo‘lib, $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli. Isbotlang.

7. Agar $A \subset \mathbf{R}$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday G $(G \subset A)$ yopiq to‘plam mavjud bo‘lib, $\mu^*(A \setminus G) < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishini isbotlang.

8. Agar $A \subset B$ bo‘lsa, $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ bo‘ladi. Isbotlang.

9. Agar A - sodda to‘plam bo‘lsa, u holda $\mu^*(A) = m'(A)$ tenglikni isbotlang.

10. Agar chekli yoki sanoqli sondagi $\{A_n\}$ to‘plamlar sistemasi uchun $A \subset \bigcup_n A_n$ bo‘lsa, u holda

$$\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n)$$

tengsizlik o‘rinli. Isbotlang.

11. Agar $A \subset [0,1]$ o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda $[0,1] \setminus A$ ning o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

12. Agar A va B to‘plamlar o‘lchovli bo‘lsa, u holda $A \cup B,\ A \cap B,\ A \Delta B,\ A \setminus B$ to‘plamlarning o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

13. O‘lchovli to‘plamlar sistemasi $\mathfrak{M}(\mathbf{R})$ halqa tashkil qiladi. Isbotlang.

14. Chekli sondagi o‘lchovli to‘plamlarning birlashmasi va kesish-masi yana

o‘lchovli to‘plamdir. Isbotlang.

15. Agar A va B lar o‘zaro kesishmaydigan o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsa, u holda $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ tenglikni isbotlang.

16. Agar A va B lar o‘lchovli to‘plamlar bo‘lsa, u holda quyidagi tengliklarni isbotlang:

a) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$,

b) $m(A \Delta B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B)$.

17. Ixtiyoriy ikkita A va B to‘plamlar uchun

$$\left|m^*(A) - m^*(B)\right| \le m^*(A \Delta B)$$

tengsizlik o‘rinli. Isbotlang.

18. $A \subset E = [0, 1]$ o‘lchovli to‘plam uchun $m(E \setminus A) = 1 - m(A)$ tenglik o‘rinli. Isbotlang.

3- amaliy mashg‘ulot: Ehtimollik o‘lchovi va ularning qo‘llanilisha.

1-teorema. μ o‘lchov chegaralangan bo‘lishi uchun N_μ funksiya X da chegaralangan va

$$\|\mu\| = \sup N_\mu(x).$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. μ chegaralangan bo‘lsin ,{U} esa x nuqtaning yopiq-ochiq ayroflari sistemasi bo‘lsin. U holda

$$N_\mu(x) = \inf_U \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} \left|\mu(g\phi_U)\right|_K \le \|\mu\| \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} \|g\phi_U\| \le \|\mu\|.$$

Ikkinchi tomondan, $\forall f \in C_C(x)$ uchun

$$\left|\mu(f)\right|_K \le N_\mu(f) = \sup_x \left|f(x)\right|_K N_\mu(x) \le \sup_x N_\mu(x) \|f\|.$$

Q_p qiymatli ehtimollik o‘lchovini aniqlash uchun quyidagi shartdan foydalanamiz. Tatbiq uchun bizga nafaqat $\Delta(x)$ dagi,balki barcha yopiq-ochiq qism to‘plamlar algebrasidagi o‘lchov kerak bo‘ladi.

μ -kamayuvchi o‘lchov, $\eta \in L^1(x,\mu)$, $f \in \Gamma_b(\eta)$ bo‘lsin. U holda $f \circ \eta \in L^1(x,\mu), f \in L^1(S,\mu_\eta)$ va

$$\mu_\eta(f) = \mu(f \circ \eta). \qquad (2.3.4)$$

tenglik o‘rinli.

Isboti.

1. $(f \circ g) \in L^1(x,\mu)$ ni ko‘rsatamiz. f funksiyaning M_α dagi qismi f_α ning tekis uzluksizligini qo‘llab, $\forall \varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $|x-y|_S < \delta$ da $|f(x) - f(y)|_S < \varepsilon$ ni hosil qilamiz. $U_\delta(x), x \in M_\alpha$ qoplamani qaraymiz. $\bigcup_{j=1}^{n} U_\delta(x_j) \supset M_\alpha$ chekli qism qoplama mavjud. $\varepsilon = \beta$ uchun

$$f_{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\phi_{U_\delta(x_j)}(x)$$

bo‘lsin. U holda $f_{\alpha\beta} \in C_c$ va

$$\sup_{x \in M_\alpha} \left| f_{\alpha\beta}(x) - f(x) \right|_S < \beta.$$

η_δ funksiyalar 2.3.2-teoremadagi kabi bo‘lsin. $g_{\alpha\beta\delta}(x) = f_{\alpha\beta}(\eta(x))\phi_{U_\alpha}(x)$ funksiyani qaraymiz, bu yerda U_α avvalgi teoremadagi kabi. 6.1-teoremaga o‘xshash

$$\rho_{\alpha\beta\delta} = N_\mu(f \circ \eta - g_{\alpha\beta\delta}) \to 0, \alpha, \beta, \delta \to 0.$$

ni isbotlash mumkin. Shunday qilib,(2.3.4) tenglamaning o‘ng tomonini aniqlangan.

Yendi $f \in L^1(S,\mu_\eta)$ bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun shunday $\{\Phi_n\}, \Phi_n \in C_c(S)$ ketma-ketlik topilib, $N_{\mu_\eta}(f - \Phi_n) \to 0$ bo‘lishini ko‘rsatish yetarli. Lemmaga ko‘ra

$$N_{\mu_\eta}(f - f_{\alpha\beta}) = \sup_{y\in S}\left|f(y) - f_{\alpha\beta}(y)\right|_S N_{\mu_\eta} \le$$

$$\le \max\left[\sup_{y\in M_\alpha}\left|f(y)\right|_S N_{\mu_\eta}(y); \sup_{y\in M_\alpha}\left|f(y)\right|_S N_{\mu_\eta}(y)\right] \le$$

$$\max\left[\alpha\|f\|, \beta\|\mu\|\right] \to 0, \alpha, \beta \to 0.$$

Shu sababli, (2.3.4) tenglamaning chap tomoni aniqlangan. Endi o‘ng tomon chap tomonga tengligini ko‘rsatamiz. Avvalgi mulohazalarni qo‘llab, $\mu_\alpha(f\circ\eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta})$ ni hosil qilamiz. Shunga ko‘ra $N_\mu(f\circ\eta - f_{\alpha\beta}\circ\eta) \to 0.$ Demak,

$\mu(f\circ\eta) = \lim \mu(f_{\alpha\beta}\circ\eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta}).$

4- amaliy mashg‘ulot: Invariant o‘lchovlar.

1. Aytaylik, $E = A_1 \cup A_2$ va $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ bo‘lsin. Agar $f_1 : A_1 \to \mathbf{R}$ va $f_2 : A_2 \to \mathbf{R}$ funksiyalar o‘lchovli bo‘lsa, u holda

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & agar \;\; x \in A_1 \\ f_2(x), & agar \;\; x \in A_2 \end{cases}$$

funksiyaning E to‘plamda o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy $c \in \mathbf{R}$ da

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \{x \in A_1 : f_1(x) < c\} \cup \{x \in A_2 : f_2(x) < c\}$$

to‘plam - o‘lchovli. Demak, f funksiya - E da o‘lchovli. Δ

2. Nol o‘lchovli A to‘plamda aniqlangan ixtiyoriy $f : A \to \mathbf{R}$ funksiyaning o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

3. Agar $f : E \to \mathbf{R}$ funksiya, o‘lchovli $g : E \to \mathbf{R}$ funksiyaga ekviva-lent bo‘lsa, u holda f ham E da o‘lchovli funksiya bo‘ladi. Isbotlang.

4. Agar $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ va $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ uzlyuksiz funksiyalar ekviva-lent bo‘lsa, ular aynan teng bo‘lishini isbotlang.

5. Agar $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f : E \to \mathbf{R}$ funksi-yaga har bir $x \in E$ da yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uzliksiz funksiya uchun $\{\varphi_n = g(f_n)\}$ ketma-ketlik $g(f)$ funksiyaga nuqtali yaqinlashadi. Isbotlang.

6. Agar $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi $f: E \to \mathbf{R}$ funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashsa, u holda ixtiyoriy $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uzliksiz funksiya uchun $\{\varphi_n = g(f_n)\}$ ketma-ketlik $g(f)$ funksiyaga E to‘plamda o‘lchov bo‘yicha yaqinlashadi. Isbotlang.

Quyidagi $f_n: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funksiyalar ketma-ketligini o‘lchov bo‘yicha yaqinlahuvchilikka tekshiring. Yaqinlashuvchi bo‘lsa, limitik funksiyasini toping.

7. $f_n(x) = \chi_{[\sqrt{n}, \sqrt{n+1}]}(x)$.

8. $f_n(x) = \sin^n x \cdot \chi_{[2\pi n, 2\pi n + \pi]}(x)$.

$f_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \chi_{[k, k+k^{-2}]}(x)$.

5- amaliy mashg‘ulot: Biologik dinamik sistemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.

Misol. Faraz qilaylik

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

bo‘lsin, bu yerda a, b, c, d lar kompleks sonlar bo‘lib $ad - bc \neq 0$ o‘rinli. L funksiya kasr chiziqli akslantirish deyiladi.Agar $c \neq 0$ bo‘lsa, $L(\infty) = a/c \neq \infty$ bo‘ladi. Agar $a \neq 0$ bo‘lsa, z ni $1/z$ ga almashtirib

$$F(z) = \frac{c+dz}{a+bz}$$

ni hosil qilamiz va $F'(0) = (ad-bc)/a^2 \neq 0$ bo‘ladi. Demak, ∞ nuqta L uchun regulyar nuqta ekan.

Umumiy holda, agar $R(z)$ funksiya $P(z)/Q(z)$ ko‘rinishdagi ratsional funksiya bo‘lsa, bu yerda P va Q lar ko‘phadlar, u holda R funksiya butun Riman sferasida analitik funksiya bo‘ladi. ∞ nuqta ko‘phad holiga qo‘zg‘almas nuqta, $R(z)=\frac{1}{z^n}$ holda davriy bo‘lishi mumkin. ∞ nuqtaga akslantiriluvchi nuqtalarga qutb nuqtalar deyiladi. Quyidagi

$$T(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

funksiya ratsional funksiya bo‘ladi, bu yerda $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in C$. Agar $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ bo‘lsa, bu akslantirishga Myobius akslantirishi deyiladi. Endi $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ deb faraz qilamiz.

1. Myobius funksiyasi Riman sirtida diffeomorfizm bo‘lishini isbotlang.
2. T teskarilanuvchan bo‘lib, yana Myobius funksiya bo‘lishini ko‘rsating.
3. $T(\infty)$ ni hisoblang va $T(-\delta/\gamma)=\infty$ ekanligini ko‘rsating.
4. Myobius akslantirishi $z\to z+a$, $z\to \frac{1}{z}$ va $z\to bz$ almashtirishlar kompozitsiyasi ko‘rinishda tasvirlanishini ko‘rsating.
5. Myobius akslantirishi C dagi to‘g‘ri chiziqni yo aylanaga yoki to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazishini isbotlang. Xuddi shunga o‘xshash aylanani yo aylanaga yoki to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazishini ko‘rsating. C dagi to‘g‘ri chiziqlar Riman sirtida aylanaga mos kelgani uchun ularni ham aylana deb ataymiz.
6. Agar $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma=0$ bo‘lsa T funksiya $z=\alpha-\delta$ nuqtada yagona qo‘zg‘almas nuqtaga ega bo‘lishini isbotlang. Bu holda T ga parabolik akslantirish deyiladi.
7. Parabolik akslantirish $z\to z+\mu$ akslantirishga qo‘shma analitik ekanligini ko‘rsating.
8. Agar T da 2 ta qo‘zg‘almas nuqtasi bo‘lsa, u holda $z\to\mu z$ ko‘rinishdagi yagona akslantirishga qo‘shma analitik bo‘lishini ko‘rsating. Agar $|\mu|=1$ bo‘lsa, T ga elliptik, agar $|\mu|\neq 1$ bo‘lsa, T ga giperbolik akslantirish deyiladi.
9. Quyidagi Myobius akslantirishlaridan qaysilari parabolik, giperbolik yoki elliptik akslantirish ekanini aniqlang:

$$
\begin{aligned}
&a..T(z) = 1/z \\
&b.T(z) = 2z+1 \\
&c.T(z) = (z+1)/(z-1) \\
&d.T(z) = z/(2-z) \\
&e.T(z) = iz+1-i
\end{aligned}
$$

10.Koordinata boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamini C_1 bilan, konsentrik aylanalar to‘plamini C_2 bilan belgilaymiz. $z \to \mu z$ akslantirish C_1 va C_2 elementlarini yana o‘ziga o‘tkazadi. C_1 va C_2 larning obrazlari Cteyner aylanalari deyiladi. Bu aylanalarni quyidagi

$$
\begin{aligned}
&a..T(z) = 1/z \\
&b.T(z) = 2z+1 \\
&c.T(z) = z/(2-z)
\end{aligned}
$$

Myobius akslantirishdagi aksini toping.

11.Myobius akslantirishinig Shvarts hosilasi aynan 0 ga tengligini isbotlang.

6- amaliy mashg‘ulot: Noarximed fazolarda o‘lchovlar va ularning tadbiqlari.

Tasdiq. Faraz qilaylik, $|a|<1$ bo‘lsin. Ushbu

$$T_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

belgilash kiritamiz. U holda $|z|<|a|^{-1}$ uchun T_a analitik bo‘ladi.shu sababli, $|z|<1$ uchun $T_a^{-1} = T_{-a}$ bo‘ladi va $T_a \circ D \to D$.

Isbot. Tasdiqning isboti to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblashlardan kelib chiqadi va uni misol sifatida qoldiramiz.

Teorema. P - bu ko‘phad va z_0 nuqta P uchun harakatlanuvchi davriy nuqta bo‘lsin. U holda z_0 harakatlanuvchi nuqta atrofida yotuvchi kritik qiymat mavjud.

Isbot. Yana soddalik uchun bu natijani harakatlanuvchi z_0 qo‘zg‘almas nuqta uchun keltirib chiqaramiz. Avvalgi natijalarga ko‘ra, P ni chiziqli qiluvchi z_0 nuqtaning U atrofi va $H: U \to D$ analitik gomeomorfizm mavjuddir. V orqali U ni o‘zida saqlovchi ochiq to‘plamni belgilaymiz va $P: V \to U$ - ustiga akslantirish bo‘lsin. P akslantirish yo V da kritik nuqtaga ega yoki P ning $P^{-1}:U\to V$ analitik teskarisi mavjud. Buni isbotlash uchun P ning U da analitik teskarisi mavjud bo‘lmasin deb faraz qilamiz. P analitik va V da sur’ektiv bo‘lgani uchun P bir qiymatli bo‘lmasligi kerak. Shu sababli shunday $z_1 z_2 \in V$ nuqtalar topilib $P(z_1)=P(z_2)=q$ bo‘ladi. Faraz qilaylik $H(q)=a$ va $T_a : D\to D$ avvalgi tasdiqdagi kabi akslantirish bo‘lsin.

D da markazi O nuqtada radiusi $r<1$ ga teng C_r aylanani qaraymiz. T_a^{-1} akslantirish bu aylanalar oilasini bir bog‘lamli yopiq chiziqlarga o‘tkazadi. $P:V\to U$ analitik va barcha i larda $P'(z_i)\neq 0$ bo‘lgani uchun yetarlicha kichi r larda $P^{-1}(H^{-1}\circ T_a^{-1}(C_r))$- aylanalar jufti bo‘lib, biri z_1 nuqtada ikkinchisi z_2 nuqtada bo‘ladi. Bunda P^{-1} orqali akslantirish emas to‘plam asli belgilangan. Endi r kamayishi bilan kichik r topilib ikki oila kesishadi. P orqali $P^{-1}(H^{-1}\circ T_a^{-1}(C_{r_a}))$ ko‘rinishdagi bog‘lamli yopiq chiziqlarning umumiy nuqtasini belgilaymiz. U holda osongina ko‘rish mumkinki, p nuqta P uchun kritik qiymat bo‘ladi.

Shunday qilib, P^{-1} akslantirishni harakatlanuvchi z_0 ning mumkin bo‘lgan katta sohasigacha aniqlash mumkin, bunda keyingi kritik qiymatni uchratguncha davom etamiz va barcha musbat k lar uchun $P^{-k}:U\to C$ ni quramiz. Ta’kidlash lozimki, istalgan k uchun $P^{-k}(U)$ - C ni qoplamaydi. Shunday qilib, P^{-k} akslantirishlar oilasi U da normal emas. Montel teoremasiga ko‘ra $\bigcup_{k=0}^{\infty} P^{-k}(U)\ -C$ minus kamida bitta nuqtani qoplashi kerak. Bu ziddiyat natijani isbotlaydi.

Misollar

1. Analitik akslantirishlar iteratsiyasi har qanday harakatlanuvchi davriy nuqta bo‘yicha normal oilani tashkil qilishini isbotlang.
2. Chekli harakatlanuvchi davriy nuqta basseyni bir bog‘lamli ekanligini isbotlang.
3. $|a|<1$ uchun

$$T_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

deb olamiz. U holda T_a – $D=\{z:|z|<1\}$ ni o‘ziga o‘tkazuvchi analitik gomeomorfizm ekanligini isbotlang.

4. Agar P darajasi 1 dan katta ko‘phad bo‘lsa, u holda shunday $R>0$ soni topilib, agar $|z|>R$ bo‘lsa, $|P(z)|>|z|$ bo‘ladi. Agar $|z|>R$ bo‘lsa, $|P^n(z)|\to\infty$ bo‘ladi.

V. GLOSSARIY

Termin	O‘zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
O‘lchovli funksiya ***Measurable function***	Agar ixtiyoriy $c \in R$ uchun $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ to‘plam o‘lchovli bo‘lsa, u holda f funksiya E to‘plamda o‘lchovli funksiya deyiladi.	The function $f : E \to R$ is measurable iff $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ is measurable for all $c \in R$.
Lebeg o‘lchovi ***Lebesgue measure***	O‘zaro kesishmaydigan intervallar birlashmasidan tuzilgan $S \equiv \sum_k (a_k, b_k)$ ochiq to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamning Lebeg o‘lchovi quyidagicha aniqlanadi: $\mu_L(S) = \sum_k (b_k - a_k)$. $S' \equiv [a,b] - \sum_k (a_k, b_k)$ yopiq to‘plam berilgan bo‘lsa, $\mu_L(S') = (b-a) - \sum_k (b_k - a_k)$.	Given an open set $S \equiv \sum_k (a_k, b_k)$ containing disjoint intervals, the Lebesgue measure is defined by $\mu_L(S) = \sum_k (b_k - a_k)$. Given a closed set $S' \equiv [a,b] - \sum_k (a_k, b_k)$, $\mu_L(S') = (b-a) - \sum_k (b_k - a_k)$.
Sigma algebra ***Sigma-algebra***	X to‘plam berilgan bo‘lsin. Quyidagi shartlar bajarilsa, X to‘plamning bo‘sh bo‘lmagan qism to‘plamlaridan tuzilgan $F$to‘plam $\sigma -$ algebra tashkil qiladi deyiladi: 1. $X \in F$; 2. AgarAF ga tegishli bo‘lsa, u holda A ning to‘ldiruvchisi	Let X be a set. Then a $\sigma -$algebra F is nonempty collection of subsets of X such that the following hold: 1. X is in F; 2. If A is in F, then so is the complement of A; 3. If A_n is a sequence of elements of F, then the union of the A_ns is in F.

	ham F ga tegishli; 3. Agar$A_n F$to‘plam elementlaridan tuzilgan ketma-ketlik bo‘lsa, u holdaA_n to‘plamlar birlashmasi ham F ning elementi bo‘ladi.	
O‘lchovli fazo ***Measurable space***	Sigma-algebra tashkil qiladigan to‘plamlar sistemasi	A set considered together with the sigma-algebra on the set.
Ehtimolliklar fazosi ***Probability space***	$(S, \mathbb{S}, P)$uchlik, bu yerda S to‘plam va bu to‘plamda aniqlangan $(S, \mathbb{S})$ o‘lchovli fazo, $\mathbb{S} S$ ning o‘lchovli qism to‘plamlari, P esa $\mathbb{S}$ dagi $P(S) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi o‘lchov.	A triple $(S, \mathbb{S}, P)$ on the domain S, where $(S, \mathbb{S})$ is a measurable space, $\mathbb{S}$ are the measurable subsets of S, and P is a measure on $\mathbb{S}$ with $P(S) = 1$.
Ehtimollik o‘lchovi ***Probability measure***	$(S, \mathbb{S}, P)$ehtimolliklar fazosi berilgan bo‘lsin.U holda Po‘lchovga ehtimolliklar o‘lchovi deyiladi.	Let $(S, \mathbb{S}, P)$ be is probability space. Then the measure P is said to be a probability measure.
$f$ga nisbatan invariant **Invariant under f**	(X, Σ)- o‘lchovli fazo va $f - X$ to‘plamni o‘zini-o‘ziga akslantiruvchi o‘lchovli funksiya bo‘lsin. (X, Σ) fazoda aniqlangan μ o‘lchov f ga nisbatan invariant	Let (X, Σ) be a measurable space and let f be a measurable function from X to itself. A measure μ on (X, Σ) is said to be invariant under f if, for every measurable set Ain Σ,

	deyiladi, agar Σ dagi barcha o'lchovli A to'plamlar uchun $\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(A)$ bo'lsa.	$\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(A)$.
Invariant o'lchov ***Invariant measure***	(X, Σ) o'lchovli fazo, T monoid va $\varphi: T \times X \to X$ akslantirish bo'lsin, (X, Σ) fazodagi μ o'lchov invariant o'lchov bo'ladi, agar u ixtiyoriy $\varphi_t: X \to X$ akslantirishga nisbatan invariant bo'lsa.	Let (X, Σ) is a measurable space, T is monoid and $\varphi: T \times X \to X$ is the flow map, a measure μ on (X, Σ) is said to be an invariant measure if it is an invariant measure for each map $\varphi_t: X \to X$.

VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentiningasarlari

1. Mirziyoev Sh. M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoev Sh. M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”,2017. – 592 b.
3. Mirziyoev Sh. M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoev Sh. M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoev Sh. M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.–T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiyhujjatlar

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.
7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentyabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.
8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2012 yil 10 dekabrdagi “Chet tillarni o‘rganish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-1875-sonli qarori.
9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasinioshirishtiziminiyanadatakomillashtirishchora-tadbirlarito‘g‘risida”giPF-4732-sonliFarmoni.
10. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekistonRespublikasiniyanadarivojlantirishbo‘yichaHarakatlarstrategiyasito‘g‘risida”gi 4947-sonliFarmoni.
11. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliyta’limtiziminiyanadarivojlantirishchora-tadbirlarito‘g‘risida”giPQ-2909-sonliqarori.
12. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021

yillardaO‘zbekistonRespublikasiniinnovasionrivojlantirishstrategiyasinitasdiqlashto‘g‘risida”giPF-5544-sonliFarmoni.

13. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekistonRespublikasidakorrupsiyagaqarshikurashishtiziminiyanadatakomillashtirishchora-tadbirlarito‘g‘risida”giPF-5729-sonFarmoni.

14. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillardaMirzoUlug‘beknomidagiO‘zbekistonMilliyuniversitetidatalabyuqoribo‘lganmalakalikadrlartayyorlashtiziminitubdantakomillashtirishvailmiysalohiyatinirivojlantirichora-tadbirlarito‘g‘risida”giPQ-4358-sonliQarori.

15. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliyta’limmuassasalarirahbarvapedagogkadrlarininguzluksizmalakasinioshirishtiziminijoriyetishto‘g‘risida”giPF-5789-sonliFarmoni.

16. O‘zbekistonRespublikasiPrezidentining 2019 yil 8 oktabr “O‘zbekistonRespublikasioliyta’limtizimini 2030 yilgacharivojlantirishkonsepsiyasinitasdiqlashto‘g‘risida”giPF-5847-sonliFarmoni.

17. O‘zbekistonRespublikasiVazirlarMahkamasining 2019 yil 23 sentabr “Oliyta’limmuassasalarirahbarvapedagogkadrlariningmalakasinioshirishtiziminiyanadatakomillashtirishbo‘yichaqo‘shimchachora-tadbirlarto‘g‘risida”gi 797-sonliqarori.

III. Maxsusadabiyotlar

18. AvilovaL.V., BolotyukV.A., BolotyukL.A. Analiticheskayageometriyailineynayaalgebra// 2013. Izdanie: 1-eizd. 421 s.

19. AleksandrovA.D., NesvetaevN.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.

20. Matematikanaliz./ AzlarovT., MansurovH.: Universitetvaped. institutlartalabalariuchundarslik: 2 qismli. 1-q.— Qaytaishlanganvato‘ldirilgan 2-nashri.— T.: Uqituvchi, 1994.—416 b.

21. Dodajonov N., Yunusmetov R., AbdullaevT. Geometriya, 2 qism.

22. NarmanovA. Differensialgeometriya.

23. SobirovM.A., YusupovA.Yo. Differensialgeometriyakursi.

24. Ergashev B. Yevklidfazosidachiziqlar.

25. Ergashev B. Yevklidfazosidasirtlar.

26. BelkoI.V. idr. Sbornikzadachpodifferensialnoygeometrii.

IV. Internetsaytlar

27. http://edu.uz – O‘zbekistonRespublikasiOliyvao‘rtamaxsusta’limvazirligi

28. http://lex.uz – O‘zbekistonRespublikasiQonunhujjatlarima’lumotlarimilliybazasi

29. http://bimm.uz – Oliyta’limtizimipedagogvarahbarkadrlariniqaytatayyorlashvaularningmalakasinioshirishnitashkiletishboshilmiy-metodikmarkazi

30. www.ams.mathscinet.org

www.ziyonet.uz –Ta’limportali