O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISH BOSH ILMIY - METODIK MARKAZI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

«MATEMATIK MODELLASHTIRISH ASOSLARI»

MODULINING

O‘ Q U V – U S L U B I Y M A J M U A S I

Toshkent – 2022

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy va o‘rta maxsus ta'lim
vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv dasturi va o‘quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan

Tuzuvchi: **A.Xaydarov**

O‘quv -uslubiy majmua Bosh ilmiy-metodik markaz Ilmiy metodik Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan
(*2020 yil “30” dekabrdagi 5/4-sonli bayonnoma*)

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

Mazkur ishchi o‘quv dastur O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF–4947-son, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF–5789-son, 2019 yil 8 oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF–5847-sonli, 2019 yil 23 sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Ma’lumki mamlakatimiz mustaqilligi milliy ta’lim sohasida tub islohotlarni amalga oshirish uchun zamin yaratdi. Zamonaviy talablar inobatga olingan holda, oliy o‘quv yurtlarining pedagog kadrlarini qayta tayyorlash yo‘nalishlari bo‘yicha qayta tayyorlash va malaka oshirishning o‘quv dasturlarini muntazam takomillashtirib borish ishlarini tashkil etish bugungi kunning dolzarb vazifalaridan biri xisoblanadi.

Bu kursda tinglovchilar barcha fanlardan olgan bilimlarini qo‘llab fizik jarayonlar uchun matematik modellar yaratish, amaliy masalalar qo‘yish, yaratilgan matematik modellarning adekvatligini tekshirish, qo‘yilgash masala uchun yechish usullarini tanlash, chekli ayirmali sxemalar yaratish, sxemalarning turg‘unligini ta’minlash, hosil qilingan sonli tenglamalarni yechish usullarini tanlash, algoritmlar yaratish va dasturlar tuzish, dasturni sozlash, hisoblash eksperimentlarini o‘tkazish, olingan natijalarni tahlil qilish va natijalarni jadval, grafik yoki animasion ko‘rinishlarda (vizual) taqdim etish kabi ko‘nikmalarni oladi.

Bu ko‘nikmalarni olish davomida tinglovchilar barcha matematik fanlarining bir birini to‘ldirishi, hayotiy masalalarni yechishda ularning qanchalik zarurligini to‘laroq tushunib yetadilar, bu masalalarni yechishda informasion texnologiyalarning rolini va yangi texnologiyalardan foydalanish ilmiy-texnika rivojiga salmoqli ta’sir ko‘rsatishiga amin bo‘ladilar.

Modulning maqsadi va vazifalari

“Matematik modellashtirish asoslari” modulining maqsadi: Fanining asosiy maqsadi tinglovchilarda muayyan jarayonlarni matematik modellashtirish uchun tushuncha bilim va ko‘nikmalar asosida, turli matematik modellarni tadqiq etish uchun tatbiq etilishi mumkin bo‘lgan matematik usullar orasidan eng samaralisini ajratib olish, yaratilgan yoki mavjud usullarning yaroqliligini baholash kabi bir qator nazariy va amaliy muammolar bo‘yicha bilim va ko‘nikmalarni uyg‘unlashtirishdan iborat.

Tinglovchilar uchun bir qator tushunchalar umumlashtirilgan holda, usullar esa chuqur va batafsil ravishda o‘rgatiladi. Jumladan fan dasturi tinglovchilarning ilgari o‘rganilgan fundamental va ixtisoslik fanlariga tayanadi. Fanini o‘rgatish belgilangan reja asosida ma’ruza o‘qish, auditoriya va kompyuter zallaridan foydalangan holda amalga oshiriladi. Bunda tinglovchilar chiziqsiz masalalar, ularni approksimasiya qilish usullari, approksimasiya tartibi, yaqinlashishi va turg‘unligi, chiziqlashtirish usullari, sonli yechishning iterasiya, progonka usullari kabi mavzularni chuqur o‘rganadilar. Ulardan tashqari masalani yechish algoritmini va dasturini yaratish, dasturni sozlash, test masalalar yaratish va dasturning ishonchliligini tekshirish, hisoblash eksperimentlari o‘tkazish, olingan natijalarni matematik va fizik jihatdan tahlil qilish va ularni vizuallashtirish kabi mavzular bilan yaqindan tanishadilar.

“Matematik modellashtirish asoslari” modulining vazifalari:

- tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish;
- matematik modellar va ularning turlarini ajrata bilish;
- matematik modellarning sifat xossalarini tadqiq etish usullarini tahlil qilish;
- fizik jarayonlarni tasvirlovchi xususiy hosilali chiziqsiz differensial tenglamalar va ularga qo‘yilgan shartlarni (boshlang‘ich, chegaraviy va boshqa) fizik ma’nosini o‘rganish;
- tinglovchilarda amaliy masalalar qo‘yish va uni yechish usullarini tanlash ko‘nikmalarini hosil qilish.

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

“Matematik modellashtirish asoslari” o‘quv fanini o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida:

Tinglovchi:

- model va uning turlari, matematik modellashtirish texnologiyalari, matematik modellarga qo‘yiladigan talablar, matematik modellarni qurish bosqichlari, matematik modellarni taxlil qilish, modelni real obyektga muvofiqlashtirish, matematik model ustida o‘tkaziladigan nazariy va amaliy tadqiqotlarni o‘tkazish, matematik modellarga mos keluvchi diskret modellar qurish xaqida tasavvurga ega ***bo‘lishi kerak***;
- modellashtirishda tabiat qonunlarini va boshqa prinsiplarni ko‘llashni, diskret modellar qurishda tejamkor va turg‘un hisoblash algoritmlarini tanlashni, matematik model va uning real obyekti o‘rtasida muvofiqlik o‘rnatishni, tadbiqiy masalalarni modellashtirishning matematik apparatini va ularnn kompyuterda amalga oshirishni, matematik model universalligini, matematik modellashtirish natijalarini tahlil kilishni bilishi va ulardan ***foydalana olishi kerak***;
- obyekt hakida axborot yig‘ish, obyektida to‘plangan ma’lumotlarni sistemalashtirish, matematik model qurishda ishchi gepotezalarni qabul qilish, obyektga ta’sir qiluvchi asosiy faktorlarni ajratish, tadbiqiy programmalar paketiii ishlata bilish, qo‘yilgan masalani yechishniig samarali usullarini tanlash ***ko‘nikmalariga ega bo‘lishi kerak***.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

“Matematik modellashtirish asoslari” kursi ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Kursni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, axborot-kommunikasiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

1. ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentasion va elektron-didaktik texnologiyalardan;
2. o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Matematik modellashtirish asoslari” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Sonli usullar”, “Chekli ayirmali sxemalar”, “Matematik tizimlar” o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning meyoriy - huquqiy xujjatlar bo‘yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar amaliy masalalarning matematik modellari, ularni yechish usullari va dasturiy ta’minotlar yaratish, hisoblash tajribalarini o‘tkazish, olingan natijalarni tahlil etish, amalda qo‘llash va baholashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o‘quv yuklamasi, soat				
		Hammasi	Auditoriya o‘quv yuklamasi			Mustaqil ta’lim
			Jami	jumladan		
				Nazariy	Amaliy mashg‘ulot	
1.	Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematik modelni ifodalash shakllari. Matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablar. Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik		2	2		

	model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlilik, ulariing adekvatligi.					
2.	Energiyaning, massa (materiya)ning va impulsning saqlanish qonunlari. Matematik modellashtirishda analogiya usuli va variasion prinsiplardan foydalanish. Iyerarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.		6	2	4	
3.	Jamiyat rivojlanishining demografik modeli. Maltus va Ferxyulst-Pirl modellari. «Yirtqich-o‘lja» sistemasining o‘zaro munosabat modeli. Ikki davlat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modeli. Ikki armiya jangovar harakati modeli.		6	2	4	
4.	O‘zaro ta’sirlashuvchi populyasiyalar sonini modellashtirish. Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli. Reklama kompaniyasini tashkillashtirish. Korxonalar o‘zaro qarzlarini bartaraf etishi. Bozor iqtisodiyoti muvozanatining makromodeli. Iqtisodiy o‘sishning makromodeli. Transport masalasi.		6	2	4	
Jami: 20		**20**	**20**	**8**	**12**	

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. ***Matematik modelni qurish va ularni tadqiq qilish uslublari (2 soat).***

Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematik modelni ifodalash shakllari. Matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablar. Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlilik, ulariing adekvatligi.

2-mavzu. ***Jarayonlarni modellashtirishda tabiatning saqlanish qonunlaridan va 6oshka usullardan foydalanish (2 soat).***

Energiyaning, massa (materiya)ning va impulsning saqlanish qonunlari. Matematik modellashtirishda analogiya usuli va variasion prinsiplardan foydalanish. Iyerarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

3-mavzu. ***Demografik modellar va raqobatning ayrim modellari (2 soat).***

Jamiyat rivojlanishining demografik modeli. Maltus va Ferxyulst-Pirl modellari. «Yirtqich-o‘lja» sistemasining o‘zaro munosabat modeli. Ikki davlat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modeli. Ikki armiya jangovar harakati modeli.

4-mavzu. ***Biologik modellar, moliyaviy va iqtisodiy jarayonlarni ayrim modellari***

(2 soat).

O‘zaro ta’sirlashuvchi populyasiyalar sonini modellashtirish. Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli. Reklama kompaniyasini tashkillashtirish. Korxonalar o‘zaro qarzlarini bartaraf etishi. Bozor iqtisodiyoti muvozanatining makromodeli. Iqtisodiy o‘sishning makromodeli. Transport masalasi.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR

Amaliy mashg‘ulotlar zamonaviy didaktik ta’minot va laboratoriya jihozlariga ega bo‘lgan auditoriyalarda hamda Internet tarmog‘iga ulangan kompyuter sinflarida, tayanch oliy ta’lim muassasalarining kafedralarida tashkil etiladi.

Amaliy mashg‘ulotlarda fizik jarayonlarni tasvirlovchi amaliy masalalarning qo‘yilishi, ularni yechish usullari, masalani yechishning algoritmi va dasturini yaratish, dasturning to‘g‘riligini test masalalarda tekshirish, hisoblash eksperimentlari o‘tkazish va olingan natijalarni tahlil qilish masalalari o‘rganiladi.

Amaliy mashg‘ulotlarda quyidagi mavzular va vaziyatli masalalar o‘rganiladi:

Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlilik.

Energiyaning, massa (materiya)ning va impulsning saqlanish qonunlari.

Matematik modellashtirishda analogiya usuli. Iyerarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

Jamiyat rivojlanishining demografik modeli. Maltus va Fyurxst-Perl modellari.

«Yirtqich-o‘lja» sistemasining o‘zaro munosabat modeli.

Ikki davlat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modeli. Ikki armiya jangovar harakati modeli.

Biologik modellar. O‘zaro ta’sirlashuvchi populyasiyalar sonini modellashtirish. Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli.

Moliyaviy, iqtisodiy jarayonlarni ayrim modellari. Bozor iqtisodiyoti muvozanatining makromodeli. Iqtisodiy o‘sishning makromodeli. Reklama kompaniyasini tashkillashtirish. Korxonalar o‘zaro qarzlarini bartaraf etishi.

Hisoblash eksperimenti va uning bosqichlari. Transport masalasi.

MUSTAQIL TA’LIM

Tinglovchi mustaqil ishni muayyan modulning xususiyatlarini hisobga olgan holda quyidagi shakllardan foydalanib tayyorlashi tavsiya etiladi:

- meyoriy xujjatlardan, o‘quv va ilmiy adabiyotlardan foydalanish asosida modul mavzularini o‘rganish;
- tarqatma materiallar bo‘yicha ma’ruzalar qismini o‘zlashtirish;
- maxsus adabiyotlar bo‘yicha modul bo‘limlari yoki mavzulari ustida ishlash;
- amaliy mashg‘ulotlarda berilgan topshiriqlarni bajarish.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi: ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);

bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

JORIY NAZORAT (ASSISMENT)NI BAHOLASH MEZONI

Joriy nazorat(assisment)ni baxolash O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish Tarmoq (mintaqaviy) markazida tasdiqlangan shakllari va mezonlari asosida amalga oshiradi.

Ushbu modulning joriy nazorat(assisment)ga ajratirlan maksimal ball-**0,8 ball.**

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

“Keys-stadi” metodi

«Keys-stadi» - inglizcha so‘z bo‘lib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «stadi» – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

«FSMU» metodi

Texnologiyaning maqsadi: Mazkur texnologiya ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, taqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o‘zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur texnologiyadan ma’ruza mashg‘ulotlarida, mustahkamlashda, o‘tilgan mavzuni so‘rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg‘ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Texnologiyani amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo‘lgan yakuniy xulosa yoki g‘oya taklif etiladi;
- har bir ishtirokchiga FSMU texnologiyasining bosqichlari yozilgan qog‘ozlarni tarqatiladi:

- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhiy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o‘zlashtirilishiga asos bo‘ladi.

III. NAZARIY MA’LUMOTLAR

MA’RUZA 1. MATEMATIK MODELLASHTIRISHNING ASOSIY TUSHUNCHALARI.

Model va uning turlari.

Model – bu real obyektni almashtirishi mumkin bo‘lgan, tadqiqot va tajriba o‘tkazish uchun qulay va arzon bo‘lgan boshqa bir real yoki abstrakt obyektdir. Model real obyektning soddalashtirilgan ko‘rinishi bo‘lib, uning hamma xossalarini emas, balki asosiy xossalarinigina o‘zida mujassam etadi.

Model lotincha “modulus” so‘zidan olingan bo‘lib, o‘lchov va namuna ma’nolarini bildiradi.

Hozirgi kunda fan olamida ma’lum bo‘lgan ma’lumotlarni ko‘rinishi va ma’nosiga qarab quyidagi 3 ta asosiy turga bo‘lish mumkin:

- fizik;
- grafikli;
- matematik.

Yuqorida keltirilgan bo‘linishlarga asosan modellar ham mos holda 3 turga – fizik, grafikli va matematik modellarga ajratiladi.

Fizik modellar. Tajriba o‘tkazishga mo‘ljallangan tajriba uchastkalari katta ekin maydonlarining, laboratoriya mashg‘ulotlarini o‘tkazishga mo‘ljallangan asbob uskunalar fizik modellarga misol bo‘ladi. Masalan, kimyoviy yoki biologik laboratoriyalarda foydalaniladigan asbob uskunalar hamda tokamak qurilmasi (yer sharoitida termoyadro reaksiyasini amalga oshiradigan qurilma).

Grafikli modellar. Sxemalar, chizmalar, rasmlar, ilmiy va tarixiy asarlar misol bo‘la oladi. Masalan, globus yer sharining, insonning surati uning o‘zining, M.Z.Boburning «Boburnoma» asari asarda keltirilgan davrning grafikli modelidir.

Matematik model – real obyektni tasavurimizdagi abstrakt ko‘rinishi bo‘lib, u matematik belgilar va ba’zi bir qonun–qoidalar bilan ifodalangan bo‘ladi. Masalan, Nyuton qonunlari, massaning saqlanish qonuni.

Matematik model va matematik modellashtirish

XX asrning o‘rtalaridan boshlab inson faoliyatining turli sohalarida matematik usullar va EHM qo‘llanila boshlandi. Obektlar va hodisalarning matematik modellarini o‘rganadigan “Matematik iqtisod”, “Matematik kimyo”, “Matematik lingvistika va hokazo yangi fanlar va bu modellarni o‘rganish usullari paydo bo‘ldi.

Matematik model – atrof borliqdagi hodisalar yoki obektlarning matematik tilidagi taxminiy ifodasidir. Modellashtirishning asosiy maqsadi – bu obektlarni o‘rganish va kelgusidagi kuzatishlar natijalarini oldindan aytish. Shu bilan birgalikda modellashtirish –atrof borliqni boshqarish imkonini beradigan bilish usulidir.

Modellarni ularning turli jihatlari bo‘yicha turlarga ajratish mumkin. Masalan, masalaning yechilishi hususiyatlariga qarab modellar *funksional* va *strukturali modellarga* bo‘linishi mumkin. Birinchi holda hodisa yoki obektni harakterlovchi barcha kattaliklar miqdoriy ifodalaniladi. Bunda ularning ayrimlari erkli o‘zgaruvchilar sifatida, boshqalari esa shu miqdorlarning funksiyalari sifatida qaraladi. Matematik model odatda turli ko‘rinishdagi (differensial, algebraik va hokazolar) tenglamalarning sistemalari ko‘rinishida yoziladi, bunda tenglamar qaralayotgan kattaliklar orasidagi miqdoriy bog‘lanishlarni ifodalaydi. Ikkinchi holda model murakkab obektning strukturasini ifodalaydi. Murakkab obekt odatda turli qismlardan tuzilgan bo‘lib, bu qismlar orasida ma’lum bog‘lanishlar mavjud. Bu bog‘lanishlarni odatda miqdoriy ifodalab bo‘lmaydi. Bunday modellarni qurishda graflar nazariyasidan foydalash qulay bo‘ladi. Graf tekislik yoki fazodagi nuqtalar (uchlar) ning biror to‘plamidan iborat matematik obyekt bo‘lib, ulardan ba’zilari chiziqlar (qirralar) bilan o‘zaro tutashtirilgan bo‘ladi.

Modeldagi berilganlar va bashoratlash natijalarining xarakteriga ko‘ra modellar *deterministik va ehtimolli-statistik modellarga* bo‘linadi. Birinchi modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinadi. Ikkinchi turdagi modellar statistik ma’lumotlarga asoslangan bo‘lib, ular yordamidagi bashoratlar ehtimolli harakterda bo‘ladi.

Matematik modellashtirish – kompyuterda hisoblashlar o‘tkazishgina emas. Bu birinchi navbatda voqea va jarayonlarni o‘rganish, ularni matematik tilda ifodalashdir. Matematik modellashtirish qimmat baholi eksperimentlar o‘tkazmasdan turib, voqea va jarayonlarning keyingi bosqichidagi hodisa va uning detallarini kompyuter ekranida o‘rganish, shuningdek, hattoki zamonaviy asbob-uskunalar ilg‘amaydigan (payqamaydigan) jarayonlarni izohlashdan iboratdir.

MATEMATIK MODELGA QO‘YILADIGAN TALABLAR VA MATEMATIK MODELNI QURISH BOSQICHLARI.

Matematik modelga qo‘yiladigan talablar

Matematik modelga qo‘yiladigan asosiy talablar quyidagilardan iborat:

1. Universallik, ya’ni konkret obyektni modeli boshqa o‘xshash obyektlarga qo‘llanishi uchun yetarli darajada universal bo‘lishi kerak. Bu degani real obyektni matematik modeli boshqa o‘xshash obyektlarga juda kam o‘zgartirishlar orkali qo‘llash uchun yetarli darajada umumiy bo‘lishi kerak.

2. Kompaktlik. Model shunday qurilishi kerakki, uni deyarli o‘zgartirishsiz o‘zidan yuqori darajali modelga model osti sifatida kiritish mumkin bo‘lsin. Masalan, daraxtni matematik modeli o‘rmon ekosistemasi modelining bir bloki sifatida qo‘llanilishi. Fotosintez jarayonining matematik modeli daraxt matematik modelini bir bloki sifatida ishlatilishi mumkin bo‘lsin.

3. Soddalik. YA’ni, matematik modelni qurishda ikkinchi, uchinchi darajali faktorlar hisobga olinmasligi lozim. Bu faktorlarni hisobga olish MMni murakkablashtiradi. Misol: epidemiyani tarqalishi jarayoni matematik modelida shamol tezligini hisobga olish modelni ancha murakkablashtiradi. Ammo atrof – muhitni ekologiyasini o‘rganishda shamol tezligini va yo‘nalishini hisobga olmaslik mumkin emas. Suv quvuridagi suvni harakatini o‘rganayotganda oyning tortishish kuchini hisobga olmasa ham bo‘ladi. Ammo, dengiz va okeanlardagi suv toshqinlarini o‘rganayotganda oyning tortishish kuchini albatta hisobga olish lozim. Bu toshqinlar oyning tortishi natijasida hosil bo‘ladi.

4. Sezgirlik darajasi past bo‘lishi lozim. MMni qurishda hisobga olinishi zarur bo‘lgan asosiy faktorlarga nisbatan modelni sezgirlik darajasi past bo‘lishi lozim. YA’ni, real obyektni o‘rganayotgan paytda o‘lgashlar ko‘p hollarda xatolik bilan

bajariladi. Ayrim hollarda modelda ishtirok etayotgan asosiy faktorni aniq o‘lchashni imkoni bo‘lmaydi. Masalan, ob – havoni bashorat qilish haligacha taxminiy, paxta maydonidagi hashoratlar sonini aniq o‘lchash mumkin emas.

Agar MMlar hisobga olinayotgan faktorlarni qiymatini o‘lchashda yo‘l qo‘yilgan xatoliklarga nisbatan sezgir bo‘lsa, ushbu matematik model mukammal bo‘lmaydi, ya’ni hech qachon bu model orqali o‘rganilayotgan obyekt to‘g‘risida qoniqarli natijalar olib bo‘lmaydi. Shu sababli hisobga olinayotgan faktorlarga nisbatan matematik model qo‘pol bo‘lishi, ya’ni faktorlarning qiymatiga sezgir bo‘lmasligi kerak.

Ammo, bu talab faqatgina tabiiy jarayonlar uchungina o‘rinli. Ishlab chiqarishda yoki texnologik jarayonlarda bu talab o‘rinli emas. Masalan, mashina ishlab chiqarilishda, farmasevtika sanoatida.

5. Moslashish darajasi yuqori bo‘lishi lozim. YA’ni, model blokli prinsipda qurilishi lozim. Bunda o‘zgaruvchilar iloji boricha alohida blokda, avtonom holda hisoblanishi maqsadga muvofiq.

Bu esa matematik modelni tez o‘zgartirish, modifikasiya qilish imkonini yaratadi. Umuman olganda bu talab unga katta bo‘lmagan o‘zgartirish orqali boshqa real obyektga moslashishni, ya’ni matematik modelni universalligini xarakterlaydi.

Matematik modellarni universalligiga doir misollar.

Matematik modellarga qo‘yiladigan asosiy talablardan biri universallik talabidir. YA’ni, matematik model nafaqat alohida, konkret jarayon yoki obyektni ifodalashi lozim, balki, yetarlicha kengroq turli jarayon yoki obyektlarni ifodalashi lozim. Masalan, tabiati turlicha bo‘lgan tebranish jarayonlarini misol sifatida keltirish mumkin.

1. *Kondensator va induktivlik katushkasidan iborat tebranuvchi elektr konturi.* Quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: $q(t)$ - kondensator zaryadi, $u(t)$ - kondensatordagi kuchlanish, C - kondensator sig‘imi, L - katushkalarning induktivligi, E - o‘zinduksiyaning elektr yurituvchi kuchi, i - tok kuchi. Ma’lumki, fizika fanida quyida keltiriladigan qonun va formulalar mavjud:

$$Cu(t)=q(t),\quad E=-L\frac{di}{dt},\quad i=-\frac{dq}{dt},\quad u(t)=-E(t).$$

Ushbu keltirilgan formulalar asosida quyidagi differensial tenglamani hosil qilish mumkin:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}=-\frac{q}{C}\quad\rightarrow\quad\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0\ .$$

Bu esa mexanika fanidan ma’lum bo‘lgan

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0$$

tebranish formulasining o‘zginasidir.

2. *Ikki biologik populyasiyaning o‘zaro ta’sirlashuvida hosil bo‘ladigan kichik tebranishlar.* Bu yerda quyidagi belgilashlar kiritamiz: $N(t)$ - o‘txo‘rlar populyasiyasi soni, $M(t)$ - go‘shtxo‘rlar populyasiyasi soni. U holda o‘zaro ta’sirlashuvchi ushbu populyasiyalar sonining o‘sish tezligi quyida keltiriladigan Lotki-Volter tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=(\alpha-cM)N,\quad \alpha>0,\qquad c>0,\\[2ex]\dfrac{dM}{dt}=(-\beta+d\cdot N)M,\quad \beta>0,\quad d>0.\end{cases}$$

Bu oddiy differensial tenglamalar sistemasi bo‘lib, u chiziqsizdir. Agar $\dfrac{dN}{dt}=\dfrac{dM}{dt}=0$ shart bajarilsa, ya’ni

$$M_0=\frac{\alpha}{c},\quad N_0=\frac{\beta}{d}.$$

qiymatlarda bu sistema muvozanatda bo‘ladi.

$n=N-N_0$ va $m=M-M_0$ belgilashlardan foydalanib, ushbu tenglamalar sistemasini quyidagi chiziqlashtirilgan sistema ko‘rinishiga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = -cN_0 m \\ \\ \dfrac{dm}{dt} = d \cdot M_0 n \end{cases}$$

Yoki bu sistemani bitta tenglama ko‘rinishiga keltirish mumkin:

$$\frac{d^2 n}{dt^2} + \alpha \beta n = 0.$$

Bu yuqorida keltirilgan tebranish tenglamasining xuddi o‘zidir.

3. *Maosh va ish bilan bandlik o‘zgarishining oddiy modeli.* Bu masalani o‘rganish uchun quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: $p(t)$ - maosh, $N(t)$ - ish bilan band bo‘lgan ishlovchilar soni. Mehnat bozorining muvozanati $p_0 > 0$ maosh bilan ishlashga rozi bo‘lgan $N_0 > 0$ sondagi ishlovchilar mavjudligidan iborat. Matematik modelni hosil qilishda quyidagi farazlardan foydalanamiz:

a) ish beruvchi ish bilan band bo‘lgan ishlovchilar sonining muvozanat qiymati N_0 dan og‘ishiga proporsional ravishda maoshlarni o‘zgartiradi;

b) ishlovchilar soni maoshning muvozanat qiymati p_0 ga nisbatan o‘zgarishiga proporsional tarzda o‘zgaradi.

U holda quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -a_1(N - N_0), \ a_1 > 0, \\ \\ \dfrac{dN}{dt} = -a_2(p - p_0), \ a_2 > 0. \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasidan yuqorida hosil qilingan tebranish tenglamalarini hosil qilish mumkin:

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p - p_0) = 0.$$

Xulosa sifatida shuni aytish mumkinki, matematik modellarni universalligi bitta tenglamadan tabiati turlicha bo‘lgan bir necha jarayonlarni yoki obyektlarni o‘rganishda foydalanish imkoniyatini yaratar ekan.

Matematik modelni qurish bosqichlari.

Matematik modelni qurish quyidagi asosiy bosqichlardan iborat:

1. Obektni o‘rganish. Bu bosqichda obyektga doir, uning dinamikasini, tabiatini xarakterlovchi ma’lumotlar yig‘iladi.

2. Yig‘ilgan ma’lumotlarni sistemalashtirish. Ishchi gipotezalar qabul qilish. Obyektni obyekt osti bloklarga ajratish, bloklarda o‘zgaruvchilarni aniqlash, bloklar va ulardagi o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘liqliklarni o‘rnatish. Obyekt uchun ikkinchi, uchinchi darajali faktorlar aniqlanib, bu faktorlar tashlab yuboriladi.

3. Yig‘ilgan ma’lumotlar asosida obyekt bo‘ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlanadi (masalan, variasion prinsip yoki analogiya prinsipi). Ushbu qonunlar asosida obyekt matematik tilda yoziladi. Matematik modelni nazariy tadqiqoti o‘tkaziladi.

4. Obyektni taklif etilayotgan matematik modeli “jihozlanadi”. YA’ni, bu bosqichda obyektni tabiatini ifodalovchi kattalikka nisbatan boshlang‘ich shart (jism tezligi, boshlang‘ich vaqtda populyasiya soni va shunga o‘xshash) va chegaraviy shartlar shakllantiriladi. Shu bilan matematik formallashtirish, ya’ni matematik modelni yozish jarayoni tugaydi.

5. Obyektni matematik modeli asosida diskret modeli quriladi va diskret model asosida dastur tuzilib, kompyuterda qo‘yilgan matematik masala yechiladi. Bu bosqichda HE utkaziladi. HE natijasida matematik model real obyektga muvofiqligi tekshiriladi. Modelni modelda ishtirok etayotgan faktorlarga nisbatan sezgirligi o‘rganiladi. Modelda qatnashayotgan kattalik yoki parametrlarni o‘zgarish chegaralari aniqlanadi. Boshqacha qilib aytganda, ushbu bosqichda MMni real obyektga moslashtirish ushbu bosqichda bajariladi.

MATEMATIK MODEL VA UNING REAL OBYEKTI ORASIDAGI MUVOFIQLIK. MATEMATIK MODELLARNING NAZARIY VA AMALIY TADQIQOTI, ULARNING ADEKVATLIGI.

Ma’lumki, model o‘rganilayotgan obyektning sodda ko‘rinishidir. Model hamma vaqt real obyektdan farq qiladi.

Matematik modellashtirish boshqa modellashtirishlarga nisbatan ustunliklarga ega bo‘lsada, hech qachon obyektni to‘la akslantira olmaydi.

Matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda obyekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat va miqdor jihatdan o‘xshashligi va yaqinligi tushuniladi.

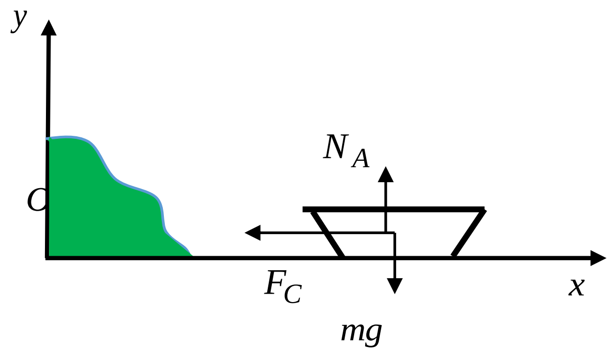
Agar obyekt va uning matematik modelini dinamikalari orasida o‘xshashlik, ya’ni muvofiqlik bo‘lmasa, bu muvofiqlikni o‘rnatishning bir necha usullari mavjud:

1. Matematik modelda ishtirok etayotgan o‘zgarmas kattaliklarni qaytadan baholash.
2. Matematik modelni yozishda qabul qilingan ishchi gipotezalarni qaytadan ko‘rib chiqish.
3. Real obyekt haqida qo‘shimcha ma’lumotlar yig‘ish.
4. Yangi yig‘ilgan ma’lumotlar asosida modelni qaytadan ko‘rib chiqish.

Matematik model va uning obyekti dinamikalari sifat jihatdan o‘xshash bo‘lsa-yu, miqdor jihatdan farqli bo‘lsa, u holda muvofiqlashtirishning 1–usulidan foydalanish lozim. Aks holda muvofiqlashtirishning 2,3,4 usullarining har biridan alohida – alohida foydalanish kerak. Qaysi biridan foydalanish model va uning obyekti dinamikalarini farq qilish darajasiga bog‘liq.

MMni real obyektga muvofiqlashtirishda ko‘p hollarda real obyektga nisbatan o‘tkazilgan tajriba, eksperiment natijalaridan foydalaniladi va bu natijalar bir necha marta solishtiriladi. Bu jarayon matematik model real obyektga yetarli darajadagi aniqlikga yaqinlashgunicha davom ettiriladi.

Misol. Qayiq qirg‘oqdan biror boshlang‘ich tezlik bilan turtib yuborildi. Ushbu qayiqning harakatini matematik modellashtirish vositasida o‘rganish zurur (3.1-rasm).



3.1-rasm.

Masalaning konseptual qo‘yilishi.

Boshlang‘ich gorizontal tezligi v_0 bo‘lgan qayiqning mg og‘irlik kuchi, N_A Arximed itaruvchi kuchi va F_C qarshilik kuchlari ta’siridagi harakatini o‘rganamiz. Qayiq suzayotganligi uchun (vertikal harakatlanmaydi), N_A Arximed itaruvchi kuchi mg og‘irlik kuchini muvozanatlashtiradi. Modelni tuzishda quyidagi farazlardan foydalanamiz:

- Tatqiqot obyekti bo‘lgan qayiq gorizontal tekislikda ilgarilanma harakat qiladi;
- Qayiqni m massali moddiy nuqta deb qaraymiz, uning joylashgan o‘rni massalar markazi bilan ustma ust tushadi;
- Qayiqning harakati unga qo‘yilgan kuchlar sistemasining ta’siri ostida dinamikaning asosiy qonuni (Nyutonning ikkinchi qonuni) ga bo‘ysunadi;
- Suvning F_C qarshilik kuchi qayiq tezligiga to‘g‘ri proporsional va qayiq harakatiga qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lib, uni $F_C = -\mu v$ tenglik bilan ifodalash mumkin. Bu yerda μ - proporsionallik koeffisiyenti (o‘zgarmas kattalik), v - qayiq tezligi.

Qayiq tezligini vaqtning funksiyasi sifatida topamiz va bu bog‘lanishni grafik ko‘rinshda tasvirlaymiz.

Masalaning matematik qo'yilishi.

Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra qayiqning x o'qi yo'nalishidagi harakatining tenglamasi

$$m\frac{dv}{dt} = -F_C = -\mu v, \qquad v(0) = v_0$$

ko'rinishda bo'ladi.

$v(t)$ ni topish talab etiladi.

Analitik yechim. O'zgaruvchilarni ajratish usulini qo'llash uchun tenglamani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}dt.$$

Uni integrallab, boshlang'ich shartni hisobga olib quyidagi yechimga ega bo'lish mumkin:

$$ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\mu}{m}t.$$

Bundan yechim uchun quyidagi tenglikni hosil qilish mumkin:

$$v = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}.$$

Sonli yechim. Tezlikdan olingan hosilani uning taqribiy ayirmali qiymati yordamida tasvirlaymiz:

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta e \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta e \to 0}\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Tenglama endi

$$\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = -\frac{\mu}{m}v(t)$$

ko'rinishni oladi. Bu yerdan

$$v(t+\Delta t)=v(t)-\frac{\mu}{m}v(t)\Delta t.$$

Bu munosabat qo‘yilgan masalani hal qiladi, chunki bu tenglik ixtiyoriy vaqt mometdidagi tezlikni uning bundan oldingi qiymati yordamida topish imkonini beradi. YA’ni, boshlang‘ich qiymatdan boshlab Δt vaqtdan keyin, so‘ngra yana Δt vaqtdan keyin va hokazo vaqtdan keyin tezlik qanaqa bo‘lishini aniqlash mumkin.

Hisoblash natijalari. $\mu = m$, $v_0 = 1$ deb olamiz. Bu holda tenglama quyidagi sodda ko‘rinishga ega bo‘ladi:

- Analitik: $v = e^{-t}$.
- Sonli: $v(t+\Delta t) = v(t)(1-\Delta t)$, $v_0 = 1$.

Vaqtning oxirgi momenti sifatida $t = 5$ ni tanlaymiz. Tezlikning bu vaqt momentidagi analitik (amalda aniq qiymati) qiymati quyidagiga teng:

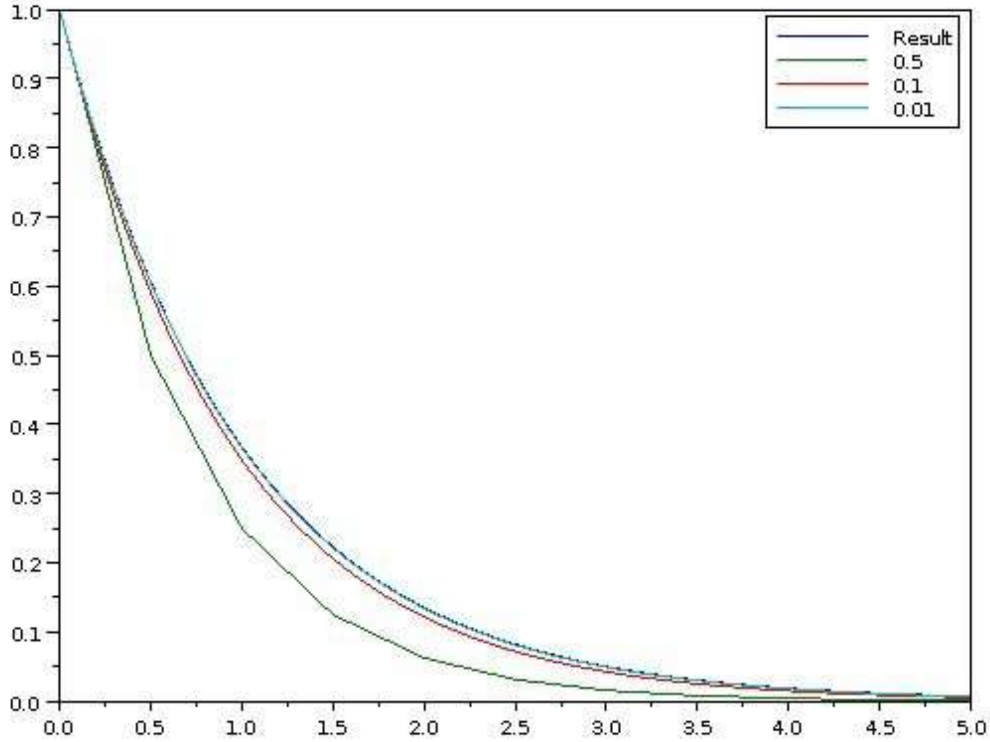
$$v(5) = exp(-5) = 0.0067379\ .$$

Tezlikning shu qiymatini sonli usulda topamiz. Qadamning turli qiymatlaridan foydalanamiz.

Hisoblash natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

Δt	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001	0.0001
v	0.0009766	0.0031712	0.0051538	0.0065705	0.0067211	0.0067363

Sonli yechishda $\Delta t = 0.0001$ qadam uchun olingan sonli natija ($v = 0.0067363$) aniq yechimga yaqinligi ko‘rinib turibdi. Bu esa qadam kichrayganda sonli yechim aniq yechimga intilishini bildiradi. Buni quyidagi grafikdan ham ko‘rish mumkin.


Result
0.5
0.1
0.01
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0

MA’RUZA 2. TABIATNING ASOSIY QONUNLARI QO‘LLANILISHINI TASVIRLAYDIGAN MATEMATIK MODELLAR

Energiyaning saqlanish qonuni

Reja:

1. Tabiatning asosiy qonunlari
2. Mexanikaviy energiya va uning turlari.
3. Energiyaning saqlanish qonuni.

Tabiatning asosiy qonunlari, variasion prinsiplar, o‘xshashliklar, iyerarxik zanjirlarning qo‘llanilishini tasvirlaydigan eng sodda matematik modellarni qurishda ba’zi yondashuvlarni ko‘rib chiqamiz. Oddiyligiga qaramay, jalb qilingan material modellarning yetarliligi, ularning "jihozlanishi", chiziqsizligi, raqamli tatbiq etilishi va boshqa bir qator matematik modellashtirish kabi tushunchalar muhokamasini boshlashga imkon beradi.

Tabiatning asosiy qonunlari. Modellarni yaratishning eng keng tarqalgan usuli - bu tabiatning asosiy qonunlarini muayyan vaziyatga qo‘llashdir. Ushbu qonunlar odatda tan olinadi, tajriba bilan bir necha bor tasdiqlanadi va ko‘plab ilmiy va texnologik yutuqlar uchun asos bo‘lib xizmat qiladi. Shuning uchun, ularning asosliligi shubhasizdir, bu boshqa narsalar qatori tadqiqotchiga kuchli psixologik yordam beradi. Ushbu vaziyatda qaysi qonunni (qonunlarni) qo‘llash kerakligi va uni qanday bajarish kerakligi haqidagi savollar birinchi o‘rinda turadi.

Jismlar bir-biri bilan ta’sirlashishi natijasida xarakat bir jismdan ikkinchisiga uzatiladi. O‘zaro ta’sir, ma’lumki, kuch vositasida ruy beradi, ya’ni kuch ta’sirida jismning mexanikaviy xarakati uzgaradi, ammo shuni xam nazarda tutish kerakki, agar jism tinch xolatda bo‘lsa, u xolda unga xech qanday kuch ta’sir qilmayapti degan xulosa kelib chiqmaydi: jismga ta’sir etayotgan kuchlar bir-birini muvozanatlaydi. Masalan, stol ustida tinch turgan jismning og‘irlik kuchi stolning aks ta’sir kuchi bilan muvozanatda bo‘ladi. Boshqa xollarda tashqi kuch ta’siri xarakat bilan bog‘lik bo‘lib, mazkur xarakat tufayli jism muayyan vaqt oraligida biror masofani bosib o‘tadi — tashqi kuch ish bajaradi.

Mexanikaviy ish va energiya degan ikki tushuncha o‘zaro uzviy bog‘lik tushunchalardir. Quyidagi misollar orqali bu uzviy bog‘lanish xaqida tasavvur xosil qilish mumkin. Manbalardan uzatilayotgan elektr energiyasini iste’mol qilib, uyimizdagi sovutgich, kir yuvish mashinasi, radio va oynaijaxonlar ishlaydi.

Ma’lumki, yonilg‘ining yonish jarayonida ajralib chiqqan issiqlik energiyasi xisobiga qishloq xo‘jalik mashinalari, transport vositalari, kema va samoletlar xarakatga kelib, ish bajaradi. Soatning prujinasini burab, muayyan ish bajaramiz, shu ish xisobiga soatda energiya to‘planadi; to‘plangan energiya esa mexanizmlarning ish bajarishi uchun sarf bo‘ladi. Balandlikdan tushayotgan suvning energiyasi bilan GES larning turbinalari xarakatga keladi, ya’ni ular ish bajaradi; bajarilgan ish xisobiga esa elektr energiyasi xosil bo‘ladi; biz bu yerda suvning mexanikaviy energiyasi bajarilgan ish vositasida elektr energiyasiga aylanayotganini ko‘ramiz. Shunday kilib, bajarilgan ish xisobiga energiya xosil kilinadi va aksincha, energiya sarflab ish bajariladi. Binobarin, ish bajarish qobiliyati energiya demakdir.

Energiya yo‘qdan bor bo‘lmaydi va yuqolmaydi, u faqat bir turdan boshqa turga o‘tadi. Biz quyida mexanikaviy energiyaning fakat ikki turi – kinetik va potensial energiyalar bilan tanishamiz.

Xarakatdagi jismning mexanikaviy energiyasi ***kinetik energiyadir***. Umuman energiya jismning ish bajarish qobiliyati ekanligini nazarda tutsak, kinetik energiyaga quyidagicha ta’rif berish mumkin: kinetik energiya deb harakatlanayotgan jismning ish bajarish qobiliyatiga aytiladi.

v tezlik bilan harakatlanayotgan jismning kinetik energiyasi uning massasi bilan tezligi kvadrati ko‘paytmasining yarmiga teng, ya’ni massasi m bo‘lgan jism v tezlik bilan xarakatlanayotgan bo‘lsa, uning kinetik energiyasi $\frac{mv^2}{2}$ ga teng. Ikkinchi tomondan, massasi m va tezligi v bo‘lgan jismni to‘xtatish uchun tashqi kuchlar $\frac{mv^2}{2}$ ga teng bulgan manfiy ish bajarishi lozim va aksincha, massasi m bulgan tinch turgan jismni v tezlik bilan harakatga keltirish uchun tashqi kuchlar $\frac{mv^2}{2}$ ga teng bo‘lgan musbat ish bajarishi lozim bo‘ladi.

Mexanikaviy energiyaning yuqorida ko‘rib o‘tilgan turi — kinetik energiyadan tashqari yana bir turi mavjud bo‘lib, u potensial energiyadir. ***Potensial energiya*** — jismlarning yoki ularning ayrim qismlarining o‘zaro ta’sir energiyasi bo‘lib, bu energiya ularning bir-biriga nisbatan joylashuviga bog‘lik. Shuning uchun potensial energiyaning qiymati jism (yoki tizim)ni bir vaziyatdan ikkinchi vaziyatga o‘tkazishda tashqi kuchlarning bajargan ishi bilan o‘lchanadi.

Jism (moddiy nuqta) konservativ kuchlar maydonida joylashgan bo‘lsin, ya’ni jismga konservativ kuchlardan boshqa kuchlar ta’sir qilmayotgan bo‘lsin. Konservativ kuchlarning elementar $d\vec{r}$ ko‘chishda bajargan ishi jism potensial energiyasining kamayishiga teng:

$$dA = -dE_p\ .$$

Ikkinchi tomondan, jismning $d\vec{r}$ masofaga ko‘chishida konservativ kuchlarning bajargan ishi uning kinetik energiyasining ortishiga teng

$$dA = dE_K$$

Bu ikki tenglikdan:

$$dE_K = -dE_p$$

yoki

$$d(E_K + E_P) = 0$$

ni hosil qilamiz. Oxirgi ifodadagi kinetik va potensial energiyalarning yig‘indisi $E = E_K + E_P$ jismning to‘la energiyasi deyiladi va

$$E = E_K + E_P = const$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bu formula bitta jism uchun energiyaning saqlanish qonunini ifodalaydi: konservativ kuchlar maydonida harakatlanayotgan jismlarning to‘la mexanikaviy energiyasi o‘zgarmaydi. Bu qonundan shu xulosa kelib chiqadiki, konservativ kuchlar maydonida kinetik energiya potensial energiyaga aylanishi va aksincha, potensial energiya kinetik energiyaga aylanishi mumkin, lekin jismning to‘la energiyasi o‘zgarmaydi. YA’ni jismning potensial energiyasi qanchaga kamaysa, uning kinetik energiyasi shunchaga ortadi va aksincha.

Energiyaning saqlanish qonuni deyarli ikki yuz yildan beri ma’lum va tabiatning buyuk qonunlari orasida eng sharafli o‘rinni egallaydi.

Misol ko‘ramiz:

Aylanadigan o‘qning tezligini tezda aniqlamoqchi bo‘lgan va uning yonida maxsus laboratoriyasi bo‘lmagan ballistik mutaxassis unga tayanib, mayatnik kabi nisbatan sodda asbobdan foydalanishi mumkin - yengil, qattiq va erkin aylanadigan sterjenga osilgan yuk (1.2-rasm).

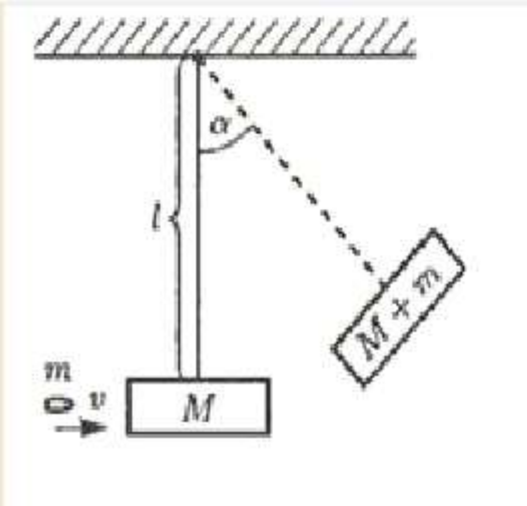


Рис. 1.2.

Yukka tiqilib qolgan o‘q o‘z kinetik energiyasini "o‘q-yuk" tizimiga yetkazib beradi, u tayoqning vertikaldan maksimal burilish momentida tizimning potensial energiyasiga to‘liq aylanadi.

Bu harakatni quyidagi tengliklar orqali ifodalash mumkin

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha)$$

Bu yerda

$\frac{mv^2}{2}$ – m massali o‘qning kinetik energiyasi,

v – o‘qning tezligi,

M – yuk massasi,

V – “o‘q-yuk” sistemasining to‘qnashishdan keyingi tezligi,

g - erkin tushish tezlanishi,

l – sterjen uzunligi,

α – maksimal og‘ish burchagi.

Dastlabki tezlik quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}}$$

Agar yuk va o‘qning qizishiga, havo qarshiligini yengishga va h.k.z. ketgan energiya sarfini kichik deb, e’tiborga olmasak, formula o‘rinli deb hisoblash mumkin.

Bu, birinchi qarashda, asosli fikrlash aslida noto‘g‘ri. O‘q va mayatnik "bir-biriga to‘qnashganda" paydo bo‘ladigan jarayonlar endi faqat mexanik emas. Shuning uchun *v* qiymatini hisoblash uchun ishlatiladigan mexanik energiyaning saqlanish qonuni adolatsiz: tizimning mexanik emas, balki umumiy energiyasi saqlanib qoladi. Bu o‘q tezligini taxmin qilish uchun faqat pastki chegarani beradi (bu oddiy masalani to‘g‘ri hal qilish uchun impulsning saqlanish qonunidan ham foydalanish kerak).

Yuqorida mexanikaviy energiyaning saqlanish qonunini ko‘rib o‘tganimizda, biz faqat konservativ kuchlar ta’sir etadigan tizimni olib qaragan edik. Aksariyat xollarda konservativ kuchlardan tashqari tizimga nokonservativ kuchlar xam ta’sir etadi. Nokonservativ kuchlarga, xususan, ishqalanish kuchlari va muxitning qarshilik kuchlari kiradi. Bu kuchlarning bajargan ishi manfiydir.

Shuning uchun nokonservativ kuchlar mavjud bo‘lganda tizimning to‘la mexanikaviy energiyasi kamayib boradi va bunday kamayishi energiyaning dissipasiyasi (isroflanishi) deyiladi.

Energiyaning bu kamayishini tashqi manbadan uzluksiz to‘ldirib turilmasa, ishqalanish kuchlari mavjud bo‘lgan tizimda (masalan, transport vositalarida) xarakat oxiri to‘xtaydi, ya’ni energiyaning yo‘qotilishi kuzatiladi. Demak, dissipativ kuchlar mavjud bo‘lganda, tizimning to‘la mexanikaviy energiyasi saqlanmaydi. Bundan energiyaning saqlanish qonuni buzilayapti degan xulosa kelib chiqmaydi; ishqalanish mavjud bo‘lganda mexanikaviy energiyaning boshqa turdagi energiyaga aylanishi sodir bo‘ladi, xususan, mexanikaviy energiya issiqlik energiyasiga aylanadi. Issiqlik energiyasi esa jism tarkibidagi atom va molekulalarning tartibsiz xarakatidan iborat energiyadir (jism tarkibidagi atom va molekulalarning tartibsiz xarakatini bizning sezgi a’zolarimiz issiklik tarzida idrok etadi).

Nokonservativ kuchlar ta’siri tufayli berk tizimda mexanikaviy «energiyaning yo‘qolishi»da xamma vaqt mazkur «yo‘qolish»ga teng bo‘lgan miqdorda boshqa turdagi energiya ajralib chiqadi. Elektr energiyasi ishlab chiqiladigan qurilmalarda ko‘pincha mexanikaviy energiyaning (masalan, oqar suv energiyasining) elektr energiyasiga aylanishini kuzatamiz.

Fizika tarixida shunday xollar xam bo‘lganki, tajribadan olingan natijalarda energiyaning saqlanish qonuni bajarilmayotganga o‘xshab tuyulgan. Masalan, atom yadrolarining beta-yemirilish xodisalarida energiya va impulsning saqlanish qonunining «buzilishi» kuzatilgan. Keyinchalik, fiziklarning mantiqiy muloxazalari shunday xulosaga olib keldiki, beta-yemirilishda elektron bilan birga yadrodan boshqa bir noma’lum zarracha uchib chiqishi va bu zarracha o‘zi bilan birga olib ketayotgan energiya bu jarayonda yetishmayotgan energiya mikdoriga teng bo‘lishi kerak. Bunday dadil xulosaga kelish uchun makroskopik mexanika qonunlaridan chetga chiqadigan tasavvurlarga tayanishga to‘g‘ri keldi. O‘tkazilgan qo‘shimcha tajribalar esa mazkur xulosani tasdiqladi (zarracha neytrino degan nom oldi).

Shunday qilib, oddiy mexanikaviy xodisalarga nisbatan yana xam kengrok miqyosdagi fizikaviy xodisalarni qamrab olgan energiyaning saqlanish qonuni qaror topdi. Bu qonun energiyaning umumfizikaviy saqlanish qonuni deyiladi. Bu qonunga asosan, ***energiya hech qachon yo‘qdan bor bo‘lmaydi va mavjud energiya yuqolmaydi, u faqat bir turdan ikkinchi turga aylanishi mumkin.*** Energiyaning umumfizikaviy saqlanish qonuni mexanika xodisalarinigina o‘z ichiga olib qolmay, balki mexanika qonunlarini qo‘llash mumkin bo‘lmagan xodisalarni xam qamrab oladi. Bu qonun mexanika qonunlaridan keltirib chiqkarilmaganligini tushunish qkiyin emas: u keng miqyosdagi tajriba natijalarini umumlashtirishdan kelib chiqqan mustaqil qonundir.

Takrorlash uchun savollar:

1. Xarakatdagi jismning mexanikaviy energiyasi nimalardan iborat?
2. Energiyaning saklanish konuni muammolari nimalardan iborat?
3. Saklanish konunlari va ularning zaruriyatini tushuntiring.

Massa (materiya)ning saqlanish qonuni

Reja:

1. Tarixiy ma’lumotlar.
2. Moddalar massasining saqlanish qonuni.
3. Oqim uzluksizligi tenglamasi.

Tarixiy ma’lumotlar

Massaning saqlanish qonuni fizika qonunidir, unga ko‘ra fizik tizim massasi barcha tabiiy va sun’iy jarayonlarda saqlanib qoladi.

Bu qonun qadim zamonlardan beri ma’lum bo‘lgan. Keyinchalik, miqdoriy formulyasiya paydo bo‘ldi, unga ko‘ra modda miqdori o‘lchovi og‘irlik deyildi (17-asr oxiridan boshlab - massa).

Klassik mexanika va kimyo nuqtai nazaridan, yopiq fizik tizimning umumiy massasi saqlanib qoladi, bu tizim tarkibiy qismlarining massalari yig‘indisiga teng bo‘ladi (ya’ni massa additiv xisoblanadi).

Additiv jismoniy miqdor - bu fizik kattalik bo‘lib, uning turli qiymatlari yig‘ilib, son koeffisiyentiga ko‘paytiriladi va bir-biriga bo‘linadi. Misol uchun: uzunlik, massa, kuch, bosim, vaqt, tezlik va boshqalar additiv miqdorlar hisoblanadi.

Ushbu qonun Nyuton mexanikasi va kimyosini qo‘llash soxasida juda aniqlik bilan amal qiladi, chunki bu xolatlarda relyativistik tuzatishlar axamiyatsiz hisoblanadi.

Zamonaviy fizikada massa tushunchasi va xususiyatlari sezilarli darajada qayta ko‘rib chiqilgan. Massa endi materiya miqdorini o‘lchamaydi va massaning saqlanish qonuni tizimning ichki energiyasini saqlash qonuni bilan chambarchas bog‘likdir. Klassik modeldan farqli o‘laroq, faqat izolyasiya qilingan jismoniy tizimning massasi saqlanib qoladi, ya’ni tashqi muxit bilan energiya almashinuvi yo‘q bo‘lganda. Tizim tarkibiy qismlarining massalari yig‘indisi saqlanib qolmaydi. Masalan, modda va nurlanishdan iborat izolyasiya qilingan tizimda radioaktiv parchalanish paytida moddalarning umumiy massasi kamayadi, ammo nurlanish massasi nolga teng bo‘lishiga qaramay tizim massasi saqlanib qoladi.

1755 yilda M.V.Lomonosov bu xaqda L. Eylerga yozgan maktubida shunday yozgan edi (Vikipediyadagi matnga karang):

Tabiatda yuz beradigan barcha o‘zgarishlar shunday sodir bo‘ladiki, agar biror narsaga biror narsa qo‘shilsa, u boshqa narsadan tortib olinadi. Shunday qilib, biror jismga qancha modda qo‘shilsa, boshqasidan shuncha narsa yo‘qoladi, masalan, qancha soat uxlashga sarf qilsam, shuncha miqdordagi bedorlikni olib tashlayman va xokazo.

SSSRda ushbu ibora asosida M.V.Lomonosov massani saqlanish qonunining muallifi deb e'lon qilindi,
Lavuazye o'zining "Kimyoning birlamchi o'quv qo'llanmasida" (1789) materiyaning massasini saqlanish qonunining aniq miqdoriy shakllanishini bergan, ammo uni yangi va muxim qonun deb e'lon qilmagan, balki shunchaki taniqli va ishonchli tarzda tasdiqlangan xaqiqat sifatida eslatib o'tgan. Kimyoviy reaksiyalar uchun Lavuazye qonunni quyidagi ifodalarda shakllantirgan:
Sun'iy jarayonlarda xam, tabiiy jarayonlarda xam xech narsa yaratilmaydi va har bir operasiyada [kimyoviy reaksiya] oldin va keyin bir xil miqdordagi materiya borligi, ularning sifati va miqdori bir xil bo'lib qolishi, faqat joy o'zgarishi va qayta guruxlanishlar sodir bo'ladi degan qarashni ilgari surish mumkin. Kimyo bo'yicha tajribalar o'tkazish butun san'ati ushbu qarashga asoslangan.
Boshqacha qilib aytganda, kimyoviy reaksiya sodir bo'ladigan yopiq fizik tizimning massasi saqlanib qoladi va shu reaksiyaga kirgan barcha moddalar massalarining yig'indisi barcha reaksiya maxsulotlarining massalari yig'indisiga teng (ya'ni, u ham saqlanib qoladi). Massa shu tariqa additiv hisoblanadi.
M.V.Lomonosov va A. Lavuazye asarlari asosida massaning saqlanish qonuni shakllantirildi.
Kimyoviy reaksiyaga kirgan moddalar massasi hosil bo'lgan moddalar massasiga teng.

Moddalar massasining saklanish konuni

Ta'rifi: *Reaksiyaga kirishayetgan moddalar massalarining yig'indisi reaksiya natijasida xosil bo'lgan moddalar massalari yig'indisiga tengdir*. (M.V.Lomonosov 1789 y).
Ta'rifni qanchalik to'g'ri ekanligini quyidagi reaksiya tenglamasi va xisoblashlar bilan tekshirib ko'raylik.
H2SO4 + 2KOH →K2SO4 + 2H2O
Unga kura: Σ m dast.moddalar = Σ m maxsulot .
Dastlabki moddalar:
H2SO4 va KOH ekanligini hamda hosil bo'lgan moddalar K2SO4 va H2O ekanligini bilgan xolda Σ m dast.moddalar va Σ m maxsulot qiymatini xisoblaymiz:
Σ m maxsulot = (2+32+(16*4)) + (2*39+16+1) = 98 + (2 * 56) = 210 gramm.
Σ m dast.moddalar = ((2*39)+ 32 + (16*4)) = 174 + 36 = 210 gramm.
Demak: Σ m dast.moddalar = Σ m maxsulot ya'ni 210 gramm = 210 gramm. Bu konunning amaliy axamiyati shuki, xar kanday jarayonni amalga oshirish uchun zarur bo'lgan xomashyo (dastlabki moddalar) ni va undan xosil bo'luvchi maxsulot miqdorini xisoblashni, ya'ni xar bir texnologik jarayonlarnning moddiy balansini xisoblashni o'rgatadi.
Avogadro qonuni gazsimon moddalarga tegishli bo'lib, quyidagicha ta'riflanadi: Bir xil sharoit (bir xil bosim va temperatura) da teng xajmdagi turli gazlarda molekulalar soni teng bo'ladi.
Gaz xolatidagi moddalarning "mol" miqdori (n), xajmi (V) massasi (m), molekulyar massasi (M), bosimi (P), temperaturasi (T) o'rtasidagi o'zaro bog'lanishlarni bilish

talab etilganda Avogadro qonunidan kelib chiquvchi xulosalar bilan birlikda Mendeleyev - Klaypeyron va gazlarning xolat tenglamalaridan foydalaniladi.

Mendeleyev - Klayperon tenglamasi: Xar kanday sharoitda "1 mol" gaz uchun: PV = nRT xolida boʻlib, bu n = 1 mol boʻlgan xollarda PV = RT xolida yoziladi. Agar moddaning "mol"lar soni - n , massasi-m va molekulyar massasi - M ni e’tiborga olsak: n = m/M boʻlib, buni yuqoridagi tenglamaga qoʻysak: $P*V=m/M*R*T$ boʻladi.
Bu formuladan foydalanib gazlarning massasi, molekulyar massasi, xajmi, bosimi kabi kattaliklarni xisoblab topiladi. Ma’lumki, gazlarning umumlashgan xolat tenglamasi:

$$\frac{P_0 * V_0}{T_0} = \frac{P * V}{T}$$

mavjud.
Bu formuladan foydalanib, biror real sharoitdagi (P, T) V sigʻimli gazning normal sharoitdagi hajmi (bosimi, temperaturasi) V0 ni (yoki aksincha) hisoblab topiladi:

$$V_0 = P*V*T_0 \ / \ T*P_0.$$

Bu gaz hajmini normal sharoitga keltirish formulasi deb ham aytiladi.
Yuqorida aytib oʻtilgan qonunlardan foydalanish metallurgiya uchun juda muxim boʻlgan bir qator muammolarni xal qilishga imkon beradi, masalan, suyuqlik va gazlarning oqim tezligini oʻlchash, tozalash gazini suyuq metallga kiritish jarayonlarining matematik tavsifi va boshqalar.
Izolyasiya qilingan tizim uchun massani saqlanishsh qonuni shundan iboratki, ushbu tizimning massasi butun xarakat davomida doimiy boʻlib qoladi, ya’ni vaqtga nisbatan massaning umumiy xosilasi nolga teng

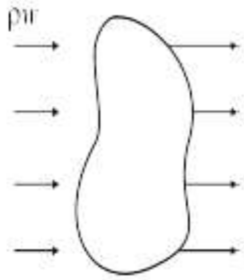
$$\frac{dm}{dt} = 0 \qquad (3.89)$$

Agar sistema ajratilmagan boʻlsa va uning yuzasi orqali modda (masalan, suyuqlik) kirib chiqsa, u xolda bu hajm massasining vaqt birligida oʻzgarishi quyidagicha boʻladi:

$$\Delta m = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

bunda ρ– zichlik.

Oqim uzluksizligi tenglamasi
Massaning saqlanish qonunining ifodasi boʻlgan oqimning uzluksizligi tenglamasini olish uchun oʻzgarmas *V* xajmdagi qoʻzgʻalmas yopik yuza *F* orkali oʻtuvchi vektor okimini koʻrib chiqaylik (3.7-rasm).



3.7 rasm: Yopiq hajmli sirt orqali moddalarni o‘tkazish sxemasi

Kiruvchi suyuqlikning tengsizligi xolatida ushbu hajm massasining o‘zgarishi quyidagi

$$\Delta m = \int_F \rho \omega_n dF$$

ga teng bo‘ladi, bu yerda

ω_n – tezlik vektorining maydon normaliga proyeksiyasi.

O‘zgarmas hajmda massa faqat suyuqlik yoki gaz zichligi tufayli o‘zgarishi mumkin, quyidagicha yozishimiz mumkin

$$\Delta m = \int_F \rho \omega_n dF = -\int_V \frac{d\rho}{dt} dV.$$

Integralning sirt ustidagi musbat qiymati ma’lum miqdordagi chiqib ketadigan suyuqlikka to‘g‘ri keladi, xajmdagi integral esa manfiy bo‘lishi kerak, chunki massasi kamayishi bilan uning zichligi pasayadi. Siqilmagan suyuqlik uchun

$$\int_F \omega_n dF = 0,$$

ya’ni xar qanday yopiq sirt orqali tezlik oqimi nolga teng.

Masalan, quvur liniyasidagi siqilmaydigan suyuqlik oqimining ikki bo‘lagi uchun uzluksizlik tenglamasini kuyidagicha yozish mumkin:

$$\omega_1 \overline{F}_1 = \omega_2 \overline{F}_2$$

Masalalar.

1. Aeronavtlar sharga 2 kg ozik-ovqat yukladilar va xavoga ko‘tarildilar. Barcha ovqatlar iste’mol qilingandan keyin aeronavtlar bilan sharning massasi qanday o‘zgargan?

2. Ilmiy xodim maktabdagi bo‘r bilan tajriba o‘tkazishga karor kildi. U distillash apparatini yig‘di, ichiga 20 g bo‘r (SaSO3) solib, kuchli gaz olovida qizdirdi. Uning kutganidek bo‘r erimadi, aksincha yorilib ketdi. Qurilmadan bir tomchi suyuklik xam chiqmadi. Bo‘r soviganida, Ilmiy xodim uni o‘lchashga qaror qildi va bo‘rning deyarli yarim og‘irligi qolganiga xayron bo‘ldi: 11,2 g! Ilmiy xodim qizdirilganda massaning saqlanmaslik qonunini kashf etganini angladi va shu bilan birga ma’lum massani saqlanish qonunini inkor qildi! Ilmiy xodim darxol Fanlar akademiyasiga xat yozish uchun o‘tirdi, ammo o‘sha paytda uning do‘sti laboratoriyaga kirdi va unga tajriba oxirida kolbada endi bo‘r emas, kalsiyning kislorod bilan birikmasi

hosil bo‘lganligini aytdi. Buning isboti sifatida do‘sti "bo‘r" ga tupurdi. "Bo‘r" vishillab ketdi. ...
Laboratoriyada qanday reaksiyalar yuz berdi? Ularning tenglamalarini yozing va 8,8 g modda qayerga "g‘oyib" bo‘lganligini tushuntiring?

Savollar:
1. Massaning saqlanish qonuni bo‘yicha qanday tarixiy ma’lumotlarni bilasiz
2. Moddalar massasining saklanish qonunini tushuntiring.
3. Oqim uzluksizligi tenglamasi qanday yoziladi?

IYERARXIYA PRINSIPIDAN FOYDALANIB, MATEMATIK MODELLAR QURISH

Oldingi paragrafda biz modellarni qurishda fizik qonunlarning tadbiqini o‘rganib chiqqan edik, bu paragrafda esa model qurilgan, ammo endilikda bu model yanada umumiyroq holga nisbatan qo‘llanilishi mumkinligi ma’lum bo‘lib qolgan vaziyatni o‘rganib chiqamiz. Faqatgina ayrim hollarda eng sodda modellarning matematik modellarini to‘liq qo‘rinishda, uning hatti-harakati uchun mos bo‘lgan barcha omillarni qurish o‘zini oqlaydi. Shuning uchun «soddadan-murakkablikka qarab» tamoyilini amaliyotga tadbiq etuvchi yondashuv o‘rinli bo‘lib, bu yondashuvga ko‘ra keyingi qadamga murakkab bo‘lmagan modelni sinchkovlik bilan o‘rganib chiqqandan so‘ng o‘tiladi. Bunda har biri oldingi modellarni umumlashtiruvchi va ularni o‘zining xususiy holi sifatida o‘ziga biriktirib oluvchi nisbatan to‘la modellar zanjiri (iyerarxiyasi) hosil bo‘ladi.

Bunday zanjirni ko‘p pog‘onali raketaning modeli misolida o‘rganmaiz. Oldingi ma’ruzaning oxirida qayd qilinganidek, haqiqiy bir pog‘onali raketa birinchi kosmik tezlikka erisha olmaydi. Buning sababi - yonilg‘ining kerakli bo‘lmagan strukturaviy massani harakatlantirib yuborishga sarf bo‘lishidir. Demak, raketa o‘zining harakati davomida davriy ravishda ballastdan qutulib borishi lozim.

Amaliy konstruksiyada esa bu raketa foydalanib bo‘lingandan so‘ng tashlab yuboriladigan bir nechta pog‘onalardan tashkil topishini anglatadi.

Quyida keltiriladigan belgilashlardan foydalanmiz: m_i – i-chi pog‘onaning umumiy massasi, λm_i – i-chi pog‘onaga mos keluvchi struktura massasi (bunda yoqilg‘ining massasi $(1-\lambda)m_i$ kattalikka teng), m_p - foydali yuk massasi. λ kattalik va gazlarning tezligi u barcha pog‘onalarga nisbatan bir xildir. Aniqlik uchun pog‘onalar sonini n=3 ga teng deb olamiz. Bunday raketaning boshlang‘ich massasi

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

ga teng. Birinchi pog‘onaning yoqilg‘isi sarf bo‘lgan va raketa massasi

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$$

ga teng bo‘lgan momentni o‘rganib chiqamiz. U holda Siolkovskiyning formulasiga ko‘ra, raketaning tezligi

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

ga teng bo‘ladi. v_1 tezlikka erishilgandan so‘ng, λm_1 strukturaviy massa tashlab yuboriladi va ikkinchi pog‘ona ishga kiradi. Bu momentda raketaning massasi

$$m_p+m_2+m_3$$

ga teng bo‘ladi.

Shu momentdan boshlab, to ikkinchi pog‘onadagi yoqilg‘i to‘la yonib bitgunga qadar qurilgan modeldan foydalanishga hech narsa halaqit bermaydi. Impulsning saqlanishi to‘g‘risidagi barcha mulohazalar o‘z kuchini saqlab qoladi (endilikda raketaning boshlang‘ich tezligi v_1 ga teng ekanligini hisobga olish darkor). U holda, Siolkovskiyning formulasiga ko‘ra, ikkinchi pog‘onadagi yoqilg‘i yonib tugagandan so‘ng, raketa

$$v_2 = v_1 + u\ln\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right)$$

tezlikka erishadi.

Huddi shu mulohazalarni raketaning uchinchi pog‘onasiga nisbatan ham qo‘llash mumkin. Raketaning dvigateli o‘chirilgandan so‘ng, raketaning tezligi

$$v_3 = v_2 + u\ln\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right)$$

ga teng bo‘ladi.

Bu zanjirni ixtiyoriy sondagi pog‘onalarga nisbatan davom ettirib, mos formularni hosil qilish mumkin. n=3 holda esa oxirgi tezlikka nisbatan

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right)\cdot\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right)\cdot\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right)$$

tenglikni hosil qilish mumkin. Bu tenglikda quyidagicha belgilashlar

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3} \quad \alpha_3 = \frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}$$

kiritib, uni nisbatan soddaroq ko‘rinishga keltirish mukin:

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1-1)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2-1)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3-1)}\right)\right\}.$$

Mazkur ifoda $\alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \alpha_3$ kattaliklarga nisbatan simmetrik bo‘lib, u o‘zining maksimumiga simmetrik holda, ya’ni $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ bo‘lganda erishadi. Bunda, i =3 ga nisbatan

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, \qquad P = \exp\left(\frac{v_3}{3u}\right)$$

munosabat o‘rinlidir.

$\alpha^3 = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3$ ko‘paytma m_0/m_p ga teng ekanligini osongina tekshirib ko‘rish mumkin. Bundan quyidagiga ega bo‘lish mumkin:

$$\alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)^3}{(P-\lambda)^3}.$$

Ko‘p pog‘onali raketaga nisbatan shunga o‘xshash ravishda

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^n, \quad P = \exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right)$$

munosabatlar o‘rinli, bu yerda n — pog‘onalar soni.

Oxirgi hosil qilingan formulani tahlil qilaylik. v_n = 10,5 km/s, λ= 0,1 deb olamiz. U holda n = 2,3,4 larga nisbatan mos ravishda m_0=149m_r, m_0=77m_p, m_0=65m_p larni hosil qilish mumkin. Bu degani, ikki pog‘onali raketa foydali massani orbitaga chiqarishga layoqatlidir (ammo bir tonallik foydali yukda 149 tonnalik vaznli raketaga ega bo‘lish darkor). Uchinchi pog‘onaga o‘tish raketaning massasini deyarli ikki martaga kamaytiradi (ammo uning tuzilmasini murakablashtiradi), to‘rt pog‘onali raketa esa uch pog‘onaliga nisbatan sezilarli yutuqni bermaydi.

Iyerarxik zanjirni qurish bu kabi muhim xulosalarga nisbatan oson yo‘l bilan kelish imkonini berdi. Matematik modellarning iyerarxiyasi teskari tartibda “murakkablikdan soddalikka” tamoyili bo‘yicha ham quriladi. Bunday holatda “yuqoridan pastga” prinsipi asosida ish ko‘riladi – umumiy va murakkab modeldan soddalashtiruvchi farazlar asosida nisbatan sodda (ammo tadbiq etilish doirasi ancha tor bo‘lgan) modellar ketma-ketligi hosil qilinadi.

MA’RUZA №3. JAMIYAT RIVOJLANISHINING DEMOGRAFIK MODELI

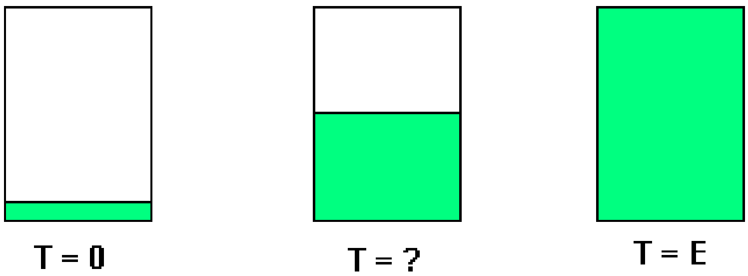
Maltus va Ferxyulst-Perl modellari.

Maltus modeli.

Maltus modellari universaldir – u geometrik progressiya va regressiyalarga taalluqli barcha hodisalarni ifodalaydi. Uning tadbiq etilish doirasiga radioaktiv yemirilish qonuni ham, ozuqa bilan to‘yingan muhitda mikroorganizmlarning soni ham kiradi.

Quyidagi masalani o‘rganib chiqamiz:

Bizga qandaydir ozuqaviy muhit bilan to‘ldirilgan banka berilgan bo‘lsin. Yarim tunda – 00 soat, 00 minut, 00 soniyada bankaga ma’lum miqdordagi bakteriya joylashtirilgandan so‘ng ular bo‘linishni boshlaydi. Banka keyingi kunning 00 soat, 00 minut, 00 soniyasida, ya’ni 24-soatdan keyin bakteriyalar bilan to‘ldirilishi ma’lum. Shuningdek, har soniyada bankadagi bakteriyalar soni ikki baravar ko‘payishi ham ma’lum. Banka qachon (soat, minut va soniyada) yarmigacha to‘lishini aniqlang (7.1-rasm).



7.1-rasm. Bakteriyali bankaning modeli. T = 0 –tajribaning boshlanish vaqti,
T = E – tugash vaqti (E alohida olingan birlik sistemasidagi 24 soatga to‘g‘ri keladi),
T = ? – izlanayotgan vaqt momenti.

Bu masalani yechishning an’anaviy usuli – bir sekundda bakteriyalar soni ikki baravar ortish faktidan foydalanishdir. Shunday qilib, YE vaqtgacha bir sekund qolganda (7.1-rasmga qarang) bakteriyalar soni YE momentdagiga qaraganda ikki baravar kam bo‘ladi (to‘la banka), ya’ni 23:59:59 da banka yarmigacha to‘lgan bo‘ladi. Qanday qilib bu ajoyib qonuniyatni yanada ko‘proq masalalarga nisbatan kengaytirish mumkin? Maltus modeli aynan shunday yechimni taklif etadi.

Maltus modeli quyidagi differensial tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N.$$

Bu tenglama quyidagi umumiy yechimga ega:

$$N = N_0 e^{(\alpha-\beta)t}.$$

Keltirilgan differensial tenglama tezligi (tenglamaning chap qismi) joriy vaqt momentdagi miqdorga proporsional bo‘lgan jarayonni ifodalaydi. Bizning masalamizga nisbatan u $k=\alpha$-β koeffisiyentni kiritish bilan qayta bayon etilishi mumkin. Jumladan, masalaning shartiga ko‘ra, k =2 ekanligi kelib chiqadi, chunki bir sekund ichida bakteriyalar soni ikki marta ko‘payadi. Va biz masalaning xususiy holiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{dN}{dt} = 2N$$

va uning yechimi:

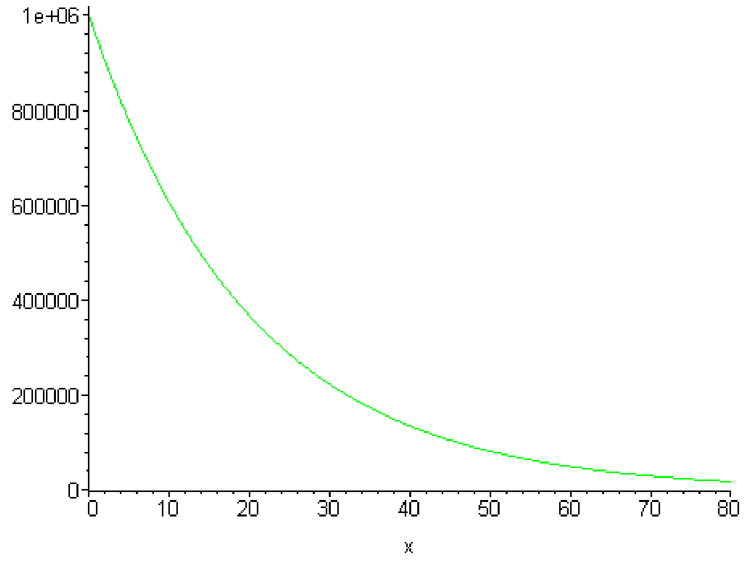
$$N = N_0 e^{2t}$$

bo‘ladi.

Bu yechimdan ixtiyoriy vaqt momentidagi bakteriyalar sonini hosil qilib olish mumkin.

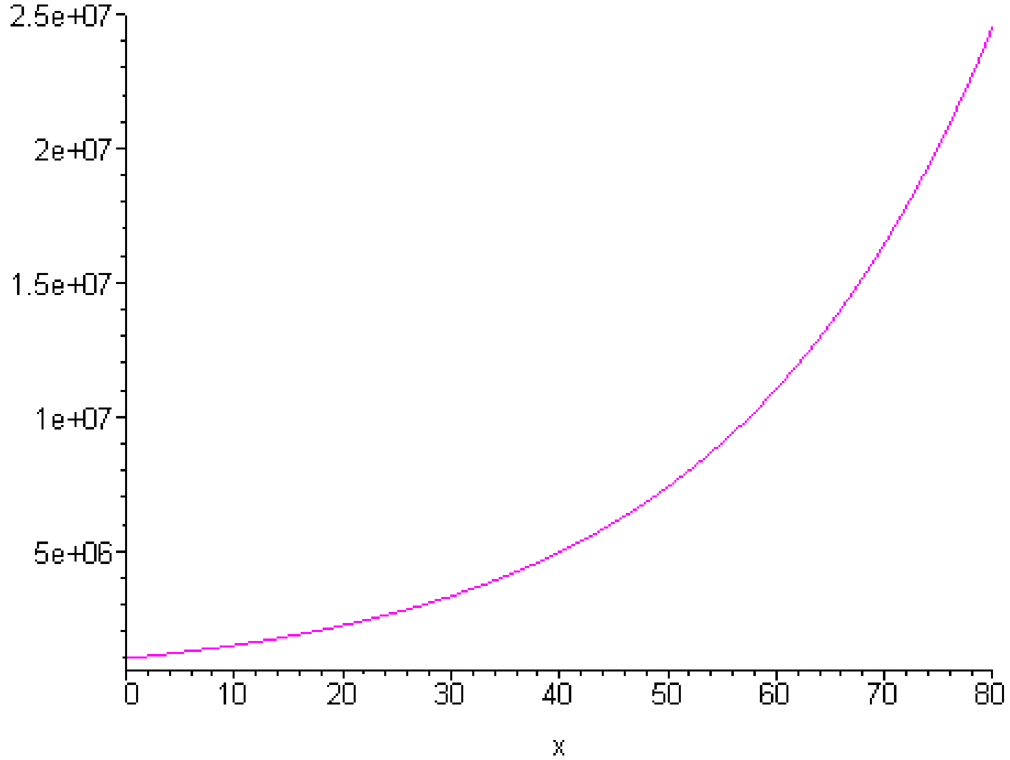
Bu modelning tadbiq etilish doirasining chegaralarini aniqlash uchun, uning α va β parametrlarning har xil qiymatlaridagi hatti-xarakatini o‘rganib chiqamiz.

Maltus modeli ideal holda aholi sonini modellashtirish uchun tadbiq etilishi mumkin, bunda α va β parametrlar mos ravishda tug‘ilish va o‘lish koeffisiyentlarini ifodalaydi. Mazkur modelning har xil qiymatli koeffisiyentlardagi tabiatini o‘rganib chiqamiz (7.2-7.3-rasmlar).



7.2-rasm. Maltus modeli. α=0,43; β=0,48; N_0=1000000
(abssissa o‘qi bo‘yicha vaqt, ordinata o‘qi bo‘yicha aholi soni joylashgan).

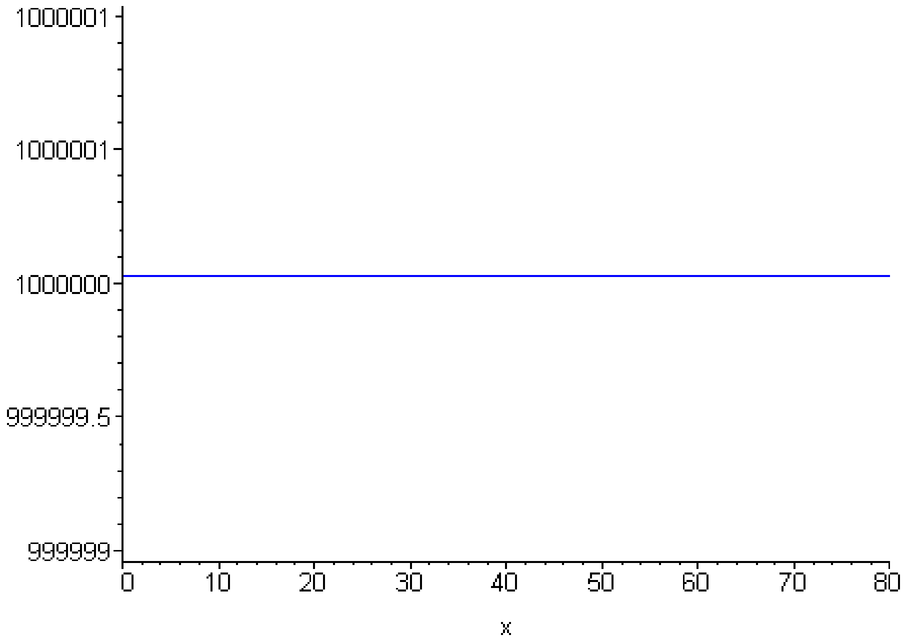
Ko‘rinib turibdiki, agar o‘limlar soni tug‘ilishlarga qaraganda ko‘proq bo‘lsa, u holda Maltus modeli aholi sonining eksponensial ravishda kamayishiga ishora qiladi (7.2-rasm).



7.3-rasm. Maltus modeli α=0,05; β=0,01; N_0=1000000
(abssissa o‘qi bo‘yicha vaqt, ordinata o‘qi bo‘yicha aholi soni joylashgan).

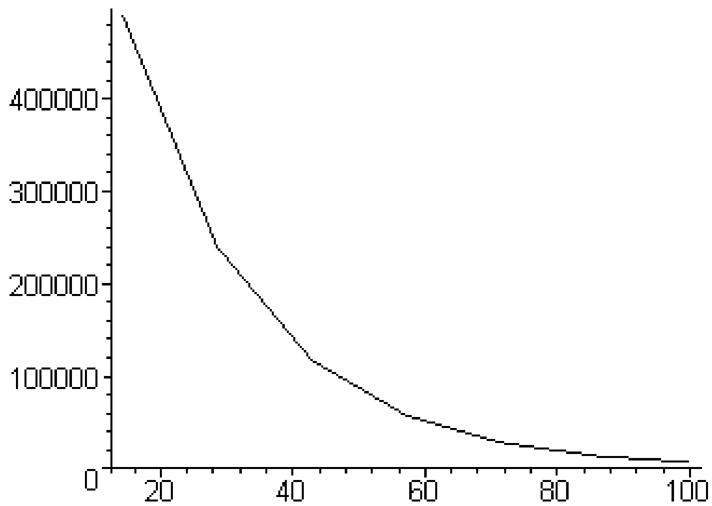
Endilikda, agar tug‘ilishlar soni o‘limlar soniga nisbatan ko‘p bo‘lsa, u holda Maltus modeli aholi sonining eksponensial ravishda o‘sishiga ishora qiladi (7.3-rasm).

7.4-rasmda tug‘ilishlar va o‘limlar soni o‘zaro teng bo‘lib, Maltus modelining ko‘rsatishicha, sistema muvozanat holda bo‘ladi: aholi soni butun vaqt oralig‘ida o‘zgarmasdan qoladi.



7.4-rasm. Maltus modeli. α=0,1; β=0,1; N_0=1000000
(abssissa o‘qi bo‘yicha vaqt, ordinata o‘qi bo‘yicha aholi soni joylashgan).

Maltus modeli vatarlar usuli bilan approksimasiyalanishida o‘zini qanday qilib tutishini o‘rganib chiqamiz:



7.5-rasm. Maltus modeli. α=0,43; β=0,48; N_0=1000000.

Vatarlar usuli yordamida n=7 qadam bilan approksimasiyalash
(abssissa o‘qi bo‘yicha vaqt, ordinata o‘qi bo‘yicha aholi soni joylashgan).

Ko‘rinib turganidek, hattoki kichik qadam bilan ham Maltus modeli analitik modelga yetarlicha yaxshi yaqinlashadi (7.5-rasmga qarang).

O‘rganib chiqilgan misol demografiya masalalariga nisbatan qo‘llanilgan Maltus modeli aholining cheksiz eksponensial o‘sishini bashorat qilishini ko‘rsatib berdi, bunday o‘sish esa tabiatda sodir bo‘lmaydi. Mazkur model kichik vaqt oraliklarida hamda α va β koeffisiyentlar muhit parametrlari va N ning qiymatlariga bog‘liq bo‘lmagan vaziyatda qo‘llanilishi mumkin.

Ferxyulst-Perl modeli.

Endilikda bu modelning takomillashtirilgan versiyasini – Ferxyulst-Perl modelini (logistik model) o‘rganib chiqamiz.

Logistik model Ferxyulst-Perlning differensial tenglamasi orqali tasvirlanadi:

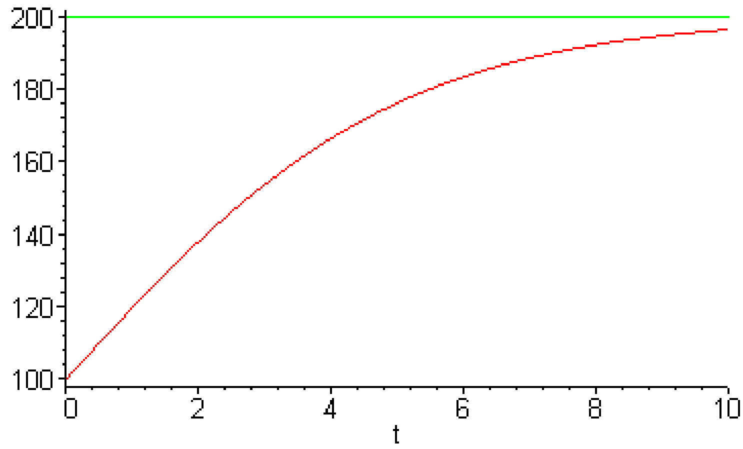
$$N = \alpha\, t - \beta\, t^2 .$$

Bu tenglama quyidagi umumiy yechimga ega:

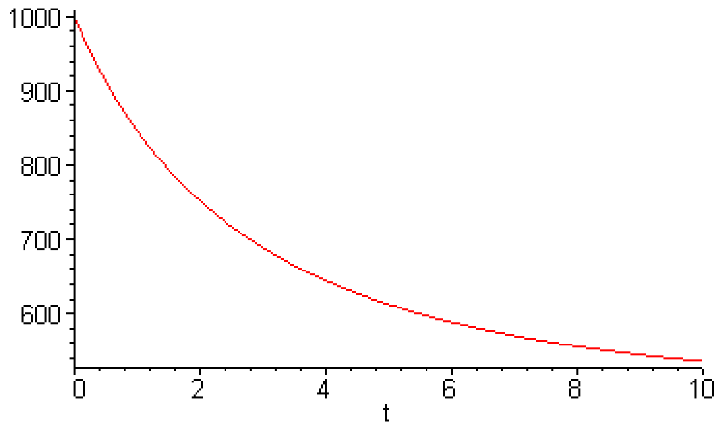
$$N = \frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha - \beta N_0 \left(e^{\alpha t} - 1\right)}.$$

Logistik model hayotni ta’minlovchi resurslar cheklangan holdagi (misol tariqasida aholi soni olinsa) Maltus modelining umumlashgan ko‘rinishidir. Shunday qilib, endilikda logistik model Maltus modeli singari cheksiz o‘sishga yo‘l qo‘ymaydi. O‘sish β/α kattalik bilan chegaralangan bo‘ladi.

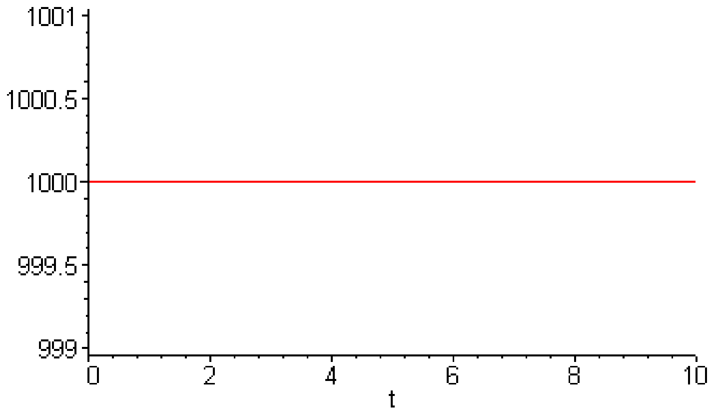
Modelning $\alpha>\beta$, $\alpha<\beta$ i $\alpha=\beta$ dagi hatti-harakatini o‘rganib chiqamiz.



7.6-rasm. Logistik model α=0,4; β=0,2; N_0=100
(yuqori to‘g‘ri chiziq - $N=\beta/\alpha$ asimptota).

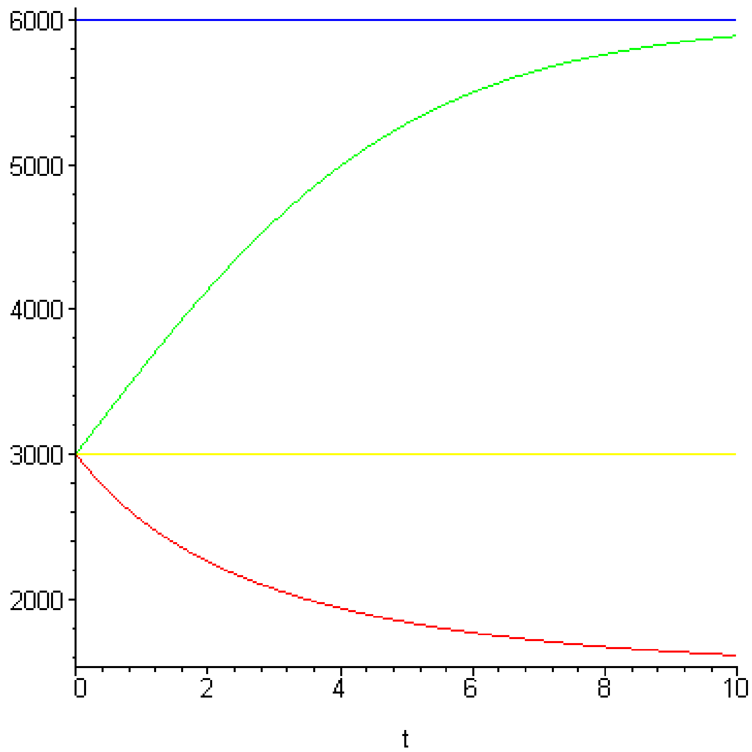


7.7-rasm. Logistik model α=0,2; β=0,4; N_0=1000.



7.8-rasm. Logistik model α=0,4; β=0,4; N_0=1000.

Ko‘rinib turganidek, oxirgi ikkita holda logistik model o‘zini Maltus modeli singari tutmoqda.



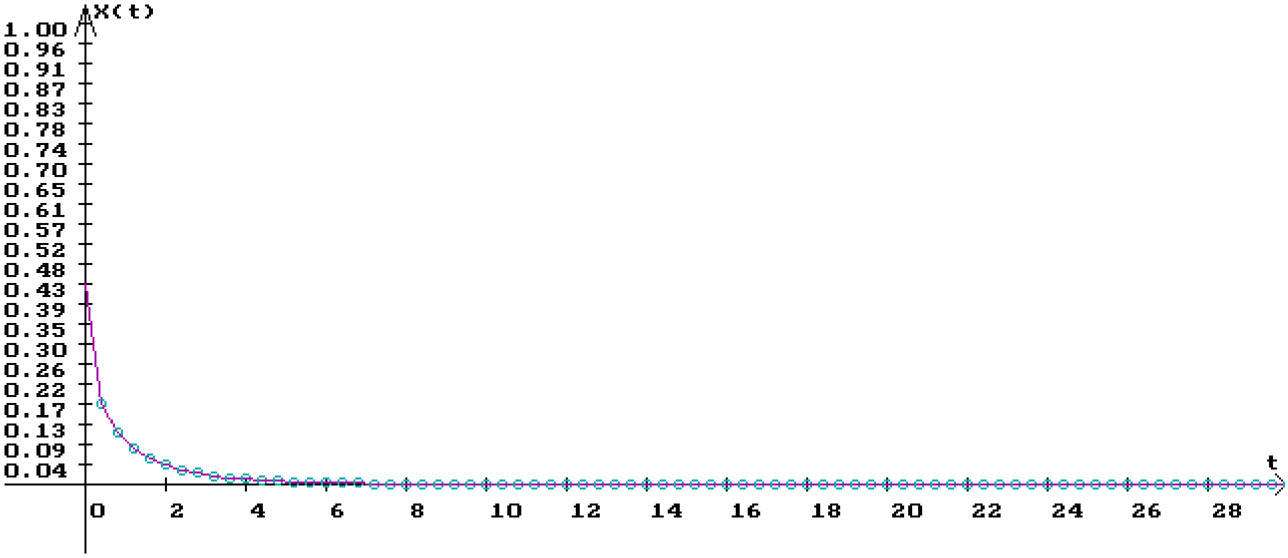
7.9-rasm. Aholining boshlang‘ich soni bir xil N_0=3000 bo‘lgan holdagi logistik modellar. (*Yuqoridan pastga qarab:* N=β/α asimptota, modelning α=0,45, β=0,25; α=0,2, β=0,2; α=0,25, β=0,45 koeffisiyentlardagi hatti-harakati) .

Agarda Ferxyulst-Perl tenglamalarini diskret shaklda yozib olsak, u holda arifmetik almashtirishlardan so‘ng quyidagi munosbatga ega bo‘lamiz:

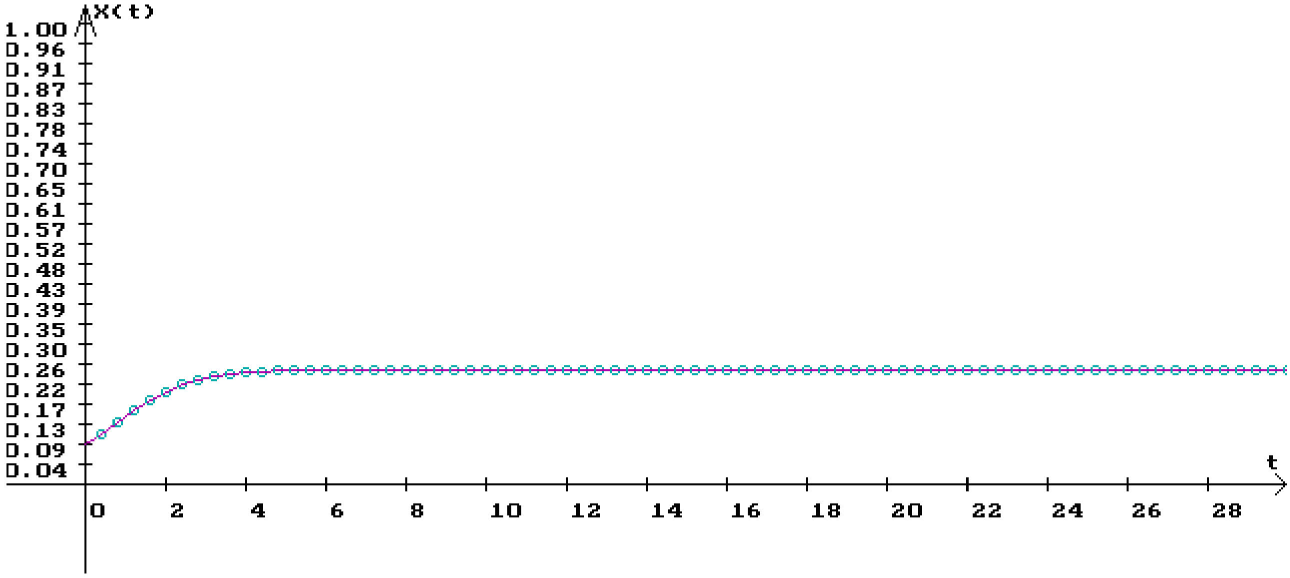
$$x_{n+1} = 4r(1 - x_n) \cdot x_n$$

Bu yerda x_n – yechimning joriy qadamdagi qiymati, x_{n+1} – yechimning keyingi qadamdagi qiymati, r –o‘zgaruvchi parametr.

Yechimning kichik r lardagi hatti-harakatini o‘rganib chiqamiz.



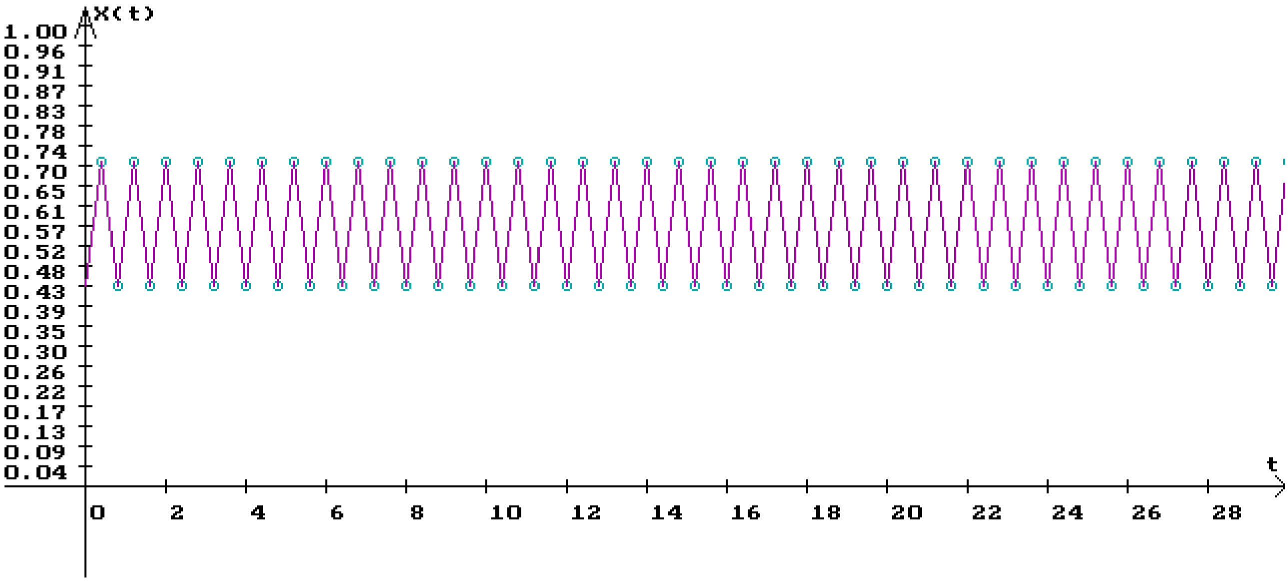
7.10-rasm. Frexyulst-Perl diskret tenglama yechimining evolyusiyasi x_0=0,5, r=0,2 (bu yerda va kelgusida: t o‘qi bo‘yicha qadamlar (2:5 masshtabda), *X*(t) o‘qi bo‘yicha esa n-qadamdagi yechim ajratilgan).



7.11-rasm. Ferxyulst-Perl diskret tenglama yechimining evolyusiyasi x_0=0,1, r=0,35.

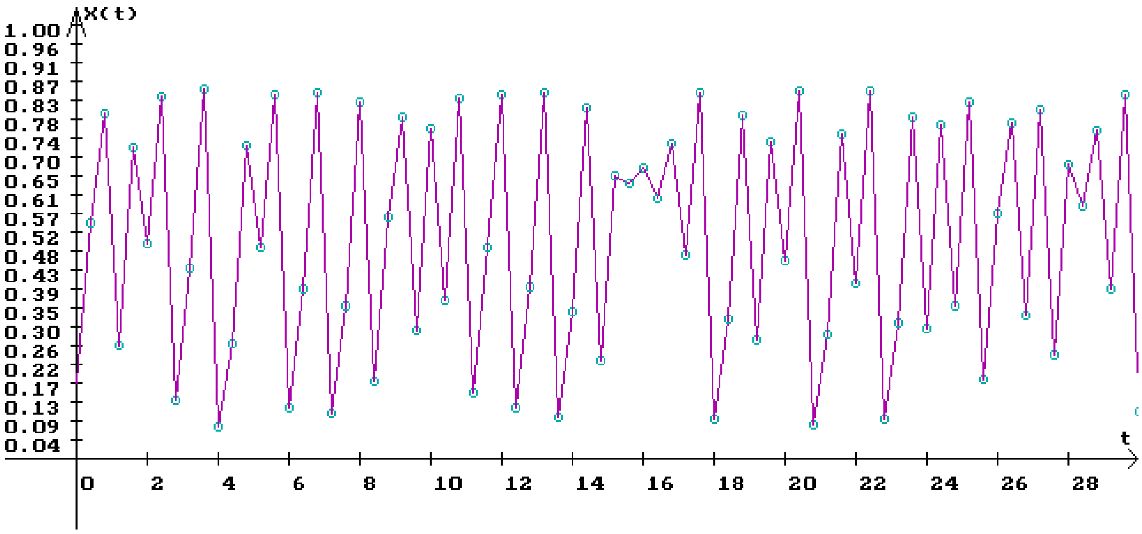
Qayd etish joizki, r qanchalik kichik bo‘lsa, diskret model o‘zini shunchalik uzluksiz model singari tutadi.

Ammo r ning ortib borishi bilanoq, Ferxyulst-Perl tenglamaning diskret yechimi o‘zining uzluksiz analogidan tobora chetlashib boradi –r>0,75 da u ikkita qiymat orasida tebranishni boshlaydi, bifurkasiya hodisasi boshlanadi (7.12-rasm)



7.12-rasm. Ferxyulst-Perl diskret tenglama yechimining evolyusiyasi x_0=0,5, r=0,81.

R ning qiymati tobora ortib borishi bilanoq, yechim yana bir nechta bifurkasiyadan o‘tadi (4,8,.... qiymatlar orasida tebranadi) va r>0,893 da tartibsiz bo‘lib qoladi (7.13-rasm).

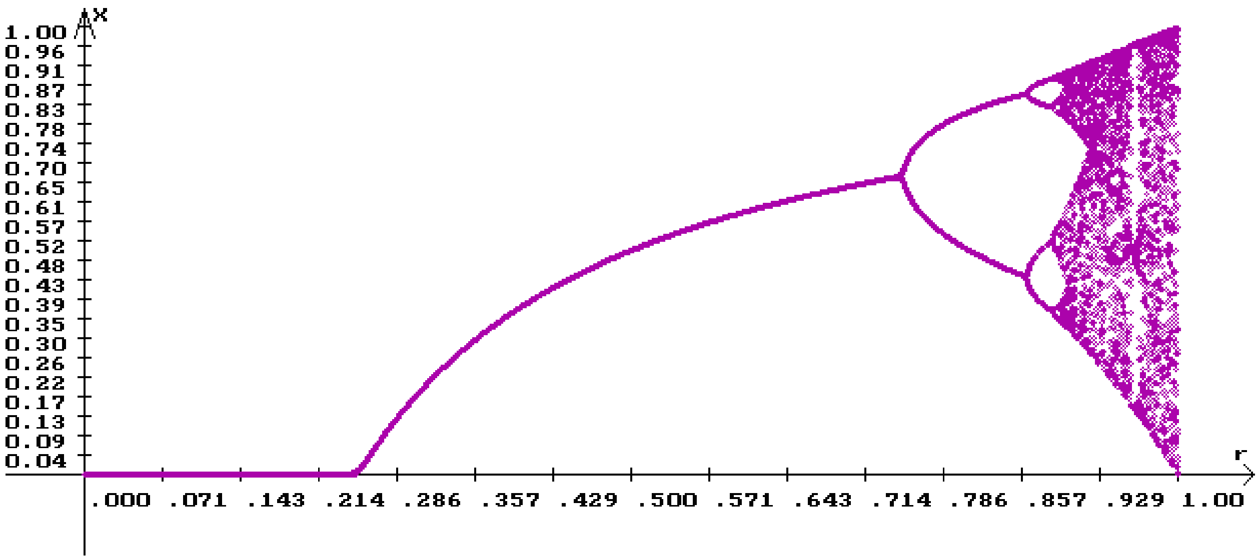


7.13-rasm. Ferxyulst-Perl diskret tenglama yechimining evolyusiyasi.

x_0=0,2, r=0,978.

Agarda abssissalar o‘qi bo‘yicha r parametrning qiymatlarini kichik qadam bilan, ordinata o‘qi bo‘yicha esa diskret tenglamaning yechimini katta qadamlar bilan (ideal ko‘rinishda - cheksiz qadamlardan so‘ng) ajratib, uni RX fazodagi nuqta bilan belgilasak, natijada biz diskret modelning attraktlar to‘plamiga ega bo‘lamiz.

7.14-rasmda birinchi va ikkinchi bifurkasiya nuqtalarini ko‘rish mumkin, shuningdek, bu yerda tartibsiz harakatlardagi attraktorning murakkab tuzilmasi yaqqol ko‘zga tashlanmoqda.



7.14-rasm. r ning har xil qiymatlari (abssissalar o‘qi) ga nisbatan katta n larda Ferxyulst-Perl diskret modeli yechimining (ordinatalar o‘qi) hatti-harakati.

MA’ARUZA 4. EPIDEMIYA MODELI VA IQTISODIYATDAGI BA’ZI MODELLAR

O‘zaro ta’sirlashuvchi populyasiyalar sonini modellashtirish.

Ma’lumki, ekologiya uchun qiziqarli va muhim vaziyatlar har xil turdagi populyasiyalarning o‘zaro ta’sirlashuvi yoki tashqi sharoitlarning o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘ladi. Ushbu vaziyatlarda hayot to‘lqinlari deb nomlanuvchi populyasiyani vaqt bo‘yicha o‘zgarishini xarakterlovchi populyasiya to‘lqinlari hosil bo‘ladi.

Populyasiya to‘lqinlari quyida keltirilgan xususiyatlarga ega bo‘lishi mumkin:

1. Populyasiya soni davriy tebranishlarga ega bo‘lishi mumkin (masalan, mavsumiy);
2. Yirtqich va o‘lja populyasiyalarining o‘zaro ta’sirlashuvi hisobiga populyasiya sonining davriy bo‘lmagan yoki davriy tebranishlari sodir bo‘lishi mumkin;
3. Populyasiya soni ortib ketishi (populyasiya qulay sharoitlarga tushib qolganida) mumkin;
4. Populyasiya soni jadal sur’atlar bilan qisqarishi (epifitotiyalar, talofatlar ta’sirida) mumkin.

Turli xildagi ikkita populyasiya bir-biri bilan bir necha xil ko‘rinishdagi o‘zaro munosabatda bo‘lishi mumkin:

(-, -) – o‘zaro raqobat, bunda ikkala populyasiyaning yashash sharoitlari salbiy tomonga o‘zgaradi;

(+,+) – simbioz;

(+,-) – yirtqich-o‘lja va h.k.

«Yirtqich-o‘lja» populyasiyalarining o‘zaro munosabatini o‘rganamiz. O‘lja uchun yetarli darajadagi ozuqa solingan chekli hajmdagi muhitga yirtqich va o‘lja joylashtirilsa, ularning soni qanday qilib o‘zgarishini kuzatamiz. Bu holda modellashtirishda Lotka-Volter tenglamalaridan foydalanish mumkin:

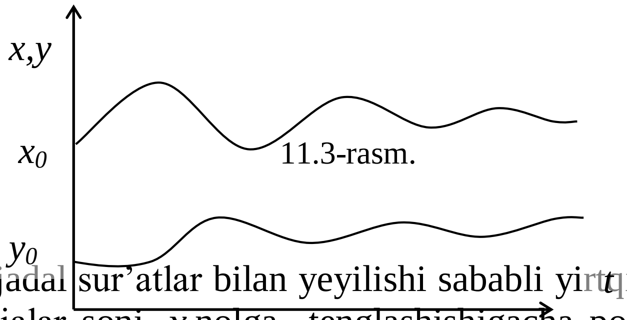
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx(1 - \dfrac{x}{K_{max}}) - cxy \\ \dfrac{dy}{dt} = gxy - fy \end{cases}.$$

Bu yerda x – o‘ljalar sonini, y – yirtqichlar sonini, xy – o‘lja va yirtqichning chekli arealda uchrashish chastotasini, r – o‘lja populyasiyasining tabiiy o‘sish tezligi (yirtqichlarning ta’sirini hisobga olmagan holda), K_{max} – chekli arealda o‘ljalar sonining maksimal ko‘payish miqdori (odatda, yirtqichlar soni o‘ljalarning soniga nisbatan ancha kam bo‘ladi); c – yirtqichlar tomonidan ovni muvaffaqiyatli tarzda tugallanish koeffisiyenti; g – yirtqichlarga nisbatan tug‘ilish koeffisiyenti (ularning ko‘payish tezligi nafaqat x ga, balki y ga ham bog‘liq, aniqroq qilib aytganda u xy ga proporsional bo‘ladi), f – yirtqichlarning tabiiy o‘lish koeffisiyenti xarakterlaydi.

Yuqorida keltirilgan tenglamalarning yechimlari yirtqich va o‘ljalar sonining to‘lqinli tebranishlarini ifodalaydi. Ushbu to‘lqinlarning shakli va davriyligi x_0, y_0

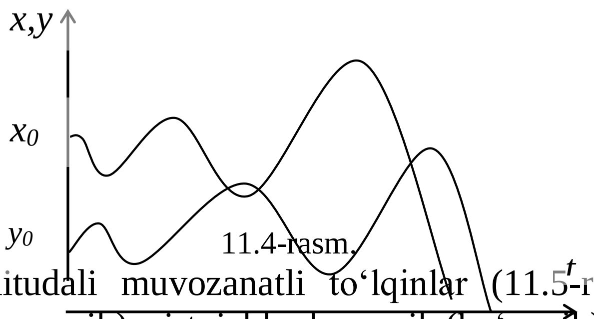
boshlang‘ich shartlarga hamda tenglamada ishtirok etuvchi koeffisiyentlarning qiymatlariga bog‘liq bo‘ladi. Bu yerda bir necha holatlar bo‘lishi mumkin:

1. Muvozanatli bosqich (11.3-rasm). Bunday vaziyat yirtqichlar soni $y = const$ bo‘lishi uchun o‘zgarmas miqdordagi o‘ljalardan ko‘proq miqdordagi o‘ljalar tug‘ilishini anglatadi.



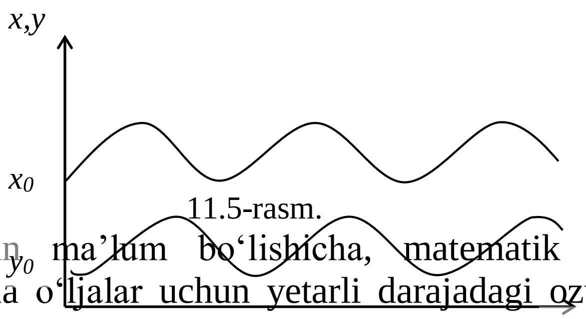
11.3-rasm.

2. O‘ljalarning jadal sur’atlar bilan yeyilishi sababli yirtqichlarning ochlikdan o‘lishi kuzatiladi. O‘ljalar soni x nolga tenglashishigacha populyasiya to‘lqinlari amplitudalar bo‘yicha yoyilib boradi (11.4-rasm).



11.4-rasm.

1. O‘zgarmas amplitudali muvozanatli to‘lqinlar (11.5-rasm). Bu holatda gohida o‘ljalar ko‘payib (kamayib), yirtqichlar kamayib (ko‘payib) ketishi kuzatiladi.

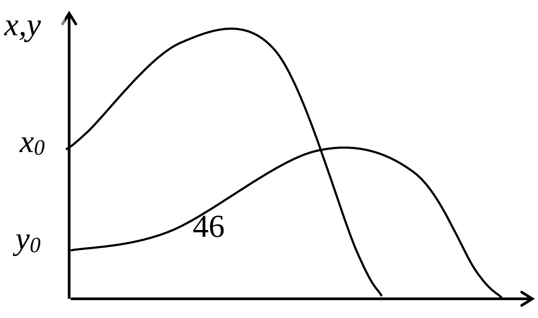


11.5-rasm.

Ilmiy manbalardan ma’lum bo‘lishicha, matematik modelni tekshirish maqsadida tajriba sifatida o‘ljalar uchun yetarli darajadagi ozuqa solingan chekli hajmdagi suyuqlikka (kolbaga) kipriksimonlarning ikkita turi (biri yirtqich, ikkinchisi o‘lja sifatida) joylashtirildi. Tajriba natijasida quyidagilar kuzatilgan:

1. Agarda kolbada yirtqichlar bo‘lmasa, u holda o‘ljalar sonining o‘sishi suyuqlik hajmi bilan belgilanadigan K_{max} gacha yaqinlashadi.

2. Kolbaga yirtqich populyasiyasi qo‘shilganda, ular o‘ljalarni tezda yeb, yirtqichlar o‘zlarining sonini ko‘paytirar edilar. O‘ljalar sonining kamayishi o‘ljalar butunlay yo‘qolib ketgunicha davom etib, o‘ljalar qirilib ketishi natijasida, axiri yirtqich populyasiyasi ochlikdan o‘lib ketadi (11.6-rasm).



11.6-rasm.

3. Tajribada suyuqlikka sellyuloza qo‘shildi. Sellyuloza eritmaning qovushqoqligini oshirish uchun qo‘shilgan edi. Natijada yirtqichlar tomonidan ovni muvaffaqiyatli tarzda tugallanish koeffisiyenti c va yirtqichga nisbatan tug‘ilishlar koeffisiyenti g ni pasaytirishga erishildi. Bu holatda barcha o‘ljalar yeb bo‘linguniga $(x = 0)$ qadar yirtqichlar populyasiyasi uchun o‘sib boruvchi amplitudali to‘lqinlar paydo bo‘lib, oxir-oqibat yirtqichlar qirilib, nobud bo‘lishni boshlar edi (11.4-rasm).

4. O‘lja populyasiyasining tabiiy o‘sish tezligi r ni qisqartirish maqsadida o‘lja ozuqasi 2 baravarga kamaytirildi. Bu holatda o‘lja populyasiyasi amplitudasining o‘sishi ancha kamaydi. Buning natijasida yirtqich populyasiyasi sonining tez sur’atlar bilan o‘sishi va oqibatda o‘lja populyasiyasi sonining tezda kamayib ketishi kuzatilmadi. x va y lar bo‘yicha barqaror to‘lqinlar paydo bo‘ldi (11.5-rasm).

Epidemiya modeli

Ma’lumki, ko‘p asrlar davomida insonlarning ko‘pchiligi turli xil epidemiyalar tufayli vafot etganlar. Epidemiyalarga qarshi kurashish uchun turli tibbiy tadbirlar (karantin, emlashlar va h.k) ni o‘z vaqtida amalga oshirish kerak bo‘ladi. Bunday tibbiy tadbirlarni samaradorligi epidemiyaning turini aniq bilish, epidemiyaga chalingan bemorlar sonining vaqt bo‘yicha o‘zgarishini bashorat qilish bilan bog‘liq.

Faraz qilaylik, bir hududda N ta sog‘lom odam mavjud bo‘lib, $t = 0$ vaqt momentida bu guruhga bitta kasal odam (infeksiya manbai) kelib qo‘shilsin. Guruhdan bemorlar chiqarib tashlanmaydi (tuzalish ham, o‘lish ham, izolyasiya ham yo‘q). Shuningdek, odam kassalikni o‘ziga yuqtirishi bilanoq, infeksiya manbaiga aylanadi deb faraz qilinadi.

t vaqt momentidagi kasallar sonini $x(t)$ bilan, sog‘lom bo‘lganlar sonini esa $y(t)$ bilan belgilaymiz. Demak, ixtiyoriy vaqt momentida

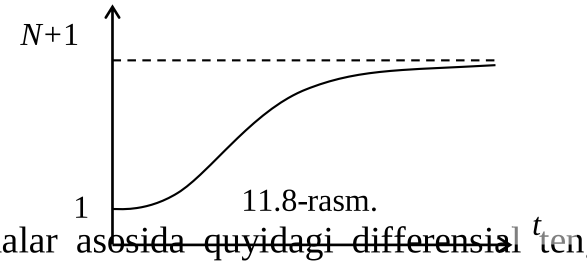
$$x(t) + y(t) = N + 1 \qquad (1)$$

tenglik o‘rinli ekanligi va $t = 0$ da $x(0) = 1$ shart bajarilishi ko‘rinib turibdi. $t + dt$ (dt – kichik vaqt oralig‘i) vaqt oralig‘ida nechta yangi kasal paydo bo‘lishini aniqlash mumkin. Ularning soni dt vaqt oralig‘iga, sog‘lom va bemor kishilarning o‘zaro uchrashuvlar soniga, ya’ni x va y kattaliklarning ko‘paytmasi $x \cdot y$ ga proporsional bo‘ladi deb faraz qilish mumkin:

$$dx = \alpha xydt, \qquad (2)$$

bu yerda α – proporsionallik koeffisiyenti (infeksiyani boshqa odamga yuqtirish koeffisiyenti).

$x(t)$



11.8-rasm.

(1) va (2) formulalar asosida quyidagi differensial tenglamani hosil qilish mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(N + 1 - x)$$

Bu tenglamaning yechimi quyidagicha:

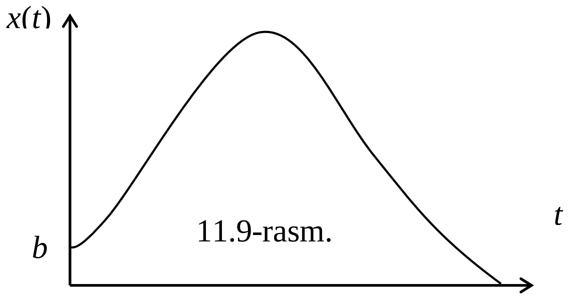
$$x(t) = \frac{N + 1}{Ne^{-\alpha(N+1)t} + 1}.$$

Ushbu formula asosida guruhdagi bemorlar sonining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi 11.8-rasmda keltirilgan.

Masala. Agar α = 0,001, N+1=1101 kishi bo‘lsa, u holda 6 sutkadan keyingi bemorlar soni qancha bo‘lishini va 6 kun ichida qancha odam kasal bo‘lishini aniqlang.

Masalaga javob topish uchun tenglamaning yechimidan foydalanishni o‘quvchilarga tavsiya qilamiz.

Epidemiya modelini tuzishda bakteriya katakchalarining faoliyatini boshqaruvchi qonunlarni, alohida olingan kishilarning infeksiyalarga nisbatan sezuvchanlik darajasini, infeksiya tashuvchilarning sog‘lom kishilar bilan uchrashib qolish ehtimoli va boshqa omillarni hisobga olish mumkin edi. Lekin, masalani soddalashtirish uchun ushbu omillar e’tiborga olinmadi.



11.9-rasm.

Modelni yanada murakkablashtirish maqsadida t vaqt momentida 1 ta emas, bir nechta, ya’ni b sondagi odam kasallangan deb faraz qilinadi. Shuningdek, kichik vaqt oralig‘idan so‘ng bemor tuzalib, immunitetga ega bo‘ladi deb hisoblash mumkin. $z(t)$ bilan t vaqt momentigacha kasal bo‘lib, so‘ngra tuzalgan bemorlar soni belgilansa, yuqoridagilarga asoslanib, quyidagiga ega bo‘lish mumkin:

$$x + y + z = N + b,$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha xy - \gamma x \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha xy \end{cases}.$$

Bu yerda γx – tuzalganlar soni. U holda bemorlar sonini bashorat qilish 11.9-rasmda keltirilgan shaklga ega bo‘ladi. Egri chiziqning aniq ko‘rinishi N, b, α, γ larning qiymatlariga bog‘liq bo‘ladi.

Reklama kompaniyasini tashkillashtirish.

Faraz qilaylik, firma yangi tovari yoki xizmatini reklama qilishni rejalashtirmoqda. Ish boshlanishida yangilikdan iste’molchilarning ozgina qismi xabordorligi sababli reklamaga sarf etiladigan xarajatlar reklama kompaniyasi oladigan foydaga nisbatan ko‘proq bo‘lishi mumkin. Keyinchalik, vaqt o‘tishi bilan iste’molchilar sonini oshishi tufayli sezilarli foydaga umid qilish mumkin. Shunday vaqt momenti keladiki, bu vaqtda firma yangi tovari yoki xizmati turi bilan iste’molchilar bozori to‘yingan bo‘ladi va endi tovarni yoki xizmatni reklama qilish ma’noga ega bo‘lmay qoladi. Bundan keyin mavzuni bayon qilishda tovar yoki xizmat turi iboralari o‘rniga qulaylik uchun faqat tovar so‘zidan foydalanamiz.

Reklama kompaniyasining matematik modelini tuzishda quyidagi belgilashlardan foydalaniladi: t - reklama kompaniyasi boshlanganidan kuzatuvgacha bo‘lgan vaqt; $N(t)$ - firma tovaridan xabordor mijoz yoki iste’molchilarning t vaqtdagi soni; N_0 - firma tovariga pul to‘lashi mumkin bo‘lgan xaridorlarning umumiy soni. Matematik modelni qurish quyidagi asosiy farazlarga asoslanadi. Tovar haqida xabordor bo‘lgan va ularni sotib olishga qurbi yetgan iste’molchilar sonining vaqt bo‘yicha o‘zgarish tezligi dN/dt tovar haqida xabari bo‘lmagan xaridorlar soni $\alpha_1(t)(N_0 - N(t))$ ga proporsional. Bu yerda $\alpha_1(t) > 0$ - reklama kompaniyasi ishini jadalligi (ushbu vaqt momentida reklamaga sarf etilgan xarajatlar) ni anglatadi. Shuningdek, tovar haqida xabardor bo‘lgan xaridorlar tovar haqida xabardor bo‘lmagan xaridorlarga u yoki bu tarzda tovar haqida axborot tarqatib, firmani qo‘shimcha reklama agenti sifatida ishtirok etadi deb faraz qilinadi. Ularning ulushi $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ miqdorga teng bo‘lib, agentlar soni oshishi bilan bu miqdor ham oshib boradi. $\alpha_2(t) > 0$ miqdor xaridorlar o‘rtasidagi o‘zaro muomala (axborot almashish) darajasini xarakterlaydi (bu miqdorni qiymati, masalan, so‘rovnoma o‘tkazish yo‘li bilan ham aniqlanishi mumkin).

Yuqoridagi farazlarga asosan reklama kompaniyasining matematik modeli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N). \tag{1}$$

Agar $\alpha_1(t) >> \alpha_2(t)N(t)$ bo‘lsa, (1) modeldan Maltus tipidagi modelga ega bo‘lish mumkin, aksincha tengsizlikda populyasiyaning quyidagi modelini hosil qilish mumkin:

$$\frac{dN}{d\tau} = N(N_0 - N), \qquad d\tau = \alpha_2(t)dt.$$

Ushbu modelni va populyasiya modelini tuzishda qandaydir miqdorning vaqt bo‘yicha o‘sish tezligi ushbu miqdorning joriy vaqtdagi $N(t)$ qiymatini muvozanat holati (populyasiyada) dagidan yoki xaridorlarning maksimal qiymatidan joriy vaqtdagi $N(t)$ qiymatini ayirmasi - $N_0 - N(t)$ ko‘paytmasiga proporsional degan farazga tayanilgan edi. Shu sababli ularni anologiyasidan foydalanish mumkin. Agar $\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)$ miqdor vaqtning kandaydir momentida nolga tenglashsa yoki manfiy qiymatga ega bo‘lsa (buning uchun $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ koeffisiyentlarning birortasi yoki ikkalasi xam manfiy ishoraga ega bo‘lishi lozim) ushbu jarayonlar o‘rtasidagi analogiya tugaydi. Shunga o‘xshash negativ holatlar turli reklama kompaniyalarida tez-tez uchrab turadi. Bunday hollarda reklamani xarakterini o‘zgartirish yoki bo‘lmasa reklamadan butunlay voz kechish lozim bo‘ladi. Tovarni ommaviyligini oshirish tadbiri $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$ miqdorlarni qiymatlariga bog‘liq holda to‘g‘ridan-to‘g‘ri ($\alpha_1(t)$ parametr) yoki ikqilamchi tarzda ($\alpha_2(t)$ parametr) reklama natijasini yaxshilashga yo‘naltirilishi mumkin.

(1) matematik model chekli vaqt momentlarida nolga aylanadigan yechimlarga ega emas. Populyasiya sonini vaqt bo‘yicha o‘zgarishidan ma’lumki, $t \to -\infty$ da $N(t) \to 0$. Reklama kompaniyasiga nisbatan bu narsa shuni anglatadiki, reklama boshlanishidan oldinrok xaridorlarning bir qismi yangi tovardan xabardor bo‘lishgan.

Agar $N << N_0$, $\alpha_2(t)N << \alpha_1(t)$ deb hisoblab, (1) matematik modelni $N(t=0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ - reklamani boshlanish vaqti) nuqta atrofida qaraydigan bo‘lsak, (1) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)N_0$$

va u $t = 0$ dagi boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt \tag{2}$$

yechimga ega.

Endi, bitta tovardan tushadigan foydani p orkali belgilaymiz. Soddalik uchun har bir xaridor faqatgina bitta tovar sotib olsin deb hisoblaymiz. Ma’lumki, $\alpha_1(t)$ koeffisiyent ma’nosi bo‘yicha reklama uchun vaqt birligi ichida qilinadigan harakatlar soniga teng (masalan, bir turdagi afishalarni yelimlash). s orkali elementar reklama harakatining narxini belgilaymiz. U holda jami foyda quyidagiga teng bo‘ladi:

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt, \tag{3}$$

sarf qilingan xarajatlar esa

$$S = s\int_0^t \alpha_1(t)dt .$$

Ko‘rinib turibdiki, $pN_0 > s$ bo‘lgandagina foyda xarajatlarga nisbatan yuqori bo‘ladi. Juda samarali bo‘lmagan yoki qimmat reklamadan firma birinchi qadamidayoq kamomadga uchraydi. Ammo, bu holat reklamani to‘xtatish uchun asos bo‘la olmaydi. Haqiqatdan ham (3) ifoda va $pN_0 > s$ shart faqatgina $N(t)$ ning kichik qiymatlarida hamda P va S vaqt bo‘yicha bir xil qonuniyat asosida o‘sib borsagina o‘rinli bo‘ladi. $N(t)$ ning o‘sishi bilan (1) formulada tashlab yuborilgan hadlar sezilarli qiymatlarga ega bo‘ladi, xususan ikqilamchi reklamaning ta’siri kuchayadi. Shuning uchun $N(t)$ funksiya (3) formuladagiga nisbatan vaqt bo‘yicha tez o‘suvchi funksiya bo‘lib qolishi mumkin. $N(t)$ miqdorning o‘zgarishidagi bu chiziqsiz effekt xarajatlarning o‘zgarmas tempda o‘sishida reklama kompaniyasining boshlang‘ich bosqichidagi moliyaviy muvaffaqiyatsizligini kompensasiya qilish imkonini beradi.

Ushbu tasdiqni (1) tenglamaning xususiy holi, ya’ni $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ koeffisiyentlar o‘zgarmas bo‘lganda izohlaymiz. Quyidagi

$$\overline{N} = \alpha_1 / \alpha_2 + N$$

belgilash orkali (1) tenglama

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 \overline{N}\left(\overline{N}_0 - \overline{N}\right), \qquad \overline{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0 \tag{4}$$

ko‘rinishga keladi. Ushbu tenglamani yechimi quyidagidan iborat:

$$\overline{N}(t) = \left[1 + \left(\overline{N}_0\, \alpha_2/\alpha_1 - 1\right)\cdot \exp\left(-\alpha_2 t \overline{N}_0\right)\right]^{-1}. \tag{5}$$

Bunda $\overline{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2$. Shunday qilib, $N(0) = 0$, ya’ni boshlang‘ich shart bajarilmoqda. (4) dan ko‘rinib turibdiki, $\overline{N}(t)$ funksiyaning hosilasi, xusuan $N(t)$ funksiya $t > 0$ bo‘lganda boshlang‘ich qiymatlaridan katta bo‘lishi mumkin ($\overline{N}_0 > 2\alpha_1/\alpha_2$ yoki $N_0 > \alpha_1/\alpha_2$ shartlarda). $\overline{N} = \overline{N}_0 / 2$, $N = (\alpha_1/\alpha_2 + N_0)/2$ qiymatlarda $\overline{N}(t)$ funksiyaning hosilasi maksimumga erishadi:

$$\left(\frac{d\overline{N}}{dt}\right)_m = \left(\frac{dN}{dt}\right)_m = \alpha_2 \frac{\overline{N}_0^{\,2}}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4} .$$

Bu vaqtga kelib vaqt birligi ichida olinadigan joriy foyda quyidagiga teng:

$$P_m = p\frac{dN}{dt} = p\alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4} .$$

P_m joriy foydadan boshlang‘ich joriy foyda $P_0 = p(dN/dt)_{t=0} = \alpha_1 N_0$ ni ayirib, quyidagiga ega bo‘lish mumkin:

$$P_m - P_0 = p\frac{\left(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0\right)^2}{4}.$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, boshlang‘ich joriy foyda va maksimal joriy foydaning farqi yetarli darajada sezilarli bo‘lishi mumkin.

(4) tenglamadan yana shuni ta’kidlash mumkinki, kandaydir vaqtdan boshlab reklamani davom ettirish foydasiz bo‘lib koladi. Hakikatdan ham, $\overline{N}(t)$ ning N_0 ga yaqin qiymatlarida (4) tenglamani

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 N_0\left(\overline{N}_0 - \overline{N}\right) \tag{6}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglamaning yechimi $t \to \infty$ da sekin eksponensial qonun bo‘yicha $\overline{N}_0$ chekli qiymatga ($N(t)$ funksiya esa N_0 ga) intiladi. Vaqt birligi ichida uncha ko‘p bo‘lmagan sondagi yangi xaridorlar paydo bo‘ladi va tovarni sotishdan tushayotgan foyda ixtiyoriy shartlarda ham davom etayotgan xarajatlarni qoplamay qoladi.

IQTISODIY O‘SISHINING MAKROMODELI.

O‘suvchi iqtisodda vaqt o‘tishi bilan ishlovchilar soni ko‘payib boradi. Eng oddiy holda ish bilan ta’minlanganlarning o‘sish sur’ati ishlayotganlar soni bilan proporsional.

$$\frac{dR}{dt} = \alpha R(t) \tag{1}$$

Shuning uchun $R(t) = R_0 e^{\alpha t}$ vaqtning ma’lum bir funksiyasi, $R_0 = R(0)$ - boshlang‘ich vaqtdagi ishlovchilar soni, α – proporsionallik koeffisiyenti bo‘lib, uning qiymati har bir iqtisodiy hudud uchun ma’lum.

Ishchilar mehnati tufayli $y(t)$ milliy daromad keltirsin. Bu daromad qisman extiyojlarni qondirishga va jamg‘arishga ketadi, ya’ni

$$y(t) = W + A \tag{2}$$

Bu yerda W – extiyojlarni qondirishga sarf buladigan, A – jamg‘ariladigan daromad qismlaridir.

Jamg‘arilidagan A qism esa o‘z navbatida qatordan chiqib qolgan sanoat quvvatini tiklash va yangi quvvatlar yaratish uchun sarf etilib, yana iqtisodga qaytadi.

$M(t)$ quvvat deyilganda maxsulotni mumkin qadar maksimal ishlab chiqarish tushuniladi.

Mahsulotni real ishlab chiqarish ishlovchilar soniga bog‘liq bo‘ladi.

$$y(t)=M(t)f(x(t)) \tag{3}$$

(3) da - $x(t)=R(t)/M(t)$ – bir birlik quvvatda ishlovchilar soni.

$f(x)$ funksiya to‘g‘risida quyidagiga faraz qilinadi:

$f(0)=0,\ f'(x)>0$, ya’ni ishlovchilar soni oshishi bilan ishlab chiqarilayotgan mahsulot ham oshib boradi va $f''(x)<0$ iqtisodni mahsulot bilan to‘lganligini (ta’minlanganligini) bildiradi.

$f(x)$ funksiya $x\in[0;X_M]$ da aniqlangan, $X_M=R_M/M$, $R_M(t)$ – $M(t)$ quvvatni ta’minlovchi xo‘jalikdagi ishchilar soni. Agar hamma ish joylari ishchilar bilan ta’minlangan bo‘lsa, u holda maxsulotni ishlab chiqarish miqdori $Y(t)$ ta’rifga ko‘ra $Y(t)=M(t)$, ya’ni $f(X_M)=1$ bo‘ladi.

Ishlab chiqarishdan topilgan daromadni extiyojni qondirishga va jamg‘arishga ajratishning optimal usullarini aniqlash iqtisodiyot masalalarining asosiy masalalaridan biridir. Optimallikni kriteriyasi sifatida jon boshiga (bir ishchiga) sarf bo‘ladigan extiyojni $C(t)=W(t)/R(t)$ ni qabul qilish mumkin.

Vaqt birligi ichida jamg‘arilgan $A(t)$ daromad yangi quvvatlarni yaratishga sarf bo‘ladi:

$$A(t)=aI(t) \quad (4)$$

Bu yerda $a>0$ yangi quvvat birligini yaratish uchun zarur bo‘ladigan fondni tashkil etuvchi berilgan o‘zgarmas miqdor. $I(t)$ – yangi quvvat birligi soni.

Mavjud quvvatni ishdan chiqish tezligi quvvatning o‘ziga proporsional, ya’ni $\beta M(t)$ deb hisoblanadi, u holda quvvat quyidagicha o‘zgaradi:

$$\frac{dM}{dt}=I(t)-\beta M(t), \tag{5}$$

bu yerda $\beta>0$ - ishdan chiqish koeffisiyenti.

(2), (3) va (5) tenglamalarda 4 ta noma’lum $y(t), W(t), M(t), I(t)$ lar qatnashayapti. Modelni to‘ldirish uchun yangi quvvat miqdori mavjud quvvat miqdoriga proporsional $I(t)=\gamma M(t)$ deb faraz qilamiz, γ - berilgan o‘zgarmas miqdor bo‘lib, $\gamma > \beta$.

U holda (5) tenglama quyidagi yechimga ega bo‘ladi:

$$M(t)=M_0 e^{(\gamma-\beta)t} \tag{6}$$

va shu orqali boshqa miqdorlar ham aniqlanadi.

Oddiy

$$\gamma-\beta=\alpha \tag{7}$$

holni qaraymiz. Bu esa quvvat $y(t)$ funksiya $\omega(t)$, $I(t)$ funksiyalar bilan bir xil sur’at bilan o‘sar ekan, chunki

$$f(x(t))= f(x=R_0/M_0=const).$$

Ishlovchilarni jon boshiga sarf bo‘ladigan extiyojni maksimal darajasini ta’minlash uchun ishlovchilar sonini va ehtiyojni jamg‘arishga bo‘lgan nisbatini aniqlaymiz. Ta’rifga asosan

$$C(t)=\frac{W(t)}{R(t)}=\frac{y(t)-A(t)}{R(t)}.$$

(3 – 4) va (6 – 7) larni hisobga olsak

$$C(t)=c=\frac{f(x)-\alpha(\alpha+\beta)}{x}=const.$$

YA’ni, jon boshiga to‘g‘ri keladigan ehtiyoj vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmasdan qolar ekan. Uning maksimumi quyidagi shartdan topiladi:

$$\frac{dC}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)-\alpha(\alpha+\beta)}{x}\right)=0.$$

Bu tenglamadan izlanayotgan x_m uchun quyidagi tenglamani hosil qilish mumkin:

$$x_m f'(x_m) - f(x_m) + \alpha(\alpha+\beta) = 0. \qquad (8)$$

Bu tenglamadan $0 < x_m \le x_M$ va $R_0/M_0 = x_m$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimni aniqlash mumkin.

Jon boshiga sarf bo‘ladigan maksimum extiyoj C_m ni ta’minlaydigan jamg‘arish normasi quyidagicha:

$$n_m = \frac{A_m}{y_m}.$$

Yoki $y_m = M_m f(x_m)$, $A_m = \alpha\gamma M_m$ va (7), (8) larga asosan jamg‘arish normasi uchun quyidagiga ega bo‘lish mumkin:

$$n_m = 1 - x_m \frac{f'(x_m)}{f(x_m)}. \qquad (9)$$

Bu norma iqtisod o‘sishini oltin qoidasining normasi (Solou) deyiladi.

Agar (7) shart bajarilmasa, iqtisod o‘sishi rejimi murakkab prosessdan iborat bo‘ladi.

BOZOR IQTISODIYOTI MUVOZANATINING MAKROMODELI.

Bozor iqtisodiyoti jarayonida ixtiyoriy ishtirok etuvchi o‘zining individual manfaatdorligiga bo‘yicha harakat qiladi (ya’ni foyda olish, mehnat sharoitini yaxshilash, iqtisodiy xavfni kamaytirish, vositalarni tejash va boshqalar). Har bir subyekt iqtisodiy nochor ahvolda, ya’ni ishlab chiqarishga, narxlarga, oylik maoshiga va boshqa makroko‘rsatkichlarga bevosita ta’sir qila olmaydigan darajada bo‘lsa, bunday tizimning eng sodda varianti – rakobatdan iqtisod qilishdir. Shu bilan birgalikda iqtisodiy tizimda mavjud oldi-sotdi munosabatlari ish beruvchilar va yollanma ishchilar, moliyachilar hamda sarmoya kirituvchilar va boshqalarning muvofiqlashgan harakati iqtisodiy agentlarning harakati natijasida bo‘lishi mumkin. Agar bunday jamoaviy o‘zaro xarakat natijasida tizimda tovar va xizmatlarni umumiy ishlab chiqarish ularga bo‘lgan umumiy extiyojlarga muvofiqlashsa, u holda iqtisodiyotni bunday holati *muvozanatli*, bu holdagi turg‘un narxlar *turg‘un bozor* *narxlari deyiladi.* Talab va taklif o‘rtasidagi balans aynan shu turg‘un bozor narxlarida o‘rinli bo‘lib, xususan, talabni to‘lash qodirligini (platejesposobnost sprosa) anglatadi.

Iqtisodiy fanlarni muhim masalalaridan biri – iqtisodiyotni muvozanat shartlarini, shu jumladan, turg‘un bozor narxlarini aniqlashdan iborat. Iqtisodiy muvozanatning eng sodda matematik modellari quyidagi farazlarga asoslanib quriladi:

1) yirik ishlab chiqaruvchi korporasiya (ya’ni, monopoliya) larni shuningdek, butun sistema uchun o‘zlarini shartlarini himoya (diktovka) qiladigan ishchilar birlashmasining mavjud emasligi anglatuvchi sovershennaya bozor rakobati

2) sistema ishlab chiqarish imkoniyatining o‘zgarmasligi: asbob-uskunalar, ishlab chiqarish inshootlari va texnologiyalari vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi;

3) vaqt o‘tishi bilan hamkorlar iqtisodiy manfaatdorligini o‘zgarmasligi: tadbirkorlarni o‘z foydalarini, ishchilar o‘z oylik maoshlarini oshirishga intilmasliklari hamda investorlarni qimmatli kog‘ozlardan va boshqalardan tushayotgan foizlarni qanoatlantirishi.

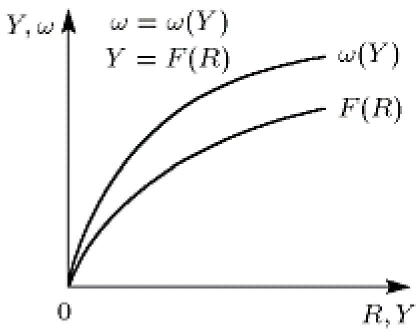
Yuqorida ko‘rsatilgan farazlarga javob beruvchi modellar ideal bozor iqtisodiyotining vaqt bo‘yicha «qotib qolgan» (sovub qolgan) hollarini ifodalaydi. Ammo, bu modellar bozor «xaos»idan shakllanuvchi iqtisodiy muvozanatni mavjudlik imkoniyati haqidagi savolga javob beradi va bundan tashqari iqtisodiy sistemaning asosiy makroko‘rsatkichlarini o‘zaro bog‘laydi.

Ushbu modellardan bittasi – Keyns modelidir. Ushbu modelda ishga yollovchilar va yollanuvchilar, iste’molchilar va jamg‘aruvchilar, ishlab chiqaruvchilar va ishchi kuchi bozorida harakat qiluvchi investorlar, mahsulotlar va pul, ya’ni bu tovar (mehnat, mahsulot, pul) larni o‘zaro taqsimlovchilar va almashuvchilar agentlar sifatida qaraladi.

Milliy daromad Y sistemaning birinchi makroko‘rsatkichi bo‘lib, vaqt birligi ichida ishlab chiqariladigan yagona mahsulotdir. Ushbu mahsulot iqtisodiyotning ishlab chiqarish sektorida ishlab chiqariladi, uning miqdori F funksiya orqali ifodalanadi. F funksiya resurs (vosita) larni miqdori va sifatiga, asosiy fondlar tarkibiga va band bo‘lgan ishchilar soni R (ikkinchi makroko‘rsatkich) bilan bog‘lik. 2) farazga asosan iqtisodiy muvozanat holatida ishlab chiqarish funksiyasi R va Y faqatgina bandlik orqali aniqlanadi, ya’ni

$$Y = F(R). \tag{3.1}$$

$F'(R) > 0,\ R > 0$ nisbatan quyidagilar urinli deb xisoblaniladi: $F(0) = 0$, $F'(R) > 0,\ R > 0$ va $F''(R) < 0,\ R > 0$ da (15.1 – rasm).



15.1 – rasm.

$F(R)$ funksiyasi to‘yinganlik xususiyatiga ega: R oshishi bilan tovar ishlab chiqarish sekinlashadi. Bunday yondashish amalda o‘zini oqlaydi: ishlab chiqarishda band bo‘lganlar soni haddan tashqari oshib ketsa, ularga mos keluvchi ish frontini topish ancha mushkullashadi. Shuningdek, ishchilar soni meyoriga nisbatan ko‘pchilikni tashkil etsa, ular bir-biriga xalaqit bera boshlaydi va individual foydali ish koeffisiyenti tushib ketadi.

(3.1) munosabat mehnat bozori R va Y mahsulotlar o‘rtasidagi o‘zaro aloqani ifodalaydi. Qo‘shimcha munosabatlar esa klassik siyosiy iqtisodning asosiy postulatlaridan bittasi orqali aniqlanadi:

4) ishchining s mehnat haqi ish o‘rnini bitta birlikka kamaytirilganda yo‘qotilgan mahsulotni narxiga teng.

Shuni ta’kidlash lozimki, 4) postulatda ish o‘rnini bittaga kamaytirishdan hosil bo‘ladigan zararlar (resurslarga, asbob-uskunalarga va boshqalarga sarflanadigan xarajatlar) hisobga olinmagan. Shunday qilib, 4) postulatdan quyidagiga ega bo‘lish mumkin:

$$\Delta Y^{(1)} \cdot p = s,$$

bu yerda $\Delta Y^{(1)}$ – ish o‘rnini bitta birlikka kamaytirilganda yo‘qotilgan mahsulotlar sonini, p – yo‘qotilgan mahsulot narxi. Agar ish bilan bandlik ΔR miqdorga o‘zgarsa, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilish mumkin:

$$\Delta Y \cdot p = s \cdot \Delta R,$$

bu yerda $\Delta Y = \Delta Y^{(1)} \cdot \Delta R$ ishchilar soni ΔR miqdorga o‘zgarganda yo‘qotiladigan yoki qo‘shimcha paydo bo‘ladigan narx. ΔR va ΔY miqdorlarni R va Y miqdorlarga taqqoslaganda kichik deb hisoblab, oxirgi tenglikni differensial ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{s}{p}.$$

(3.1) tenglikni e’tiborga olsak, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilish mumkin:

$$F'(R) = \frac{s}{p}. \quad (3.2)$$

$F(R)$ funksiya berilgan (bunga asosan ($F'(R)$ ni ham aniqlash mumkin) ligini hisobga olsak, s va p makroko‘rsatkichlarning ma’lum qiymatlarida (3.2) dan bandlik darajasi R ni va (3.1) dan mahsulotlar miqdori Y ni aniqlash mumkin. Bu yerda aniqlangan bandlik darajasi iqtisodiy sistemada mavjud narxlar va boshqa xarakteristikalarga mos keluvchi ushbu kundagi oylik maoshlariga rozi bo‘lib, ishlayotgan ishlovchilar sonini ifodalashini ta’kidlash joiz. Bandlik darajasi muvozanatini ta’minlovchi, mavjud sharoitlarda ishlashni xohlovchilarni hamma vaqtlarda ham topish mumkin, ya’ni kuyidagicha faraz qilinadi:

5) (3.1) va (3.2) tenglamalarda to‘rtta miqdorlar qatnashmokda.

Ishchining s mexnat haqiga nisbatan kuyidagilar faraz kilinadi:

6) modelda ishchining s mexnat haqi berilgan deb xisoblanadi.

s miqdor ish beruvchilar va yollanuvchilar o‘rtasidagi kompromiss natijasida aniqlanadi (real ish haqi narxlar darajasiga ham bog‘lik).

Yopiq matematik model qurish uchun mahsulot bozorlari va moliyaviy bozorlarni ham o‘rganish lozim bo‘ladi. Ishlab chiqarilgan mahsulotni bir qismi extiyojni qondirishga va ma’lum bir qismi jamg‘arilib boriladi:

$$Y = S + \omega,$$

bu yerda ω - mahsulotning iste’mol qilinadigan (iqtisodiyotga qaytmaydigan) qismi, S esa iqtisodiy sistemaga qaytuvchi, jamg‘arib boriladigan (yoki fondni tashkil qiluvchi mahsulotlar) qismini ifodalaydi. S va ω miqdorlar o‘rtasidagi munosabat quyidagi mulohazalardan aniqlanadi. ω miqdorga nisbatan quyidagilar faraz qilinadi:

7) ishlab chiqarilgan mahsulotning iste’mol qilinadigan qismi ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Y ning o‘ziga bog‘lik, ya’ni $\omega = \omega(Y)$. Bu yerda $\omega(Y)$ funksiyasi $F(R)$ funksiyasiga o‘xshab to‘yinganlik xususiyatiga ega: ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori kancha katta bo‘lsa, iste’mol qilishga sarflanadigan qo‘shimcha ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori ΔY ning ulushi shuncha kichik bo‘ladi (15.1–rasm) va katta qismi jamg‘arilib boriladi. $d\omega / dY = c(Y)$ miqdor *iste’mol qilishga moyillik deyiladi.* $0 < c < 1$, aks holda kichik miqdorda ishlab chiqarilgan mahsulotlarda ishlab chiqarilgan miqdoriga nisbatan ko‘prok iste’mol talab kilinar edi. $d = 1 - c$ miqdor jamg‘arish (yig‘ish) ga moyillikni anglatadi.

$$S = Y - \omega(Y) \tag{3.3}$$

fondni tashkil qiluvchi mahsulot kelgusida foyda olish maqsadida investisiya sifatida investorlar tomonidan iqtisodiyotga kiritiladi. Matematik modelda kiritilayotgan investisiya kelgusida iste’mol uchun tashlab ko‘yilgan mahsulotga ekvivalent deb hisoblaniladi va shu sababli sistemaning yana bitta moliyaviy makroko‘rsatkichi – bank foizining normasi r bilan aniqlanadi. Hakikatdan ham A razmerda investiya kilib, bir yildan keyin $D = A \cdot r$ daromad olib, ushbu vositalarni bankka r foizga qo‘yishga solishtiriladigan bo‘lsa, investor hech narsa yutqazmaydi (bu misolda yutmaydi ham). Ikkala holda ham keyingi yilda katta miqdordagi iste’mollik imkoniyati sababli bugungi iste’mol keyinga qoldirilmokda. Investisiyaga talab $A(r)$ funksiya bilan beriladi. Agar $0 < r < r_1$ bo‘lsa $A'(r) < 0$ va $r \geq r_1$ bo‘lsa $A'(r) = 0$

bo‘ladi – investisiyaning katta foizli normasida investisiyaga talab bo‘lmaydi (15.3 – rasm).

Muvozanat sharoitida fondni tashkil qiluvchi mahsulotga bo‘lgan talab $S(Y)$ investisiyaga bo‘lgan talab $A(r)$ bilan balanslashadi:

$$S(Y) = A(r).$$

Agar (3.3) ni e’tiborga olsak,

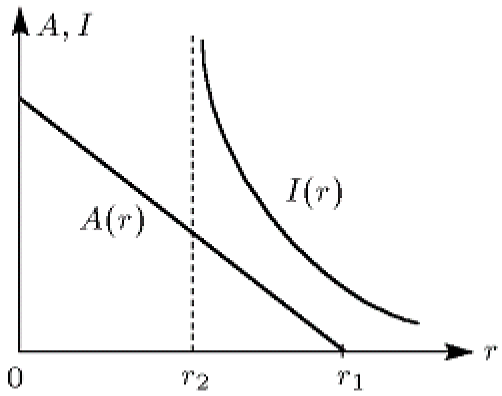
$$Y - \omega(Y) = A(r). \tag{3.4}$$

Modelni yopik ko‘rinishda ifodalash uchun moliyaviy bozor o‘rganiladi. Iqtisodiy agentlar uchun pul fondni tashkil qiluvchi mahsulotlar sotib olishga, iste’mol uchun, shuningdek, jamg‘arishning bir vositasi sifatida kerak. Faraz qilinadiki, pulni davlat chiqaradi va ularning mikdori *(taklif)* Z iqtisodiy sistemaning *berilgan boshqariluvchi parametri deyiladi.* Pulga bulgan talabga nisbatan quyidagicha faraz kilinadi:

8) pulga bo‘lgan talab operasion va chayqovchilik talablari yig‘indisidan iborat.

Operasion talab Y tovarni sotib olish uchun (ham fondni tashkil qiluvchi sifatida hamda iste’mol uchun) qo‘lda bo‘lishi lozim bo‘lgan pul miqdori bilan aniqlanadi. Agar mahsulot narxi p ga teng, muomala vaqti τ ga teng bulsa, u holda operasion talab τpY miqdorga teng.

Chayqovchilik talabi foiz normasi miqdori r bilan bog‘lik. Agar foiz normalari yuqori bo‘lsa, katta pulga ega bo‘lgan puldorlar yaxshi daromaddan umid qilib, pullarining anchagina qismini bankda saqlaydilar. Bunda ular bankga nisbatan banknotlarni yuqori darajada likvidasiya 5.5 – rasm. qilish (bu pullarni mahsulotlarga almashtirish) imkoniyatini qurbon qiladilar. Kichkina foiz stavkasida chayqovchilik talabi oshadi: puldorlar o‘z qo‘llariga ko‘prok miqdordagi pullarni



ushlab turishni xohlaydilar. Shuning uchun chayqovchilik talabi $I(r)$ funksiya orqali beriladi (5.5– rasm). $r > r_2$ bo‘lganda $I'(r) < 0$ bo‘ladi, $r \to r_2$ da $I(r)$ funksiya juda tez o‘sadi ($r \to r_2$ da $\lim I(r) = \infty$; pul egalari bank majburiyatlariga ega bo‘la olmaydilar). $r_2 < r_1$ deb hisoblash tabiiy, aks holda yoki investisiya nolga teng va iktisodiy muvozanat haqida gapirishga hojat qolmaydi yoxud $I(r)$ funksiya aniqlanmagan va uni o‘rganish ma’no kasb etmaydi.

Moliyaviy bozor muvozanat holatida bo‘lganida pullarni balansi («saqlanish qonuni») iqtisodiy tizimda quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$Z = \tau\, pY + I(r). \tag{3.5}$$

(3.1)-(3.5) tenglamalarni birlashtirib, 1)-8) farazlar asosida hosil qilingan bozor muvozanatining matematik modeliga ega bo‘lish mumkin:

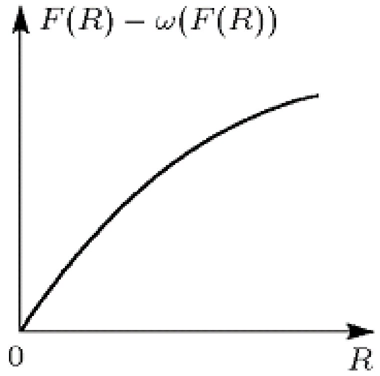
$$\begin{aligned} &Y = F(R), \\ &F'(R) = \frac{s}{p}, \\ &Y - \omega(Y) = A(r) \\ &Z = \tau\, pY + I(r) \end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.6) matematik modelda sistemaning parametri s (oylik maosh stavkasi) va τ texnik parametrlar beriladi. F, F', ω, A, I funksiyalar har biri o‘z argumentlarining ma’lum funksiyalari bo‘lib, ular yuqorida bayon etilgan xossalarga ega. Ushbu berilganlarga asosan modeldan to‘rtta noma’lum miqdorlar: Y (ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori), R (bandlik), p (mahsulot narxi) va r (daromad normasi) aniqlanadi.

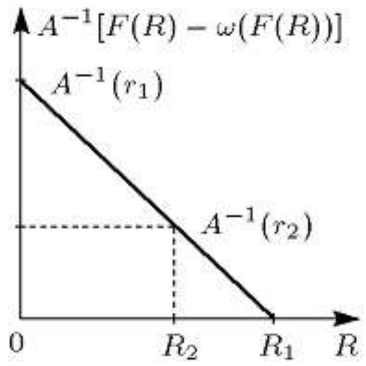
(3.6) dan p, r, Y mikdorlarni yo‘qotib, (3.6) tenglamani R ga nisbatan quyida keltirilgan bitta tenglama ko‘rinishida ifodalash mumkin:

$$-\frac{\tau sF(R)}{F'(R)} + Z = I\left(A^{-1}[F(R) - \omega(F(R))]\right), \tag{3.7}$$

bu yerda A^{-1} funksiya A funksiyaga teskari funksiyadir. (3.7) dan R ni qiymatini aniqlab, (3.6) tenglamalardan boshka noma'lum miqdorlarni ham aniqlash mumkin.



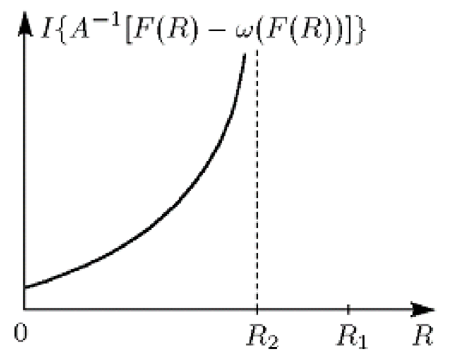
5.6 – rasm.



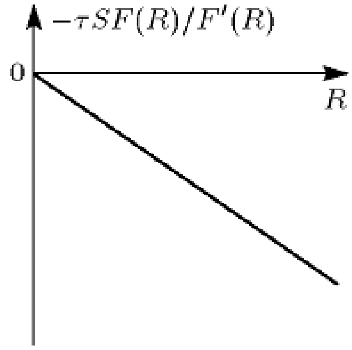
5.7 – rasm.

(3.7) tenglamani chap va o'ng tomonlariga kiruvchi funksiyalarni grafiklari tahliliga asoslanib, bu tenglama yagona yechimga ega ekanligini ko'rsatamiz.

$F(R) - \omega(F(R))$ funksiya $R = 0$ da nolga teng bo'lib, R ning monoton o'suvchi funksiyasidir (5.6–rasm). Uning monotonligi $d\omega(F(R))/d(F(R)) = c < 1$ shartdan, bu funksiya R ni o'sishi bilan o'suvchi ekanligi $dF(R)/dR > 0$ shartdan esa kelib chiqadi. Shuningdek, bu funksiya A^{-1} monoton funksiyaning argumentidir. A funksiyaning xossasidan (5.7–rasm) A^{-1} funksiyaning R argumentga sifat jihatdan qaysi ko'rinishda bog'likligini ko'rish mumkin (5.7–rasm). Rasmdan ko'rinib turibdiki, $R > R_1$ ($R_1 - R$ ning qandaydir qiymati bo'lib, $0 < R_1 < \infty$) shart bajarilsa, $A^{-1} \equiv 0$. O'z navbatida A^{-1} funksiya tenglamada I funksiyaning argumenti sifatida ishtirok etayapti. I funksiyaning xossasi 3–rasmda keltirilgan. 5.8–rasmda bu funksiyaning grafigi keltirilgan bo'lib, u $R > R_2$ da aniqlanmagan.



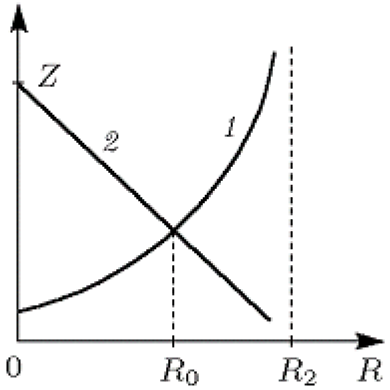
5.8–rasm .



5.9–rasm .

Endi (3.7) tenglamaning chap tomonini ko‘rib chiqamiz. $-\tau sF(R)/F'(R)$ funksiya $R=0$ da nolga teng ($F'(R)\neq 0$ deb faraz qilinadi) (5.4–rasmga karalsin). uning R bo‘yicha birinchi tartibli hosilasi funksiyaning $F'(R)>0$, $F''(R)<0$ xossalariga asosan manfiy, ya’ni bu funksiya monoton kamayuvchidir (6 –rasm).

(3.7) tenglama uchun va chap kismlari grafigini (ularning grafigi mos holda 1 va 2 egri chiziklar) birlashtirib (5.10–rasm), shunga ishonch hosil qilish mumkinki, boshqaruvchi parametr Z ning yetarlicha katta qiymatlarida bu egri chiziqlar qandaydir R_0 $(0<R_0<\infty)$ nuqtada kesishadi. Grafiklarning monotonligiga asosan kesishish nuqtasi yagonadir. Xususan, (3.6) matematik model haqikatdan xam iqtisodiyotning muvozanat holatini ifodalovchi yagona yechimga ega.



5.10 – rasm

(3.6) matematik model muvozanat holatiga yaqin bo‘lgan turli holatlarni qiyosiy tahlili uchun ham ishlatilishi mumkin (qanday kilib sistema muvozanat holatiga keladi yoki muvozanat holatidan chiqadi degan savollarga javob bermasdan).

Transport masalasi va uni yechish usullari.

Transport masalasi chizikli dasturlash masalalari ichida nazariy va amaliy nuktasi nazaridan eng yaxshi uzlashtirilgan masalalardan biri bulib, undan sanoat va kishlok xujalik maxsulotlarini tashishni optimal rejalashtirish ishlarida muvaffakiyatli ravishda keng foydalanilmokda.

Transport masalasi maxsus chizikli dasturlash masalalariga tegishli bulib, uning chegaralovchi shartlardagi koeffisentlardan tuzilgan (aij) matrisaning elementlari 0 va 1 rakamlaridan iborat buladi va xar bir ustunda fakat ikkita 0 dan farkli element, kolganliri esa 0 ga teng buladi. Transport masalasini yechish uchun uning maxsus xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan. Transport masalasi odatda jadvallar yerdamida yechiladi. Kuyilgan masalani yechish uchun tayerlangan ma'lumotlar yerdamida boshlangich reja tuzib olinadi.

Bizga ma'lumki transport masalasining matematik modelini kuyidagi kurinishda yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i , \quad (i=1,m) \qquad (9.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j , \quad (j=1,n) \qquad (9.2)$$

$$n \quad X_{ij} \geq 0 \quad (i=1,m , j=1,n) \qquad (9.3)$$

$$U_{min} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \qquad (9.4)$$

Bu yerdagi (9.1) shart xar bir ishlab chikaruvchi punktlardagi maxsulot tula taksimlansin, (9.2) esa xar bir iste'mol kiluvchi punkt talabi tula kondirilsin degan ma'nolarni bildiradi. Maxsulotni tashish uchun sarf kilinadigan umumiy transport xarajatlari (9.4) chizikli funksiya orkali ifodalanadi.

Masaladagi xar bir a_i, b_j va C_{ij} manfiy bulmagan sonlar, ya'ni $ai \geq 0$, $b_j \geq 0$, $C_{ij} \geq 0$

Agar (9.1)-(9.4) masalada

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ q } A \qquad (9.5)$$

tenglik urinli bulsa, ya'ni ishlab chikarilgan maxsulotlar yigindisi unga bulgan talablar yigindisi teng bulsa, u xolda bu masalani yopik modelli transport masalasi deb ataymiz.

1 - teorema. Xar kanday yepik modelli transport masalasi yechimga ega.

2 - teorema. Transport masalasining shartlaridan tuzilagan matrisaning rangi m+n-1 ga teng.

3 - teorema. Agar masaladagi barcha ai va bj lar butun sonlardan iborat bulsa, transport masalasining yechimi butun sonli buladi.

4 - teorema. Ixtiyeriy transport masalasining optimal plani mavjuddir.

Transport maslasining yechimni topish uchun kerak buladigan iterasiyalar soni boshlangich tayanch rejani tanlashga boglik. Optimal rejaga yakin bulgan tayanch rejani topish masalaning optimal yechimini topishni tezalashtiradi.

Minimal xarajatlar usuli yukoridagi usulga karaganda eng kulay va osondir.

Minimal xarajatlar usulining goyasi kuyidagilardan iborat:

1. Transport masalasi xarajatlaridan tashkil topgan matrisa belgilab olinadi, ya'ni

$$C = \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{matrix}$$

Bu matrisaning minimal elementi topilib belgilanadi:

$$\min_{i,j} C_{ij} = c_{i,j}$$

U xolda X_{ij} kuyidagicha aniklanadi: X_{ij} q min (a_{ij})

Bu yerda ikki xol bulishi mumkin:

$$1)\ a_i \leq b_j$$

$$a_i > b_j.$$

Birinchi xolda i1 katorning barcha X_{ij} (i#j) elementlari X_{ij}=0

buladi, bunday xolda i1 kator uchiriladi deb ataymiz.

Ikkinchi xolda esa j1 ustunning barcha X_{ij} (i=i1) elementlari X_{ij}=0 (i#i1) buladi, bu xolda j1 ustun uchiriladi deb ataymiz.

Faraz kilaylik C matrisa S' matrisaning katorini (1- xol) yoki j1 ustunini (2-xol) uchirish natijasida xosil bulgan matrisa bulsin. Yangi matrisa uchun

$$a_i = \begin{matrix} a_i, & i=i_1 \\ a_i - X_{ij}, & i=i_1 \end{matrix}$$

$$b_j = \begin{matrix} b_j, & j=j_1 \\ b_j - X_{ij}, & j=j_1 \end{matrix}$$ bulsin.

Ma'lumki S' matrisadagi ustun va katorlar soni S matrisadan bitta kam buladi. Ikkinchi kadamda yukoridagi S matrisa uchun bajarilgan ishlar C' matrisa va a_1, b1 mikdorlar uchun bajariladi.Natijada rejalardan tashkil topgan Xq(x_{ij}) matrisaning yana bir katori yeki ustuni uchiriladi. Bu jarayen S matrisaning barcha kator va ustunlari uchirilguncha, ya'ni X maatrisaning xamma kator va ustunlari tuldirilguncha takrorlanadi.

Misol. uchta A_1,A_2,A ombordagi 300,250,350 tonna unni B_1,B_2,B_3,B_4 magazinlarga mos ravishda 225,230,235,210 tonnadan kilib taks imlash kerak.

Bir tonna yukni A_i (i=1,3) ombordan ixtiyeriy B_j(j=1,4) magazinga olib borish uchun transport xarajati

$$S = \begin{matrix} 8 & 12 & 10 & 15 \\ 4 & 13 & 15 & 14 \\ 9 & 16 & 17 & 11 \end{matrix}$$

kabi bulsa, umumiy sarf kilinadigan mablag minimal buladigan tash ish rejasini tuzing.

Yechish. Masalada keltirilgan ma’lumotlar yerdamida eng kam narx usulini kullab boshlangich tashish rejasini tuzamiz.

GA \ D AN	V_1	V_2	V_3	V_4
A_1	8	12 65	15	300
A_2	4 225	13 25	14	250
A_3	9	16 140	11 21 0	350
	225	230	210	900

Bu jadvaldan kurinadiki $x_{11}=x_{14}=x_{23}=x_{24}=x_{31}=x_{33}=0$, $x_{12}=65$, $x_{13}=235$, $x_{21}=225$, $x_{22}=25$, $x_{32}=140$, $x_{34}=210$

$Z_{min}=12\cdot65+10\cdot235+4\cdot225+13\cdot25+16\cdot140+11\cdot210=8905$ tonna-sum.

Demak, $Z_{min}=8905$ tonna - sum ekan.

Transport masalasini yechish usullari.

Transport masalasining bir nechta yechish usullari borligini avval aytib o‘tgan edik. Endi shulardan ayrimlarining transport masalasini yechishda ko‘llanilishini ko‘rib o‘taylik.

Transport masalasi matrisaviy ko‘rinishda berilgan bo‘lsin. (2-jadval)

2-jadval

B_j \ A_i		1	2	3	4	5
		$B_1=40$	$B_2=40$	$B_3=30$	$B_4=30$	$B_5=60$
1	$A_1=80$	2	3	1	5	3
2	$A_2=40$	8	5	4	2	9

3	A_3 = 80	6	7	7	9	8

Bu masalaning iktisodiy - matematik modeli kuyidagicha bo‘ladi:

$$F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij}\, x_{ij} = 2x_{11} + 3x_{12} + 1x_{13} + 5x_{14} + 3x_{15} + 8x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23} +$$

$$+2x_{24} + 9x_{25} + 6x_{31} + 7x_{32} + 7x_{33} + 9x_{34} + 8x_{35} \rightarrow \min$$

Tashish uchun sarflanadigan jami transport xarajatlari eng kichik bo‘lib, kuyidagi shartlar bajarilishi kerak:

1. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 80$
   $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 40$
   $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 80$
2. $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40$
   $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40$
   $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$
   $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$
   $x_{15} + x_{25} + x_{35} = 60$
3. $x_{ij} \geq 0$, $(i = 1,3 \;;\; j = 1,5)$

Endi masalaning kaysi tipga mansub ekanligini aniklaymiz. Buning uchun

$$\sum_{I=1}^{3} A_i = \sum_{j=1}^{5} B_j$$

shartni tekshirib kuramiz.

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = 80 + 40 + 80 = 200$$

$$\sum_{j=1}^{5} B_j = 40 + 40 + 30 + 30 + 60 = 200$$ bo‘ladi.

Demak, berilgan masala transport masalasining yopik tipiga mansub ekan.

Masalaning matematik modeli va uning tipi aniklangandan so‘ng ma’lum bo‘lgan birorta usullardan foydalanib yechishga kirishamiz.

Potensial usul. Bu usul yordamida dastlabki plan ketma-ket yaxshilanib, u optimal plangacha yetkazilish konuniyatiga asoslangandir.

Jumladan, uchta skladdagi 80, 40, 80 t unni beshta magazinga yetkazib berishni potensial usul yordamida yechilsin. Magazinlarning unga bo‘lgan talabi tegishli ravishda 40, 40, 30, 30 va 60 tonna.

Tashish shunday tashkil etilishi kerakki, iste’molchilar talabi mos ravishda kondirilib, transport xarajatlari eng kam bulsin. (3-jadvalning katakchalaridagi chap burchagida bir birlik maxsulotni tashish uchun kilinadigan xarajatlar, o‘ng burchagida esa ixtiyoriy taksimlangan plan berilgan).

3-jadval

B_j / A_i	B_1 40	B_2 40	B_3 30	B_4 30	B_5 60	i
A_1 =80	40 2	10 3	30 1	5	3	4
A_2 = 40	8	10 5	4	30 2	9	2
A_3 = 80	6	20 7	7	9	8 60	
v_j	6	7	5	4	8	

Endi ushbu belgilashlarni kiritaylik:

u_i - i kator potensiali;
v_j - j ustun potensiali;
c_{ij} - i kator potensialiga j ustun potensialining yigindisini ifodolovchi mikdor;
c_{ij} - i skladdan j magazinga bir birlik maxsulotni yetkazib berish xarajatlari;
E_{ij} - i skladdan j magazin uchun xisoblanadigan "xarakteristik mikdor";

Ma’lumki, $c_{ij} = u_i + v_j$ bulgani uchun satr va ustun potensiallari $u_i = c_{ij} - v_j$ yoki $v_j = c_{ij} - u_i$ formula orkali topiladi.

Xarakteristikalari esa $Yei_j = c_{ij} - (I_i + v_j)$ kabi xisoblanadi.

Endi kator va ustun potensiallarini xisoblaymiz. Kulaylik uchun dastlabki uchunchi satr potensialini $u_3 = 0$ deb kabul kilsak, $v_5 = c_{15} - u_3 = 8 - 0 = 8$ ni xosil kilamiz. Xuddi shu uchinchi katordagi $v_2 = 7 - 0 = 7$, $v_1 = 6 - 0=6$ larni topamiz. Shu tarika boshka satr va ustun potensiallari xam topiladi;

$v_3 = 1 - (-5) = 1 + 5 = 6$; $v_4 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$;
$u_2 = 2 - 4 = - 2$; $u_1 = 3 - 7 = - 4$

Xamma ustun va satr potensiallari topilgandan sung yuk taksimlanmagan katakchalarning xarakteristikalarini xisoblaymiz. Shuni nazarda tutish kerakki, xamma katakchalardagi xarakteristikalar $E_{ij} \geq 0$ bo‘lguncha davom ettiriladi va bu plan optimal plan bo‘ladi.

Endi xarakteristikalarni xisoblaymiz.

$YE_{14} = 5 - 0 = 5$; $YE_{13} = 3 - 4 = - 1$; $YE_{21} = 5 - 4 = 1$

$YE_{23} = 4 - 3 = 1$ $YE_{25} = 8 - 6 = 2$; $YE_{31} = 6 - 6 = 6$;

$YE_{33} = 7 - 5 = 2$; $YE_{34} = 9 - 4 = 5$.

Kurinib turibdiki, $E_{15} < 0$ shuning uchun 1-jadvaldagi dastlabki plan optimal emas ekan. Ikkinchi tomondan bu manfiy xarakteristika joylashgan katakchani yuk bilan ta’minlash kerak, ya’ni taksimlangan yukni siljitish kerak.

Bu siljishni shunday turtburchakli zanjir shaklida bajarish kerakki, uning karama-karshi burchaklarida bir xil ishoralar ("plyus" yoki "minus"), tomonlarida esa almashib keladigan ishoralar bulishi, shuning bilan birga turtburchakning uchta uchida albatta yuk taksimlangan bulishi kerak.

Endi 3-jadvaldagi A_1 V_5 uchta yukni turtburchaklarning avvalgi muvozanati buzilmagan xolda siljitamiz. A_1 V_2 dagi 10 ni A_1 V_5 ga kuchiramiz. A_3 V_2 va A_3 V_5 uchlaridagi yuklar mos ravishda 30 va 50 mikdorga almashadi. Kolgan taksimlashlar esa uzgarishsiz xolda kuchirilib, yangi 4-jadval xosil kilinadi. Bu jadvalda xam potensiallar tegishli ravishda yukoridagi kabi xisoblanadi.

4-jadval

B_j / A_i	B_1 40	B_2 40	B_3 30	B_4 30	B_5 60	i
A_1 = 80	2	40 3	30 1	5	10 3	5
A_2 = 40	8	10 5	4	30 2	9	2
A_3 = 80	6	30 7	7	9	50 8	
v_j	7	7	6	4	8	

Xarakteristikalar esa kuyidagichadir:

$YE_{12} = 3 - 2 = 1$; $YE_{14} = 5 + 1 = 6$; $YE_{21} = 8 - 5 = 3$;
$YE_{23} = 4 - 4 = 0$; $YE_{25} = 9 - 6 = 3$; $YE_{31} = 6 - 7 = -1$;
$YE_{33} = 7 - 6 = 1$; $YE_{34} = 9 - 4 = 5$.

Demak, yangi tipdagi plan xam optimal emas, chunki $YE_{31}<0$. Bu A_3V_1 katakchaga yukni siljitish kerak. Shuni eslatib utish kerakki, agar xarakteristikalardan bir nechtasi manfiy bulsa, yukni siljitish absolyut kiymat jixatidan eng kattasidan boshlanadi.

Siljitishni A_1 V_1 -A_5 V_5- A_3 V_5-A3 V1 turtburchagi orkali bajaramiz. Bu turtburchakning A_1 V_1 uchida +40; A_1 V_5 uchida -10 va A_3 V5 da 50 birlik yuk taksimlangan edi. A_1 V_1 dagi 40 ni A1 V5 ga kuchirib -50 ni xosil kilamiz. A_1 V_1 ga 40 ni kushsak, A_3 V_5 da 10 xosil buladi. Boshka taksimotlarni uz xolida kuchirib yangi 5- jadvalni xosil kilamiz. Bunda xam mos ravishda potensiallar tuzilgandan sung yuk taksimlanmagan katakchalarning xarakteristikalarini yana tekshirib kuramiz.

YE_{11}=2-2=0; YE_{12} = 3-2=1; YE_{14}=5+1=6; YE_{21}=8-5=3;

YE_{23}=4-4=0; YE_{25} = 9-6=3; YE_{33}=7-6=1; YE_{34}=9-4=5;

5-jadval

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	i
	40	40	30	30	60	
A_1 = 80	2	3	30 / 1	5	50 / 3	4
A_2 = 40	8	10 / 5	4	30 / 2	9	2
A_3 = 80	40 / 6	30 / 7	7	9	10 / 8	
v_j	7	7	6	4	8	

Demak, yuk taksimlanmagan xamma katakchalarning xarakteristikalari YE>0 shartni kanoatlantiradi. Shuning uchun topilgan uchinchi plan (5 - jadval) optimal plan ekan.

Topilgan optiman plan fakatgina F= 1* 30+ 3* 50+ 5* 10+ 2* 30+ 6*40+ 7* 30+ +8*10=820 birlik transport xarajatlari sarflanishi ko‘rinib turibdi.

Potensial usul - xisoblash metodikasi jixatidan ancha kulay va oson bo‘lgani uchun amaliy masalalarni kulda yechish uchun standart dastur tuzilgan.

1. Chiziqli programmalashning umumiy va kanonik masalalari.

Chizikli programmalashning asosiy masalasi ta'rifini kuyidagicha berish mumkin.

Bizga chizikli funksiya (maksadli funksiya)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad (1.1)$$

va n-noma'lumli m-ta chizikli tenglamalar sistemasi

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

berilgan bulsin.

Bu yerda (1.2) sistemaning shunday yechimlarini topish kerakkim (1.1) chizikli funksiya (maksad funksiyasi) eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) kiymat kabul kilsin.

Maksad funksiyasining eng katta yoki eng kichik kiymatlarni topish masalaning kuyilishiga boђlik. Ishlab chikarishda daromad olish talab etilsa, chizikli funksiyaning eng katta (max) kiymatlari topiladi. Agar ishlab chikarishda xarajatlarni rejalashtirish kerak bulsa, u xolda chizikli funksiyaning eng kichik (min) kiymatlarini topish talab etiladi.

Kup masalalarni yechganda $x_1, x_2, ..., x_n$ uzgaruvchilarga kuyilgan cheklovlar chizikli tengsizliklar sistemasi kurinishida beriladi, ya'ni

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

Xar kanday (1.3) ko'rinishdagi shartlarni chizikli programmalashning asosiy masalasidagi ko'rinishiga keltirish mumkin.

Haqiqatan ham, (1.3) sistemasining birinchi tengsizligiga y_1, ikkinchisiga y_2 va x.k. m-chi tengsizligiga y_m qo'shsak (1.3) sistemaga ekvivalent bulgan quyidagi sistema hosil bo'ladi

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + y_m &= b_m. \end{aligned}\right\} \quad (1.3)$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,n}, \dots, y_j \geq 0, \ j = \overline{1,m}.$$

Shuni qayd qilish kerakki (1.3) chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimi (1.3) tengliklar sistemasini ham qanoatlantiradi yoki aksincha.

Tengsizliklar sistemasi quyidagicha ko'rinishda

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{array}\right\} \qquad (1.4)$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \ldots, y_j \geq 0,\ j = \overline{1,m}.$$

bo‘lganda ham masala yukoridagi kabi yechiladi, ya’ni bu yerda musbat $y_1, y_2, \ldots, y_m$ -lar mos ravishda ayiriladi. Demak, chizikli programmalash masalalarini xammasi asosiy masalaga keltirish mumkin. Shunday kilib, 0-ga teng yoki noldan katta yechimlarini topish kerakkim (1.1) – chizikli forma (maksadli funksiya) eng katta (max) yoki bulmasa eng kichik (min) kiymat kabul kilsin.

Ta’rif. (1.2) sistemaning manfiy bulmagan xar kanday yechimlar tuplamiga mumkin bulgan yechimlar yoki masalaning tayanch rejasi deyiladi.

Bundan keyin $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ chizikli funksiyani maksad funksiyasi deb yuritamiz. Maksad funksiyasini maksimumlashtiruvchi (minimumlashtiruvchi) mumkin bulgan barcha yechimlariga optimal yechimlar deyiladi yoki optimal reja xam deb yuritiladi.

IV. AMALIY MASHGʻULOTLAR

Amaliy mashgʻulotlar zamonaviy didaktik ta’minot va laboratoriya jihozlariga ega boʻlgan auditoriyalarda hamda Internet tarmogʻiga ulangan kompyuter sinflarida, tayanch oliy ta’lim muassasalarining kafedralarida tashkil etiladi.

Amaliy mashgʻulotlarda fizik jarayonlarni tasvirlovchi amaliy masalalarning qoʻyilishi, ularni yechish usullari, masalani yechishning algoritmi va dasturini yaratish, dasturning toʻgʻriligini test masalalarda tekshirish, hisoblash eksperimentlari oʻtkazish va olingan natijalarni tahlil qilish masalalari oʻrganiladi.

Amaliy mashgʻulotlarda quyidagi mavzular va vaziyatli masalalar oʻrganiladi:

Matematik modellarni qurish metodlari. Matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlilik.

Energiyaning, massa (materiya)ning va impulsning saqlanish qonunlari.

Matematik modellashtirishda analogiya usuli.

Iyerarxiya prinsipidai foydalanib, matematik modellar qurish.

Yechiladigan masalalar turlari. Jamiyat rivojlanishining demografik modeli. Maltus va Fyurxst-Perl modellari.

Matematik modellarni qurish usullari. Boshlangʻich va chegaraviy masala. Progonka usuli haqida tushuncha.

«Yirtqich-oʻlja» sistemasining oʻzaro munosabat modeli.

Ikki davlat oʻrtasidagi qurollanish poygasi modeli.

Biologik modellar. Oʻzaro ta’sirlashuvchi populyasiyalar sonini modellashtirish. Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli.

Bozor iqtisodiyoti muvozanatining makromodeli. Iqtisodiy oʻsishning makromodeli.

Reklama kompaniyasini tashkillashtirish.

Transport masalasi.

Hisoblash eksperimenti va uning bosqichlari.

NAZORAT SAVOLLARI
«Matematik modellashtirish asoalari» kursi boʻyicha savollar

1. Bilish jarayonida va insonning amaliy faoliyatida modellashtirishning roli nimalardan iborat?
2. Matematik modelga qoʻyiladigan qanday talablar bor?
3. Matematik modellarning universalligini qanday koʻrsata olasiz?
4. Impulsning saqlanish qonunini Galileyning nisbiylik prinsipi va energiyaning saqlanish qonuni asosida tushuntiring.
5. Saklanish konunlari va ularning zaruriyatini tushuntiring.
6. Matematik modelni yechish usullari.

7. Jismga yerda burchak ostida boshlang‘ich tezlik berildi. Jismning xarakat trayektoriyasini va uning otilish va yerga tushish nuqtalari orasidagi masofani aniqlang.
8. Model adekvatligi deganda nimani tushunasiz va u qanday tekshiriladi?
9. Impulsning saqlanish qonunini Nyuton qonunlari asosida keltirib chiqaring.
10. Oqimning uzluksizligi tenglamasini keltirib chiqaring.
11. Modellashtirishda xatolik turlari va ularning kelib chiqish manbalari.
12. Aylanadigan o‘qning tezligini aniqlash uchun yukka tiqilib qolgan o‘q, ya’ni "o‘q-yuk" tizimini matematik modelini tuzing
13. Matematik modellashtirish jarayoni qanday asosiy bosqichlardan iborat?
14. Xarakatdagi jismning mexanikaviy energiyasi nimalardan iborat?
15. Maltus modelida populyasiya miqdorining o‘zgarishi qanday ifodalanadi?
16. Energiyaning saklanish konuni muammolari nimalardan iborat?
17. Impulsning saqlanish qonunidan kelib chikadigan asosiy natijalar nimalardan iborat?
18. Moddalar massasining saklanish qonunini tushuntiring.
19. Matematik modellashtirishda analogiya usuli.
20. Matematik modellarning klassifikasiyasi.
21. Kompyuterli modellashtirish nima?
22. Matematik modellashtirishda xatolik nimalar hisobiga hosil bo‘ladi va u qanday baholanadi?
23. Statik va dinamik matematik modellar qanday modellar? Misollar bilan tushuntiring.
24. Radioaktiv parchalanish jarayonining matematik modelini tuzing.
25. Analitik va imitasion modellarni tushuntiring.
26. Ikkita zarracha bir to‘g‘ri chiziq bo‘yicha xarakatlanmoqda va ular absolyut elastik to‘qnashsin. Zarrachalarning massalari bir xil bo‘lganda, ularning to‘qnashishdan keyingi tezliklarini aniqlang.
27. Matematik modellashtirishda variasion prinsipdan foydalanish.
28. $x(0) = 1$ bo‘lgan xolda epidemiya tabiiy ravishda tarqalishining modelini keltiring. Agar t vaqtda bir kishi emas, balki bir necha kishi kasal bo‘lsa va qisqa vaqtdan so‘ng bemorlar tuzalib, immunitetga ega bo‘lsalar, bu model qanday o‘zgaradi?
29. Real fizik jarayonlar va ularni matematik modellashtirish qanday amalga oshiriladi?
30. Ferxyulst tomonidan kanday model taklif kilingan?
31. Daraxt o‘sishining modeli qurilganda qanday taxminlardan foydalanildi?
32. Yirtqich va o‘lja populyasiyalari sonining o‘zgaruvchanligini cheklangan yashash doirasidagi o‘zgarishlarini tavsiflash uchun berilgan tenglama kanday qismlardan iborat?
33. Issiqlik tarqalish jarayonini matematik modellashtirishda qanday masalalar qo‘yilishi mumkin?
34. Diffuziya tipidagi masalalarda qanday chegaraviy shartlar beriladi?

35. Harakatdagi armiya jangchilari sonining o‘zgarish dinamikasi qanday 3 ta faktor bilan aniqlanadi?
36. Qurollanish poygasining Richardson modelini tushuntiring.
37. Ikki populyasiyaning o‘zaro munosabati qanday modellashtiriladi?
38. Parabolik tipdagi tenglamalarni oshkormas sxemali almashtirishlar yordamida yechish uchun kerak bo‘ladigan ishchi formulalarni hosil qiling.
39. Yirtqich-o‘lja modelini tushuntiring.
40. Raqobat jarayoni qanday modellashtiriladi?
41. Modda va energiya muvozanatining modelini tushuntiring.
42. Epidemiya tarqalish modeli qanday quriladi?
43. Reklama kampaniyasining matematik modeli qanday quriladi?
44. Makroiqtisodiy o‘sish modelini tushuntiring. Makroiqtisodiy o‘sish qanday yuz beradi?
45. Hisoblash eksperimenti va uning bosqichlarini tushuntiring.
46. Populyasiya dinamikasining Maltus modelini tushuntiring.

Matematik modellashtirish asoslari fanidan test savollari

1. Model lotincha “modulus” so‘zidan olinganligi ma’lum, u qanday ma’noni anglatadi?
a) barcha javoblar to‘g‘ri;
b) o‘lchov;
v) namuna.

2. Modelni ta’rifini ko‘rsating.
a) barcha javoblar to‘g‘ri;
b) model – bu real obyektni almashtirishi mumkin bo‘lgan, tadqiqot va tajriba o‘tkazish uchun qulay va arzon bo‘lgan boshqa bir real yoki abstrakt obyektdir;
v) model real obyektning soddalashtirilgan ko‘rinishi bo‘lib, uning hamma xossalarini emas, balki asosiy xossalarinigina o‘zida mujassam etgan boshqa bir real yoki abstrakt obyektdir.

3. Hozirgi kunda fan olamida ma’lum bo‘lgan ma’lumotlarni ko‘rinishi va ma’nosiga qarab qanday turlarga bo‘lish mumkin?
a) fizik, grafikli, matematik;
b) grafikli, matematik;
v) matematik, fizik.
g) fizik, grafikli.

4. Tajriba o‘tkazishga mo‘ljallangan tajriba uchastkalari, laboratoriya mashg‘ulotlarini o‘tkazishga mo‘ljallangan asbob uskunalar qanday modellarga misol bo‘ladi?

a) fizik;
b) matematik;
v) grafikli.

5. Sxemalar, chizmalar, rasmlar, ilmiy va tarixiy asarlar qanday modellarga misol bo‘la oladi?
a) grafikli;
b) matematik;
v) fizik.

6. Nyuton qonunlari, saqlanish qonunlari qanday modellarga misol bo‘la oladi?
a) matematik;
b) fizik;
v) grafikli.

7. ... model real obyektni tasavurimizdagi abstrakt ko‘rinishi bo‘lib, u matematik belgilar va ba’zi bir qonun–qoidalar bilan ifodalangan bo‘ladi.
a) matematik;
b) fizik;
v) grafikli.

8. Masalaning yechilishi hususiyatlariga qarab matematik modellar qanday turlarga bo‘linishi mumkin?
a) funksional modellar, strukturali modellar;
b) strukturali modellar;
v) funksional modellar.

9. Funksional modellarni mohiyati nimada?
a) barcha javoblar to‘g‘ri;
b) funksional modellarda hodisa yoki obektni harakterlovchi barcha kattaliklar miqdoriy ifodalaniladi;
v) funksional modellarda kattaliklarning ayrimlari erkli o‘zgaruvchilar sifatida, boshqalari esa shu miqdorlarning funksiyalari sifatida qaraladi.

10. Matematik modellar quyida keltirilganlarning qaysi biri bilan ifodalanishi mumkin?
a) differensial, algebraik tenglamalar yoki tengsizliklar sistemasi ko‘rinishida;
b) differensial tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi ko‘rinishida;
v) algebraik tenglamalar yoki tenglamalar sistemasi ko‘rinishida;
g) algebraik tengsizliklar yoki tengsizliklar sistemasi ko‘rinishida.

11. Strukturali modellarning mohiyati nimadan iborat?
a) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri;
b) strukturali modellarda matematik model murakkab obektning strukturasini ifodalaydi;

v) strukturali modellarda murakkab obyekt odatda turli qismlardan tuzilgan bo‘lib, bu qismlar orasidagi bog‘lanishlarni odatda miqdoriy ifodalab bo‘lmaydi;

12. Matematik modeldagi berilganlar va bashoratlash natijalarining xarakteriga ko‘ra modellar qanday turlarga ajratilishi mumkin?
a) deterministik, ehtimolli-statistik modellar;
b) ehtimolli-statistik, algebraik modellar;
v) deterministik modellar;
g) differensial modellar.

13. Deterministik modellar nima bilan xarakterlanadi?
a) deterministik modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinadi;
b) deterministik modellar statistik ma’lumotlarga asoslangan bo‘lib, ular yordamidagi bashoratlar ehtimolli harakterda bo‘ladi;
v) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri.

14. Ehtimolli-statistik modellar nima bilan xarakterlanadi?
a) ehtimolli-statistik modellar statistik ma’lumotlarga asoslangan bo‘lib, ular yordamidagi bashoratlar ehtimolli harakterda bo‘ladi;
b) ehtimolli-statistik modellarda aniq, bir qiymatli bashorat qilinadi;
v) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri.

15. Matematik modelga qo‘yiladigan asosiy talablarni ko‘rsating.
a) universallik, kompaktlik, soddalik, past sezgirlik darajasiga ega bo‘lishi, moslashish darajasi yuqori bo‘lishi;
b) universallik, past sezgirlik darajasiga ega bo‘lishi, moslashish darajasi yuqori bo‘lishi;
v) kompaktlik, soddalik, past sezgirlik darajasiga ega bo‘lishi, moslashish darajasi yuqori bo‘lishi;
g) universallik, kompaktlik, soddalik, moslashish darajasi yuqori bo‘lishi.

16. Matematik modelni qurishning asosiy bosqichlarini ko‘rsating.
a) obyektni o‘rganish, yig‘ilgan ma’lumotlarni sistemalashtirish, yig‘ilgan ma’lumotlar asosida obyekt bo‘ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; obyektni taklif etilayotgan matematik modelini “jihozlash”, matematik model asosida diskret model qurish va diskret model asosida dastur tuzib, kompyuterda qo‘yilgan matematik masalani yechish;
b) obyektni o‘rganish, yig‘ilgan ma’lumotlar asosida obyekt bo‘ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; obyektni taklif etilayotgan matematik modelini “jihozlash”, matematik model asosida diskret model qurish va diskret model asosida dastur tuzib, kompyuterda qo‘yilgan matematik masalani yechish;
v) obyektni o‘rganish, yig‘ilgan ma’lumotlar asosida obyekt bo‘ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlash; obyektni taklif etilayotgan matematik modelini “jihozlash”, dastur tuzib, kompyuterda qo‘yilgan matematik masalani yechish.

17. Matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda nima tushuniladi?
a) matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda obyekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat va miqdor jihatdan o‘xshashligi va yaqinligi tushuniladi;
b) matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda obyekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat jihatdan o‘xshashligi va yaqinligi tushuniladi;
v) matematik model va uning real obyekti orasidagi muvofiqlik deyilganda obyekt va uning matematik modeli dinamikalarining miqdor jihatdan o‘xshashligi va yaqinligi tushuniladi.

18. Obyekt va uning matematik modeli dinamikalari orasida muvofiqlikni o‘rnatishning usullarini ko‘rsating.
a) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri
b) matematik modelda ishtirok etayotgan o‘zgarmas kattaliklarni qaytadan baholash;
v) matematik modelni yozishda qabul qilingan ishchi gipotezalarni qaytadan ko‘rib chiqish;
g) real obyekt haqida qo‘shimcha ma’lumotlar yig‘ish va yangi yig‘ilgan ma’lumotlar asosida modelni qaytadan ko‘rib chiqish.

19. Agar $M_I(0)$ va $M_{II}(0)$ moddalarning boshlang‘ich, $M_I(t)$ va $M_{II}(t)$ joriy massalari bo‘lsa, $M_I(0)+M_{II}(0)=M_I(t)+M_{II}(t)$ formula nimani ifodalaydi?
a) moddalar massasining saqlanish qonunini;
b) energiyani saqlanish qonuni;
v) impulsni saqlanish qonuni.

20. Radiaktiv yemiriluvchi modda massasining vaqt bo‘yicha o‘zgarish qonunini ko‘rsating.
a) $M_I(t)=M_I(0)e^{-\alpha t}$;
b) $M_I(t)=M_I(0)e^{\alpha t}$;
v) $M_I(t)=M_I(0)\left(e^{-\alpha t}+e^{\alpha t}\right)$.

21. Radiaktiv moddaning yemirilish tezligi qanday formula bilan ifodalanadi?
a) $\dfrac{dM_I(t)}{dt}=-\alpha M_I(t)$;
b) $\dfrac{dM_I(t)}{dt}=\alpha M_I(t)$;
v) $\dfrac{dM_I(t)}{dt}=-\alpha M_I(0)$.
22. Raketa harakati uchun impulsning saqlanish qonuni qanday ifodalanadi?
a) $m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)+[m(t)-m(t+\Delta t)][v(t+\Delta t)-u]$;

b) $m(t)v(t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t)$;
v) $m(t)v(t) = [m(t) - m(t + \Delta t)][v(t + \Delta t) - u]$.

23. Raketa harakati uchun impulsning saqlanish qonuni qanday ifodalanadi?
a) $m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u$;
b) $\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u$;
v) $m\frac{dv}{dt} = -u$.

24. Bir pog‘onali raketaning tezligi qanday qonun asosida o‘zgaradi?
a) $v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$;
b) $v(t) = v_0 + u\,ln(m(t))$;
v) $v(t) = v_0 + ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$.

25. Bir pog‘onali raketalardan nega foydalanilmaydi?
a) raketalarning tezligi kichik bo‘lganligi sababli, ya’ni bu raketalar hattoki birinchi kosmik tezlikka ham erisha olmasligi sababli;
b) bunday raketalarning massalari nisbatan kichik bo‘lganligi sababli;
v) raketalarning konstruksiyasi sodda bo‘lganligi sababli.

26. Iyerarxiya prinsipidan foydalanib, matematik modellar qurilganda hosil bo‘lgan modellar qanday xususiyatlarga ega bo‘ladi?
a) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri;
b) har biri oldingi modellarni umumlashtiruvchi va ularni o‘zining xususiy holi sifatida o‘ziga biriktirib oluvchi nisbatan to‘la modellar zanjiri (iyerarxiyasi) hosil bo‘ladi;
v) keyingilari oldingilarini o‘z ichiga olgan, ya’ni oldingi modellar keyingi modellarning xususiy holi bo‘lgan nisbatan to‘liq bo‘lgan modellar zanjiri hosil bo‘ladi.

27. $m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$ ifoda nimani anglatadi?
a) uch pog‘onali raketaning boshlang‘ich massasini;
b) murakkab konstruksiyali raketaning boshlang‘ich massasini;
v) raketaning struktura massasini.

28. Ko‘p pog‘onali raketalarda λm_i – i-chi pog‘onaga mos keluvchi struktura massasi bo‘lsa, $(1-\lambda)m_i$ ifoda nimani anglatadi?
a) i-chi pog‘onaga mos keluvchi yoqilg‘i massasi;

b) *i*-chi pog'onaga mos keluvchi foydali yuk massasi;

29. Uch pog'onali raketalar uchun $m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$ ifoda nimani anglatadi?

a) raketa birinchi pog'onasining yoqilg'isi sarf bo'lgan, raketaning tezligi $v_1 = u\ln\left(\dfrac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$ ga teng bo'lgandagi massasi;

b) ikkinchi pog'onaning boshlang'ich massasi.

30. Uch pog'onali raketalar uchun $v_2 = v_1 + u\ln\left(\dfrac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)$ ifoda nimani anglatadi?

a) barcha javoblar to'g'ri;

b) ikkinchi pog'onadagi yoqilg'i yonib tugagandan keyingi raketaning tezligini;

v) raketaning uchinchi pog'onasi ishga tushgandagi boshlang'ich tezligini.

31. Uch pog'onali raketalar uchun boshlang'ich massani foydali yuk massasiga nisbati nimaga teng?

a) $\dfrac{m_0}{m_p} = \dfrac{(1-\lambda)^3}{(P-\lambda)^3}$;

b) $\dfrac{m_0}{m_p} = \dfrac{(1-\lambda)}{(P-\lambda)}$;

v) $\dfrac{m_0}{m_p} = \dfrac{(1-\lambda)^2}{(P-\lambda)^2}$.

32. Nega kosmanavtikada ikki va to'rt pog'onali raketalardan foydalanilmasdan uch pog'onali raketadan foydalaniladi?

a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri;

b) ikki pog'onali raketa foydali massani orbitaga chiqarishga layoqatlidir, ammo bir tonnalik foydali yuk uchun raketa massasi 149 tonna bo'lishi talab etiladi;

v) uch pog'onadan foydalanish raketa massasini deyarli ikki martaga kamaytiradi, ammo uning strukturasini ikki pog'onali raketaga nisbatan murakablashtiradi;

g) to'rt pog'onali raketa esa uch pog'onaliga nisbatan sezilarli yutuqni bermasa-da, raketaning strukturasini uch pog'onali raketaga nisbatan ancha murakablashtiradi.

33. Iyerarxiya prinsipidan foydalanib matematik modellar qurish qanday tamoyillarga asoslanadi?

a) keltirilganlarning barchasi to'g'ri;

b) «soddadan-murakkablikka qarab» tamoyiliga;

v) «murakkablikdan soddalikka qarab» tamoyiliga.

34. Maltus modeli quyidagilardan qaysi biri bilan ifodalanadi?

a) $\frac{dN}{dt}=(\alpha-\beta)N$;

b) $\frac{dN}{dt}=(\alpha-\beta N)N$;

v) $\frac{dN}{dt}=(\alpha-\beta)N^2$.

35. Quyidagi ifodalardan qaysi biri Maltus modelining yechimini ifodalaydi?

a) $N=N_0e^{(\alpha-\beta)t}$;

b) $N=N_0e^{(\alpha+\beta)t}$

v) $N=N_0\sqrt{e^{(\alpha-\beta)t}}$.

36. Maltus modeli asosida populyasiya sonining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi qanday bo‘ladi?

a) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri;

b) agar o‘limlar soni tug‘ilishlarga qaraganda ko‘proq bo‘lsa, u holda Maltus modeli populyasiya sonining eksponensial ravishda kamayishiga ishora qiladi;

v) tug‘ilishlar va o‘limlar soni o‘zaro teng bo‘lsa, Maltus modelining ko‘rsatishicha, populyasiya soni butun vaqt oralig‘ida o‘zgarmasdan qoladi;

g) agar tug‘ilishlar soni o‘limlar soniga nisbatan ko‘p bo‘lsa, u holda Maltus modeli populyasiya sonining eksponensial ravishda o‘sishiga ishora qiladi.

37. Maltus modelini qaysi hollarda qo‘llash mumkin?

a) hayotni ta’minlovchi resurslarga cheklanishlar bo‘lmagan hollarda;

b) populyasiya soni muhit sig‘imiga yaqinlashganda;

v) populyasiya soni muhit sig‘imiga yaqinlashmaganda.

38.Populyasiyaning chiziqsiz modeli $\frac{dN}{dt}=\alpha\cdot\left(1-\frac{N}{N_P}\right)\cdot N,\ \alpha>0$ qanday farazlarga asoslangan?

a) atrof muhit tomonidan ta’minlanadigan «muvozanatli» populyasiya soni N_P mavjud va populyasiya sonining o‘zgarish tezligi muvozanat qiymatidan og‘ish miqdoriga ko‘paytirilgan populyasiya soniga proporsional;

b) populyasiya sonining o‘zgarish tezligi muvozanat qiymatidan og‘ish miqdoriga ko‘paytirilgan populyasiya soniga proporsional;

v) populyasiya sonining o‘zgarish tezligi muvozanat qiymatidan og‘ish miqdoriga ko‘paytirilgan populyasiya soniga proporsional.

39. Populyasiyaning chiziqsiz modeli $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_P}\right) \cdot N,\ \alpha > 0$ ning yechimi qanday tenglik bilan ifodalanadi?

a) $N(t) = \frac{N_P N(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}}{N_P - N(0)\left(1 - e^{\alpha \cdot t}\right)}$;

b) $N(t) = \frac{N(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}}{1 - N(0)\left(1 - e^{\alpha \cdot t}\right)}$;

v) $N(t) = \frac{N_P N(0)}{N_P - N(0)\left(1 - e^{\alpha \cdot t}\right)}$.

40. Populyasiyaning chiziqsiz modeli $\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_P}\right) \cdot N,\ \alpha > 0$ ga asosan populyasiya soni vaqt o‘tishi bilan qanday o‘zgaradi?
a) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri;
b) boshlang‘ich populyasiya soni $N(0)$ ning ixtiyoriy qiymatida populyasiya soni muvozanat qiymati N_P ga intiladi;
v) Maltus modelidan farqli o‘laroq ushbu holda muvozanat turg‘un bo‘ladi; g) Maltus modeliga nisbatan ushbu model populyasiya dinamikasini realroq ifodalaydi.

41. $\begin{cases} \frac{dN}{dt} = (\alpha - cM) \cdot N \\ \frac{dM}{dt} = (-\beta + dN) \cdot M \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?
a) yirtqich-o‘lja sistemasining o‘zaro munosabati modelini;
b) ikki davlat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modelini;
v) ikki armiya o‘rtasidagi jangovar harakat modelini.

42. Lotka-Volter tenglamalar sistemasining yechimi asosida qanday xulosaga kelish mumkin?
a) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri;
b) agar $N(0) = N_0,\ M(0) = M_0$ (N_0, M_0- populyasiyaning muvozanatini ta’minlovchi qiymatlar) bo‘lsa, hamma vaqt mobaynida populyasiyalar soni o‘zgarmasdan qoladi;
v) yirtqich va xuddi shuningdek, o‘ljaning populyasiya sonlari muvozanat holatidan ozgina o‘zgarishi, bu populyasiya sonlarining vaqt o‘tishi bilan muvozanat holatiga qaytmasligiga olib keladi;
g) agar boshlang‘ich muvozanat holatidan og‘ish katta bo‘lsa, sistema vaqt o‘tishi bilan muvozanat holatiga qaytmaydi.

43. Yirtqich-o‘lja sistemasining o‘zaro munosabati modeli asosida qanday xulosaga kelish mumkin?
a) keltirilganlarning barchasi to‘g‘ri;
b) yirtqich va o‘ljalar populyasiya sonlari muvozanat holati atrofida davriy tebranib turadi;
v) tebranish amplitudasi va uning davri populyasiyalarning boshlang‘ich sonlari $N(0)$, $M(0)$ orqali aniqlanib, $N(t)$ ning maksimal qiymatiga $M(t)$ ning minimal qiymati mos keladi va aksincha.

44. Ikki davlat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modeli quyidagi farazlarning qaysi biriga asoslangan?
a) har bir davlatdagi qurollar miqdorining o‘sishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga, o‘zidagi mavjud qurollarning eskirishi darajasiga va raqiblar o‘rtasidagi o‘zaro ishonchsizlik darajasiga proporsional bo‘ladi deb faraz qilinadi;
b) har bir davlatdagi qurollar miqdorining o‘sishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga va raqiblar o‘rtasidagi o‘zaro ishonchsizlik darajasiga proporsional bo‘ladi deb faraz qilinadi;
v) har bir davlatdagi qurollar miqdorining o‘sishi va kamayishi raqib davlatdagi qurollar miqdoriga, o‘zidagi mavjud qurollarning eskirishi darajasiga proporsional bo‘ladi deb faraz qilinadi.

45. $\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t) \end{cases}$ differensial tenglamalar sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?
a) ikki davlat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modelini;
b) yirtqich-o‘lja sistemasining o‘zaro munosabati modelini;
v) ikki armiya o‘rtasidagi jangovar harakat modelini.

46. Ikki armiya o‘rtasidagi jangovar harakat modeli quyidagi farazlarning qaysi biriga asoslangan?
a) har bir armiyadagi qo‘shinlar sonining kamayish tezligi bevosita jangovar harakatlarga bog‘liq bo‘lmagan sabablar bilan, raqib armiyaning jangovar harakati va yordamchi kuchlarning qo‘shilish tezligi bilan bog‘liq;
b) har bir armiyadagi qo‘shinlar sonining kamayish tezligi raqib armiyaning jangovar harakati va yordamchi kuchlarning qo‘shilish tezligi bilan bog‘liq;
v) har bir armiyadagi qo‘shinlar sonining kamayish tezligi bevosita jangovar harakatlarga bog‘liq bo‘lmagan sabablar bilan, raqib armiyaning jangovar harakati bilan bog‘liq.

47. $$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = -\alpha_1(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = -\alpha_2(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_2(t) \end{cases}$$ differensial tenglamalar sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?

a) ikki armiya o‘rtasidagi jangovar harakat modelini;
b) ikki davlat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modelini;
v) yirtqich-o‘lja sistemasining o‘zaro munosabati modelini.

48. $$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = -\alpha_1(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = -\alpha_2(t)M_2 - \beta_1(t)M_1M_2 + \gamma_2(t) \end{cases}$$ differensial tenglamalar sistemasi qanday jarayonni ifodalaydi?

a) muntazam armiya va partizan qismlari o‘rtasidagi jangovar harakat modelini;
b) ikki davlat o‘rtasidagi qurollanish poygasi modelini;
v) yirtqich-o‘lja sistemasining o‘zaro munosabati modelini.

49. Aholisi soni $\boldsymbol{N}$ ga teng bo‘lgan hududda epidemiyaga chalingan 1 ta kasal kelib qo‘shilishi natijasida hududda kasallar sonining vaqt bo‘yicha o‘zgarishini qanday munosabat bilan aniqlanadi?

a) $x(t) = \dfrac{N+1}{Ne^{-\alpha(N+1)t}+1}$;

b) $x(t) = \dfrac{N+1}{Ne^{\alpha(N+1)t}+1}$

v) $x(t) = \dfrac{1}{Ne^{\alpha(N+1)t}+1}$.

V. KEYS BANKI

Ta’lim texnologiyasi

Matematik modellashtirish asoslari fanini o‘qitishda zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar

Matematik modellashtirish asoslari fanini o‘qitish ma’ruza, amaliy mashg‘ulotlar hamda mustaqil topshiriqlardan iborat bo‘lib, ular birgalikda fanning butunliligini ta’minlaydi. Ma’ruzalar orqali olingan bilimni mustahkamlash uchun amaliy mashg‘ulotlar muhim ahamiyatga ega. Mustaqil mashg‘ulotlar bu fan doirasida mustaqil bilim olish, o‘zlashtirish hisoblanadi.

Ushbu fanni o‘qitish davomida *aqliy xujum* - g‘oyalarni generasiya (ishlab chiqish) metodidan keng foydalaniladi. «Aqliy hujum» metodi biror muammoni yechishda talabalar tomonidan bildirilgan erkin fikr va mulohazalarni to‘plab, ular orqali ma’lum bir yechimga kelinadigan eng samarali metoddir. Aqliy xujum metodining yozma va og‘zaki shakllari mavjud bo‘lib, bu fanda og‘zaki shaklidan foydalaniladi. Fanni o‘zlashtirishda talabalar zamonaviy axborot texnologiyalari yutuqlaridan, shuningdek oxirgi yillarda yaratilgan turli matematik dasturiy ta’minotlardan foydalanadilar.

Keys topshiriq 1.

Jismga yerda burchak ostida boshlang‘ich tezlik berildi. Jismning xarakat trayektoriyasini va uning otilish va yerga tushish nuqtalari orasidagi masofani aniqlang.

Keys topshiriq 2.

Aylanadigan o‘qning tezligini aniqlash uchun yukka tiqilib qolgan o‘q, ya’ni "o‘q-yuk" tizimini matematik modelini tuzing

Keys topshiriq 3.

4 kg massali miltiqdan 0,05 kg massali o‘q 280 m/s tezlik bilan uchib chiqmokda. Miltiqning «tepki» tezligi topilsin.

Keys topshiriq 4.

10 g. massali o‘q uchib borib, massasi 390 g. bo‘lgan brusokka urilib tiqilib qoldi. O‘q tezligi 200m/s bo‘lsa, brusokning tezligini toping.

Keys topshiriq 5.

Agar bug‘ular soni dastlabki besh yil davomida barqaror ya’ni taxminan 2000 ga teng bo‘lsa, bo‘rilarning ko‘payish populyasiyasining boshlang‘ich soni qanday bo‘lishi kerakligini hisoblang. Olingan barcha ma’lumotlarni grafik tarzda taqdim eting.

Keys topshiriq 6.

Yagona populyasiyaning cheksiz o‘sishini tavsiflovchi tenglamaning analitik yechimini toping (yeksponensial model):

$$\frac{dx}{dt} = rx,$$

Bu erda *r* - aholi zichligining tabiiy o‘sish koyeffisiyenti, *x* - aholi zichligi. Qabul qilishning dastlabki sharti sifatida
x0 = 500 va *r = –0,5, 0,25, 0, 25, 0,5* uchun *x=x(t)* funksiyalarni chizing.

Keys topshiriq 7.

A va ωparametrlarining turli qiymatlari uchun α(*t*) =*A*cos(ωt) o‘zgaruvchan koyeffisiyentli Lotka-Volterra modelidagi yechimlarni toping.

Keys topshiriq 8.

Quyidagi

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\alpha_1(t) - \beta_{12}(t)M(t) - \beta_{11}(t)N(t))N(t)$$
$$\frac{dM(t)}{dt} = (\alpha_2(t) - \beta_{21}(t)N(t) - \beta_{22}(t)M(t))M(t)$$

matematik model yordamida tasvirlangan jarayonning yechimini berilgan boshlang‘ich shartlarda oling va modelni tahlil qiling.

Keys topshiriq 9.

2. Ferxyulsta – Pirl tenglamasining sonli yechimini oling (logistik model)

$$\frac{dx}{dt} = xr_m\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$

dastlabki holat bilan

$$x = x_0 \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

va analitik yechim bilan solishtiring

$$x = \frac{k}{1 + e^{-r_m t}\left(k - x_0\right)/x_0}$$

dan *k*, x_0 va r_m parametrlarining qyidagi qiymatlari uchun *x=x(t)* funksiyalar grafiklarini tuzing.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
x_0	50	150	250	350	450	550	650	750	850	950
r_m	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20

VI. MUSTAQIL TA'LIM MAVZULARI

Tinglovchi mustaqil ishni muayyan modulni xususiyatlarini hisobga olgan holda quyidagi shakllardan foydalanib tayyorlashi tavsiya etiladi:

- o'quv, ilmiy adabiyotlardan va maqolalardan foydalanish asosida modul mavzularini o'rganish;
- tarqatma materiallar bo'yicha ma'ruzalar qismini o'zlashtirish;
- avtomatlashtirilgan o'rgatuvchi va nazorat qiluvchi dasturlar bilan ishlash;
- maxsus adabiyotlar bo'yicha modul bo'limlari yoki mavzulari ustida ishlash;
- tinglovchining kasbiy faoliyati bilan bog'liq bo'lgan modul bo'limlari va mavzularni chuqur o'rganish.

Mavzular:

1. Matematik modelni algoritmlash. Dasturlashning asosiy konstruksiyalari: chiziqli, tarmoqlanish, sikllar.

2. Matematik modellashtirish va matematik model tushunchasi.

3. Matematik modellashtirishning asosiy bosqichlari.

4. Matematik modellashtirishning maqsadlari.

5. Matematik modellashtirish turlari: parametrik, simulyasiY.

6. Parametrik modellashtirish tushunchasi. Statik va dinamik matematik modellar.

7. Simulyasiya modellashtirish tushunchasi. Model, obyekt, dastur.

Stasionar va stasionar bo'lmagan modellashtirish.

8. Matematik modelning tuzilishi. Matematik modelning funksionalligi.

9. Matematik modelning xossalari: to'liqlik, aniqlik, adekvatlik, samaradorlik, mustahkamlik, unumdorlik, ko'rinish va soddalik.

10. Matematik modellarni olish usuliga ko'ra tasnifi: empirik, nazariy, yarim empirik.

11. Matematik modellarning turlari bo'yicha tasnifi: sonli va analitik.

VII. GLOSSARIY

(Izohli lug‘at)

Model - lotincha *modulus* so‘zidan olingan bo‘lib, o‘lchov, namuna ma’nolarini anglatadi.

Model – bu real obyektni almashtirishi mumkin bo‘lgan, tadqiqot va tajriba o‘tkazish uchun qulay va arzon bo‘lgan boshqa bir real yoki abstrakt obyektdir. Model real obyektning soddalashtirilgan ko‘rinishi bo‘lib, uning hamma xossalarini emas, balki asosiy xossalarinigina o‘zida mujassam etadi.

Matematik model – real obyektni tasavurimizdagi abstrakt ko‘rinishi bo‘lib, u matematik belgilar va ba’zi bir qonun–qoidalar bilan ifodalangan bo‘ladi. Masalan, Nyuton qonunlari, massaning saqlanish qonuni.

Fizik model - Tajriba o‘tkazishga mo‘ljallangan tajriba uchastkalari katta ekin maydonlarining, laboratoriya mashg‘ulotlarini o‘tkazishga mo‘ljallangan asbob uskunalar fizik modellarga misol bo‘ladi. Masalan, kimyoviy yoki biologik laboratoriyalarda foydalaniladigan asbob uskunalar hamda tokamak qurilmasi (yer sharoitida termoyadro reaksiyasini amalga oshiradigan qurilma).

Grafikli model - Sxemalar, chizmalar, rasmlar, ilmiy va tarixiy asarlar misol bo‘la oladi. Masalan, globus yer sharining, insonning surati uning o‘zining, M.Z.Boburning «Boburnoma» asari asarda keltirilgan davrning grafikli modelidir.

Faktorlar - modellashtirishda tashqi muhitning tekshirilayotgan obyekt parametrlariga ta’sir qiluvchi ko‘rsatkichlari.

Matematik modellashtirish - real obyekt yoki jarayonlarni matematik usullar vositasida nazariy tadqiq qilish usuli.

Modellashtirishning mohiyati - obyektni boshqa soddaroq obyekt (model) bilan almashtirib, modelni xususiyatini tadqiq qilish orqali original obyektni o‘rganishdan iborat.

Real obyekt va uning matematik modelining muvofiqligi - obyekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat va miqdor jihatdan o‘xshashligi.

Avj oluvchi rejimlar - vaqtning chekli qiymatida qandaydir miqdor cheksizlikka aylanuvchi jarayonlar.

Hisoblash eksperimenti – kompyuter modeli yaratilgan xodisa, jarayon va mashinalarni tadqiq qilish usuli.

Dinamik model – jarayonlarning vaqt bo‘yicha kechishini tasvirlovchi matematik model.

Imitasion model - matematicheskaya model, vosproizvodyashaya povedeniye issleduemogo obyekta i primenyayemaya dlya postanovki kompyuternix eksperimentov, viyavlyayushix osobennosti funksionirovaniya obyekta pri razlichnix vneshnix usloviyax i upravlyayushix vozdeystviyax.

abiotik o‘zgarishlar - tabiiy o‘zgarishlar – zilzilalar, vulqonlar otilishi, suv toshqinlari va shu kabilar.

biotik o‘zgarishlar - populyasiyalar biomassasining yoki sonining o‘zgarishi, populyasiyalarning qirilib ketishi.

antropogen o‘zgarishlar - inson faoliyati natijasida atrof muhitda sodir bo‘ladigan o‘zgarishlar.

Modelning universalligi - konkret obyektni modeli boshqa o‘xshash obyektlarga qo‘llanishi uchun yetarli darajada universal bo‘lishi kerak. Bu degani real obyektni matematik modeli boshqa o‘xshash obyektlarga juda kam o‘zgartirishlar orkali qo‘llash uchun yetarli darajada umumiy bo‘lishi kerak.

Modelning kompaktligi - model shunday qurilishi kerakki, uni deyarli o‘zgartirishsiz o‘zidan yuqori darajali modelga model osti sifatida kiritish mumkin bo‘lsin. Masalan, daraxtni matematik modeli o‘rmon ekosistemasi modelining bir bloki sifatida qo‘llanilishi. Fotosintez jarayonining matematik modeli daraxt matematik modelini bir bloki sifatida ishlatilishi mumkin bo‘lsin.

Modelning soddaligi - matematik modelni qurishda ikkinchi, uchinchi darajali faktorlar hisobga olinmasligi lozim. Bu faktorlarni hisobga olish MMni murakkablashtiradi. Misol: epidemiyani tarqalishi jarayoni matematik modelida shamol tezligini hisobga olish modelni ancha murakkablashtiradi. Ammo atrof – muhitni ekologiyasini o‘rganishda shamol tezligini va yo‘nalishini hisobga olmaslik mumkin emas. Suv quvuridagi suvni harakatini o‘rganayotganda oyning tortishish kuchini hisobga olmasa ham bo‘ladi. Ammo, dengiz va okeanlardagi suv toshqinlarini o‘rganayotganda oyning tortishish kuchini albatta hisobga olish lozim. Bu toshqinlar oyning tortishi natijasida hosil bo‘ladi.

Modelning sezgirligi - darajasi past bo‘lishi lozim. MMni qurishda hisobga olinishi zarur bo‘lgan asosiy faktorlarga nisbatan modelni sezgirlik darajasi past bo‘lishi lozim. YA’ni, real obyektni o‘rganayotgan paytda o‘lgashlar ko‘p hollarda xatolik bilan bajariladi. Ayrim hollarda modelda ishtirok etayotgan asosiy faktorni aniq o‘lchashni imkoni bo‘lmaydi. Masalan, ob – havoni bashorat qilish haligacha taxminiy, paxta maydonidagi hashoratlar sonini aniq o‘lchash mumkin emas.

Modelning moslashuvchanligi - model blokli prinsipda qurilishi lozim. Bunda o‘zgaruvchilar iloji boricha alohida blokda, avtonom holda hisoblanishi maqsadga muvofiq. Bu esa matematik modelni tez o‘zgartirish, modifikasiya qilish imkonini yaratadi. Umuman olganda bu talab unga katta bo‘lmagan o‘zgartirish orqali boshqa real obyektga moslashishni, ya’ni matematik modelni universalligini xarakterlaydi.

determinirlangan model - har bir mumkin bo‘lgan kirish parametrlari to‘plami uchun chiqish parametrlari bir qiymatli aniqlangan model.

determinirlanmagan, stoxastik (ehtimolli) model – har bir mumkin bo‘lgan kirish parametrlari to‘plami uchun chiqish parametrlari bir qiymatli aniqlanmagan model.

VIII. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. Meyoriy- huquqiy xujjatlar.

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining «Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida» 2015 yil 12 iyundagi PF-4732-son Farmoni.
2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2010 yil 2 noyabrdagi “Oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagogik kadrlar tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-1426-sonli Qarori.
3. Kadrlar tayyorlash milliy dasturi. O‘zbekiston Respublikasi Oliy Majlisining Axborotnomasi, 1997 yil. 11-12-son, 295-modda.
4. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2012 yil 24 iyuldagi “Oliy malakali ilmiy va ilmiy-pedagog kadrlar tayyorlash va attestasiyadan o‘tkazish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi PF–4456-son Farmoni.
5. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2012 yil 28 dekabrdagi “Oliy o‘quv yurtidan keyingi ta’lim xamda oliy malakali ilmiy va ilmiy pedagogik kadrlarni attestasiyadan o‘tkazish tizimini takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 365- sonli Qarori.

II. Maxsus adabiyotlar.

1. Samarskiy A.A., Mixaylov M. Matematicheskoye modelirovaniye: ideya, metodi primeri. M.: Fiz.mat.lit., 2005.-320s.
2. Tixonov A. N., Kostomarov D. P. Vvodniye leksii po prikladnoy matematike. M. Nauka. 1984, 190 s.
3. Matematicheskoye modelirovaniye / Pod red. Dj. Endryusa, R. Mak-Louna; per. s angl. – M.: Mir, 1979. – 278s.
4. Smith G.D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: finite difference methods 3rd ed. — Oxford University Press, 1986. 350 p.
5. Muzafarov X.A., Baklushin M.B., Abduraimov M.G., Matematicheskoye modelirovaniye. Tashkent, Universitet. 2002.
6. Israilov M.I. Hisoblash metodlari. I, II kismlar. —T., 2003, 2008.
7. Samarskiy A. A. Teoriya raznostnix sxem. –M., Nauka. 1983
8. Gorstko A.B. Poznakomtes s matematicheskim modelirovaniyem. - M., Znaniye. 1999.
9. Tarasevich Y.Y. Matematicheskoye i kompyuternoye modelirovaniye. -M., URSS, 2003
10. Vvedeniye v matematicheskoye modelirovaniye. Pod red. V.P.Trusova. -M., Logos, 2007. - 440 s.

11. Arnold V.I. Jyostkiye i myagkiye matematicheskiye modeli. -M., MSNMO. 2000.

Internet manbaalar

1. www.infocom.uz
2. www.press-uz.info
3. www.ziyonet.uz
4. www.edu.uz
5. http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/
6. http://online.stat.ncsu.edu/online-programs/online-graduate-statistics-courses/
7. http://users.mat.unimi.it/users/pavarino/fisica/
8. http://www.lifelong-learners.com/pde/com/
9. http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-335j-introduction-to-numerical-methods-fall-2004/
10. http://sites.stat.psu.edu/online/development/
11. http://study.com/online_statistics_course.html