O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISH BOSH ILMIY - METODIK MARKAZI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI

«CHEKLI AYIRMALI SXEMALAR»

MODULINING

O‘QUV–USLUBIY MAJMUASI

Toshkent – 2022

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy va o‘rta maxsus ta'lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv dasturi va o‘quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan

Tuzuvchi: M.Xudoyberganov

Taqrizchilar:

Matematika instituti “Hisoblash matematikasi” ilmiy laboratoriyasi mudiri, f.-m.f.d. A.R.Hayotov

Matematika instituti “Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari” ilmiy laboratoriyasi yetakchi ilmiy xodimi, f.-m.f.d. A.Xasanov

O‘quv -uslubiy majmua Bosh ilmiy-metodik markaz Ilmiy metodik Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan

(*2020 yil “30” dekabrdagi 5/4-sonli bayonnoma*)

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

KIRISH

Dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019 yil 8 oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmonlari hamda O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni kredit modul tizimi va o‘quv jarayonini tashkil etish, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, pedagogning kasbiy professionalligini oshirish, ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish, maxsus maqsadlarga yo‘naltirilgan ingliz tili, mutaxassislik fanlar negizida ilmiy va amaliy tadqiqotlar, o‘quv jarayonini tashkil etishning zamonaviy uslublari bo‘yicha so‘nggi yutuqlar, pedagogning kreativ kompetentligini rivojlantirish, ta’lim jarayonlarini raqamli texnologiyalar asosida individuallashtirish, masofaviy ta’lim xizmatlarini rivojlantirish, vebinar, onlayn, «blended learning», «flipped classroom» texnologiyalarini amaliyotga keng qo‘llash bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishining o‘ziga xos xususiyatlari hamda dolzarb masalalaridan kelib chiqqan holda dasturda tinglovchilarning mutaxassislik fanlar doirasidagi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar takomillashtirilishi mumkin.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulining maqsadi: Chekli ayirmali sxemalar o‘quv modulining maqsadi pedagog kadrlarni innovatsion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o‘zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat.

Modulning vazifalari:

- “Amaliy matematika” yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;
- pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

- mutaxassislik fanlarini o‘qitish jarayoniga zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali tatbiq etilishini ta’minlash;

- mutaxassislik fanlar sohasidagi o‘qitishning innovatsion texnologiyalari va ilg‘or xorijiy tajribalarini o‘zlashtirish;

- tabiiy va aniq hodisalarning matematik modelini ishlab chiqish;

- matematik modelni sonli yechish usullarini ishlab chiqish;

- “Amaliy matematika” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta’minlash.

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

Modulni o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida**:**

Tinglovchi:

– sonli differensiallashni, approksimatsiya va uning tartibi, chegaraviy shartlarni approksimatsiyalashni, matematik paketlarning joriy holati va istiqboldagi vazifalarini, amaliy dasturlar paketida dasturlash elementlarini, ilmiy tadqiqot yo‘nalishida foydalaniladigan zamonaviy amaliy dasturlar paketlarining imkoniyatlarini, tabiiy va aniq fanlarda foydalaniladigan zamonaviy amaliy dasturlar majmualarini ***bilishi*** kerak.

– tabiiy va aniq fanlarini o‘qitish bo‘yicha yangi texnologiyalarni amaliyotda qo‘llash, axborot texnologiyalarining zamonaviy vositalaridan foydalanib ilmiy-tadqiqotlarni o‘tkazish, eksperimental tadqiqotlar natijalariga ishlov berish, ularni tahlil qilish va aks ettirish, xulosalar chiqarish, ilmiy maqolalar tayyorlash, tavsiyalarini ishlab chiqish, innovatsion faoliyatni tashkil etish, ilg‘or tajribalardan foydalanish, o‘z ustida ishlab, fanning yangi tadqiqotlarini o‘qitish tizimini qo‘llash, chekli ayirmali sxemalar bo‘yicha ma’ruza, amaliy mashg‘ulot va nazorat ishlarini tashkil etish, pedagogik jarayonda muloqot uslublarini to‘g‘ri qo‘llay olish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

– sonli yechish usullari, chekli ayirmali sxemalarni qo‘llash, matematik paketlar fanlarining zamonaviy yo‘nalishlarini ishlab chiqish va ommalashtirish, axborot-kommunikatsion texnologiyalari va ularni qo‘llashning ilmiy-nazariy va amaliy ahamiyatini bilish, tabiiy va aniq fanlarni turli sohalarga tatbiq qilish, tabiiy va aniq fanlarni dasturlar paketi yordamida yechishning zamonaviy usullarini qo‘llash ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

– nochiziqli masalalarni yechishda zamonaviy texnologiyalar va usullardan foydalana olish, tabiiy va aniq fanlarning dasturlar paketini o‘quv jarayoniga tatbiq etish, tabiiy va aniq fanlarni dasturlar paketi yordamida yechishning zamonaviy masalalarini tahlil qila olish, ilg‘or axborot texnologiyalarida ishlash, videodarslarni tayyorlash; chekli ayirmali sxemalar modulining dolzarb masalalariga oid zamonaviy manbalardan foydalana olish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikatsiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

- ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsion va elektron-didaktik texnologiyalardan;

-o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Chekli ayirmali sxemalar” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish”, “Matematik modellashtirish asoslari”, “Sonli usullar”, “Matematik tizimlar” o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning ta’lim jarayonida bulutli hisoblash, katta ma’lumotlar va virtual reallik tizimlaridan foydalanish bo‘yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida amaliyotda uchraydigan masalalarni taqribiy yechish, tabiiy fanlar hamda texnika fanlarida uchraydigan ko‘pgina

“Chekli ayirmali sxemalar” moduli bo‘yicha soatlar taqsimoti

	Modul mavzulari	**Auditoriya o‘quv yuklamasi**		
		Jami	**jumladan**	
			Nazariy	**Amaliy**
1.	Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligi.	2	2	
2.	Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullari. Differensial haydash usuli. To‘r usuli.	2	2	
3.	Xususiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalani yechishning sonli usullari.	2	2	
4.	Giperbolik va parabolik turdagi tenglamalarni to‘r usuli bilan yechish.	2	2	
5.	Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligiga misollar.	2		2
6.	Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullar yordamida yechish. Haydash usuli, differensial haydash usuli.	2		2
7.	Xususiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalani yechishda sonli usullardan foydalanish. Elliptik turdagi differensial tenglamalarni ayirmali tenglamalar bilan approksimatsiya qilish.	2		2
8.	Chegaraviy shartlarni approksimatsiya qilish. To‘r tenglamalar sistemasini yechish. To‘r tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullar.	2		2
9.	Giperbolik va parabolik turdagi tenglamalarni to‘r usuli bilan yechish. Oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar.	2		2
10.	Absolyut va shartli turg‘un ayirmali sxemalar.	2		2
	Jami:	**20**	**8**	**12**

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligi.

1.1. Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligi. Eyler usuli.

1.2. Eyler-Koshi usuli.

1.3. Runge-Kutta usuli.

2-mavzu. Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullari. Differensial haydash usuli. To‘r usuli.

2.1. Oddiy differensiallarni approksimatsiya qilish.

2.2. Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar uchun chekli ayirmali sxemalar yaratish.

2.3. Haydash usuli, turg‘unligi va uning variantlari. Differensial haydash usuli. To‘r usuli.

3-mavzu. Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalani yechishning sonli usullari.

3.1. Elliptik turdagi differensial tenglamalarni ayirmali tenglamalar bilan approksimatsiya qilish. Approksimatsiya va yaqinlashish masalasi va ularning bog‘liqligi.

3.2. Chegaraviy shartlarni approksimatsiya etish. To‘r tenglamalar sistemasini yechish.

3.3. Maksimum prinsipi. To‘r tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullar.

4-mavzu. Giperbolik va parabolik turdagi tenglamalarni to‘r usuli bilan yechish.

4.1. Oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar.

4.2. Oshkormas sxemalarning turg‘unligi.

4.3. Absolyut va shartli turg‘un ayirmali sxemalar. Parametrli va uch qatlamli sxemalar.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg‘ulot. Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligiga misollar (2 soat).

2-amaliy mashg‘ulot. Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullar yordamida yechish. Haydash usuli, differensial haydash usuli (2 soat).

3-amaliy mashg‘ulot. Xususiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalani yechishda sonli usullardan foydalanish. Elliptik turdagi differensial tenglamalarni ayirmali tenglamalar bilan approksimatsiya qilish (2 soat).

4-amaliy mashg‘ulot. Chegaraviy shartlarni approksimatsiya qilish. To‘r tenglamalar sistemasini yechish. To‘r tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullar (2 soat).

5-amaliy mashg‘ulot. Giperbolik va parabolik turdagi tenglamalarni to‘r usuli bilan yechish. Oshkor va oshkor emas ayirmali sxemalar (2 soat).

6-amaliy mashg‘ulot. Absolyut va shartli turg‘un ayirmali sxemalar (2 soat).

Amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg‘ulotlarda tinglovchilar o‘quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o‘quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog‘liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg‘ulotlar zamonaviy ta’lim uslublari va innovatsion texnologiyalarga asoslangan holda o‘tkaziladi. Bundan tashqari, mustaqil holda o‘quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

Mustaqil malaka oshirishni tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatma va tavsiyalar

Mustaqil malaka oshirish quyidagi shakllarni o‘z ichiga oladi: ochiq o‘quv mashg‘ulotlari va mahorat darslarini tashkil etish; iqtidorli va iste’dodli talabalar bilan ishlash; ilmiy konferensiyalarda ma’ruza bilan qatnashish; ilmiy jurnallarda maqolalar chop etish; ko‘rgazma va tanlovlarda ishtirok etish; ilmiy loyihalarda ishtirok etish; xalqaro (impakt-faktorli) nashrlarda maqolalar e’lon qilish; ixtiro (patent), ratsionalizatorlik takliflari, innovatsion ishlanmalarga mualliflik qilish; monografiya, mualliflik ijodiy ishlar katalogini tayyorlash va nashrdan chiqarish; o‘quv adabiyotlari (darslik, o‘quv qo‘llanma, metodik qo‘llanma)ni tayyorlash va nashrdan chiqarish; falsafa doktori (PhD) darajasini olish uchun himoya qilingan dissertatsiyaga ilmiy rahbarlik qilish.

Pedagog kadrlarning mustaqil malaka oshirish natijalari elektron portfolio tizimida o‘z aksini topadi.

Mustaqil malaka oshirish davrida pedagoglar asosiy ish joyi bo‘yicha pedagogik amaliyotdan o‘tadilar. Pedagogik amaliyot davrida pedagog asosiy ish joyi bo‘yicha kafedraning yetakchi professor-o‘qituvchilarini 2 ta darsini kuzatadilar va tahlil qiladilar hamda kafedra a’zolari ishtirokida talabalar guruhi uchun 1 ta ochiq dars o‘tkazadilar. Ochiq dars tahlili hamda pedagog tomonidan kuzatilgan darslar xulosalari kafedraning yig‘ilishida muhokama etiladi va tegishli kafedraning bayonnomasi bilan rasmiylashtiriladi.

Shuningdek, mustaqil malaka oshirish jarayonida tinglovchi qo‘yidagi bilim va ko‘nikmalarini rivojlantirishi lozim:

- ta’lim, fan va ishlab chiqarishni integratsiyalashni tashkil etish, kadrlar buyurtmachilari va mehnat bozori ehtiyojlarini hisobga olgan holda o‘quv rejalari va fanlar dasturlarini shakllantirish;
- o‘quv mashg‘ulotlarining har xil turlari (ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar, laboratoriya mashg‘ulotlari, kurs ishlari loyihalari, malaka bo‘yicha amaliy mashg‘ulotlar)ni tashkillashtirish;
- talabalar o‘rtasida milliy mustaqillik g‘oyalari asosida ma’naviy-axloqiy va tarbiyaviy ishlarni olib borish, ta’lim jarayoni qatnashchilari bilan o‘zaro munosabatlarda etika normalari va nutq madaniyati, talabalarning bilim va ko‘nikmalarini nazorat qilishni tashkil etish va ilmiy-metodik ta’minlash, iqtidorli talabalarni qidirib topish, tanlash va ular bilan ishlash metodlarini bilish va amalda qo‘llash;
- oliy ta’limda menejment va marketing asoslarini bilish va amaliy faoliyatga tatbiq etish.

mustaqil ta’lim olish yo‘li bilan o‘z bilimlarini takomillashtirish.

O‘QITISH SHAKLLARI

- Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:
- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

Xulosalash» (Rezyume, Veyer) metodi

Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘p tarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Xulosalash” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

Методни амалга ошириш тартиби:

тренер-ўқитувчи иштирокчиларни 5-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратади;

тренинг мақсади, шартлари ва тартиби билан иштирокчиларни таништиргач, ҳар бир гуруҳга умумий муаммони таҳлил қилиниши зарур бўлган қисмлари туширилган тарқатма материалларни тарқатади;

ҳар бир гуруҳ ўзига берилган муаммони атрофлича таҳлил қилиб, ўз мулоҳазаларини тавсия этилаётган схема бўйича тарқатмага ёзма баён қилади;

навбатдаги босқичда барча гуруҳлар ўз тақдимотларини ўтказадилар. Шундан сўнг, тренер томонидан таҳлиллар умумлаштирилади, зарурий ахборотлар билан тўлдирилади ва мавзу якунланади.

Namuna:

Chekli ayirmali sxemalar					
Chekli elementlar usuli		Chekli ayirmali sxemalar		Chekli hajmlar usuli	
afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi	afzalligi	kamchiligi
Xulosa:					

“Insert” metodi

Metodning maqsadi: Mazkur metod o‘quvchilarda yangi axborotlar tizimini qabul qilish va bilimlarni o‘zlashtirilishini yengillashtirish maqsadida qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod o‘quvchilar uchun xotira mashqi vazifasini ham o‘taydi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ✓ o‘qituvchi mashg‘ulotga qadar mavzuning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan input-matnni tarqatma yoki taqdimot ko‘rinishida tayyorlaydi;
- ✓ yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn ta’lim oluvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko‘rinishida namoyish etiladi;
- ✓ ta’lim oluvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o‘z shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilar	**1-matn**	**2-matn**	**3-matn**
“V” – tanish ma’lumot.			
“?” – mazkur ma’lumotni tushunmadim, izoh kerak.			
“+” bu ma’lumot men uchun yangilik.			
“– ” bu fikr yoki mazkur ma’lumotga qarshiman?			

Belgilangan vaqt yakunlangach, ta’lim oluvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo‘lgan ma’lumotlar o‘qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to‘liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg‘ulot yakunlanadi.

III.NAZARIY MA’LUMOTLAR MAZMUNI

1-ma’ruza. Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligi.

Reja:

1. Masalaning qo‘yilishi.
2. Sonli metodlar misollari.
3. Runge – Kutt metodlari.
4. Runge – Kutt metodlarning yaqinlashishi.
5. Ko‘p qadamli ayirmali metodlar.
6. Ko‘p qadamli ayirmali metodlarning aproksimatsiya xatoligi.

Tayanch so‘zlar: to‘r chekli ayirma,qadam,yaqinlashish, xatolik, yaqinlashish, tartibi, approksimatsiya, aproksimatsiya tartibi, sxema, Runge – Kutt metodi, xatolik tenglamasi, xatolik bahosi, ko‘p qadamli ayirmali metod, turg‘unlik, Adams metodlari.

1. Masalaning qo‘yilishi.

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad u(0) = u^0 \tag{1}$$

sistema uchun yoki batafsilroq

$$\frac{du_i(t)}{dt} = f_i(t,u_1,u_2,...,u_n),\ t > 0\ , \quad i = 1,2,...,n \tag{2}$$

$$u_i(0) = u_i^{(0)}, \quad i = 1,2,...,n \tag{3}$$

Koshi masalasini qaraymiz. Agar

$$f_i(t,u_1,u_2,...,u_n), D = \{|t| \le a, |u_i - u_i^{(0)}| \le b, i = 1,2,...,n\}$$

yopiq sohada uzluksiz bo‘lsalar, unda

$$|f_i| \le M \quad , \quad i = 1,2,...,n$$

shart o‘rinli bo‘ladi.

Bundan tashqari agar f_i lar, D - soxada istalgan $(t,u_1^{'},u_2^{'},...,u_n^{'})$, $(t,u_1^{''},u_2^{''},...,u_n^{''})$ nuqtalar uchun u_i argumentlar bo‘yicha, istalgan u' va u'' uchun Lipshits shartini kanoatlantirsa, ya’ni

$$\left| f_i(t,u_1^{'},u_2^{'},...,u_n^{'}) - f_i(t,u_1^{''},u_2^{''},...,u_n^{''}) \right| \le L\{|u_1^{'} - u_1^{''}| + |u_2^{'} - u_2^{''}| + ... + |u_n^{'} - u_n^{''}|\}$$

bo‘lsa, unda (2) sistemaning $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t),..., u_n = u_n(t)$

$|t| \le t_0 = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ va (3) - shartalarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud bo‘lib birdan - birdir.

Koshi masalasini sonli yechish va uni tadqiq etishda Koshi masalasining yechimi mavjud va birdan-bir va keraklicha silliq deb faraz qilamiz.

2. Sonli metodlar misollari.

Koshi masalasini yechishning ikki guruh sonli metodlari mavjud:

Ko‘p qadamli ayirmali metodlar va Runge-Kutt metodlari. quyida sonli metodlarning bir qancha misollarini qarab chiqamiz va bayon qilamiz.

Soddalik uchun bitta

$$\frac{du}{dt} = f(t,u)\,, t > 0\,, u(0) = u_0 \tag{4}$$

tenglamani qaraymiz.

$\omega_\tau = \{t_i = i\tau, i = 0,1,2,...\}$ nuqtalar to‘plamini to‘r deb ataymiz.

u(t) (4) - tenglamaning aniq yechimi bo‘lsin. $y_i = y(t_i)$(4) - masalaning taqribiy yechimi bo‘lsin. y_i taqribiy yechim to‘r funksiya deb aytiladi, ya’ni faqat ω_τ to‘rda aniqlangan funksiyadir.

1- misol. Eyler metodi.

(4) - tenglama

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} - f(t_i, y_i) = 0, i = 0,1,..., y_0 = u_0 \tag{5}$$

ayirmali tenglama bilan almashtiriladi. Bu tenglamaning yechimi

$$y_{i+1} = y_i + \tau f(t_i, y_i) = 0, i = 0,1,..., y_0 = u_0$$

rekurrent formula yordamida oshkor tarzda topiladi.

Taqribiy metodlar qaralganda yaqinlashish ularning asosiy xossasi hisoblanadi. Taqribiy metodlar yaqinlashishini turlicha ta’riflash mumkin. Chekli ayirmalar metodida $\tau \to 0$ dagi yaqinlashish tushunchasi ko‘p tarqalgan. Bu quyidagilardan iborat. t - nuktani tanlab olib shunday ω_τ turlar ketma-ketligini qaraymizki

$$\tau \to 0, t_i = i\tau = t(i \to \infty)$$

bo‘lsin.

(5) metod t- nuqtada yaqinlashadi deb aytiladi, agar $\tau \to 0$ $|y_i - u(t_i)| \to 0$. (5)-metod $(0.T]$ kesmada yaqinlashadi deb aytiladi agar bu metod kesmaning har bir nuqtasida yaqinlashsa.

Metodning tartibi r-ga teng deb aytiladi, agar $p \phi 0$ uchun $\tau \to 0$ $|y_i - u(t_i)| = O(\tau^p)$ bo‘lsa. Metod xatoligi $z_i = y_i - u(t_i)$ ni qanoatlantiradigan tenglamani xosil qilamiz. $y_i = z_i + u_i$ ni (5) - ga qo‘yib

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\tau} = f(t_i, u_i + z_i) - \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} \tag{6}$$

tenglamani xosil qilamiz. (6) - ning o‘ng tomonini

$$\psi_i^{(1)} + \psi_i^{(2)}$$

yig‘indi ko‘rinishda yozish mumkin.

Bunda

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + f(t_i, u_i) \quad , \quad \psi_i^{(2)} = f(t_i, u_i + z_i) - f(t_i, u_i)$$

$\psi_i^{(1)}$ funksiya (5) - ayirmali tenglamaning (4) – dastlabki tenglama yechimidagi approksimatsiya xatoligi deb aytiladi. Approksimatsiya xatoligi (5) - ayirmali tenglama chap tomoniga (4) - dastlabki tenglama aniq yechimi u(t) qo‘yilganda hosil bo‘lgan farqdan iborat ekanligi ko‘rinib turibdi. y_i taqribiy yechim $u(t_i)$ - aniq yechimga teng bo‘lganda xatolik nolga teng bo‘ladi.

Agar $\tau \to 0$, $\psi_i^{(1)} \to 0$ ayirmali metod dastlabki differensial tenglamani approksimatsiyalaydi deb aytiladi. Agar $\psi_i^{(1)} = 0(\tau^\rho)$ bo‘lsa ayirmali metod dastlabki tenglamani r- tartib bilan approksimatsiyalaydi deb aytiladi. Keyinroq juda katta umumiy farazlarda aniqlik tartibining approksimatsiya tartibiga tengligi ko‘rsatiladi.

$$\psi_i^{(2)} = f(t_i, u_i + z_i) - f(t_i, u_i)$$

Agar dastlabki tenglamaning o‘ng tomoni $u(t)$ga bog‘liq bo‘lmasa bu funksiya aynan nolga teng bo‘ladi. Umumiy xolda $\psi_i^{(2)}, z_i$ xatolikka proporsionaldir, chunki

$$\psi_i^{(2)} = \frac{df}{du}(t_i, u_i + \theta \cdot z_i) \cdot z_i, |\theta| \le 1.$$

Eyler metodining approksimatsiya tartibini Teylor formulasini qullab topish qiyin emas.

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = u'(t_i) + O(\tau)$$

bo‘lganligi uchun (4) ga asosan

$$\psi_i^{(1)} = -u'(t_i) + f(t_i, u_i) + O(\tau) = O(\tau) \quad ,$$

ya’ni, Eyler metodi birinchi tartibli approksimatsiyaga ega. Buni hosil qilishda u"(t) ning chegaralanganligi faraz qilindi.

2- misol. Simmetrik sxema.

(4) - tenglama

$$\frac{u_{i+1} - y_i}{\tau} - \frac{1}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})] = 0, i = 0,1,...., y_0 = u_0 \qquad (7)$$

ayirmali sxema bilan almashtiriladi.

Bu metod Eyler metodiga qaraganda ancha murakkabdir, chunki y_{t+1} qiymat oldin aniqlangan y_i qiymat orqali

$$y_{i+1} - \frac{1}{2}\tau \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}) = F,$$

bunda

$$F_i = y_i + \frac{1}{2}\tau \cdot f(t_i, y_i)$$

tenglamani yechish bilan aniqlanadi. Shu sababli metod oshkormas deb aytiladi. (7) - metodning (5)- ga nisbatan afzalligi uning yuqori tartibli aniqligidadir.

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \frac{1}{2}[f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})]$$

funksiya uchun

$$\psi_i^{(1)} = -u_i' - \frac{\tau}{2}u_i'' + 0(\tau^2) + \frac{1}{2}(u_i' + u_{i+2}') = -u_i' - \frac{\tau}{2}u_i'' + \frac{1}{2}[u_i' + u_i' + \tau u_i'' + 0(\tau^2)]$$

¢rinlidir, ya'ni $\psi_i^{(1)} = 0\left(\tau^2\right)$

Shunday qilib, (7) - metod ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega. Keltirilgan misollar ayirmali metodlar deb ataluvchi metodlardan eng soddalaridirlar, ular yana ayirmali sxemalar ham deb aytiladilar.

Runge- Kutt metodining ayirmali metodlardan farqi shundaki, tenglamalarning o'ng tomoni f(t,u) qiymatlari nafaqat to'r nuqtalarida, balki oraliq nuqtalarda ham hisoblanib topiladi

3- misol. Ikkinchi tartibli Runge-Kutt metodlari.

Faraz qilamiz, dastlabki y_i yechim $t=t_i$ lahzada aniqlangan bo'lsin. $y_{i+1} = y(t_{i+1})$ qiymatni topish uchun eng avval

$$\frac{y_{i+\frac{1}{2}} - y_i}{0{,}5\tau} = f\left(t_i, u_i\right) \tag{8}$$

Eyler sxemasi bo'yicha $y_{i+\frac{1}{2}}$ oraliq qiymatni topib, undan so'ng

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = f(t_i + 0{,}5\tau, y_{i+\frac{1}{2}}) \tag{9}$$

sxemadan y_{i+1} ni oshkor tarzda topamiz.

Bog'lanishsizlikni tadqiq etish uchun $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + 0{,}5\tau f\left(t_i, u_i\right) -$ ni (9)-ga qo'yib

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} - f(t_i + 0{,}5\tau, y_i + 0{,}5\tau, f\left(t_i, u_i\right)) = 0 \tag{10}$$

ayirmali tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamaning bog'lanishsizligi

$$\psi_i^1 = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} - f(t_i + 0{,}5\tau, u_i + 0{,}5\tau, f\left(t_i, u_i\right) \tag{11}$$

ko'rinishda yoziladi.

Teylor formulasiga asosan

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} = \frac{u_i + u_i'\tau + \frac{1}{2}u_i''\tau^2 + O(\tau^3) - u_i}{\tau} = u_i' + \frac{1}{2}u_i''\tau + O(\tau^2)$$

va

$$f(t_i + 0{,}5\tau, u_i + 0{,}5\tau f\left(t_i, u_i\right)) = f\left(t_i, u_i\right)) + 0{,}5\tau\frac{\partial f}{\partial t}\left(t_i, u_i\right) + 0{,}5\tau f\left(t_i, u_i\right)\frac{\partial f\left(t_i, u_i\right)}{\partial u} + O\left(\tau^2\right) =$$

$$f(t_i, u_i) + 0{,}5\tau\left[\frac{\partial t\left(t_i, u_i\right)}{\partial t} + f\left(t_i, u_i\right)\frac{\partial t\left(t_i, u_i\right)}{\partial u}\right] + O\left(\tau^2\right) = f\left(t_i, u_i\right) + 0{,}5\tau u_i'' + O\left(\tau^2\right),$$

chunki, (4) ga asosan

$$u_i'' = \frac{\partial f\left(t_i, u_i\right)}{\partial t} + f\left(t_i, u_i\right)\frac{\partial f\left(t_i, u_i\right)}{\partial u}.$$

Bulardan (10) - ning ikkinchi tartibli approksimatsiya xatoligiga ega ekanligi kelib chiqadi, $\psi_i^{(1)} = O\left(\tau^2\right)$ va (7) - dan farqli oshkor metoddir. (10) - metodni qo'llash ikki bosqichdan iborat, shuning uchun bu metod predikator-korrektor deb aytiladi. (10) - metod boshqacha amalga oshirilishi mumkin.

Eng avval ketma-ket

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad , \quad k_2 = f(t_i + 0{,}5\tau, y_i + 0{,}5\tau k_1)$$

hisoblanadilar, undan keyin y_{i+1}, $(y_{i+1} - y_i)/\tau = k_2$ tenglamadan topiladi. (10)-metodning bunday qo‘llanilishi Runge-Kutt metodi deb aytiladi.

Runge - Kutt metodlari.

Metodlarning tavsifi.

$$\frac{du}{dt} = f(t_i, u) \quad , \quad t > 0 \quad , \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

Koshi masalasini qaraymiz.

Runge-Kuttning m-bosqichli oshkor metodi quyidagidan iborat. $y_i=y(t_i)$ qiymat bo‘lsin. a_i, b_{ij}, i=2,3,...,m, j=1,2,...,m-1, σ_i, i=1,2,...,m koefitsiyentlar beriladi va

$$k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f(t_i + a_2\tau, y_i + b_{21}\tau \cdot k_1),$$

$$k_3 = f(t_i + a_3\tau, y_i + b_{31}\tau \cdot k_1 + b_{32}\tau \cdot k_2),$$

....

$$k_m = f(t_i + a_m\tau, y_i + b_{m1}\tau \cdot k_1 + b_{m2}\tau \cdot k_2 + ... + b_{m,m-1} \cdot \tau \cdot k_{m-1})$$

fugksiyalar ketma-ket hisoblanadilar.

Undan so‘ng

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \sum_{l=1}^{m} \sigma_l k_l \tag{2}$$

formuladan $y_{i+1} = y(t_{i+1})$ topiladi. a_i, b_{ij}, σ_i, koeffitsiyentlar anikliq shartlaridan topiladilar. Masalan, (2) - dastlabki (1) - tenglamani approksimatsiya qilishi uchun $\sum_{l=1}^{m} \sigma_l = 1$ bo‘lishi zarur. Ba’zi bir metodlarga alohida to‘xtalamiz. m=1 bulsa 1- misolda karalgan Eyler sxemasi hosil bo‘ladi. m=2 bo‘lganda

$$k_1 = f(t_i, y_i), k_2 = f(t_i + a_2\tau, y_i + b_{21}\tau \cdot k_1), y_{i+1} = y_i + \tau(\sigma_1 k_1 + \sigma_2 k_2) \tag{3}$$

metodlar majmuasini hosil qilamiz. (3) - metodlar approksimatsiyaning parametrlarini tadqiq etamiz.

Oxirgi tengliklardan k_1 va k_2 - larni f orqali ifodasini almashtirib

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \sigma_1 f(t_i, y_i) + \sigma_2 f(t_i + a_2\tau, y_i + b_{21}\tau \cdot f(t_i, y_i)) \tag{4}$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Approksimatsiya xatoligi ta’rifiga kura (3) - metodning approksimatsiyasi (4)-dan y_i -ni u_i - anik yechimi bilan almashtirishdan xosil bo‘lgan

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + \sigma_1 f(t_i, u_i) + \sigma_2 f(t_i + a_2\tau, u_i + b_{21}\tau \cdot f(t_i, u_i)) \tag{5}$$

ifodaga aytiladi.

u(t) va f(t,y) funksiyalarni yetarlicha silliq deb qarab approksimatsiya tartibini aniqlaymiz. Buning uchun (5) - dagi barcha qiymatlarni Teylor formulasi buyicha t_i - nuqtada yoyib chiqamiz. quyidagilarga ega bo‘lamiz.

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau}=u'(t_i)+\frac{\tau}{2}u''(t_i)+O(\tau^2)$$

$$f(t_i+a_2\tau u_i+b_{21}\tau f(t_i,u_i))=f(t_i,u_i)+a_2\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial t}+b_{21}\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+O(\tau^2),$$

(1) - ga asosan

$$u''=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial u}u'=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial u}{\partial u}f.$$

shuning uchun

$$\psi_i^1=-u'(t_i)-\frac{\tau}{2}u''(t_i)+O(\tau^2)+\sigma_1 f(t_i,u_i)+\sigma_2 f(t_i,u_i)+\sigma_2 a_2\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial t}+\sigma_2 b_{21}\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+O(\tau^2)=$$

$$=-f(t_i,u_i)+(\sigma_1+\sigma_2)f(t_i,u_i)+\frac{\tau}{2}(\frac{\partial f(t_i)}{\partial t}+\frac{\tau\partial f(t_i,u_i)}{2\partial u}f(t_i,u_i))+O(\tau^2)+\sigma_2 a_2\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+$$

$$+\sigma_2 b_{21}\tau\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+O(\tau^2)=-f(t_i,u_i)+(\sigma_1+\sigma_2)f(t_i,u_i)+\tau[(\sigma_2 a_2-0{,}5)\frac{\tau\partial f(t_i,u_i)}{2\partial u}+(\sigma_2 b_{21}-0{,}5)\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+]O(\tau^2)=$$

$$=-f(t_i,u_i)[1-\sigma_1+\sigma_2]+\tau[(\tau_2 a_2-0{,}5)\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial t}+(\sigma_2 b_{21}0{,}5)\cdot\frac{\partial f(t_i,u_i)}{\partial u}+]O(\tau^2)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, agar $\sigma_1+\sigma_2=1$ qilib olinsa, approksimatsiya tartibi birga teng bo‘ladi. Agar bunga qo‘shimcha ravishda $\sigma_2 a_2=\sigma_2 b_{21}=0{,}5$ talab qilsak, approksimatsiya tartibi ikkiga teng bo‘ladi. Shunday qilib, ikki bosqichli approksimatsiya tartibi ikkiga teng bo‘lgan bir parametrli Runge-Kutt metodi borligi aniqlandi.

Bu metodlar oilasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=(1-\sigma)f(t_i,u_i)+\sigma f(t_i+a\tau,y_i+a\tau\cdot f(t_i,u_i)) \qquad (7)$$

Bundan $\sigma\cdot a=0{,}5$

Xususiy holda, $\sigma=1, a=0{,}5$ bo‘lganda 3-misol kelib chiqadi. $\sigma=\frac{1}{2}, a=1$ bo‘lganda ikkinchi tartibli

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f(t_i+\tau,y_i+\tau k_1), y_{i+1}=y_i+0{,}5(k_1+k_2)$$

metod hosil bo‘ladi.

Uchinchi tartibli ikki bosqichli metod mavjud emas. Bunga ishonch hosil qilish uchun u'=u tenglamani qarash kifoY.

Approksimatsiya tartibi yuqori bo‘lgan Runge-Kutt metodlari misollari bor.

Uchinchi tartibli metod:

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f\left(t_i+\frac{\tau}{2}y_i+\frac{\tau}{2}\tau k_1\right)$$

$$k_3=f(t_i+\tau,y_i-\tau k_i+2\tau k_1)$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\frac{1}{6}(k_1+4k_2+k_3).$$

Uchinchi tartibli metod:

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f\left(t_i+\frac{\tau}{3},y_i+\frac{\tau}{3}k_1\right),$$

$$k_3=f\left(t_i+\frac{2\tau}{3},y_i+\frac{2\tau}{3}k_2\right),$$

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\frac{1}{4}(k_1+3k_3).$$

To‘rtinchi tartibli metod

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f\left(t_i+\frac{\tau}{4}, y_i+\frac{\tau}{4}k_1\right),$$
$$k_3=f\left(t_i+\frac{\tau}{2}, y_i+\frac{\tau}{2}k_2\right),$$
$$k_4=f(t_i+\tau, y_i+\tau k_1-2\tau k_2+2\tau k_3),$$
$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\frac{1}{6}(k_1+4k_3+k_4).$$

To‘rtinchi tartibli metod

Runge - Kutt metodlardan ikkinchisi:

$$k_1=f(t_i,u_i), k_2=f\left(t_i+\frac{\tau}{2}, y_i+\frac{\tau}{2}k_1\right),$$
$$k_3=f\left(t_i+\frac{\tau}{2}, y_i+\frac{k_2}{2}\right),$$
$$k_4=f(t_i+\tau, y_i+k_3),$$
$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4).$$

Keltirilgan metodlar Runge - Kutt metodlarining xususiy hollaridir.

Runge - Kutt metodlarining yaqinlashishi.

Runge - Kutt metodlari yaqinlashishi tartibi approksimatsiya tartibi bilan bir xilligini ko‘ramiz. $z_i = y_i - u(t_i)$ xatolikni qanoatlantiradigan tenglamani yozamiz. Runge - Kutt metodining tenglamasi

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}=\sum_{l=1}^{m}\sigma_l k_l(y) \tag{8}$$

bunda

$$k_l(y)=f(t_i+a_l\tau, y_i+\sum_{j=1}^{l-1}\tau b_{lj}\cdot k_j(y)),\quad i=2,...,m, \tag{9}$$
$$k_1(y)=f(t_i,y_i)$$

(8) - tenglamaning chap tomoniga y_i - ning u_i+z_i ifodasini quyib o‘ng tomonga

$$\sum_{l=1}^{m}\sigma_l k_l(u)$$

yig‘indini qo‘shib ayiramiz.

Bu yerda

$$k_l(u)=f(t_l+a_l\tau, u_l+\sum_{j=1}^{l-1}\tau b_{lj}\cdot k_j(u), l=2,3,...,m,$$
$$k_1(u)=f(t_i,u_i). \tag{10}$$

Unda (8) - tenglama

$$\frac{z_{i+1}-z_i}{\tau}=\psi_i^{(1)}+\psi_i^{(2)}, \tag{11}$$

bunda

$$\psi_i^{(1)}=-\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau}+\sum_{l=1}^{m}\sigma_l k_l(u), \tag{12}$$

ta'rifga ko'ra (8), (9) -larni (1) - yechimi u-dagi approksimatsiya xatoligi bo'lib,

$$\psi_i^{(2)}=\sum_{l=1}^{m}\sigma_l\left[k_l(y)-k_l(u)\right]. \tag{13}$$

(11) - tenglamani metodning xatolik tenglamasi sifatida qaraymiz. U, i=0,1,..., uchun bajariladi. $z_0=0$, chunki $y_0=u_0=u(0)$ aniq beriladi. (1) - tenglama chegaralangan $0\le t\le T$ vaqt oraligida yechiladi deb faraz qilamiz, shu sababli ixtiyeriy i va τ uchun $t_i=i\tau\le T$ bajariladi.

Faraz qilamiz, f(t,u) qaralayotgan sohada u buyicha L konstantali Lipshits shartini qanoatlantirsin. Shu faraz bilan avval $\psi_i^{(2)}$ ni, undan so'ng z_i - ni baholaymiz. (9) va (10) - ifodalardan va farazdan

$$\left|k_l(y)-k_l(u)\right|=\left|f(t_l+a_l\tau, y_l+\sum_{j=1}^{l-1}\tau b_{lj}\cdot k_j(y))-f(t_i+a_i\tau, u_i+\sum_{j=1}^{l-1}\tau b_{lj}k_j(u))\right|\le$$

$$\le L(\left|y_i-u_i\right|+\sum_{j=1}^{l-1}\tau b_{lj}\left|k_j(y)-k_j(u)\right|, l=2,3,...,m,$$

$$\left|k_1(y)-k_1(u)\right|\le L\cdot\left|y_i-u_i\right|$$

$$r_j=\left|k_j(y)-k_j(u)\right| \quad , \quad j=1,2,...,m,$$

$$b=\max_{2\le l\le m, 1\le j\le l-1}\left|b_{lj}\right| \quad , \quad q=L\left|y_i-u_i\right| \tag{14}$$

belgilashdan so'ng oldingi tengsizlikka asosan

$$r_l\le Lb\sum_{j=1}^{l-1}\tau r_j+q, l=2,3,...,m, r_1\le q,$$

yoki

$$r_{l+1}\le Lb\sum_{j=1}^{l}\tau r_j+q, l=0,1,...,m-1, r_0=0. \tag{15}$$

<u>1 - lemma</u>

(15) - tengsizlikdan $L\cdot b\cdot\tau \succ 0$ bo'lganda

$$r_i\le\rho^{i-1}q, i=1,2,...,m, \tag{16}$$

tengsizlik hosil bo'ladi, bunda $\rho=1+Lb\tau$

<u>*Isbot.*</u>

i = 1 dagi (16) - baho i = 0 dagi (15) - baho bilan bir xildir. Faraz qilamiz (16) - tengsizlik i=1,2,...,k uchun bajarilgan bulsin. Uning i=k+1 uchun urinli ekanligini kursatamiz.

(15) dan i=k uchun

$$r_{k+1}\le b\sum_{j=1}^{k}\tau r_j+q$$

tengsizlikka egamiz. Induksiyaning faraziga ko‘ra

$$r_j \le \rho^{j-1}q,\ j=1,2,...,k,$$

bundan

$$r_{k+1} \le (Lb\sum_{j=1}^{k}\tau r\rho^{j-1}+1)q = (Lb\tau\frac{\rho^k-1}{\rho-1}+1)q = \rho^k q.$$

Shuni isbot qilish talab qilingan edi.

Endi $\psi_i^{(2)}$ funksiyani baholaymiz. (14) va (16) dan

$$\left|\psi_i^{(2)}\right| \le \sum_{i=1}^{m}|\sigma_i||r_i| \le \sigma q\sum_{i=1}^{m}\rho^{i-1} \le \sigma\cdot q\cdot m\cdot\rho^{m-1},$$

bunda

$$\sigma = \max_{1\le i\le m}|\sigma_i|, \rho = 1+Lb\tau b\tau = L|z_i| \quad (17)$$

Shunday qilib | zi | xatolikning usishi bilan $\left|\psi_i^{(2)}\right|$ kattalik xatolikning birinchi darajasidan tez o‘smasligi ma’lum bo‘ldi. Endi $z_i = y_i - u_i$ xatolikni baholaymiz. (11) - tenglamadan

$$z_{i+1} = z_i + \tau\psi_i^{(2)} + \tau\psi_i^{(1)},$$

tenglikka egamiz. Bundan (17) - ni inobatga olib

$$|z_{i+1}| \le (1+\alpha\tau)|z_i| + \tau\left|\psi_i^{(1)}\right|, i = 0,1,..., \quad (18)$$

bunda

$$\alpha = \alpha(\tau) = \sigma Lm(1+Lb\tau b^{m-1} \quad (19)$$

$\tau \to 0, \alpha(\tau) \to \sigma Lm$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Agar $\tau \le \tau_0$ bo‘lsa, unda $\alpha(\tau) \le \sigma Lme^{Lb(m-1)\tau_0}$, ya’ni $\alpha(\tau)$ ning τ buyicha tekis chegaralanganligi ko‘rinib turibdi. τ_0 sifatida qo‘pol ravishda T ni olish mumkin.

(18) - tengsizlikdan

$$|z_{i+1}| \le (1+\alpha\tau)^{i+1}|z_0| + \sum_{j=0}^{i}\tau(1+\alpha\tau)^{i-j}\left|\psi_j^{(1)}\right| \quad (20)$$

kelib chiqadi. Buni induksiya metodi bilan ko‘rsatish mumkin. (20) – bahoni qo‘polroq baholab $z_0 = 0$ ekanligini hisobga olib

$$|z_{i+1}| \le (i+1)\tau(1+\alpha\tau)^i \max_{0\le j\le i}\left|\psi_j^{(1)}\right| \le t_{i+1}e^{\alpha t_i}\max_{0\le j\le i}\left|\psi_j^{(1)}\right|,$$

bunda $t_i = i\tau \le T$ bahoni hosil qilamiz.

Shunday qilib quyidagi teoremani isbot qildik.

Teorema. Faraz qilamiz (1) - tenglamaning o‘ng tomonini f(t,u) u buyicha Lipshits shartini qanoatlantirsin. $\psi_j^{(1)}$ (12)-ga muvofiq aniqlangan (2) - Runge-Kutt metodining approksimatsiya xatoligi bo‘lsin. Unda Runge-Kutt metodining $i\cdot\tau \le$ T bo‘lgandagi xatoligi uchun

$$|y_i - u(t_i)| \le Te^{\alpha T}\max_{0\le j\le i-1}\left|\psi_j^{(1)}\right|, \quad (21)$$

bunda

$$\alpha = \sigma Lm(1 + Lb\tau b^{m-1}, \sigma = \max_{1 \le k \le m} |\sigma_k|,$$
$$b = \max_{2 \le k \le m, 1 \le i \le k-1} |b_{kj}|$$

baho o‘rinlidir.

Natija. Agar Runge-Kutt metodi (1)- tenglamani approksimatsiya qilsa unda u, $\tau \to 0$ da yaqinlashadi, undan tashqari metod xatoligi tartibi approksimatsiya tartibi bilan bir xil bo‘ladi.

Isboti. (21) - dan va $\alpha(\tau)$- ning tekis chegaralanganligidan kelib chiqadi.

Oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini yechishning sonli metodlari. Ko‘p qadamli ayirmali metodlar.

1) Metodlar tavsifi.

$$\frac{du}{dt} = f(t,u), \quad t > 0, \quad u(0) = u^0 \tag{1}$$

Koshi masalasini yechish uchun doimiy $\tau \succ 0,$ τ qadamli $\varpi_\tau = \{t_i = i \cdot \tau, i = 0,1,...\}$ to‘rni aniqlaymiz.

$$y_i = y(t_i), f_i = f(t_i, y_i)$$

orqali ϖ_τ to‘rda aniqlangan funksiyalarni belgilaymiz.

Chiziqli m- qadamli ayirmali metod deb,

$$\frac{a_0 \cdot y_i + ... + a_m \cdot y_{i-m}}{\tau} = b_0 \cdot f_i + b_1 \cdot f_{i-1} + ... + b_m \cdot f_{i-m}, i = m, m+1, ... \tag{2}$$

ayirmali tenglamalar sistemasiga aytiladi.

(2) - tenglamani $y_i = y(t_i)$ yangi qiymatni oldin aniqlangan $y_{i-1}, y_{i-2},...$ qiymatlar orqali ifodalangan rekkurent munosabat sifatida qarash kerak.

Hisoblash i=m, ya’ni

$$\frac{a_0 \cdot y_m + a_1 y_{m-1} + ... + a_m y_0}{\tau} = b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + ... + b_m f_0,$$

tenglamadan boshlanadi.

Bundan ko‘rinadiki, hisoblashni boshlash uchun m- ta $y_0, y_1, ..., y_{m-1}$ boshlangich qiymatlarni berish lozim. $y_0 = u_0$ ya’ni Koshi masalasidan aniqlanadi. $y_0, y_1, ..., y_{m-1}$ qiymatlar berilgan deb faraz qilamiz. (2) - tenglamadan ko‘rinib turibdiki, ko‘p qadamli ayirmali metodlarda Runge-Kutt metodlaridan o‘ng tomoni faqat ω_τ to‘rning nuqtalarida hisoblanishi bilan farq qiladi.

(2) - metod $b_0 = 0$ bo‘lganda oshkor deb aytiladi. Bunda y_i dastlabki $y_0, y_1, ..., y_{i-1}$ qiymatlar orqali oshkor ifodalanadi. $b_0 \neq 0$ bo‘lgan metod oshkormas deb aytiladi. Bunday xolda y_i- topish uchun

$$\frac{a_0}{\tau} y_i - b_0 f(t_i, y_i) = F[y_{i-1}, y_{i-2}, ..., y_{i-m}],$$

bunda

$$F\left[y_{i-1},y_{i-2},...,y_{i-m}\right]=\sum_{k=0}^{m}(b_k y_{i-k}-\frac{a_k}{\tau}y_{i-k}),$$

chiziqsiz tenglamani yechish kerak.

Odatda bu tenglamani Nyuton metodi yordamida yechadilar. Bunda boshlang‘ich yaqinlashish y_i^0 sifatida y_{i-1} qiymat olinadi. (2) - tenglamaning koeffitsiyentlari umumiy ko‘paytuvchi bilan farq qiladi. Bu erkinlikdan qutilish uchun

$$\sum_{k=0}^{m} b_k = 1, \tag{3}$$

deb talab qilamiz. Bu (2) - ayirmali sxemaning o‘ng tomoni (1) - differensial tenglamaning o‘ng tomonini appoksimatsiyalaydi demakdir.

Hisoblash amalyotida (2) - metodning xususiy holi bo‘lgan Adams metodi ko‘p tarqalgan. Bunda u'(t) hosila ikkita t_i va t_{i-1} nuqtalar orqali approksimatsiya qilinadi, ya’ni

$$a_0 = -a_1 = 1, a_k = 0, k = 2,3,...,m,$$

shunday qilib Adams metodi

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\tau} = \sum_{k=0}^{m} b_k f_{i-k} \tag{4}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. $b_0 = 0$ bo‘lganda Adams metodi oshkor, aks holda oshkormas deb aytiladi. (2) - ayirmali sxemalarni o‘rganishda eng avval a_k, b_k koeffitsiyentlarning approksimatsiya xatoligiga ta’sirini tekshiramiz, undan so‘ng bir biriga bog‘lik bo‘lgan turg‘unlik va yaqinlashishi masalalarini tadqiq etamiz.

2) Ko‘p qadamli ayirmali metodlarning approksimatsiya xatoligi.

(2) - ayirmali sxemaning approksimatsiya xatoligi yoki bog‘lanishsizligi deb,

$$\psi_i = -\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{\tau}u_{i-k} + \sum_{k=0}^{m} b_k f(t_{i-k}, u_{i-k}) \tag{5}$$

funksiyaga aytiladi. Bu (2) - tenglamaga (1) - tenglamaning aniq yechimi u(t) ni quyganda hosil bo‘ladi. Approksimatsiya xatoligi tartibining $a_k, b_k, k = 0,1,...m$ koeffitsiyentlarni tanlashga bog‘liqligi masasasini o‘rganamiz.

Bunda barcha funksiyalar kerakli tartibli hosilaga ega deb hisoblaymiz $u_{i-k} = u(t_i - k\tau)$ funksiyalarni $t = t_i$ nuqtalar atrofida Teylor qatoriga yoyib

$$u_{i-k} = \sum_{l=0}^{p}\frac{(-k\tau\tau^l u^{(l)}(t_i)}{l!} + O(\tau^{p+1})$$

$$f(t_{i-k}, u_{i-k}) = u'(t_i - k\tau\tau = \sum_{l=0}^{p-1}\frac{(-k\tau\tau^l u^{(l)}(t_i)}{l!} + O(\tau^p), k = 1,2,...m$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

Bu yoyilmalarni (5) - ga quyib,

$$\psi_i = -\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{\tau}(\sum_{l=0}^{p}\frac{(-k\tau)^l u^{(l)}(t_i)}{l!}) + \sum_{k=0}^{m} b_k(\sum_{l}^{p-1}\frac{(-k\tau)^l u^{(l+1)}(t_i)}{l!}) + O(\tau^p) = -\sum_{l=0}^{m}(\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{\tau}\frac{(-k\tau)^l u^{(1)}(t_i)}{l!}) +$$

$$+\sum_{l=0}^{p}(\sum_{k=0}^{m} b_k \frac{(-k\tau\tau^{l-1}u^{(l)}(t_i)}{(l-1)!}) + O(\tau^p)$$

Oddiy shakl o‘zgartirilganidan so‘ng

$$\Psi_i = -\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{\tau}\right)\cdot u(t_i) + \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=0}^{m} \left[(-k\tau)^{l-1}\cdot\left(a_k\cdot\frac{k}{l} + b_k\right)\cdot\frac{u^{(l)}\cdot t_i}{l-1!} + O(\tau^p)\right] \quad (6)$$

yoyilmaga kelamiz. Bundan ko‘rinadiki, agar

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{k=0}^{m} k^{l-1}(ka_k + lb_k) = 0,\ l = 1,2,...,p \quad (8)$$

shartlar bajarilsa, approksimatsiya tartibi p-ga teng bo‘ladi.

(7) va (8) - shartlar (3) - bilan birgalikda 2(m+1) ta $a_{0,}a_1, a_2,..., a_m,\quad b_0,...,b_m$ noma’lumlarga nisbatan p+2 ta tenglamadan iborat. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini tashqil etadi. Agar (3) - shartni inobatga olsak

$$\sum_{k=1}^{m} ka_k = -1$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

$$\sum_{k=1}^{m} k^{l-1}(ka_k + lb_k) = 0,\ l = 2,3,...,p \quad (9)$$

sistemani hosil qilamiz.

Bu sistema 2m noma’lumli p-ta tenglamadan ibrat, a_0, b_0 koeffitsiyentlar

$$a_0 = -\sum_{k=1}^{m} a_k, b_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} b_k \quad (10)$$

formulalar orqali hisoblanadi. (9) sistema yechimga ega bo‘lishi uchun $p \le 2m$ bo‘lishi kerak. Bu approksimatsiya tartibi $p \le 2m$ olib keladi. Shunday qilib ko‘p qadamli ayirmali metodning xatolik tartibi p-ning eng yukorisi 2m ga teng. (4) - Adams metodlari uchun p-tartibli (9)- approksimatsiya shartlari

$$l\sum_{k=1}^{m} k^{l-1} b_k = 1, l = 2,3,...,p, b_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} b_k \quad (11)$$

Bundan ko‘rinib to‘ribdiki Adamsning oshkor metodlarining eng yuqori approksimatsiya tartibi m-ga teng. Oshkormas metodlarning eng yukori approksimatsiya tartibi m+1 ga teng.

3) Ayirmali metodlar to‘rg‘unligi va yaqinlashishi.

2-Teorema.

Faraz qilamiz

$$a_0 q^m + a_1 q^{m-1} + ... + a_{m-1} q^{m-1} = 0$$

xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari birlik doiraning ichida yoki chegarasida joylashgan bo‘lib, chegarada karrali ildizlari bo‘lmasin. Faraz qilamiz

$$|f_u(t,u)| \le L, t \in [0,T]$$

bo‘lsin. Unda

$$\tau \le \tau_0 \frac{a_0}{2|b_0|L}$$

bo‘lganda

$$\frac{a_0 z_i + a_1 z_{i-1} + \ldots + a_m z_{i-m}}{\tau} = \psi_{i-m} + \varphi_{i-m}, i = m, m+1, \ldots,$$

bu yerda

$$\psi_{i-m} = \frac{a_0 u_i + \ldots + a_m u_{i-m}}{\tau} + b_0 f(t_i, u_i) + \ldots + b_m f(t_{i-m}, u_{i-m})$$

va

$$\phi_{i-m} = b_0(t_i, y_i) - f(t_i, u_i) + b_1(f(t_{i-1}, y_{i-1}) - f(t_{i-1}, u_{i-1})) + \ldots + b_m(f(t_{i-m}, y_{i-m}) - f(t_{i-m}, u_{i-m}))$$

tenglama yechimlari uchun

$$|z_i| \le M_1 e^{c_1 T} \max_{0 \le j \le m-1} |z_j| + M_2 \sum_{k=0}^{i-m} \tau |\psi_k|, i - m, m+1, \ldots,$$

bunda

$$M_1 = \|Q\|_C \|Q^{-1}\|_C \, M_2 = \frac{2M_1}{|a_0|}, c_1 = M_1 \vartheta L,$$

$$\vartheta = \frac{2}{a_0^2} \sum_{k=1}^{m} (|a_0||b_k| + |a_k||b_0|)$$

baho o‘rinli.
Adams metodi misollari.

F(x)=f(x,u(x)) qilib belgilaymiz. Faraz qilamiz $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-m}$ qiymatlar allaqachon ma’lum bo‘lsinlar. Unda $F(x_k) = f(x_k, y_k)$ funksiya qiymatlari ham ma’lum bo‘ladilar. Bu nuqtalar oralig‘ida F(x) funksiyani Nyuton interpolyatsion ko‘phadi bilan almashtirib tenglamani (x_n, x_{n+1}) oralig‘i bo‘ycha integrallaymiz. Natijada Adams metodi hosil bo‘ladi.

Nazorat savollar:

1. Eyler metodi approksimatsiya xatoligi tartibi nimaga teng?
2. Runge – Kutt metodiga misollar keltiring.
3. Aproksimatsiya xatoligi deb nimaga aytiladi?
4. Yaqinlashishga ta’rif bering.
5. Ko‘p qadamli metod va Runge-Kutt metodi farqi nimadan iborat?

Adabiyotlar :

1. Samarskiy A.A. Vvedeniye v chislenniye metodi. -M., Nauka. 1987.
2. N.N. Kalitkin, Chislenniye metodi, M., Nauka, 1978.
3. George A. Anastassiou and Iuliana F. Iatan. Intelligent Routines. Solving Mathematical Analysis with Matlab,Mathcad, Mathematica and Maple. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013- 592r.
4. Brain R.Hunt, Ronald I.Lipsman, Jonatahan M.Rosenberg. A Gulde to MATLAB for Beginners and Experienced Users. Cambridge University Press.2008.
5. V.A. Oxorzin Prikladnaya matematika v sisteme MATHCAD: Uchebnoye posobiye. –SPb.: “Lan”.2008.-352s.
6. V.P Dyakonov. Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii-M.:SOLON-Press. 2006.-720s.
7. V.P Dyakonov. Mathematica 5/6/7. Polnoye rukovodstvo. - M.: DMK Press, 2010. - 624 s.:
8. MATHCAD User's Guide with Reference Manual. MathSoft Engineering&Education,Inc. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.-513p.

2 – Ma’ruza. Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullari. Differensial haydash usuli. To‘r usuli.

Reja:

1. Sistemalarni integrallash.
2. Chegaraviy masalalarni yechish usullari.
3. Otishma metod.
4. Ayirmali metodlar.

Tayanch so‘zlar: sistemani integrallash, otishma metodi, ayirmali metod, progonka metodi, turg‘unlik, ayirmali yechim.

Runge-Kutt metodlari EHM yordamida hisoblash uchun qulay hisoblanadi. Chunki bu metodning quyidagi yaxshi xususiyatlari bor.

1) aniqliklari yaxshi (birinchi tartiblisidan boshqalarining).

2) ular oshkor metodlardirlar, ya’ni y_{n+1}, oldin aniqlangan qiymatlar orqali ma’lum formulalar orqali oshkor ifodalanadi.

3) barcha metodlarda qadamlar o‘zgaruvchi bo‘lishi mumkin: bu, yechim tez o‘zgaradigan joylarda qadamni kichraytirib, aks holda qadamni katta qilib hisoblashga imkon beradi.

4) dastlabki hisoblashda to‘rni tanlab, $y_0 = \mu$ ni berib, hisoblashni oldindan ma’lum bo‘lgan formulalar yordamida bajarish mumkin.

Bu xossalar Runge-Kutt metodini EHM yordamida hisoblash uchun qulay ekanligini ko‘rsatdi. Shu sababli bu metod yordamida sistemani yechishni qaraymiz. Umuman aytganda y va f(x,y) larni formal U va F(X,Y) larga almashtirish kifoY.

Masalan,

$$u'(x) = f(x, u(x), \upsilon(x))$$

$$\vartheta''(x) = q(x, u(x), \upsilon(x))$$

ikkita tenglama uchun u va ϑ larni taqribiy qiymatlarini y va z orqali belgilab, Runge-Kutt metodining to‘rtinchi tartiblisini quyidagicha yozish mumkin:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \cdot h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{6} \cdot h(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4),$$

bu yerda

$$k_1 = f(z_n, y_n, z_n), q_1 = g(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2} \cdot h, y_n + \frac{1}{2} \cdot hk_1, z_n + \frac{1}{2} \cdot hq_1)$$

$$q_2 = g(x_n + \frac{1}{2} \cdot h, y_n + \frac{1}{2} \cdot hk_1, z_n + \frac{1}{2} \cdot hq_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{1}{2} \cdot h, y_n + \frac{1}{2} \cdot hk_2, z_n + \frac{1}{2} \cdot hq_2)$$

$$q_3 = g(x_n + \frac{1}{2} \cdot h, y_n + \frac{1}{2} \cdot hk_2, z_n + \frac{1}{2} \cdot hq_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hq_3)$$

$$q_4 = g(x_n + h, y_n + hk_3, z_n + hq_3)$$

Ko‘pgina hisoblash programmalari shu formulalarga asoslangan.

Chegaraviy masalalar

1. Masalaning qo‘yilishi.

Chegaraviy masala - bu

$$\frac{d}{dx} u_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, ..., u_p), 1 \le k \le p, \tag{1}$$

sistemaning [a, b] kesmada bittadan ko‘p nuqtasida qo‘shimcha shartlar qo‘yilgan xususiy yechimini topishdan iborat. Chegaraviy masalalarning turli bo‘lishlariga qaramasdan ular asosan birta sonli metod yordamida yechiladilar.

Chegaraviy masalalarni sonli yechishga otishma va ayirmali metodlarni qullaydilar. Otishma metodi, bu chegaraviy masalani shu sistema uchun Koshi masalasiga olib kelishdan iborat.

Ayirmali metodda esa chegaraviy masala, tartibi juda katta bo‘lgan algebraik tenglamalar sistemasiga olib kelinadi (noma’lumlar to‘r nuqtalaridagi yechimning qiymatlaridan iborat).

Masala chiziqlimas bo‘lgan holda har ikkala metod ham iteratsion metoddan iborat.

2. Otishma metodi. Bu chegaraviy masalani xuddi o‘sha sistema uchun Koshi masalasiga keltirishdan iborat.

Bu metodni chegaraviy shartlari yetarlicha umumiy bo‘lgan ikkita

$$u'(x) = f(x, u, \vartheta), \vartheta'(x) = q(x, u, \vartheta), a \le x \le b$$

$$\varphi(u(a),\vartheta(a))=0,\psi(u(b),\vartheta(b))=0$$

differensial tenglamalar sistemasi misolida qaraymiz. $u(a)=\eta$ ixtiyoriy qiymatni tanlab olib $\varphi(\eta,\vartheta(a))=0$ chap shartni algebraik tenglama sifatida qarab uni qanoatlantiradigan $\vartheta(a)=\xi(\eta)$ qiymatni topamiz.

$u(a)=\eta,\vartheta(a)=\xi$ qiymatlarni (2) sistemaga Koshi masalasining boshlang‘ich shartlari sifatida qarab, Koshi masalasini istalgan sonli metod yordamida yechamiz. ξ qiymat shunday tanlanganki topilgan yechim chap chegaraviy shartni qanoatlantiradi. Ammo bu yechim o‘ng chegaraviy shartni qanoatlantirmaydi, uni o‘ng chegaraviy shartning chap tomonini η -ning funksiyasi sifatida qarasak:

$$\overline{\psi(\eta)}=\psi(u(b;\eta),\vartheta(b;\eta))$$

umuman aytganda nolga aylanmaydi. Lekin, agar $\overline{\psi}(\eta)=0$ tenglamani yechsak, unda η qiymat aniqlanadi. Bu algebraik tenglamani istalgan sonli metod yordamida yechish mumkin. Lekin $\overline{\psi}(\eta)$ funksiyaning har bir yangi qiymatini topish (2)-sistemani sonli yechishni talab qiladi. Shu sababli, $\overline{\psi}(\eta)=0$ tenglama ildizini tez topadigan metodni qullash maqsadga muvofiq.

Ayirmali metod; chiziqli masala

Ayirmali metodni, eng sodda ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masala misolida qaraymiz:

$$u''(x)-p(x)\cdot u(x)=f(x),a\le x\le b \tag{1}$$

$$u(a)=\alpha,u(b)=\beta. \tag{2}$$

[a,b] kesamada $a=x_0<x_1<...<x_N=b$ to‘rni qaraymiz. Soddalik uchun bu turni tekis deb hisoblaymiz. Ikkinchi tartibli hosilani yechimning to‘r nuqtalaridagi $u_n=u(x_n)$ qiymatlari orqali ifodalaymiz; eng sodda

$$u''(x_n)\cong\frac{1}{h^2}\cdot(u_{n+1}-2u_n+u_{n-1})$$

approksimatsiyadan foydalanamiz:

Bunday approksimatsiyani har bir x_n; n=1,2,...,N-1, ichki nuqta uchun yozish mumkin. Agar buni (1)-tenglamadagi ikkinchi tartibli hosila urniga quysak unda tenglama taqribiy bo‘lib, uni qidirilayetgan u(x) yechim emas, balki taqribiy $y_n\approx u(x_n)$ yechim qanoatlantiradi. Bu almashtirishni bajarib, $p_n=p(x_n)$, $f_n=f(x_n)$ belgilashlarni qabul qilsak

$$y_{n-1}-(2+h^2\cdot p_n)\cdot y_n+y_{n+1}=h^2\cdot f_n,1\le n\le N-1 \tag{3}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz. Bu N-1 ta algebraik tenglamadan iborat bo‘lgan sistemadir. Noma’lumlar soni N+1 ta, ya’ni noma’lumlar soni tenglamalar sonidan ko‘pdir. Ikkita yetmaydigan tenglamani (2) chegaraviy shartlardan hosil qilamiz.

$$y_0=\alpha,y_N=\beta \tag{4}$$

(3) - algebraik sistemani yechib, taqribiy yechimni topamiz.
Bunda uchta savol tug‘iladi:

1) (3) – ko‘rinishdagi sistemaning yechimi mavjudmi?

2) agar yechim mavjud bo‘lsa, uni qanday topish kerak?

3) u(x) yechimga istalgancha yaqin bo‘lgan y(x) taqribiy yechimni topish iloji bormi?

Eng avval ayirmali yechimning mavjudligini tekshiramiz.

p(x)>0 deb talab qilamiz. (1)-masala chiziqli bo‘lganligi uchun, ayirmali approksimatsiya ham chiziqli bo‘ldi. Shuning uchun (3)- sistema chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ldi. $p_n>0$ bo‘lganligi uchun, bu sistemaning matritsasi diagonal elementlari absolyut qiymati shu element turgan satrdagi boshqa elementlar absolyut qiymatlari yig‘indisidan katta bo‘ladi. Bunday sistemaning yechimi mavjud va yagona bo‘lishi ma’lum.

Sistemaning matritsasi uch diagonalli bo‘lganligi uchun uni progonka usuli bilan yechish samarali.

Quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema. Agar p(x) va f(x) ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo‘lsalar unda ayirmali yechim, aniq yechimga intiladi va xatolik O(h^2) kabi bo‘ladi.

Isbot. Teoremaning shartlaridan u(x) to‘rtinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega ekanligi kelib chiqadi.

Unda

$$\frac{1}{h^2}\cdot(u_{n-1}-2u_n+u_{n+1})-u''(x_n)=\frac{1}{12}\cdot h^2\cdot u^{(4)}\cdot(\xi_n), x_{n-1}<\xi_n<x_{n+1}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bundan, aniq yechim

$$u_{n-1}-(2+h^2\cdot p_n)\cdot u_n+u_{n+1}=h^2\cdot f_n+\frac{h^4}{12}\cdot u^{(4)}\cdot(\xi_n), 1\le n\le N-1$$

ayirmali tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Bu tenglamadan (3) -tenglamani ayirib, $z_n=u_n-y_n$ xatolikni qanoatlantiradigan

$$(2+h^2\cdot p_n)\cdot z_n=z_{n-1}+z_{n+1}=+\frac{h^4}{12}\cdot u^{(4)}(\xi_n)\quad,\quad 1\le n\le N-1 \qquad (5)$$

$$z_0=0,\ z_N=0, \qquad (6)$$

tenglamalarni hosil qilamiz.

$|z_n|$ maksimumga erishadigan x_{n_0} nuqtani tanlab olamiz; buning chegaraviy nuqta emasligi ma’lum. $p_n>0$ shartni inobatga olib bu nuqtada (5) - tenglikning chap va o‘ng tomonlarining absalyut qiymatlarini taqqoslab,

$$(2+h^2\cdot p_{n_0})\left|z_{(n_0)}\right|\le\left|z_{n_0-1}\right|+\left|z_{n_0+1}\right|+\frac{h^4}{12}\cdot\left|u^4\cdot\left(\xi_{n_0}\right)\right|$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Buning o‘ng tomonidagi $\left|z_{n_0-1}\right|$ va $\left|z_{n_0+1}\right|$ larni $\left|z_{n_0}\right|$ ga almashtirsak

$$u''(x_n)+\frac{h^4}{12}u^{(4)}(\xi_n)$$

$$\max\cdot|z_n|\le\frac{h^2}{12}\cdot\frac{|u^{(4)}\xi_{n_0}|}{|p_{n_0}|}\le\frac{h^2}{12}\cdot\max\cdot\left|\frac{u^{(4)}\cdot(x)}{p(x)}\right|$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. Bu tengsizlik teorema tasdig‘ini isbot qiladi.

Ayirmali metod; chiziqlimas masala

Endi umumiyrok xolni qaraymiz. Chiziqlimas masalalar anchagina qiyinchiliklarni tug‘diradi.

$$u''(x)=f(x,u)\quad,\quad u(a)=\alpha\quad,\quad u(b)=\beta \tag{1}$$

birinchi jins chegaraviy shartlar bilan berilgan chiziqlimas, ikkinchi tartibli differansial tenglamani qaraymiz. f(x,u) ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega bo‘lsin degan talabni qo‘yamiz. Unda u(x) funksiyaning to‘rtinchi tartibli hosilasi uzluksiz bo‘ladi.

$$M_1=\max\cdot|f_u|\quad,\quad M_2=\max|u^{(4)}(x)|$$

qilib belgilaymiz.

Yuqoridagidek [a,b] kesmada tekis turni aniqlab ikkinchi tartibli hosilani chekli ayirma bilan almashtiramiz.

Unda

$$y_{n-1}-2y_n+y_{n+1}=h^2\cdot f(x_n,y_n),1\le n\le N-1 \tag{2}$$
$$y_0=\alpha, y_N=\beta$$

chiziqlimas algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. Ayirmali yechimning anik yechimga yaqinlashishini isbot qilamiz, buning uchun $f_u>m_1>0$ deb faraz qilamiz. Ikkinchi hosilaning approksimatsiyasi uchun

$$u_{n-1}-2u_n+u_{n+1}=h^2\cdot u''(x_n)+\frac{h^4}{12}u^{(4)}(\xi_n)\ \ \xi_n\in(x_{n-1},x_{n+1})$$

munosabat o‘rinli bo‘lgani uchun, aniq yechim

$$u_{n-1}-2u_n+u_{n+1}=h^2f(x_n,y_n)+\frac{h^4}{12}u^{(4)}(\xi_n),\quad 1\le n\le N-1$$
$$u_0=\alpha, u_N=\beta$$

ayirmali tenglamalarni qanoatlantiradi.

Bu tenglamalarni (2) - teglamalardan mos ravishda ayirib $z_n=y_n-u_n$ xatolik uchun

$$z_{n-1}-(2+h^2\cdot f_n)\cdot z_n+z_{n+1}=\frac{h^4}{12}\cdot u^{(4)}(\xi_n)\quad,\quad 1\le n\le N-1 \tag{3}$$
$$z_0=0, z_N=0$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bu yerda $(f_u)_n = \dfrac{f(x_n, y_n) - f(x_n, u_n)}{z_n}$. $x_{n_0}, |z_n|$ maksimumga erishadigan nuqta bo‘lsin. Bu nuqtada (3) munosabatni

$$(2 + h^2 \cdot f_u)_{n_0} \left| z_{n_0} \right| \le \left| z_{n_0 - 1} \right| + \left| z_{n_0 + 1} \right| + \frac{h^4}{12} \cdot \left| u^{(4)}(\xi_n) \right|$$

tengsizlik shaklida yozamiz. ɾng tomondagi $\left| z_{n_0 - 1} \right|$ va $\left| z_{n_0 + 1} \right|$ ni $\left| z_{n_0} \right|$ ga almashtirib bu tengsizlikni yana ham kuchaytirib

$$\left| z_{n0} \right| = \left\| \mathrm{z_n} \right\|_C \le \frac{h^2 \cdot \left| u^{(4)}\left(\xi_{n_0} \right) \right|}{12 \left(f_u \right)_{n_0}} \le \frac{h^2 \cdot M_2}{12 m_1} \qquad (4)$$

bahoni hosil qilamiz.

Bu baho, $h \to 0$ ayirmali yechimning aniq yechimga ikkinchi tartib bilan tekis yaqinlashishini bildiradi.

Ayirmali yechimni topish bilan shug‘ullanamiz.

(2) - sistemani iteratsiya metodi yordamida yechish mumkin. Masalan

$$y_{n-1}^{(s)} - 2 y_n^{(s)} + y_{n+1}^{(s)} = h^2 f\left(x_n, y_n^{(s-1)} \right) \quad , \quad 1 \le n \le N - 1 \quad (5)$$

$$y_0^{(s)} = \alpha, y_N^{(s)} = \beta$$

bu yerda s - iteratsiya nomerini belgilaydi. Iteratsion usulni qo‘llasak iteratsiyaning har bir qadamida uch diagonalli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bu sistemani progonka metodi yordamida yechish mumkin. (5) - iteratsiya metodining yaqinlashishini tekshiramiz.

$\eta_n^{( )} = y_n^{(s)} - y_n$ - iteratsiya xatoligi, (2) -ni (5)-dan ayirishdan hosil bo‘ladigan

$$\eta_{n-1/}^{(s)} - 2\eta_n^{(s)} + \eta_{n+1}^{(s)} = d_n^{(s)}, 1 \le n \le N - 1 \qquad (6)$$

$$\eta_0^{(s)} = 0, \eta_N^{(s)} = 0$$

$$d_n^{(s)} = h^2 f(x_n, y_n^{(s-1)}) - h^2 f(x_n, y_n) \approx h^2 f_u(x_n, y_n) \eta_n^{(s-1)}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Bu sistemani progonka metodi yordamida yechamiz. Bu sistema uchun progonka koeffitsiyentlarini topish rekkurent formulalarini

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2 - \alpha_n} = \frac{n}{n+1}, 0 \le n \le N - 2, \alpha_N = 0$$

$$\beta_{n+1} = \alpha_{n+1}(\beta_n - (d_n)^{(s)}) = -\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot (d_k)^{(s)}, 1 \le n \le N - 1$$

shaklda yozish mumkin.

Progonkaning teskari harakat formulalari

$$(\eta_n)^{(s)} = \alpha_{n+1} \eta_{n+1}^{(s)} + \beta_{n+1} = -n \cdot \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k \cdot (k-1)} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} p \cdot \left(d_p \right)^{(s)} \qquad (7)$$

shaklda yoziladi.

Bular izlanayotgan yechim bo‘ladilar. (6)-sistemaning tenglamalarini o‘ng tomonlari uchun

$$\left|(d_n)^{(s)}\right| \le q^{(s)},\ q^{(s)} = h^2 \cdot M_1 \cdot \left\|(\eta_n)^{(s-1)}\right\|_C$$

tengsizliklar bajariladi.

Bularni (7)-ga quyib

$$\left|\eta_n^{(s)}\right| \le q^{(s)} \cdot n \cdot \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k \cdot (k-1)} \cdot \sum_{p=1}^{k-1} p = \frac{1}{2} \cdot q^{(s)} \cdot (N-n) \cdot n \le \frac{1}{8} \cdot q^{(s)} \cdot N^2$$

bahoga ega bo‘lamiz.

Bundan

$$\left\|\eta_n^{(s)}\right\|_C \le \overline{q} \cdot \left\|\eta_n^{(s-1)}\right\|_C \quad , \tag{8}$$

bunda

$$\overline{q} = \frac{1}{8} N^2 \cdot h^2 \cdot M_1 = \frac{1}{8}(b-a)^2 \cdot M_1$$

hosil bo‘ladi.

Bu baho iteratsiya metodining

$$\frac{1}{8}(b-a)^2 \cdot M_1 < 1, M_1 = \max\left|\frac{dt}{du}\right| \tag{9}$$

shart bajarilganda yaqinlashishini ko‘rsatadi. Yaqinlashish chiziqli ekanligi ko‘rinib turibdi ($\overline{q}$ ning birinchi darajasi kabi).

(2) sistemani Nyuton metodi yordamida yechish maqsadga muvofiqdir. Tenglamalarning o‘ng tomonlarini chiziqli funksiyaga almashtirib quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$y_n^{(s+1)} = y_n^{(s)} + \Delta_n^{(s)}, 0 \le n \le N,$$

$$\Delta_{n-1}^{(s)} - (2 + h^2 f_u)_n \cdot \Delta_n^{(s)} + \Delta_{n+1}^{(s)} = h^2 f_n^{(s)} - y_{n-1}^{(s)} + 2 \cdot y_n^{(s)} - y_{n+1}^{(s)},$$

$$1 \le n \le N-1, \Delta_0^{(s)} = \Delta_N^{(s)} = 0.$$

Bu sistemani ham progonka metodi yordamida yechish mumkin.

Nazorat savollar:

1. Sistemani integrallash deganda nima tushunasiz?
2. Chegaraviy masalani yechishning qanday usullarini bilasiz?
3. Otishma metodining g‘oyasi nimadan iborat ?
4. Ayirmali metodning mohiyati nimadan iborat ?

Adabiyotlar.

1. Samarskiy A.A. GulinA.V. Chislenniye metodi M Nauka 1989 g.
2. Krilov V.I., Bobkov V.V., Monastirskiy P.I. Vichislitelniye metodi: v 2-x t. M., Nauka, 1976-1977.

3. George A. Anastassiou and Iuliana F. Iatan. Intelligent Routines. Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013- 592r.
4. Brain R. Hunt, Ronald I. Lipsman, Jonatahan M. Rosenberg. A Gulde to MATLAB for Beginners and Experienced Users. Cambridge University Press.2008.
5. V.A. Oxorzin Prikladnaya matematika v sisteme MATHCAD: Uchebnoye posobiye. –SPb.: “Lan”.2008.-352s.
6. V.P Dyakonov. Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii-M.:SOLON-Press. 2006.-720s.
7. V.P Dyakonov. Mathematica 5/6/7. Polnoye rukovodstvo. - M.: DMK Press, 2010. - 624 s.:
8. MATHCAD User's Guide with Reference Manual.MathSoft Engineering&Education, Inc. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.-513p.
9. Maple User Manual. Maplesoft, Waterloo Maple Inc. 2012.-458p.

3 – Ma’ruza. Puasson tenglamasi uchun Dirixle ayirmali masalasining: turg‘unligi va yaqinlashishi.

Reja:
1. Puason tenglamasi uchun Dirixle ayirmali masalasi
2. Chegaraviy shartlarga nisbatan turgunlik
3. O‘ng tomonga nisbatan turgunlik.

Tayanch iboralar: Puacson tenglamasi, Dirixle masalasi, ayirmali sxema, turg‘unlik, korrektlik sxema xatoligi, sxema yaqinlashishi.

1. Chegaraviy shartlarga nisbatan turg‘unlik.

Bundan oldin G chegarali $G\{(x_1,x_2),\ 0<x_1<l_1,\ 0<x_2<l_2\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x_1,x_2),\ \ x=(x_1,x_2)\in G \tag{1}$$

Puasson tenglamasi uchun $u(x)=\mu(x),\ \mathrm{x}\in\Gamma$ Dirixle masalasini qaragan edik.

G sohada $\Omega=\{x_{ij}=(x_1^i,x_2^j),\ \mathrm{i}=0,1,\Lambda\ ,\mathrm{N}_{1,}\mathrm{j}=0,\Lambda\ ,N_2\}$, bu yerda $x_1^i=ih_1,\ \mathrm{x}_2^{\mathrm{j}}=j.h_2,\mathrm{h}_1=\frac{l_1}{N_1},\mathrm{h}_2=\frac{l_2}{N_2}$ to‘r qurilib (1)- tenglamani ikkinchi tartib bilan aproksimatsiyalaydigan

$$\begin{gathered} y_{x_1x_1,ij}+y_{x_2x_2,ij}=-f_{ij},x_{ij}\in\omega \\ y_{ij}=\mu(x_1^i,x_2^j),x_{ij}\in\gamma \end{gathered} \tag{2}$$

ayirmali sxema qurilgan edi. Bu yerda ω , Ω to‘rning ichki nuqtalari va γ to‘rning chegaraviy nuqtalari:

$$\omega = \{x_{ij} \mid (x_1^i, x_2^j), \mathrm{i}=1,2,\Lambda\ , \mathrm{N}_1 - 1,\ \mathrm{j}=1,2,\Lambda\ , \mathrm{N}_2 - 1\}$$

$$\gamma = \{\mathrm{x}_{\mathrm{oj}} x_{N_{1,j}}\}_{j=1}^{N_2-1} \cup \{x_{i0}, x_{iN_2}\}_{i=1}^{N_1-1}$$

(2)- ayirmali sxema

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi\in ш'(x)} B(x\xi)y(\xi) + F(x),\ \mathrm{x}\in\omega \qquad (3)$$

$$y(x) = \mu(x), \quad x\in\gamma, \qquad (4)$$

bu yerda $x = x_{i,j} \in \omega$ tugun nuqtalar uchun SH'(x) $x_{i+1,j}$,$x_{i,j+1}$ nuqtalardan iborat x nuqtaning atrofi

$$A(x) = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2},\ B(x,x_{i\pm1,j}) = \frac{1}{h_1^2},\ B(x,x_{j\pm1}) = \frac{1}{h_2^2},\ F(x) = f(x_{ij}) \qquad (5)$$

kanonik ko‘rinishda yoziladi.

Avvalgidek

$$L(x)y(x) = A(x)y(x) - \sum_{\xi\in ш`(x)} B(x,\xi)y(\xi)$$

kabi belgilab (3), (4) masalani

$$L(x)y(x) = F(x),\ \mathrm{x}\in\omega,\ \mathrm{y(x)} = \mu(\mathrm{x}),\ \mathrm{x}\in\gamma \qquad (6)$$

ko‘rinishda yozamiz.

Bu yerda (2) masala yechimining chegaraviy μ shartlar va f o‘ng tomon orqali bahosi ko‘rsatiladi. Bu baho yordamida masalaning turg‘unligi ko‘rsatiladi va

$$h_1 \to 0, \mathrm{h}_2 \to 0$$

$$\|y-u\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |y(x) - u(x)|$$

normaning nolga intilishi ko‘rsatiladi. Shu bilan ayirmali masalaning yaqinlashishi ko‘rsatiladi. (2) masalani (6) ko‘rinishda yozib, $y(x)$ yechimni $y(x) = \tilde{y}(x) + \bar{y}(x)$ yig‘indi shaklida tasvirlaymiz.

Bu yerda $\tilde{y}$ (x)

$$Ly(x) = 0,\ \mathrm{x}\in\omega,\ \tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{x}) = \mu(\mathrm{x}),\ \mathrm{x}\in\gamma \qquad (7)$$

bir jinsli tenglama va bir jinslimas chegaraviy shartli tenglama yechimi, $\bar{y}$ (x) esa

$$L\bar{y}(x) = F(x),\ \mathrm{x}\in\omega,\ \bar{\mathrm{y}}(\mathrm{x}) = 0,\ \mathrm{x}\in\gamma \qquad (8)$$

bir jinslimas tenglama va bir jinsli chegaraviy masala yechimlarini belgilaydilar. (6)- tenglama uchun maksimum prinsipining barcha shartlari bajariladi. Shu sababli barcha oldingi natijalardan foydalanish mumkin. Xususiy xolda (7) masalaga 3 natijani qo‘llab

$$\|\tilde{y}\|_{C(\Omega)} \le \|\mu\|_{C(\Omega)}, \qquad (9)$$

bu yerda

$$\|\tilde{y}\|_{C(\Omega)} = \max_{x\in\Omega} |\tilde{y}(x)|, \|\mu\|_{C(\gamma)} = \max_{x\in\gamma} |\mu(x)|$$

bahoni hosil qilamiz.

2. O‘ng tomonga nisbatan turg‘unlik.

Faqat oldingi ma’ruzadagi II qism natijalaridan foydalanib (8) bir jinslimas tenglama yechimini baholab bo‘lmaydi. Ammo (8)- tenglama yechimi uchun majorantni tuzib, undan so‘ng taqqoslash teoremasini qo‘llash mumkin. Buning uchun

$$Y(x)=K\left(l_1^2+l_2^2-x_1^2-x_2^2\right) \qquad (10)$$

bu yerda $K>0$, l_1 va l_2 G to‘rtburchak tomonlarining uzunligi, funksiyani qaraymiz.

$$Y(x)\geq 0,\ \mathrm{x}\in\Omega$$

ekanligi ravshan.

$$D(x)=A(x)-\sum_{\xi\in ш`(\backslash x)} B(x,\xi)$$

qilib belgilab

$$LY(x)=D(x)Y(x)+\sum_{\xi\in ш`(x)} B(x,\xi)(Y(x)-Y(\xi))$$

ifodani (10)-funksiya uchun ixtiyoriy $x\in\omega$ uchun xisoblaymiz. Qurilganga asosan

$$LY(x)=-Y_{\tilde{x}_1x_1}-Y_{\tilde{x}_2x_2}$$

ekanligini qayd qilamiz.

Undan tashqari (10) funksiya uchun

$$Y_{\tilde{x}_1x_1}=\frac{\partial^2 Y}{\partial x_1^2}=-2K$$

$$Y_{\tilde{x}_2x_2}=\frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2}=-2K$$

tengliklar o‘rinli. Shunday qilib, $L(x)Y(x)=4K$. $Y(x)$ funksiyani

$$LY(x)=\overline{F}(x),\quad \mathrm{x}\in\omega,\quad \mathrm{Y(x)}=\overline{\mu}(x),\ \mathrm{x}\in\gamma \qquad (11)$$

Bu yerda $\overline{F}(x)=4K$ va $\overline{\mu}(x)\geq 0$- (10) funksiyaning x$\in\gamma$ dagi qiymati, chegaraviy masalaning yechimi deb qarash mumkin.

Agar

$$K=\frac{1}{4}\|F\|_{C(\omega)}$$

deb olsak (8), (11) masalalar uchun taqqoslash teoremasining barcha shartlari bajariladi. Taqqoslash teoremasidan

$$\|\overline{y}\|_{C(\Omega)}\leq\max_{x\in\Omega} Y(x)\leq K\left(l_1^2+l_2^2\right)$$

Bundan K uchun tanlangan qiymatni xisobga olib

$$\|\overline{y}\|_{c(\Omega)}\leq\frac{l_1^2+l_2^2}{4}\|F\|_{C(\omega)} \qquad (12)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. (9), (12) baholardan va uchburchak tengsizligidan (2) - tenglama yechimi uchun

$$\begin{aligned}\|y\|_{C(\Omega)}&=\|\overline{y}+\tilde{y}\|_{C(\Omega)}\leq\|\overline{y}\|_{C(\Omega)}+\|\tilde{y}\|_{C(\Omega)}\leq\\ &\leq k\left(l_1^2+l_2^2\right)+\|\mu\|_{C(\omega)}=\frac{l_1^2+l_2^2}{4}\|F\|_{C(\omega)}+\|\mu\|_{C(\gamma)}\end{aligned} \qquad (13)$$

baho kelib chiqadi.

(13) bahodagi konstantalar h_1 va h_2 ga bog‘liq bo‘lmaganliklari uchun bu baho ayirmali sxemaning o‘ng tomon va chegaraviy shartlarga nisbatan turg‘un ekanligini ko‘rsatadi.

Shuning bilan (2) - masalaning to‘la korrektligini (turg‘unlik va birdan bir yechimga ega bo‘lishlik) ko‘rsatildi. Endi ayirmali sxema xatoligini baholash va yaqinlashishni tadqiq etishga o‘tamiz.

$z_{i,j} = y_{i,j} - u\left(x_{1,i}\ , x_{2,j}\right),\ \ y_{i,j} = z_{i,j} + u_{i,j}$ ni (2) tenglamaga qo‘yib

$$\begin{cases} z_{\bar{x}_1 x_1, ij} + \tilde{z}_{x_2 x_2, ij} = -\Psi_{ij},\ x_{ij} \in \omega \\ \bar{z}_{ij} = 0,\ x_{ij} \in \gamma \end{cases} \qquad (14)$$

tenglamani qanoatlantirishini payqaymiz. Bu yerda $\psi_{ij} = u_{\bar{x}_1 x_1, ij} + u_{x_2 x_2, ij} + f_{ij}$ (1) masala yechimidagi approksimatsiya xatoligidir.

Agar $u\left(x_1, x_2\right)$ yechimning to‘rtinchi tartibli hosilalari chekli bo‘lsa, unda approksimatsiya xatoligi $h = \left(h_1^2 + h_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ga nisbatan ikkinchi tartibli kichik miqdor bo‘ladi. YA’ni h_1^2 va h_2^2 - ga bog‘liq bo‘lmagan shunday M_1 mavjudki

$$\|\psi\|_{C(\Omega)} \le M_1\left(h_1^2 + h_2^2\right) \qquad (15)$$

tengsizlik bajariladi.

(14) tenglama (2) ayirmali sxemadan faqat o‘ng tomoni bilan va chegaraviy shartlari bilan farq qiladi.

Shu sababli (14) masala yechimi uchun (13)- baho o‘rinli bo‘ladi, ya’ni

$$\|\bar{z}\|_{C(\Omega)} \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{4}\|\psi\|_{C(\omega)}$$

Bundan va (15) - dan

$$\|\bar{z}\|_{C(\Omega)} \le M_2\left(h_1^2 + h_2^2\right) \qquad (16)$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu yerda $M_2 = 0{,}25M_1$ ($l_1^2 + l_2^2$) - h_1 va h_2 ga bog‘liq bo‘lmagan doimiy son. (16)- bahodan (2)- sxemaning yaqinlashishi va yaqinlashishi tartibining ikkiga tengligi kelib chiqadi.

Nazorat savollar:

1. Puacson tenglamasi uchun Dirixle masalasida 2-tartib bilan approksimatsiyalaydigan ayirmali sxema quring?
2. Ayirmali sxemaning o‘ng tomonga nisbatan, chegaraviy shartlarga nisbatan turg‘unlik ta’riflarini keltiring?
3. Ayirmali masala qachon korrekt qo‘yilgan deyiladi?
4. Ayirmali sxema xatoligini baholang?
5. Ayirmali sxema yechimini o‘ng tomon va chegaraviy funksiya orqali baholang?

Adabiyotlar:

1. Samarskiy A.A, Gulin A.V. Chislenniye metodi M. Nauka 1989
2. George A. Anastassiou and Iuliana F. Iatan. Intelligent Routines. Solving Mathematical Analysis with Matlab,Mathcad, Mathematica and Maple. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013- 592r.
3. Brain R.Hunt, Ronald I.Lipsman, Jonatahan M.Rosenberg. A Gulde to MATLAB for Beginners and Experienced Users. Cambridge University Press.2008.

4. V.A. Oxorzin Prikladnaya matematika v sisteme MATHCAD: Uchebnoye posobiye. –SPb.: “Lan”.2008.-352s.
5. V.P Dyakonov. Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii-M.:SOLON-Press. 2006.-720s.
6. V.P Dyakonov. Mathematica 5/6/7. Polnoye rukovodstvo. - M.: DMK Press, 2010. - 624 s.:
7. MATHCAD User's Guide with Reference Manual.MathSoft Engineering&Education,Inc. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.-513p.
8. Maple User Manual. Maplesoft, Waterloo Maple Inc. 2012.-458p.

4 – ma’ruza. Giperbolik va parabolik turdagi tenglamalarini to‘r usuli bilan yechish.

Reja:

1. Giperbolik turdagi tenglamlarni to‘r usuli bilan yechish
2. Parabolik turdagi tenglamalarini to‘r usuli bilan yechish.

Tayanch so‘zlar: Giperbola, parabola, oshkor sxema, ayirmali sxema, oshkormas sxemalar

1. Masalaning qo‘yilishi.

Quyidagi doimiy koyeffitsentli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani qaraymiz.{ 0<x<1, 0<t<T } sohada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (1)$$

tenglamaning

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (2)$$

boshlang‘ich shartini va

$$u(0,t) = \mu_1(t), u(1,t) = \mu(t) \qquad (3)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimlarni topish talab qilinadi. (1)-(3)-tenglamaning yechimi ba’zi bir silliqlik shartlari bajarilganda mavjudligi va yagonaligi ma’lum. Ayirmali sxemalarni tadqiq etishda yechimning x va t bo‘yicha istalgancha silliq deb faraz qilamiz.

(1), (3)-tenglama yechimi maksimum prinsipini qanoatlantiradi. Shuning uchun u boshlang‘ich va chegaraviy shartlariga uzluksiz bog‘liq.

2. Oshkor sxema.

Ayirmali sxemani qurish uchun, hamma vaqt erkin o‘zgaruvchilar sohasida to‘rni aniqlab shablonni, ya’ni differensial ifodani ayirmali sxemaga almashtirishda qatnashadigan nuqtalar to‘plamini belgilab olish kerak. x bo‘yicha h qadam bo‘yicha

$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0,1,...,N, Nh = 1\}$,

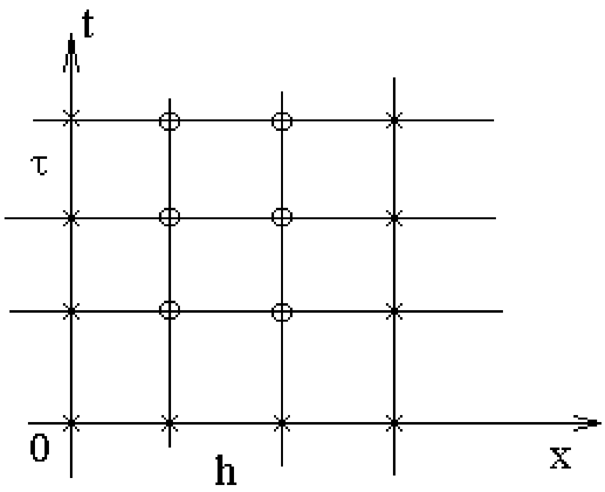
t o‘zgaruvchi bo‘yicha τ kadami bilan

$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,...,K, K_\tau = T\}$

turlarni aniqlaymiz.

$(x_i, t_n), i = 0,1,...,N, n = 0,1,...,K$

Nuqtalar $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$ to‘rning turg‘un nuqtalarini tashkil qiladilar. (1-shaklga qarang)



1-shakl. $\omega_{h,\tau}$ to‘ri.

$$I_0 = \{0 \le x \le 1, t = 0\},$$
$$I_1 = \{x = 0, 0 \le t \le T\},$$
$$I_2 = \{x = 1, 0 \le t \le T\},$$

$\omega_{h,\tau}$ to‘rning chegaraviy nuqtalari deb aytiladi.1-shakldа chegaraviy tugun nuqtalar chillikchalar bilan ichki nuqtalar esa doirachalar bilan belgilanadi.

Vaqt koordinatalari bir-biriga teng bo‘lgan to‘rning tugun nuqtalari katalm deb aytiladi.

Masalan n -qadam deb $(x_0, t_n), (x_1, t_n), ..., (x_N, t_n)$

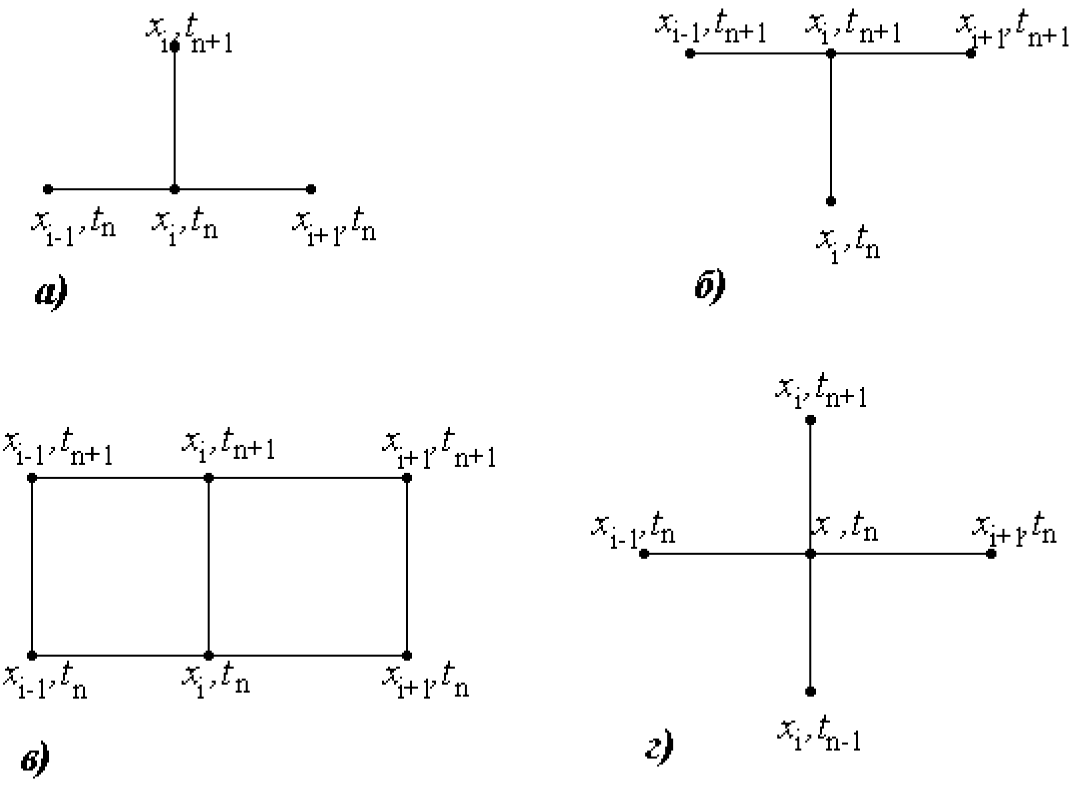
tugun nuqtalar to‘plamiga aytiladi. $\omega_{h,\tau}$ to‘rda aniqlangan $y(x, t)$ funksiya uchun

$$y_i^n = y(x_n, t_i), y_{t,i}^n = \frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau}, y_{\bar{x}x.i}^n = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} \quad (4)$$

belgilashlarni qabul qilamiz.

Ayrim hollarda soddalik uchun i va n indekslarni tashlab

$y_t = y_{t,i}^n, y_{\bar{x}x} = y_{\bar{x}x,i}^n$ belgilarni ishlatamiz.



2-shakl. Ayirmali sxemalar qoliplari:

a) oshkor sxema
b) sof oshkormas sxema
v) simmetrik sxema
g) uch qatlamli sxema

(1)-tenglamani (x_i, t_n) nuqtada approksimatsiya qilish uchun $(x_{i\pm1}, t_n), (x_i, t_n), (x_i, t_{n+3})$ to‘rtta nuqtadan iborat 2)-shakl, a) tasvirlangan qolipni qaraymiz. (x_i, t_n) nuqtada $\frac{\partial u}{\partial t}$ hosilani $y_{t,i}^n$ ayirmali ifoda bilan, $\frac{d^2u}{d^2x}$ ikkinchi ayirmali hosila $y_{\bar{x}x}^n$ bilan almashtiramiz. $f(x,t)$ o‘ng tomonni taqribiy φ_i^n bilan almashtiramiz, φ_i^n sifatida quyidagi ifodalardan birini olish mumkin:

$$f(x_i, t_n), \frac{1}{\mathrm{h}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x, t\xi)\,dx,$$

$$\frac{1}{h\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \left[\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x,t)\,dx \right].$$

natijada

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \varphi_i^n$$

ayirmali tenglamani hosil qilamiz.

Agar $\varphi_i^n - f(x_i, t_n), \tau$ bo‘yicha birinchi tartibli cheksiz kichik mikdor h

Bo‘yicha ikkinchi tartibli cheksiz kichik mikdorlar bo‘lsa, approksimatsiya tartibi ham xuddi shunday bo‘ladi, ya’ni τ bo‘yicha birinchi h bo‘yicha ikkinchi tartibli kichik miqdor bo‘ladi.

Ayirmali sxema deyilganda asosiy diferensial tenglamani ichki nuqtalarda approksimatsiya qiladigan ayirmali tenglamalar oilasiga va chegara nuqtalarda esa chegaraviy shartlarni approksimatsiya qiladigan ayirmali tenglamalar oilasiga aytiladi.

Hozirgi holda ayirmali sxema

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \varphi_i^n, i = 1,2,..., N-1,$$

$$n = 0,1,\dots,K-1, hN = 1, k\tau = T, y_0^n = \mu_1(t_n), y_N^n = \mu_2(t_n), n = 0,1,\dots,K, \quad (6)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), i = 0,1,\dots,N$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu sxema noma’lumlar soni tenglamalar soniga teng bo‘lag n chizikli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat. Bu sistemani qatlamlar bo‘yicha yechish lozim.

Nol qatlamdagi yechim

$$y_i^0 = u_0(x_i), i = 0,1,\dots,N$$

boshlang‘ich shart orqali aniqlanadi.

Agar y_i^n, $i = 0,1,\Lambda\ ,N$, n-qatlamda allaqachon aniqlangan bo‘lsa,

$$y_i^{n+1}, y_i^{n+1} = y_i^n + \tau(y_{\bar{x}x,i}^n + \varphi_i^n), i = 1,2,\dots,N-1, \quad (7)$$

oshkor formula yordamida topiladi.

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{t_{n+1}}), y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$$

qiymatlar chegaraviy shartlar orqali aniqlandilar. Shu sababli (6)-sxema oshkor deb aytiladi.(6)-sxema xatoligi $z_i^n = y_i^n - u(x^i, t_n)$ ayirma orqali aniqlanadi.

(6)-ga $y_i^n = z_i^n - u(x_i, t_n)$ ni qo‘yib xatolik uchun

$$\frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \frac{z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}}{h^2} + \psi_i^n,$$

$$i = 1,2,..., N-1, n = 0,1,..., K-1, hN = 1, k\tau = T, \quad (8)$$

$$z_0^n = z_N^n = 0, n = 1,2,\dots,K, z_i^0 = 0, i = 0,1,\dots,N,$$

bunda $\psi_i^n = -u_{t,i}^n + u_{\bar{x}x,i}^n + \varphi_i^n$ (6) -ayirmali sxemaning (1)-(3)-tenglama yechimidagi approksimatsiya xatoligi, $\psi_i^n = o(\tau + h^2)$. (8)-tenglama yechimi z_i^n ni ψ_i^n orqali baholab (6) sxemani τ bo‘yicha birinchi tartibli h -bo‘yicha ikkinchi tartibli yaqinlashishini ko‘rsatish mumkin. Buni biz keyinroq amalga oshiramiz.

Bu yerda biz (6)-sxema misolida doimiy koyefitsentli tenglamalar uchun ayirmali sxemalarni tadqiq etishning keng tarqalgan metodi bo‘lgan garmonikalar metodi yordamida yaqinlashish va turg‘unlikning zaruriy shartlarini keltirib chiqaramiz. (6)-sxemaning $\tau \le 0{,}5h^2$ shart bajarilganda qo‘llash mumkinligini ko‘rsatamiz.

Buning uchun

$$\frac{y_j^{n+1}-y_j^n}{\tau}=\frac{y_{j+1}^n-2y_j^n+y_{j-1}^n}{h^2} \quad (9)$$

(5)-ga mos bir jinsli tenglamani qaraymiz.

(9)-tenglamaning hususiy yechimlarini

$$y_j^n(\varphi)=q^n\lambda^{ijh\varphi} \quad (10)$$

ko‘rinishda qidiramiz.

Bu yerda i-mavhum birlik φ-ixtiyoriy haqiqiy son, q aniqlash zarur bo‘lgan doimiy son. (10)-ni (9)-ga qo‘yib va $\lambda^{ijh\varphi}$ -ga qisqartirib

$$\frac{q-1}{\tau}=\frac{\lambda^{ijh\varphi}-2+\lambda^{-ih\varphi}}{h^2} \quad (11)$$

munosobatni hosil qilamiz, bundan

$$q=1-4\gamma\sin^2\frac{h\varphi}{2},\gamma=\frac{\tau}{h^2}$$

hosil bo‘ladi.

(10)-yechimlarga mos boshlang‘ich shartlar $y_j^0(\varphi)=\lambda^{ijh\varphi}$ chegaralangan.

Agar q modul bo‘yicha 1 dan katta bo‘lsa,unda (10)-yechim $n\to\infty$ usadi. Bu holda (9)-ayirmali sxema turg‘un emas deb aytiladi, chunki bu holda yechimning boshlang‘ich shartlarga uzluksiz bog‘liklik sharti buziladi.

Agar $|q|\le 1$ bo‘lsa, barcha haqiqiy τ-lar uchun, (10)-ko‘rinishli yechimlar ixtiyoriy n-uchun chegaralangan bo‘ladi. Unda (9)-ayirmali sxema turg‘un deyiladi.

(6)-masala turg‘unmas bo‘lgan holda uning yechimini (7)-formula bo‘yicha topish mumkin bo‘lmaydi, chunki hisoblashning boshida yo‘l qo‘yilgan xatolik (masalan, yaxlitlash xatoligi) chegarasiz o‘sib boradi.

(9)-tenglama uchun $|q|\le 1$ tengsizlik $\gamma=0{,}5$ ulgandagina va fakat shundagina barcha φ - lar uchun bajariladi. Shunday qilib (6)-sxemadan $\tau\le 0{,}5h^2$ bo‘lganda foydalanish mumkin bo‘ladi. Vaqt va fazoviy koordinatalar bo‘yicha qadamlar nisbatiga qo‘yiladigan shartlarda turg‘un bo‘lgan sxemalar shartli turg‘un sxema deb aytiladi. Shuning uchun (6)-sxema shartli turg‘un bo‘lib, turg‘unlik sharti $\frac{\tau}{h^2}\le 0{,}5$ ko‘rinishdadir.

Shartli turg‘un sxemalar parabolik tenglamalar uchun kam qo‘yiladi, chunki ular vaqt bo‘yicha qadamga katta shart qo‘yadilar. Haqiqatdan ham, faraz qilamiz, masalan $h=10^{-2}$ bo‘lsin. Unda $\tau\le 0{,}5h^2$ bo‘lishi kerak. y_i^n hisoblash uchun vaqt bo‘yicha qadamlar soni $n=\tau^{-1}\ge 2\times 10^4$ bo‘lishi kerak. Keyingi punktlarda, bu kamchilikdan holi bo‘lgan oshkormas metodlar haqida so‘z boradi. Ular ixtiyoriy h va τ uchun turg‘undirlar. Bunday sxemalar absolyut turg‘un deb aytiladi.

3.Oshkormas sxemalar.

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun sof oshkormas sxema deb,

$$(x_i,t_n),(x_{i\pm1},t_{n+1}),(x_i,t_{n+1})$$

qolipdan foydalanadigan ayirmali sxemaga aytiladi. (2-shakl)

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{y_{i+1}^{n+1}-2y_i^{n+1}+y_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\varphi_i^n,\ i=1,2,...,N-1, n=0,1,...,K-1$$

$$y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}), n=0,1,...,K-1, y_i^0=u_0(x_i), i=0,1,...,N \quad (12)$$

Bundan

$$\phi_i^n=f(x_i,t_n)+O(\tau+h^2)$$

bo‘lganda Sxema τ bo‘yicha birinchi tartibli h bo‘yicha esa ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega. (12)-sistema yechimi oshkor sxemadagi kabi $n=1$ dan boshlab qatlamma-qatlam topiladi. Ammo oshkor sxemadan farqli ma’lum y_i^n orqali y_i^{n+1} topish uchun

$$\begin{aligned}&\gamma y_{i+1}^{n+1}-(1+2\gamma)y_i^{n+1}+\gamma y_{i-1}^{n+1}=-F_i^n, i=1,2,...,N-1,\\&y_0^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}),\end{aligned} \quad (13)$$

bu yerda $\gamma=\frac{\tau}{h^2}, F_i^n=y_i^n+\tau\varphi_i^n$, tenglamalar sistemasini yechish kerak.

Bu sistemani progonka metodi yordamida yechish mumkin, chunki progonka metodining shartlari bajarilgan. (12)-ayirmali sxemaning turg‘unligini tadqiq qilish uchun

$$\frac{y_j^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{y_{j+1}^{n+1}-2y_j^{n+1}+y_{j-1}^{n+1}}{h^2}$$

ayirmali sxemaning (10) –ko‘rinishdagi hususiy yechimlarni qidiramiz.

$$q=(1+4\gamma\ \sin^2\frac{h\varphi}{2})^{-1}, \gamma=\frac{\tau}{h^2},$$

munosabatni hosil qilamiz. Bundan $|q|\le 1$ barcha $\varphi, h-$ uchun bajariladi. Shu sababli (12)-sxema absolyut turg‘un, ekanligi ma’lum bo‘ldi. Absolyut turg‘unlik, oshkormas sxemalarning asosiy afzalligi hisoblanadi.

To‘rning τ va h qadamlar qiymati turg‘unlikni ta’minlash uchun emas, balki aniqlik zaruriyatidan kelib chiqgan holda aniqlanadi.

Olti nuqtali simmetrik sxema deb

$$\frac{y_i^{n+1}-y_1^n}{\tau}=\frac{1}{2}(y_{\bar{x}x,i}^{n+1}+y_{\bar{x}x,i}^n)+\varphi_i^n \quad (14)$$

ayirmali sxemaga aytiladi. Bu ayirmali sxemaning boshlang‘ich va chegaraviy shartlari (12)-sxema kabidir. Agar $\varphi_i^n=f(x_i,t_n+0{,}5\tau)+o(\tau^2+h^2)$ bo‘lsa bu sxema τ va h bo‘yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega. Bu sxema absolyut turg‘un va uni progonka metodi yordamida yechish mumkin.

Yuqorida qaralgan uchta metodning umumiysi bir parametrli sxemalar oilasidan iborat.

Ixtiyoriy haqiqiy σ uchun

$$\begin{aligned}&\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\sigma y_{\bar{x}x,i}^{n+1}+(1-\sigma)y_{\bar{x}x,i}^n+\varphi_i^n,\\&i=1,2,...,N-1, n=0,1,...,K-1,\\&y_o^{n+1}=\mu_1(t_{n+1}), y_N^{n+1}=\mu_2(t_{n+1}), n=0,1,...,k-1,\\&y_i^0=u_0(x_i), i=0,1,...,N\end{aligned} \quad (15)$$

sxemani qaraymiz.

Bundan $\sigma=0$ bo‘lganda oshkor sxema, $\sigma=1$ sof oshkormas sxema, $\sigma=\frac{1}{2}$ bo‘lganda simmetrik sxema hosil bo‘ladi.

(15)-sxema (1)-(3) masala yechimidagi approksimatsiya xatoligini tadqiq qilamiz. (15)-masala yechimini $y_i^n=u(x_i,t_n)+z_i^n$ ko‘rinishda tasvirlaymiz, bunda $u(x_i,t_n)$ (1)-(3)-masalaning aniq yechimi. Unda xatolik uchun

$$
\begin{aligned}
&\frac{z_i^{n+1}}{\tau}=\sigma\, z_{\bar{x}x,i}^{n+1}+(1-\sigma)z_{\bar{x}x,i}^{n}+\psi_i^n,\\
&i=1,2,...,N-1, n=0,1,...,K-1, \qquad\qquad (16)\\
&z_0^{n+1}=z_N^{n+1}=0, n=0,1,...,K-1, z_i^0=0, i=0,1,...,N-1,
\end{aligned}
$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. (16)-dagi ψ_i^n to‘r funksiyasi

$$\psi_i^n=\sigma u_{\bar{x}x,i}^{n+1}+(1-\sigma)u_{\bar{x}x,i}^{n}-u_{t,i}^{n}+\varphi_i^n,\ (17)$$

kabi aniqlanadi va (15)-sxemaning (1)-(3)-masala yechimidagi approksimatsiya xatoligi deb aytiladi.

ψ_i^n dagi barcha funksiyalarni $(x_i,t_n+0,5\tau)$ nuqta atrofida Teylor formulasi bo‘yicha yoyamiz.

$$u_{t,i}^n=\frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n)}{\tau}=$$

$$=\frac{u(x_i,t_n+0,5\tau)+\dot{u}(x_i,t_n+0,5\tau)(+0,5\tau)}{\tau}+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\ddot{u}(x_i,t_n+0,5\tau)\frac{\tau^2}{4}+\frac{1}{6}\dddot{u}(x_i,t_n+0,5\tau+\theta\cdot\tau)\frac{(\tau)^3}{8}}{\tau}-$$

$$-\frac{u(x_i,t_n+0,5\tau)-\dot{u}(x_i,t_n+0,5\tau)\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}\ddot{u}(x_i,t_n+0,5\tau)\frac{\tau^2}{4}}{\tau}-$$

$$-\frac{-\frac{1}{6}\dddot{u}(x_i,t_n+0,5\tau+\theta\cdot\tau)\frac{\tau^3}{8}}{\tau}=\dot{u}(x_i,t_n+0,5\tau)+O(\tau^2),$$

$$u_{\bar{x}x,i}=\frac{u(x_{i+1})-2u(x_i)+u(x_{i-1})}{h^2}=\frac{u(x_i)+u'(x_i)h+\frac{1}{2}u''(x_i)h^2}{h^2}+$$

$$+\frac{\frac{1}{6}u'''(x_i)h^3+\frac{1}{12}u^4(x_i+\theta\cdot h)h^4}{h^2}+$$

$$+\frac{u(x_i)-u'(x_i)h+\frac{1}{2}u''(x_i)h^2-\frac{1}{6}u'''(x_i)h^3+\frac{1}{24}u^{IV}(x_i+\theta' h)h^4}{h^2}=u''(x_i)+\frac{h^2}{12}u^{IV}(x_i)+O(h^4).$$

bu yerda

$$u'=\frac{du}{dt},\ u''=\frac{d^2u}{dx^2}$$

Bu yoyilmalarni inobatga olsak

$$\psi_i^n=\sigma\left[u''(x_i,t_{n+1})+\tfrac{h^2}{12}u^{IV}(x_i,t_{n+1})\right]+(1-\sigma)\left[u''(x_i,t_n)+\tfrac{h^2}{12}u^{IV}(x_it_n)\right]-$$

$$-\dot u(x_i,t_n+0{,}5\tau)+\phi_i^n+O(\tau^2)+O(h^4)$$

hosil bo‘ladi.

$$u''(x_i,t_{n+1})=u''(x_i,t_n+0{,}5\tau)+\dot u''(x_i,t_n+0{,}5\tau)\frac{\tau}{2}+O(\tau^2);$$

$$u''(x_i,t_n)=u''(x_i,t_n+0{,}5\tau)-\frac{\tau}{2}\dot u''(x_i,t_n+0{,}5\tau)+O(\tau^2)+O(h^4)$$

yoyilmalardan foydalansak

$$\psi_i^n=\sigma\left[u''(x_i,t_n+0{,}5\tau)+\dot u''(x_i,t_n+0{,}5\tau)\frac{\tau}{2}+O(\tau^2)+\frac{h^2}{12}u^{IV}(x_i,t_{n+1})\right]+$$

$$+(1-\sigma)\left[u''(x_i,t_n+0{,}5\tau)-\frac{\tau}{2}\dot u''(x_it_n+0{,}5\tau)+O(\tau^2)+\frac{h^2}{12}u^{IV}(x_i,t_n)\right]-$$

$$-\dot u(x_i,t_n+0{,}5\tau)+\varphi_i^n+O(\tau^2)+O(h^4)\quad,$$

ya’ni

$$\psi_i^n=(u''-\dot u+\varphi_i^n)+(\sigma-0{,}5)\tau\dot u''+\frac{h^2}{12}u^{IV}+O(\tau^2+h^4)$$

tenglikga ega bo‘lamiz.

(1)-tenglama $u''-\dot u=-f$ va undan kelib chiqadigan $u^{IV}-\dot u''=-f''$ tengliklarni inobatga olsak

$$\psi_i^n=\left[(\sigma-0{,}5)\tau+\frac{h^2}{12}\right]\dot u''+\varphi_i^n-f(x_i,t_n+0{,}5\tau-\frac{h^2}{12}f''(x_i,t_n+0{,}5\tau)+O(\tau^2+h^4)\quad(18)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Agar

$$\varphi_i^n=f(x_i,t_n+0{,}5\tau)+\frac{h^2}{12}f''(x_i,t_n+0{,}5\tau)+O(\tau^2+h^4),\sigma=\sigma_*=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau}$$

bo‘lsa, $\psi_i^n=O(\tau^2+h^4)$ bo‘ladi. Bunday sxema yukori tartibli approksimatsiya deb aytiladi.

Agar $\sigma=0{,}5$ bo‘lib, $\varphi_i^n=f(x_i,t_n+0{,}5\tau)+O(\tau^2+h^2)$ bo‘lsa, unda (15)-sxema τ va h bo‘yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyalaydi. σ -ning boshqa qiymatlarida va $\varphi_i^n=f(x_i,t_{n+1})+O(\tau+h^2)$ bo‘lganda (15)-sxema τ bo‘yicha birinchi va h bo‘yicha ikkinchi approksimatsiya tartibiga ega. Agar (15)-tenglamaning $\varphi_i^n=0$ bo‘lganda (10)-ko‘rinishdagi yechimlarni qidirsak

$$q=\frac{1-4\gamma(1-\sigma)\sin^2\frac{h\varphi}{2}}{1+4\gamma\sigma\sin^2\frac{h\varphi}{2}}\qquad(19)$$

yega bo‘lamiz.

Agar $\sigma\geq\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4\tau}$ bo‘lsa, barcha φ-lar uchun $|q|\leq1$ bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki $\sigma\geq0{,}5$ bo‘lganda barcha sxemalar absolyut turg‘un bo‘ladilar. Eng yuqori tartibli approksimatsiyaga ega bo‘lgan sxema ham absolyut turg‘undir. $\sigma\neq0$ bo‘lganda (15)-ayirmali sxema oshkormas sxema bo‘ladi. y_i^n bo‘yicha y_i^{n+1} ni topish uchun

$$\begin{aligned} &\sigma\gamma y_{i+1}^{n+1} - (1 + +2\sigma\gamma) - y_i^{n+1} + \sigma\gamma y_{i-1}^{n+1} = -Fi^n, i = 1,2,...,N, \\ &y_0^{n+1} = \mu(t_{n+1}),\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \end{aligned} \qquad (20)$$

bunda $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$,

$$F_i^n = y_i^n + (1-\sigma)\tau y_{\bar{x}x,i}^n + \tau\varphi_i^n$$

tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. (20)-sistema progonka metodi yordamida yechiladi. $\sigma \neq 0$ bo‘lganda progonka metodining turg‘unlik sharti

$$|1 + 2\sigma\gamma| \geq 2|\sigma|\gamma$$

tengsizlikka olib kelinadi. Bu u $\sigma \geq \gamma\frac{1}{(4\gamma)}$ bo‘lganda bajariladi. Oxirgi tenglik (19)-dan kelib chiqadi.

Nazorat savollar:

1. Olti nuqtali simmetrik sxema ko‘rinishini yozing?
2. Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi uchun sof oshkormas sxema qanday ayirmali sxemaga aytiladi?
3. Ayirmali sxemaning o‘ng tomonga nisbatan, chegaraviy shartlarga nisbatan turg‘unlik ta’riflarini keltiring?
4. Ayirmali masala qachon korrekt quyilgan deyiladi?
5. Oshkormas sxemalar xatoligini baholang?

Adabiyotlar:

1. Samarskiy A.A, Gulin A.V. Chislenniye metodi M. Nauka 1989
2. George A. Anastassiou and Iuliana F. Iatan. Intelligent Routines. Solving Mathematical Analysis with Matlab,Mathcad, Mathematica and Maple. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013- 592r.
3. Brain R.Hunt, Ronald I.Lipsman, Jonatahan M.Rosenberg. A Gulde to MATLAB for Beginners and Experienced Users. Cambridge University Press. 2008.
4. V.A. Oxorzin Prikladnaya matematika v sisteme MATHCAD: Uchebnoye posobiye. –SPb.: “Lan”.2008.-352s.
5. V.P Dyakonov. Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii-M.:SOLON-Pressyu2006.-720s.
6. V.P Dyakonov. Mathematica 5/6/7. Polnoye rukovodstvo. - M.: DMK Press, 2010. - 624 s.:
7. MATHCAD User's Guide with Reference Manual.MathSoft Engineering&Education,Inc. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.-513p.
8. Maple User Manual. Maplesoft, Waterloo Maple Inc. 2012.-458p.

IV. AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg‘ulot

Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligiga misollar

Ishdan maqsad: Maple, Mathematica, Mathcad, MatLab tizimlarda Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligiga tekshirish.

Masalaning qo‘yilishi: Oddiy differensial tenglamalarni yechishda ko‘p qadamli chekli ayirmali usullar, ularning yaqinlashish va turg‘unligiga tekshirish.

Uchinchi tartibli Runge-Kutta metodi. Soddalik uchun bitta tenglama uchun

$$\frac{d}{dt}u = f(t,u), t > 0$$

$$u(0) = u_0$$

Koshi masalasini qaraymiz. Masalan tenglama o‘ng tomoni sifatida

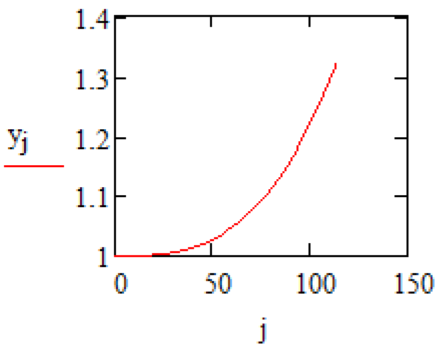
$f(t,u) := t^2$ funksiyani va boshlang‘ich shart sifatida $u_0 := 1$ olishimiz mumkin. Odatda sonli metod yordamida Koshi masalasini chekli soxada yechishadi. Shu sababli biz ham faraz qilamiz tenglama 0<t<T sohada yechiladi. Soddalik uchun $T := 1$ deb olamiz. Eyler metodida [0,T] kesmani n bo‘lakga bo‘lishadi (masalan $n := 115$). Natijada $\tau := \frac{T}{n}$ qadamli $i := 0,1..n$

tartibga ega bo‘lgan $t_i := i\cdot\tau$ tugun nuqtalar olishimiz mumkin. Odatda sonli metod yordamida Koshi masalasini chekli sohada yechishadi. Shu sababli biz ham faraz qilamiz tenglama shartdan foydalanib $y_0 := u_0$

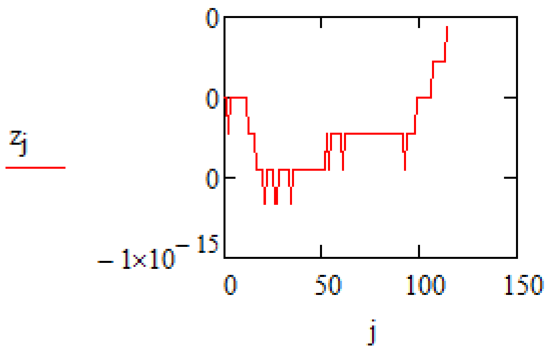
topiladi. So‘ngra $j := 0,1..n-1$ deb olib

$$k1(x1,x2) := f(x1,x2)$$
$$k2(x1,x2) := f(x1 + 0.5\cdot\tau , x2 + 0.5\cdot\tau\cdot k1(x1,x2))$$
$$k3(x1,x2) := f(x1 + 0.5\cdot\tau , x2 + 0.5\cdot\tau\cdot k2(x1,x2))$$
$$k4(x1,x2) := f(x1 + \tau , x2 + \tau\cdot k1(x1,x2) - 2\cdot\tau\cdot k2(x1,x2) + 2\cdot\tau\cdot k3(x1,x2))$$
$$y_{j+1} := y_j + \tau\cdot\frac{k1(t_j,y_j) + 4\cdot k3(t_j,y_j) + k4(t_j,y_j)}{6}$$

rekurrent formulalar orqali $y_1, y_2 .. y_n$ lar topiladi. Topilgan grafigi quyidagicha



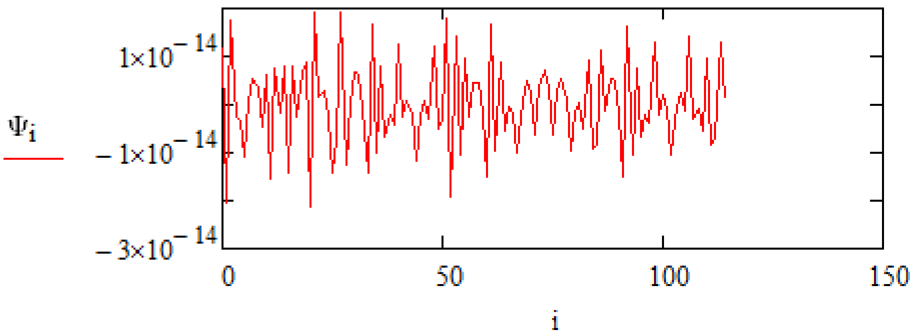
Dastlabki Koshi masalasining aniq yechimi $v(t) := \frac{t^3}{3} + 1$ bo‘lishini ko‘rish mumkin. Xatolik funksiyasi esa $z_j := y_j - v(t_j)$ formula yordamida hisoblanadi. Uning grafigi quyidagicha bo‘ladi:



Approksimatsiya xatoligi $i := 0, 1 .. n-1$

$$\Psi_i := -\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{\tau} + \frac{k1(t_i, v(t_i)) + 4\cdot k3(t_i, v(t_i)) + k4(t_i, v(t_i))}{6}$$

formula yordamida hisoblanib uning grafigi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:



Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1	$y' = x + y^2,\ \ y(0) = 0,5$	16	$y' = x^2 + 0,2xy,\ \ y(0) = 0,6$
2	$y' = 2x + 0,1y^2,\ \ y(0) = 0,2$	17	$y' = 3x^2 + 0,1xy,\ \ y(0) = 0,2$
3	$y' = 2x + y^2,\ \ y(0) = 0,3$	18	$y' = x^2 + 3xy,\ \ y(0) = 0,3$

4	$y' = x^2 + xy,\ \ y(0) = 0,2$	19	$y' = x^2 + 0,1y^2,\ \ y(0) = 0,7$
5	$y' = 0,2x + y^2,\ \ y(0) = 0,1$	20	$y' = 2x^2 + 3y^2,\ \ y(0) = 0,2$
6	$y' = x^2 + y,\ \ y(0) = 0,4$	21	$y' = 0,2x^2 + y^2,\ \ y(0) = 0,8$
7	$y' = x^2 + 2y,\ \ y(0) = 0,1$	22	$y' = 0,3x^2 + 0,1y^2,\ \ y(0) = 0,3$
8	$y' = xy + y^2,\ \ y(0) = 0,6$	23	$y' = xy + 0,1y^2,\ \ y(0) = 0,5$
9	$y' = x^2 + y^2,\ \ y(0) = 0,7$	24	$y' = 0,2xy + y^2,\ \ y(0) = 0,4$
10	$y' = x^2 + 0,2y^2,\ \ y(0) = 0,2$	25	$y' = 0,1xy + 0,3y^2,\ \ y(0) = 0,2$
11	$y' = 0,3x + y^2,\ \ y(0) = 0,4$	26	$y' = 0,3xy + y^2,\ \ y(0) = 0,6$
12	$y' = 0,1x + 0,2y^2,\ \ y(0) = 0,3$	27	$y' = xy + 0,2y^2,\ \ y(0) = 0,7$
13	$y' = x + 0,3y^2,\ \ y(0) = 0,3$	28	$y' = 0,1x^2 + 2y^2,\ \ y(0) = 0,2$
14	$y' = 2x^2 + xy,\ \ y(0) = 0,5$	29	$y' = 3x + 0,1y^2,\ \ y(0) = 0,4$
15	$y' = 0,1x^2 + 2xy,\ \ y(0) = 0,8$	30	$y' = 0,2x + 3y^2,\ \ y(0) = 0,2$

2-amaliy mashg‘ulot

Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullar yordamida yechish. Haydash usuli, differensial haydash usuli

Ishdan maqsad: Maple, Mathematica, Mathcad, MatLab tizimlarda Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullar yordamida yechish. Haydash va differensial haydash usullari orqali yechish.

Masalaning qo‘yilishi: Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullar yordamida yechish. Haydash va differensial haydash usullari orqali yechish.

Chegaraviy masalalarni sonli yechish usullari

Misol. (Ayirmali metod).

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) - p(x)\cdot u(x) = f(x) \qquad a \le x \le b$$

$$u(a) = A \qquad u(b) = B$$

chegaraviy masalani sonli yechish talab qilingan bo‘lsin. Bu yerda p(x), f(x) funksiyalar berilgan va ular [a,b] oralikda uzluksiz, A, B - o‘zgarmas sonlar. Masalan

$$p(x) := 1 \qquad f(x) := 2 - x^2 \qquad A := 0 \qquad B := 1 \qquad a := 0 \qquad b := 1$$

deb olamiz. U xolda anik yechim $u(x) := x^2$ buladi. Shu maksadda [a,b] oralikni $n := 10$ bo‘lakga $h := \frac{b-a}{n}$ qadam bilan bo‘lib $i := 0,1..n$ tartib bilan $x_i := i\cdot h$ tugun nuqtalarni hosil qilamiz. Ayirmali metod chegaraviy masalani

$$\left[y_{i-1} - \left(2 + h^2\cdot p_i\right)\cdot y_i\right] + y_{i+1} = h^2\cdot f \qquad 1 \le i \le n$$

$$y_0 := A \qquad y_n := B$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bilan almashtiradi. Bu algebraik tenglamalar sistemasini haydash usuli bilan yechib taqribiy yechimni topamiz

To‘g‘ri haydash

$$\alpha_1 := 0 \qquad \beta_1 := A$$

$$j := 1,2..n-1$$

$$\alpha_{j+1} := \frac{1}{\left(2 + h^2\cdot p(x_j)\right) - \alpha_j}$$

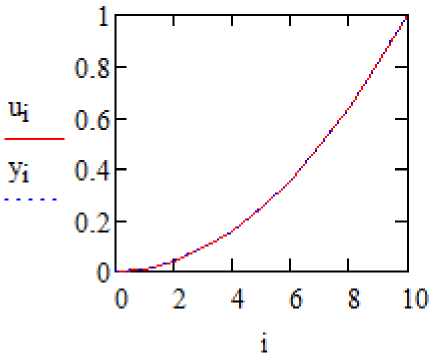
Teskari haydash

$$\beta_{j+1} := \frac{\beta_j - h^2 \cdot f(x_j)}{\left(2 + h^2 \cdot p(x_j)\right) - \alpha_j}$$

$$k := n-1, n-2..0$$

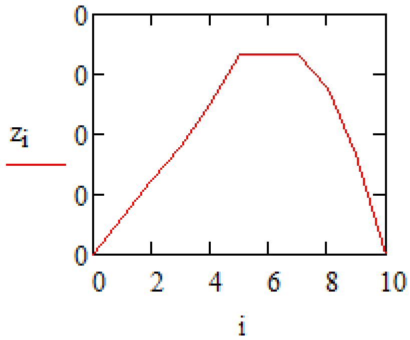
$$y_k := \alpha_{k+1} \cdot y_{k+1} + \beta_{k+1}$$

Aniq yechimni x_i tugun nuqtalarda $u_i := (x_i)^2$ formula yordamida hisoblab taqribiy yechim bilan solishtiramiz



Rasm 1. Aniq yechim va taqribiy yechim grafiklari.

Taqribiy yechimning aniq yechimga intilishini (yaqinlashish) kuzatish uchun $z_i := y_i - u_i$ xatolik funksiyasi grafigiga murojaat qilamiz.



Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1 $$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = x$$
$$\begin{cases} y(0,7) = 0,5 \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1,2 \end{cases}$$

2 $$y'' - xy' + 2y = x + 1$$
$$\begin{cases} y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 2 \\ y(1,2) = 1 \end{cases}$$

16 $$y'' + 2xy' - 2y = 0,6$$
$$\begin{cases} y'(2) = 1 \\ 0,4y(2,3) - y'(2,3) = 1 \end{cases}$$

17 $$y'' + \frac{y'}{x} - 0,4y = 2x$$
$$\begin{cases} y(0,6) - 0,3y'(0,6) = 0,6 \\ y'(0,9) = 1,7 \end{cases}$$

3 $y'' + xy' + y = x + 1$

$\begin{cases} y(0,5) + 2y'(0,5) = 1 \\ y'(0,8) = 1,2 \end{cases}$

4 $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = 3$

$\begin{cases} y(0,5) = 2 \\ 0,5y(0,5) - y'(0,5) = 1 \end{cases}$

5 $y'' + 2y' - xy = x^2$

$\begin{cases} y'(0,6) = 0,7 \\ y(0,9) - 0,5y'(0,9) = 1 \end{cases}$

6 $y'' - y' + \frac{2y}{x} = x + 0,4$

$\begin{cases} y(1,1) - 0,5y'(1,1) = 2 \\ y'(1,4) = 4 \end{cases}$

7 $y'' - 3y' + \frac{y}{x} = 1$

$\begin{cases} y(0,4) = 2 \\ y(0,7) + 2y'(0,7) = 0,7 \end{cases}$

8 $y'' + 3y' - \frac{y}{x} = 1$

$\begin{cases} y'(1,2) = 1 \\ 2y(1,5) - y'(1,5) = 0,5 \end{cases}$

9 $y'' - \frac{y'}{2} + 3y = 2x^2$

$\begin{cases} y(1) + 2y'(1) = 0,6 \\ y(1,3) = 1 \end{cases}$

10 $y'' + 1,5y' - xy = 0,5$

$\begin{cases} 2y(1,3) - y'(1,3) = 1 \\ y(1,6) = 3 \end{cases}$

11 $y'' + 2xy' - y = 0,4$

$\begin{cases} 2y(0,3) + y'(0,3) = 1 \\ y'(0,6) = 2 \end{cases}$

12 $y'' - 0,5xy' + y = 2$

$\begin{cases} y(0,4) = 1,2 \\ y(0,4) + 2y'(0,7) = 1,4 \end{cases}$

13 $y'' + \frac{2y'}{x} - 3y = 2$

$\begin{cases} y'(0,8) = 1,5 \\ 2y(1,1) + y'(1,1) = 3 \end{cases}$

18 $y'' + \frac{y'}{2x} + 0,8y = x$

$\begin{cases} y(1,7) + 1,2y'(1,7) = 2 \\ y'(2) = 1 \end{cases}$

19 $y'' - \frac{y'}{3} + xy = 2$

$\begin{cases} y(0,8) = 1,6 \\ 3y(1,1) - 0,5y'(1,1) = 1 \end{cases}$

20 $y'' + 0,8y' - xy = 1,4$

$\begin{cases} y(1,8) = 0,5 \\ 2y(2,1) + y'(2,1) = 1,7 \end{cases}$

21 $y'' + 2y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$

$\begin{cases} 0,5y(0,9) + y'(0,9) = 1 \\ y(1,2) = 0,8 \end{cases}$

22 $y'' - \frac{y'}{4} + \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}$

$\begin{cases} 1,5y(1,3) - y'(1,3) = 0,6 \\ 2y(1,6) = 0,3 \end{cases}$

23 $y'' - 0,5y' + 0,5xy = 2x$

$\begin{cases} y'(1) = 0,5 \\ 2y(1,3) - y'(1,3) = 2 \end{cases}$

24 $y'' + 2y' - 1,5xy = \frac{2}{x}$

$\begin{cases} y'(0,8) = 1 \\ y(1,1) + 2y'(1,1) = 1 \end{cases}$

25 $y'' + 2xy' - 1,5 = x$

$\begin{cases} 1,4y(1,1) + 0,5y'(1,1) = 2 \\ y'(1,4) = 2,5 \end{cases}$

26 $y'' - \frac{xy'}{2} + 0,5y = 2x$

$\begin{cases} 0,4y(0,2) - y'(0,2) = 1,5 \\ y'(0,5) = 0,4 \end{cases}$

27 $y'' + 0,6xy' - 2y = 1$

$\begin{cases} y(1,5) = 0,6 \\ 2y(1,8) - 0,8y'(1,8) = 3 \end{cases}$

28 $y'' + \frac{y'}{2x} - y = \frac{2}{x}$

$\begin{cases} y(0,6) = 1,3 \\ 0,5y(0,9) - 1,2y'(0,9) = 1 \end{cases}$

14	$y'' + 2x^2 y' + y = x$ $\begin{cases} 2y(0,5) - y'(0,5) = 1 \\ y(0,8) = 3 \end{cases}$	29	$y'' - 0,5x^2 y' + 2y = x^2$ $\begin{cases} y(1,6) + 0,7y'(1,6) = 2 \\ y(1,9) = 0,8 \end{cases}$
15	$y'' - 3xy' + 2y = 1,5$ $\begin{cases} y'(0,7) = 1,3 \\ 0,5y(1) + y'(1) = 2 \end{cases}$	30	$y'' - xy' + 2xy = 0,8$ $\begin{cases} y(1,2) - 0,5y'(1,2) = 1 \\ y'(1,5) = 2 \end{cases}$

3-amaliy mashg'ulot

Xususiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalani yechishda sonli usullardan foydalanish. Elliptik turdagi differensial tenglamalarni ayirmali tenglamalar bilan approksimatsiya qilish

Ishdan maqsad: Maple, Mathematica, Mathcad, MatLab tizimlarda Xususiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalani yechishda sonli usullardan foydalanish. Elliptik turdagi differensial tenglamalarni ayirmali tenglamalar bilan approksimatsiya qilish.

Masalaning qo‘yilishi: Xususiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalani yechishda sonli usullardan foydalanish. Elliptik turdagi differensial tenglamalarni ayirmali tenglamalar bilan approksimatsiya qilish.

Chekli ayirmali sxemalar. Ayirmali approksimatsiY.

Misol(Laplas operatorining ayirmali approksimatsiyasi)

Faraz kilamiz D:= {(x,y) : $a \le x \le b \quad c \le y \le d$} soxada u=f(x,y) funksiyasi berilgan bo‘lsin. Laplas operatorining ayirmali approksimatsiyasini qurish va uning xatoligini hisoblash talab qilingan bo‘lsin. Shu maqsadda misol sifatida $a := 0 \quad b := 1 \quad c := 0 \quad d := 1$ deb olib D sohani x - yo‘nalishi bo‘yicha $n := 10$ bo‘lakga $hx := \frac{b-a}{n}$ qadam bilan va y - yo‘nalishi bo‘yicha $m := 10$ bo‘lakga $hy := \frac{b-a}{m}$ qadam bilan bo‘lib

$x := a, a+hx..b \quad y := c, c+hy..d$ tugun nuqtalarni hosil qilamiz. Funksiya misoli sifatida $u(x,y) := \sin\left[\left(x^2+y^2\right)\cdot 10\right]$ funksiyani olamiz. Laplas operatoridagi ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni ayirmali munosabatlar bilan almashtirib approksimatsiya xatoligi funksiyalari qiymatlarini barcha tugun nuqtalarda hisoblaymiz.

$$Rx(x,\ y) := \frac{u(x+hx,y)-2\cdot u(x,y)+u(x-hx,y)}{hx^2}-\frac{d^2}{dx^2}u(x,y)$$

$$Ry(x,y) := \frac{u(x,y+hy)-2\cdot u(x,y)+u(x,y-hy)}{hx^2}-\frac{d^2}{dy^2}u(x,y)$$

$$R(x,y) := Rx(x,y)+Ry(x,y)$$

$$i := 1,2..n-1 \quad j := 1,2..m-1 \quad S_{i,j} := R(i\cdot hx,\ j\cdot hy)$$

$$\max(S) = 136.593$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

ABCD kvadratda $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ Laplas tenglamasiga qo‘yilgan Dirixle masalsini yeching. A(0;0), B(0;1),C(1;1),D(1;0) va h=0,25;

Variant nomeri	$u\|_{AB}$	$u\|_{BC}$	$u\|_{CD}$	$u\|_{AD}$
1	$30y$	$30(1-x^2)$	0	0
2	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$30x^2$
3	$50y(1-y^2)$	0	0	$50\sin\pi x$
4	$20y$	20	$20y^2$	$50x(1-x)$
5	0	$50x(1-x)$	$50y(1-y^2)$	$50x(1-x)$
6	$30\sin\pi y$	$30x$	$30y$	$30x(1-x)$
7	$30(1-y)$	$30\sqrt{x}$	$30y$	$30(1-x)$
8	$50\sin\pi y$	$50\sqrt{x}$	$50y^2$	$50\sin\pi x$

9	$40y^2$	40	40	$40\sin\frac{\pi x}{2}$
10	$50y^2$	$50(1-x)$	0	$60x(1-x^2)$
11	$20y^2$	20	$20y$	$10x(1-x)$
12	$40\sqrt{y}$	$40(1-x)$	$20y(1-y)$	0
13	$20\cos\frac{\pi y}{2}$	$30x(1-x)$	$30y(1-y^2)$	$20(1-x^2)$
14	$30y^2(1-y)$	$50\sin\pi x$	0	$10x^2(1-x)$
15	$20y$	$20(1-x^2)$	$30\sqrt{y}(1-y)$	0
16	$30(1-y^2)$	$30x$	30	30
17	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$30x^2$	$30y$	$30\cos\frac{\pi x}{2}$
18	0	$50\sin\pi x$	$50y(1-y^2)$	0
19	$20\sqrt{y}$	20	$20y^2$	$40x(1-x)$
20	$50y(1-y)$	$20x^2(1-x^2)$	0	$40x(1-x^2)$
21	$20\sin\pi y$	$30x$	$30y^2$	$20x(1-x)$
22	$40(1-y)$	$30\sqrt{x}$	$30y$	$40(1-x)$
23	$20\sin\pi y$	$50\sqrt{x}$	$50y^2$	$20\sin\pi x$
24	40	40	$40y^2$	$40\sin\frac{\pi}{2}(1-x)$
25	$30y^2$	$30(1-x)$	0	$40x^2(1-x)$
26	$25y^2$	25	$25y$	$20x(1-x)$
27	$15\sqrt{y}$	$15(1-x)$	$30y(1-y)$	0
28	$30\cos\frac{\pi y}{2}$	$20x(1-x)$	$20y(1-y^2)$	$30(1-x^2)$
29	$10y^2(1-y)$	$30\sin\pi x$	0	$15x(1-x^2)$
30	$15y$	$25(1-x^2)$	$30\sqrt{y}(1-y)$	0

4-amaliy mashg‘ulot

Chegaraviy shartlarni approksimatsiya qilish. To‘r tenglamalar sistemasini yechish. To‘r tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullar

Ishdan maqsad: Maple, Mathematica, Mathcad, MatLab tizimlarda Chegaraviy shartlarni approksimatsiya qilish. To‘r tenglamalar sistemasini yechish. To‘r tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullar.

Masalaning qo‘yilishi: Chegaraviy shartlarni approksimatsiya qilish. To‘r tenglamalar sistemasini yechish. To‘r tenglamalar sistemasini yechishda iteratsion usullar.

$\{0<x<l,\ 0<t<T\}$ sohada $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$

Issiqlik utkazish tenglamasini qanoatlantiruvchi va t=0 da

$u(x,o) = u0(x)\ \ 0 \le x \le 1$

hamda x=0 va x=*l* da

$u(0,t) = \mu 1(t)$ va $u(1,t) = \mu 2(t)$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi u(x,t) funksiya topilsin. Aniqlik uchun $l := 1$ $T := 1$ $f(x,t) := -1$ $u0(x) := x^2$ $\mu 1(t) := t$ $\mu 2(t) := t + 1^2$ deb olamiz. Oshkor sxemani qurish maqsadida sohani x- yo‘nalishi bo‘yicha $N := 5$ bo‘lakga bo‘lib tugun nuqtalarni $h := \dfrac{1}{N}$ $i := 0..N$ $x_i := i \cdot h$ hisoblaymiz. Oshkor sxema shartli turg‘un bo‘lganligi sababli $r := 0.5\ \ (r < 0.5)$ turg‘unlik koeffitsiyentini kiritamiz. Unda t- yo‘nalishi bo‘yicha bo‘linish qadami $\tau := r \cdot h^2$ formula yordamida hisoblanadi va bo‘lakchalar soni $K := \mathrm{ceil}\left(\dfrac{T}{\tau}\right)$ orqali, tugun nuqtalar $n := 0..K$ $t_n := n \cdot \tau$ formulalar yordamida hisoblanadi. Ushbu tugun nuqtalarda aniq yechim $u_{i,n} := t_n + (x_i)^2$ yordamida hisoblanadi. Oshkor sxemada taqribiy yechim qatlam bo‘yicha topiladi.

```
y := | for i ∈ 0..N
     |   y[i,0] ← u0(x[i])
     | for n ∈ 0..K
     |   | y[0,n] ← μ1(t[n])
     |   | y[N,n] ← μ2(t[n])
     | for n ∈ 0..K − 1
     |   | a ← r
     |   | c ← 1 + 2·r
     |   | b ← r
     |   | α[1] ← 0
     |   | β[1] ← μ1(t[n+1])
     |   | for j ∈ 1..N − 1
     |   |   | α[j+1] ← b / (c − α[j]·a)
     |   |   | β[j+1] ← (a·β[j] + y[j,n] + τ·f(x[j], t[n+1])) / (c − α[j]·a)
     |   | y[N,n+1] ← μ2(t[n+1])
     |   | for j ∈ N − 1..1
     |   |   y[j,n+1] ← α[j+1]·y[j+1,n+1] + β[j+1]
     | y
```

Oshkor sxema xatoligi $z := y - u$ yordamida va approksimatsiya xatoligi

$i := 1..N-1 \qquad n := 0..K-1$

$$\psi_{i,n} := \frac{u_{i,n} - u_{i,n+1}}{\tau} + \frac{u_{i+1,n+1} - 2\cdot u_{i,n+1} + u_{i-1,n+1}}{h^2} + f(x_i,$$

yordamida hisoblanadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

$G = \{0 < x < 0,6; 0 < t < 0,01\}$ sohada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = f(x), u(0,t) = \varphi(t),\ u(0,6,t) = \psi(t)$$

Differensial masalani to‘r metodi bilan $h = 0,1,\ \alpha = \frac{1}{6}$ bo‘lganda oshkor sxemadan foydalanib yeching.

№ 1. $u(x,0)=\cos 2x$, $u(0,t)=1-6t$, $u(0{,}6,t)=0{,}3624$.

№ 2. $u(x,0)=x(x+1)$, $u(0,t)=0$, $u(0{,}6,t)=2t+0{,}96$.

№ 3. $u(x,0)=1{,}2+\lg(x+0{,}4)$, $u(0,t)=0{,}8+t$, $u(0{,}6,t)=1{,}2$.

№ 4. $u(x,0)=\sin 2x$, $u(0,t)=2t$, $u(0{,}6,t)=0{,}932$.

№ 5. $u(x,0)=3x(2-x)$, $u(0,t)=0$, $u(0{,}6,t)=t+2{,}52$.

№ 6. $u(x,0)=1-\lg(x+0{,}4)$, $u(0,t)=1{,}4$, $u(0{,}6,t)=t+1$.

№ 7. $u(x,0)=\sin(0{,}55x+0{,}03)$, $u(0,t)=t+0{,}03$, $u(0{,}6,t)=0{,}354$.

№ 8. $u(x,0)=2x(1-x)+0{,}2$, $u(0,t)=0{,}2$, $u(0{,}6,t)=t+0{,}68$.

№ 9. $u(x,0)=\sin x+0{,}08$, $u(0,t)=0{,}08+2t$, $u(0{,}6,t)=0{,}6446$.

№ 10. $u(x,0)=\cos(2x+0{,}19)$, $u(0,t)=0{,}932$, $u(0{,}6,t)=0{,}1798$.

№ 11. $u(x,0)=2x(x+0{,}2)+0{,}4$, $u(0,t)=2t+0{,}4$, $u(0{,}6,t)=1{,}36$.

№ 12. $u(x,0)=\lg(x+0{,}26)+1$, $u(0,t)=0{,}415+t$, $u(0{,}6,t)=0{,}9345$.

№ 13. $u(x,0)=\sin(x+0{,}45)$, $u(0,t)=0{,}435-2t$, $u(0{,}6,t)=0{,}8674$.

№ 14. $u(x,0)=0{,}3+x(x+0{,}4)$, $u(0,t)=0{,}3$, $u(0{,}6,t)=6t+0{,}9$.

№ 15. $u(x,0)=(x-0{,}2)(x+1)+0{,}2$, $u(0,t)=6t$, $u(0{,}6,t)=0{,}84$.

№ 16. $u(x,0)=x(0{,}3+2x)$, $u(0,t)=0$, $u(0{,}6,t)=6t+0{,}9$.

№ 17. $u(x,0)=\sin(x+0,48)$, $u(0,t)=0,4618$, $u(0,6,t)=3t+0,882$.

№ 18. $u(x,0)=\sin(x+0,02)$, $u(0,t)=3t+0,02$, $u(0,6,t)=0,581$.

№ 19. $u(x,0)=\cos(x+0,48)$, $u(0,t)=6t+0,887$, $u(0,6,t)=0,4713$.

№ 20. $u(x,0)=\lg(2,63-x)$, $u(0,t)=3(0,14-t)$, $u(0,6,t)=0,3075$.

№ 21. $u(x,0)=1,5-x(1-x)$, $u(0,t)=3(0,5-t)$, $u(0,6,t)=1,26$.

№ 22. $u(x,0)=\cos(x+0,845)$, $u(0,t)=6(t+0,11)$, $u(0,6,t)=0,1205$.

№ 23. $u(x,0)=\lg(2,42+x)$, $u(0,t)=0,3838$, $u(0,6,t)=6(0,08-t)$.

№ 24. $u(x,0)=0,6+x(0,8-x)$, $u(0,t)=0,6$, $u(0,6,t)=3(0,24+t)$.

№ 25. $u(x,0)=\cos(x+0,66)$, $u(0,t)=3t+0,79$, $u(0,6,t)=0,3058$.

№ 26. $u(x,0)=\lg(1,43+2x)$, $u(0,t)=0,1553$, $u(0,6,t)=3(t+0,14)$.

№ 27. $u(x,0)=0,9+2x(1-x)$, $u(0,t)=3(0,3-2t)$, $u(0,6,t)=1,38$.

№ 28. $u(x,0)=\lg(1,95+x)$, $u(0,t)=0,29-6t$, $u(0,6,t)=0,4065$.

№ 29. $u(x,0)=2\cos(x+0,55)$, $u(0,t)=1,705$, $u(0,6,t)=0,817+3t$.

№ 30. $u(x,0)=x(1-x)+0,2$, $u(0,t)=0,2$, $u(0,6,t)=2(t+0,22)$.

5-amaliy mashg‘ulot

Giperbolik va parabolik turdagi tenglamalarni to‘r usuli bilan yechish. Oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar

Ishdan maqsad: Maple, Mathematica, Mathcad, MatLab tizimlarda Giperbolik va parabolik turdagi tenglamalarni to‘r usuli bilan yechish. Oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar.

Masalaning qo‘yilishi: Giperbolik va parabolik turdagi tenglamalarni to‘r usuli bilan yechish. Oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar.

{0<x<l, 0<t<T} sohada $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$

issiqlik o‘tkazish tenglamasini qanoatlantiruvchi va t=0 da

$u(x,o) = u0(x) \quad 0 \le x \le 1$

hamda x=0 va x=l da

$u(0,t) = \mu 1(t) \quad u(1,t) = \mu 2(t)$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi u(x,t) funksiya topilsin. Anilik uchun $l := 1$ $T := 1$ $f(x,t) := -1$ $u0(x) := x^2$ $\mu 1(t) := t$ $\mu 2(t) := t + 1^2$ deb olamiz. Oshkor sxemani qurish maqsadida sohani x- yo‘nalishi bo‘yicha $N := 5$ bo‘lakga bo‘lib tugun nuqtalarni $h := \frac{1}{N}$ $i := 0..N$ $x_i := i \cdot h$ hisoblaymiz. Oshkor sxema shartli turg‘un bo‘lganligi sababli $r := 0.5$ $(r < 0.5)$ turg‘unlik koeffitsiyentini kiritamiz. Unda t- yo‘nalishi bo‘yicha bo‘linish qadami $\tau := r \cdot h^2$ formula yordamida xisoblanadi va bo‘lakchalar soni $K := \mathrm{ceil}\left(\frac{T}{\tau}\right)$ orqali, tugun nuqtalar $n := 0..K$ $t_n := n \cdot \tau$ formulalar yordamida hisoblanadi. Ushbu tugun nuqtalarda aniq yechim $u_{i,n} := t_n + (x_i)^2$ yordamida hisoblanadi. Oshkor sxemada taqribiy yechim qatlam bo‘yicha topiladi.

```
y := | for i ∈ 0 .. N
     |   y[i,0] ← u0(x[i])
     | for n ∈ 0 .. K
     |   | y[0,n] ← μ1(t[n])
     |   | y[N,n] ← μ2(t[n])
     | for n ∈ 0 .. K − 1
     |   | a ← r
     |   | c ← 1 + 2·r
     |   | b ← r
     |   | α[1] ← 0
     |   | β[1] ← μ1(t[n+1])
     |   | for j ∈ 1 .. N − 1
     |   |   | α[j+1] ← b / (c − α[j]·a)
     |   |   | β[j+1] ← (a·β[j] + y[j,n] + τ·f(x[j], t[n+1])) / (c − α[j]·a)
     |   | y[N,n+1] ← μ2(t[n+1])
     |   | for j ∈ N − 1 .. 1
     |   |   y[j,n+1] ← α[j+1]·y[j+1,n+1] + β[j+1]
     | y
```

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

$G = \{0 \le x \le 1;\ \ 0 < t < 0{,}5\}$ sohada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0) = f(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \Phi(x), u(0,t) = \varphi(t),\ u(1,t) = \psi(t)$$

Differensial masalani to‘r metodi bilan $h = l = 1$ bo‘lganda oshkor sxemadan foydalanib yeching.

№ 1. $f(x) = x(x+1),\ \Phi(x) = \cos x,\ \varphi(t) = 0,\ \psi(t) = 2(t+1)$.

№ 2. $f(x) = x\cos\pi x,\ \Phi(x) = x(2-x),\ \varphi(t) = 2t,\ \psi(t) = -1$.

№ 3. $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2},\ \Phi(x) = x^2,\ \varphi(t) = 1+2t,\ \psi(t) = 0$.

№ 4. $f(x)=(x+0,5)(x-1),\ \Phi(x)=\sin(x+0,2),\ \varphi(t)=t-0,5,\ \psi(t)=3t$.

№ 5. $f(x)=2x(x+1)+0,3,\ \Phi(x)=2\sin x,\ \varphi(t)=0,3,\ \psi(t)=4,3+t$.

№ 6. $f(x)=(x+0,2)\sin\frac{\pi x}{2},\ \Phi(x)=1+x^2,\ \varphi(t)=0,\ \psi(t)=1,2(t+1)$.

№ 7. $f(x)=x\sin\pi x,\ \Phi(x)=(x+1)^2,\ \varphi(t)=2t,\ \psi(t)=0$.

№ 8. $f(x)=3x(1-x),\ \Phi(x)=\cos(x+0,5),\ \varphi(t)=2t,\ \psi(t)=0$.

№ 9. $f(x)=x(2x-0,5),\ \Phi(x)=\cos 2x,\ \varphi(t)=t^2,\ \psi(t)=1,5$.

№ 10. $f(x)=(x+1)\sin\pi x,\ \Phi(x)=x^2+x,\ \varphi(t)=0,\ \psi(t)=0,5t$.

№ 11. $f(x)=(1-x)\cos\frac{\pi x}{2},\ \Phi(x)=2x+1,\ \varphi(t)=2t+1,\ \psi(t)=0$.

№ 12. $f(x)=0,5x(x+1),\ \Phi(x)=x\cos x,\ \varphi(t)=2t^2,\ \psi(t)=1$.

№ 13. $f(x)=0,5(x^2+1),\ \Phi(x)=x\sin 2x,\ \varphi(t)=0,5+3t,\ \psi(t)=1$.

№ 14. $f(x)=(x+1)\sin\frac{\pi x}{2},\ \Phi(x)=1-x^2,\ \varphi(t)=0,5t,\ \psi(t)=2$.

№ 15. $f(x)=x^2\cos\pi x,\ \Phi(x)=x^2(x+1),\ \varphi(t)=0,5t,\ \psi(t)=t-1$.

№ 16. $f(x)=(1-x^2)\cos\pi x,\ \Phi(x)=2x+0,6,\ \varphi(t)=1+0,4t,\ \psi(t)\quad 0$.

№ 17. $f(x)=(x+0,5)^2,\ \Phi(x)=(x+1)\sin x,\ \varphi(t)=0,5(0,5+t),\ \psi(t)=2,25$.

№ 18. $f(x)=1,2x-x^2,\ \Phi(x)=(x+0,6)\sin x,\ \varphi(t)=0,\ \psi(t)=0,2+0,5t$.

№ 19. $f(x)=(x+0,5)(x+1),\ \Phi(x)=\cos(x+0,3),\ \varphi(t)=0,5,\ \psi(t)=3-2t$.

№ 20. $f(x)=0,5(x+1)^2,\ \Phi(x)=(x+0,5)\cos\pi x,\ \varphi(t)=0,5,\ \psi(t)=2-3t$.

№ 21. $f(x)=(x+0,4)\sin\pi x,\ \Phi(x)=(x+1)^2,\ \varphi(t)=0,5t,\ \psi(t)=0$.

№ 22. $f(x)=(2-x)\sin\pi x,\ \Phi(x)=(x+0,6)^2,\ \varphi(t)=0,5t,\ \psi(t)=0$.

№ 23. $f(x)=x\cos\frac{\pi x}{2},\ \Phi(x)=2x^2,\ \varphi(t)=0,\ \psi(t)=t^2$.

№ 24. $f(x)=(x+0,4)\cos\frac{\pi x}{2}$, $\Phi(x)=0,3(x^2+1)$, $\varphi(t)=0,4$, $\psi(t)=1,2t$.

№ 25. $f(x)=(1-x^2)+x$, $\Phi(x)=2\sin(x+0,4)$, $\varphi(t)=1$, $\psi(t)=(t+1)^2$.

№ 26. $f(x)=0,4(x+0,5)^2$, $\Phi(x)=x\sin(x+0,6)$, $\varphi(t)=0,1+0,5t$, $\psi(t)=0,9$.

№ 27. $f(x)=(x+0,5)^2\cos\pi x$, $\Phi(x)=(x+0,7)^2$, $\varphi(t)=0,5$, $\psi(t)=2t-1,5$.

№ 28. $f(x)=(x+2)(0,5x+1)$, $\Phi(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,

$\varphi(t)=2$, $\psi(t)=4,5-3t$.

№ 29. $f(x)=(x^2+1)(1-x)$, $\Phi(x)=1-\sin x$, $\varphi(t)=1$, $\psi(t)=0,5t$.

№ 30. $f(x)=(x+0,2)\sin\frac{\pi x}{2}$, $\Phi(x)=1+x^2$, $\varphi(t)=0,6t$, $\psi(t)=1,2$.

6-amaliy mashg‘ulot

Absolyut va shartli turg‘un ayirmali sxemalar

Ishdan maqsad: Maple, Mathematica, Mathcad, MatLab tizimlarda Absolyut va shartli turg‘un ayirmali sxemalar bilan ishlash.

Masalaning qo‘yilishi: Absolyut va shartli turg‘un ayirmali sxemalar bilan yechish.

$\{0 \le x \le l,\quad 0 \le t \le T\}$ sohada $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ tenglamani qanoatlantiruvchi va $t = 0$ da $u(x,0) = u0(x)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = u1(x)$, $0 \le x \le l$, hamda $x = 0$ va $x = l$ $u(0,t) = \mu 1(t)$, $u(l,t) = \mu 2(t)$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiya topilsin. Aniqlik uchun T=1, $l = 1$ $u0(x) = x^2$, $f(x,t) = -1$, $\mu 1(t) = t$, $\mu 2(t) = t + 1$ deb olamiz. Oshkor sxemani qurish maqsadida sohani yo‘nalishida $N = 10$ ta bo‘lakka bo‘lib, tugun nuqtalarni $h = \frac{1}{N}$, $i = 0\,.\,N$, $x_i = i$ hisoblaymiz. Oshkormas sxema shartli turg‘un bo‘lganligi sababli r turg‘unlik koeffitsiyentini kiritamiz. Unda yo‘nalish bo‘yicha bo‘linish qadami $\tau = r h^2$ formula bilan topiladi va bo‘lakchalar soni $K = ceil\left(\frac{T}{\tau}\right)$ orqali, tugun nuqtalarni $n = 0\,.\,K$, $t_n = n\tau$ kabi hisoblaymiz. Ushbu tugun nuqtalarda aniq yechim $u_{i,n} = t_n + x_i^2$ formula yordamida topiladi. Oshkor sxemada taqribiy yechim qatlam bo‘yicha topiladi.

```
y := | for i ∈ 1..N − 1
     |    | y[i,0] ← u0(x[i])
     |    | y[i,1] ← y[i,0] + τ·u1(x[i]) + (τ^2/2)·(u0(x[i+1]) − 2·u0(x[i]) + u0(x[i−1]))/h^2
     | for n ∈ 0..K
     |    | y[0,n] ← μ1(t[n])
     |    | y[N,n] ← μ2(t[n])
     | for n ∈ 1..K − 1
     |    for i ∈ 1..N − 1
     |       y[i,n+1] ← (y[i,n]·2 − y[i,n−1]) + r^2·(y[i+1,n] − 2·y[i,n] + y[i−1,n])
     | y
```

Oshkor sxema xatoligi $z = y -$ yordamida va approksimatsiya xatoligi $i := 1..N-1 \quad n := 0..K-1 \qquad \psi_{i,n} = \frac{u_{i,n-1} - 2u_{i,n} + u_{i,n+1}}{\tau^2} - \frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{h^2}$ yordamida topiladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$ tenglamaning $0 \le t \le 0.5$, $0 \le x \le 1$ tekislikdagi yechimi $h = 0.1$ qadam bilan topilsin. Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar quyida berilgan:

№1. $u(x,0) = (1.2x^2 + 1.1) \cdot \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

№2. $u(x,0) = (1.1x^2 + 1) \cdot \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 1$.

№3. $u(x,0) = (1.3x^2 + 1.1) \cdot \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

№4. $u(x,0) = (1.4x^2 + 1.1) \cdot \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

№5. $u(x,0) = (1.5x^2 + 1.1) \cdot \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

№6. $h = l = 0.1$ kvadrat to‘rda $u(x,0) = (1.5x^2 + 1.2) \cdot \sin \pi x$, $u_t(x,0) = 0.1x$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$.

№7. $h = l = 0.1$ kvadrat to‘rda $u(x,0) = (1.5x^2 + 0.9) \cdot e^{-x}$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 2.4e^{-1}$.

№8. $u(x,0) = (x+1) \cdot x$, $u_t(x,0) = \cos x$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 2(t+1)$.

№9. $u(x,0) = x^2 - 0.5x - 0.5$, $u_t(x,0) = \sin(x + 0.2)$, $u(0,t) = t - 0.5$, $u(l,t) = 3t$.

№10. $u(x,0) = -3x^2 + 3x$, $u_t(x,0) = \cos(x + 0.5)$, $u(0,t) = 2t$, $u(l,t) = 0$.

№11. $u(x,0) = 0.5 \cdot (x^2 + 1)$, $u_t(x,0) = x \sin 2x$, $u(0,t) = 0.5 + 3t$, $u(l,t) = 1$.

№12. $u(x,0) = x \cdot \cos \pi x$, $u_t(x,0) = (x+1)^2$, $u(0,t) = 2t$, $u(l,t) = 0$.

№13. $u(x,0) = (x+1) \cdot \sin \pi x$, $u_t(x,0) = x^2 + x$, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0.5t$.

№14. $u(x,0) = 0.5x \cdot (x+1)$, $u_t(x,0) = x \sin x$, $u(0,t) = 2t^2$, $u(l,t) = 1$.

№15. $u(x,0) = (x+1) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $u_t(x,0) = 1 - x^2$, $u(0,t) = 0.5t$, $u(l,t) = 2$.

№16. $u(x,0)=(1-x^2)\cdot\sin\pi x$, $u_t(x,0)=2x+0.8$, $u(0,t)=1+0.5t$, $u(l,t)=0$.

№17. $u(x,0)=(x+0.5)^2$, $u_t(x,0)=(x+1)\cdot\cos x$, $u(0,t)=0.5\cdot(0.5+t)$, $u(l,t)=3$.

№18. $u(x,0)=x\cdot(2x-0.5)$, $u_t(x,0)=\sin 2x$, $u(0,t)=t^2$, $u(l,t)=1.8$.

№19. $u(x,0)=(x+0.6)\cdot(x+0.5)$, $u_t(x,0)=\sin(x+0.3)$, $u(0,t)=0.5$, $u(l,t)=3-2t$.

№20. $u(x,0)=(2-x)\cdot\cos\pi x$, $u_t(x,0)=(x+0.8)^2$, $u(0,t)=0.5t$, $u(l,t)=0$.

№21. $u(x,0)=(x+0.6)\cdot\sin\frac{\pi x}{2}$, $u_t(x,0)=0.3\cdot(x^2+1)$, $u(0,t)=0.5$, $u(l,t)=1.2t$.

№22. $u(x,0)=(x+0.1)\cdot(0.5x+1)$, $u_t(x,0)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $u(0,t)=2$, $u(l,t)=4.5-3t$.

№23. $u(x,0)=(x+0.5)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}$, $u_t(x,0)=1.3\cdot(x^2+1)$, $u(0,t)=0.5$, $u(l,t)=1.2t$.

№24. $u(x,0)=(x^2+0.6)\cdot(1-x)$, $u_t(x,0)=1-\cos x$, $u(0,t)=1$, $u(l,t)=0.5t$.

№25. $u(x,0)=(x^2+0.6)\cdot\sin\pi x$, $u_t(x,0)=(x+0.3)^2$, $u(0,t)=0.5$, $u(l,t)=2t-1$.

V. GLOSSARIY

TVD (total variation dimension) to‘la variatsiyaning o‘smasligi –funksiya to‘la variatsiyasi o‘smasligini ta’minlovchi sxema

ENO(essentially nonoscillatory)- o‘ta ossilyatsiyalanmaydigan

WENO (weighted essentially nonoscillatory)- yuqori tartibli osilyatsiyalanmaydigan sxema

MUSCL monotone upstream schems for conservation laws -saqlanish qonun uchun monoton chap ayirmali sxema

Umumlashgan yechim- integral tenglama shaklda yozilgan tenglamani qanoatlantiruvchi yechim.

Iteratsion metod – yechimga ketma–ket yaqinlashish usuli;

To‘r – tartiblashgan nuqtalar to‘plami;

To‘r funksiya –tartiblashgan nuqtalar to‘plamida aniqlangan funksiyaning qiymatlari;

To‘r tenglama – to‘rning nuqtalarida noma’lumlarni qiymati qatnashadigan tenglamalar;

Turg‘unlik –yechimning boshlang‘ich berilganlarga uzluksiz bog‘liqligi;

Spektr radius – matritsa xos sonlarining eng kattasi;

O‘tish matritsasi – iteratsion ketma–ketlikda bir qadamdan ikkinchi qadamga o‘tishda kupaytiriladigan matritsa;

Diskret masala – tugun nuqtalarda yechimni topish haqidagi masala;

Approksimatsiya – yaqinlashtirish.

Gibrid sxema –masala qaralayotgan sohaning turli qismida turlicha o‘zgaradigan sxema.

Konservativ sxema- saqlanish qonunini approksimatsiya qiliuvchi sxema.

Shock-capturing methods (skvoznogo scheta) – butun soha bo‘yicha sonli yechimni bitta sxema bo‘yicha hisoblash.

Algoritm ijrochisi- ma’lum hisoblashlarni amalga oshira oladigan inson yoki avtomat (xususan kompyuter protsessori).

Amaliy dastur- berilgan muammo doirasida biror masalaning yechimini topishga mo‘ljallangan har qanday dastur.

Amaliy dasturlar paketi- muayyan soha masalalarini yechishga mo‘ljallangan, maxsus tarzda jamlangan dasturiy ta’minot majmuasi

Audioilovalar. Tovushli fayllarni o‘quvchi qurilmalar – raqamli tovushlar bilan ishlovchi dasturlar.

Axborot – (lat. **Informatio**– tushuntirish, baёn qilish) – shartli belgilar ёrdamida shaxslar, predmetlar, dalillar, voqealar, hodisalar va jaraёnlar haqida, ularni tasvirlash shaklidan qat’iy nazar uzatiladigan va saqlanadigan ma’lumotlar.

Vebkamera - kompyuterlararo videotasvirlarni uzatuvchi qurilmadir.

Videoanjuman – turli geografik manzillardagi foydalanuvchi guruhlari orasida raqamli videoёzuv ёki oqimli video ko‘rinishida ma’lumotlarni almashinish asosida yig‘ilish va munozaralar o‘tkazish jaraёni.

Videoilovalar – harakatlanuvchi tasvirlar ishlab chiqish texnologiyasi va namoyishi.

Virtual auditoriya – o‘quv jaraёnining o‘qituvchisi va boshqaruvchisining maslahatini olish uchun tarmoq texnologiyasi ёrdamida turli geografik joylarda yashaёtgan talabalarni birlashtirish.

Virtual laboratoriya – o‘rganilaёtgan haqiqiy obyektlarda bo‘laёtgan jaraёnlarni kompyuter imitatsiyasi orqali taqdim etish va masofaviy kirish imkoniyatiga ega bo‘lgan dasturiy majmua.

Virtual (voqe’lik)haqiqiylik – o‘rganishga mo‘ljallangan murakkab jaraёnlarda bo‘ladigan hodisalarni audiovideo tizimi orqali o‘quvchi tassavuridagi mavhum ko‘rinishi.

Global tarmoq – mintaqaviy (qit’alardagi) kompyuterlarni o‘zida birlashtirish imkoniga ega bo‘lgan tarmoq.

Interaktiv o‘quv kurslari – o‘zaro muloqot asosiga qurilgan vositalardan foydalanib tuzilgan kurslar.

Internet – yagona standart asosida faoliyat ko‘rsatuvchi jahon global kompyuter tarmog‘i.

Iteratsion sikl- takrorlanish soni oldindan noma’lum bo‘lgan sikl shakli.

Keys-texnologiya – masofaviy o‘qitishni tashkil qilishning shunday uslubiki, masofaviy ta’limda matnli, audiovizual va multimediali (keys) o‘quv uslubiy materiallar majmuasi qo‘llanishga asoslanadi.

Masofaviy ta’lim (MT) – ta’limni masofaviy o‘qitish usul va vositalari orqali tashkil qilish shakli**.**

Massiv- bitta nom bilan berilgan va soni cheklangan bir xil tipdagi elementlar to‘plami. Elementning o‘rni massivda uning indeksi bilan bir qiymatli aniqlanadi.

Pedagogik axborot texnologiyalari – kompyuter, tarmoq texnologiyasi va didaktik vositalarni foydalanishga asoslangan texnologiyalar.

Provayder (provider) - kompyuterlarning tarmoqqa ulanish va axborot almashishini tashkil qiladigan tashkilot.

Ta’lim jarayonini masofaviy o‘qitish texnologiyasi – zamonaviy axborot va kommunikatsiya texnologiyalaridan foydalanib o‘quv jarayonini masofadan turib ta’minlaydigan o‘qitish usuli va vositalari hamda o‘quv jarayonlarini boshqarish majmui.

Ta’lim maqsadi – tizimlashtirilgan bilim, ko‘nikma va malakalarni o‘zlashtirish, faollik va mustaqillikni rivojlantirish, butun dunëqarashni shakllantirish va rivojlantirish.

Ta’limning kompyuter texnologiyasi - kompyuter texnikasi, kommunikatsiya vositalari, shuningdek, axborotlarni ifodalash, uzatish va yig‘ish, bilish faoliyatini nazorat qilish va boshqarishni tashkil etish bo‘yicha o‘qituvchining vazifalarini modellashtiruvchi interaktiv dasturiy mahsulotlar asosida pedagogik sharotini yaratishning metod, shakl va vositalari majmui.

Animatsiya – multimediali texnologiya; tasvirning harakatlanayotganligini ifodalash uchun tasvirlarning ketma-ket namoyishi.

Matematik model- obyektning muhim xossalarini tafsiflovchi matematik munosabatlar (formula, tenglama, tengsizlik va h.k.) tizimi.

Oraliq test sinovi – ta’lim jaraënida bilimlarni nazorat qilish shakli.

Sun’iy intellekt (artifical intelligence) - inson intellektining ba’zi xususiyatlarini o‘zida mujassamlashtirgan avtomatik va avtomatlashtirilgan tizimlar majmausi.

Taqdimot/prezentatsiyalar (ing. presentation) – audiovizual vositalardan foydalanib ko‘rgazmali shaklda ma’lumot taqdim etish shakli.

ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev SH.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild / SH.M. Mirziyoyev. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoyev SH.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild / SH.M. Mirziyoyev. – T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoyev SH.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild / SH.M. Mirziyoyev. – T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoyev SH.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild / SH.M. Mirziyoyev. – T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitusiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.
7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.
8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 2 fevraldagi “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi O‘zbekiston Respublikasi Qonunining qoidalarini amalga oshirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2752-sonli Qarori.
10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.
11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.
12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 27 iyul “Oliy ma’lumotli mutaxassislar tayyorlash sifatini oshirishda iqtisodiyot sohalari va tarmoqlarining ishtirokini yanada kengaytirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-3151-sonli Qarori.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini innovatsion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
15. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillarda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida talab yuqori bo‘lgan malakali kadrlar tayyorlash tizimini tubdan takomillashtirish va ilmiy salohiyatini rivojlantiri chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4358-sonli Qarori.
16. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyul “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-sonli Qarori.
17. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim

muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.

18. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi F-5847-sonli Farmoni.

19. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4087-sonli Qarori.

20. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabr “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarori.

SH. Maxsus adabiyotlar

21. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.

22. E.M.Mirzakarimov. Oliy matematikadan laboratoriya ishlarini Maple dasturida bajarish. O’quv qo’llanma. Farg’ona, 2015. 202 b.

23. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010, 204.

24. H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

25. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

26. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

27. Maple v primerax i zadachax [Elektronniy resurs] / O.G. Korolkov, A.S. Chebotarev, Y.D. Sheglova.— Voronej : Izdatelsko-poligraficheskiy sentr Voronejskogo gosudarstvennogo universiteta, 2011.— 132 s. — 132 s. — Rejim dostupa: https://rucont.ru/efd/334854

28. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.

29. A. I. Lobanov, I. B. Petrov. Matematicheskoye modelirovaniye nelineynix protsessov : uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata. Moskva : Izdatelstvo Yurayt, 2019. — 255 s. —ISBN 978-5-9916-8897-0. — Tekst : elektronniy // EBS Yurayt [sayt]. — URL: https://urait.ru/bcode/437003.

30. Asekretov O.K., Borisov B.A., Bugakova N.Y. i dr. Sovremenniye obrazovatelniye texnologii: pedagogika i psixologiya: monografiY. – Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

31. Belogurov A.Y. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obshestva: MonografiY. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.

32. Vvedeniye v matematicheskoye modelirovaniye. Pod red. V.P.Trusova. M., Logos, 2005.

33. Visshaya matematika na kompyutere v programme Maple 14: uchebnoye posobiye po laboratornim rabotam / S.T. Kasyuk, A.A. Logvinova. — Chelyabinsk: Izdatelskiy sentr YUUrGU, 2011. — 57 s.

34. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An’anaviy va noan’anaviy ta’lim. – Samarqand: “Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi” nashriyoti, 2019. 312 b.

35. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. metodik qo‘llanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: “Lesson press”, 2020. 112 bet.

36. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiY. M-vo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

37. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari, II. -T., 2009.
38. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.
39. Muzafarov X.A., Baklushin M.B., Abduraimov M.G. Matematicheskoye modelirovaniye. Tashkent, Universitet. 2002.
40. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.
41. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf
42. Samarskiy A. A., Mixaylov A. P. Matematicheskoye modelirovaniye. M., Nauka, 2005.
43. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislenniye metodi. –M., Nauka, 1989.
44. O‘runbayev E., Murodov F. Kompyuter algebrasi tizimlarining amaliy tatbiqlari. – SamDU nashri – Samarqand, 2003, 96 b.
45. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. O‘quv qo‘llanma. T.: “Tafakkur” nashriyoti, 2020 y. 120 bet.

IV. Internet saytlar

46. http://edu.uz – O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi
47. http://lex.uz – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi
48. http://bimm.uz – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi
49. http://ziyonet.uz – Ta’lim portali ZiyonET
50. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma
51. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/
52. https://onlinelearning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematic&op=Search
53. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html
54. https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics
55. http://www.spbstu.ru/public/m_v/index.html
56. http://www.sosmath.com/index.html/
57. http://dmvn.mexmat.net/
58. http://www.exponenta.ru/