O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

“SONLI USULLAR”

moduli bo‘yicha

ISHCHI O‘QUV DASTURI

Toshkent – 2022

Modulning ishchi o‘quv dasturi O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan namunaviy o‘quv reja va dasturlar asosida ishlab chiqilgan.

Tuzuvchi: **S.A.Bahromov** - O‘zMU, “Hisoblash matematikasi va axborot tizimlari ” kafedrasi dosenti, f.-m.f.n.

Taqrizchilar: **M.O‘.Xudoyberganov** - O‘zMU, “Hisoblash matematikasi va axborot tizimlari ” kafedrasi mudiri, f.-m.f.d.

O‘quv -uslubiy majmua Bosh ilmiy-metodik markaz Ilmiy metodik Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan

(*2020 yil “30” dekabrdagi 5/4-sonli bayonnoma*)

MUNDARIJA

I.	ISHCHI DASTUR	3
II.	MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI	8
III.	NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI	10
IV.	GLOSSARIY	112
V.	ADABIYOTLAR RO‘YXATI	121

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

Dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019 yil 8 oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmonlari hamda O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovasion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni kredit modul tizimi va o‘quv jarayonini tashkil etish, ilmiy va innovasion faoliyatni rivojlantirish, pedagogning kasbiy professionalligini oshirish, ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish, maxsus maqsadlarga yo‘naltirilgan ingliz tili, mutaxassislik fanlar negizida ilmiy va amaliy tadqiqotlar, o‘quv jarayonini tashkil etishning zamonaviy uslublari bo‘yicha so‘nggi yutuqlar, pedagogning kreativ kompetentligini rivojlantirish, ta’lim jarayonlarini raqamli texnologiyalar asosida individuallashtirish, masofaviy ta’lim xizmatlarini rivojlantirish, vebinar, onlayn, «blended learning», «flipped classroom» texnologiyalarini amaliyotga keng qo‘llash bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishining o‘ziga xos xususiyatlari hamda dolzarb masalalaridan kelib chiqqan holda dasturda tinglovchilarning mutaxassislik fanlar doirasidagi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar takomillashtirilishi mumkin.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulining maqsadi: Sonli usullar o‘quv modulining maqsadi pedagog kadrlarni innovasion yondoshuvlar asosida o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg‘or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o‘zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat.

Modulning vazifalari:

- “Amaliy matematika” yo‘nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;
- pedagoglarning ijodiy-innovasion faollik darajasini oshirish;
- mutaxassislik fanlarini o‘qitish jarayoniga zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari va xorijiy tillarni samarali tatbiq etilishini ta’minlash;
- mutaxassislik fanlar sohasidagi o‘qitishning innovatsion texnologiyalari va ilg‘or xorijiy tajribalarini o‘zlashtirish;
- tabiiy va aniq hodisalarning matematik modelini ishlab chiqish;
- matematik modelni sonli yechish usullarini ishlab chiqish;
- “Amaliy matematika” yo‘nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovasiyalar bilan o‘zaro integratsiyasini ta’minlash.

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

Modulni o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida**:**

Tinglovchi:

– Kirish. Algebraik va transsendent tenglamalarni sonli yechish usullarni, , Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemalarini taqribiy yechish metodlari, funksiyalarni interpolyasiyalash usullari, funksiyalarni o‘rtacha kvadratik ma’noda yaqinlashtirishni, aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullarini hamda differensial tenglamalarni taqribiy yechish metodlarini ***bilishi*** kerak.

– tabiiy va aniq fanlarini o‘qitish bo‘yicha yangi texnologiyalarni amaliyotda qo‘llash, axborot texnologiyalarining zamonaviy vositalaridan foydalanib ilmiy-tadqiqotlarni o‘tkazish, eksperimental tadqiqotlar natijalariga ishlov berish, ularni tahlil qilish va aks ettirish, xulosalar chiqarish, ilmiy maqolalar tayyorlash, tavsiyalarini ishlab chiqish, innovasion faoliyatni tashkil etish, ilg‘or tajribalardan foydalanish, o‘z ustida ishlab, fanning yangi tadqiqotlarini o‘qitish tizimini qo‘llash, matematik modellashtirish, sonli yechish usullar, matematik paketlar bo‘yicha ma’ruza, amaliy mashg‘ulot va nazorat ishlarini tashkil etish, pedagogik jarayonda muloqot uslublarini to‘g‘ri qo‘llay olish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.

– sonli yechish usullari, chekli ayirmali sxemalarni qo‘llash, matematik paketlar fanlarining zamonaviy yo‘nalishlarini ishlab chiqish va ommalashtirish, axborot-kommunikasion texnologiyalari va ularni qo‘llashning ilmiy-nazariy va amaliy ahamiyatini bilish, tabiiy va aniq fanlarni turli sohalarga tatbiq qilish,tabiiy va aniq fanlarni dasturlar paketi yordamida yechishning zamonaviy usullarini qo‘llash ***malakalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikasiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

- ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentasion va elektron-didaktik texnologiyalardan;
- o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.
-

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Sonli usullar” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish”, “Matematik modellashtirish asoslari”, “Chekli ayirmali sxemalar”, “Matematik tizimlar” o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning ta’lim jarayonida bulutli hisoblash, katta ma’lumotlar va virtual reallik tizimlaridan foydalanish bo‘yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida amaliyotda uchraydigan masalalarni taqribiy yechish, tabiiy fanlar hamda texnika fanlarida uchraydigan ko‘pgina masalalar taqribiy yechish usullaridan foydalanishga doir kasbiy **kompetentlikka** ega bo‘ladilar.

SONLI USULLAR MODULI BO‘YICHA SOATLAR TAQSIMOTI

№	Modul mavzulari	Auditoriya o‘quv yuklamasi		
		Jami	jumladan	
			Nazariy	Amaiy
1.	Kirish.Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish metodlari	2	2	
2.	Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemalarini taqribiy yechish metodlari	2	2	
3.	Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullari	2	2	
4.	Differensial tenglamalarni taqribiy yechish metodlari	2	2	
5.	Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish	2		2

6.	Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemalarini taqribiy yechish metodlari	2		2
7.	Funksiyalarni interpolyasilash masalasi, Funksiyalarni o‘rtacha kvadratik ma’noda yaqinlashtirish. yaqinlashish (chiziqli va kvadrat funksiyalar)ga misollar.	2		2
8.	Integrallarni taqribiy hisoblashga oid misollar yechish.	2		2
9.	Differensial tenglamalarni taqribiy yechishga oid masalalar yechish.	4		4
	Jami:	**20**	**8**	**12**

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish metodlari (2 soat).

1.1. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechishda ildiz yotgan oraliqlarni ajratish.
1.2. Chiziqsiz tenglamalarni taqribiy yechish usuli. Nyuton usuli.
1.3. Chiziqsiz tenglamalarni taqribiy yechish usuli. Vatarlar usuli.

2-mavzu. Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemalarini taqribiy yechish metodlari (2 soat).

2.1. CHATSni taqribiy yechishni oddiy iterasiya usuli
2.2. CHATSni taqribiy yechishni Zeydel usuli
2.3. Chiziqsiz tnglamalar sistemasini taqribiy yechish.

3-mavzu. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash usullari.

3.1. Eng sodda kvadratur formulalar.
3.2. Umumlashgan kvadratur formulalar
3.3. Umumlashgan trapesiya kvadratur formulasini keltirib chiqarish.

4-mavzu. Differensial tenglamalarni taqribiy yechish metodlari.

4.1. Oddiy differesial tenglamalarni taqribiy yechish.Koshi masalasi.
4.2. ODT taqribiy yechish metodlari.
4.3. Hususiy xosilali differesial tenglamalarga quyilgan chegaraviy masalani taqribiy yechish.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg‘ulot. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechish (2 soat).

2-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemalarini taqribiy yechish metodlari (2 soat).

3-amaliy mashg‘ulot. Funksiyalarni o‘rtacha kvadratik ma’noda yaqinlashtirish. yaqinlashish (chiziqli va kvadrat funksiyalar)ga misollar**.**

(2 soat).

4-amaliy mashg‘ulot. Integrallarni taqribiy hisoblashga oid misollar yechish (2 soat).

5-amaliy mashg‘ulot. Oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish. Koshi masalasini taqribiy yechish. (2 soat).

6-amaliy mashg‘ulot. Xususiy xosilali differensial tenglamalarga qo‘yilgan chegaraviy masalani taqribiy yechishga oid masala.(2 soat).

Amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg‘ulotlarda tinglovchilar o‘quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o‘quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog‘liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg‘ulotlar zamonaviy ta’lim uslublari va innovasion texnologiyalarga asoslangan holda o‘tkaziladi. Bundan tashqari, mustaqil holda o‘quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI.

Mustaqil malaka oshirish quyidagi shakllarni o‘z ichiga oladi: ochiq o‘quv mashg‘ulotlari va mahorat darslarini tashkil etish; iqtidorli va iste’dodli talabalar bilan ishlash; ilmiy konferensiyalarda ma’ruza bilan qatnashish; ilmiy jurnallarda maqolalar chop etish; ko‘rgazma va tanlovlarda ishtirok etish; ilmiy loyihalarda ishtirok etish; xalqaro (impakt-faktorli) nashrlarda maqolalar e’lon qilish; ixtiro (patent), rasionalizatorlik takliflari, innovasion ishlanmalarga mualliflik qilish; monografiya, mualliflik ijodiy ishlar katalogini tayyorlash va nashrdan chiqarish; o‘quv adabiyotlari (darslik, o‘quv qo‘llanma, metodik qo‘llanma)ni tayyorlash va nashrdan chiqarish; falsafa doktori (PhD) darajasini olish uchun himoya qilingan dissertasiyaga ilmiy rahbarlik qilish.

Pedagog kadrlarning mustaqil malaka oshirish natijalari elektron portfolio tizimida o‘z aksini topadi.

Mustaqil malaka oshirish davrida pedagoglar asosiy ish joyi bo‘yicha pedagogik amaliyotdan o‘tadilar. Pedagogik amaliyot davrida pedagog asosiy ish joyi bo‘yicha kafedraning yetakchi professor-o‘qituvchilarini 2 ta darsini kuzatadilar va tahlil qiladilar hamda kafedra a’zolari ishtirokida talabalar guruhi uchun 1 ta ochiq dars o‘tkazadilar. Ochiq dars tahlili hamda pedagog tomonidan kuzatilgan darslar xulosalari kafedraning yig‘ilishida muhokama etiladi va tegishli kafedraning bayonnomasi bilan rasmiylashtiriladi.

Shuningdek, mustaqil malaka oshirish jarayonida tinglovchi qo‘yidagi bilim va ko‘nikmalarini rivojlantirishi lozim:

- ta’lim, fan va ishlab chiqarishni integrasiyalashni tashkil etish, kadrlar buyurtmachilari va mehnat bozori ehtiyojlarini hisobga olgan holda o‘quv rejalari va fanlar dasturlarini shakllantirish;
- o‘quv mashg‘ulotlarining har xil turlari (ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar, laboratoriya mashg‘ulotlari, kurs ishlari loyihalari, malaka bo‘yicha amaliy mashg‘ulotlar)ni tashkillashtirish;
- talabalar o‘rtasida milliy mustaqillik g‘oyalari asosida ma’naviy-axloqiy va tarbiyaviy ishlarni olib borish, ta’lim jarayoni qatnashchilari bilan o‘zaro munosabatlarda etika normalari va nutq madaniyati, talabalarning bilim va ko‘nikmalarini nazorat qilishni tashkil etish va ilmiy-metodik ta’minlash, iqtidorli talabalarni qidirib topish, tanlash va ular bilan ishlash metodlarini bilish va amalda qo‘llash;
- oliy ta’limda menejment va marketing asoslarini bilish va amaliy faoliyatga tatbiq etish.

mustaqil ta’lim olish yo‘li bilan o‘z bilimlarini takomillashtirish.

O‘QITISH SHAKLLARI

- Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:

– ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);

– davra suhbatlari (ko‘rilayotgan loyiha yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);

– bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

III. NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-Ma’ruza. Hisoblash usullari faniga kirish. Xatoliklar nazariyasi. Funksiya xatoliklari.

Reja:

1. Aniq va taqribiy sonlar haqida tushuncha.
2. Xatolar manbai.
3. Hisoblash xatosi.
4. Absolyut va nisbiy xatolar.
5. Taqribiy sonlar ustida amallar.

Tayanch iboralar:

Aniq sonlar, taqribiy sonlar, xatolik, boshlang’ich informatsiya xatoligi, hisoblash xatoliklari, absolyut xato, nisbiy xato, aniqlik.

ANIQ VA TAQRIBIY SONLAR HAQIDA TUSHUNCHA

Kundalik hayotimizda va texnikada uchraydigan ko`plab masalalarni echishda turli sonlar bilan ish kurishga to`g’ri keladi. Bular aniq yoki taqribiy sonlar bo`lishi mumkin. Aniq sonlar biror kattalikning aniq, qiymatini ifodalaydi. Taqribiy sonlar esa biror kattalikning aniq qiymatiga juda yaqin bo`lgan sonni ifodalaydi. Taqribiy sonning aniq songa yaqinlik darajasi hisoblash yoki o`lchash. jarayonida yo`l qo`yilgan xatolik bilan ifodalanadi.

Masalan, ushbularda: «kitobda 738 ta varak», «auditoriyada 30 ta talaba», «uchburchakda 3 ta kirra», «telefon apparatida 10 ta rakam», 738, 30, 3, 10 aniq sonlar. Ushbularda esa: «Er bo`lagining perimetri 210 m», «Erning radiusi 6000 km», «Qalamning og’irligi 8 g», 210, 6000, 8 taqribiy sonlar. Bu kattaliklarning taqribiy bo`lishlariga sabab, o`lchov asboblarining takomillashmaganligidir. Mutlaq aniq o`lchaydigan o`lchov asboblari yo`q bo`lib, ulardan foydalanganda ma`lum xatoliklarga yo`l qo`yiladi.

Bundan tashqari, Er aniq shar shaklida bulmaganligi tufayli, uning radiusi taqribiy olingan. Uchinchi misolda esa qalamlar har xil bo`lganligi uchun ularning og’irligi turlicha. 8 g deb o’rtacha kalamning og’irligi olingan.

Amaliyotda taqribiy son a deb, aniq qiymatli son A dan biroz farq kiladigan va hisoblash jarayonida uning urnida ishlatiladigan songa aytiladi.

Qisqalik uchun bundan keyin aniq qiymatli son o`rniga aniq son, kattalikning taqribiy qiymati o`rniga taqribiy son deb yozamiz.

Amaliy masalalarni echish asosan quyidagi ketma-ket qadamlardan iborat:

1) echilayotgan masalani matematik ifodalar orqali yozish;
2) qo`yilgan matematik masalani echish.

Tabiatda uchraydigan masalalarni doim ham aniq matematik tilda ifodalash mumkin bulmaganligi tufayli masala ma`lum darajada ideallashgan model’ vositasida yoziladi, ya`ni xatolikka yo`l qo`yiladi (birinchi kadamda).

Masalaning tarkibiga kirgan ba`zi parametrlar tajribadan olinganligi tufayli, bunda ham xatolikka yo`l qo`yiladi. Bularning yig'indisi esa boshlang'ich informatsiya xatoligini keltirib chikaradi.
Juda ko`p xollarda matematik masalaning (ikkinchi kadam) aniq echimini (analitik) topishning iloji bo`lmaydi. Shuning uchun amaliyotda taqribiy matematik usullar qo`llaniladi. Aniq, echimning o`rniga taqribiy echimni qabul qilish (majburiy ravishda) yana xatolikni keltirib chikaradi. Masalani echish jarayonida boshlang'ich shartlarni va hisoblash natijalarini yaxlitlashda ham xatolikka yo`l qo`yiladi, bunga h*isoblash xatoliklari* deyiladi.
Taqribiy sonlar bilan ish kurilayotganda quyidagilarga amal qilish lozim:

- taqribiy sonlarning aniqligi xakida ma`lumotga ega bo`lish;
- boshlang'ich qiymatlarning aniqlik darajasini bilgan xolda natijaning aniqligini baxolash;
- boshlangich qiymatlarning aniqlik darajasini shunday tanlash kerakki, natija belgilangan aniqlikda bo`lsin.

XATOLAR MANBAI

Ko`pincha matematik masalalarni sonli echishda biz doimo aniq echimga ega bula olmasdan, balki echimni u yoki bu darajadagi aniqlikda topamiz. Demak, aniq echim bilan taqribiy echim orasidagi xatolik qanday kilib kelib koladi degan savol tugilishi tabiiydir. Bu savolga javob berish uchun xatoliklarning hosil bo`lish sabablarini o`rganish lozim.

1. Matematikada tabiat xodisalarining miqdoriy nisbati u yoki bu funktsiyalarni bir-birlari bilan boglaydigan tenglamalar yordamida tasvirlanadi va bu funktsiyalarning bir qismi ma`lum bo`lib *(dastlabki ma`lumotlar),* boshqalarni topishga to`g'ri keladi. Tabiiyki, topilishi kerak bo`lgan miqdorlar (masalaning echimi) dastlabki ma`lumotlarning funktsiyasi bo`ladi. Kerakli echimni ajratib olish uchun dastlabki ma`lumotlarga konkret qiymatlar berish kerak. Bu dastlabki ma`lumotlar, odatda, tajribadan olinadi (masalan, yorug'lik tezligi, Plank doimiysi, Avogadro soni va x.k.) yoki boshqa biror masalani echishdan hosil bo`ladi. Har ikkala xolda ham biz dastlabki ma`lumotlarning aniq qiymatiga emas, balki uning taqribiy qiymatiga ega bo`lamiz. Shuning uchun agar dastlabki ma`lumotlarning har bir qiymati uchun tenglamani aniq, echganimizda ham, baribir (dastlabki ma`lumotlardagi qiymatlar taqribiy bo`lganligi uchun) taqribiy natijaga ega bo`lamiz va natijaning aniqligi dastlabki ma`lumotlarning aniqligiga bog'liq bo`ladi.

Aniq, echim bilan taqribiy echim orasidagi farq *xato* deyiladi. Dastlabki ma`lumotlarning noaniqligi natijasida hosil bo`lgan xato *yo`qotilmas xato* deyiladi. Bu xato masalani echayotgan matematikga bog'liq. bo`lmasdan, unga berilgan ma`lumotlarning aniqligiga bog'liqdir. Lekin matematik dastlabki ma`lumotlar xatosining kattaligini bilishi va shunga qarab natijaning yo`qotilmas xatosini baxolashi kerak. Agar dastlabki ma`lumotlarning aniqligi katta bo`lmasa, aniqligi juda katta bo`lgan metodni qo`llash urinsizdir. Chunki aniqligi katta bo`lgan metod ko`p mexnatni (hisoblashni) talab kiladi, lekin natijaning xatosi bari bir yo`qotilmas xatodan kam bo`lmaydi.

2. Ba`zi matematik ifodalar tabiat xodisasining ideallashtirilgan modelini tasvirlaydi. Shuning uchun tabiat xodisalarining aniq matematik ifodasini (formulasini, tenglamasini) berib bo`lmaydi, buning natijasida xato kelib chikadi. Yoki biror masala aniq matematik formada yozilgan bo`lsa va uni shu ko`rinishda echish mumkin bo`lmasa, bunday xolda bu masala unga yaqinrok va echish mumkin bo`lgan masalaga almashtirilishi kerak. Buning natijasida kelib chiqadigan xato *metod xatosi* deyiladi.

3. Biz doimo π, *e, 1p2* va shunga o`xshash irratsional sonlarning taqribiy qiymatlarini olamiz, bundan tashqari, hisoblash jarayonida oraliq natijalarda ko`p xonali sonlar hosil bo`ladi, bularni yaxlitlab olishga to`g’ri keladi. Ya`ni masalalarni echishda hisoblashni aniq olib bormaganligimiz natijasida ham xatoga yo`l kuyamiz, bu xato *hisoblash xatosi* deyiladi.

Shunday kilib, *tulik, xato* yuqorida aytilgan yo`qotilmas xato, metod xatosi va hisoblash xatolarining yig’indisidan iboratdir. Ravshanki, biror konkret masalani echayotganda yuqorida aytilgan xatolarning ayrimlari katnashmasligi yoki uning ta`siri deyarli bo`lmasligi mumkin. Lekin, umuman olganda, xato tulik. analiz kilinishi uchun bu xatolarning xammasi hisobga olinishi kerak.

HISOBLASH XATOSI.

Masalani kulda yoki hisoblash mashinasida echayotganda biz barcha haqiqiy sonlar bilan ish kurmasdan, sonlarning ma`lum diskret to`plami bilan ish ko`ramizki, u yoki bu sanok sistemasida ma`lum miqdordagi xonalar bilan olingan sonlar shu to`plamda yotadi. Bu to`plam

$$\pm(a_1 q^n + a_2 q^{n-1} + ... + a_m q^{n-m+1}) \tag{1.1}$$

ko`rinishdagi sonlardan iborat bo`lib, by erda natural son q - sanok sistemasining asosidir; a_1, a_2 ,..., a_m - butun sonlar bo`lib, $0 \le a_i \le q-1$ shartni kanoatlantiradi; $t$ bu to`plamdagi sonlar xonasining miqdori, butun p son esa $|n| \le n_0$ shartni kanoatlantiradi. Kulda hisoblayotganda, asosan, unlik sanok sistemasi (q = 10) bilan ish kuriladi. Kup EHM larda esa ikkilik sanok sistemasi (q = 2) va ayrimlari uchun uchlik sanok, sistemasi (q = 3) ishlatiladi.

EHM larning ko`pchiligi shunday tuzilganki, ularda $q=2$, $m=35$, $n_0=63$ bo`ladi.

Odatda, arifmetik amallarni bajarayotganda ko`p xonali sonlar hosil bo`ladi (masalan, ko`paytirishda xonalarning soni ikkilanadi, bo`lishda esa xonalarning soni nixoyatda kattalashib ketishi ham mumkin). Natijada hosil bo`lgan son karalayotgan to`plamdan chikib ketmasligi uchun t - xonasigacha yaxlitlanadi, ya`ni shu to`plamdagi boshqa son bilan almashtiriladi, tabiiyki yaxlitlanadigan son unga eng yaqin son bilan almashtirilishi, ya`ni yaxlitlash xatosi eng kichik bo`lishi kerak.

Agar biz juft rakam koidasini qo`llab 5,780475 sonini ketma-ket yaxlitlasak, quyidagi 5,78048; 5,7805; 5,780; 5,78; 5,8; 6 sonlar kelib chikadi.

Ko`pincha biror natijani olish uchun berilgan metodda ko`rsatilgan bir kator amallarni bajarishga to`g’ri keladi. Agar natijani katta aniqlik bilan topish talab kilinsa, bu kator yanada o`zayib ketadi.

ABSOLYUT VA NISBIY XATOLAR

Faraz kilaylik *A* aniq son, *a* - uning taqribiy qiymati bo`lsin. Agar $a<A$ bo`lsa, *a kami bilan olingan taqribiy son* deyiladi. Agar $a>A$ bo`lsa, *a ortigi bilan olingan taqribiy son* deyiladi.

1 - ta`rif. Taqribiy sonning *xatoligi* deb *A* va *a* orasidagi ayirmaga aytiladi.

Xatolikni Δa deb belgilasak, u holda quyidagicha bo`ladi:

$$\begin{gathered} \Delta a = A - a; \\ A = \Delta a + a \end{gathered} \tag{1.2}$$

2 - ta`rif. Taqribiy sonning *absolyut xatoligi* deb *A va a* orasidagi ayirmaning moduliga aytiladi.

Absalyut xatolikni Δ deb belgilasak, u holda quyidagicha bo`ladi:

$$\Delta = | A - a | \tag{1.3}$$

Amaliyotda ko`p xollarda 0,01 gacha aniqlik bilan, 1 sm gacha aniqlik bilan va x.k. lar uchraydi. Bu esa absolyut xatolikning 0,01; 1 sm va x.k. ga teng ekanligini bildiradi.

3 - ta`rif. Taqribiy son *a* ning nisbiy xatoligi $\delta(a)$ deb absolyut xatolik Δa ning *A* ning moduliga nisbatiga aytiladi:

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{| A |} \tag{1.4}$$

yoki

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{| a |} \tag{1.5}$$

(1.4) va (1.5) formulalarni 100 ga ko`paytirsak, nisbiy xatolik foiz (%) hisobida chikadi.

1 - misol. L uzunlikdagi kesmani 0,01 sm aniqlikda ulchadilar va *l = 21,4* sm natijani oldilar.

Bu erda absolyut xatolik $\Delta l = 0{,}01$ sm. (1.2) formulaga asosan *L = 21,4 k 0,01* ya`ni *21,39 ≤ L ≤ 21,41*.

Absolyut xatolik o`lchash yoki hisoblashni faqat miqdoriy tomondan ifodalaydi va sifat tomonlarini tavsiflamaydi. Shu munosabat bilan nisbiy xatolik tushunchasi kiritiladi.

2 - misol. *a* = 35,148 k 0,00074 taqribiy sonning nisbiy xatosi (foizlarda) topilsin.

Bu erda Δa = 0,00074; *A*=35,148 (1.4) ga asosan

$$\delta(a) = \frac{0{,}00074}{35{,}148} = 0{,}000022 \approx 0{,}003\ \%$$

3 - misol. Nisbiy xatoligi $\delta(a)$ =0,01 % bo`lgan *a*=4,123 taqribiy sonning absolyut xatoligi Δa topilsin.

Foizni unli kasr orqali ifodalab va (1.5) formulaga asosan:

$\Delta a = |a| \cdot \delta(a) = 4{,}123 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0005$

A =4,123 k 0,0005

4-misol. Jismning og'irligini o`lchashda R = 23,4 k 0,2 g natija olingan. Nisbiy xatolik topilsin.

Bu erda $\Delta P = 0{,}2$ u xolda

$\delta(p) = \frac{0{,}2}{23{,}4} \cdot 100\% = 0{,}9\ \%$

TAQRIBIY SONLAR USTIDA AMALLAR

Taqribiy sonlarni kushganda yoki ayirganda ularning absolyut xatoliklari kushiladi:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b \qquad (1.6)$$

bu erda *a* va *b* - taqribiy sonlar.

Taqribiy sonni taqribiy songa bo`lganda yoki ko`paytirganda ularning nisbiy xatoliklari kushiladi:

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b);$$
$$\delta(\frac{a}{b}) = \delta(a) + \delta(b) \qquad (1.7)$$

Taqribiy son darajaga oshirilganda, uning nisbiy xatoligi shu daraja ko`rsatkichiga ko`paytiriladi:

$$\delta(a^n) = n \cdot \delta(a) \qquad (1.8)$$

Misol. Quyidagi funktsiyaning nisbiy xatoligi topilsin:

$$y = (\frac{a+b}{x^3})^{\frac{1}{2}}$$

(1.6), (1.7) va (1.8) formulalardan foydalansak,

$$\delta(y) = \frac{1}{2}\delta(a+b) + 3\delta(x) = \frac{1}{2}(\frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} + 3 \cdot \frac{\Delta x}{|x|})$$

Faraz kilaylik, *a* bir o`zgaruvchili funktsiya *y =f(x)* ning argumenti *x* ning taqribiy qiymati, $\Delta a$ esa uning absolyut xatoligi bo`lsin. Bu funktsiyaning absolyut xatoligi sifatida uning orttirmasi Δy ni olish mumkin. Orttirmani esa differentsial bilan almashtirsak:

$$\Delta y \approx dy$$

U xolda

$$\Delta y = | f'(a) | \cdot \Delta a$$

Ushbu muloxazani ko`p o`zgaruvchili funktsiyaga ham qo`llash mumkin.
U = f(x, u, z) funktsiyaning argumentlari *x, u, z* lar uchun taqribiy qiymatlar *a, b, c* lar bo`lsin. U xolda

$$\Delta u = | f'_x(a,b,c) | \cdot \Delta a + | f'_y(a,b,c) | \cdot \Delta b + | f'_z(a,b,c) | \cdot \Delta c$$

bu erda Δa, Δb, Δc - argumentlar absolyut xatoligi; f'_x, f'_y, f'_z, - moc ravishda *x, u, z* buyicha olingan xususiy hosilalar.
Nisbiy xatolik esa quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\delta(u) = \frac{\Delta u}{| f(a,b,c) |} \tag{1.9}$$

Nazorat savollar:

1. Aniq son deb nimaga aytiladi?
2. Taqribiy soni izohlang.
3. Xato deganda nimani tushunasiz?
4. Yo`qotilmas xato deb nimaga aytiladi?
5. Hisoblash xatosi nima?
6. Taqribiy sonning xatoligi.
7. Absalyut xato deb nimaga aytiladi?
8. Nisbiy xato nima?

2-MA'RUZA. ALGEBRAIK VA TRANSSENDENT TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH METODLARI

Reja:

1. Masalaning qo`yilishi.
2. Ildizlarni ajratish.
3. Oraliqni ikkiga bo`lish usuli, uning ishchi algoritmi.

Tayanch iboralar:
Algebraik teglama, transtsendent, oraliq, ildiz, hosila, uzluksiz, uchuvchi, kamayuvchi, keltirilgan tenglama, Dekart koordinatasi.

MASALANING QO`YILISHI.

Bir noma`lumli istalgan tenglamani quyidagi ko`rinishga keltirish mumkin

$$f(x)=0, \tag{2.1}$$

bu erda*f(x)* funktsiya [*a*, *b*] oraliqda aniqlangan va uzluksiz.

Ta`rif. (2.1) tenglamaning *ildizi (echimi)* deb shunday ξ ($a \le \xi \le b$) songa aytiladiki, ξ ni (2.1) ga kuyganda

$f(\xi) = 0$

ayniyat hosil bo`ladi.

Agar (2.1) da $f(x)$ funktsiya algebraik, ya`ni

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \qquad (2.2)$$

bo`lsa, u xolda (2.1) *algebraik tenglama* deb ataladi. (2.2) da $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – istalgan sonlar, p — natural son.)

Algebraik tenglamaga misolar:

$x^2 - 5x + 6 = 0$; $\sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-4} = 14$; $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \dfrac{x-1}{4}$ va x.k.

Algebraik tenglama deganda (2.2) ko`rinishdagi tenglama ko`zda tutiladi. Keltirilgan misollardagi ikkinchi va uchinchi tenglamalarni sodda amallar bajarib (2.2) ko`rinishga keltirish mumkin.

Agar (2.1) tenglamada $f(x)$ funktsiya algebraik bo`lmasa, ya`ni uni (2.2) ko`rinishda ifodalab bo`lmasa, u xolda (2.1) ga transtsendent tenglama deyiladi. Transtsendent tenglamaga misollar:

$x - 10\sin x = 0$; $2x - 2\cos x = 0$; $\lg(x+1) = \mathrm{tg}\,x$ va x.k.

Ko`rsatkichli (a^x), logarifmik {1ogx), trigonometrik (*sinx,cosx, tgx* va x.k.) funktsiyalar algebraik bulmagan (transtsendent) funktsiyalardir.

(2.1) tenglama haqiqiy yoki kompleks ildizga ega bo`lishi mumkin. Biz faqat haqiqiy ildizlar topish bilan shugullanamiz va quyidagi masalalarni echamiz:

1) (2.1) tenglama haqiqiy ildizga egami yoki yukmi; agar ega bo`lsa ildizlar soni nechta?
2) haqiqiy ildizlarni aniq usullar bilan yoki berilgan aniqlikda taqribiy usullar bilan topish;

Oliy algebradagi algebraik tenglamalarning ba`zi xossalarini isbotsiz keltiramiz:

1) Har qanday algebraik tenglama juda bulmaganda bitta ildizga ega (haqiqiy yoki kompleks).
2) Kar qanday p tartibli algebraik tenglamaning ildizlari soni p dan katta bo`lmaydi.

3) Har qanday haqiqiy koeffitsientli algebraik tenglama faqat juft sonli kompleks ildizlarga ega bo`lishi mumkin.

4) Har qanday tok darajali algebraik tenglama juda bulmaganda bitta haqiqiy ildizga ega.

Algebraik tenglama ildizlarini qanday topamiz?

1-, 2-tartibli tenglamalar uchun tayyor hisoblash formulalari mavjud bo`lib, ular bizga o'rta maktab matematikasidan ma`lum. Bu formulalarda ildizlar tenglamaning koeffitsientlari orqali ifodalanadi (masalan kvadrat tenglamaning ildizlarini hoblashda). 3- va 4- tartibli tenglamalar uchun ham formulalar mavjud. Biroq bu formulalar murakkab ko`rinishda. 5- va undan yuqori darajali algebraik tenglamalar uchun bunday formulalarning bo`lishi mumkin emas. Buni Norvegiyalik matematik Abel' isbotlagan. Bunday tenglamalarni faqat xususiy xollardagina echish mumkin (masalan $ax^p=b$ ni).

Shu munosabat bilan xisoblash matematikasida kator taqribiy usullar ishlab chikilgan. Bu usullar bilan istalgan darajali algebraik yoki transtsendent tenglamalarni berilgan aniqlikda echish mumkin. Shuning uchun taqribiy usullar yuqori darajali tenglamalarni echish uchun asos bo`ladi.

«Berilgan aniqlikdagi taqribiy echim» deganda nimani tushunamiz?

Faraz kilaylik, ξ (2.1) ning aniq echimi, x esa uning ε aniqlikdagi taqribiy echimi ($0<\varepsilon<1$) bo`lsin. U xolda yuqoridagi savolimizning javobi $|\xi-x|\leq\varepsilon$ bo`ladi. Ushbu bobda biz bir noma`lumli algebraik va transtsendent tenglamalarni ba`zi taqribiy echish usullari bilan tanishib chiqamiz.

ILDIZLARNI AJRATISH. ORALIQNI IKKIGA BO`LISH USULI

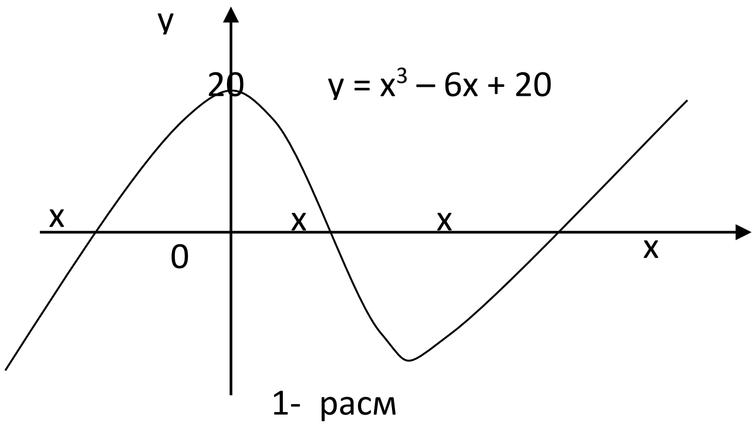
Tenglamalarni taqribiy echish jarayoni ikkita boskichga ajratiladi:

1) ildizlarni ajratish;
2) ildizlarni berilgan aniqlikda topish.

[a,b] kesmada *f(x)* =0 tenglamaning ξ dan boshqa ildizi yo`q bo`lsa, ildiz ξ ajratilgan hisoblanadi. Ildizlarni ajratish uchun *[a,b]* kesmani shunday kesmachalarga bo`lish kerakki, bu kesmachalarda tenglamaning faqat bitta ildizi bo`lsin. Ildizlarni g r a f i k va a n a l i t i k usullar bilan ajratish mumkin.

Ildizlarni grafik usulda ajratish. 1-usul. Bu usul juda sodda bo`lib quyidagicha bajariladi. Dekart koordinat tizimida *u=f(x)* funktsiyaning grafigini chizamiz (bu bizga o'rta maktab dasturidan ma`lum). Shu grafikning *Ox* uki bilan kesishgan nuqtalari izlanayotgan ildizlar (taqribiy) bo`ladi.

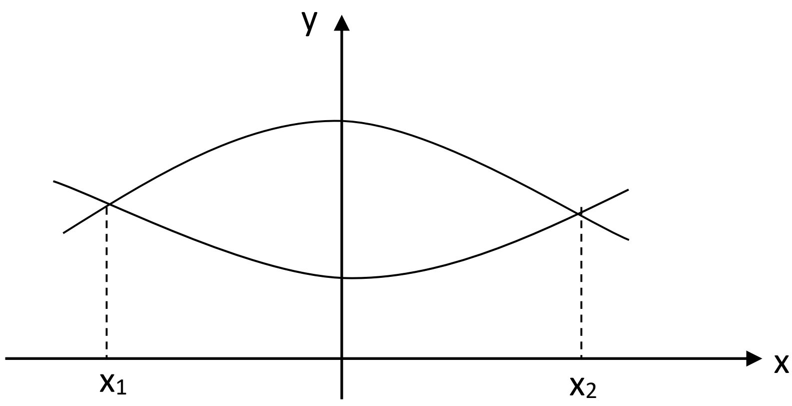
Misol. x^3-$6x^2$+20 =0 tenglamaning taqribiy echimlari x_1, x_2, x_3 1-rasmda ko`rsatilgan.



1- расм

2-usul.$f(x) = 0$ tenglamani $f(x) = f_2(x)$ ko`rinishda ezib olamiz.

Dekart koordinat tizimida $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalarning grafiklarini chizamiz. Agar bu egri chiziqlar o`zaro kesishsa, kesishgan nuqtalaridan *Ox* ukiga tik chiziq (perpendikulyar) o'tkazamiz. Hosil bo`lgan nuqtalar (eki nuqta) taqribiy echimlar bo`ladi. 2- rasmdagi x_1 va $x_2$lar (2.1) tenglamaning taqribiy echimlaridir.



2-rasm

Bu usullar bilan tenglamalar echganda aniqroq echimlar olish uchun grafiklarni iloji boricha aniq chizish va katta masshtab olish lozim bo`ladi. Shunga qaramay grafik usullar bilan ildizlarni yuqori aniqlikda hisoblab bo`lmaydi. Grafik usul bilan tenglamaning ildizlarini biror chegaralangan kesmada aniqlaymiz, ya`ni chizmani istalgancha katta o`lchovda ololmaymiz va tenglama nechta ildizga ega ekanligiga javob bera olmaymiz. Ildizlarni yuqori aniqlikda topish lozim bo`lsa, boshqa taqribiy usullardan foydalanish kerak.

Ildizlarni analitik usulda ajratish. $f(x)=0$ tenglamaning ildizlarini analitik usulda ajratish uchun oliy matematika kursidan ba`zi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo`lib, kesmaning chekka nuqtalarida tur li ishorali qiymatlar qabul kilsa, u xolda $[a, b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning juda bulmaganda bitta ildizi yotadi.*

2-teorema. *Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b,]$ kesmada uzluksiz va monoton bo`lib, kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul kilsa, u xolda $[a, b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.*

3-teorema. *Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo`lib va kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul kilib, $[a,b]$ kesmaning ichida $f'(x)$ hosilasining ishorasi o`zgarmasa, u xolda $[a,b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.*

Eslatma. 1) $u= f(x)$ funktsiya berilgan intervalda m o n o t o n deyiladi, agar shuintervalga tegishli istalgan $x_2>x_1$ uchun $f(x_1)\geq f(x_2)$ *($f'(x)\geq 0$) (monoton usuvchi) eki* $f(x_2)\leq f(x_1)$ *($f'(x)\leq 0$) (monoton kamayuvchi) bo`lsa.*

2) Agar $u=f(x)$ funktsiya berilgan intervalda uzluksiz bo`lib, intervalning xamma nuqtalarida hosilalari mavjud bo`lsa, u xolda funktsiyaning bu intervalda monoton bo`lishi uchun $f'(x)\geq 0$ yoki $f'(x)\leq 0$ tengsizliklarning bajarilishi zarur va etarli.

ORALIQNI IKKIGA BO`LISH USULI

Faraz kilaylik, $f(x)=0$ tenglamaning biror ξ ildizi $[a,b]$ kesmada ajratilgan bo`lsin. Kesmaning uzunligi $d=b-a$ deb belgilaylik. Tenglamaning $\xi$ echimi $\varepsilon$ =0,001 aniqlikda topilsin. $\xi$ ildiz $[a,b]$ ning ichida bo`lganligi $\{a<\xi<b\}$ uchun a ni kami bilan olingan taqribiy ildiz, b ni ortigi bilan olingan taqribiy ildiz deb olishimiz mumkin. Agar d<0,001 bo`lsa masala echilgan hisoblanadi va $a$ hamda $b$ lar $f(x)=0$ tenglamaning berilgan $\varepsilon=0,001$ aniqlikdagi echimlari bo`ladi. Bu xolda taqribiy echim sifatida a va b lardan tashqari bular orasida yotgan istalgan x_0 $\{a<x_0<b)$ ni olish mumkin. Taqribiy echim sifatida $x_0=\frac{a+b}{2}$ ni olish maqsadga muvofik.

Endi faraz kilaylik $d>0,001$ va $[a,b]$ kesmaning o'rtasida $c=(a+b)/2$ nuqta olingan bo`lsin. U xolda $[a,b]$ kesma uzunliklari $(b-a)/2$ ga teng bo`lgan $[a,c]$ va $[c,b]$ kesmalarga ajraydi. Shu ikki kesmadan kaysi birining chekka nuqtalarida $f(x)$ funktsiya ishorasini o`zgartirsa, shu kesmani olib kolib keyingisini tashlab yuboramiz. Kolgan kesmaning uzunligi $d_1\leq\varepsilon$ bo`lsa, shu erda tuxtaymiz. Agar shart bajarilmasa, olib qolingan kesmada yuqoridagi muloxazalarni takrorlaymiz. Ikkiga bo`lish jarayonini kesmaning uzunligi $d_n\leq\varepsilon$($p$-ikkiga bo`lishlar soni) bo`lganiga qadar davom ettiramiz.

Misol.$x^3 — 4x — 1 = 0$ tenglama ε =0,001 aniqlikda echilsin.

Quyidagi jadvalni to`zamiz

X	-1	0	1	2	2,1	2,2
f(x) ning ishorasi	+	-	-	-	-	+

Jadvaldan kurinyaptiki [-*1;0*]; [2,*1; 2,2*] kesmalarda taqribiy echim (1-teoremaga asosan) bor. Biz uchun qulay kesma [*2,1; 2,2*]. Bunda $f(2.1)=-1,39 < 0$; $f(2.1)= 0,850 > 0$. Bizda $a=2,1;\ b=2,2$. Bundan $d=b-a=0,1>\varepsilon$. Demak hisoblashni davom ettirish kerak.

$f\,(2,11) = -\,0,046 < 0;$ $\qquad f\,(2,12) = 0,046>0$

Bu erdan $a=2,11;\ \ b=2,12;\qquad d=b-a=0,01>\varepsilon$

Hisoblashni yana davom ettiramiz:

$f(2,114) = -\,0,0085 < 0;\quad f\,(2,115) = 0,0009 > 0$

$a=2,114;\ b=2,115;\ d=b-a=2,115-2,114=0,001=\varepsilon$

Qo`yilgan maqsadga erishdik, ya`ni kesmaning uzunligi *d* avvaldan berilgan aniqlik $\varepsilon=0,001$ dan katta emas. Bu misolda izlanayotgan taqribiy echim ξ quyidagi oraliqda bo`ladi $2,114<\xi<2,115$, ya`ni 2,114 va 2,115 larni taqribiy echim tarzida olish mumkin (ξ aniqlik bilan). Amalda bularning o'rta arifmetigi olinsa echim aniqligi yanada oshadi

Takrorlash uchun savollar:

1. Tenglamaning ildizi nima?
2. Algebraik tenglama deganda nimani tushunasiz?
3. Transtsendent tenglama nima?
4. Ildizlarni ajratish deganda nimani tushunasiz?
5. Ildizlarni berilgan aniqlikda topish nima?
6. Kesmani uzunligi nima?
7. Grafik usul deganda nimani tushunasiz?
8. Funktsiyaning intervalda monotonligi nima?
9. Ildizlarni analitik usulda ajratish qanday bajariladi?
10. Oraliqni ikkiga bo`lish usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?

3-Ma'ruza. CHIZIQSIZ TENGLAMALARNI TAQRIBIY ECHISH USULLARI, VATAR USULLARI, NYUTON USULLARI

Reja:

1. Vatarlar usuli.
2. Urinmalar (Nyuton) usuli.
3. Ketma - ket yaqinlashish usuli.
4. Usullarning ishchi algoritmlari.

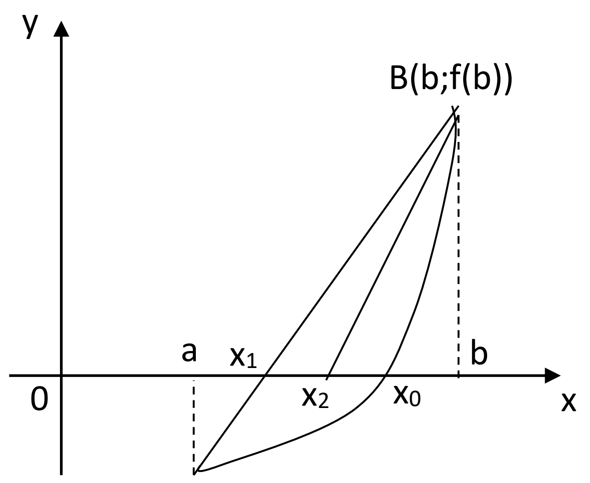
Tayanch iboralar:

Vatar, hosila, n-hosila, taqribiy echim, urinma, egri chiziq, boshlangich yaqinlashish, kombinatsiya, uzluksiz, usuvchi, iteratsiya, teng kuchli.

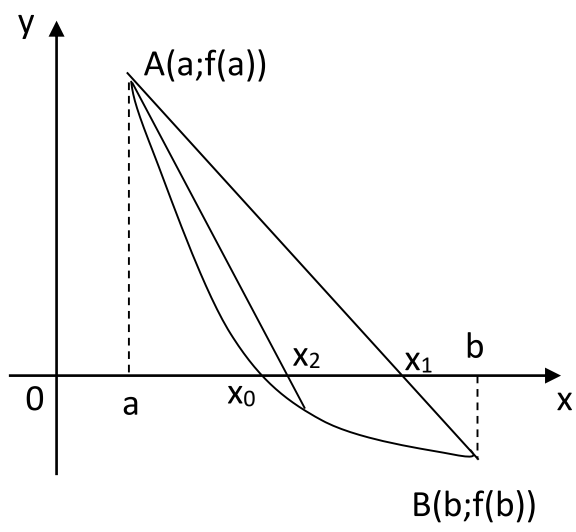
VATARLAR USULI

Algebraik va transtsendent tenglamalarni echishda vatarlar usuli keng qo`llanadigan usullardan biridir. Bu usulni ikki xolat uchun kurib chiqamiz.

1-x o l a t . Faraz kilaylik $f(x)$ =0 tenglamaning ildizi $[a,b]$ kesmada ajratilgan va kesmaning chekka nuqtalarida $f(a) \cdot f(b)$<0 bo`lsin. Bundan tashqari birinchi va ikkinchi hosilalari bir xil ishorali qiymatlarga ega bo`lsin, ya`ni $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ yoki $f(a)$<0; $f(b)>0$; $f'(x)>0$; $f''(x)>0$ (5-racm).



1- расм



2- расм

$f(x)$ =0—tenglamaning aniq echimi, $f(x)$ funktsiya grafigining *Ox* uki bilan kesishgan nuqtasi x_0. *A* va *V* nuqtalarni turri chiziq (vatar) bilan tutashtiramiz.

Oliy matematikadan ma`lumki, A va V nuqtalarda (1-racm) utgan to`g'ri chiziqning tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} \tag{3.1}$$

Utkazilgan vatarning *Ox* uki bilan kesishgan nuqtasi x_1 ni taqribiy echim deb qabul kilamiz va uning koordinatasini aniqlaymiz. (3.1) tenglikda $x=x_1$, $u=0$ deb hisoblab uni x_1 ga nisbatan echamiz:

$$x_1=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \tag{3.2}$$

Izlanayotgan echim x_0 *e*ndi $[x_1; b]$ kesmaning ichida. Agar topilgan x_1 echim bizni kanoatlantirmasa yuqorida aytilgan muloxazalarni $[x_1; b]$ kesma uchun takrorlaymiz va x_2 nuqtaning koordinatini aniqlaymiz:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)} \tag{3.3}$$

Agar x_2 ildiz ham bizni kanoatlantirmasa, ya`ni avvaldan berilgan ε aniqlik uchun $|x_2 - x_1|\le\varepsilon$ shart bajarilmasa, $x_z$ni hisoblaymiz:

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)} \tag{3.4}$$

yoki umumiy xolda

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)} \tag{3.5}$$

ya`ni hisoblashni $|x_{n+1} - x_n| \le\varepsilon$ shart bajarilgunga qadar davom ettiramiz.

Yuqorida keltirilgan formulalarni $f(a) > 0; f(b) < 0; f'(x) < 0; f''(x) < 0$ uchun ham qo`llash mumkin.

2-x o l a t . *f(x)* funktsiyaning birinchi va ikkinchi hosilalari turli ishorali qiymatlarga ega deb faraz kilaylik, ya`ni $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ yoki $f(a) >0, f(b) <0, f'(x) <0, f''(x) > 0$ (6-rasm).

A va *V* nuqtalarni turri chiziq (vatar) bilan tutashtirib uning tenglamasini yozamiz

$$\frac{y-f(b)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-b}{b-a} \tag{3.6}$$

Bu tenglamada $y = 0$ va $x = x_1$ deb qabul kilib, uni x_1 ga nisbatan echsak,

$$x_1=b-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \tag{3.7}$$

Topilgan x_1 ni taqribiy echim deb olish mumkin. Agar topilgan x_1 ning aniqligi bizni kanoatlantirmasa, yuqoridagi muloxazani [a, x_1] kesma uchun takrorlaymiz, ya'ni x_2 ni hisoblaymiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)} \tag{3.8}$$

Agar $|x_2 - x_1| \le \varepsilon$ shart bajarilsa, taqribiy echim sifatida x_2 olinadi, bajarilmasa x_3, x_4, … lar hisoblanadi, ya`ni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \tag{3.9}$$

Xisoblash jarayoni $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ bulgunga qadar davom ettiriladi.

f(a) <0, f(b) >0, f'(x) >0, f''(x) <0 bo`lgan xol uchun ham taqribiy ildiz (3.7) – (3.9) formulalar bilan hisoblanadi. Demak, agar *f'(x) · f''(x) >0* bo`lsa taqribiy echim (3.2-3.5) formulalar bilan, *f'(x) · f''(x) < 0* bo`lsa (3.7) - (3.9) formulalar bilan hisoblanadi.

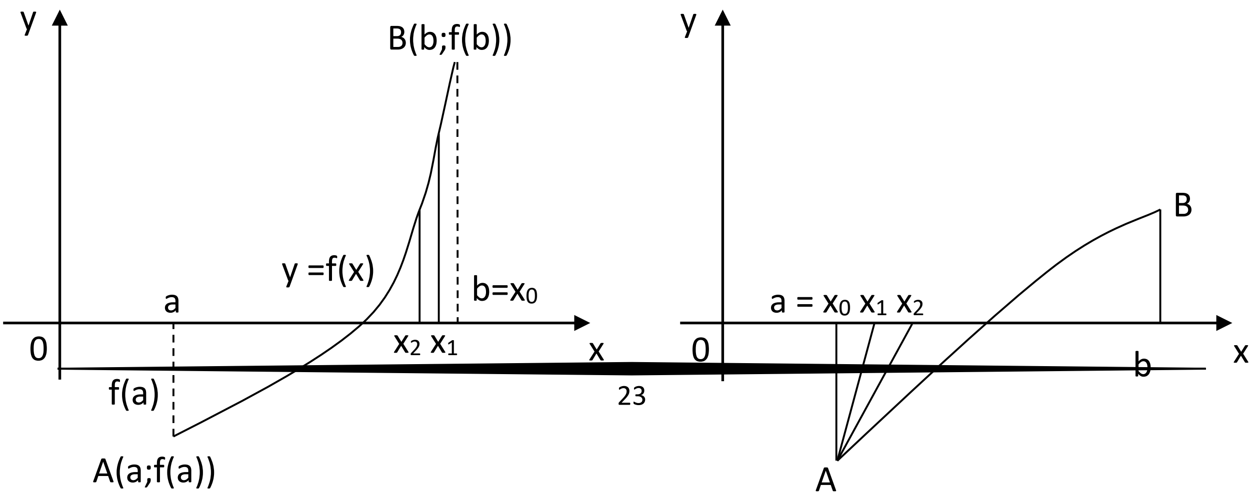
Misol. $x^3 + x^2 - 3 = 0$ tenglama $\varepsilon = 0{,}005$ aniqlikda vatarlar usuli bilan hisoblansin.

E c h i s h . Ildizlarni ajratsak, 0,5<x<1,5 ga ega bo`lamiz; bu erda $f(0{,}5)=-2{,}625<0$; $f(1{,}5) = 2{,}600 > 0$; $f'(x)=3x^2 + 2x$; $f''(x) = 6x + 2$. Kidirilayotgan taqribiy ildiz [$0{,}5; 1{,}5$] kesmada ekan. Bu kesmada esa $f'(x) > 0$; $f''(x) >0$. Demak biz taqribiy ildizni (3.2) - (3.5) formulalar yordamida hisoblaymiz (1- xolat). (2.2) dan x_1= 1,012 ni, (3.3) dan x_2 = 1,130 ni; (3.4) dan x_3 = 1,169 ni, (3.5) dan (n=3) x_3 =1,173 ni topamiz. Bu erda $|x_4 - x_3|$ = 1, 173 - 1,169 = 0,004 <ε. Demak shart 4-kadamda bajarildi. Shuning uchun x_4=1,173 yuqoridagi tenglamaning ε = 0,005 aniqlikdagi ildizi bo`ladi.

URINMALAR (NYUTON) USULI

Urinmalar usulini Nyuton usuli deb ham ataydilar. Bu usulni ham ikki xolat uchun kurib chiqamiz.

1- x o l a t . Faraz kilaylik, *f(a) <0, f(b) >0, f'(x) >0, f''(x) > 0* yoki *f(a)>0, f(b) <0, f'(x) <0, f''(x) < 0* (3-rasm).



3- racm 4-racm

$y = f(x)$ egri chiziqka V nuqtada urinma o'tkazamiz va urinmaning Ox uki bilan kesishgan nuqtasi $x_1$ni aniqlaymiz.

Urinmaning tenglamasi quyidagicha:

$$y - f(b) = f'(b)(x-b), \tag{3.10}$$

bu erda $y=0$, $x=x_1$ deb , (3.10) ni x_1 nisbatan echsak,

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \tag{3.11}$$

Shu muloxazani [$a;x_1$] kesma uchun takrorlab, x_2 ni topamiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{3.12}$$

Umuman olganda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.13}$$

Hisoblashni $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ shart bajarilganda tuxtatamiz.

2- x o l a t . Faraz kilaylik $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ yoki $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ (4- rasm). $y = f(x)$ egri chiziqka A nuqtada urinma o'tkazamiz, uning tenglamasi:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \tag{3.14}$$

Bu erda $y=0$, $x=x_1$ decak,

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \tag{3.15}$$

[$x_1;b$] kesmadan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{3.16}$$

Umuman

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.17}$$

(3.11) va (3.15) formulalarni bir-biri bilan solishtirsak, ular bir-birlaridan boshlangich yaqinlashishi (a yoki b) ni tanlab olish bilan farqlanadilar. Boshlangich yaqinlashishni tanlab olishda quyidagi koidadan fondalaniladi; boshlangich yaqinlashish tarzida [a;b] kesmaning shunday chekka (*a* yoki *b)* qiymatini olish kerakki, bu nuqtada funktsiyaning ishorasi uning ikkinchi hosilasining ishorasi bilan bir xil bo`lsin.

Misol. *x-sinx=0,25* tenglamaning ildizi ε=0,0001 aniqlikda urinmalar usuli bilan aniqlansin.

E c h i s h . Tenglamaning ildizi [0,982; 1,178] kesmada ajratilgan (buni tekshirishni kitobxonga xavola kilamiz); bu erda $a=0{,}982$; $b=1{,}178$;
$f'(x)=1-\cos x$; $f''(x) = \sin x>0$.

[0,982; 1,178] kesmada $f(1{,}178)\cdot f''(x) > 0$, ya`ni boshlangich yaqinlashishda x_0=1,178. Hisoblashni (3.11)-(3.13) formulalarvositasidabajaramiz. Hisoblashnatijalariquyidagi 2.1-jadvaldaberilgan.

1-jadval

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n)=x_n-\sin x_n-0{,}25$	$f'(x_n)=1-\text{sos}x_n$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	- 0,92384	0,00416	0,61723	- 0,0065
1	1,1715	- 0,92133	0,00017	0,61123	- 0,0002
2	1,1713	- 0,92127	0,00003	0,61110	- 0,0005
3	1,17125				

Jadvaldan kurinadiki, x_3-x_2= |1,17125 – 1,1713| = 0,00005 < ε . Demak echim deb x = 1,17125 ni (ε =0,0001 aniqlikda) olish mumkin.

1-4 – rasmlarga dikkat bilan e`tibor kilsak shuni ko`ramizki, *f(x)=0* tenglamaning taqribiy echimlarini vatarlar va urinmalar usuli bilan topganda aniq echimga ikki chekkadan yaqinlashib kelinadi. Shuning uchun ikkala usulni bir vaktning o`zida qo`llash natijasida maqsadga tezrok erishish mumkin. Bu usulni k o m b i n a t s i y a l a n g a n u s u l deb ataydilar. Kombinatsiyalangan usul yuqorida keltirilgan usullarning umumlashmasi bo`lgani tufayli bu to`g’rida ko`p tuxtalmaymiz.

KETMA - KET YAQINLASHISH USULI

Bizdan *f(x)*=0 tenglamaning ildizini aniqlash talab etilsin. Bu tenglamani quyidagi (teng kuchli) ko`rinishda yozamiz

$$x = \varphi(x) \qquad (3.18)$$

f(x) *=0* tenglamani $x = \varphi(x)$ ko`rinishga keltirishni juda engil amallar bilan istalgan vaktda amalga oshirish mumkin. (3.18) ning ildizi *[a,b]* kesmada ajratilgan bo`lsin. *[a,b]* ning ichida ixtiyoriy *x* nuqtani olamiz ($a \le x_0 \le b$) va bu nuqtani boshlangich (nolinchi) yaqinlashish deb qabul kilamiz. *x* ni (3.18) ning ung tarafidagi *x* ning o`rniga kuyib, hosil bo`lgan natijani *x* desak,

$$x_1 = \varphi(x_0) \tag{3.19}$$

x_1 ni birinchi yaqinlashish buyicha (3.18) ning ildizi deyiladi. Keyingi yaqinlashishlar kuiidagicha topiladi:

$$x_2 = \varphi(x_1),$$

$$x_3 = \varphi(x_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Buning natijasida quyidagi ketma-ketlikni to`zamiz

$$x_0, x_1, x_2, \ \ldots\ , x_n \tag{3.20}$$

Agar (3.20) ketma-ketlikning limiti mavjud bo`lsa $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x})$, u xolda *x*(2.20) ning ildizi bo`ladi. Buning isboti juda sodda. Agar *φ (x)* ni uzluksiz funktsiya desak,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(\bar{x})$$

ya`ni x = φ (x) bo`lib, *x* (2.20) ning ildizi bo`ladi.

Agar (3.18) ketma-ketlikning limiti mavjud bo`lmasa, u xolda ketma-ket yaqinlashish usulining ma`nosi bo`lmaydi.

Yuqorida aytilganlardan xulosa shuki, biz bu usul bilan *f(x)* *=0,* [$x=\varphi(x)$] tenglamaning echimini topmokchi 5ulsak, quyidagi ketma-ket bajarilishi lozim bo`lgan jarayonni hisoblashimiz kerak bo`ladi:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \varphi(x_0) \\ x_2 &= \varphi(x_1) \\ x_3 &= \varphi(x_2) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

bu erda $x_0, x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n \ \ldots$ ketma-ket yaqinlashishlar; x_0-boshlangich yaqinlashish; x_1 - birinchi yaqinlashish; x_2-ikkinchi yaqinlashish va x.k.

(3.21) jarayon yaqinlashuvchi bo`lishining etarlilik shartlarini quyidagi teorema ifodalaydi (teoremani isbotsiz keltiramiz).

Teorema. $x=\varphi(x)$ *tenglamaning ildizi [a, b] kesmada ajratilgan bo`lib, bu kesmada quyidagi shartlar bajarilsa:*

1) $\varphi(x)$ *funktsiya [a, b] da aniqlangan va differentsiallanuvchi;*
2) *barcha* $x\in[a;b]$ *uchun* $\varphi(x)\in[a;b]$;
3) *barcha* $x\in[a;b]$ *da* $|\varphi'(x)|\le M<1$ *bo`lsa, u xolda* (3.21) *jarayon* ***yaqinlashuvchi*** *bo`ladi*

Bu erda shuni ta`kidlash lozimki, teoremaning shartlari faqat etarli bo`lib, zaruriy emasdir, ya`ni (3.21) jarayon bu shartlar bajarilmaganda ham yaqinlashuvchi bo`lishi mumkin. (3.21) ni hisoblaganimizda, hisoblashni avvaldan berilgan aniqlik uchun quyidagi tengsizlik bajarilgunga qadar davom ettiramiz:

$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$, *(n=1,2,3,4, ...)*

Misol. 4x-5lnx =5 tenglama ε =0,0001 aniqlikda ketma-ket yaqinlashish usuli bilan echilsin.

E c h i s h . Tenglamani $\ln x=\frac{4x-5}{5}$ ko`rinishda yozamiz va $y_1=\ln x$; $y_2=\frac{4x-5}{5}$ chiziqlar kesishgan nuqtani aniqlaymiz. Bular $x_0=2,28$; $x_0=0,57$. Bularni boshlangich yaqinlashish nuqtalari deb olamiz. Berilgan tenglamani *x=1,25(1+lnx)* ko`rinishda yozsak, $\varphi(x)=1,25(1+\ln x)$ bo`ladi, bundan, $\varphi'(x)=\frac{1,25}{x}$. Bu xolda $x_0=2,28$ uchun ketma-ket yaqinlashish jarayoni yaqinlashuvchi bo`ladi:

$\varphi'(x)=\frac{1,25}{x}<1$

Hisoblash natijalari quyidagi 2.2- jadvalda keltirilgan:

2-jadval

(1)	(2)	(3)
x	ln(1) +1	1,25(2)
2,28	1,82418	2,28022
2.28022	1.82427	2,28034
2,28034	1,82432	2,28040
2,28040	1,82435	2.28044
2,28044	1,82437	2,28046

Boshlangich yaqinlashish x_0 =0,57 atrofida jarayon yaqinlashuvchi bo`lmaydi, chunki

$$\varphi'(x) = \frac{1{,}25}{x_0} = \frac{1{,}25}{0{,}57} > 1$$

Bu xolda berilgan tenglamani $x = e^{0,8\,x-1}$ ko`rinishda yozib, hisoblashni davom ettirish kerak.

Takrorlash uchun savollar:

1. Tenglamaning aniq echimi nima?
2. To`g'ri chiziqning tenglamasini yozing.
3. Izlanayotgan echim nima?
4. Taqribiy echim nima?
5. Vatarlar usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?
6. Urinmalar usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?
7. Urinmaning tenglamasini yozing.
8. Boshlangich yaqinlashish nima?
9. Urinmalar usulining 1-xolati qanday?
10. Urinmalar usulining 2-xolati qanday?
11. Teng kuchli tenglamalar nima?
12. Ketma-ket yaqinlashish usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?

4-Ma'ruza. CHIZIQSIZ TENGLAMALAR SISTEMASINI TAQRIBIY ECHISH USULLARI

Reja:

1. Vektorlar va matritsalar xakida ba`zi ma`lumotlar.
2. Masalaning qo`yilishi.
3. Gauss usuli.
4. Bosh elementlar usuli.
5. Usullarning ishchi algoritmlari.

Tayanch iboralar:

Vektor, matritsa, skalyar ko`paytma, vektorning moduli, birlik matritsa, aniq usul, iteratsion tizim, birinchi boskich, ikkinchi boskich.

VEKTORLAR VA MATRITSALAR XAKIDA BA`ZI MA`LUMOTLAR

Ushbu ma`ro`zada tenglamalar tizimlarini echish usullarini kurishda lozim bo`ladigan vektorlar va matritsalar xakidagi asosiy ma`lumotlarni keltiramiz. Bular ukuvchiga oliy matematika kursidan ma`lum bo`lsada, bu ma`lumotlar ushbu mavzuni yoritishda muxim bo`lganligi tufayli bu xakda kiskacha tuxtalishni lozim topdik.

Vektor fazoning ikkita nuqtasi uning boshi va oxiri bilan aniqlanadi. Faraz kilaylik, barcha vektorlar fazoning birdan-bir nuqtasi - koordinata boshidan boshlansin. U xolda bu vektorni aniqlash uchun faqat bitta nuqtani, ya`ni uning oxirini ko`rsatish etarli bo`ladi, bu nuqta o`z navbatida uning koordinatalari bulmish uchta son orqali ifodalanadi.

Shunday kilib, koordinata boshidan boshlangan har qanday vektor tartiblangan sonlarning uchligi bilan aniqlanadiki, u v e k t o r o x i r i n i n g k o o r d i n a t a l a r i deb ataladi. Aksincha, har qanday tartiblangan sonlar uchligi koordinata boshi bilan shu uchta son koordinatalari vazifasini utovchi nuqtani birlashtiruvchi yagona vektorni aniqlaydi. Biz *x* vektorga uning koordinatalari yoki tashkil etuvchilari deb atalmish x_1, x_2, $x_3$sonlar uchligini mos kuyamiz.

Endi vektorlar ustida bajariladigan amallarni kurib chikaylik.

Vektorni songa ko`paytirish uchun uning koordinatalari shu songa ko`paytiriladi, ya`ni

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,x_3) = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3) \qquad (4.1)$$

Shunga o`xshash

$$(x_1,x_2,x_3) \pm (y_1,y_2,y_3) = (x_1 \pm y_2,\ x_2 \pm y_2,\ x_3 \pm y_3) \qquad (4.2)$$

Vektorning moduli (uzunligi) quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad (4.3)$$

x va u v e k t o r l a r n i n g s k a l y a r k o ` p a y t m a s i deb ularning modullarining hamda oralaridagi burchak kosinusining ko`paytmasiga aytiladi:

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \ \cos(x, y)$$

Agarda *x* va *u* vektorlar moc ravishda (x_1,x_2,x_3) va (y_1,y_2,y_3) koordinatalarga ega bo`lsalar, ularning skalyar ko`paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad (4.4)$$

Xuddi yuqoridagi kabi biz endi *p* o`lchovli vektor va ular ustida bajariladigan amallarni aniqlashimiz mumkin. *p*o ` l c h o v l i v e k t o r deb tartiblangan *p* ta haqiqiy x_1, x_2, $\ldots x_n$ sonlarni aytamiz. V e k t o r n i n g λ s o n g a k o ` p a y t m a s i quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,x_3) = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots\ \lambda x_n)$$

(x_1, $x_2,\ldots x_n$) hamda ($y_1,y_2,\ldots,y_n$) v e k t o r l a r n i n g y i g ' i n d i s i va a y i r m a s i esa quyidagiga teng:

$$(x_1,\ x_2,\ldots x_n) \pm (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1 \pm y_1,\ x_2 \pm y_2,\ \ldots,\ x_n \pm y_n)$$

p o`lchovli v e k t o r n i n g m o d u l i deb quyidagi songa aytiladi:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

I k k i v e k t o r n i n g bir-biriga s k a l y a r k o ` p a y t m a s i esa quyidagiga teng:

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

Ba`zi xollarda bitta vektor o`rniga vektorlar tizimi bilan ishlashga to`g'ri keladi. Bunday v e k t o r l a r  t i z i m i n i n g  k o o r d i n a t a l a r i to`g'ri burchakli jadval ko`rinishiga ega bo`ladi va m a t r i t s a deb ataladi. Matritsa elementlari ikkita rakamli (indeksli) bitta xarf orqali ifodalanadi (masalan a_{ij}). Bularning birinchisi satr rakamini, ikkinchisi esa ustun rakamini bildiradi. Matritsa elementlari ikki tomonidan kavslar yoki ikkita vertikal turri chiziq, orasiga olib yoziladi. Masalan, uchta satr va turtta ustundan iborat (3X4 tartibli) matritsa quyidagicha yoziladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \end{pmatrix}$$

Bu matritsani uchta turt o`lchovli vektor satrlar tizimi sifatida yoki turtta uch o`lchovli vektor ustunlar tizimi sifatida karash mumkin.

Ko`pincha ustunlari va satrlari soni bir xil bo`lgan matritsalar uchraydi. p ta ustun va p ta satrdan iborat matritsani p - t a r t i b l i k v a d r a t m a t r i t s a deyiladi.

Matritsalar ustida amallar oddiygina aniqlanadi. Bizga kelgusida faqat matritsani vektorga ko`paytirish va ularning ko`paytmasi kerak bo`lishi tufayli shularnigina kurib chiqamiz.

M a t r i t s a n i n g v e k t o r g a k o ` p a y t m a s i deb shunday vektor ustunga aytiladiki, uning koordinatalari matritsa satrlaridagi vektorlarning berilgan vektor ustunga skalyar ko`paytmalaridan iborat, ya`ni

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} a_{22} ... a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} a_{m2} ... a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_m \end{pmatrix}$$

bu erda

$$c_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + ... + a_{1n}b_n$$

$$c_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + ... + a_{2n}b_n$$

$$.......................$$

$$c_m = a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + ... + a_{mn}b_n$$

Matritsalarning bir-biriga ko`paytmasini sodda mi-sol tarikasida kvadrat matritsalar uchun aniqlaymiz. Ikkita bir xil tartibli kvadrat m a t r i t s a n i n g k o ` p a y t m a s i quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{22}b_{22}...b_{2n} \\ .... \\ b_{n1}b_{2n}...b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}...c_{1n} \\ c_{22}c_{22}...c_{2n} \\ .... \\ c_{n1}c_{2n}...c_{nn} \end{pmatrix}$$

bu erda

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + ... + a_{1n}b_{n2}$$

. . . .

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + ... + a_{2n}b_{n1}$$

. . . .

va umuman

$$c_{ik} = a_{i1}b_{ik} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{ik}b_{nk}$$

ya`ni $i$- satr va $b$ - ustundagi element birinchi matritsa $i$- satrining ikkinchi matritsa $k$ - ustuniga skalyar ko`paytmasiga teng.

Asosiy diagonalidagi elementlar birga, barcha kolganlari esa nolga teng bo`lgan kvadrat matritsa muxim axamiyatga ega. Bundaymatritsanib i r l i k m a t r i t s a deyiladi va E bilan belgilanadi:

$$E = \begin{pmatrix} 1 \ 0 \ ... \ 0 \\ 0 \ 1 \ ... \ 0 \\ . \ . \ . \ . \\ 0 \ 0 \ ... \ 1 \end{pmatrix}$$

Bunday matritsa «birlik» deb atalishiga asosiy sabab ixtiyoriy kvadrat matritsa A uchun

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

tenglik urinli.

Kupchilik xollarda teskari matritsa tushunchasi ham ishlatiladi. A matritsaga t e s k a r i A^{-1} m a t r i t s a deb shunday matritsaga aytiladiki, uning uchun

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

tenglik urinlik bo`ladi.

Yuqorida keltirilganlardan foydalanib chiziqli tenglamalar tizimini matritsalar yordamida ifodalaymiz.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

tizim berilgan bo`lsin. $A$ bilan noma`lumlar oldidagi koeffi-tsientlardan tashkil topgan matritsani belgilaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \; ... \; a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \; ... \; a_{2n} \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}a_{n2} \; ... \; a_{nn} \end{pmatrix}$$

V bilan ozod xadlardan iborat vektor ustunni, X bilan esa noma`lumlardan iborat vektor ustunni belgilaymiz:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

U xolda berilgan (4.5) tizim quyidagicha yoziladi:

$$A \cdot X = B \tag{4.6}$$

MASALANING QO`YILISHI

Nazariy va amaliy matematikaning ko`pgina masalalari chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echishga olib keladi.

Chiziqli algebraik tenglamalarni echish asosan ikki usulga - a n i q va i t e r a t s i o n usullarga bo`linadi.

Aniq usul deganda shunday usul tushuniladiki, uning yordamida chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning aniq echimini topish mumkin bo`ladi. Xammaga ma`lum bo`lgan Kramer koidasi aniq usulga misol bula oladi. Lekin, Kramer koidasi amalda juda kam qo`llaniladi, chunki bu usul bilan *p*- tartibli chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echganda nixoyatda ko`p arifmetik amallarni bajarishga to`g’ri keladi.

Biz hisoblash uchun tejamli bo`lgan G a u s s va b o s h e l e m e n t l a r aniq usullarini kurib chiqamiz. Bular noma`lumlarni ketma-ket yuko-tish goyasiga asoslangan.

Iteratsion (ketma-ket yaqinlashish) *usul* shu bilan xarakterlana-diki, bu usulda chiziqli algebraik tenglamalar tizimining echimi ketma-ket yaqinlashishlarning limitidek topiladi.

Iteratsion usullarni qo`llayotganda faqat ularning yaqinlashishlarigina emas, balki yaqinlashishlarning tezligi ham katta axamiyatga ega.

Bu usullar ayrim tizimlar uchun juda tez yaqinlashib, boshqa ti-zimlar uchun sekin yaqinlashishi yoki umuman yaqinlashmasligi ham mumkin. Shuning uchun ham iteratsion usullarni qo`llayotganda tizimni avval tayyorlab olish kerak. Ya`ni, berilgan tizimni unga teng kuchli bo`lgan shunday tizimga almashtirish kerakki, hosil bo`lgan tizim uchun tanlangan usul tez yaqinlashsin.

Tizimdagi tenglamalardan noma`lumlarni ketma-ket yo`qotishni ikki yo`l bilan amalga oshirish mumkin:

a) tenglamalarning kerakli kombinatsiyalarini tuzish;

b) almashtirishning har bir kadamida tizim matritsasining biror elementini yoki biror ustundagi diagonal elementning ostidagi barcha elementlarini nolga aylantirish maqsadida bu mat-ritsani maxsus ravishda tanlab olingan matritsaga ko`paytirish.

Har ikkala xolda ham e`tibor shunga karatilishi kerakki, almashtirishlar natijasida berilgan tizim unga teng kuchli bo`lgan tizimga almashishi hamda sodda ko`rinishga ega bo`lishi lozim.

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektor nima?
2. Matritsa nima?
3. Skalyar ko`paytma nima?
4. Vektorning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
5. Kvadrat matritsa nima?
6. Matritsani vektorga ko`paytmasi nima?
7. Matritsalarni bir-biriga ko`paytmasi qanday bajariladi?
8. Teskari matritsa nima?
9. Birlik matritsa nima?
10. Gauss usuli nima?

5-Ma'ruza. FUNKSIYALARNI YAQINLASHTIRISH MASALASINING QO'YILISHI VA ECHIMNING YAGONALIGI. LAGRANJ INTERPOLYASION FORMULASI VA XATOLIGI

Reja:

1. Lagranjning interpolyatsion formulasi.
2. EkstrapolyatsiY.
3. Teskari interpolyatsiY.
4. Interpolyatsion formulalar uchun ishchi algoritmlar.

Tayanch iboralar:

IInterpolyatsiya, interpolyatsion formula, interpolyatsiya tuguni, tizm, tizideterminanti, oshkor ko`rinish, fundamental ko`pxad, interpolyatsion ko`pxad, Lagranj ko`pxadi, interpolyatsiya koldik xadi, ektrapolyatsiya, teskari interpolyatsiY.

LAGRANJNING INTERPOLYATSION FORMULASI

Topilishi lozim bo`lgan ko`pxadning ko`rinishini quyidagicha olaylik:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \qquad (4.15)$$

bu erda a_i $(i = 0,1,2, \dots, p)$ — noma`lum o`zgarmas koeffitsientlar. Shartga ko`ra $L_n(x)$ funktsiya $x_0, x_1, \dots, x_n$interpolyatsiyalash tugunlarida qiymatlarga erishadi. Buni hisobga olgan xolda (4.15) dan quyida-gilarni topish mumkin:

x_0 interpolyatsiya tugunida

$L_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n$

va nixoyat x_n interpolyatsiya tugunida

$L_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n$

Ushbu ifodalarni tenglamalar tizimi ko`rinishida yozsak:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \qquad (4.16)$$

bu erda x_i va y_i (1=0,1,2, ..., *p)* – berilgan funktsiyaning jadval qiymatlari. Bu tizimning determinanti

$$\begin{vmatrix} 1\,x_0\,x_0^2\,x_0^3 \ldots x_0^n \\ 1\,x_1\,x_1^2\,x_1^3 \ldots x_1^n \\ \ldots\ \ldots.\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ 1\,x_n\,x_n^2\,x_n^3 \ldots x_n^n \end{vmatrix}$$

x_0, x_1, x_2, …, x_n tugunlar ustma-ust tushmagan xolda noldan farqli bo`ladi. Masala mazmunidan ravshanki, $x_0$, $x_1$, $x_2$, …, $x_n$nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (4.16) tizim va shu bilan birga qo`yilgan interpolyatsiya masalasi yagona echimga ega. Bu tizimni echib, a_0, a_1, …, a_n larni topib (4.15) ga kuysak, $L_n(x)$ ko`pxad aniqlanadi. Biz $L_n(x)$ ning oshkor ko`rinishini topish uchun boshqacha yo`l tutamiz. Avvalo fundamental ko`pxadlar deb ataluvchi $Q_i(x)$ larni, ya`ni

$$Q_i\left(x_j\right) = \delta_{ij}\begin{cases} 0, & агар\ \ i \neq j\ \ булганда \\ 1, & агар\ \ i = j\ \ булганда \end{cases} \tag{4.17}$$

shartlarni kanoatlantiradigan n-darajali ko`pxadlarni ko`ramiz.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i Q_i(x) \tag{4.18}$$

izlanayotgan interpolyatsion ko`pxad bo`ladi. (4.17) shartni kanoatlantiruvchi ko`pxad

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{4.19}$$

ko`rinishida bo`ladi. (4.19) ni (4.18) ga kuysak,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \cdot y_i \tag{4.20}$$

ko`rinishdagi Lagranj interpolyatsion formulasiga ega bo`lamiz.

Bu formulaning xususii xollarini ko`raylik:

n=1 bo`lganda Lagranj ko`pxadi ikki nuqtadan utuvchi to`g’ri chiziq tenglamasini beradi:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_1-x_0}y_0 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1}y_1$$

Agar *p*=2 bo`lsa, u xolda kvadratik interpolyatsion ko`pxadga ega bo`lamiz, bu ko`pxad uchta nuqtadan utuvchi va xertikal ukka ega bo`lgan parabolani aniqlaydi:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

Lagranj interpolyatsion formulasining boshqa ko`rinishini keltiramiz. Buning uchun

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

ko`pxadni kiritamiz. Bundan hosila olsak,

$$\omega_{n+1}^{`}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{i\neq k}(x-x_1)\right]$$

Kvadrat kavs ichidagi ifoda $x = x_i$, va k≠j bo`lganda nolga ylanadi, chunki ($x_j$ - $x_i$) ko`paytuvchi katnashadi. Demak,

$$\omega_{n+1}^{`}(x_j)=\prod_{i\neq j}(x-x_1)$$

Shuning uchun ham, $\prod_{i\neq k}\frac{(x-x_1)}{(x_j-x_i)}$ Lagranj koeffitsientini

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}^{`}(x_j)(x-x_j)}$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bunda esa Lagranj ko`pxadi quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}^{`}(x_j)(x-x_j)} \qquad (4.21)$$

Endi tugunlar bir xil o`zoklikda joylashgan $x_1$-$x_0$ =$x_2$–$x_1$ = … =$x_n$–$x_{n-1}$=h xususiy xolniko`ramiz.

Bu xolda soddalik uchun x=x_0+th almashtirish bajaramiz, u xolda

$$x-x_j=h(t-j), \qquad \omega_{n+1}(x)=h^{n+1}\omega_{n+1}^{*}(t).$$

bu erda

$$\omega_{n+1}^{*}(t)=t(t-1)...(t-n), \ \ \omega_{n+1}^{*}(x_j)=(-1)j!\,(h-j)!h^n$$

bo`lib, (4.21) Lagranj interpolyatsion ko`pxadi quyidagi ko`rinishni oladi:

$$L_n(x+th)=\omega_{n+1}^{*}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}\,f(x_j)}{(t-j)j\,!(n-j)!} \qquad (4.22)$$

Endi Lagranj interpolyatsion formulasining koldik, xadini baxolashni ko`ramiz. Agar biror [*a*,*b*] oraliqda berilgan *f (x)* funktsiyani $L_n(x)$ interpolyatsion ko`pxad bilan almashtirsak, ular interpolyatsiya tugunlarida o`zaro ustma-ust tushib, boshqa nuqtalarda esa bir-biridan farq kiladi. Shuning uchun koldik xadning R(x) = f (x) - $L_n(x)$ ko`rinishini topish va uni baxolash bilan shurullanish maqsadga muvofik. Buning uchun interpolyatsiya tugun-larini o`z ichiga oladigan [*a*,*b*] oraliqda f (x) funktsiya (n+1) tartibli $f^{(n+1)}(x)$ uzluksiz hosilaga ega deb faraz kilamiz. Interpolyatsiyaning koldik xadi R(x) uchun quyidagi teorema urinlidir:

Teorema. Agar f(x) funktsiya [a,b] oraliqda (n+1)tartibli uzluksiz hosilaga ega bo`lsa, u xolda interpolyatsiya koldik, xadini

$$f(a)-L_n(x)=R(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} \quad (4.23)$$

ko`rinishda ifodalash mumkin. Bu erda*$\xi\in[a,b]$ *bo`lib, umuman aytganda x ning funktsiyasidir.

M i s o l . Agar ln100, 1n101, 1n102, 1n103 larning qiymatlari ma`lum bo`lsa, Lagranjning interpolyatsiey formulasi yordamida 1n100,5 ni qanday aniqlikda kisoblash mumkin?

E c h i s h . Lagranj interpolyatsion formulasining koldik xadi, agar n=3 bo`lsa, quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Bizning xolda $x_0=100,\ x_1=101,\ x_2=102,\ x_3=103,\ x=100{,}5;\ 100<\xi<100{,}5$. Chunki $f(x)=\ln x$u xolda $f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$. Shunday kilib,

$$|R(100{,}5)|\le\frac{6}{(100)^4\cdot 4!}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5=0{,}23\cdot 10^{-8}$$

EKSTRAPOLYATSIYA

Ekstrapolyatsiya, ya`ni argumentning jadvaldagi qiymatlaridan tashqari qiymatlarida funktsiyaning qiymatini topish masalasi ustida tuxtalib utamiz. ekstrapolyatsiyalash odatda, jadvalning bir-ikki kadami mikyosida bajariladi. Chunki argu-mentning jadvaldagi qiymatidan o`zokrok qiymatida ekstrapolya-tsiyalanganda xato ortib ketadi. Jadval boshida ekstrapolyatsiyalash uchun Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi qo`llanilib, jadval oxirida esa ikkinchisi qo`llaniladi. Interpolyatsion ko`p-xadning tartibi odatda jadvalning amaliy o`zgarmas ayirmalar-ining tartibiga teng kilib olinadi.

M i s o l . 4.6-jadvaldan foydalanib x=1,210 va x = 1,2638 nuqtalar uchun ko`pxadning ko`rinishi aniqlansin.

4.6-jadval;

x	$y=f(x)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	7232	-831	95
1,220	0,113276	6395	-742	93
1,225	0,119671	5653	-649	93
1,230	0,125324	5004	-556	91

1,235	0,130328	44448	-465	90
1,240	0,134776	3983	-375	88
1,245	0,138759	3608	-287	87
1,250	0,142367	3321	-200	
1,255	0,145688	3121		
1,260	0,148809			

E c h i s h . Jadvaldagi uchinchi tartibli ayirma amalda o`zgarmasdir. Shuning uchun ham uchinchi tartibli interpolyatsion formuladan foydalanamiz. Jadval boshida va oxirida ekstrapolyatsiyalash uchun formulalar quyidagicha yoziladi:

$$P_3(x) = 0{,}106044 + 0{,}007232q + (-0{,}000837)\cdot\frac{q(q-1)}{2} + 0{,}000095\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}$$

$$P_3(x) = 0{,}148809 + 0{,}003121q + (-0{,}000200)\cdot\frac{q(q-1)}{2} + 0{,}000087\cdot\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}$$

Birinchi formulaga $q = (x - x_0)/h = \frac{1{,}210 - 1{,}215}{0{,}05} = -1$

qiymatni kuysak:

$$y(1{,}210) \approx 0{,}106044 + (-1)\cdot 0{,}007232 + \frac{(-1)\cdot(-2)}{2}\cdot(-0{,}000837) +$$
$$+\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}\cdot 0{,}000095 = 0{,}097880$$

Shunga o`xshash $q = \frac{x - x_4}{h} = \frac{1{,}2638 - 1{,}260}{0{,}005} = 0{,}76$ ni ikkinchi formulaga kuysak,

$$y(1{,}2638) \approx 0{,}148809 + 0{,}76\cdot 0{,}003121 + \frac{0{,}76\cdot 1{,}76}{2}\cdot(-0{,}000200) +$$
$$+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76\cdot 2{,}76}{3!}\cdot 0{,}0000535 = 0{,}1511007$$

ESKARI INTERPOLYATSIYA

Teskari interpolyatsiY. Shu paytgacha *y=f(x)* funktsiyaning jadvali berilgan xolda argumentning berilgan qiymati *x* da funktsiyaning taqribiy qiymatini topish masalasi bilan shugul-landik. Teskari interpolyatsiya masalasi quyidagicha qo`yiladi: *y=f(x)* funktsiyaning berilgan $\bar{u}$ qiymati uchun argumentning shunday $\bar{x}$ qiymatini topish kerakki, $f(\bar{x})\ \bar{y}$ bo`lsin. Faraz kilaylik, jadvalning karalayotgan oraligida *f (x)* funktsiya monoton va demak, bir qiymatli teskari funktsiya $x=\varphi(y)$ $(f(\varphi(y))=y)$ mavjud bo`lsin. Bunday xolda teskari interpolyatsiya $\varphi(y)$ funktsiya uchun odatdagi interpolyatsiyaga keltiriladi. $x=\varphi(y)$ qiymatni topish uchun Lagranj yoki Nyutonning tugunlari har xil o`zoklikda joylashgan xol uchun formulalardan foydalanish mumkin. Masalan, Lagranjning interpolyatsion formulasi

$$L_n(y)=\sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{j\neq i} \frac{y-y_i}{y_i-y_j} \tag{4.25}$$

ko`rinishga ega bo`lib, koldik xadi

$$\varphi(y)-L_n(y)=\frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i\neq K}^{n}(y-y_i)$$

bo`ladi.

Agar $f(x)$ monoton bo`lmasa, yuqoridagi formula yaramaydi. Bunday xolda u yoki bu interpolyatsion formulani yozib, argumentning ma`-lum qiymatlaridan foydalanib va funktsiyani ma`lum deb hisoblab, hosil bo`lgan tenglama u yoki bu usul bilan argumentga nisbatan echiladi.

M i s o l . Funktsiyaning quyidagi qiymatlari jadvali berilgan:

4.7-jadval

x	0,880	0,881	0,882	0,883
y=f(x)	2,4109	2,4133	2,4157	2,4181

x argumentning shunday qiymati topilsinki, u=2,4 bo`lsin.

E c h i s h . 4.7- jadvaldagi qiymatlarga ko`ra funktsiya monoton, shuning uchun ham n=3 deb olib, (4.25) formuladan foydalanamiz:

$$L_3(y)=\frac{(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4157)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4109-2{,}4133)(2{,}4109-2{,}4157)(2{,}4109-2{,}4181)}\ 0{,}880\ +$$

$$+\ \frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4157)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4133-2{,}4133)(2{,}4133-2{,}4157)(2{,}4133-2{,}4181)}\ 0{,}881\ +$$

$$+\ \frac{(2{,}41-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4157-2{,}4109)(2{,}4157-2{,}4133)(2{,}4157-2{,}4181)}\ 0{,}882\ +$$

$$+\ \frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4157)}{(2{,}4181-2{,}4109)(2{,}4181-2{,}4133)(2{,}4181-2{,}4157)}\ 0{,}883\ =$$

$$=-0{,}0634766\cdot 0{,}880+0{,}6982421\cdot 0{,}881+0{,}4189452\cdot 0{,}882-0{,}0537109\cdot 0{,}883=0{,}88137$$

Yuqorida keltirilgan muloxazalardan so`ng quyidagilarni aytish mumkin:

Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi [*a*,*b*] kesmaning boshlangich nuqtalarida interpolyatsiyalash va kesmaning oxirgi nuqtalarida ekstrapolyatsiyalash uchun, ikkinchi formulasi esa kesmaning oxirgi nuqtalarida interpolyatsiyalash va kesmaning boshlangich nuqtalarida ekstropolyatsiyalash uchun qo`llaniladi. Shuni ham aytish lozimki, ekstrapolyatsiyalash interpolyatsiyalashga karaganda kattarok xatoliklar beradi, ya`ni uning qo`llanish chegarasi cheklangan. Lagranj va Nyuton interpolyatsion formulalarini bir-birlari bilan solishtirsak quyida-gilar bilan farqlanishini ko`ramiz:

Lagranj formulasidagi har bir had teng xuquqli n-tartibli ko`phaddan iborat. Shuning uchun avvaldan (hisoblanmasdan avval) birorta hadini tashlab yubora olmaymiz. Nyuton formulasining hadlari esa darajasi oshib boruvchi ko`pxadlardan iborat bo`lib, ularning koeffitsientlari faktoriallarga bulingan chekli ayir-malardan iborat. Shuning uchun Nyuton formulasidagi kichik koeffitsientlar oldidagi xadlarni tashlab yuborishimiz mumkin. Ya`ni bu xolda funktsiyaning oraliq qiymatlarini etarli aniqlikda sodda interpolyatsion formulalardan foydalanib hisoblash mumkin.

Takrorlash uchun savollar:

1. Lagranjning interpolyatsion formulasini yozing.
2. Interpolyatsiya tuguni nima?
3. Tizim nima?
4. Tenglamalar tizmini echishning kaysi usullarini bilasiz?
5. Determinant nima?
6. n-darajali ko`pxadni ifodalang.
7. n-ning qanday qiymatida Lagranj ko`pxadi ikki nuqtasidan utuvchi to`g’ri chiziq tenglamasini ko`rsating.
8. Lagranjning interpolyatsion formulasining boshqa ko`rinishini keltiring.
9. Interpolyatsiya koldik xadi xakidagi teorema.
10. ekstrapolyatsiya nima?
11. Teskari interpolyatsiya masalasi qanday qo`yiladi?

6-Ma’ruza. CHIZIQLI BO`LMAGAN TENGLAMALAR SISTEMASINI TAQRIBIY ECHISH

Reja:

1. Chiziqli bo`lmagan tenglamalar tizimining moxiyati va axamiyati.
2. Ketma – ket (boshlang’ich) yaqinlashish usuli.
3. Usulning ishchi algoritmi.

Tayanch iboralar:

Xususiy hosila, chiziqli tenglama, oddiy iteratsiya, chiziqli bulmagan tenglama, uzluksiz tizim, boshlangich yaqinlashish, kvadrat to`g'ri turtburchak, birinchi yaqinlashish, ikkinchi yaqinlashish.

CHIZIQLI BO`LMAGAN TENGLAMALAR TIZIMINING MOXIYATI VA AXAMIYATI

Shu paytgacha biz faqat chiziqi tenglamalar tizimini echish usullari bilan tanishdik. endi tenglamalar tizimi chiziqli bulmagan hol ustida tuxtalamiz. Soddalik uchun ikki noma`lumli ikkita chizimi bulmagan tizimni oddiy iteratsiya usuli bilan echishga tuxtalamiz. Bunday tizim quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Faraz kilaylik boshlangich x , *u* yaqinlashishlar berilgan bo`lsin. Berilgan tizimni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{cases} x = F(x, y) \\ y = \Phi(x, y) \end{cases} \tag{6.2}$$

hamda bu tizimning ung tomonidagi x va *u* lar o`rniga boshlangich yaqinlashish x , *u* larni kuyib, birinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} x_1 = F(x_0, y_0) \\ y_1 = \Phi(x_0, y_0) \end{cases} \tag{6.3}$$

Xuddi shuningdek ikkinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$x_2 = F(x_1, y_1)$$

$$y_2 = F(x_1, y_2) \tag{6.4}$$

va umuman

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n = \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{cases} \tag{6.5}$$

Agarda *(x, u)* va F(x, *u)* funktsiyalar uzluksiz, hamda $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ va $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo`lsa, u xolda ularning limitlari berilgan tenglamaning echimi bo`ladi.

KETMA – KET (BOSHLANG'ICH) YAQINLASHISH USULI

Yuqorida keltirilgan iteratsion jarayonning yaqinlashuvchi bo`lish shartlariga tuxtalamiz.

Teorema, x va $\bar{u}$ (6.1) tizimning aniq echimlari, a < $\bar{x}$ < b, c < $\bar{y}$ < d bo`lib, *x=a,x=b, y=c* va *y=d* to`g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to`g'ri turtburchak ichida boshqa echimlar yo`q bo`lsa, u xolda ko`rsatilgan turri turtburchakda quyidagi

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \le P_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le q_1, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \le P_2, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \le q_2$$

(R_1 + R_2≤ M < 1 va q_1 + q_2≤M< 1) tengsizliklar bajarilsa, iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo`ladi va boshlangich yaqinlashish *x,u* sifatida turri turtburchakning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

Teoremaning isbotini keltirib utirmaymiz.

Misol

$$\begin{cases} f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ \varphi(x,y) = x^3 - y^3 - 6x + K = 0 \end{cases}$$

tizimning musbat echimini iteratsion usul bilan uch xona aniqlikda toping.

Berilgan tizimni quyidagi ko`rinishda yozib olamiz:

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} = F(x,y)$$

$$y = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3} = \Phi(x,y)$$

0≤x≤1, 0≤y≤1 kvadratni karaymiz. Agarda x_0, $y_0$nuqta shu kvadratga tegishli bo`lsa, u xolda 0<F ($x_0$, $y_0$) < 1 va 0 <F ($x_0$, $y_0$) < 1 bo`ladi. (x_0, y_0) boshlangich yaqinlashish qanday tanlanishidan kat`i nazar ($x_k$, $y_k$) yaqinlashishlar kvadratga tegishli bo`ladi, chunki

$$0 < \left(x_0^3 + y_0^3\right) / \ 6 < \frac{1}{3}$$

$$-1/6 < \left(x_0^3 - y_0^3\right) / \ 6 < \frac{1}{6}$$

Bundan tashqari (x_k, y_k) nuqtalar $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$, $\frac{1}{6} < y < \frac{1}{2}$ kvadratga tegishli. Bu kvadrat nuqtalari uchun:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{\frac{25}{36} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{34}{72} < 1$$

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \left|\frac{y^2}{2}\right| < \frac{34}{72} < 1$$

bajariladi.

Demak, ko`rsatilgan kvadratda tizim yagona echimga ega va uni iteratsion usulda aniqlash mumkin.

$x_0 = \frac{1}{2}$ va $y_0 = \frac{1}{2}$ deb olamiz, u xolda

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{6} = 0{,}542, \qquad y_1 = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{6} = 0{,}333$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}542^3 + 0{,}333^3}{6} = 0{,}533$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}542^3 - 0{,}333^3}{6} = 0{,}354$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}533^3 + 0{,}354^3}{6} = 0{,}533$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}533^3 - 0{,}354^3}{6} = 0{,}351$$

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}533^3 + 0{,}351^3}{6} = 0{,}532$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}533^3 - 0{,}351^3}{6} = 0{,}351$$

Bu erda $q_1 = q_2 = 34/72 < 0{,}5$ bo`lgani sababli birinchi uchta unlik rakamlarning mos tushganligi kerakli aniqlikdagi echimni topish imkoniyatini beradi. Shunday kilib kuyndagi echimga ega buldik.

$x = 0{,}532; \qquad y = 0{,}351$

Takrorlash uchun savollar:

1. Birinchi yaqinlashish qanday aniqlanadi?
2. Ikkichni yaqinlashish qanday aniqlanadi?
3. Boshlangich yaqinlashish xakidagi teorema?
4. Boshlangich yaqinlashish qanday shartga asosan topiladi?

5. To`g’ri turtburchakning ifodalovchi tenglamani yozing.
6. Iteratsion jarayon yaqinlashuvi shartini yozing.
7. Oshkor funktsiya nima?
8. Oshkormas funktsiya nima?
9. Nuqtani kvadratga tegishlilik shartini yozing.
10. Uzluksizlik funktsiya nima?

7-Ma’ruza. INTEGRALLARNI TAQRIBIY XISOBLASH. ENG SODDA INTERPOLYASION KVADRATUR FORMULALAR. TRAPETSIYA VA SIMPSON FORMULALARI.

Reja:

1. Masalaning qo`yilishi.
2. Aniq integralning geometrik ma`nosi.
3. To`g’ri to`rtburchak va trapetsiya usullari.
4. Usullarning ishchi algoritmlari, ularning xatoliklari miqdorini baholash va uni kamaytirish yo`llari.
5. Simpson (parabola) usuli.
6. Usulning ishchi algoritmi, uning xatoligi miqdorini baholash.

Tayanch iboralar:

Boshlangich funktsiya, elementar funktsiya, integral, aniq integral, aniqmas integral, kvadratur, kvadratur formula, to`g’ri turtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, egri chiziqli trapetsiya, egri chiziqli trapetsiya yuzi, aniq echim, bulinish nuqtalari.

MASALANING QO`YILISHI

Kundalik xayotimizda uchraydigan ko`p muxandislik masalalarini echishda aniq integrallarni hisoblashga to`g’ri keladi. Faraz kilaylik, $\int_a^b f(x)dx$ hisoblash talab etilsin. Bu erda *f(x)* - [*a; b*] kesmada berilgan uzluksiz funktsiY. Bu integralni hisoblashda quyidagi formula (Nyuton—Leybnits formulasi) qo`llaiiladi:

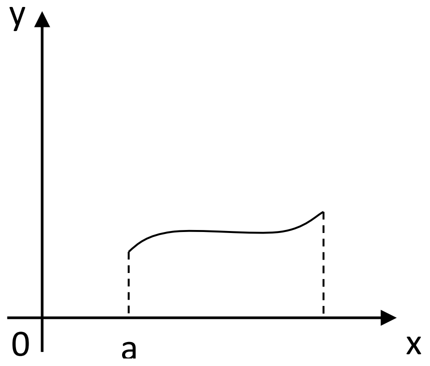
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{7.1}$$

bu erda *F(x)* – boshlangich funktsiY. Agar boshlangich funktsiya *F(x)* ni elementar funktsiyalar orqali ifodalab bo`lmasa yoki integral ostidagi funktsiya *f(x)* jadval ko`rinishida berilsa, u xolda (5.1) formuladan foydalanish mumkin emas. Bu xolda aniq integralni taqribiy formulalar orqali hisoblashga to`g’ri keladi. Bunday formulalarga *kvadratur formulalar* deyiladi.

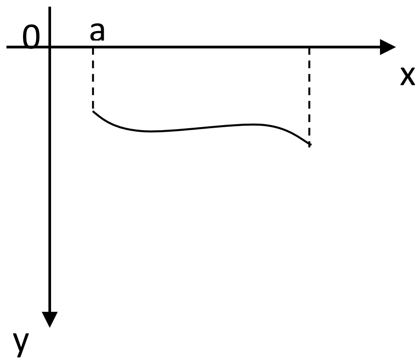
ANIQ INTEGRALNING GEOMETRIK MA`NOSI

Bunday formulalarni keltirib chiqarish uchun aniq integralning geometrik ma`nosini bilmoklik lozim.

Agar [*a; b*] kesmada $f(x) \geq 0$ bo`lsa, u xolda $\int_a^b f(x)dx$ ning qiymati son jixatidan $y = f(x)$ funktsiyani grafigi hamda $x=a$, $x=b$, to`g’ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl (figura) ning yuziga teng (11-rasm). Agar [a;b] kesmada $f(x)< 0$ bo`lsa, integralning qiymati yuqorida keltirilgan shaklning teskari ishora bilan olingan yuziga teng (2-racm).



1- rasm



2-rasm

Shunday kilib aniq integralni hisoblash deganda biror shaklning yuzini hisoblash tushuniladi. Quyida aniq integralni hisoblash uchun ba`zi taqribiy formulalar bilan tanishib chiqamiz.

TO`G’RI TURTBURCHAKLAR VA TRAPETSIYALAR FORMULASI

Faraz kilaylik, bizdan $\int\limits_a^b f(x)dx$ aniq integralning taqribiy qiymatini topish talab etilsin. x_0, x_1, x_2, . . . $x_n$nuqtalar yordamida *[a; b]* kesmani *p* ta teng bulakchalarga bo`lamiz. Har bir bulakchaning uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$. Bulinish nuqtalari esa:

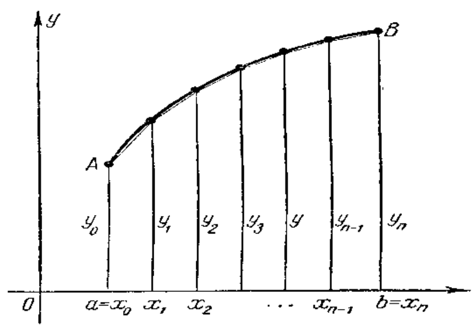
$$x_0 = a; \quad x_1 = a + h; \quad x_2 = x + 2h; \quad x_3 = a+3h \ ... \ x_{n-1} = a+(n-1)h; \quad x_n = b$$

Bu nuqtalarni tugun nuqtalar deb ataymiz. *f(x)* funktsiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$bo`lsin. Bular $y_0 = f(a); y_1 = f(x_1) \ldots y_n=f(b)$ larga teng bo`ladi .

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish uchun [a,b] kesmani bo`lish natijasida hosil bo`lgan barcha turtburchaklarning yuzini hisoblab, ularni jamlash kerak bo`ladi. Albatta bu yuzachalarni hisoblashlarda ma`lum darajada xatoliklarga yo`l qo`yiladi (shtrixlangan yuzachalar). Bularni va 7.1-da aytilgan aniq integralning geometrik ma`nosini hisobga olsak, quyidagini yozishimiz mumkin bo`ladi:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h \cdot y_0 + hy_1 + hy_2 + \ldots + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k;$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k \qquad (7.2)$$



3-rasm

Bu erda to`g’ri turtburchak yuzini hisoblashda uning chap tomon ordinatasi olindi. Agar ung tomon ordinatami olsak ham shunday formulaga ega bo`lamiz:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) = h\sum_{k=1}^{n} y_k;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k \tag{7.3}$$

(7.2) va (7.3) larni moe ravishda *chap* va *ung formulalar* deyiladi. Agar 3- rasmga e`tibor bersak, (7.2) formula bilan integralning qiymati hisoblanganda integralning taqribiy qiymati aniq qiymatidan ma`lum darajada kamrok chikadi, (7.3) yordamida hisoblanganda esa taqribiy qiymat aniq qiymatdan ma`lum darajada kattarok chikadi. Ya`ni (7.2) va (7.3) formulalar yordamida aniq integralning taqribiy qiymati hisoblan-ganda bu formulalardan biri integralning aniq qiymatini kami bilan ifodalasa, ikkinchisi esa ko`pi bilan ifodalaydi. 3- rasmdan kurinadiki, (7.2) va (7.3) formulalarni qo`llaganda yo`l qo`yiladigan xatolikni kamaytirish uchun bulinish nuqtalarini iloji boricha ko`prok olish, ya`ni kadam *h* ni tobora kichraytirish lozim bo`ladi. Albatta, h ni kichraytirish hisoblash jarayonining keskin usishiga olib keladi. Bu narsadan xavotirga tushmasligimiz kerak, chunki butun hisoblash jarayoni EHM ga yuklanadi.

Misol. To`g’ri turtburchaklar formulalari (7.2) va (7.3) yordamida $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ integralning taqribiy qiymatlari topilsin.

E c h i s h . Bu erda *a=0; b=1; n=10; h=(b- a)/n=0,1.*

$f(x) = \frac{1}{1+x}$

$x_0=a=0$; $x_1=a+h=0,1$; $x_2=a+2h=0,2$; $x_3=a+3h=0,3$

$x_4=a+4h=0,9$ … $x_9=a+9h=0,9$; $x_{10}=b=1$

$y_0 = f(x) = \frac{1}{1+x_0} = \frac{1}{1+0} = 1;$ $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{1+0,1} = 0,909;$

$y_2 = f(x_2) = 0,833;$ $y_3 = f(x_3) = 0,769; \ldots y_9\, f(x_9) = 0,53;$ $y_{10} = f(x_{10}) = 0,5.$

(7.2) dan $\int_o^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,1(1 + 0,909 + \ldots + 0,526) = 0,718$

(7.3) dan $\int_o^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,1(0,909 + 0,833 + \ \ldots\ + 0,5) = 0,6688$

Ma`lumki, $\int_o^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2,\ \ln 2 \approx 0{,}693$. Bulardan kurinadiki, aniq echim chap va ung formulalar orqali topilgan echimlar orasida yotadi.

Topilgan echimlar 0,718 va 0,668 ning o'rta arifmetigini olsak, bu 0,693 ga teng bo`ladi, bu esa aniq echim bilan ustma-ust tushadi.

Bu xulosalarni nazarga olgan xolda (5.2) va (5.3) formulalar xad-larini moc ravishda kushib o'rta arifmetigini olsak, quyidagi ifoda hosil bo`ladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) = h\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2}\right) \quad (7.4)$$

(7.4) formula *trapetsiyalar formulasi* deb ataladi. Bu formula yordamida topilgan integralning taqribii qiymatining aniqligini oshirish uchun bulinish nuqtalari soni n» ni ikki, uch va x.k. marta oshirish kerak bo`ladi. Albatta bunda ham hisoblash xajmi bir necha marotaba oshadi.

SIMPSON (PARABOLA) USULI

Simpson formulasi yuqorida keltirib chikarilgan formulalarga karaganda aniqligi yuqori bo`lgan formula hisoblanadi. Bu formulada integralning qiymatini yuqori aniqlikda olish uchun bulinish kadamlarini tobora oshirish talab etilmaydi. *[a,b]* kesmani $a=x_0<x_1<x_2 \ldots x_{n-1} < x_n=b$ nuqtalar bilan $p=2$ ta juft teng bulakchalarga ajratamiz. $u=f(x)$ egri chiziqka tegishli bo`lgan (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) nuqtalar orqali parabola o'tkazamiz. Bizga ma`lumki, bu parabolaning tenglamasi

$$y = Ax^2 + Bx + C \quad (7.5)$$

bo`ladi, bu erda *A, V, S* — hozircha noma`lum bo`lgan koeffitsientlar. $[x_0,x_2]$ kesmadagi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini shu kesmadagi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtirsak, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2}\left(Ax^2 + Bx + C\right)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + Cx + B\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_2} = A\frac{x_2^3 - x_0^3}{3} + B\frac{x_2^2 - x_0^2}{2} + C(x_2 - x_0)$$

$(x_2 - x_0)$ ni kavsdan tashqariga chikarib, umumiy maxraj-ga keltirsak:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\left[2A\left(x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2\right) + 3B\left(x_0 + x_2\right) + 6C\right] \qquad (7.6)$$

(7.5) dagi noma`lum *A, V, S* koeffitsientlar quyidagicha topiladi: *x* ning x_0, x_1, $x_2$qiymatlarida *f(x)* ning qiymatlari y_0, y_1, y_2 ekanini va $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$ j a m i n i hisobga olsak, (5.5) dan:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C, \\ y_1 &= A\left(\frac{x_0 + x_2}{3}\right)^2 + B\frac{x_0 + x_2}{2} + C, \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C. \end{aligned}\right\} \qquad (7.7)$$

(7.7) ning ikkinchi ifodasini turtga ko`paytirib, uchala tenglikni bir-biriga kushsak:

$$\begin{aligned} y_0 + 4y_1 + y_2 &= A\left[x_0^2 + \left(x_0 + x_2\right)^2 + x_2^2\right] + B\left[x_0 + 2\left(x_0 + x_2\right) + x_2\right] + 6C = \\ &= 2A\left[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2\right] + 3B\left(x_0 + x_2\right) + 6C \end{aligned} \qquad (7.8)$$

Bu ifodani (7.6) bilan solishtirsak, bularning ung taraflari bir xil ekanligini ko`ramiz. (7.8) ni (7.6) ning ung tarafiga kuysak va $x_2$-$x_0$=2h [h=(b-a)/n] ekanligini e`tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni topamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) \qquad (7.9)$$

Xuddi shunday formulani $[x_2, x_4]$ kesma uchun ham keltirib chiqarish mumkin:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) \qquad (7.10)$$

Bu formulalarni butun kesma *[a, b]* uchun keltirib chikarib, bir-biriga kushsak, quyidagini hosil kilamiz:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}\right) \qquad (7.11)$$

Bu topilgan formula *Simpson formulasidir.* Ba`zi xollarda uni *parabolalar formulasi* deb ham ataydilar.

(7.11) ni eslab kolish unchalik kiyin emas; tok rakamli ordinatalar turtga, juft rakamli ordinatalar (ikki chekkadagi ordinatadan tashqari) ikkita ko`paytiriladi. Chekkadagi ordinatalar $y_0$, $y_{2m}$ esa birga ko`paytiriladi.

USULNING ISHCHI ALGORITMI, UNING XATOLIGI MIQDORINI BAHOLASH

Misol. $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralning qiymatini trapetsiyalar formulasi hamda Simpson formulasi yordamida toping.

E c h i s h : Bu erda *0≤x≤1; n=10·a=0; b=1·h=(b-a)/n=0,1;* $f(x)=y=\frac{1}{1+x^2}$.

Quyidagi 1-jadvalni to`zamiz

1-jadval

x	x^2	$1+x^2$	$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	x	x^2	$1+x^2$	$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$
0,0	0,00	1,00	1,0000000	0,6	0,36	1,36	0,73522941
0,1	0,01	1,01	0,9900990	0,7	0,49	1,49	0,6711409
0,2	0,04	1,04	0,9615385	0,8	0,64	1,64	0,6097561
0,3	0,09	1,09	0,9174312	0,9	0,81	1,81	0,5524862
0,4	0,16	1,16	0,8620690	1,0	1,00	2,00	0,5000000
0,5	0,25	1,25	0,8000000				

Trapetsiyalar formulasiga asosan

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\approx h\left(\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+...+y_9\right)=0,1\left(\frac{1+0,5}{2}+0,9900990+...+0,5524862\right)=$$
$$=0,7849815$$

Simpson formulasiga asosan

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+2y_8+4y_9+y_{10}\right)=$$
$$=\frac{0,1}{3}\left[1+0,5+4(0,9900990+0,9174312+...+0,5524862+2(0,9615385+...+0,6097561))\right]=$$
$$0,7853981$$

Bizga ma`lumki, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\approx 0,78539816$

Bulardan kurinadiki, bu misol uchun trapetsiyalar formulasi qo`llanganda nisbiy xatolik 0,06 % da oshmaydi. Simpson formulasi qo`llanganda esa nisbiy xatolik deyarli yo`q.

Takrorlash uchun savollar:

1. Simpson formulasini ifodalang.
2. Simpson formulasi yana qanday nomlanadi?
3. Integrallarni hisoblashda yo`l qo`yilgan xatoliklar qanday topiladi?
4. Trapetsiya va Simpson usullarining asosiy farqi nimada?
5. Simpson usuli mohiyatini tushuntiring.

8-Мавзу. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN KOSHI MASALASINI TAQRIBIY YECHISH METODLARI.

Reja:

1. *Umumiy mulohazalar. Sonli differentsiallash. Differentsial tenglamalar.*
2. *Koshi masalasi.*
3. *Ayirmali metodlar.*
4. *Adams ekstrapolyasion metodi.*
5. *Runge-Kutta usuli.*
6. *Eyler va Eyler-Koshi usullari.*
7. *Ketma-ket yaqinlashish usuli (Pikar algoritmi).*

Tayanch iboralar:

Differentsial tenglama, xususiy hosilali differentsial tenglama, integral egri chizig'i, umumiy echim, boshlang'ich shartlar, Koshi masalasi.

Sonli differentsiallash. Umumiy mulohazalar

Ko`p amaliy masalalarda funktsiya hosilalarini ayrim nuqtalard ataqribiy hisoblashga to`g'ri keladi. Bu masala sonli differentsiallash masalasi deyiladi. Funktsiyaning analitik ko`rinishi noma`lum bo`lib uning ayrim nuqtalaridagi qiymatlari ma`lum bo`lsa, masalan, tajribadan topilgan bo`lsa, uholda uning hosilasi sonli differentsiallash yo`li bilan topiladi. Umuman aytganda, funktsiyani sonli differentsiallash masalasi doimo bir qiymatli ravishda echilavermaydi. Masalan, f(x) funktsiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasini topish uchun h>0 ni olib,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$

yoki

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \qquad (2)$$

yoki

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \qquad (3)$$

kabi olishimiz mumkin. Ko`pincha (1) o`ng hosila, (2) chap hosila va (3) markaziy hosila deyiladi.

Differentsial tenglamalar

Agar tenglamada noma`lum funktsiya hosila yoki differentsial ostida qatnashsa, bunday tenglama differentsial tenglama deyiladi.

Agar differentsial tenglamada noma`lum funktsiya faqat bir o`zgaruvchiga bog'liq bo`lsa, bunday tenglama oddiy differentsial tenglama deyiladi. Masalan:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{3}(1-2y); \quad y' = \frac{x^4}{2}; \quad \frac{dy}{dt} = t^2 - 1; \quad \sqrt{2}\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + 1; \quad xdy = 3dx$$

Agar differentsial tenglamadagi noma`lum funktsiya ikki yoki undan ortiq o`zgaruvchilarga bog'liq bo`lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differentsial tenglama deyiladi. Masalan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

Differentsial tenglamaning tartibi deb, shu tenglamada qatnashuvchi hosilaning (differentsialning) eng yuqori tartibiga aytiladi. Masalan:

$$\frac{dz}{dx} = 5(z-1); \qquad (u')^3 = x^2 + 2$$

birinchi tartibli tenglamalar,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 5\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right), \qquad \frac{d^4 T}{dt^4} = 1 - (l^t + 2)$$

esa 4-tartibli differentsial tenglamalardir.

Mavzularda faqat oddiy differentsial tenglamalarni ko`rib chiqamiz. n – tartibli oddiy differentsial tenglamaning umumiy ko`rinishi quyidagicha:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (4)$$

bu erda x – erkli o`zgaruvchi; y – noma`lum funktsiya, $y', y'', ..., y^{(n)}$ - noma`lum funktsiyaning hosilalari.

(4) ni ko`p hollarda quyidagi ko`rinishda yozish mumkin:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad (5)$$

(5) ning echimi (yoki integrali) deb uni qanoatlantiruvchi shunday $y=\varphi(x)$ funktsiyaga aytiladiki, $\varphi(x)$ ni (5) ga qo`yganda u ayniyatga aylanadi.

Oddiy differentsial tenglama echimining grafigi uning integral egri chizig’i deyiladi.

n-tartibli differentsial tenglamaning echimida n ta erkli o`zgarmas son qatnashadi. Bu o`zgarmas sonlarni o`z ichiga olgan echim umumiy echim deyiladi. Umumiy echimning grafik ko`rinishi integral egri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Umumiy echimda qatnashuvchi erkli o`zgarmaslarning aniq son qiymatlari ma`lum bo`lsa umumiy echimdan xususiy echimni ajratib olish mumkin.

Umumiy echimga kiruvchi erkli o`zgarmaslar masalaning boshlang’ich shartlaridan aniqlanadi. Bunda masala quyidagicha qo`yiladi: (5) differentsial tenglamaning shunday echimi $y=\phi(x)$ ni topish kerakki, bu echim erkli o`zgaruvchi x ning berilgan qiymati $x=x_0$ da quyidagi qo`shimcha shartlarni qanoatlantirsin:

$$x=x_0 \;\; да \;\; y=y_0, \quad y'=y'_0, \quad y''=y''_0, ..., y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \qquad (6)$$

(6) shartlar boshlang’ich shartlar deyiladi, $x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}$ - sonlar esa echimning boshlang’ich qiymatlari deyiladi. Boshlang’ich shartlar (6) yordamida umumiy echimdan xususiy echimni ajratib olinadi.

Koshi masalasi

$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ differentsial tenglamaning echimini $x=x_0 \;\; да \;\; y=y_0, \quad y'=y'_0, \quad y''=y''_0, ..., y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ boshlang’ich shartlar asosida topishga Koshi masalasi deyiladi. Birinchi tartibli differentsial tenglama (n=1) uchun Koshi masalasi quyidagichadir: boshlang’ich shart $x=x_0$da $y=y_0$ni qanoatlantiruvchi $y'=f(x,y)$ differentsial tenglamaning echimi topilsin. Birinchi tartibli differentsial uchun Koshi masalasining geometrik ma`nosi shundaki, umumiy echimdan (egri chiziqlar dastasidan) kordinatalari $x=x_0, y=y_0$bo`lgan nuqtadan o`tuvchi integral egri chiziq ajratib olinadi.

Agar $f(x,y)$ biror $R_{|a,b|}=\{|x-x_0|<a; \ |y-y_0|<b\}$ sohada uzluksiz bo`lib, shu sohada Lipshits sharti $|f(x,\bar{y})-f(x,y)| \le N|\bar{y}+y|$ bajarilsa, u holda Koshi masalasi $y(x_0)=y_0$shartni bajaruvchi yagona echimga egadir (bunda N – Lipshits doimiysi).

Differentsial tenglamalarning aniq echimini topish juda kamdan – kam xollardagina mumkin bo`ladi. Amaliyotda uchraydigan ko`pdan – ko`p masalalarda aniq echimni topishning iloji bo`lmaydi. Shuning uchun differentsial tenglamalarni yechishda taqribiy usullar muhim rol’ o`ynaydi. Bu usullar echimlar qay tarzda ifodalanishlariga qarab quyidagi guruhlarga bo`linadilar:

1. Analitik usullar. Bu taqribiy usullarda echim analitik (formula) ko`rinishda chiqadi.
2. Grafik usullar. Bu hollarda echimlar grafik ko`rinishlarda ifodalanadi.
3. Raqamli usullar. Bunda echim jadval ko`rinishida olinadi.

Hisoblash matematikasida mazkur uch guruhga kiruvchi bir qancha usullar ishlab chiqilgan. Bu usullarning bir-birlariga nisbatan muayyan kamchiliklari va ustunliklari mavjud. Muhandislik masalalarini yechishda shularni hisobga olgan holda u yoki bu usulni tanlab olish lozim bo`ladi.

Koshi masalasi :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

differentsial tenglamaning $[a,b]$ kesmada aniqlangan va

$$y(x_0) = y_0$$

boshlang'ich shartlarni kanoatlantiruvchi taqribiy echimi topilsin.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z) \end{aligned}\right\},$$

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0,$$

taqribiy qiymatlar $y(x_i) \approx y_i, z(x_i) \approx z_i$ lar uchun yaqinlashishlar quyidagi formulalar bo`yicha topiladi.

$$\left\{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i, \Delta y_i = hf(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} &= z_i + \Delta z_i, \Delta z_i = hf(x_i, y_i, z_i) \end{aligned}\right\}$$ bunda i=0,1,2,…, n

Ayirmali metodlar

Faraz qilaylik, bizga quyidagi Koshi masalasi berilgan bo'lsin

$$y' = f(x, y), \tag{7}$$

$$y(x_0) = y_0. \tag{8}$$

Bu masalani yechish uchun differensial tenglamalar kursidan ma'lum bo'lgan ketma-ket yaqinlashish usulini

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt,$$

$$y_0(t) \equiv y_0, \quad n = 1,2,...$$

qo‘llab yoki yechimni nuqta atrofida qatorga (odatda Teylor qatoriga) yoyish usulini qo‘llab, yechimni taqribiy analitik ko‘rinishini topishadi

$$y(x) \approx y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y^{(i)}(x_0)\frac{(x-x_0)^i}{i!}\,. \tag{9}$$

Bu ikkala sodda usullar ma'lum kamchiliklarga ega, xususan birinchisida har bir yangi yaqinlashishda integral hisoblanishi lozim bo‘lsa, ikkinchisida esa $|x-x_0|$ kichik bo‘lmasa (9) qator yaqinlashmasligi mumkin yoki juda sust yaqinlashuvchi bo‘ladi. Shu bois ham (7)-(8) masalani boshqa usullar bilan yechishni o‘rganamiz.

(7)-(8) masalani $[x_0, X]$ da yechish talab etilgan bo‘lsin. Berilgan kesmani N ta teng bo‘lakka bo‘lamiz:

$$x_i = x_0 + ih,\ \ i = 1,2,\ldots,N,\ \ N = \frac{X - x_0}{h}, \qquad h > 0.$$

(7)-(8) masala – Koshi masalasini yechish

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{10}$$

integral tenglamani yechish bilan teng kuchlidir. Biroq (10) da integral ostida noma'lum funksiya qatnashishi masalani murakkablashtiradi. Ketma-ket ikkita nuqtadagi yechimning orasida quyidagi munosabat o‘rinlidir:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx \tag{11}$$

$y(x_{n+1})$ ni topish uchun $y(x_n)$ va $y'(x) = f(x, y(x))$ ni $[x_n, x_{n+1}]$ oraliqda bilish kerak. Shuning uchun ham (11) ni o‘ng tomonidagi integralni taqribiy hisoblash lozim bo‘ladi. Bu integralni qanday hisoblanishiga qarab, berilgan Koshi masalasini yechadigan taqribiy u yoki bu metodlar hosil bo‘ladi.

Eyler va Eyler-Koshi usullari

Faraz qilaylik, bizga quyidagi Koshi masalasi berilgan bo'lsin $y' = f(x, y)$ - (7) va $y(x_0) = y_0$ - (8) (7), (8) masala yechimini taqribiy qiymati $y(x_i) \cong y_i$ quyidagicha aniqlansa

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),\ \ i = 0,1,\ldots$$

bu usul Eyler usuli bo‘lar edi (Adams, Runge-Kutta usullarida $k = 0$ bo‘lgan hol).

Eyler usulining quyidagi modifikasiyalarini keltiramiz:

$$\text{I. } y_{i+1} = y_i + hf_{i+\frac{1}{2}}, \quad i = 0,1,... \tag{12}$$

Bu yerda

$$f_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_i.$$

$$\text{II. } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f_i + \bar{f}_{i+1}\right), \quad i = 0,1,... \tag{13}$$

Bu yerda

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf_i,$$

$$\bar{f}_{i+1} = f\left(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1}\right).$$

Agar (7), (8) masalaning taqribiy yechimini

$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf\left(x_i, y_i\right)$ deb uni quyidagi

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)\right), \quad k = 1,2,.... \tag{14}$$

iterasion jarayon bilan berilgan aniqlik miqdorida topish mumkin, ya'ni $\left|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}\right| < \varepsilon$ bo‘lsa $y_{i+1} \approx y_{i+1}^{(k+1)}$ deyiladi, so‘ng keyingi nuqtadagi yechim uchun (8) iterasion jarayon quriladi.

1. Runge-Kutta usuli

(7), (8) masalani yechish uchun (12) ni quyidagicha yozib olamiz

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} y'(t)dt = y(x) + h\int_0^1 f\left[(x+\alpha h), y(x+\alpha h)\right]d\alpha$$

yoki

$$y(x+h) - y(x) = \Delta y = h\int_0^1 f\left[(x+\alpha h), y(x+\alpha h)\right]d\alpha. \tag{15}$$

(15) dagi integralni taqriban quyidagi kvadratur summaga o‘xshash chekli summaga almashtiramiz:

$$\Delta y_i = \sum_{i=1}^{r} p_i \overline{\overline{K}}_i\,, \tag{16}$$

Bu yerda

$$\overline{\overline{K}}_1 = hf(x,y), \qquad \overline{\overline{K}}_2 = hf(x+\alpha_2 h, y+\beta_2 \overline{\overline{K}}_1), \ldots$$

$$\ldots \overline{\overline{K}}_r = hf(x+\alpha_r h, y+\beta_r \overline{\overline{K}}_1 + \ldots + \beta_{2r-1} \overline{\overline{K}}_{r-1}).$$

Noma'lum α_i, β_{ii-1} $(i = 2,3,\ldots,r)$ va p_i $(i = 1,2,\ldots,r)$ larni (14) ning chap va o‘ng tomonlarini h ning darajalari bo‘yicha Teylor qatoriga yoyilmasining iloji boricha ko‘p hadlarini ixtiyoriy $f(x,y)$ uchun bir xil bo‘lish shartidan topiladi.

quyida turli tartibli Runge-Kutta metodi bo‘yicha hisoblash formulalarini keltiramiz:

$r = 1$. *Birinchi tartibli metod*

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y).$$

$r = 2$. *Ikkinchi tartibli metodlar*

1) $$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}\left[f(x,y) + f(x+h, y+hf(x,y))\right],$$

2) $$y(x+h) = y(x) + hf\left[(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\right],$$

3) $$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{4}\left[f(x,y) + f\left(x+\frac{2}{3}h, y+\frac{2h}{3}f(x,y)\right)\right].$$

$r = 3$. *Uchinchi tartibli metodlar*

1) $$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3),$$

$$k_1 = hf(x,y),\ \ k_2 = hf(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}),\ \ k_3 = hf(x+h, y-k_1+2k_2).$$

2) $$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2),$$

$$k_1 = hf(x,y),\ \ k_2 = hf(x+\frac{h}{3}, y+\frac{k_1}{3}),\ k_3 = hf(x+\frac{2h}{3}, y+\frac{2k_2}{3})\ .$$

$r = 4$. *To‘rtinchi tartibli metodlar*

$$1)\qquad y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,,$$

$$k_1 = hf(x,y), \qquad k_2 = hf(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = hf(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_2}{20}), \qquad k_4 = hf(x+h, y+k_3)$$

$$2)\qquad y(x+h) = y(x) + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3 + \frac{1}{2}k_4\right],$$

$$k_1 = hf(x,y), \qquad k_2 = hf(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = hf(x+\frac{h}{2}, y-\frac{k_1}{2}+k_2), \qquad k_4 = hf\left[x+h, y+\frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_3\right].$$

Nazorat savollar:

1. Differentsial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differentsial tenglama va xususiy xosilali differentsial tenglama farqi nimada?
3. Oddiy differentsial tenglamaga misollar keltiring.
4. Differentsial tenglamalarni yechishning qanday usularini bilasiz?
5. Koshi masalasi deb nimaga aytiladi?

9-Ma’ruza. XUSUSIY HOSILALI DIFFERENTSIAL TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH

Reja:

1. Chekli ayirmalar yoki to‘r usuli.
2. Elliptik turdagi tenglamaga qo‘yilgan Dirixle masalasi uchun to‘r usuli.
3. parabolik turdagi xususiy hosilali tenglama uchun to‘r usuli.
4. Giperbolik turdagi differentsial tenglamani taqriy yechishda to‘r usuli.

Xususiy hosilali differentsial tenglamalar haqida.

Ikki noma'lumli o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan u=u(x,y) funktsiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozamiz. $F(x,y,u,u_x,u_{í},u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$ (*) Bu yerda x,u erkli o'zgaruvchilar, *u* izlanayotgan noma'lum funktsiya, $u_x, u_{í}, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ lar x,u erkli o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalar. (*) tenglamaning yechimi deb, uni ayniyatga aylantiruvchi *u=u(x,y)* funktsiyaga aytiladi. Bu *yec*him grafigi Oxuu fazoda sirtni ifodalaydi. Agar (*) tenglamada *u* izlanayotgan noma'lum funktsiya va uning xususiy hosilalari $u_x, u_{í}, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ ning darajalari birinchi bo'lsa hamda ularning ko'paytmalari ishtrok etmasa bunday tenglamani chiziqli deb ataladi. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\acute{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\hat{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \acute{o}}+\acute{N}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\acute{r}\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=F(x,y) \quad (**)$$

Bu yerda *A,B,C,a,b,s* koeffitsentlar o'zgarmas yoki *x, y* erkli o'zgaruvchilarning funktsiyalari bo'lishi mumkin. (**)ni quyidagicha yozamiz

$$\acute{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\hat{A}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \acute{o}}+\acute{N}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (***)$$

(***) o'zgarmas koeffitsentli tenglama bo'lsin. (***)tenglama diskriminanti $D=AC-B^2$ ni tuzamiz, buning ishorasiga qarab tenglama turini aniqlaymiz:

agar $D>0$ bo'lsa, (**) elliptik turdagi tenglama:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

agar $D=0$ bo'lsa, (**) parabolik turdagi tenglama:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

agar $D<0$ bo'lsa, (**) giperbolik turdagi tenglama:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \acute{o}}=F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

1.Agar (**) da *A=1, B=0, C=1* bo'lsa, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ elliptik turdagi Laplas tenglamasi deyiladi. Bu tenglama *u=u*(*x,y*) issiqlikni plastinkaning (*x,y*) nuqtasda vaqtga bog'liq bo'lmagan holda tarqalishini ifodalaydi. Shuningdek elektr va magnit maydonlarihaqidagi masalalar, gidrodinamikaning siqilmaydigan suyuqlikning potentsial harakati, statsionar issiqlik maydonlariga tegishlik masalalarni yechish Laplas tenglamasiga keltiriladi.

2. Agar (**) da $A=-a^2$, *a=1, B=0,C=0, b=0, c=0* bo'lsa, $\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x,t)$ bu parabolik turdagi tenglama bo'lib, issiqlik tarqalish tenglamasi deyiladi. *u t* vaqt birligi ichida *x* koordinata bilan ingichka bir jinsli sterjen bo'yicha *u=u*(*x,t*) issiqlikni tarqalishini ifodalaydi. *F*(*x,t*) –issiqlikni jisim bo'yicha manbadan tarqalish zichligi bilan bog'liq funktsiya, agar bu funktsiya ishtrok etmasa bu tenglama birjinsli bo'ladi. *a*-

sterjenning fizik xossasiga bog'liq bo'lgan o'zgarmas. Shuningdek diffuziya hodisasi, filtratsiya masalalari shunday tehglamaga keltirib o'rganiladi.

3. Agar (**) da A=1, $a=0$, $B=0,C=-a^2$, $b=0$, $c=0$ bo'lsa, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$ bo'ladi.Bu giperboik turdagi tenglama deyiladi. Torning ko'ndalang tebranishi, sterjenning bo'ylama tebranishi, simdagi elektr tebranishlari, aylanuvchi tsilindirdagi aylanma tebranishlar, gidrodinamika, gazodinamika va akustikaning tebranishi bilan bo'g'liq masalalarin tekshirish shunday tenglamaga olib keladi.

Agar izlanayotgan funktsiya uchta erkli o'garuvchiga bog'liq bo'sa, Laplas to'lqin tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

issiqlik tarqalish tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = F(x,y,t),$$

to'lqin tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = F(x,y,t)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Chekli ayirmalar yoki to'r usuli

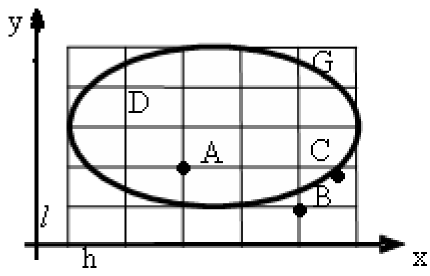
Chekli ayirmalar usuli xususiy hosilali tenglamalarning sonli yechimini topishda eng qulay usullardan biridir .

Bu usulining asosida hosilarni chekli ayirmalar nisbati bilan almashtirish qoidasi yotadi .

Aytaylik, Oxy koordinatalar tekisligida chegarasi T chiziq bilan chegaralangan yo'ik G soha berilgan bulsin. G sohani kesib o'tuvchi o'qlarga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar oylasini quramiz :

$$x_i = x_0 + ih, \ i = 0, \pm 1, \pm 2, ..., n$$

$$y_i = y_0 + kh, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., m$$

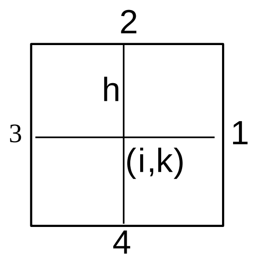


10. 1 -rasm

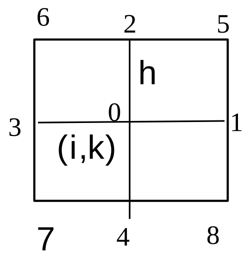
Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarni tugunlar deb ataladi. Hosil bo'lgan turda ikki tugunni qo'shni tugun deb ataladi. Agar ular biri ikkinchisidan OX yoki OU koordinata o'qlari yunalishida h yoki l masofada joylashgan bo'lsa D+G sohaga tegishli bo'lgan va sohaning chegarasi G dan, qadamdan kichik masofada turgan tugunlarni ajratamiz.

Sohaning biror tuguni va unga qo'shni bo'lgan turtta tugun ajratilgan tugunlariga tegishli bo'lsa, bu tugunni ichki tugun deb ataladi. (1-rasm, A tugun). Ajratilganndan qolganlari chegara tugunlari deb ataladi(1-rasm, B, C tugunlar).

Noma'lum $u = u(x,y)$ funktsiyaning to'rning 5 yoki 9 tugunli sxemalarining



10.2-rasm



10.3-rasm

tugunlaridagi qiymatini $u_{ik} = u(x_0 + ih, y_0 + kl)$ orkali belgilaymiz. Har bir $(x_0 + ih, y_0 + kl)$ ichki nuqtadagi xususiy hosilalarni ayirmalar nisbati bilan quyidagicha almashtiramiz:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{ij} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}$$
$$(\frac{\partial u}{\partial y})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l} \qquad (9.1)$$

Chegaraviy nuqtalarda esa aniqligi kamroq bo‘lgan quyidagi formular bilan almashtiramiz:

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{ik}}{h}$$
$$(\frac{\partial u}{\partial y})_{ik} \approx \frac{u_{ik,k+1} - u_{ik}}{l} \qquad (9.2)$$

Xuddi shuningdek, ikkinchi tartibli xususiy hosilarni quyidagicha almasht’ramiz:

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2},$$
$$(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} \qquad (9.3)$$
$$(\frac{\partial^2 u}{\partial xy})_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k+1} - u_{i+1,k-1} - u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k-1}}{4hl}$$

Yuqorida ketirilgan almatiririshlar xususiy hosilasi tenglamalarni o‘rniga chekli ayrimali sistemasini yechishga olib keladi.

Yuqorida ko‘rsatilgan sohada quyidagi Direxli masalani ko‘ramiz.

Qulaylik uchun (**) tenglamadan G chiziq bilan chegaralangan D bog‘lamli sohada aniqlanga elliptik turdagi tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz

$$Lu = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f(x, y) \qquad (9.4^*)$$

bu yerda a,c,d,e,g lar x va y larning funktsiyalari bo‘lib $a(x,y)>0$, $b(x,y)>0$ va $g(x,y)\le 0$ bo‘lsin. (x_i,y_k) tugunda tenglamadagi $f(x,y)$ funktsiya va koeffitsentlarni a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, g_{ij}, f_{ij}, u_{ij} kabi belngilaymiz. Bu (9.4*) tenglama uchun quyidagi Direxli masalasi-chrgaraviy shart

$$u|_G=\varphi(x,y),\quad (x,y)\in G$$

qo‘yilgan bo‘lsin.

Besh nuqtali tugunlar sxemasi bo‘yicha (10.1), (10.3) formulalar asosida chekli ayirmalar yordamida (9.4*) tenglamani quyidagicha yozamiz.

$$a_{ik}\frac{u_{i+1,k}-2u_{ik}+u_{i-1,k}}{h^2}+b_{ik}\frac{u_{i,k+1}-2u_{ik}+u_{i,k-1}}{l^2}+c_{ik}\frac{u_{i+1,k}-u_{i-1,k}}{2h}+d_{ik}\frac{u_{i,k+1}-u_{i,k-1}}{2l}-g_{ik}u_{ik}=f_{ik}\quad (*)$$

Shuningdek G chegara chiziq funktsiyasi $\varphi(x,y)$ asosida chegara tugunlari $(x_i\pm\theta h,y_i)$ yoki $(x_i,y_i\pm\theta h)$ $(0<\theta<1)$uchun quyidagi munosabatlarni yozamiz:

$$u(x_i\pm\theta h,y_k)\approx\frac{\theta u(x_{i+1},y_k)+\varphi(x_i\pm\theta h,y_k)}{\theta+1}=\frac{1}{\theta+1}(\theta u_{i+1,k}+\varphi_{i\pm\theta,k})$$

yoki

$$u(x_i,y_k\pm\theta h)\approx\frac{\theta u(x_i,y_{k+1})+\varphi(x_i,y_k\pm\theta h)}{\theta+1}=\frac{1}{\theta+1}(\theta u_{i,k+1}+\varphi_{i,k\pm\theta}).$$

Agar tenglama tarkibida $2l\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$ ishtrok etsa uni to‘qqiz nuqtali tugunlar sxemasi bo‘yicha chekli ayirmalar bilan quyidagicha almashtirib (*) tenglamaga qo‘shamiz.

$$\left(l\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)_{ik}=e_{ij}\frac{u_{i+1,k+1}-u_{i+1,k-1}-u_{i-1,k+1}+u_{i-1,k-1}}{2hl}$$

Chekli ayirmalar yordamida (9.4*) tenglamani, (x_i,y_k) tugunga nisbatan hosilbo‘ladigan tenglamalar sistemasini quyidagicha yozamiz:

$$A_{i,k}u_{i,k}+B_{i,k}u_{i,k-1}+C_{i,k}u_{i,k}+D_{i,k}u_{i+1,k}+E_{i,k}u_{i,k+1}=f_{i,k}\quad (**)$$

$$A_{i,k}=\frac{b_{i,k}}{h^2}-\frac{d_{i,k}}{2h},\quad B_{i,k}=\frac{a_{i,k}}{h^2}-\frac{c_{i,k}}{2h},\quad C_{i,k}=\frac{2(a_{i,k}+b_{i,k})}{h^2}+g_{i,k},$$

$$D_{i,k}=\frac{a_{i,k}}{h^2}+\frac{c_{i,k}}{2h},\quad E_{i,k}=\frac{b_{i,k}}{h^2}+\frac{d_{i,k}}{2h}$$

Farazimizga asosan $a(x,y)>0$, $b(x,y)<0$, $g(x,y)<0$ lar silliq funktsiyalar bo‘lsa, etarlicha kichik h uchun

$g_{i,k}<0$, $A_{i,k}>0$, $B_{i,k}>0$, $C_{i,k}<0$, $D_{i,k}>0$, $E_{i,k}>0$

bo‘lganda quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$A_{i,k}+B_{i,k}+C_{i,k}+D_{i,k}+E_{i,k}= g_{i,k}$.

Hosil bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistema (**) si uchun yuqoridagi shartlar bajarilganda bu sohaning ichki tugunlarida sistemani yechimini topishda iteratsiya usulini qullash uchun uni quyidagi ko‘rinishga keltiramiz.

$$u_{i,k} = -\frac{A_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i,k+1} - \frac{B_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i-1,k} - \frac{D_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i+1,k} - \frac{E_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i,k+1} + \frac{f_{i,k}}{C_{i,k}}$$

Shuningdek chegaraviy tugunlar uchun

$$u_{i,k} \approx \frac{\theta}{\theta+1}u_{i+1,k+1} + \frac{1}{\theta+1}\varphi_{i\pm\theta,k\pm\theta}$$

Berilgan boshlang’ich $u_{i,k}^{(0)}$ echim asosida aniq yechimga yaqinlashish jarayonini oddiy iteratsiya usulida quyidagicha hisoblaymiz:

$$u_{ik}^{(p+1)} = -\frac{A_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i,k+1}^{(p)} - \frac{B_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i-1,k}^{(p)} - \frac{D_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i+1,k}^{(p)} - \frac{E_{i,k}}{C_{i,k}}u_{i,k+1}^{(p)} + \frac{f_{i,k}}{C_{i,k}}$$

$$u_{i,k}^{(p+1)} \approx \frac{\theta}{\theta+1}u_{i+1,k+1}^{(p)} + \frac{1}{\theta+1}\varphi_{i\pm\theta,k\pm\theta}, \quad p=0,1,2,\dots$$

Yuqoridagi shartlar asosida bu jarayonni $u_{i,k}$ aniq yechimga yaqinlashish sharti quyidagicha tanlanadi:

$$\max_{i,k}\left|u_{i,k}^{(p)} - u_{i,k}\right| \le \frac{q^p}{1-q}\max\left|u_{i,k}^{(0)}\right|$$

$$q = \max_{i,k}\left(\frac{\theta_{i,k}}{1+\theta_{i,k}}, -\frac{A_{i,k}+B_{i,k}+D_{i,k}+E_{i,k}}{C_{i,k}}\right).$$

Elliptik turdagi tenglamaga qo‘yilgan Drixle masalasi uchun to‘r usuli.

Birinchi chegaraviy masala yoki Puasson tenglamasi:

$$\Delta\check{c} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad (9.4')$$

uchun Dirixle masalasi quyidagicha qo‘yiladi *G* sohaning ichki nuqtalarida (9.4') tenglamani va *G*- chegarasida esa

$u|_g = \varphi(x,y)$

shartni kanotlantiruvchi $u=u(x,y)$ funktsiya topilsin. Mos ravishda Ox va Oy o‘qlarida *h* va *l* qadamlarni tanlab,

$x_i = x_0 + ih, \ (i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

$y_k = y_0 + kl, \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

to‘g’ri chiziqlar yordamida to‘r quramiz va sohaning ichki tugunlaridagi $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ hosilarni (9.3) formula asosida (10.4') tenglamani esa quyidagi chekli ayirmalar tenglamalari bilan almashtiramiz:

$$\frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1.k}}{h^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2} = f_{ik} \qquad (9.5)$$

bu yerda $f_{ik} = f(x_i, y_k)$ (9.5) tenglama sohaning chegaraviy nuqtalaridagi u_{ik} qiymatlari bilan birgalikda (x_i, y_k) tugunlaridagi u(x,y) funktsiya qiymatlariga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qiladi. Bu sistema to‘g’riburchakli sohada va *l=k* bo‘lganda eng sodda ko‘rinishga keladi. Bu holda (9.5) tenglama quyidagicha yoziladi.

$$u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i,k-1} - 4u_{ik} = h^2 f_{ik} \qquad (9.6)$$

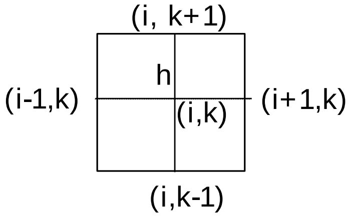
Chegaraviy tugunlardagi qiymatlar esa chegaraviy funktsiya qiymatlariga teng bo‘ladi. Agar (9.4) tenglamada *f(x,y)=0* bo‘lsa

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

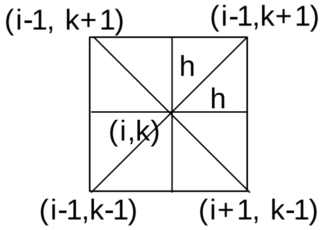
Laplas tenglamasi hosil bo‘ladi. Bu tenglamaning chekli ayirmalar tenglamasi quyidagicha:

$$u_{ik} = \frac{1}{4}(u_{i+1,k} + u_{i-1,k} + u_{i,k+1} + u_{i.k-1}) \qquad (9.7)$$

Bu (9.6) va (9.7) tenglamalarni 9.4-rasmdagi tugunlar siemasidan foydaniladi. Bundan buyon rasmlardarda (x_i, y_i) tugunlarni ularning indekslari bilan



10.4-rasm



10.5-rasm

almashtirib yozamiz. Ba’zan 9.5- rasmdagi kabi tugunlar sxemasidan foydalanish qulay bo‘ladi. Bu holda Laplas chekliayrimalar tenglamasi quydagicha yoziladi.

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) \qquad (9.8)$$

‘uasson tenglamasi uchun esa:

$$u_{i,k} = \frac{1}{4}(u_{i-1,k-1} + u_{i+1,k-1} + u_{i-1,k+1} + u_{i+1,k+1}) + \frac{h^2}{2} f_{i,k} \qquad (9.8^*)$$

Differentsial tenglamalarni ayrimalar bilan almatirish xatoligi yaoni (9.8) tenglama uchun koldik xad $R_{i,k}$ quyidagicha baholanadi.

$$R_{i,k} < \frac{h^2}{6} M_4,$$

bu yerda

$$M_4 = \max_G \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right\}$$

Ayrimalar usuli bilan topilgan taqribiy yechim xatoligi uchta xatoligidan kelib chiqadi:

1) differentsial tenglamalarni ayrimalar bilan

almashtiridan

2) chegaraviy shartni a''roksimatsiya qilishdan.

3) hosil bo'lgan ayrimali tenglamalarni taqribiy yechishlardan.

Masala. Quyidagi Laplas tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

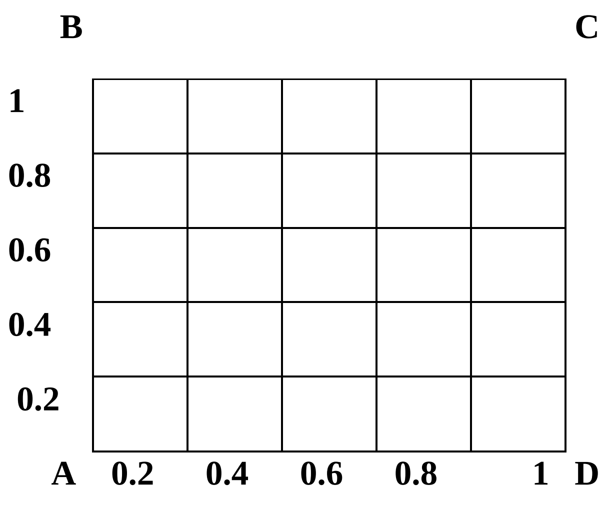
uchun uchlari A(0;0), B(0;1), C(1;1), D(1;0) nuqtalarda bo'lgan kvadratga Dirixle masalasini

$$u\big|_{AB} = 45y(1-y); \quad u\big|_{BC} = 25x; \quad u\big|_{CD} = 25; \quad u\big|_{AD} = 25x\sin\frac{\pi x}{2};$$

bo'lganda, to'r usuli bilan *0.01* aniqlikda yechimini toping *h=0,2*

Yechish. I. Yeechim sohasini *h=0,2* qadam bilan kataklarga ajratamiz va sohaning chegara nuqtalarida noomalum funktsiya qiymatlarini hisoblaymiz**.**

1-jadval



1) *u(x,y)* funktsiya qiymatini AB tomonda *u(x,y)=45y(1-y)* formula yordamida topamiz.

u(0;0)=0, u(0;0.2)=7.2, u(0;0.4)=10.8

u(0;0.6)=10.8 , u(0;0.8)=7.2, u(0;1)=0

2) BC tamonda *u (x,y)=25 x*

u(0.2;1)=5, u(0.4;1)=10, u(0.6;1)=15

u(0.8;1)=20, u(1,1)=25

3) CD tomonda : *u(x,y)=25* *u(1;0.8)=u(1;0.6)=u(1;0.4)=u(1;0.2)=25*

4) AD tomonda $u(x,y)=25\sin\frac{\pi x}{2}$

u(0,2;0)=1.545 *u(0,4;0)=5.878*

u(0.6;0)=12.35 *u(0,8;0)=19.021*

II. Yechim soha ichidagi nuqtalarda izlanayotgan funktsiya qiymatlarini topish uchun Laplas tenglamasi uchun chekli orttirmalarni qo‘llashdan hosil bo‘lgan

$$u_{ij}=u(x_i y_i)=\frac{1}{4}(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1})$$

formula yordamida quyidagicha topamiz.

2-jadval

0		5	10	15	20	25
7.2		u_{13}	u_{14}	u_{15}	u_{16}	25
10.8		u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	25
10.8		u_5	u_6	u_7	u_8	25
7.2		u_1	u_2	u_3	u_4	25
	0	1.54	5.878	12.13	15.02	

$$u_1=\frac{1}{4}(7{,}2+1{,}545+u_2+u_5);\quad u_2=\frac{1}{4}(5{,}878+u_1+u_3+u_6),$$
$$u_3=\frac{1}{4}(12{,}135+u_2+u_4+u_7);\quad u_4=\frac{1}{4}(19{,}021+25+u_3+u_8)$$

$$u_5=\frac{1}{4}(10{,}8+u_1+u_6+u_9);\quad u_6=\frac{1}{4}(u_2+u_5+u_7+u_{10}),$$
$$u_7=\frac{1}{4}(u_3+u_6+u_8+u_{11});\quad u_8=\frac{1}{4}(25+u_4+u_7+u_{10}),$$

$$u_9=\frac{1}{4}(10{,}8+u_5+u_{10}+u_{13});\quad u_{10}=\frac{1}{4}(u_6+u_9+u_{11}+u_{14}),$$
$$u_{11}=\frac{1}{4}(u_7+u_{10}+u_{12}+u_{15});\quad u_{12}=\frac{1}{4}(25+u_8+u_{11}+u_{16}),$$

$$u_{13}=\frac{1}{4}(7{,}2+5+u_9+u_{16});\quad u_{14}=\frac{1}{4}(10+u_{10}+u_{13}+u_{15}),$$
$$u_{15}=\frac{1}{4}(15+u_{11}+u_{14}+u_{16});\quad u_{16}=\frac{1}{4}(20+25+u_{12}+u_{15})$$

Bu hosil bo‘lgan sistemani Zeydelning iteratsiya usuli bilan yechamiz.

$$u_i^{(0)},u_i^{(1)},u_i^{(2)},\ldots u_i^{(k)},\ldots$$

Ketma –ketlikni tuzamiz va yaqinlashishni 0.01 aniqlik bilan olamiz. Bu ketma –ketliklar elementlarini quyidagi bog’lanishlardan topamiz:

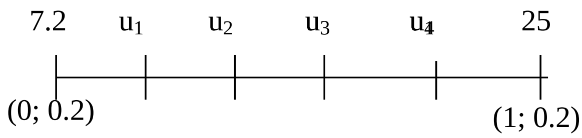
$$u_1^{(k)}=\frac{1}{4}(8{,}745+u_2^{(k-1)}+u_5^{(k-1)});\quad u_2^{(k)}=\frac{1}{4}(5{,}878+u_1^{(k)}+u_3^{(k-1)}+u_6^{(k-1)})$$
$$u_3^{(k)}=\frac{1}{4}(12{,}135+u_2^{(k)}+u_4^{(k-1)}+u_7^{(k-1)});\quad u_4^{(k)}=\frac{1}{4}(44{,}021+u_3^{(k)}+u_8^{(k-1)})$$

$$u_5^{(k)}=\frac{1}{4}(10{,}8+u_1^{(k)}+u_6^{(k)}+u_9^{(k-1)});\quad u_6^{(k)}=\frac{1}{4}(u_2^{(k)}+u_6^{(k)}+u_7^{(k-1)}+u_{10}^{(k-1)}),$$
$$u_7^{(k)}=\frac{1}{4}(u_3^{(k)}+u_6^{(k)}+u_8^{(k-1)}+u_{11}^{(k-1)};\quad u_8^{(k)}=\frac{1}{4}(25+u_4^{(k)}+u_7^{(k)}+u_{12}^{(k-1)}),$$

$$u_9^{(k)}=\frac{1}{4}(10{,}8+u_5^{(k)}+u_{10}^{(k-1)}+u_{13}^{(k-1)});\quad u_{10}^{(k)}=\frac{1}{4}(u_6^{(k)}+u_9^{(k)}+u_{11}^{(k-1)}+u_{14}^{(k-1)}),$$
$$u_{11}^{(k)}=\frac{1}{4}(u_7^{(k)}+u_{10}^{(k)}+u_{12}^{(k-1)}+u_{15}^{(k-1)});\quad u_{12}^{(k)}=\frac{1}{4}(25+u_8^{(k)}+u_{11}^{(K)}+u_{16}^{(k-1)})$$

$$u_{13}^{(k)}=\frac{1}{4}(12{,}2+u_9^{(k)}+u_{14}^{(k-1)});\quad u_{14}^{(k)}=\frac{1}{4}(10+u_{10}^{(k)}+u_{13}^{(K)}+u_{15}^{(k-1)}),$$
$$u_{15}^{(k)}=\frac{1}{4}(15+u_{11}^{(k)}+u_{14}^{(k)}+u_{16}^{(k-1)});\quad u_{16}^{(k)}=\frac{1}{4}(45+u_{12}^{(k)}+u_{15}^{(k)}).$$

Yuqoridagi formulalar yordamida yechimni topish uchun boshlang'ich $u_i^{(0)}$ qiymatlarni aniqlash kerak bo'ladi. Shu boshlang'ich taqribiy yechimni aniqlash uchun *u(x,y)* funtsiya soha gorizantallari buyicha tekis taqsimlangan deb hisoblaymiz. Chegara nuqtalari (0;0.2) va (1;0.2) bo'lgan gorizantal ichki $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}, u_4^{(0)}$ nuqtalarini, kesmani **5 ta** bo'lakka bo'lib $k_1=(25-7,2)/5=3,56$ qadam bilan quyidagicha topamiz.



$$u_1^{(0)} = 7,2 + K_1 = 7,2 + 3,56 = 10,76$$
$$u_2^{(0)} = u_1^{(0)} + K_1 = 10,76 + 3,56 = 14,32$$
$$u_3^{(0)} = u_2^{(0)} + K_1 = 14,32 + 3,56 = 17,88$$
$$u_4^{(0)} = u_3^{(0)} + K_1 = 17,88 + 3,56 = 21,44$$

Shuningdek qolgan gorizontallarda ham qadamlarini aniqlab ichki nuqtalardagi qiymatlarini topamiz va quyidagi boshlang'ich yaqinlashish bo'yicha yechim jadvalni tuzamiz:

3-jadval

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0,6	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,4	10,8	13,64	16,48	19,32	22,16	25
0,2	7,2	10,76	14,32	17,88	21,44	25
0	0	1,545	5,878	12,135	19,021	25
yi/xi	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Bu boshlang'ich yaqinlashishdan foydalanib hisoblash jarayonidagi birinchi, ikkinchi va hokazo yaqinlashishlarni aniqlash va jadvalini tuzish mumkin. Natija 0.01 aniqlik bilan hisoblangan quyidgi yechim jadvalini topamiz:

4-jadval

1	0	5	10	15	20	25
0,8	7,2	8,63	11,77	15,80	20,30	25
0,6	10,8	10,56	12,64	16,14	20,40	25

0,4	10,8	10,17	12,10	15,69	20,18	25
0,2	7,2	7,20	9,88	14,34	19,64	25
y_i/x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1

Nazorat savollari

1. Berilgan soxani to‘r bilan ko‘lash, to‘r tugunlarining turlari, tugun nuktalar aniqlash.
2. Xususiy xosilalarni chekli ayirmalar nisbati bilan almashtirishlar asosida to‘r usuli moxiyatini tushuntiring.
3. Laplas yoki ‘uasson tenglamasi uchun Dirixle masalasining taqribiy yechimi to‘r usuli yordamida qanday topiladi?
4. Taqribiy yechim xatoligini baxolash formulasini yozing.

I. TEST SINOVLARI

I. ТЕСТ САВОЛЛАРИ

1) Gauss kvadratur formulasining tugun nuqtalari qanday aniqlanadi?

a) ortoganol ko’phadning nollari

b) Algebraik ko’phad nollari

c) Oldindan beriladi

d) Tugun nuqtalar tanlanmaydi

2) Quyidagi kvadratur formulalardan qaysi birining koeffitsientlari bir xil ko`rinishga ega bo`ladi.

a) Chebishev kvadratur formulasi

b) Simpson kvadratur formulasi

c) Gauss kvadratur formulasi

d) trapetsiya kvadratur formulasi

3) Quyidagi $\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ kvadratur formula bo`lishi uchun $A_k$ koeffitsientlari quyidagilardan qaysi biriga teng bo`lishi kerak.

a) $A_k = \int_a^b \frac{\omega_{n+1}}{(x-x_к)\omega'_{n+1}(x_к)}dx \quad \left(k=\overline{1,n}\right)$

b) $A_k = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x-к)\omega^1(x)}\partial x \quad \left(k=\overline{1,n}\right)$

c) $A_k = \int_a^b \frac{\omega_n^1}{(x-x_к)\omega_n(x)}\partial x \quad \left(k=\overline{1,n}\right)$

d) $A_k = \int_a^b \frac{\omega_n(x)(x-x_k)}{\omega'_n(x_k)}\partial x \quad \left(k=\overline{1,n}\right)$

4) Quyidagi formulalardan qaysi biri karrali integralni taqribiy hisoblashda qo’llaniladi.

a) $\iint_\Omega f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A_i B_{ij} f(x_{i,} y_j)$

b) $\iint_\Omega f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{m} A_i B_{i,j+2} f(x_{i,} y_j)$

c) $\iint_\Omega f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{m} A_i B_{i+2} f(x,y)$

d) $\iint_\Omega f(x,y)dxdy \approx \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{m} A\, B\ f(x_{i,} y_j)$

5) Karrali integrallarni taqribiy hisoblashda qo’llanadigan formulalarning nomi quyidagilardan qaysi birida to’g’ri ko’rsatilgan.

a) Kubatur formulalar

b) Kvadratur formulalr

c) Kubatur bo’lmagan formulalar

d) Bikubatur formulalar

6) Hozirgi davrda qaysi funksiyalar yordamida qurilgan kvadratur formulalar aniq qiymatga yaxshi yaqinlashishni taminlaydi.

a) Splayn funksiyalar yordamida

b) Laranj ko’phadlari yordamida

c) Nyuton ko’phadlari yordamida

d) Eytkin ko’phadlari yordamida

7) Quyidagi shartlardan qaysi biri bajarilsa kvadratur formula interpolyatsion kvadratur formula bo’ladi ?

a) f(x) funksiya o’rniga $f(x_i)=L_n(x_i)$shartni qanoatlantiruvchi ko’phad almashtirib hosil qilingan kvadratur formula bo`lsa

b) f(x) funksiya o’rniga ixtiyoriy ko’phad almashtirib hosil qilingan kvadratur formula bo`lsa.

c) Interpolyatsiya shartni bajarilish talab qilinmaydigan holda ko’rilgan kvadratur formula bo`lsa

d) $f(x_i)=$ shartni qanoatlantiradigan funksiyalar orqali qurilgan kvadratur formulalar

8) Quyidagi kvadratur formulalardan qaysi biri eng sodda trapetsiya formulasi?

a) $\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b))$

b) $\int_a^b f(x)dx = \frac{(b+a)}{2}(f(a)-f(b))$

c) $\int_a^b f(x)dx \approx \left(f(a)-f(b)\right)\frac{b+a}{4}$

d) $\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{3}(f(a)+f(b))$

9) Quyidagilardan qaysi birida umumlashgan o’ng to’rtburchaklar formulasi to’g’ri ko’rsatilgan ?

a) $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k$

b) $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=0}^{n-1} A_k(y_k - y_{k-1})$

c) $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=0}^{\infty} A_k(y_{k+1} - y_k)$

d) $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=0}^{\infty} y_k$

10) Quyidagilardan qaysi birida umumlashgan chap to'rtburchaklar formulasi to'g'ri ko'rsatilgan ?

a) $\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k$

b) $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=0}^{n-1} A_k(y_k + y_{k-1})$

c) $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=0}^{\infty} y_k$

d) $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{k=0}^{n-1} A_k(y_k - y_{k-1})$

11) Kvadratur formulaning xatoligini baholash quyidagilardan qaysi birida to'g'ri?

a) $R(f,x) = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

b) $R(f_i x) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

c) $R(f_i x) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} (f(x_k) + \varphi(x_k))$

d) $R(f_i x)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{k=0}^{n}(A_k f(x_k)-B_k\varphi(x_k))$

12) Kvadratur formulaning umumiy ko'rinishi quidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan ?

a) $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

b) $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)$

c) $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(f(x_k)+\varphi(x_k))$

d) $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(A_k f(x_k)-B_k\varphi(x_k))$

13) Bir karrali aniq integralarni taqribiy hisoblash formulasi qanday nomlanadi?

a) Kvadratur formula

b) Kvadratur bo'lmagan formulalar

c) Bikvadraturformulalar

d) Interpolyatsion formulalar

14) Jadval ko'rinishda funksiya f(1)=6; f(3)=3; f(5)=8 berilgan. $\int_1^5 f(x)dx$ ni umumlashgan trapetsiya Kvadratur formulasi bilan hisoblaganda nechaga teng bo'ladi.

a) 20

b) 18

c) 15

d) 10

15) Funksiya qiymatlari f(2)=12, f(3)=1;f(4)=6 berilgan. $\int_2^4 f(x)dx$ ni umumlashgan trapetsiya kvadratur formulasi bilan hisoblaganda, nechaga

teng bo`ladi?

a) 10

b) 9

c) 8

d) 18

16) $\int_a^b p(x)f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{k} c_i f(x_i)$ kvadratur formulaning algebraik aniqlik darajasi $2k-1$ ga teng bo`lishi uchun $x_i,\ i=\overline{1,n}$ lar qanday bo`lishi kerak?

a) $x_i,\ i=\overline{1,n}$ $p(x)\geq 0$ vazn funksiya bilan $[a,b]$ da ortoganal bo`lgan $k$ -tartibli ko`pxadning nollari bo`lsa

b) $x_i = a+\frac{b-a}{k}i,\ i=\overline{1,k}$

c) $x_i = a+\frac{b-a}{k}(i-1),\ i=\overline{1,k}$

d) Tugun nuqtalarni tanlashga bog`liq emas

17) Algebraik aniqlik darajasi eng yuqori bo`lgan kvadratur formulani ko`rsating.

a) Gauss kadratur formulasi

b) Trapetsiya kadratur formulasi

c) To`g`ri to`rtburchaklar kadratur formulasi

d) Simpson kadratur formulasi

18) Trapetsiya kvadratur formulasining qoldiq hadini ko`rsating.

a) $-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$

b) $\frac{(b-a)}{24}f''(\xi)$

c) $-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(IV)}(\xi)$

d) $\frac{(b-a)^3}{8}f^{(IV)}(\xi)$

19) Kvadratur formula qanday xolda interpolitsion kvadratur formula deyiladi.

a) Integral ostidagi f(x) funksiya logranj interpolyatsion ko’pxadi bilan almashtirilsa.

b) Integral ostidagi funksiyani o’zi qolsa.

c) Integral ostidagi funksiya trigonometrik ko’pxadga almashtirilsa.

d) Integral ostidagi funksiya soda elementar funksiyalar orqali ifodalansa.

20) Kvadratur formulalar deb ... aytiladi

a) taqribiy integrallash formulariga

b) Kvadrat uchhad formulasiga

c) Yig’indini kvadratini topish formulasiga

d) Ko’paytmani kvadratini topish formulasiga

21) Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning aniq usullaridan biri quyidagilaridan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan?

a) Kramer usuli

b) Nyuton usuli

c) Lagranj usuli

d) Simson usuli

22) Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning aniq usullaridan biri quyidagilaridan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan?

a) Gauss usuli

b) Nyuton usuli

c) Lagranj usuli

d) Simson usuli

23) Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli yordamida yechish qoidasi quyidagilardan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.

a) Noma’lumlarni ketma ket yo`qotish usuli yordamida noma’lumlar topiladi.

b) Tenglamalar koeffitsientlari qo`shilib noma’lumlar topiladi.

c) Tenglamalar kvadratga ko`tarilib noma’lumlar topiladi.

d) Sistemadagi tenglamalar qo’shilib topiladi

24) $Ax = f$ - chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi qachon mavjud va yagona bo’ladi?

a) $det\,A \neq 0$ bo’lsa

b) A matritsa maxsus bo’lsa

c) $f = 0$ bo’lsa

d) A ermit matritsasi bo’lsa

25) Progonka usuli qachon qo`llaniladi?

a) Uch diagonalli matrsali chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda

b) Oddiy diferensial tenglamalarni yechishda

c) Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda

d) Integral tenglamalarni yechishda

26) Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida yechishda,yechimni yagona bo’lish uchun quydagi shartlardan qaysi biri bajariladi?

a) Asosiy matritsaning determinant noldan farqli bo’lsa

b) Asosiy matritsaning determinant nolga teng bo’lsa

c) Asosiy matritsaning determinant noldan katta bo’lsa

d) Asosiy matritsaning determinant noldan kichik bo’lsa

27) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning transpanerlangan matritsasi qaysi javobda to’g’ri ko’rsatilgan. A^T -?

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

28) $\begin{pmatrix} 12 & 10 & -5 & -12 \\ 1 & 1 & -9 & 4 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \\ 11 & 8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ matrisa normasi, $\|A\| = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{4} |a_{ij}|$ =?

a) 30;

b) 39;

c) 28,6356;

d) 28,7

29) $\begin{pmatrix} 12 & 10 & -5 & -12 \\ 1 & 1 & -9 & 4 \\ 6 & -3 & 3 & 2 \\ 11 & 8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ matrisa normasi $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{4} |a_{ij}|^2}$ =?

a) 28,6356

b) 30

c) 39

d) 32

30) Matrisa ustun elemenlari modullari yig'indisi buyicha maksimumi – bu ...

a) $\|A\| = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{4} |a_{ij}|$

b) $\|A\| = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{4} |a_{ij}|$

c) $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{4} |a_{ij}|^2}$

d) $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{4} |a_{ij}|}$

31) Tenglamalar sistemasi uchun qo`llaniladigan iteratsion jarayonda boshlang`ich taqribiy yechim qanday olinadi.

Ixtiyoriy ravishda tanlanadi

Sistema to`g`ridan to`g`ri yechiladi

Oldindan berilgan shart asosida tanlanadi

Boshlang`ich yechim talab qilinmaydi

32) $x = Ax + b$ sistemani taqribiy yechishda qo`llaniladigan iteratsion jarayon qachon uzoqlashuvchi bo`ladi.

a) $\|\alpha\| > 1$

b) $\|\alpha\| < 0$

c) $\|\alpha\| < 1$

d) $\|\alpha\| = 0$

33) $x = Ax + b$ chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi uchun oddiy itaratsiya jarayonini yaqinlashishining yetarlilik shartini ko'rsatadi.

a) $\|A\| < 1$

b) $\|A\| = 1$

c) $\|A\| > 1$

d) $\|A\| \geq 0$

34) Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning itaratsion usullarini ko'rsating

a) Zeydel usuli

b) Bosh elimentlar usuli

c) Kvadrat ildizlar usuli

d) Gauss usuli

35) α matritsaning qaysi biri uchuin $x^{(k)} = \alpha x^{k-1} + \beta, k = 1,2,...$ oddiy iteratsion jarayonning yaqinlashish sharti bajarildi ?

a) $\alpha = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,25 \\ 0,2 & 0,1 & 0,3 \\ 0,125 & 0,15 & 0,1 \end{pmatrix}$

b) $\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 \\ -1,5 & 0,5 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0,2 \\ 3 & -1 & 0,4 \end{pmatrix}$

36) Tenglamalar sistemasining taqribiy yechimlarini ε aniqlikda topishda quyidagi shartlardan qaysi biri bajariladi.

a) $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \le \varepsilon$

b) $\left|x^{(k-1)} + x^{k+1}\right| \le \varepsilon$

c) $\left|x^{(k+1)} - x^{k}\right| \ge \varepsilon$

d) $\left|x^{(k+1)} - x^{(k-1)}\right| \le \varepsilon$

37) Oddiy iteratsiya metodi yaqinlashuvchi bo`lishi uchun $x = \alpha x + \beta$ sistemadagi matritsaning elementlari quyidagi tengsizliklardan qaysi birini qanoatlantirishi kerak.

a) $\max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\alpha_{i,j}\right| < 1$

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|\alpha_{i,j}\right| = 1$

c) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \left|\alpha_{i,j}\right|^{2} \ge 1$

d) $\sum_{i=1}^{n} \left| b_{i,j} \right|^2 \geq 2$

38) Tenglamalar sistemasini taqribiy yechimda qo`llaniladigan quyidagi metodlardan qaysi biri tenglamalar sistemasining aniq yechimiga tezroq yaqinlashadi.

a) Zeydel usuli

b) Oddiy iteratsiya usuli

c) Gauss usuli

d) Chebishev usuli

39) Quyidagi shartlardan qaysi biri bajarilsa $x = \alpha x + \beta$ tenglamalar sistemasini taqribiy yechimda qo`llaniladigan iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo`ladi.

a) $\max\limits_{i} \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_{i,j} \right| < 1$

b) $\max\limits_{i} \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_{i,j} \right| > 1$

c) $\max\limits_{j} \sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_{i,j} \right| < 2$

d) $\max\limits_{i} \sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_{i,j} \right| < 3$

40) $x = \alpha x + \beta$ sistemaning α matritsaning normasi tekshirishda quyidagi shartlardan qaysi biri a matritsaning satr elementlari bo`yicha normani tekshirish sharti hisoblanadi.

a) $\max_i \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i,j} \right| < 1$

b) $\max_i \sum_{j=1}^{n+1} \left| a_{i,j} \right| < 1$

c) $\max_i \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i,j} \right| > -1$

d) $\max_i \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i,j} \right| < -1$

41) a matritsaning qaysi biri uchun $x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta, \quad k = 1, 2, ...$

oddiy iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo'ladi?

a) $\alpha=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2 & 0.25\\ 0.2 & 0.3 & 0.3\\ 0.325 & 0.15 & 0.4\end{bmatrix}$

b) $\alpha=\begin{bmatrix}2 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$

c) $\alpha=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$

d) $\alpha=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$

42) α matritsaning qaysi biri uchuin $x^{(k)}=\alpha x^{k-1}+\beta, k=1,2,...$ oddiy iteratsion jarayonning yaqinlashish sharti bajarildi ?

a) $\alpha=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,25\\ 0,2 & 0,4 & 0,1\\ 0,25 & 0,2 & 0,01\end{pmatrix}$

b) $\alpha=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 2 & 3\end{pmatrix}$

c) $\alpha=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0,5\\ 0,5 & 1 & 0,5\\ -1,5 & 0,5 & 2\end{pmatrix}$

d) $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0,2\\ 3 & -1 & 0,4\end{pmatrix}$

43) CHATS iteratsiya usuli $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g$ bilan yechishda B matritsa qanday nomlanadi.

a) O`tish matritsasi

b) Xos matritsa

c) Ortogonal matritsa

d) Asosiy matritsa

44) Ushbu $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{3} |a_{i,j}|$

norma satr boyicha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ matritsaning normasi quyidagilardan qaysi

birida to'g'ri hisoblangan?

a) $\|A\| = 24$

b) $\|A\| = 16$

c) $\|A\| = 23$

d) $\|A\| = 16$

45) $\|A\| = \max_j \sum_{i=0}^{3} |a_{ij}|$ norma ustun boyicha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ matritsaning normasi

quyidagilardan qaysi birida to'g'ri hisoblangan?

a) $\|A\| = 18$

b) $\|A\| = 24$

c) $\|A\| = 23$

d) $\|A\| = 16$

46) $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=0}^{3} |a_{ij}|^2}$ norma boyicha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ matritsaning normasi

quyidagilardan qaysi birida to'g'ri hisoblangan?

a) $\|A\| = \sqrt{91}$

b) $\|A\| = \sqrt{59}$

c) $\|A\| = 6$

d) $\|A\| = \sqrt{14}$

47) Quyidagilardan qaysi bir vektorning kubik normasi hisoblanadi.

a) $\| X \|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} | x_i |$

b) $\| X \|_1 = \max_{1 \le i \le n} | x_{i+1} |$

c) $\| X \|_1 = \max_{1 < i < n} | x_{i+1} |$

d) $\| X \|_1 = \max_{1 < i < n} | x_i |$

48) Quyidagilardan qaysi bir vektorning okteadrik normasi hisoblanadi.

a) $\| X \|_2 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$

b) $\| X \|_2 = \sum_{i=1}^{n} | x - x_i |$

c) $\| X \|_2 = \sum_{i=1}^{\infty} | x_i |$

d) $\| X \|_2 = \sum_{i=1}^{n} | x_i + x_{i+1} |$

49) Quyidagilardan qaysi biri vektorning sferik normasi hisoblanadi.

a) $\| X \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | X_i |^2}$

b) $\| X \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | X_i |}$

c) $\| X \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | X_i + X_{i+1} |}$

d) $\| X \|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | X_i + X_{i+1} |^2}$

50) Vektorlarning normasi bo`lishi uchun quyidagilardan qaysi birini qanoatlantirishi kerak.

1) $\| X \| \ge 0$ va X=0 bo`lgandagina $\| X \| = 0$

2) har qanday α son uchun $\| \alpha X \| = | \alpha | \| X \|$;

3) $\|X+Y\| \le \|X\|+\|Y\|$ - uchburchak tengsizligini;

4) $\|X+Y\| \ge \|X\|+\|Y\|$ -uchburchak tengsizligini;

a) 1,2,3;

b) 1,3,4;

c) 1,4;

d) 1,2,4;

51) Haydash usuli qanday tenglamalar sistemasini yechish uchun qo'llaniladi?

a) Uch dioganalli tenglamalar sistemasini yechishda qo'llaniladi

b) Ixtiyoriy chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun

c) Mos matritsasi musbat aniqlangan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun

d) To'g'ri javoblar keltirilmagan

52) $A=\{a_{ij}\}$ matrisa normasi- bu

a) son;

b) Vektor-qator;

c) vektor – ustun.

d) Vektor

53) Sistemani yechimini qiymatlarini berilgan aniqlikda, ba'zi vektorlar ketma-ketligini limiti ko'rinishida qurish jarayoniga ... deyiladi

a) Iterasion

b) yaqinlashuvchi

c) uzoqlashuvchi

d) Ketma-ketlik

54) Chiziqli sistema uchun Zeydel jarayoni $X=\beta+\alpha X$ ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashish tanlaganda ham yagona yechimga yaqinlashadi, agar α matrisa qaysidir normasi

a) birdan qat'iy kichik bo'lsa

b) birdan qat'iy katta bo'lsa

c) Birga teng bo'lsa

d) Birga teng bo'lmasa

55) Matrisa satr elemenlari modullari yig'indisi buyicha maksimumi – bu ...

a) $\|A\| = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{4} |a_{ij}|$

b) $\|A\| = \max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{4} |a_{ij}|$

c) $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{4} |a_{ij}|^2}$

d) $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{4} |a_{ij}|}$

56) $X^{(k+1)} = \beta + \alpha X^{(k)}$ formulasi boyicha yaqinlashishni quruvchi iterasion jarayonga ... deyiladi

a) Oddiy iterasiya metodi

b) Nyuton metodi

c) Zeydel metodi

d) Gauss metodi

57) Chiziqli sistema uchun Zeydel jarayoni $X = \beta + \alpha X$ ixtiyoriy boshlang'ich yaqinlashish tanlaganda ham yagona yechimga yaqinlashadi, agar ...

a) α matrisa qaysidir normasi birdan qat'iy kichik bo'lsa

b) α matrisa norma sibirdan qat'iy katta bo'lsa

c) α matrisa normasibirga teng bo'lsa

d) α matrisa normasibirga teng va katta bo'lsa

58) $f(x) = 0$ тенгламанинг $[a,b]$ кесмада камида 1та тоq илдизи бўлиши учун қуйидаги холатлардан қайси бири тўғ'ри

a) $f(a) * f(b) < 0$

b) $f(a) * f(b) > 0$

c) $f(a)*f(a)<0$

d) $f(b)*f(b)<0$

59) Martisaning shartlanganlik son nimaga teng?

a) $\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

b) $\|A\|$

c) $\|A\|$

d) $\lambda(A)$

60) $x=\varphi(x)$ chiziqsiz tenglamani $x\in[a,b]$da iteratsiya usulida yechishda iteratsiya jarayoni qaysi holda yaqinlashuvchi bo'ladi?

a) $\varphi(x)$ funksiya $x\in[a,b]$da aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lsa;barcha $x\in[a,b]$da $\varphi(x)\in[a,b]$ bo'lsa; shunday $q<1$ soni mavjud bo'lib, barcha $x\in[a,b]$ lar uchun $|\varphi'(x)|\le q<1$ o'rinli bo'lsa;

b) $\varphi(x)$ funksiya $x\in[a,b]$da aniqlangan va differensiallanuvchi bo'lsa;

c) barcha $x\in[a,b]$da $\varphi(x)\in[a,b]$ bo'lsa; shunday $q<1$ soni mavjud bo'lib, barcha $x\in[a,b]$ lar uchun $|\varphi'(x)|\le q<1$ o'rinli bo'lsa;

d) barcha $x\in[a,b]$da $\varphi(x)\in[a,b]$ bo'lsa;

61) $f(x)\equiv 3x^3-7x^2-9x+21=0$ tenglamaning 1 ta haqiyqiy ildizi quyidagi oraliqlardan qaysi birida yotadi.

a) $[2;3]$

b) $[3;4]$

c) $[0,1]$

d) $[-1,\ 0]$

62) $f(x)=0$ tenglamani $[a,b]$dagi yagona ildizini Nyuton usuli bilan topishda $x_0\in[a,b]$ boshlang'ich yechim qanday shartni qanoatlantirishi kerak.

a) $f(x_0)\,f''(x_0)>0$

b) $f'(x_0)+f''(x_0)>0$

c) $f''(x_0)-f'(x_0)>0$

d) $f'(x_0)=f''(x_0)$

63) Chiziqsiz tenglamani taqribiy yechimida qo`llanadigan Nyuton metodining modifikatsiyasi quyidagilardan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.

a) $$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

b) $$x_{n+1}=x_n+\frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

c) $$x_{n+1}=x_n+\frac{f(x_n)}{f''(x_0)}$$

d) $$x_{n+1}=x_n-\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}$$

64) λ soni A kvadrat matritsani xos soni deb aytiladi, agar …

a) biror noldan farqli x vektor uchun $Ax=\lambda x$ tenglik bajarilsa

b) $\lambda>0$ bo'lsa

c) $\lambda<0$ bo'lsa

d) $\lambda\neq 0$ bo'lsa

65) f(x)=0 chiziqsiz tenglamani ildizini [a,b] oraliqqa taqribiy yechishda [a,b] oraliqda f(x) funksiyaga qo'shilgan talablardan qaysi biri to'g'ri?

a) $f'(x)\,f''(x)[a,b]$ oraliqda ishorasini saqlashi

b) $f'(x)\,f''(x)[a,b]$ oraliqda nol tengligi

c) $P(x_2)+y_2$ $f'(x)\,f''(x)[a,b]$ oraliqda nollari bo'lmasa

d) $f''(x)\,f''(x)$ funksiya uzlukli bo'lsa

66) $x^3-4x+1=0$ tenglamaning bitta haqiqiy ildizi quyidagi oraliqlarning qaysi birida yotibdi?

a) $[0;1]$

b) $[-1;0]$

c) $[1/2;1]$

d) $[1;1,5]$

67) $f(x)=0$ tenglamaning $[a,b]$ dagi yagona ildizini vatar usuli bilan topishda $x_0 \in [a,b]$ qanday shartni qanoatlantirishi kerak ?

a) $f(x_0)f''(x_0)<0$

b) $f'(x_0)\cdot f''(x_0)<0$

c) $f'(x_0)f''(x_0)\geq 0$

d) $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$

68) $x=\varphi(x)$ tenglamaning $[a,b]$ da yagona haqiqiy ildizni iteratsiya usuli bilan topish lozim. Iteratsiya usulini yangilashish shartini ko`rsating.

a) $\max\limits_{a\leq x\leq b}|\varphi'(x)|<1$

b) $|\varphi(x)|<1$

c) $|\varphi''(x)|<1$

d) $|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leq|x'-x''|$

69) $x^3+3x-2=0$ tenglamani bitta haqiyqiy ildizi quydagi oraliqlarning qaysi birida yotadi

a) [0;1]

b) [-1;0]

c) [-6;0]

d) [-5;-4]

70) $2x^3+3x^2+4x+5=0$ tenglama ildizlari yotgan oraliqni aniqlang.

a) [-2;-1]

b) [1;2]

c) [6;7]

d) [3;4]

71) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ tenglama ildizlari yotgan oraliqni aniqlang.

a) [-2;-1],

b) [-3;-2],

c) [-2;-1],

d) [-2;-1]

72) $x^3 + x - 3 = 0$ tenglamaning 1 ta haqiqiy ildizi yotgan oraliq quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan.

a) $(1:\frac{3}{2})$

b) $(-1:0)$

c) $(-1:-\frac{1}{2})$

d) $(0:1)$

73) $x^3 - x + 1 = 0$ Tenglamaning 1ta xaqiqiy ildizi $[-3/2;\,-1]$ oraliqda yotgani ma'lum bo'lsa $x_0 = -3/2$ boshlang'ich taqribiy yechim deb olingan xolda Nyuton yechimi bilan topilgan keyingi x_1 taqribiy yechim quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan.

a) $-\frac{31}{23}$

b) $-\frac{41}{32}$

c) $-\frac{27}{16}$

d) $-\frac{16}{23}$

74) $x^4 - 5x^2 + x - 8 = 0$ tenglamaning bitta ildizi yotgan oraliqni ko`rsating.

a) [-3;-2]

b) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

c) [-1;1]

d) [3;4]

75) Oddiy iteratsiya usuli bilan taqribiy yechish f(x)=0, uchun quyidagi ko'rinishlardan qaysi biriga keltiriladi?

a) $x=\varphi(x)$

b) $x = \varphi(x + a)$

c) $x = \varphi(x - a)$

d) $x=\varphi(x+b)$

76) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ tenglamaning 1 ta haqiqiy ildizi yotgan oraliqni toping.

a) (-3;-2)

b) (-2;0)

c) (3;2)

d) (0;1)

77) $2x + \cos(2x+3) = e^x$ tenglamaga teng kuchli tenglamani ko`rsating.

a) $x = \dfrac{e^x - \cos(2x+3)}{2}$

b) $x = \dfrac{e^x - \cos(2x+3)}{2}$

c) $\cos(2x+3) = e^x$

d) $2x + \cos(2x+3) = \ln(x)$

78) $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ tenglamaning haqiqiy bitta ildizining yotish oralig`ini aniqlang.

a) (-3;-2)

b) (-2;-1)

c) (-2;-1)

d) $\left(-1/2;0\right)$

79) $x^2-4=0$

Tenglamaning bitta ildizi qaysi oraliqda yotadi

a) [-3;1]

b) (0;1)

c) [3;5]

d) [-5;4]

80) (2x-1) $2^x-1=0$ tenglamaning taqribiy ildizini grafik usulda topishda quyidagilarning qaysi biridan foydalaniladi .

a) 2x-1= 2^{-x}

b) 2x+1= 2^x

c) 2x= 2^x

d) 2x+ $2^x=1$

81) Interpolyatsion kubik splaynni tarifi quyidagicha berilgan

$S_n(x)\epsilon H_n$2) $S_n(x)\epsilon C^m[a,b]$3) $S_3\left(x_i\right)=f\left(x_i\right)i=\overline{1,n}$ U holda bu splaynning defekti quyidagilardan qaysi biriga teng.

a) v=n-m

b) v= n+m

c) v=3n-m

d) v=2n-m

82) Quyidagilardan qaysi biri Lagranj interpolyatsion formulasini xatoligini ifodalaydi.

a) $$\left|R_n(x)\right|\le\frac{\max_{a\le x\le b}\left|f(x)^{(n+1)}\right|}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|w_{n+1}(x)\right|$$

b) $\left|R_n(x)\right| > \max_{a \le x \le b}\left|f(x)^{n+1}\right|$

c) $\left|R_n(x)\right| \le \left|f(x)^{n+1}\right| + \left|w_{n+1}(x)\right|$

d) $\left|R_n(x)\right| \ge \max_{a \le x \le b}\left|f(x)^{n+1}\right|\left|w_{n+1}(x)\right|$

83) $\sum_{i=0}^{k} l_{ki}(x)$-yig’indi nechanchi darajali kubhad buladi. Bu yerda

$$l_{ki} = \frac{\omega_{k+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{k+1}(x_i)} \quad \omega_{k+1}(x) = \prod_{i=0}^{k}(x-x_i)$$

a) k-darajali ko`p had

b) n-darajali ko`phad

c) k-1 darajali ko`phad

d) k+1-darajali ko`phad

84) Chekli ayirmalarni ishlatuvchi interpolyatsion ko’phadlarni ko’rsating

a) Nyutonning I, II interpolyatsion ko’phadi,

b) Gauss interpolyatsion ko’phadi,

c) Chebishev interpolyatsion ko’phadi

d) Lagranj interpolyatsion ko’phadi

85) Funksiya jadval bilan berilgan. *f*(2) ning qiymatini toping.

x	1	3	4
$f(x)$	2	5	7

a) 3.(3)

b) 4.5

c) 2.5

d) 0

86) Quyidagilardan qaysi biri Nyuton interpolyatsion formulasi xatoligini ifodalaydi.

a) $|R_n(x)| \le \dfrac{\max_{a\le x\le b}|f(x)^{(n+1)}|}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}|w_{n+1}(x)|$

b) $|R_n(x)| > \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)^{n+1}|$

c) $|R_n(x)| \le |f(x)^{n+1}| + |w_{n+1}(x)|$

d) $|R_n(x)| \ge \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)^{n+1}||w_{n+1}(x)|$

87) Quydagilardan qaysi biri Lagranj interpolyatsion ko'phadning xatoligini baxosi emas.

I. $|R_n(x)| \le \dfrac{\max\limits_{[a,b]}|f(x)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$

II. $|R_n(x)| \le \dfrac{\max_{a\le x\le b}|f(x)^{(n+1)}|}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}|\omega_{n+1}(x)|$

III. $|R_n(x)| \le \dfrac{\max\limits_{0\le i\le n}|f(x_i)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$

a) I, III

b) I, II, III

c) II

d) I, II

88) Quydagilarning qaysi biri Nyutonning ikkinchi interpolyatsion ko'phadining qoldiq xadi.

I. $R_n(x) = h^{n+1}\dfrac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$

II. $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)\ldots(x-x_n)$

III. $R_{2n}(x) = \dfrac{h^{2n+1}}{(n+1)!}q(q^2-1^2)\ldots(q^2-n^2)f^{(2n+1)}(\xi)$

a) I

b) III

c) II, III

d) II

89) Quyidagi formulalardan qaysi birida bo`lingan ayirmalar bilan chekli

ayirmalarni bog`liqligini ifodalovchi formula hisoblanadi.

a) $f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right) = \dfrac{\Delta^k f_i}{k!h^k}$

b) $f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right) = \dfrac{\Delta^{k+1} f_i}{(k+1)!h}$

c) $f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i-k}\right) = \dfrac{\Delta^{k+2} f_i}{k!h^k}$

d) $f\left(x_{k+i}, x_{k+i-1}, \ldots, x_{k+i+n}\right) = \dfrac{\Delta^{k+n} f_i}{n!h^k}$

90) Quyidagi formulalardan qaysi birida k-tartibli chekli ayirmani topish to`g`ri ko`rsatilgan.

a) $\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$

b) $\Delta^k f_i = \Delta^{k-2} f_{i-1} + \Delta^{k-1} f_i$

c) $\Delta^{k+1} f_i = \Delta^{k+1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$

d) $\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} + \Delta^{k-1} f_i$

91) Qanday funksiyalar yordamida qurilgan interpolyatsion formula Lokal interpolyatsion formula deyiladi.

Splayn funksiyalar orqali qurilgan interpolyatsion formulasi

Nuyton interpolyatsion formulasi

Lagranj interpolyatsion formulasi

Bessel interpolyatsion formulasi

92) Lagranj interpolyatsion ko`phadiga nisbatan hozirgi davrda qanday funksiyalar orqali ko`rilgan internatpolyatsion ko`phadlar f(x) funksiyaga yaxshi yaqinlashadi.

Splayn funksiyalar orqali qurilgan interpolyatsion formulasi

Eytken sxemasi orqali qurulgan interpolyatsion formulasi

Nuyton interpolyatsion formulasi

Simpson interpolyatsion formulasi

93) Funksiya jadval ko`rinishida berilgan f (4) ni toping

x	3	5
$f(x)$	6	10

a) 8

b) 10

c) 6

d) 12

94) n-chi darajali interpolyatsion Splayn-funksiyasining ta'rifi quyidagicha: har bir $[x_i, x_{i+1}], i=\overline{0,n}$ oraliqda

$S_n(x) \in H_n$

$S_n(x) \in C^m[a,b]$ berilgan holda bu Splayn funksiyaning defekti

$S_n(x_i) = f(x_i), i=\overline{0,n}$

quyidagilardan qaysi biriga to'g'ri ko'rsatilgan

a) $\nu = n - m$

b) $\nu = n + m$

c) $\nu = n * m$

d) $\nu = \frac{n}{m}$

95) n-chi darajali interpolyatsion splayn funksiyasini ta'rifi quyidagilardan qaysi biriga to'g'ri keladi.

a) $s_n(x) \in H_n(x)$ har bir $[x_i, x_{i+1}] = \overline{0,n}$ oralig'ida $s_n(x) \in C^m[a,b]$

b) $s_n(x_i) = f(x_i), i=\overline{0,n}$ shartlar bajarilsa

c) $s_n(x) \in H_{n+2}(x),\ x \in [a,b]$ $s_n(x) \in C^{n-2}[a,b]$ $s_n(x) \in f(x_{i+1}), i=\overline{0,n}$

shartlar bajarilsa $s_n(x) \in c^n[a,b]$ $s_n(x) = f(x), i=\overline{0,n}$ shartlar bajarilsa

d) $s_n(x) \in H_2[a,b]$

$s_n(x) \in C^2[a,b]$

$s_n(x) = f(x_2), i=\overline{0,n}$

96) Bo'lingan ayirmalar asosida qaysi interpolyasion formulada qo'llaniladi

a) Tengmas oraliqli Nyuton interpolyasion formulasida

b) tengmas oraliqliGauss interpolyasion formulasida

c) tengmas oraliqli Eytkin interpolyasion formulasida

d) tengmas oraliqli Lagranja interpolyasion formulasida

97) $y = x^2$ funksiyaning birinchi tartibli chekli ayirmasi quyidagilardan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan. $\mathrm{V}x = 1$

a) $\Delta y = 2x + 1$

b) $\Delta y = 2 - x$

c) $\Delta y = 2 + x$

d) $\Delta y = 3 - 2x$

98) $y = x^2$ funksiyaning 3-tartibli chekli ayirmasi quyidagilardan qaysi biriga to`g`ri keladi? $\mathrm{V}x = 1$

a) 6

b) -6

c) 3

d) -3

99) $y = x^2$ funksiyaning 2-tartibli chekli ayirmasi quyidagilardan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.Bu yerda $\mathrm{V}x = 1$ deb olinadi.

a) 6x+6

b) 6x-6

c) -6x+2

d) 6x-4

100) $y = x^2$ funksiyaning birinchi tartibli chekli ayirmasi quyidagilardan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.

$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$\Delta y = x^2 + \Delta x + (\Delta x)^2$

$\Delta y = (\Delta x)^2 - 2x^2$

$\Delta y = x^2 - 2x\Delta x$

101) Funksiyaning 2-tartibli chekli ayirmasi $\nabla^2 y = ?$ quyidagilardan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.

a) $\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$

b) $\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = f(x + 3\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$

c) $\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = f(x - 3\Delta x) - 2f(x - \Delta x) + f(x)$

d) $\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = f(x - 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) - f(x)$

102) Funksiyaning birinchi tartibli chekli ayirmasi quyidagilardan qaysi birida to`g`ri hisoblanadi.

a) $\nabla y = f(x + \nabla x) - f(x)$

b) $\nabla y = f(x - \nabla x) - f(x)$

c) $\nabla y = f(x + \nabla x) + kf(x)$

d) $\nabla y = f(x + \nabla y) + f(x)$

103) Chekli ayirmalarni ishlatuvchi interpolyatsion ko’pxadlarni ko’rsating

a) Nyutonning interpolyatsion ko’pxadi,

b) Gauss interpolyatsion ko’pxadi, Stirling interpolyatsion ko’pxadi

c) Stirling interpolyatsion ko’pxadi

d) Lagranj interpolyatsion ko’pxadi

104) 2-tartibli bo`lingan ayirma quyidagilarning qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.

a) $[x_i,\ x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

b) $[x_i,\ x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{[x_{i+k,\dots}, x_{i-k}] - [x_{i+1}, \dots, x_i]}{x_{i+k} - x_i}$

c) $\left[x_i,\ x_{i+1}, x_{i+2}\right] = \dfrac{\left[x_{i+k}, x_{i-k}\right] - \left[x_{i+1}, x_i\right]}{x_{i-k} - x_i}$

d) $\left[x_i,\ x_{i+1}, x_{i+2}\right] = \dfrac{\left[x_{k+1}, x_{k-1}\right] - \left[x_{i-1,\dots}, x_i\right]}{x_{l+1} - x_{k-1}}$

105) Yuqori tartibli chekli ayirma quyidagi formulalardan qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.

a) $\nabla^n y = \nabla\left(\nabla^{n-1} y\right)$

b) $\nabla^n y = \nabla\left(\nabla^{n+1} y\right)$

c) $\nabla^n y = \nabla^{n-1}\left(\nabla^k y\right)$

d) $\nabla^n y = \nabla^n\left(\nabla^k y\right)$

106) n- tartibli bo`lingan ayirma quyidagilarning qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.

a) $\left[x_{i,}\ x_{i+1,\dots}\ x_{i+n}\right] = \dfrac{\left[x_{i+1,}\ x_{i+2,\dots}\ , x_{i+n}\right] - \left[x_{i,}\ x_{i+1,\dots}\ x_{i+n-1}\right]}{x_{i+n} - x_i}$

b) $\left[x_{i-3,}\ x_{i+1,\dots}\ x_{i+n}\right] = \dfrac{\left[x_{i+4,}\ x_{i+3,\dots}\ , x_{i+n}\right] - \left[x_{i+3,\dots}\ x_{i+n}\right]}{x_{i+n} - x_{i+k}}$

c) $\left[x_{i-5,\dots}\ x_{i+n}\right] = \dfrac{\left[x_{i-4,\dots}\ x_{i+n}\right] - \left[x_{i-3,\dots}\ x_{i+n}\right]}{x_{i+4} - x_{i-n}}$

d) $\left[x_{i+k,\dots}\ x_{i+n}\right] = \dfrac{\left[x_{i,\dots}\ x_{k+n}\right] - \left[x_{i-1,\dots}\ x_{i+n}\right]}{x_i - x_k}$

107) Quyidagilardan qaysi biri funksiyaning birinchi tartibli chekli ayirmasini ifodalaydi.

a) $\Delta y \equiv \Delta f\left(x\right) = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$

b) $\Delta y \equiv \Delta f\left(x\right) = f\left(x + \Delta x\right) + \alpha f\left(x\right)$

c) $\nabla y \equiv \nabla f\left(x\right) = f\left(x - \nabla x\right) + f\left(x\right)$

d) $\nabla y \equiv \nabla f\left(x\right) = f\left(x + \nabla x\right) - \nabla x$

108) Quyidagi shartlardan qaysi biri bajarilsa $S_3\left(x\right)$ interpolinatsion kubik splayn deyiladi.

a) $S_3(x)\in H_3$; $S_3(x)\in C^2[a,b]$ 3) $S_3(x_i)=f(x_i)\, i=\overline{1,n}$

b) $S_2(x)\in H_2[a,b]$; $S_2(x)\in C^5[a,b]$; $S_2(x_i)=f(x_{i+1})\, i=\overline{0,n}$

c) 1) $S_2(x)\in H(x)$; $S_2(x)\in C^4[a,b]$; $S_2(x_i)=f(x)\, i=\overline{0,n}$

d) 1) $S_2(x)\in H_4(x)$; $S_2(x)\in C^3[a,b]$; $S_2(x_i)=f(x_{i+1})\, i=\overline{0,n}$

109) Birinchi tartibli bo`lingan ayirma quyidagilarning qaysi birida to`g`ri ko`rsatilgan.

a) $[x_i,x_{i+1}]=\dfrac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}$

b) $[x_{i-k},x_{i+k}]=\dfrac{y_{i-k}+y_i}{x_{i-k}+x_i}$

c) $[x_i,x_{i+j}]=\dfrac{y_{i+k}-y_{i+j}}{x_{i+k}+x_{i+j}}$

d) $[x_i,x_{i-k}]=\dfrac{y_{i-k}-y_i}{x_i+x_{i+k}}$

110) Nyuton interpolyatsion ko'phadi necha xil ko'rinishda ifodalangan.

a) 2 xil ko'rinishda olddan va ortdan interpolyatsion formulada

b) 3 xil ko'rinishda oldindan , ortdan va yana olddan.

c) 4 xil ko'rinishda bo'ladi

d) Bir xil ko'rinishda olddan interpolyatsion formulada

111) Tiklanayotgan f(x) funksiyaning qiymatlari jadval ko'rinishda berilgan holda quyidagi usullardan qaysi biri eng kichik kvadratlar usuli

a) $\sum_{i=0}^{n}(f(x_i)-P_n(x_i))^2\to\min$

b) $\sum_{i=0}^{n}(f(x_i)+P_n(x_i))^2\to\min$

c) $\sum_{i=0}^{n}(f(x_i)\cdot P_n(x_i))^2\to\min$

d) $\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{f(x_i)}{P_n(x_i)}\right)^2 \to \min$

112) Quyidagi usullardan qaysi biri eng kichik kvadratlar usuli

a) $\int_a^b (f(x)-P_n(x))^2 dx \to \min$

b) $\int_a^b (f(x)+P_n(x))^2 dx \to \min$

c) $\int_a^b (f(x)\cdot P_n(x))^2 dx \to \min$

d) $\int_a^b \left(\frac{f(x)}{P_n(x)}\right)^2 dx \to \min$

113) Funksiyani yaqinlashtirishda qanday shart bajarilsa eng kichik kvadratlar usuli yaxshi yaqinlashadi.

a) $\frac{\partial \delta_n^2}{\partial a_k} = 0,\ k = \overline{0,n}$

b) $\frac{\partial \delta_n}{\partial a_k} > 0,\ k = \overline{0,n}$

c) $\frac{\partial \delta_n}{\partial a_k} \le 0,\ k = \overline{0,n}$

d) $\frac{\partial \delta_n}{\partial a_k} = A,\ k = \overline{0,n}$

114) Quyidagi ko'phadlardan qaysi biri Lagranj interpolyatsion ko'phad i

a) $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} y(x_i)$

b) $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_{n-1}(x)}{(x-x_i)P'_{n-1}(x_i)}$

c) $Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{Q(x_i)}{(x-x_i)Y_i}$

d) $Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{Q(x_i)}{(x-x_i)Y_i}$

115) Interpolyatsion ko’phadni qoyishda biror berilgan [a , b] oraliqda qadam (ya’ni tugun nuqtalar orasidagi masofa) qanday tanlanadi.

a) h=(b-a)/n

b) h=(b+a)/n

c) h=n(b-a)

d) h=n(b+a)

116) Quyidagi shartlardan qaysi biri bajarilsa $P_n(x)$ ko’phad interpolyatsion ko’phad bo’ladi.

a) $f(x_i)= P_n(x_i)$; i=0..n

b) $f(x_i)= A P_n(x_i)+B$; i=0..n

c) $f(x_i)+C= P_n(x_i)-A$; i=0..n

d) $f(x_i)=P_n(x_i)+C$; i=0..n

117) Interpolyatsiya so’zining manosi quyidagilardan qaysi birida to’g’ri ko’rsatilgan

a) Jadval ko`rinishida berilgan funksiyaning analitik ko`rinishini tiklash, degan manoni anglatadi

b) Ulash degan manoni anglatadi

c) Yaqinlashish degan manoni anglatadi

d) Uzoqlashish degan manoni anglatadi

118) Interpolyatsion kubik splaynni tarifi quyidagicha berilgan

1) $S_3(x) \in H_3$; 2) $S_3(x) \epsilon C^1[a,b]$3) $S_3(x_i) = f(x_i) i = \overline{1,n}$ U holda bu splaynning defekti quyidagilardan qaysi biriga teng.

a) 2

b) 1

c) 3

d) 4

119) Lagranj interpolyatsion ko`phadi xatoligi asosan nimaga bog`liq?

a) Tugun nuqtalar soni va ularning joylashuviga

b) Funksiya hosilasiga

c) Ko`phadning darajasiga

d) Funksiya eng katta qiymatiga

120) Lagranj interpolyatsion ko`phadi qachon ishlatiladi?

a) Har xil funksiyalar bir xil tugun nuqtada interpolyatsiya qilinsa

b) bitta funksiya har xil tugun nuqtada interpolyatsiya qilinsa

c) Har doim

d) Tugun nuqtalar 3 tadan ko`p bo`lsa

121) Nyuton interpolyatsion ko`phadi qachon ishlatiladi?

a) Bitta funksiya va tugun nuqtalari ortib borsa

b) bitta funksiya har xil tugun nuqtada interpolyatsiya qilinsa

c) Har doim

d) Tugun nuqtalar 3 tadan ko`p bo`lsa

122) $S_3(x)$ funksiyani interpolatsion kubik splayn bo`lishi uchun qanday shart talab qilinadi

a) $S_3(x_i) = f(x_i)(i = \overline{0,n})$

b) $S_3(x_i) = f(x_{i+1})$, $(i = \overline{0,n-1})$

c) $S_3(x_{i+1}) = f(x_i)$; $(i = 0,n)$

d) $S_3(x_{i+1}) = f(x_{i+2})$, $(i = 0,n)$

123) $S_n(x)$ funksiya n-darajali interpolatsion splayn bo`lishi uchun qaysi shartlarni qanoatlantirishi kerak?

a) $S_n(x_i) = f(x_i) i = \overline{0,n}$

b) $S_n(x_i) \geq f(x_i) i = \overline{0,n}$

c) $S_i(x_i) < f(x_i) i = \overline{0,n}$

d) $S_n(x_i) > 0 i = \overline{0, n}$

124) Jadval ko'rinishida berilgan funksiyalarni analitik ko'rinishda ifodalashda qaysi usullar yoki formulalar ishlatiladi?

a) Lagranj interpolyasion formulasi, Nyuton interpolyasion formulalari, Eng kichik kvadratlar usuli

b) Kramer

c) Boks

d) Krilov formulasi

125)

X	x_o	x_1
y	y_0	y_1

Jadval asosida qurilgan Logranj interpolitsion ko'p xadi quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan.

a) $L_1(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$

b) $L_1(x) = \dfrac{x_1 - x}{x_0 - x_1} y_1 + \dfrac{x_1 - x_0}{x_1 - x} y,$

c) $L_1(x) = \dfrac{x - x_1}{y - x_0} y_0 + \dfrac{x - x_1}{x_0 - y} y,$

d) $L_1(x) = \dfrac{x + x_1}{x_1 - x_0} y_0 + \dfrac{x + x_0}{x_0 - x_1} y,$

126) Interpolyasion ko'phad deb, shunday ko'phadga aytiladiki ...

a) tugun nuqtalarda qiymatlari shu tugun nuqtadagi funksiya qiymatiga teng bo'lsa

b) n-chi tartibli

c) Parabolik ko'rinishdagi

d) $n+1$-chi tartibli

127) Chekli ayirmalar jadvali qaysi interpolyasion formulada qo'llaniladi

a) teng oraliqli Nyuton interpolyasion formulasida

b) teng oraliqliGauss interpolyasion formulasida

c) teng oraliqli Eytkin interpolyasion formulasida

d) teng oraliqli Lagranja interpolyasion formulasida

128) Birinchi Nyuton interpolyasion formasi:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots +$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i$$

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots +$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_i)(x-x_i)} y_i$$

129) Interpolyasiya qo’shni tugun nuqtalar funksiya qiymatlari ayirmasiga ... deyiladi

birinchi tartibli chekli ayirma

birinchi tartibli markaziylashgan ayirma

birinchi tartibli ajratishli ayirma

birinchi tartibli ayirma

130) Markazlashgan ayirmalar jadvali qaysi interpolyasion formulada qo’llaniladi

a) teng oraliqli Gauss interpolyasion formulasida

b)teng oraliqli Nyuton interpolyasion formulasida

c) teng oraliqli Eytkininterpolyasion formulasida

d) teng oraliqli Lagranj interpolyasion formulasida

131) Taqribiy sonlar ko’paytmasining nisbiy xatosi:

a) Ko'paytuvchilar nisbiy xatoliklarning yig'indisiga teng

b) Ko'paytuvchilar nisbiy xatoliklarining eng kattasiga teng

c) Ko'paytuvchilar absolyut xatoliklarning yig'indisiga teng

d) Ko`paytuvchilar nisbiy xatoliklarining eng kichigiga teng

132) $\pi = 3{,}1415926535...$ sonini 0,01 aniqlikda yaxlitlanganda quyidagilardan qaysi biriga teng bo'ladi?

a) $\pi \approx 3{,}14$

b) $\pi \approx 3{,}14159$

c) $\pi \approx 3{,}1415$

d) $\pi \approx 3{,}141596$

133) Taqribiy yechimning ishonchli raqamini quyidagi tengsizliklardan qaysi biri orqali topish mumkin.

a) $\delta a^* \le \frac{1}{\alpha_m}(\frac{1}{10})^{n-1}$

b) $\delta a^* \le \frac{1}{\alpha_m}10^{n+1}$

c) $\delta a^* \ge \alpha_m (\frac{1}{10})^{n+1}$

d) $\delta a^* \ge \frac{1}{\alpha_m}10^{n-1}$

134) Quyidagilardan qaysi birida yo`qotilmas xatolikni tarifi to`g`ri ko`rsatilgan.

a) Dastlabki olingan ma'lumotlarni noaniqligi natijasida hosil bo`lgan xatolik.

b) Hisoblashda adashish natijasida hosil bo`lgan xatolik

c) Funksiya berilishini xato olish natijasidagi xatolik

d) Funksiya nisbiy xatoligida hosil qilingan xatolik

135) Taqribiy hisoblash jarayonlaridagi ko`rsatiladigan xatoliklar manbai quyidagilardan qaysi biriga to`g`ri keladi.

a) Yo`qotilmas xato ,metod xato, hisoblash xatosi .

b) Yaqinlashish xatoligi

c) Funksiya xatoligi

d) Nolga intilish xatoligi

136) Berilgan $a = 3{,}14152719$ taqribiy sonni $0{,}01$ aniqlikdagi yaxlitlash natijasida hosil bo'lgan son quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan.

a) $a \approx 3{,}14$

b) $a \approx 3{,}1415$

c) $a \approx 3{,}141$

d) $a \approx 3{,}14152$

137) $\pi = 3{,}1415926535...$ sonini 0.1 aniqlikda yaxlitlanganda quyidagilardan qaysi biriga teng bo'ladi?

a) $\pi \approx 3.1$

b) $\pi \approx 3{,}14159$

c) $\pi \approx 3{,}14$

d) $\pi \approx 3{,}141596$

138) Funksiyaning absolyut xatoligi quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan

a) $|\mathrm{V}u| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{\partial x_i} \right| \mathrm{V}x_i$

b) $|\mathrm{V}u| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{\partial x_i} \right| x_i$

c) $|\mathrm{V}u| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \partial f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \right| \mathrm{V}x_i$

d) $|\mathrm{V}u| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{\partial x_i} \right| + x_i$

139) a^* - taqribiy sonni nisbiy xatosi bilan ishonchli raqami orasidagi bog'liqlik quyidagi ko'rsarilgan tengsizliklardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan

a) $\delta a^{*} \leq \frac{1}{2a_{m}}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

b) $\delta a^{*} \geq \frac{1}{2a_{m}}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

c) $\delta a^{*} \leq a_{m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

d) $\delta a^{*} \leq a_{m}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}$

140) a^{*} - taqribiy sonning nisbiy xatosi quyidagilardan qaysi biriga teng

a) $\delta a^{*} \leq \frac{\mathrm{V}a^{*}}{\left|a^{*}\right|}$

b) $\partial a^{*} \leq \frac{\left|a^{*}\right|}{\mathrm{V}a^{*}}$

c) $\partial a^{*} = \left|a^{*}\right| \cdot \mathrm{V}a^{*}$

d) $\partial a^{*} = \left|a^{*}\right| + \mathrm{V}a^{*}$

141) a^{*} - taqribiy sonning absolyut xatosi quyidagilardan qaysi biriga teng

a) $\mathrm{V}a^{*} = \left|a - a^{*}\right|$

b) $\mathrm{V}a^{*} = \left|a + a^{*}\right|$

c) $\mathrm{V}a^{*} = \left|\frac{1}{2}a - a^{*}\right|$

d) $\mathrm{V}a^{*} = \left|a - \frac{1}{2}a^{*}\right|$

142) Taqribiy sonning ma’noli raqami ta’rifi quyidagilardan qaysi birida to’g’ri berilgan?

a) Chap tomondan birinchi noldan farqli raqamdan boshlab,yozilgan raqamlar.

b) O’ng tomondan birinchi noldan farqli sondan boshlab

c) Barcha raqamlari ma’noli

d) Taqribiy sonda nollar qatnashmasa

143) Berilgan $a = 2,4424$ sonning taqribiy qiymatining absolyut xatoligi $\Delta a = 0,0014$ ga teng bo'lsa berilgan a sonning taqribiy qiymati $a*$ ning qiymati quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan.

a) $a* = 2,441$

b) $a* = 2,446$

c) $a* = 2,443$

d) $a* = 2,442$

144) $a* = 0,818$ taqribiy son berilgan va taqribiy sonning nisbiy xatoligi $\delta a* = 0,0024$ berilgan bo'lsa $a*$ taqribiy sonning absolyut xatoligi $\Delta a*$ quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan.

a) $\Delta a* = 0,00019$

b) $\Delta a* = 0,0019$

c) $\Delta a* = 0,00018$

d) $\Delta a* = 0,000018$

145) $\delta a* = 0,00024$ va $\delta b* = 0,00064$ $a* = 0,81818$ va $b* = 4,2426$ taqribiy sonlarning nisbiy xatoliklari berilgan. Bu taqribiy sonlar nisbatining nisbiy xatoligi quyidagi ko'rsatilgan sonlarni qaysi biridan oshmasligi kerak.

a) $0,00088$

b) $0,00064$

c) $0,00098$

d) $0,00084$

146) Hisoblash matematikasi fanining asosiy vazifasi quyidagilardan qaysi birida to'g'ri ko'rsatilgan?

a) Quyilgan maslani aniq yechimini toppish imkoni bol'lmagan hollarda bu masalaning yechimini taqribiy usullar yordamida oldindan berilgan aniqlikda toppish va aniq yechim bilan taqribiy yechim orasidagi hatolikni baholashdan iborat

b) Quyilgan masalani algoritmini tuzishdan iborat.

c) Quyilgan masalani yechishdan iborat.

d) Berilgan masalani aniq yechimini dasurlar tuzib yechishdan iborat.

147) $\pi = 3,1415926535...$ sonini 0,0001 aniqlikda yaxlitlanganda quyidagilardan qaysi biriga teng bo’ladi?

a) $\pi \approx 3,1415$

b) $\pi \approx 3,14159$

c) $\pi \approx 3,14$

d) $\pi \approx 3,141596$

148) $u = x_1 + x_2 + ... + x_n$ yig’indining absolyut xatoligini baholash quyidagilardan qaysi birida to’g’ri ko’rsatilgan?

a) $|\Delta u| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ... + |\Delta x_n|$

b) Danilevskiy usuli

c) $|\Delta u| \leq |\Delta x_1| - |\Delta x_2| - ... - |\Delta x_n|$

d) $|\Delta u| \leq |\Delta x_1| - |\Delta x_2| - ... - |\Delta x_n|$

149) $\pi = 3,1415926535...$ sonini 0,001 aniqlikda yaxlitlanganda quyidagilardan qaysi biriga teng bo’ladi?

a) $\pi \approx 3.141$

b) $\pi \approx 3,14159$

c) $\pi \approx 3,14$

d) $\pi \approx 3,141596$

150) $\pi = 3,1415926535...$ sonini 0,00001 aniqlikda yaxlitlanganda quyidagilardan qaysi biriga teng bo’ladi?

a) $\pi \approx 3.14159$

b) $\pi \approx 3,14159$

c) $\pi \approx 3,14$

d) $\pi \approx 3{,}141596$

151) Agar a-biror sonning aniq qiymati bo`lib , $a^*$ uning ma`lum taqribiy qiymati bo`lsa, u holda taqribiy a^* sonning absolut xatosi qaysi tenglik yordamida aniqlanadi.

a) $\mathrm{V}a^* = |a - a^*|$

b) $\mathrm{V}a^* = |2a - a^*|$

c) $\mathrm{V}a^* = |a + 2a^*|$

d) $\mathrm{V}a^* = |2a + a^*|$

152) Hisoblash algoritmlariga qoyiladigan asosiy talablarni ko’rsating.

a) Aniqlik; Turg’unlik; Tejamkorlik;

b) Aniqlik;

c) Turg’unlik;

d) Tejamkorlik;

153) Bir xil ishorali taqribiy sonlardan iborat bo’lgan yig’indining absolyut xatosi nimaga teng?

a) Qo’shiluvchilar absolyut xatoliklarining yig’indisiga

b) Qo’shiluvchilar absolyut xatoliklarining eng kichigiga

c) Qo’shiluvchilar absolyut xatoliklarining o’rta arifmetigiga

d) Qo’shiluvchilar absolyut xatoliklarining eng kattasiga

IV. GLOSSARIY

№	Atama	O'zbek tilidagi sharhi
1.	**Interpolyasiya**	Jadval ko'rinishida berilgan funksiyani taqribiy analitik ko'rinishini algebraik ko'phad ko'rinishida ifodalash
2.	**Splayn funksiya**	Bo'lakli silliq bir xil strukturali funksiya
3.	**Kvadratur formula**	Aniq integralni taqriban chekli yig'indiga olmashtirish
4.	**Metod**	Usul
5.	**Singulyar nuqta**	Mavhum nuqta optimal
6.	**Iteratsion metod**	Echimga ketma–ket yaqinlashish usuli
7.	**To'r**	Tartiblashgan nuqtalar to'plami
8.	**To'rfunksiya**	Tartiblashgan nuqtalar to'plamida aniqlangan funksiyaning qiymatlari
9.	**To'r tenglama**	To'rning no'qtalarida noma'lumlarni qiymati qatnashadigan tenglamalar
10.	**Turg'unlik**	Boshlang'ich echimning berilganlarga uzluksiz bog'liqligi
11.	**Spektr radius**	Matritsa xos sonlarining eng kattasi
12.	**O'tish matritsasi**	Iteratsion ketma–ketlikda bir qadamdan ikkinchi qadamga o'tishda kupaytiriladigan matritsa
13.	**Diskret masala**	Tugun nuqtalarda echimni topish haqidagi masala
14.	**Approksimatsiya**	Yaqinlashtirish

15.	**$a*$ soning absolyut xatosi**	Faraz qilaylik, a - biror miqdorning aniq qiymati bo‘lib, $a*$ uning ma’lum taqribiy qiymati bo‘lsa, u vaqtda taqribiy $a*$ sonining absolyut xatosi deb $\Delta a* = \|a - a*\|$ ga aytiladi.
16.	**Taqribiy sonning nisbiy xatosi**	Absolyut xatoni taqribiy miqdorning absolyut qiymatiga nisbati taqribiy sonning nisbiy xatosi $\delta a*$ deb aytiladi
17.	**Absolyut xatolig**	Absolyut xatodan kichik bo‘lmagan, har qanday songa taqribiy $a*$ sonning limit absolyut xatoligi deyiladi va u uchun quyidagi tengsizlik o‘rinlidir: $\Delta a* \le \Delta(a*)$
18.	**Norma moslashganligi**	$\\|A \cdot B\\| \le \\|A\\| \cdot \\|B\\|$, xususan, $\\|A^p\\| \le \\|A\\|^P$. Agar har qanday kvadrat A matritsa uchun va o‘lchami matritsa tartibiga teng bo‘lgan ixtiyoriy x vektor uchun $\\|Ax\\| = \\|A\\| \cdot \\|x\\|$ Tengsizlik bajarilsa, u holda matritsa normasi vektorning berilgan normasi bilan moslashgan deyiladi
19.	**Vektorning berilgan normasiga bo‘ysunganligi**	$\\|A\\| = \max_{\\|x\\|=1} \\|Ax\\|$ tenglik bilan kiritilgan matritsa normasi vektorning berilgan normasiga bo‘ysungan deyiladi
20.	**Oddiy iteratsiya metodi**	$Ax = b$, $x = Bx + c$, $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$, $k = 1,2,\ldots$ rekurrent formulalar yordamida topilsa, bunday metod oddiy iteratsiya metodi deyiladi
21.	**Vatarlar metodi**	Ildizning boshlang‘ich qiymati sifatida $[a,b]$ ga tegishli va $f(x)f''(x) < 0$ shartni bajaruvchi ixtiyoriy nuqtani olish mumkin, xususan, $x_0 = a$ yoki $x_0 = b$ deyish

		mumkin
22.	**Lagranj interpolyasion ko‘phad**	$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}f(x_i),$ Bu erda $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$. Bu ko‘rinishdagi ko‘phad Lagranj interpolyasion ko‘phadi deyladi
23.	**Interpolyasion kubik splayn**	A) Har bir $[x_i,x_{i+1}]\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ oraliqda $S_3(x)\in H_3(P)$ - darajasi uchdan oshmaydigan ko‘phadlar to‘plami. a. B) $S_3(x)\in C_2[a,b]$. b. C) $S_3(x_i)=f(x_i)$ $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$. c. D) $S''_3(x)$ Quyidagi to‘rt shartni qanoatlantiruvchi ushbu $S_3(x)$ funksiya interpolyasion kubik splayn deyiladi
24.	**Kvadratur formula**	Aniq integrallarni hisoblashda qo‘llaniladigan $\int_a^b p(x)f(x)dx\cong\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$ (1) Taqribiy tenglikni kvadratur formula deb ataladi
25.	**Kvadratur formulaning qoldiq hadi**	$R_n(f)=\int_a^b p(x)f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}A_kf(x_k)$ kvadratur formulaning qoldiq hadi deyiladi
26.	**Xos son va xos vektor**	Agar biror noldan farqli x vektor uchun $Ax=\lambda x$ tenglik bajarilsa, u holda λ son Akvadrat matritsaning xos soni deyiladi. Bu tenglikni qanoatlantiradigan noldan farqli x vektor A matritsaning λ xos soniga mos keladigan xos vektori deyiladi

27.	**Metod xatosi**	Ba`zi matematik ifodalar tabiat xodisasining ideallashtirilgan modelini tasvirlaydi. Shuning uchun tabiat xodisalarining aniq matematik ifodasini (formulasini, tenglamasini) berib bo`lmaydi, buning natijasida xato kelib chikadi. Yoki biror masala aniq matematik formada yozilgan bo`lsa va uni shu ko`rinishda echish mumkin bo`lmasa, bunday xolda bu masala unga yaqinrok va echish mumkin bo`lgan masalaga almashtirilishi kerak. Buning natijasida kelib chiqadigan xato metod xatosi deyiladi
28.	**Hisoblash xatosi**	Biz doimo π, e, 1p2 va shunga o`xshash irratsional onlarning taqribiy qiymatlarini olamiz, bundan tashqari, hisoblash jarayonida oraliq natijalarda ko`p xonali sonlar hosil bo`ladi, bularni yaxlitlab olishga to`g’ri keladi. Ya`ni masalalarni echishda hisoblashni aniq olib bormaganligimiz natijasida ham xatoga yo`l kuyamiz, bu xato hisoblash xatosi deyiladi
29.	$a*$ **sonining absolyut xatosi**	Faraz qilaylik, a - biror miqdorning aniq qiymati bo‘lib, $a*$uning ma’lum taqribiy qiymati bo‘lsa, u vaqtda taqribiy $a*$ sonining absolyut xatosi deb $\Delta a* = \lvert a - a* \rvert$ ga aytiladi
30.	**Taqribiy sonning nisbiy xatosi**	Absolyut xatoni taqribiy miqdorning absolyut qiymatiga nisbati taqribiy sonning nisbiy xatosi $\delta a*$ deb aytiladi:
31.	**Absolyut xatolig**	Absolyut xatodan kichik bo‘lmagan, har qanday songa taqribiy $a*$ sonning limit absolyut xatoligi deyiladi va u uchun quyidagi tengsizlik o‘rinlidir: $\Delta a* \le \Delta(a*)$
32.	**Norma moslashganligi**	$\lVert A \cdot B \rVert \le \lVert A \rVert \cdot \lVert B \rVert$, xususan, $\lVert A^p \rVert \le \lVert A \rVert^P$. Agar har qanday kvadrat A matritsa uchun va o‘lchami matritsa tartibiga

		teng bo'lgan ixtiyoriy x vektor uchun $\|Ax\| = \|A\| \cdot \|x\|$ Tengsizlik bajarilsa, u holda matritsa normasi vektorning berilgan normasi bilan moslashgan deyiladi
33.	**Vektorning berilgan normasiga bo'ysunganligi**	$\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ tenglik bilan kiritilgan matritsa normasi vektorning berilgan normasiga bo'ysungan deyiladi
34.	**Oddiy iteratsiya metodi**	$Ax = b$, $x = Bx + c$, $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$, $k = 1,2,...$ rekurrent formulalar yordamida topilsa, bunday metod oddiy iteratsiya metodi deyiladi
35.	**Vatarlar metodi**	Ildizning boshlang'ich qiymati sifatida $[a,b]$ ga tegishli va $f(x)f''(x) < 0$ shartni bajaruvchi ixtiyoriy nuqtani olish mumkin, xususan, $x_0 = a$ yoki $x_0 = b$ deyish mumkin
36.	**Lagranj interpolyasion ko'phad**	$P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} f(x_i)$, U erda $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$. Bu ko'rinishdagi ko'phad Lagranj interpolyasion ko'phadi deyladi
37.	**Interpolyasion kubik splayn**	A) Har bir $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = \overline{0, n-1})$ oraliqda $S_3(x) \in H_3(P)$ - darajasi uchdan oshmaydigan ko'phadlar to'plami. B) $S_3(x) \in C_2[a,b]$. C) $S_3(x_i) = f(x_i)$ $(i = \overline{0, n-1})$. D) $S_3''(x)$ Quyidagi to'rt shartni qanoatlantiruvchi

		ushbu $S_3(x)$ funksiya interpolyasion kubik splayn deyiladi:
38.	**Kvadratur formula**	Aniq integrallarni hisoblashda qo'llaniladigan $$\int_a^b p(x)f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \quad (1)$$ Taqribiy tenglikni kvadratur formula deb ataladi
39.	**Kvadratur formulaning qoldiq hadi**	$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$ kvadratur formulaning qoldiq hadi deyiladi
40.	**Xos son va xos vektor**	Agar biror noldan farqli x vektor uchun $$Ax = \lambda x$$ Tenglik bajarilsa, u holda λ son Akvadrat matritsaning xos soni deyiladi. Bu tenglikni qanoatlantiradigan noldan farqli x vektor A matritsaning λ xos soniga mos keladigan xos vektori deyiladi
41.	**Chekli elementlar**	Aniqlanish sohasining juda kichkina kompakt qismidagina noldan farqli bo'lgan bazis funksiyalar chekli elementlar deyiladi
42.	**Chekli elementlar usuli**	Chekli elementlarga asoslangan varitsion proeksion usullar (kollokatsiya, galyorkin, eng kichik kvadratlar usullari) chekli elementlar usuli deyiladi. Chekli element noldan farqli bo'lgan kompakt to'plam uning asosi deyiladi va D_{φ_i} deb belgilanadi
43.	**To'r funksiya**	$\bar{D} = D + G$ sohaga qarashli diskret $D_h = \{M_h = (x_k, y_k), k = 0,1,...,m\}$ nuqtalar to'plamini qaraymiz va uni sohada to'r deb ataymiz, bu erda h parametr $\bar{D}$ sohadagi nuqtalar sonini va zichligini xarakterlaydi, masalan, $h = 1/m$, $M_h = (x_k, y_k)$ -nuqtalar to'rning tugun nuqtalari deyiladi. To'rda

		aniqlangan funksiya to‘r funksiya deyiladi
44.	**Approksimatsiya**	Agar $L_h\bar{u}_h = f_h + R_h, R_h \to 0, h \to 0$ bo‘lsa CHAS $Lu = f$ DM ni echimda **approksimatsiya qiladi deyiladi.** $R_h = L_h\bar{u}_h - f_h$ **chasning echimdagi approksimatsiya** xatoligi deyiladi. Agar $\|R_h\|_{F_h} \le Mh^{\sigma}$ bo‘lsa, CHAS dmni σ tartib bilan approksimatsiya qiladi deyiladi
45.	**Shablon**	Hosilani chekli ayirmalar bilan approksimatsiya kilishda ishlatiladigan to‘rning nuqtalar to‘plamiga shablon deyiladi
46.	**Aynigan yadro**	Agar $$K(x,y) = K_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x)\beta_j(y) \quad , \quad (12)$$ Ya’ni yadroning o‘zgaruvchilari ajraladigan va chekli yig‘indi bo‘lsa, u aynigan yadro deyiladi
47.	**Hisoblash matematikasi**	Matematikada tipik matematik masalalarning echimlarini etarlicha aniqlikda hisoblash imkonini beruvchi metodlar yaratishga va shu maqsadda hozirgi zamon hisoblash vositalaridan foy-dalanish yo`llarini ishlab chiqishga bag’ishlangan soxa **Hisoblash matematikasi** deyiladi
48.	**To`g’ri masala**	Agar A operator va x element xaqida ma`lumot berilgan bo`lib, u ni topish lozim bo`lsa, bunday masala **to`g’ri masala** deyiladi
49.	**Teskari masala**	Aksincha, A va u xakida ma`lumot berilgan bo`lib, x ni topish kerak bo`lsa, bunday masala **teskari masala** deyiladi
50.	**Birinchi avlod hisoblash mashinalari**	Ehmlarning rivojlanishi elektron texnikaning muvaffakiyatlari bilan chambarchas bog’liqdir. Birinchi ehmlar elektron lampalar yordamida kurilgan

		bo`lib, ular birinchi avlod hisoblash mashinalari deyiladi.
51.	**Dastlabki xatoga nisbatan turgun**	Agar hisoblashning dastlabki kadamlarida yo`l qo`yilgan xato, keyingi kadamlarda hisoblash aniq, bajarilganda ortmasa yoki xech bulmaganda bir xil tartibda bo`lsa, u xolda hisoblash algoritmi **dastlabki xatoga nisbatan turgun** deyiladi
52.	**Algoritm noturgun**	Agarda kadamdan-kadamga utganda xato ortib borsa, u vaktda **algoritm noturgun** deyiladi. Masalan, hisoblash quyidagi $y_{n+1} = -10y_n + 2y_{n-1} \qquad (n = 1, 2, ...)$
53.	**Ishchi algoritm**	Hisoblash usullari fanida ma`lum bir masalani echish uchun dastlab uning algoritmi ishlab chiqiladi. Bu algoritmlarga ishchi algoritm deyiladi
54.	**Hisoblash xatoliklari**	Aniq, echimning o`rniga taqribiy echimni qabul qilish (majburiy ravishda) yana xatolikni keltirib chikaradi. Masalani echish jarayonida boshlang'ich shartlarni va hisoblash natijalarini yaxlitlashda ham xatolikka yo`l qo`yiladi, bunga hisoblash xatoliklari deyiladi
55.	**Xato va yo`qotilmas xato**	Aniq, echim bilan taqribiy echim orasidagi farq xato deyiladi. Dastlabki ma`lumotlarning noaniqligi natijasida hosil bo`lgan xato yo`qotilmas xato deyiladi
56.	**Metod xatosi**	Biror masala aniq matematik formada yozilgan bo`lsa va uni shu ko`rinishda echish mumkin bo`lmasa, bunday xolda bu masala unga yaqinrok va echish mumkin bo`lgan masalaga almashtirilishi kerak. Buning natijasida kelib chiqadigan xato metod xatosi deyiladi
57.	**Hisoblash xatosi**	Hisoblash jarayonida oraliq natijalarda ko`p xonali sonlar hosil bo`ladi, bularni yaxlitlab olishga to`g'ri keladi. Ya`ni masalalarni echishda hisoblashni aniq olib bormaganligimiz natijasida ham xatoga yo`l

		kuyamiz, bu xato hisoblash xatosi deyiladi
58.	**Taqribiy son**	Faraz kilaylik A aniq son, a - uning taqribiy qiymati bo`lsin. Agar a<A bo`lsa, a kami bilan olingan taqribiy son deyiladi. Agar a>A bo`lsa, a ortigi bilan olingan taqribiy son deyiladi
59.	**Tartibli kvadrat matritsa**	Ko`pincha ustunlari va satrlari soni bir xil bo`lgan matritsalar uchraydi. P ta ustun va p ta satrdan iborat matritsani p - tartibli kvadrat matritsa deyiladi
60.	**Birlik matritsa**	Asosiy diagonalidagi elementlar birga, barcha kolganlari esa nol-ga teng bo`lgan kvadrat matritsa muxim axamiyatga ega. Bunday matritsani birlik matritsa deyiladi va E bilan belgilanadi: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_5$

V. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Isroilov M. «Hisoblash metodlari», I,II qismlar T., "O`zbekiston", 2003, 2008
2. Алоев Р.Д., Худойберганов М.Ў. Нисоблаш усуллари курсидан лаборатория машg‘улотлари тўплами. ЎзМУ.Ўқув қўлланма. 2008 й.110б.
3. Куликов С.П., Самохин А.Б., Чердынsев В.В. Численные методы, ч. 1: Учебное пособие / Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет) – М., 2005. – с.
4. G‘.П.Исматуллаев, М.С.Косбергенова. Нисоблаш усуллари. “Тафаккур-бўстони”. Тошкент 2014.
5. А.В. Зенков.— Численные методы : учеб. пособие / Екатеринбург : Издво Урал. ун-та, 2016. — 124с.
6. Е.А. Кочегурова; Вычислительная Математика Лабораторный Практикум. Томский политехнический университет. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 135 с.
7. Vorob`eva G.N. i dr. «Praktikum po vichislitel’noy matematike» M. VSh. 1990.
8. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995.
9. И.Б. Петров, А. И. Лобанов. Лекsии по вычислительной математике: Учебное пособие — М: Интернет-Университет Информаsионных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 523.с.
10. Siddiqov A. «Sonli usullar va programmalashtirish», O`quv qo`llanma. T.2001.
11. Internet ma`lumotlarini olish mumkin bo`lgan saytlar:

www.exponenta.ru
www.lochelp.ru
www.math.msu.su

www.colibri.ru

IV. Интернет сайтлар

1. O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi: www.edu.uz.
2. Bosh ilmiy-metodik markaz: www.bimm.uz
3. www. Ziyonet. Uz
4. Открытое образование. https://openedu.ru/
5. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma
6. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/
7. https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search
8. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html
9. https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-

master/2455-advanced-mathematics.
10. http://tajvedelem.hu/Tankonyv/AI_en/AI_book.html (Matematika va arxitektura)
11. http://blog.tripbase.com/9-most-mathematically-interesting-buildings-in-the-world/ (Matematika va arxitektura)
12. https://www.slideshare.net/Iftekharbhuiyan1/real-life-application-of-vector (vektorlarning tatbiqlariga oid)
13. https://www.slideshare.net/ssuser2eafea/application-of-coordinate-system-and-vectors-in-the-real-life (vektorlarning tatbiqlariga oid)
14. https://code-industry.ru/masterpdfeditor-help/transformation-matrix/ (matritsalarning tatbiqi haqida)
15. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Matrix (matritsalar haqida)
16. https://www.geeksforgeeks.org/python-encoding-decoding-using-matrix/ (matritsalarni python dasturlash tili ërdamida ishlashga oid)

https://youtu.be/TJQD4dnCbAA; https://youtu.be/vrxzWNTtF68 (Matritsalarning kriptografiyadagi tatbiqlariga oid videolar).