O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISH BOSH ILMIY - METODIK MARKAZI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

“HISOBLASH MEXANIKASI”

MODULI BO‘YICHA

O‘QUV–USLUBIY MAJMUA

Toshkent – 2022

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi: O‘zbekiston Milliy universiteti “Mexanika va matematik modellashtirish kafedrasi professori f.m.f.d. A.Xoljigitov

Taqrizchilar: O‘zbekiston Milliy universiteti “Mexanika va matematik modellashtirish kafedrasi mudiri f.-m.f.d. .А.Ахмедов

O‘quv -uslubiy majmua Bosh ilmiy-metodik markaz Ilmiy metodik Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan

(2020 yil “30” dekabrdagi 5/4-sonli bayonnoma)

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

Dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019 yil 8 oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmonlari hamda O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovasion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni kredit modul tizimi va o‘quv jarayonini tashkil etish, ilmiy va innovasion faoliyatni rivojlantirish, pedagogning kasbiy professionalligini oshirish, ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish, maxsus maqsadlarga yo‘naltirilgan ingliz tili, mutaxassislik fanlar negizida ilmiy va amaliy tadqiqotlar, o‘quv jarayonini tashkil etishning zamonaviy uslublari bo‘yicha so‘nggi yutuqlar, pedagogning kreativ kompetentligini rivojlantirish, ta’lim jarayonlarini raqamli texnologiyalar asosida individuallashtirish, masofaviy ta’lim xizmatlarini rivojlantirish, vebinar, onlayn, «blended learning», «flipped classroom» texnologiyalarini amaliyotga keng qo‘llash bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishining o‘ziga xos xususiyatlari hamda dolzarb masalalaridan kelib chiqqan holda dasturda tinglovchilarning mutaxassislik fanlar doirasidagi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar takomillashtirilishi mumkin.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulining maqsadi: Hisoblash mexanikasi moduli mexanika va matematik modullashtirish qonunlari va postulatlari asosida o‘rganiladigan jarayonlarni o‘rganish va tatbiq etish jarayonida yuzaga keladigan matematik modellarni hisoblash usullari yordamida sonli yechish, olingan natijalarni xisoblash eksperimenti asosida taxlil etish va zamonaviy informasion texnologiyalardan foydalangan xolda grafik usulda tasvirlash va vizuallashtirish bo‘yicha pedagog kadrlarda bilim, ko‘nikma va kompetensiyalarini oshirish.

Modulning vazifalari:

- mexanikaning fundamental qonuniyatlari, postulatlari asosida turli jaroyonlarni matematik modellashtirish va yuzaga keladigan oddiy va xususiy hosilali chiziqli va chiziqsiz differensial tenglamalar va integral tenglamalarni tuzish va klassifikasiyalash ko‘nikmasiga ega bo‘lish,
- chekli elementlar usuli, chekli-ayirmali variasion usul, chegaraviy elementlar usuli, chekli xajmlar usuli va chekli-ayirmali usullaridan foydalanish, ularni yechish algoritmini aniqlash, hisoblash tajribalarini tashkil qilish, olingan natijalarni taxlil qilish bo‘yicha nazariy va amaliy bilimlar, ko‘nikma va malakalarni shakllantirishdan iborat.

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

Modulni o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida**:**

Tinglovchi:

- Mexanika fani rivojining zamonaviy bosqichlarini;
- Dinamik tizimlarga tegishli asosiy qonunlar, prinsiplar va tadqik qilish usullarini:
- Dinamik tizimlarni sifat tadqiqi natijalarining zamonaviy talqinini;
- Ilmiy izlanishlar olib borishda programmalash paketlaridan foydalanishni;
- Tabiiy va aniq fanlarda foydalaniladigan zamonaviy amaliy dasturlar majmualarini *bilishi* kerak.
- tabiiy va aniq fanlarni o‘qitish bo‘yicha yangi texnologiyalarni amaliyotda qo‘llash;
- axborot texnologiyalarining zamonaviy vositalaridan foydalanib ilmiy-tadqiqotlarni o‘tkazish;
- eksperimental tadqiqotlar natijalariga ishlov berish, ularni tahlil qilish va aks ettirish, xulosalar chiqarish, ilmiy maqolalar tayyorlash, tavsiyalarini ishlab chiqish;
- innovasion faoliyatni tashkil etish;
- ilg‘or tajribalardan foydalanish;
- o‘z ustida ishlab, fanning yangi tadqiqotlarini o‘qitish tizimini qo‘llash;
- Boshqariladigan tizimlar mexanikasi, klassik mexanikaga zamonaviy qarash, mexanikaning zamonaviy yo‘nalishlari bo‘yicha ma’ruza, amaliy mashg‘ulot va nazorat ishlarini tashkil etish;
- pedagogik jarayonda muloqot uslublarini to‘g‘ri qo‘llay olish *ko‘nikmalariga* ega bo‘lishi lozim.
- axborot kommunikasion texnologiyalari va ularni qo‘llashning ilmiy-nazariy va amaliy ahamiyatini bilish;
- Boshqariladigan tizimlar mexanikasi, klassik mexanikaga zamonaviy qarash, kompyuter injiniringi fanlarining zamonaviy yo‘nalishlarini ishlab chiqish;
- tabiiy va aniq fanlarni turli sohalarga tatbiq qilish;
- tabiiy va aniq fanlarni dasturlar paketi yordamida yechish va qo‘llash *malakalariga* ega bo‘lishi lozim.

- tabiiy va aniq fanlarning dasturlar paketini o‘quv jarayoniga tatbiq etish;
- tabiiy va aniq fanlarni dasturlar paketi yordamida yechishning zamonaviy masalalarini tahlil qila olish;
- Mexanikaga oid masalalarni yechishda zamonaviy texnologiyalar va usullardan foydalana olish;
- tabiiy va aniq fanlar sohasida kasbiy faoliyat yuritish uchun zarur bo‘lgan bilim, ko‘nikma, malakaga ega bo‘lish;
- ilg‘or axborot-texnologiyalarida ishlash;
- videodarslarni tayyorlash;
- egallangan tajribani tanqidiy ko‘rib chiqish qobiliyati, zarur bo‘lganda o‘z kasbiy faoliyatining turi va xarakterini o‘zgartira olish;
- tabiiy va aniq fanlarda tizimli tahlil usulidan foydalanish yo‘llarini ishlab chiqish;
- Boshqariladigan tizimlar mexanikasi, klassik mexanikaga zamonaviy qarash, kompyuter injiniringiga oid zamonaviy manbalardan foydalana olish *kompetensiyalariga* ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikasiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

-ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentasion va elektron-didaktik texnologiyalardan;

-o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Hisoblash mexanikasi” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Mexanikada matematik modellashtirish”, “Boshqariladigan tizimlar mexanikasi” o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning ta’lim jarayonida matematik modellashtirish, hisoblash usullari va boshqariladigan tizimlar mexanikasidan foydalanish bo‘yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida mexanikada matematik modellashtirish, boshqariladigan tizimlar, mexatronika va robototexnika tizimlarida hisoblash usullaridan foydalanish va amalda qo‘llashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya uquv yuklamasi			
		Jami	jumladan		
			Nazariy	Amaiy mashg‘ulot	Ko‘chma mashg‘uloti
1.	Klassik mexanikaning zamonaviy holati. Nazariy mexanika va tutash muhitlar mexanikasining asosiy matematik modellarining tahlili.	6	2	4	
2.	Chekli ayirmali usul. Chekli va chegaraviy elementlar usullari.	6	2	4	
3.	Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari, hamda amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish.	6	2	4	
	Jami:	**18**	**6**	**12**	

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. Klassik mexanikaning zamonaviy holati. Nazariy mexanika va tutash muhitlar mexanikasining asosiy matematik modellarining tahlili (2 soat).

1. Kirish.
2. Klassik mexanikaning zamonaviy holati. Nazariy mexanika va tutash muhitlar mexanikasining asosiy matematik modellarining tahlili.

2-mavzu. Chekli ayirmali usul. Chekli va chegaraviy elementlar usullari (2 soat).

1. Mexanikada uchraydigan chegaraviy masalalarni sonli modellashtirish usullari. Chekli ayirmali usul.
2. Chekli elementlar usuli.
3. Chegaraviy elementlar usuli.

3-mavzu. Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari, hamda amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish. (2 soat).

1. Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari.
2. Amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg‘ulot. Klassik mexanikaning zamonaviy holati. Nazariy mexanika va tutash muhitlar mexanikasining asosiy matematik modellarining tahlili. *Boshlang‘ich shartli masalarni sonli yechish usullari. Chekli ayirmali munosabatlar. 1,2 va aralash hosilalarni chekli ayirmalar bilan almashtirish va ularning approksimasiya xatoliklari. 2-tartibli ODT uchun qo‘yilgan chegaraviy masala uchun chekli ayirmali tenglamalar.* **(4 soat).**

2-amaliy mashg‘ulot. Chekli ayirmali usul. Chekli va chegaraviy elementlar usullari. *Lame tenglamasi uchun chekli ayirmali tenglamalar. Sterjen xaqidagi masalani sonli yechish. Dinamik chegaraviy masalalar uchun oshkor va oshkor bo‘lmagan sxemalar. To‘lqin tarqalishi tenglamasi uchun oshkor va oshkormas sxemalarni sonli yechish***(4 soat).**

3-amaliy mashg‘ulot. Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari, hamda amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish. (4 soat).

Amaliy mashg‘ulotlarni tashkil etish bo‘yicha ko‘rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg‘ulotlarda tinglovchilar o‘quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o‘quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog‘liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg‘ulotlar zamonaviy ta’lim uslublari va innovasion texnologiyalarga asoslangan holda o‘tkaziladi. Bundan tashqari, mustaqil holda o‘quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan loyiha yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI.

“Tushunchalar tahlili” metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod talabalar yoki qatnashchilarni mavzu buyicha tayanch tushunchalarni o‘zlashtirish darajasini aniqlash, o‘z bilimlarini mustaqil ravishda tekshirish, baholash, shuningdek, yangi mavzu buyicha dastlabki bilimlar darajasini tashhis qilish maqsadida qo‘llaniladi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar mashg‘ulot qoidalari bilan tanishtiriladi;
- o‘quvchilarga mavzuga yoki bobga tegishli bo‘lgan so‘zlar, tushunchalar nomi tushirilgan tarqatmalar beriladi (individual yoki guruhli tartibda);
- o‘quvchilar mazkur tushunchalar qanday ma’no anglatishi, qachon, qanday holatlarda qo‘llanilishi haqida yozma ma’lumot beradilar;
- belgilangan vaqt yakuniga yetgach o‘qituvchi berilgan tushunchalarning tugri va tuliq izohini uqib eshittiradi yoki slayd orqali namoyish etadi;
- har bir ishtirokchi berilgan tugri javoblar bilan uzining shaxsiy munosabatini taqqoslaydi, farqlarini aniqlaydi va o‘z bilim darajasini tekshirib, baholaydi.

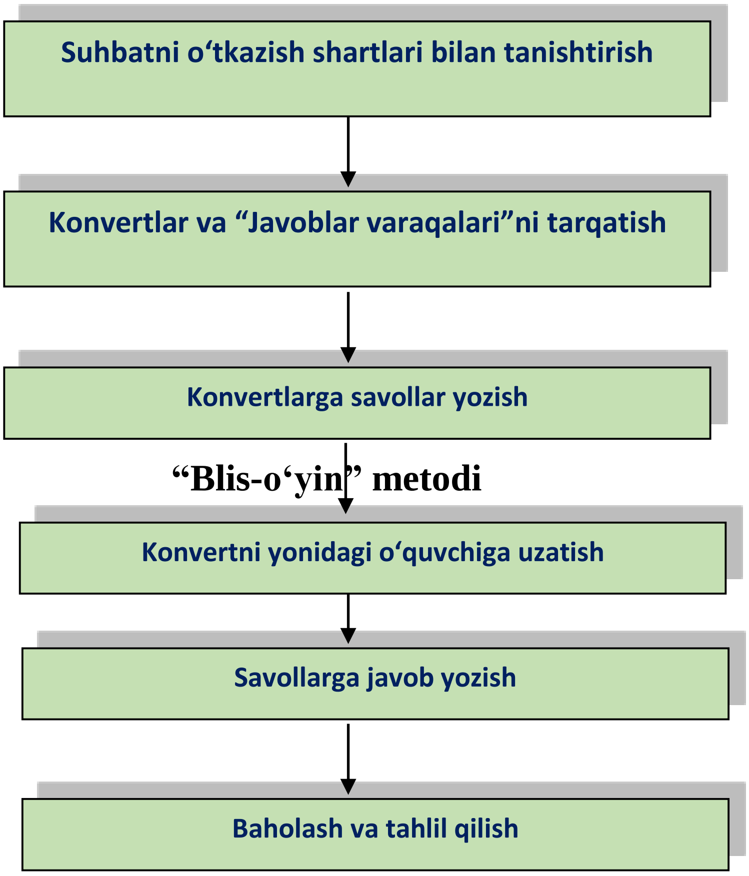
“Davra suhbati” metodi

Aylana stol atrofida berilgan muammo yoki savollar yuzasidan ta’lim oluvchilar tomonidan o‘z fikr-mulohazalarini bildirish orqali olib boriladigan o‘qitish metodidir.

“Davra suhbati” metodi qo‘llanilganda stol-stullarni doira shaklida joylashtirish kerak. Bu har bir ta’lim oluvchining bir-biri bilan “ko‘z aloqasi”ni o‘rnatib turishiga yordam beradi. Davra suhbatining og‘zaki va yozma shakllari mavjuddir. Og‘zaki davra suhbatida ta’lim beruvchi mavzuni boshlab beradi va ta’lim oluvchilardan ushbu savol bo‘yicha o‘z fikr-mulohazalarini bildirishlarini so‘raydi va aylana bo‘ylab har bir ta’lim oluvchi o‘z fikr-mulohazalarini og‘zaki bayon etadilar. So‘zlayotgan ta’lim oluvchini barcha diqqat bilan tinglaydi, agar muhokama qilish lozim bo‘lsa, barcha fikr-mulohazalar tinglanib bo‘lingandan so‘ng muhokama qilinadi. Bu esa ta’lim oluvchilarning mustaqil fikrlashiga va nutq madaniyatining rivojlanishiga yordam beradi.

Davra stolining tuzilmasi

Yozma davra suhbatida stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta’lim oluvchiga konvert qog‘ozi beriladi. Har bir ta’lim oluvchi konvert ustiga ma’lum bir mavzu bo‘yicha o‘z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi. Shundan so‘ng konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchi o‘z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi va yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo‘ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig‘ib olinib, tahlil qilinadi. Quyida “Davra suhbati” metodining tuzilmasi keltirilgan



“Blis-o‘yin” metodi

Metodning maqsadi: o‘quvchilarda tezlik, axborotlar tizmini tahlil qilish, rejalashtirish, prognozlash ko‘nikmalarini shakllantirishdan iborat. Mazkur metodni baholash va mustahkamlash maqsadida qo‘llash samarali natijalarni beradi.

Metodni amalga oshirish bosqichlari:

1. Dastlab ishtirokchilarga belgilangan mavzu yuzasidan tayyorlangan topshiriq, ya’ni tarqatma materiallarni alohida-alohida beriladi va ulardan materialni sinchiklab o‘rganish talab etiladi. Shundan so‘ng, ishtirokchilarga to‘g‘ri javoblar tarqatmadagi «yakka baho» kolonkasiga belgilash kerakligi tushuntiriladi. Bu bosqichda vazifa yakka tartibda bajariladi.

2. Navbatdagi bosqichda trener-o‘qituvchi ishtirokchilarga uch kishidan iborat kichik guruhlarga birlashtiradi va guruh a’zolarini o‘z fikrlari bilan guruhdoshlarini tanishtirib, bahslashib, bir-biriga ta’sir o‘tkazib, o‘z fikrlariga ishontirish, kelishgan holda bir to‘xtamga kelib, javoblarini “guruh bahosi”

bo‘limiga raqamlar bilan belgilab chiqishni topshiradi. Bu vazifa uchun 15 daqiqa vaqt beriladi.

3. Barcha kichik guruhlar o‘z ishlarini tugatgach, to‘g‘ri harakatlar ketma-ketligi trener-o‘qituvchi tomonidan o‘qib eshittiriladi, va o‘quvchilardan bu javoblarni “to‘g‘ri javob” bo‘limiga yozish so‘raladi.

4. “To‘g‘ri javob” bo‘limida berilgan raqamlardan “yakka baho” bo‘limida berilgan raqamlar taqqoslanib, farq bulsa “0”, mos kelsa “1” ball quyish so‘raladi. Shundan so‘ng “yakka xato” bo‘limidagi farqlar yuqoridan pastga qarab qo‘shib chiqilib, umumiy yig‘indi hisoblanadi.

5. Xuddi shu tartibda “to‘g‘ri javob” va “guruh bahosi” o‘rtasidagi farq chiqariladi va ballar “guruh xatosi” bo‘limiga yozib, yuqoridan pastga qarab qo‘shiladi va umumiy yig‘indi keltirib chiqariladi.

6. Trener-o‘qituvchi yakka va guruh xatolarini to‘plangan umumiy yig‘indi bo‘yicha alohida-alohida sharhlab beradi.

7. Ishtirokchilarga olgan baholariga qarab, ularning mavzu bo‘yicha o‘zlashtirish darajalari aniqlanadi.

“SWOT-tahlil” metodi.

Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength)	• кучли томонлари
W – (weakness)	• заиф, кучсиз томонлари
O – (opportunity)	• имкониятлари
T – (threat)	• тўсиқлар

Lame tenglamasini chekli-ayirmali usulda sonli yechishni SWOT tahlilini ushbu jadvalga tushiramiz.

S	Lame tenglamasini chekli-ayirmali usulda sonli yechishning boshqa usullardan afzalliklari	2 -tartibli va aralash hosilarni mos chekli ayirmali munosabatlar bilan almashtirishg‘ yani Lame tenglamasini diskret xolga keltirish
W	Lame tenglamasini chekli-ayirmali usulni qo‘llashda yuzaga keladigan noqulayliklar va kamchiliklar	Lame tenglamasi prizmatik qo‘rinishga ega bulgan sohalar uchug qo‘llash maqsadga muvofiq.
O	Chekli ayirmali usulning imkoniyatlari va qo‘llaninilish sohasi (ichki)	Chekli ayirmali usulda kuchlarda berilgan yani tabiiy chegaraviy shartlarni qanoatlantirish aloxida e’tiborni talab qiladi.
T	To‘siqlar (tashqi)	Dinamik masalalarni yechishda bu usulni qo‘llab bo‘lmaydi

“Assisment” metodi.

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

“Davra suhbati” metodining afzalliklari:

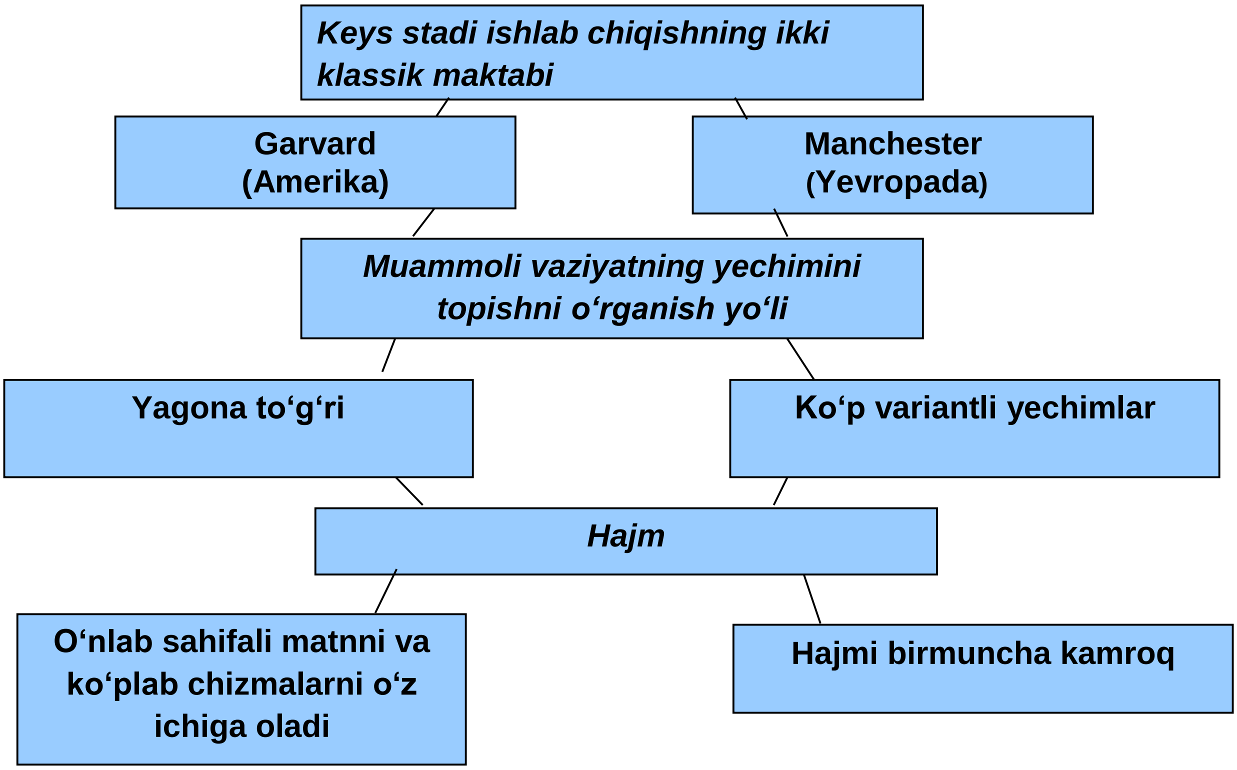
- o‘tilgan materialining yaxshi esda qolishiga yordam beradi;
- barcha ta’lim oluvchilar ishtirok etadilar;
- har bir ta’lim oluvchi o‘zining baholanishi mas’uliyatini his etadi;
- o‘z fikrini erkin ifoda etish uchun imkoniyat yaratiladi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assisment”lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assismentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Har bir katakdagi to‘g‘ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.

TEST **Chekli ayirmali sxema nima?** a) Asosiy differensial tenglama yoki tenglamalar sistemasini va qo‘shimcha (boshlangg‘ich va chegaraviy) shartlarni approksimasiya qiluvchi ayirmali tenglamalar sistemasi; b) Barcha yechimlar to‘plamidan yagona yechimni ajratib olish usuli; c) O‘rganilayotgan masalaning differensal tenglamasining taqribiy ifodasi; d) O‘rganilayotgan masalani taqribiy yechish usuli	**Qiyosiy tahlil** Differensial tenglamalarda va chegaraviy shartlarda uchraydigan hosilalarni chekli ayirmali munosabatlar bilan alishtirish
Амалий кўникма $(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+X=0, \quad X=\sin\frac{2\pi x}{l}$ $u\big\|_{x=0}=0, \quad u\big\|_{x=l}=0$ $\lambda=1, \ \mu=0.5$ стержен хақида масала учун чекли айирмали тенгламалар тузилсин	**Тушунча таҳлили** Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси



Keys-stadining maktablari

Keysda muammoni berish usullari

1-usul – muammoni keysolog ifodalaydi.

2-usul – vaziyatdagi muammo yaqqol ifodalanadi, lekin bunda vaziyatning zarur elementlaridan biri (masalan, sheriklar haqidagi) axborot bo'lmaydi.

3-usul – matnda vaziyat subyektlari o'rtasidagi ziddiyat mavhum ifodalanadi**.**

Demak, keys-stadi usuli talabalarda muammo yechishda fanlararo bilimlar olishni o'rgatadi. Bu usul talabalarda kognitiv strukturalarni rivojlantirishiga olib keladi. Shuningdek, talaba aqliga sezilarli hissa qo'shadi. Masalan, 1-rasmda koordinasion birikma keltirilgan. Ligand o'tish metalli bilan birikma hosil qilish mumkin. Bu jarayonda "ligand nazariyasi" tushunchasi bor. Bu nazariya koordinasion birikma hosil qiladigan reaksiya mexanizmini tushuntirish mumkin. "Koordinasion son" tushunchasi birikmani strukturasi bilan bog'laydi. Agar markaziy atom har xil koordinasion songa ega bo'lsa, birikmaning tuzilishi boshqa bo'ladi. birikma va uning xossalari o'rtasida "yuqori va quyi spin" rangli oraliq mahsulotni hosil qiladi va magnetizm xossasini belglaydi[1].

[1]Baodi Gou. Contemporary teaching strategies in general chemistry. TheChinaPapers, July 2003.P.40

Concept mapping of Coordination Compound

Zamonaviy kimyo fanining yo‘nalishlaridan biri bo‘lgan nanokimyo

III. NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-MAVZU: Klassik mexanikaning zamonaviy xolati. Nazariy mexanika va tutash muxitlar mexanikasining asosiy matematik modellarining taxlili.

REJA:

1.1. Kirish
1.2. Klassik mexanikaning zamonaviy holati. Nazariy mexanika va tutash muhitlar mexanikasining asosiy matematik modellarining tahlili.

Tayanch so‘zlar: *Nazariy mexanikasi, tutash muxitlar mexanikasi, qattiq jism, suyuqlik va gazlar, matematik modellar, Guk qonun, Nave-Stoks munosabatlari, Eyler va Nave-Stoks tenglamalari, izotrop, transversal izotrop va ortotrop jismlar, Sonli usullar, Chekli ayirmali usul, chekli elementlar usuli, Chegaraviy elementlar usuli.*

1.1. Kirish

Nazariy va tutash muxitlar mexanikasi masalalari turli xil matematik model tenglamalar orqali ifodalanadi. Odatda, bu tenglamalar oddiy yoki xususiy xosilali differensial tenglamalar ko‘rinishida yoziladi. Nazariy maxanikada, moddiy nuqta yoki moddiy nuqtalar sistemasi karalib, ular odatda ikkinchi tartibli chiziqli va chiziqsiz oddiy differensial tenglamalarga ko‘yilgan boshlang‘ich shartli masalalarga(Koshi masalasi) keltiriladi. Tutash muhitlar mexanikasi esa deformasiyalanuvchi qattiq jismlar, suyuqlik va gazlarda kechadigan jaroyonlarni o‘rganishga va ularni matematik modellashtirishga bag‘ishlangan. Odatda, bu masalalar, vaqtga bog‘liqligiga nisbatan, giperbolik, parabolik va elliptik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadi.

Bu kursning asosiy maqsadi, nazariy mexanika va tutish muxit mexanikasida uchraydigan matematik modellarning yani chegaraviy masalalarni (boshlang‘ich va chegaraviy shartli) masalalarni zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan foydalanilgan xolda sonli yechish usullarini bayon etishdan iborat.

Xozirgi kunda, nazariy mexanika va tutash muxit mexanikasi masalalarini sonli yechishning asosiy usullari sifatida

1. Chekli ayirmali usul
2. Chekli elementlar usuli

3. Chegaraviy elementlar usullarini

sanab o‘tish mumkin. Boshlang‘ich shartli masalalarni (Koshi masalasi) yechishda, odatda Eyler, Eyler-Koshi va Runge-Kutta usullari keng foydalaniladi.

Bu sonli usullar, tutash muxit mexanikasining asosiy qismini tashkil etuvchi deformasiyalanuvchi qattiq jism mexanikasi masalalari misodida bayon etiladi. Matematik modellarni qurish, yani chegaraviy masalarni qo‘yilishi va ularni sonli yechish usullari bayoniga. Xamda bu chegaraviy masalalarni 1-2 o‘lchovli xollarda sonli yechishga va S++ tilida sodda programmalarni tuzishga aloxida e’tibor berilgan.

Xozirgi kunda, mexanika masalalarini yechishda “Chekli elementlar usuli” juda keng foydalaniladi. Chekli elementlar usuliga asoslangan Ansys, Cosmosm, Abaqus, FEM, Solidworks kabi qator amaliy dasturiy paketlar majmualari mavjud. Bu dasturlar amaliyotda uchraydigan muxim masalalarni yechish injener muxandislar uchun juda muximdir. Shuning uchun, texnik oliy o‘quv yurtlarida muxandis kadrlarni tayorlashda ularni zamonaviy informasion texnologiyalarga asoslangan dasturiy vositalar foydalana olish ko‘nikmalari bilan qurollantirish juda muximdir.

1.2. Klassik mexanikaning zamonaviy holati. Nazariy mexanika va tutash muhitlar mexanikasining asosiy matematik modellarining tahlili

Tutash muxit mexanikasi turli tashqi ta’sirlar ostida qattiq jism, suyuqlik va gazlarda kechadigan jaroyonlarni matematik modellashtirishga bag‘ishlangan.

Deformasiyanuvchi kattiq jismlarda kechadigan jaroyonlarni matematik modellashtirishda, kuchlanish va deformasiya tenzorlari orasidagi chiziqli va nochiziqli(plastik) bog‘lanishlarni topish tutash muxit mexanikasining muxim muammolaridan biridir. Ma’lumki, kuchlanish va deformasiya orasidagi bog‘lanish chiziqli bo‘lgan xolda Guk qonuniga ega bo‘lamiz. Chiziqsiz bog‘lanishlar sifatida, Ilyushinning deformasion nazariyasini, plastiklikning oqish nazariyalarini keltirish mumkin.

Xozirgi kunda, ani kompozision materiallar sohasining rivojlanishi bilan, anizotrop jismlar uchun deformasion va oqish nazariyalarining yangi turlari yaratilgan. Bu yerda R.Hill va B.YE. Pobedryalar tomonidan yaratilgan plastiklik nazariyalarini eslab o‘tish mumkin. Shu bilan birgalikda, oxirgi paytlarda, temperatura va deformasiyalanish tezliklarini xisobga olgan xolda qator nazariyalar yaratildi. Suyuqlik va gazlar uchun xam, Guk qonuniga o‘xshash, Nave-Stoks munosabatlari va ular asosida xosila qilinadigan Eyler va Nave-Stoks tenglamalari bo‘yicha va sonli yechish usullari bo‘yicha xam jadal izlanishlar olib borilmoqda.

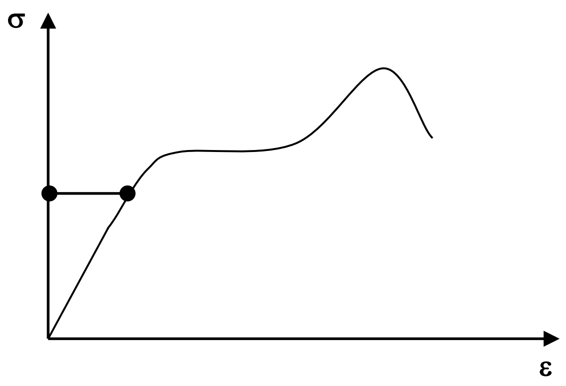
Kursimizda xozirgi kunda, ishlab chiqarishda, ayniqsa mashinasozlik va qurilish keng foydalaniladigan zamonaviy kompozision materiallar sohasiga asosiy e’tiborni qaratamiz.

Kompozision materiallar oxirgi yillarda aviasozik, mashinasozlik sohalarida keng foydalanimoqda. Ma’lumotlarga ko‘ra, zamonaviy samoletlarda 70-75% miqdorida kompozison materiallar foydalaniladi.

Shu bilan birgalikda medisinada turli xil biomateriallar yaratish masalalarigi katta e’tibor berilmoqda. Ayniqcha, nanotexnologiyalarning rivojlanishi bilan, nanomaterallar yaratish masalasida dunyo olimlari tomonidan ilmiy izlanishlar olib borilmoqda.

Kompozision materiallarning xossalari, odatdagi izotrop jismlardan farqli ravishda yo‘nalishga bog‘liq bo‘ladi va anizotrop jismlar deb ataladi. Anizotrop jismlarni ortotrop va transversal izotrop kabi turlarga ajratish mumkin.

Tajriba-sinovlardan ma’lumki, kuchlaniish va deformasiya orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi chiziq odatda egri chiziq ko‘rinida bo‘ladi va deformasiyalanish diagrammasi deb ataladi(1-rasm). Deformasiyalanish diagrammasi jismga ta’sir etuvchi kuchning elastiklik chegarasi deb ataluvchi darajasigacha to‘g‘ri chizikli ko‘rinishida bo‘ladi(1-rasm).



1-rasm

Umumiy xolda kuchlanish σ_{ij} va deformasiya ε_{ij} tenzorlari orasidagi bog‘lanishni quyidagi chiziqsiz funksiya ko‘rinishida ifodalash mumkin, ya’ni

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \qquad (1)$$

Bu ifodani deformasiyalar diagrammasining chiziqli qismi uchun quyidagi ko‘rinishda chiziqli tenzor funksiya(umumlashgan Guk qonuni) кўринида ёзиб олиш мумкин

$$\sigma_{ij} = C_{ijke}\varepsilon_{ke} \qquad (2)$$

bu yerda C_{ij} - 4-rangli simmetrik tenzor bo‘lib, umumiy xolda $3^4 = 81$ komponentaga ega va anizotrop jismni ifodalaydi. Odatda, bu komponentalar, jismlarning simmetriklik xossalariga bog‘liq ravishda tajribalardan aniqlanadi.

Agar quyidagi simmetriklik shartlari o‘rinli bo‘lsa

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \qquad (3)$$

Komponentlar soni 36 tagacha kamayadi. Yana quyidagi simmetriklik shartlari hisobga olinsa

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad (4)$$

komponentlar soni 21 ta bo‘ladi. Endi, jismlarning elastiklik xossalari 3 ta o‘zaro ortogonal tekisliklarga nisbatan simmetrik bo‘lsa, komponentalar soni 9 ta bo‘ladi va bunday jism ortotrop material deb ataladi. Ortotrop jismlar uchun C_{ijke} tenzor quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{2323} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Tenzor komponentlariga nisbatan, yana quyidagi simmetriklik shartlari bajarilsa,

$$C_{1133} = C_{2233}, \; C_{1313} = C_{2323}, \; C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{2211}) \quad (6)$$

Bu shartlarning bajarilishi, qaralayotgan jismning xossalari OX_3 o‘qiga nisbatan aylanishlarga va shu o‘q yotuvchi tekislikka nisbatan simmetrik ekanligini ifodalaydi va jismning tranversal izotrop ekanligini anglatadi.

Agar kuyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsa

$$C_{1133} = C_{2233} = C_{1122} = \lambda, \; C_{1313} = C_{2323} = C_{1212} = \mu \quad (7)$$

C_{ijke} quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \quad (8)$$

va materialning xossaoari xamma yo‘nalishda bir xilligini yani jism izotrop ekanligini anglatadi.

(8) - ifodani C_{ijke} tenzorni quydagicha yozib olish mumkin

$$C_{ijke} = \lambda \delta_{ij} \delta_{ke} + \mu(\delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk}) \quad (9\ )$$

(9) ifodani (2) - tenglikka qo‘yib

$$\sigma_{ij} = C_{ijke} \varepsilon_{ke} = \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{ke} + \mu \left(\delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk} \right) \right] \varepsilon_{ke} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (10)$$

yoki

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\theta + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad \theta = \varepsilon_{kk} \tag{11}$$

bu yerda μ , λ- izotrop elastik jism uchun o'zgarmaslar. (11)- ifodaning yoyilmasi kuyidagi ko'rinishni oladi

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \\
\sigma_{22} &= \varepsilon_{11}\lambda + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33} \\
\sigma_{33} &= \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33} \\
\sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} \\
\sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} \\
\sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}
\end{aligned} \tag{12}$$

μ , λ texnik o'zgarmaslar E, ν bilan quyidagicha bog'langan

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Statik masalaning qo'yilishi. Shunday qilib elastiklik nazariyasining chegaraviy masalasi:

muvozanat tenglamasi

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \tag{I}$$

Guk qonuni

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{II}$$

Koshi munosabati

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{III}$$

va mos ko'chishlarga

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0 , \tag{IV}$$

va kuchlarga nisbatan qo'yilgan chegaraviy shartlardan tashkil topadi

$$\sigma_{ij} n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^0 \tag{V}$$

(I-V) masalani 2 o'lchovli xolda qaraymiz: U xolda, muvozanat tenglamasi

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = 0 \\
&\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Guk qonuni

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} \\
\sigma_{22} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11} \\
\sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{14}$$

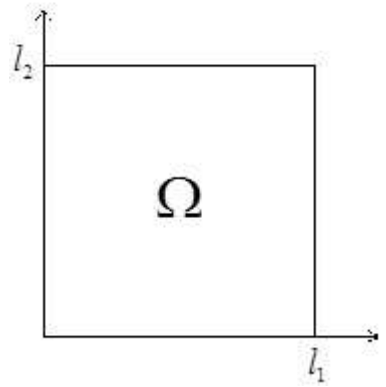
Koshi munosabati

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad (15)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$$

va to‘rtburchak soha chegaralari $\Gamma_1 = (x_1 = 0, l_1 : 0 \le x_2 \le l_2)$ va $\Gamma_2 = (x_2 = 0, l_2 : 0 \le x_1 \le l_1)$ larga



Rasm. 1. To‘g‘ri to‘rtburchakli soha

qo‘yilgan kuyidagi chegaraviy shartlardan tashkil topadi

$$u_1\big|_{\Gamma_1} = u_1^o\,, \quad u_2\big|_{\Gamma_1} = u_2^o\,,$$
$$(\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2)\big|_{\Gamma_2} = S_1\,, \; (\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2)\big|_{\Gamma_2} = S_2\,. \qquad (16)$$

(I-V) masalani ko‘chishlarga nisbatan yozib kuydagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + X_1 = 0$$
$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + X_2 = 0. \qquad (17)$$

(I-V) masalada II munosabat o‘rniga umumlashgan Guk qonunini qo‘yib, anizotrop jismlar uchun elastiklik nazariyasining statik masalasini xosil qilish mumkin:

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{ij,j}+X_i=0,\\ \sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl},\\ \varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right),\\ u_i\Big|_{\sum_1}=u_i^0, \qquad \sigma_{ij}n_j\Big|_{\sum_2}=S_i\end{array}\right\} \qquad (18)$$

Izotrop jismlar uchun uchun esa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\sigma_{ij,j}+X_i=0 \qquad (19)$$

$$\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\,\varepsilon_{ij} \qquad (20)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \qquad (21)$$

$$u_i\Big|_{\sum_1}=u_i^0, \qquad \sigma_{ij}n_j\Big|_{\sum_2}=S_i \qquad (22)$$

(19-22) chegaraviy masalani ko‘chish vektoriga nisbatan yozib olish mumkin. Buning uchun (21) ifodani (20) ga qo‘yib

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)=\lambda u_{k,k}\delta_{ij}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \qquad (23)$$

Bu ifodadan x_j ,bo‘yicha hosila olamiz, ya’ni

$$\begin{array}{l}\sigma_{ij,j}=\lambda u_{k,kj}\delta_{ij}+\mu\left(u_{i,jj}+u_{j,ij}\right)=\lambda u_{j,ji}+\mu u_{i,jj}+\mu u_{j,ij}\\ =\left(\lambda+\mu\right)u_{i,ji}+\mu u_{i,jj}=\mu\,\Delta u_i+\left(\lambda+\mu\right)\theta_{,i} \quad , \ \theta=u_{j,j}\end{array} \qquad (24)$$

(24) - ifodani (19)- ga qo‘yib, (19-22) chegaraviy masalaning ko‘chishlarga nisbatan yozilgan ko‘rinishini hosil qilamiz. Odatda bu tenglama Lame tenglamasi deb ataladi.

$$\mu\Delta u_i+\left(\lambda+\mu\right)\theta_{,i}+X_i=0 \qquad (25)$$

(23) ifodadan foydalanib (22)-chegaraviy shartlarni xam ko‘chishlarga nisbatan yozib olish mumkin

$$u_i\Big|_{\sum_1}=u_i^0, \quad [\lambda u_{k,k}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})]\,n_j\Big|_{\sum_2}=S_i \qquad (26)$$

Izotrop jismlardagidek, anizotrop jismlar uchun (18) –chegaraviy masalani ko‘chishlarga nisbatan quydagi ko‘rinishda yozish olish mumkin:

$$\sum_{j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l})+X_i=0, \ \text{ёки} \quad (C_{ijkl}u_{k,l})_{,j}+X_i=0 \qquad (27)$$

$$\begin{array}{l}u_i\Big|_{\sum_1}=u_i^0,\\ (C_{ijkl}u_{k,l})n_j\Big|_{\sum_2}=S_i\end{array} \qquad (28)$$

(27-28) tenglamalar ortotrop jismlar uchun elastiklik nazariyasining chegaraviy masalasini tashkil etadi va tenglamani ko‘chishni komponentalairga nisbatan quyidagi ko‘rinishda yozib olish mumkin

$$\begin{cases} C_{1111}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{1212}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C_{1313}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(C_{1122}+C_{1212})\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(C_{1133}+C_{1313})\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+\mathrm{X}_1=0 \\ C_{1212}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+C_{2222}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+C_{2323}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(C_{2211}+C_{1212})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(C_{2233}+C_{2323})\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+X_2=0 \\ C_{1313}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C_{2323}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+C_{3333}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(C_{3311}+C_{1313})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+(C_{3322}+C_{2323})\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+X_3=0 \end{cases} \qquad (29)$$

(29) tenglamani va (28) chegaraviy shartlarni, bir o‘lchovli xolda, l uzunlikdagi sterjenning deformasiyalanishini ifodalaydigan, 2-tartibli xususiy xosilali differensial tenglamaga keltirish mumkin, yani

$$C_{1111}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathrm{X}=0 \qquad (30)$$

$$u\,\Big|_{x=0}=u^0,\quad C_{1111}\frac{\partial u}{\partial u}\Big|_{x=l}=S \qquad (31)$$

(17) tenglamani bir o‘lchovli xolda kuyidagicha yozib olish mumkin.

$$\begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mathrm{X}=0,\quad \mathrm{X}=\sin\frac{2\pi x}{l} \\ &u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0 \qquad (27) \\ &\lambda=1,\ \ \mu=0.5 \end{aligned}$$

Nazorat savollari

1. Mexanikaning chiziqli modellar
2. Anizotrop jismlar. Ototrop va transversal izotrop jismlar.
3. Umumlashgan Guk qonuni.
4. Lame tenglamasi izotrop va Anizotrop jismlar uchun.
5. Deformasiyalanish diagrammasi.
6. Koshi munosabati.
7. Jismlarning muvozanat shartlari.Muvozanat tenglamasi.
8. Sterjen xaqidagi masala qo‘yilishi. Aniq yechimi.
9. Chekli ayirmali tenglamani yechishning iterasiya usuli.

2-MAVZU: Chekli ayirmali usul. Chekli va chegaraviy elementlar usullari.

REJA:

2.1. Mexanikada uchraydigan chegaraviy masalalarni sonli modellashtirish usullari. Chekli ayirmali usul .

2.2. Chekli elementlar usuli.

2.4. Chegaraviy elementlar usuli.

Tayanch so'zlar: *chekli ayirmali munosabatlar, chekli ayirmali tenglama, chekli element, interpolyasiya sharti, variasion masala, o'rtalashgan qoldiqlar usuli, chegaraviy integral tenglama, puasson tenglamasi.*

2.1. Mexanikada uchraydigan chegaraviy masalalarni sonli modullashtirish usullari. Chekli ayirmali usul

Chekli ayirmali usulning asosiy mohiyati, qaralayotgan soxani to'r soha bilan almashtirish va qaralayotgan differensial tenglamalarni xosil bo'lgan to'r sohaning tugun nuqtariga nisbatan yozib chiqishdan iborat. Differensial tenglamalarni tugun nuqtalarga nisbatan yozish uchun, avval 1-2 tartibli hosilalarni tugun nuqtalarga nisbatan, chekli ayirmali munosabatlar ko'rinishida yozib olish kerak.

Faraz qilaylik, *u(x)* [*0,l*] kesmada berilgan bo'lsin. Kesmani N bo'lakka bo'lamiz, yani $h = \frac{l}{N}$ u xolda $x_i = h \cdot i$, $i = \overline{0,N}$ va $u(x_i) = u_i$ ga ega bo'lio' mumkin.

Endi $u(x_i)$ funksiyani Teylor qatoriga yoyamiz

$$u(x_i + h) = u(x_i) + \frac{h}{1!}u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u''''(x_i) + ... \quad (1)$$

$$u(x_i - h) = u(x_i) - \frac{h}{1!}u'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u''''(x_i) + ... \quad (2)$$

1-ifodadan birinchi tartibli hosila uchun, o‘ng chekli ayirmali munosabatni topish mumkin

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + O(h) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h) \qquad (3)$$

2-ifodadan, xuddi yuqoridagidek, birinchi tartibli xosila uchun, chap chekli ayirmali munosabatni topish mumkin

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + O(h) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h) \qquad (4)$$

1-ifodadan 2-ifodani xadma-xad ayirish orqali, birinchi tartibli xosila uchun, markaziy chekli ayirmali munosabatni topish mumkin

$$u'(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i - h)}{2h} + O(h^2) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \qquad (5)$$

1-ifodaga 2-ifodani xadma-xad qo‘shish orqali, 2-tartibli xosila uchun, fuyidagi chekli ayirmali munosabatni topish mumkin

$$\begin{aligned} u''(x_i) &= \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} + O(h^2) = \\ &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \qquad (6)$$

Ikki o‘zgaruvchili *u(x,y)* funksiya to‘rtburchakli sohada berilgan bo‘lsin. To‘g‘ri to‘rtburchakning l_k tamonlarini N_k ga bo‘lib, qadamlarni topish mumkin

$$h_k = \frac{l_k}{N_k}, \quad k = 1,2 \qquad (8)$$

Bu holda tugun nuqtalarni quyidagicha aniqlash mumkin

$$x_i = h_1 \cdot i\,, \quad y_j = h_2 \cdot j\,, \; i = \overline{0, N_1}, \; j = \overline{0, N_2}\,. \qquad (9)$$

U xolda funksiyaning tugun nuktalardagi qiymatlarini quyidagicha yozib olish mumkin

$$u(x_i, y_j) = u_{ij}$$

Ikki o‘zgaruvchili *u(x,y)* funksiyaning tugun nuqtalardagi xosilalari uchun quyidagi chekli-ayirmali nisbatlarni topish mumkin:

$$u_x^{'} = \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1}, \; u_y^{'} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_2} \quad \text{o‘ng va chap hosilalar}$$

$$u'_x = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1} \qquad \text{markaziy hosila}$$

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} \quad \text{2-tartibli hosila} \qquad (10)$$

$$u_{xy} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1 h_2} \quad \text{aralash hosila}$$

Endi, ikki o‘lchovli Lame tenglamasi uchun chekli ayirmali tenglamalarni qurishga o‘tamiz:

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + X_1 = 0 \\ &(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + X_2 = 0. \end{aligned} \qquad (11)$$

(11) tenglamalardagi hosilalarni, (10) formulalardan foydalangan xolda, mos chekli-ayirmali munosabatlar bilan almashtirib, quyidagi chekli-ayirmali tenglamalarni topish mumkin

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + (\lambda + \mu)\frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4h_1 h_2} + \\ &+\mu \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + X_1 = 0 \\ &(\lambda + 2\mu)\frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1 h_2} + \\ &+\mu \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + X_2 = 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

(12) tenglamalarni $u_{i,j}$ va $v_{i,j}$ ko‘chishlarga nisbatan yechamiz, ya’ni

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= (4h_2^2(\lambda + 2\mu)(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 4h_1^2\mu(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + h_1 h_2(\lambda + \mu) * \\ &* (v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}) + X_1) / (8h_2^2(\lambda + 2\mu) + 8h_1^2\mu) \\ v_{i,j} &= (4h_1^2(\lambda + 2\mu)(v_{i,j+1} + v_{i,j-1}) + 4h_2^2\mu(v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + h_1 h_2(\lambda + \mu) * \\ &* (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) + X_2) / (8h_1^2(\lambda + 2\mu) + 8h_2^2\mu). \end{aligned}$$

(13)

(11)- munosabatlar asosida $k = 0,1,2,...$ indeks bo‘yicha quyidagi iterasion jarayonni tashkil qilamiz

$$
\begin{aligned}
u_{i,j}^{(k+1)} &= (4h_2^2(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k)})+4h_1^2\mu(u_{i,j+1}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)})+h_1h_2(\lambda+\mu)* \\
&\quad *(v_{i+1,j+1}^{(k)}-v_{i-1,j+1}^{(k)}-v_{i+1,j-1}^{(k)}+v_{i-1,j-1}^{(k)})+X_1)/(8h_2^2(\lambda+2\mu)+8h_1^2\mu) \\
v_{i,j}^{(k+1)} &= (4h_1^2(\lambda+2\mu)(v_{i.j+1}^{(k)}+v_{i,j-1}^{(k)})+4h_2^2\mu(v_{i+1,j}^{(k)}+v_{i-1,j}^{(k)})+h_1h_2(\lambda+\mu)* \\
&\quad *(u_{i+1,j+1}^{(k)}-u_{i-1,j+1}^{(k)}-u_{i+1,j-1}^{(k)}+u_{i-1,j-1}^{(k)})+X_2)/(8h_1^2(\lambda+2\mu)+8h_2^2\mu).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

chegaraviy shartlar tugun nuqtalarga nisbatan quyidagicha yozib olish mumkin

$$
\begin{aligned}
&u_{i0}^{(0)}=0, \quad v_{i0}^{(0)}=\sin\frac{\pi x_i}{l_1},\ u_{iN_2}^{(0)}=0,\ v_{iN_2}^{(0)}=-\sin\frac{\pi x_i}{l_1}, \\
&u_{0j}^{(0)}=\sin\frac{\pi y_j}{l_2},\ v_{0j}^{(0)}=0,\ u_{N_1j}^{(0)}=-\sin\frac{\pi y_j}{l_2},\ v_{N_1j}^{(0)}=0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Nolinchi yaqinlashishda, ya’ni $k=0$ bo‘lganda qidirilayotgan $u_{ij}^{(0)}$ va $v_{ij}^{(0)}$ kattaliklarning Ω sohaning chegarasidagi tugun nuqtalardagi qiymatlari (13) chegaraviy shartlarga asosan aniqlanadi. Ichki tugun nuqtalarda esa, nolinchi $(k=0)$ yaqinlashishda ko‘chishlarning qiymatlari nolga teng deb hisoblanadi. Iterasion jarayonni davom ettirib, qidirilayotgan u_{ij} va v_{ij} ko‘chishlarning qiymatlarini ε aniqlikda topish mumkin.

Quyidagi funksiyalar

$$
u=\cos\frac{\pi x}{l_1}\sin\frac{\pi y}{l_2}\ , \quad v=\sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2}
\tag{16}
$$

chegaraviy shartlarni va hajmiy kuchlar quyidagicha bo‘lganda (11) tenglamalarini qanoatlantiradi

$$
\begin{aligned}
X_1 &= -(\lambda+2\mu)\frac{\pi^2}{l_1^2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2}-(\lambda+\mu)\frac{\pi^2}{l_1l_2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2}-\mu\frac{\pi^2}{l_2^2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2} \\
X_2 &= -(\lambda+2\mu)\frac{\pi^2}{l_2^2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}-(\lambda+\mu)\frac{\pi^2}{l_1l_2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}-\mu\frac{\pi^2}{l_1^2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Model masala parametrlarning quyidagi qiymatlarida yechilgan $\lambda=0.8$, $\mu=0.5$, $l_1=l_2=1$, $N1=N2=10$.

1-жадвал

u(x,y) **ko‘chishning $\varepsilon=0.001$ bo‘lgandagi taqribiy qiymatlari**

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
y=0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0.3090	0.2939	0.2499	0.1816	0.0955	0
y=0.2	0.5877	0.5593	0.4754	0.3451	0.1813	0
y=0.3	0.8090	0.7706	0.6554	0.4757	0.2498	0
y=0.4	0.9510	0.9068	0.7717	0.5603	0.2943	0

2-жадвал

u(x,y) **aniq yechimning qiymatlari**

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5

y=0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0.3090	0.2938	0.2500	0.1816	0.0954	0
y=0.2	0.5877	0.5590	0.4755	0.3454	0.1816	0
y=0.3	0.8090	0.7694	0.6545	0.4755	0.2500	0
y=0.4	0.9510	0.9045	0.7694	0.5590	0.2938	0

Chegaraviy masalaning sonli natijalarini aniq yechim bilan solishtirish ko‘chishlarning qiymatlari yetarlicha yaqinligini ko‘rsatdi, bu esa olingan natijalarning ishonchliligini va taklif qiligan sonli yechish metodining to‘g‘riligini ta’minlaydi.

Shunday qilib, metodning mohiyati dastlabki tenglamalar va chegaraviy shartlar uchun markaziy tugun nuqtalardagi asosiy ko‘chishlarga nisbatan yechilgan chekli-ayirmali sxemalar qurish va iterasion jarayonni tashkil qilishdan iborat. Bunda, nolinchi yaqinlashishda ichki nuqtalardagi ko‘chishlarning qiymatlari nolga teng deb hisoblanadi.

2.2. Чекли елементлар усули.

Chekli elementlar usuli, xozirgi amaliy masalalarni yechishda eng ko‘p foydalaniladigan usullardan biri bo‘lib, elastik nazarisida Rits metodiga asoslangan. Xozir bu metodni, elastiklik nazarisining statik masalasi misolida ko‘rib o‘tamiz. Ma’lumki, qattiq jismlarning chiziqli deformasiyalanish jaroyonini ifodalaydigan chegaraviy masala quyidagi tenglamalardan tashkil topadi:

$$\sigma_{ij,i} + X_i = 0 \qquad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijke}\varepsilon_{ke} \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (3)$$

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0 \qquad (4)$$

$$\sigma_{ij} n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^0 \qquad (5)$$

Ma’lumki, (1-5) masalani yechishni, quyidagi funksional- Lagranjiyanga minimum qiymat beruvchi u_i funksiyani topish masalasiga, ya’ni variasion masalaga keltirish mumkin

$$L = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv - \int_V X_i u_i dv - \int_{\Sigma_2} S_i u_i dv \qquad (6)$$

(1-5) chegaraviy masala bir o‘lchovli xolda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial x} + X = 0 \\ \sigma = C\varepsilon \\ \varepsilon = \dfrac{du}{dx} \\ u\big|_{x=0} = \tilde{u}_0 \\ \sigma\ \big|_{x=e} = S^0 \end{cases} \qquad (7)$$

(7) tenglamalarni ko‘chishga nisbatan yozib olamiz

$$E\frac{d^2u}{dx^2} + X = 0, \qquad 0 \le x \le l \qquad (8)$$

$$u\big|_{x=0} = u^0, \qquad E\frac{du}{dx}\Big|_{x=l} = S^0 \qquad (9)$$

(9) –masalaga mos keluvchi funksional-Lagranjian quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$L = \frac{1}{2}\int_0^l E\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l Xudv + Su\big|_{x=l} \qquad (10)$$

(8) tenglamani, chegarada nol kiymatga ega bo‘lgan v ga ko‘paytirib va (9)-chegaraviy shartlarni hisobga olgan xolda kesma bo‘yicha bo‘laklab integrallab, quyidagi integral ifodani topish mumkin

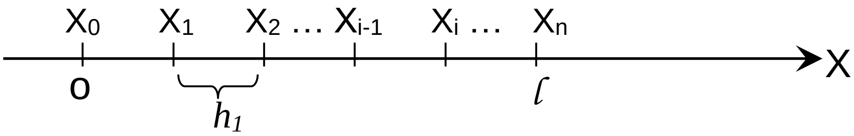
$$E\int_0^l \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}dx = \int_0^l Xvdx - Sv\big|_{x=l} \qquad (11)$$

(11) ifoda bikvadratik forma bo‘lib, integral ayniyat deb yuritiladi va unda $v = u$ bo‘lsa, undan (10) – funksional kelib chiqadi.

Endi masala qaralayotgan $[0,1]$ kesmani xar xil

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 0, \overline{N} \qquad (12)$$

uzunlikdagi segmentlarga ajratamiz. Bu segmentlar odatda, “chekli element” lar deb ataladi.



Tugun nuqtalardagi funksiyaning qiymatlarini $u(x_i)$ deb belgilab olamiz, yani

$$u_0, u_1, ..., u_{i-1}, u_i, ...u_N$$

Xar bir chekli elementda $[x_{i-1}, x_i]$ masalaning yechimini chiziqli funksiya qo‘rinishida izlaymiz:

$$u(x) = ax + b \qquad (13)$$

va bu funksiyaning tugun nuqtalarda berilgan $u(x_i)$ qiymatlar bilan ustma-ust tushish (interpolyasiya) shartidan foydanib, *a*,*b* no’malumlarga nisbatan, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin:

$$\begin{cases} u(x_i) = ax_i + b \\ u(x_{i-1}) = ax_{i-1} + b \end{cases} \qquad (14)$$

Tenglamalarni bir-biridan xadma-xad ayirib a koeffisiyentni topish mumkin

$$a = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \qquad (15)$$

(14) tenglamaning 1-sini x_{i-1} ga 2-sini esa x_i ga ko‘paytirib,

$$\begin{cases} u_i x_{i-1} = a x_i x_{x-1} + b x_{i-1} \\ u_{i-1} x_i = a x_{i-1} x_i + b x_i \end{cases}$$

va ularni bir-biridan xadma-xad ayirib b koeffisiyentni topish mumkin:

$$b = \frac{u_i x_{i-1} - u_{i-1} x_i}{x_{i-1} - x_i} = \frac{u_{i-1} x_i - u_i x_{i-1}}{h_i} \qquad (16)$$

(15-16) koeffisiyentlarni (13) ifodaga qo‘yib, “chekli element”da aniqlangan funksiyani (funksiya formi) topish mumkin

$$u(x) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} x + \frac{u_{i-1} x_i - u_i x_{i-1}}{h_i}$$

yoki

$$u(x) = u_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} + u_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} \qquad (17)$$

Endi (11) – formani yoki (10)- Lagrajiyan funksionalini chekli elementlar bo‘yicha yig‘indi ko‘rinishida yozib olamiz:

$$\sum_{i=1}^{N} E\int_{i-1}^{x_i} \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}dx-\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} Xvdx+Sv_N=0 \qquad (18)$$

Енді (17) funksiyaдan foyдalanган холда $\frac{du}{dx}$ ва $\frac{dv}{dx}$ larni topiб (18) ifoдага qo‘yiб quyiдаги ifoдani topishimiz mumkin:

$$\sum_{i=1}^{N} E\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right)\left(\frac{v_i-v_{i-1}}{h_i}\right)dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} X\left(v_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i}+v_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}\right)dx-Sv_N=0 \quad (19)$$

Енді бu ifoдадан v_i, $i=1,2,...N-1$ бо‘yicha hosila olamiz, yani

$$E\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}dx+E\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{u_{i+1}-u_i}{-h^2_{i+1}}dx+\int_{x_{i-1}}^{x_i}X\frac{x-x_{i-1}}{h_i}dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}X\frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}dx=0_i \qquad (20)$$

Agar quyidagi belgilashlar kiritilsa

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}E(x)dx=I_i,\quad R_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}X\frac{x-x_{i-1}}{h_i}dx \qquad (21)$$

(20) tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olish mumkin

$$I_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i^2}-I_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}^{\ 2}}=R_i+R_{i+1}$$

yoki

$$\frac{I_{i+1}}{h_{i+1}^{\ 2}}u_{i+1}+\left(\frac{I_i}{h_i^2}+\frac{I_{i+1}}{h_{i+1}^{\ 2}}\right)u_i+\frac{I_i}{h_i^2}u_{i-1}=R_i+R_{i+1} \qquad (22)$$

$$u_0=\bar{u}^0, \qquad (23)$$

$$I_N\frac{u_N-u_{N-1}}{h_N^{\ 2}}=R_N+S_N \qquad (24)$$

Teng oraliqlar uchun variasion usul:

(10) –funksionaldan foydalanib, teng oraliqlar uchun, trapesiyalar formulasidan foydalanib

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}f_i+\sum_{i=1}^{N}f_i\right] \qquad h=\frac{b-a}{N}=\frac{l}{N} \qquad (25)$$

$$x_i = h \cdot i, \quad i = \overline{0, N}$$

(10) – funksionalni yig‘indi ko‘rinishida yozib olamiz, yani

$$L^h = \frac{1}{2} \cdot \frac{hE}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1`}\left(\frac{du}{dx}\right)_i^2 x_i + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{du}{dx}\right)_i^2\right] - \frac{h}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1} X_i u_i + \sum_{i=1}^{N} X_i u_i\right] - Su_N \tag{26}$$

Hosilalarni o‘rniga, mos ravishdva o‘ng va chap chekli ayirmalarni qo‘yib

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \tag{27}$$

(12) ifodani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$L^h = \frac{1}{2} \cdot \frac{hE}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1`}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2\right] - \frac{h}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1} X_i u_i + \sum_{i=1}^{N} X_i u_i\right] - Su_N \tag{28}$$

Bu yerda

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 = \left(\frac{u_1 - u_0}{h}\right)^2 + \left(\frac{u_2 - u_1}{h}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)^2 + \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right)^2 \ldots + \left(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right)^2 \tag{29}$$

Endi funksionalning stasionarlik shartidan foydalanamiz, yani

u_i bo‘yicha xosila olib nolga tenglaymiz

$$\frac{\partial L^h}{\partial u_i} = 0, \qquad i = 0, N \tag{30}$$

yoki

$$\frac{\partial L^h}{\partial u_i} = \frac{Eh}{4}\left[2\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right)\left(-\frac{1}{h}\right) + 2\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) + 2\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\left(\frac{1}{h}\right) + 2\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right)\left(-\frac{1}{h}\right)\right)\right] - hX_i = 0$$

$$\frac{Eh}{4}\left[-2\frac{u_{i+1} - u_i}{h^2} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{h^2} \cdot 2\right] - hX_i = 0, \; i = 1, N-1 \tag{31}$$

(31) ifodani soddalashtirib fuyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$-E\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = X_i, \qquad i = \overline{1, N-1} \tag{32}$$

$$\frac{2E}{h}\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = X_N + \frac{2S}{h}, \qquad i = N \qquad (33)$$

$$u_0 = \tilde{u}^0 \qquad i = 0 \qquad (34)$$

Shunday qilib, (32-34) chekli ayirmali tenglamalar variasion usul yordamida tuzildi. Chekli ayirmali tenglamalar chegaraviy masalaning o‘zi uchun yani (8-9) –masala uchun tuzilganida chekli ayirmali tenglamalar quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lardi

$$-E \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{l^2} = X_i, \qquad i = 1, \overline{n-1} \qquad (35)$$

$$E \cdot \frac{u_N - u_{N-1}}{h} = S, \qquad i = N \qquad (36)$$

$$u_0 = \tilde{u}, \qquad i = 0 \qquad (37)$$

(32-34) va (35-37) tenglamalarni taqqoslab ularning farqini sezish mumkin. Chekli ayirmali variasion usulda chegaraviy shartda xajmiy kuchning xam paydo bo‘lganligini ko‘rish mumkin. Agar xajmiy kuch nolga teng bo‘lsa, bu tenglamalarining aynan bir xil bo‘lib qolishligini ko‘rish mumkin.

2.3. Chegaraviy elementlar usuli.

Chegaravyi elementlar usulining(CHEU) asosiy moxiyati, sohada berilgan chegaraviy masalani yechishni, sohaning chegarasida aniqlangan intngral tenglamaga keltirib yechishdan iborat. Masalaning o‘lchami bir o‘lchamga kamayadi. Masalan, xajmda qaralayotgan masala, sohaning sirti bo‘yicha aniqlangan integral tenglamalarga keltiriladi. Bu usul xam, elastik nazariyasi masalarini klassik usullaridan biri xisoblanadi. Lekin, oxirgi yillarda informasion texnologiyalaining rivojanishi bilan unga bo‘lgan e’tibor yana kuchaydi.

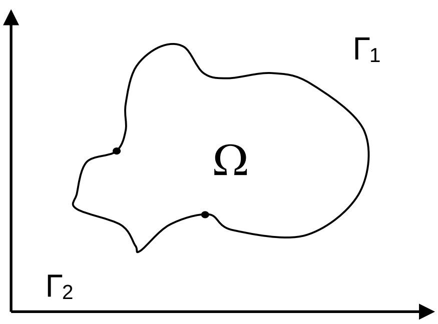
Bu usulni bayon etish bizga “O‘rtalashgan qoldiqlar usuli” zarur bo‘ladi. Faraz kilaylik, bizga quyidagi operator ko‘rinida yozilgan chegaraviy masala berilgan bo‘lsin

$$Lu = f \qquad x \in \Omega \qquad (1)$$

$$S_u\big|_{\Gamma_1} = S \qquad (2)$$

$$G_u\big|_{\Gamma_2} = g \qquad (3)$$

bu yerda $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1, Γ_2 sohaning chegaralari, *f, S, g*- berilgan funksiyalar.



Bu yerda L, S_u, G - berilgan operatorlar.

Masala yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$\tilde{u}(x) = \varphi_o(x) + \sum_{i=1}^{h} C_i \varphi_i(x), \qquad (4)$$

Bu yerda $C_i - const,$ $\varphi_o, ...$ φ_h chiziqli bog‘liqmas funksiyalar, φ_o (2) va (3) chegaraviy shartlarni, qoganlari esa bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi deb faraz qilaylik.

(4) ni (1) tenglamaga qo‘yamiz. U xolda

$$R = L\tilde{u} - f \qquad (5)$$

qoldiqni (nevyazka) topish mumkin. (4) ni chegaraviy shartlarga qo‘yib, mos ravishda quyidagi qoldiqlarni topish mumkin:

$$R_1 = S\tilde{u} - 1 \qquad (6)$$

$$R_2 = G\tilde{u} - g \qquad (7)$$

(5-7) ifodalardan foydalangan xolda quyidagi integral ifodani xosil qilish mumkin

$$\int_{\Omega} R w d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 \frac{dw}{dn} d\Gamma \qquad (8)$$

bu yerda w- og‘irlik funksiya(vesovaya funksiya), n- Ω sohaning sirtiga o‘tkazilgan tashqi normal.

Sootnosheniye (8) - ifoda o‘rtalashgan qoldiqlar usuli(metod nevyazok) deb ataladi. Qo‘rinib turibdiki bu ifoda, qoldiq xadlarni og‘irlik funksiyasi W ga ko‘paytirish orqali hosil qilingan. (8)- integral munosabat elastiklik nazariyasidagi, kollokasii , Galerkin -Bubnov va Rits usullarining umumlashmasidir.

Masalan, Galerkin usuli paytida $\int_{\Omega} RWd\Omega = 0$ bo‘ladi, va W va R funksiyalarning ortogonalligidan c_i koeffisiyentlarni topib olish mumkin.

Quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema: Faraz qilaylik [a,b] oraliqda o‘zaro ortogonal bo‘lgan $\psi_k(x)$ to‘la funksiyalar sistemasi berilgan bo‘lsin. [a,b] oraliqda uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ - funksiya uchun quyidagi munosabat

$$\int_a^в f(x)\psi_i dx = 0, \tag{9}$$

$f(x) \equiv 0$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi.

Misol sifatida quyidagi chegaraviy masala berilgan bo‘lsin

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \qquad x \in [0,1] \tag{10}$$

$$u(0) = \bar{u}, \tag{11}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \bar{q} \tag{12}$$

Umnojim (10) ni og‘irlik funksiyasi w ga ko‘paytiramiz va [0,1] oraliq bo‘yicha integrallaymiz

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + u + x \right) wdx = 0 \tag{13}$$

Bu ifodani ikki marta bo‘laklab integrallab topamiz

$$\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} Wdx = W \left.\frac{du}{dx}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} = W\left.\frac{du}{dx}\right|_0^1 - \frac{dw}{dx} u\Big|_0^1 + \int_0^1 u \frac{d^2w}{dx^2} dx. \tag{14}$$

Chegaraviy shartlarni hisobga olib quyidagicha yozib olish mumkin:

$$[w\bar{q}]_0^1 - \left[\frac{dw}{dx}\bar{u} \right]_0^1 + \int_0^1 u \frac{d^2w}{dx^2} dx = w\bar{q}\,|_1 - wq|_0 - \frac{-dw}{dx} u\Big|_1 + \frac{dw}{dx}\bar{u} + \int_0^1 u \frac{d^2w}{dx^2} dx$$

Bu ifodaniyana ikki marta bo‘laklab integrallab topamiz

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{dx^2} + u + x \right) wdx = \left[(q - \bar{q}) w \right]_0^1 - \left[(u - \bar{u}) \frac{dw}{dx} \right]_0^1, \tag{15}$$

yoki

$$\int_0^1 Rwdx = R_2 wdx\Big|_0^1 - R_1 \left.\frac{dw}{dx}\right|_0^1$$

bu yerda

$$R = \frac{\partial^2 u}{dx^2} + u + x, \quad R_2 = q - \bar{q}, \quad R_1 = u - \bar{u}$$

Bu esa biz topmoqchi bo‘lgan quyidagi fodaning bir o‘lchovli xolda yozilishini tashkil etadi:

$$\int_\Omega Rwd\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 wd\Gamma - \int_{\Gamma_2} R_1 \frac{dw}{dx} d\Gamma$$

Endi, o‘rtalashgan qoldiqlar usuli yordamida, chegaraviy integral tenglamalar tuzish uchun, misol sifatida quyidagi chegaraviy masalani ko‘ramiz

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \qquad x \in [0,1] \tag{16}$$

$$u(0) = 0, \tag{17}$$

$$u(1) = 0 \tag{18}$$

Bu masala uchun o‘rtalashgan qoldiqlar usuli yordamida quyidagi ifodani topib olish mumkin

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{dx^2} + u + x \right) w dx + \left(u - \bar{u} \right) \frac{dw}{dx}\Big|_0^1 = 0 \tag{19}$$

Bu ifodani ikki marta bo‘laklab integrallab topamiz

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + w \right) u dx + \int_0^1 x \cdot dx + wq\Big|_0^1 + u\frac{du}{dx}\Big|_0^1 = 0 \tag{20}$$

Og‘irlik funksiyasi w quyidagi tenglamani yechish orqali topiladi

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + w = \delta\left(x - x_i\right) \tag{21}$$

bu yerda

$$\delta\left(x - x_i\right) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}$$

(21) tenglamadan foydalangan xolda quyidagi ifodani topish mumkin

$$u(x_i) = -\int_0^1 x \cdot w dx - wq\Big|_0^1 \tag{22}$$

Bu yerda

$$w = \frac{1}{2}\sin\left|x - x_i\right| \tag{23}$$

(22) tenglamani sohaning (kesma) chetki nuqtalariga nisbatn qarab, $q = \frac{du}{dx}$ ning x=0 va x=1 nuqtalaridagi qiymatlariga nisbatan tenglamalar sitemasiga kelamiz. Uni yechib quyidagi ifodalarni topish mumkin.

$$q_0 = \frac{1}{\sin 1} - 1, \; q_1 = \frac{\cos 1}{\sin 1} - 1 \tag{24}$$

Bu qiymatlardan foydalangan xolda, (22) fohmuladan foydalangan xolda [0,1] kesmaning ixtiyoriy ichki x_i nuqtasida yechimning qiymatini hisoblash mumkin.

Masalan, (22) formulada $x_i = 0.5$ topish mumkin

$$\mathrm{u}(0.5) = -\frac{1}{2}\int_0^{0.5} x\sin(0.5 - x)dx - \frac{1}{2}\int_{0.5}^1 x\sin(x - 0.5)dx - q_1\sin(0.5) + q_0\sin(0.5) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos 1 - 1}{\sin 1}\sin 0.5 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \sin 0.5) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \sin 0.5 - \cos 0.5) = 0.06974$$

Nazorat savollari

1. Chekli ayirmali munosabatlar
2. O‘ng, chap va markaziy chekli ayirmali munosabatlar.
3. Aralash hosila uchun chekli ayirmali munosabatlar
4. Chekli ayirmali usul
5. Ikki o‘lchovli Lame tenglamasini sonli yechish
6. Variasion masala. Lagranjiyan funksionali
7. Chekli elementlar usuli
8. Interpolyasiya sharti,
9. Integral ayniyat
10. Chiziqli interpolyasion funksiya,
11. O‘rtalashgan qoldiqlar usuli.
12. Chegaraviy elementlar usulining mohiyati

3-MAVZU: Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari, hamda amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish.

REJA:

3.1. Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari
3.2. Amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish.

Tayanch so'zlar: *matematik model, sonli modellashtirish, muxitlarda temperatura tarqalishi, sonli usullar, progonka usuli, rekurrent formula, chekli-ayirmali tenglama, oshkor-oshkormas sxemalar, obyektga yo'naltirilgan dasturlash, S# dasturlash tili, vizuallashtirish, ANSYS, Cosmosm, Lira, SolidWorks, Mathlab*

3.1. **Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari**

Bu bo'limda, amaliy paketlar majmuasiga misol sifatida elastiklik nazariyasi masalalarini sonli yechishga mo'ljallan dasturlar majmuasi keltirilgan. U Delphi7 muxitida yaratilgan bo'lib, Mathlab paketi bilan birgalikda 3D grafiklarni yordamida jaroyonni vizuallashtirish va taxlil etish imkonini beradi. Bu programma ta'minotini yaratish va qo'llash uchun, avval matematik modellarni, yani termoelastik deformasiyalanish jaroyonini ifodalovchi chegaraviy masalaning qo'yilishi va unga mos chekli-ayirmali tenglamalarini tuzish va uni sonli yechishga imkon beradigan va dasturlash uchun qulay bo'lgan samarali algoritmlarni tanlash yoki taklif etish muximdir. Shu fikrlarga tayangan xolda, avval termoelastik masalaning qo'yilishidan boshlaymiz.

Termoelastiklikning bog'langan dinamik masalasi harakat tenglamalaridan

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + X_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (3.1.1)$$

Dyugamel-Neyman munosabatidan

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \tag{3.1.2}$$

Koshi munosabati

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{3.1.3}$$

va issiqliq oqimi tenglamasidan

$$c_\varepsilon \dot{T} = \lambda_0 T_{,ii} \tag{3.1.4}$$

mos boshlang‘ich

$$u_i\big|_{t=t_0} = \phi_i, \quad \dot{u}_i\big|_{t=t_0} = \psi_i \ , \quad T\big|_{t=0} = f \tag{3.1.5}$$

va chegaraviy shartlardan tashkil topgan

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij} n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^o, \quad T\big|_{\Sigma} = \varphi(t) \tag{3.1.6}$$

Bu yerda λ_0 - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffisiyenti, c_ε - issiqlik sig‘imi.

(3.1.1)-(3.1.6) chegaraviy masala bir o‘lchovli xolda kuyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + X = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.1.7}$$

$$\sigma = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha(T - T_0) \tag{3.1.8}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.1.9}$$

$$c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{3.1.10}$$

Quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan

$$u\big|_{t=t_0} = \phi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \psi \ , \quad T\big|_{t=t_0} = f \tag{3.1.11}$$

$$u\big|_{x=0} = u^0, \quad u\big|_{x=l} = u'$$

$$T\big|_{x=0} = \varphi_1 \ , \quad T\big|_{x=l} = \varphi_1 . \tag{3.1.12}$$

(3.1.7)-(3.1.10) tenglamalarni kuyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$\left.\begin{array}{c}\left(\lambda+2\mu\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\dfrac{\partial T}{\partial x}=\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ c_\varepsilon\dfrac{\partial T}{\partial t}=\lambda_0\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\end{array}\right\}\tag{3.1.13}$$

mos boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan

$$\left.\begin{array}{c}u\big|_{t=t_0}=\phi\quad,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}_i\Big|_{t=t_0}=\psi\quad,\quad T\big|_{t=t_0}=f\\ u\big|_{x=0}=u^0\;,u\big|_{x=l}=u'\;,T\big|_{x=0}=\varphi_1\;,T\big|_{x=l}=\varphi_1\end{array}\right\}\tag{3.1.14}$$

l kesmani N ga bo‘lib, yani $h=\dfrac{l}{N}$ va vaqt t bo‘yicha qadamni τ bilan belgilab tugun nuktalarni topamiz

$$\begin{array}{l}x_i=h\cdot i\,,\quad i=\overline{0,N},\\ t_j=\tau\cdot j\,,\quad j=\overline{0,M}.\end{array}$$

(3.1.13) tenglamada xosilalarni mos chekli ayirmali nisbatlar bilan almashtirib topamiz

$$(\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2h_1}=\rho\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\tau^2}\tag{3.1.15}$$

$$c_\varepsilon\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\tau}=\lambda_0\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h^2}\tag{3.1.16}$$

Bu tenglamalarni mos ravishda $u_{i,j+1}$ va $T_{i,j+1}$ ga nisbatan yechib rekurrent formulalarga ega bo‘lamiz

$$u_{i,j+1}=\frac{\tau^2}{\rho}\left((\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2h_1}\right)+2u_{i,j}-u_{i,j-1}\tag{3.1.17}$$

$$T_{i,j+1}=\frac{\tau\lambda_0}{c_\varepsilon}\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h^2}+T_{i,j}\,.\tag{3.1.18}$$

kuyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan

$$\left.\begin{array}{l}u_i^0=\phi_i\,,\quad \dfrac{u_i^1-u_i^0}{\tau}=\psi_i\,,\quad T_i^0=f_i,\quad i=\overline{0,N}\\ u_0^j=\overline{u}^{\,j},\;\; u_N^j=u\%^{j},\;\; T_0^j=\varphi_1^j\,,\;\; T_N^j=\varphi_2^j\,,\quad j=\overline{0,M}\end{array}\right\}.\tag{3.1.19}$$

Endi (3.1.13-3.14) dinamik chegaraviy masalani iterasion usulda yechish usulini ko‘rib o‘tamiz. Quyidagi chekli ayirmali yozib olamiz

$$(\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2h}=\rho\frac{u_{ij}-2u_{i,j-1}+u_{i,j-2}}{\tau^2} \qquad (3.1.20)$$

$$c_\varepsilon\frac{T_{i,j}-T_{i,j-1}}{\tau}=\lambda_0\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h^2}\,. \qquad (3.1.21)$$

(3.1.20)-(3.1.21) tenglamalarni u_{ij} va $T_{i,j}$ ga nisbatan yechib quyidagi ifodalarni topish mumkin

$$u_{ij}=\frac{(\lambda+2\mu)\dfrac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}}{h^2}-\gamma\dfrac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2h}+\rho\dfrac{2u_{i,j-1}-u_{i,j-2}}{\tau^2}}{\dfrac{2(\lambda+2\mu)}{h^2}+\dfrac{\rho}{\tau^2}} \qquad (3.1.22)$$

$$T_{i,j}=\frac{\lambda_0\tau}{c_\varepsilon}\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h^2}+T_{i,j-1}\,. \qquad (3.1.23)$$

(3.1.22)-(3.1.23) asosida xar bir j-qatlam uchun k indeksi bo‘yicha iterasion jaroyon tashkil etamiz

$$u_{i,j}^{(k+1)}=\frac{(\lambda+2\mu)\dfrac{u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k)}}{h^2}-\gamma\dfrac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2h}+\rho\dfrac{2u_{i,j-1}-u_{i,j-2}}{\tau^2}}{\dfrac{2(\lambda+2\mu)}{h^2}+\dfrac{\rho}{\tau^2}} \qquad (3.1.24)$$

$$T_{i,j}^{(k+1)}=\frac{\lambda_0\tau}{c_\varepsilon}\frac{T_{i+1,j}^{(k)}-2T_{i,j}^{(k)}+T_{i-1,j}^{(k)}}{h^2}+T_{i,j-1} \qquad (3.1.25)$$

Masala quyidagi boshlang‘ich va chegaraviy shartlarda

$$u\big|_{t=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad T\big|_{t=0}=T_0\sin\frac{\pi x_i}{l},$$

$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0,\quad T\big|_{x=0}=0,\quad T\big|_{x=l}=0$$

va o‘zgarmaslarda yechilgan

$$\lambda=0.8,\ \mu=0.5,\ \alpha=0.05,\ \rho=0.9,\ c_\varepsilon=3.2,$$
$$\lambda_0=0.04, T_0=15,\ l=1, N=10,\ h=0.1,\ \tau=0.01.$$

Jadval 3.1. *u(x,t)* (iterasiya usuli) $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t=0.01	0	-0.00042	-0.00035	-0.00026	-0.00014	0	0.00014	0.00026	0.00035	0.00042	0
t=0.02	0	-0.00163	-0.00141	-0.00102	-0.00054	0	0.00054	0.00102	0.00141	0.00163	0
t=0.03	0	-0.00358	-0.00316	-0.00230	-0.00121	0	0.00121	0.00230	0.00316	0.00358	0
t=0.04	0	-0.00623	-0.00559	-0.00407	-0.00214	0	0.00214	0.00407	0.00559	0.00623	0
t=0.05	0	-0.00949	-0.00869	-0.00633	-0.00333	0	0.00333	0.00633	0.00869	0.00949	0
t=0.06	0	-0.01328	-0.01243	-0.00907	-0.00477	0	0.00477	0.00907	0.01243	0.01328	0
t=0.07	0	-0.01753	-0.01678	-0.01228	-0.00646	0	0.00646	0.01228	0.01678	0.01753	0
t=0.08	0	-0.02213	-0.02171	-0.01594	-0.00839	0	0.00839	0.01594	0.02171	0.02213	0
t=0.09	0	-0.02700	-0.02717	-0.02004	-0.01055	0	0.01055	0.02004	0.02717	0.02700	0
t=0.1	0	-0.03208	-0.03313	-0.02459	-0.01295	0	0.01295	0.02459	0.03313	0.03208	0

Jadval 3.2. *u(x,t)* (Oshkor sxema)

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t=0.01	0	-0.00042	-0.00035	-0.00026	-0.00014	0	0.00014	0.00026	0.00035	0.00042	0
t=0.02	0	-0.00165	-0.00142	-0.00103	-0.00054	0	0.00054	0.00103	0.00142	0.00165	0
t=0.03	0	-0.00369	-0.00318	-0.00231	-0.00121	0	0.00121	0.00231	0.00318	0.00369	0
t=0.04	0	-0.00646	-0.00564	-0.00410	-0.00216	0	0.00216	0.00410	0.00564	0.00646	0
t=0.05	0	-0.00992	-0.00880	-0.00640	-0.00336	0	0.00336	0.00640	0.00880	0.00992	0
t=0.06	0	-0.01399	-0.01263	-0.00919	-0.00483	0	0.00483	0.00919	0.01263	0.01399	0
t=0.07	0	-0.01858	-0.01712	-0.01247	-0.00656	0	0.00656	0.01247	0.01712	0.01858	0
t=0.08	0	-0.02359	-0.02225	-0.01625	-0.00854	0	0.00854	0.01625	0.02225	0.02359	0
t=0.09	0	-0.02892	-0.02799	-0.02049	-0.01078	0	0.01078	0.02049	0.02799	0.02892	0
t=0.1	0	-0.03449	-0.03430	-0.02520	-0.01326	0	0.01326	0.02520	0.03430	0.03449	0

Jadval 3.3. Temperatura *T(x,t)* (iterasiya usuli) $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	0	4.63525	8.81678	12.13525	14.26585	15	14.26585	12.13525	8.81678	4.63525	0
t=0.01	0	4.62958	8.80599	12.12041	14.24839	14.98165	14.24839	12.12041	8.80599	4.62958	0
t=0.02	0	4.62392	8.79523	12.10559	14.23098	14.96333	14.23098	12.10559	8.79523	4.62392	0
t=0.03	0	4.61827	8.78448	12.09079	14.21358	14.94504	14.21358	12.09079	8.78448	4.61827	0
t=0.04	0	4.61263	8.77374	12.07601	14.19621	14.92677	14.19621	12.07601	8.77374	4.61263	0
t=0.05	0	4.60699	8.76301	12.06125	14.17885	14.90853	14.17885	12.06125	8.76301	4.60699	0
t=0.06	0	4.60136	8.75230	12.04651	14.16152	14.89030	14.16152	12.04651	8.75230	4.60136	0
t=0.07	0	4.59573	8.74160	12.03178	14.14421	14.87210	14.14421	12.03178	8.74160	4.59573	0
t=0.08	0	4.59011	8.73092	12.01708	14.12692	14.85392	14.12692	12.01708	8.73092	4.59011	0
t=0.09	0	4.58450	8.72024	12.00239	14.10965	14.83577	14.10965	12.00239	8.72024	4.58450	0
t=0.1	0	4.57890	8.70958	11.98771	14.09240	14.81763	14.09240	11.98771	8.70958	4.57890	0

Jadval 3.4. Temperatur *T(x,t)* (Oshkor sxema)

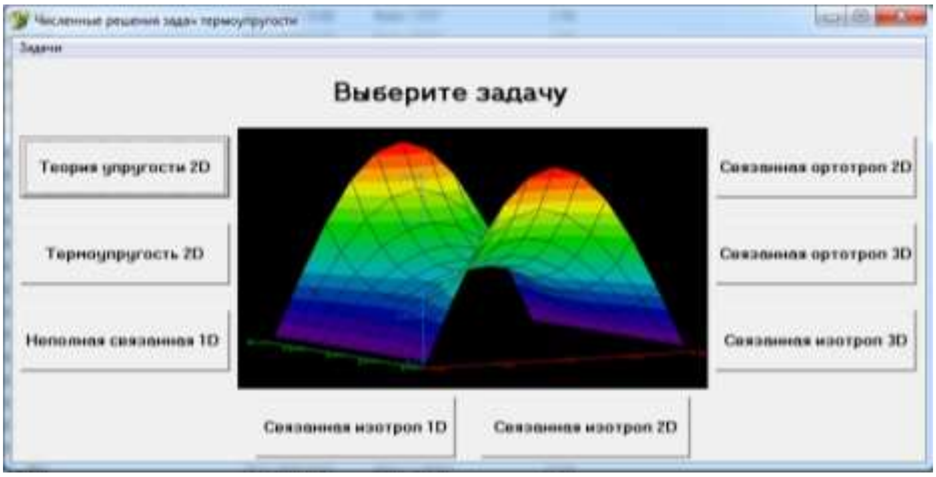
	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	0	4.63525	8.81678	12.13525	14.26585	15	14.26585	12.13525	8.81678	4.63525	0
t=0.01	0	4.62958	8.80599	12.12041	14.24839	14.98165	14.24839	12.12041	8.80599	4.62958	0
t=0.02	0	4.62392	8.79522	12.10558	14.23096	14.96331	14.23096	12.10558	8.79522	4.62392	0
t=0.03	0	4.61826	8.78445	12.09076	14.21355	14.94501	14.21355	12.09076	8.78445	4.61826	0
t=0.04	0	4.61261	8.77371	12.07597	14.19615	14.92672	14.19615	12.07597	8.77371	4.61261	0
t=0.05	0	4.60697	8.76297	12.06119	14.17878	14.90846	14.17878	12.06119	8.76297	4.60697	0
t=0.06	0	4.60133	8.75225	12.04644	14.16143	14.89021	14.16143	12.04644	8.75225	4.60133	0
t=0.07	0	4.59570	8.74154	12.03170	14.14411	14.87199	14.14411	12.03170	8.74154	4.59570	0
t=0.08	0	4.59008	8.73084	12.01697	14.12680	14.85380	14.12680	12.01697	8.73084	4.59008	0
t=0.09	0	4.58446	8.72016	12.00227	14.10951	14.83562	14.10951	12.00227	8.72016	4.58446	0
t=0.1	0	4.57885	8.70949	11.98758	14.09225	14.81747	14.09225	11.98758	8.70949	4.57885	0

3.2. Amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish.

Quyida amaliy paketlar majmuasiga misol sifatida elastiklik nazariyasi masalarini yechishga mo‘ljallan dasturlar majmuasi keltirilgan. U Delphi7 muximtida yaratilgan bo‘lib, Mathlab paketi bilan birgalikda 3D grafiklarni yaratish imkrnini beradi.

Bu dasturiy majmua yerdamida quyidagi qator elastik tipdagi masalalarni yechish mumkin.

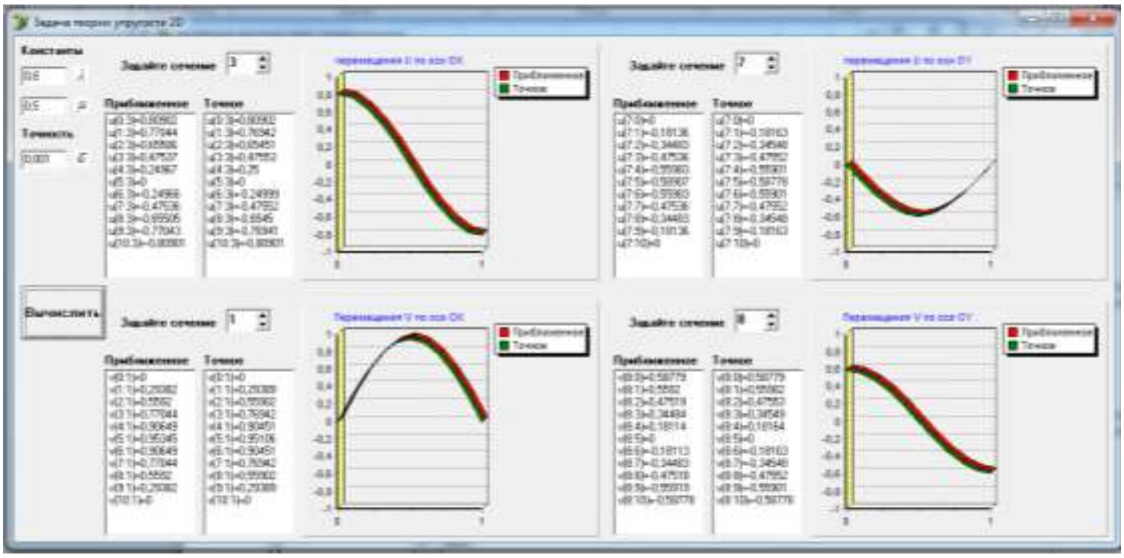
Misol 3.2.1. Masalani tanlash imkoniyati



Rasm. 3.2.1.

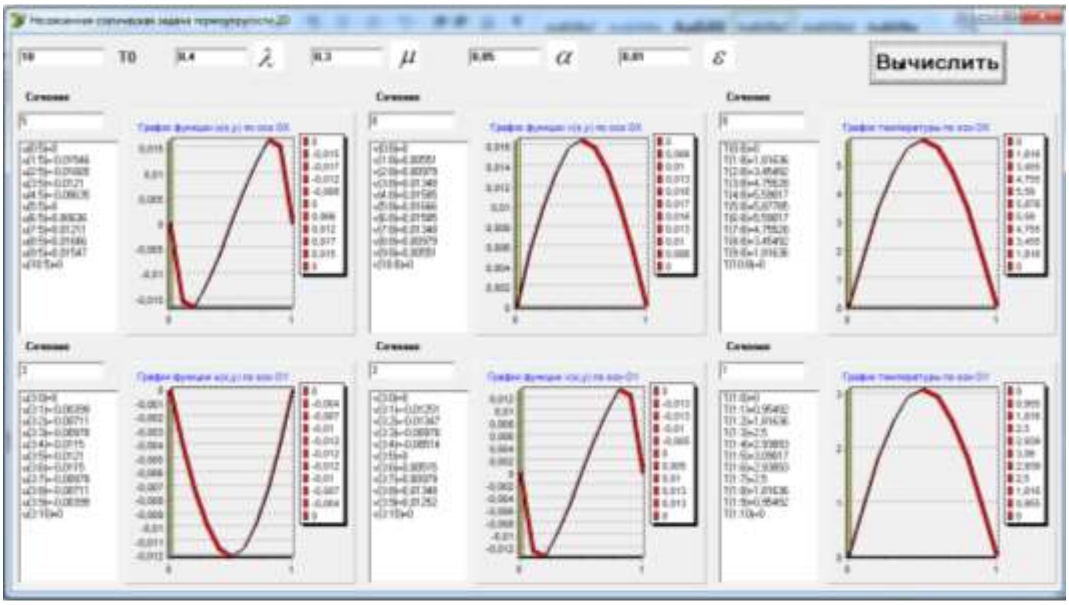
Asosiy formada «Teoriya uprugosti 2D» ni tanlaganimizda materialning texnik o‘zgarmaslarini va iterasiya aniqligini kiritish uchun imkoniyati tug‘iladi

Misol 3.2.2. Elastik taqribiy va aniq yechimlarni taqqoslash namoish etilgan



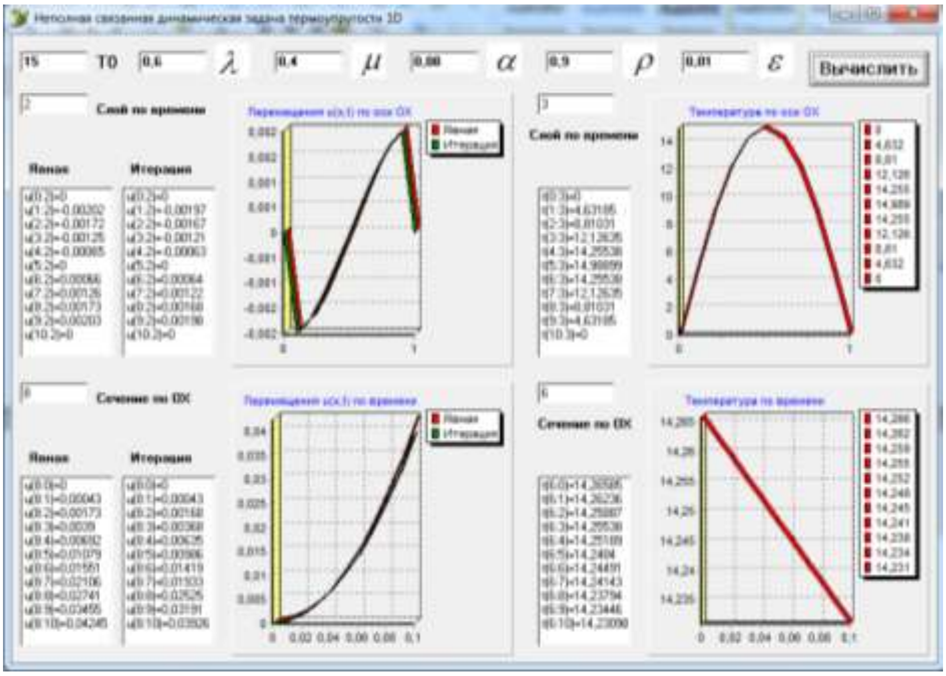
Rasm. 3.2.2.

Misol 3.2.3. Ikki o‘lchovli bog‘liqmas masalani sonli yechish



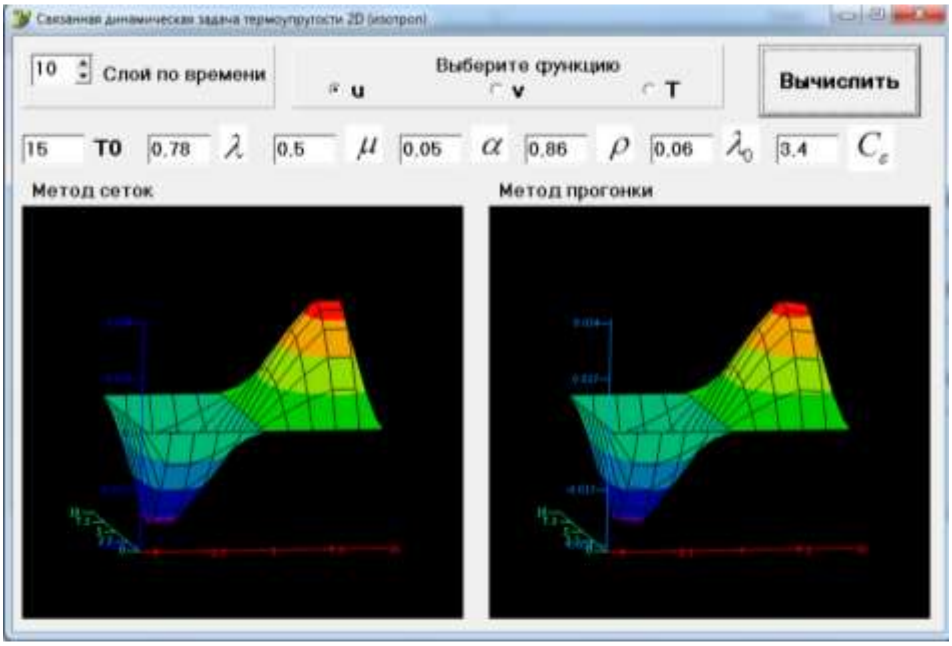
Rasm 3.2.3.

Misol 3.2.4. Bir o‘lchovli bog‘liq masalani ikki usulda sonli yechish



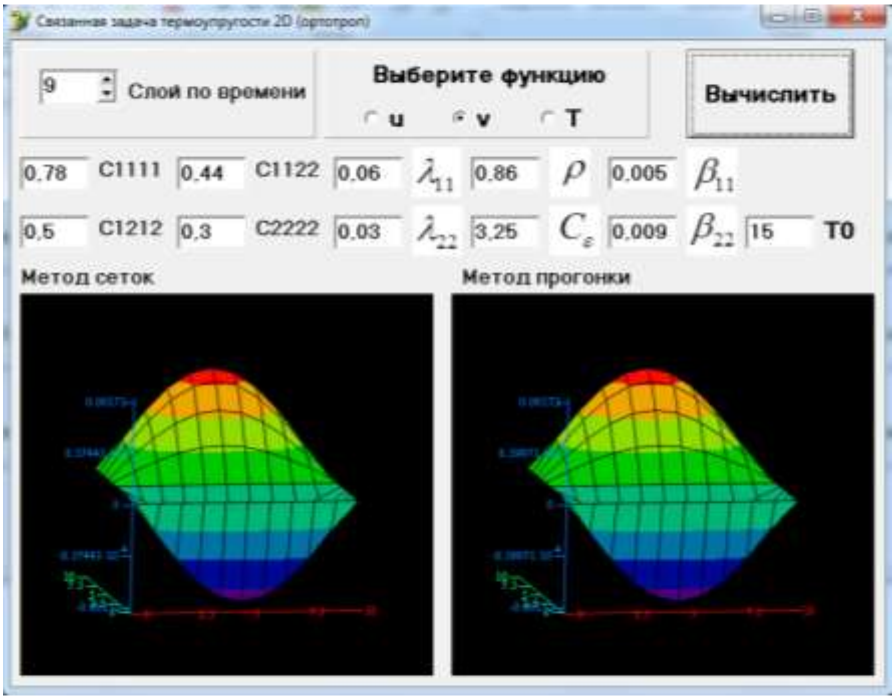
Rasm. 3.2.4.

Misol 3.2.5 Izotrop jismlar uchun ko‘chish komponentalari va temperaturaning taqsimlanishi



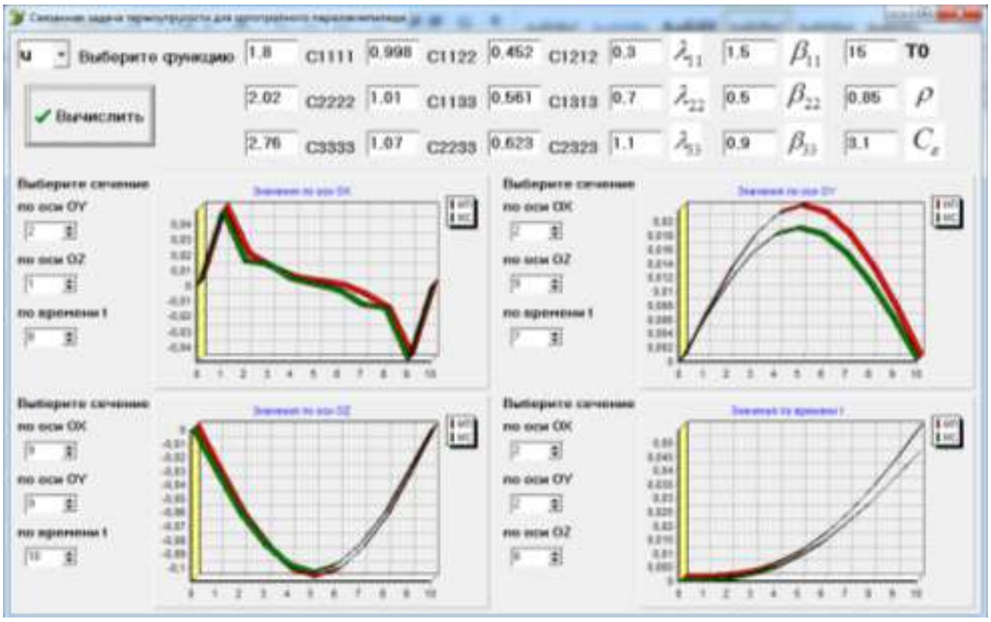
Rasm. 3.2.5.

Misol.3.2.6. Ortotrop jism xaqidagi ikki o‘lchovli masala natijalvari namoishi.



Rasm. 3.2.6.

Misol 3.2.7. Ortotrop parallelepiped xaqidagi bog‘liq termoelastik masalani sonli yechish



Rasm. 3.2.7.

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-MAVZU: Klassik mexanikaning zamonaviy holati. Nazariy mexanika va tutash muhitlar mexanikasining asosiy matematik modellarining tahlili. (4 soat)

Nazariy mexanika va tutash muxitlar mexanikasining matematik modellarini taxlili, ularning asosan oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar ko‘rinishida ifodalanishini ko‘rsatadi. Nazariy mexanikada, moddiy nuqta va nuqtalar sistemasi xolatlarini o‘rganish paytida, asosan boshlang‘ich shartli differensial tenglamalar va tenglamalar sistemalari paydo bo‘ladi. Ular odatda Koshi masalari deb ataladi va ularning analitik yechimlarini, faqat ba’zi bir xususiy xollardagina topish imkoni bo‘ladi. Ularni sonli yechish zarurati tug‘iladi. Shu nuqtai nazardan kelib chiqib, Koshi masalalarini sonli yechishning Eyler, Eyler-Koshi va Runge-Kutta kabi usullarni ko‘rib o‘tamiz.

Faraz qilaylik bizga 1-tartibli oddiy differensial tenglama uchun quyidagi Koshi masalasi qo‘yilgan bo‘lsin

$$\frac{du}{dx} = f(x,u) \qquad (1)$$

$$u(x_0) = u^0 \qquad (2)$$

(1-2) masalasini sonli yechishning Eyler, Eyler-Koshi va Runge-Kutta kabi usullari mavjud. (1-2) misol sifatida quyidagi bitta (I)yoki ikkita (II) tenglamalar sistemalarini qarash mumkin

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + y^2}{x - 1} \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{x}{y} \\ z' = \dfrac{1}{y - x} \\ y(0) = 1; \;\; z(0) = -1 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

(1)- masalani sonli yechish uchun x_0 nuqtadan boshlab h qadam bilan quyidagi tugun nuqtalarni aniqlab olamiz

$$x_i = x_0 + h\cdot i,\ i=\overline{0,N} \qquad (3)$$

(1)-tenglamaning chap tomonidagi hosilani o‘ng xosila bilan almashtirib quyidagi chekli ayirmali tenglamani topish mumkin

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{h} = f(x_i,u_i) \qquad (4)$$

Boshlang‘ich shartni (2) esa quyidagicha yozib olish mumkin

$$u_0 = u^0 \qquad (5)$$

U xolda, Eyler usulining asosiy ifodalari ushbu ko‘rinishga keladi:

$$\begin{aligned} &u_{i+1} = u_i + h\cdot f(x_i,u_i) \\ &u_0 = u^0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Misol tariqasida yuqorida keltirilgan (I) –masalani Eyler usuli yoradamida yechamiz. (6) ifodalardan foydanib (I) –masala uchun quyidagi ifodalarni yozib olish mumkin

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot\frac{x_i^2+y_i^2}{x_i-1},\quad i=\overline{0,N} \qquad (7)$$

$$y_0 = 2, \qquad (8)$$

$h=0{,}1$ bo‘lsin. U xolda $y_0=2,$ boshlang‘ich shartidan $i=0,$ da y_1 ni topish mumkin, yani

$$y_1 = y_0 + h\cdot\frac{x_0^2+y_0^2}{x_0-1}$$

$i=1$ da y_1 dan foydanib y_2 ni topish mumkin

$$y_2 = y_1 + h\cdot\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1-1}$$

qolgan nuqtalarda xam, xuddi yuqoridagidek y_i larni hisoblab olish mumkin.

(1-2) boshlang‘ich masalani Eyler-Koshi usuli bo‘yicha yechish uchun asosiy formulalarini topish uchun (1) tenglamani x_i, x_{i+1} oraliq bo‘yicha integrallaymiz, yani

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du}{ux}dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x,u\right)dx\ ,\quad x_i = x_0 + h\cdot i,\ \ i=\overline{0,N} \qquad (9)$$

va, trapesiya foromulasidan foydanab quyidagi ifodani topish mumkin

$$u\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{f_{i+1} + f_i}{2} \cdot h$$

yoki

$$u_{i+1} = u_i + h \cdot \frac{f\left(x_{i+1}, u_{i+1}\right) \cdot f\left(x_i, u_i\right)}{2} \qquad (10)$$

(10) ifodani, Eyler formulasi (6) ni inobatga olgan xolda, Eyler-Koshining asosiy foomulalarni topish mumkin

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i+1} = u_i + h \cdot f\left(x_i, u_i\right) \\ u_{i+1} = u_i + h \cdot \dfrac{f\left(x_{i+1}, \tilde{u}_{i+1}\right) + f\left(x_i, u_i\right)}{2} \\ u_0 = u^0 \end{cases} \qquad (11)$$

Eyler-Koshi asosiy ifodasi $i = 0$ da quyidagi ko‘rinishni oladi

$$\tilde{u}_1 = u_0 + h \cdot f\left(x_0, u_0\right)$$

$$u_1 = u_0 + h \cdot \frac{f\left(x_1, \tilde{u}_1\right) + f\left(x_0, u_0\right)}{2}$$

Eyler usulining approksimasiya xatoligi *O(h)*, Eyler-Koshi usuliniki esa *O(h^2).* Approksimasiya xatoligi *O(h^4)* bo‘lgan Runge-Kutta usulining asosiy formulalarini keltiramiz

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}\left[k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right] \qquad (12)$$

bu yerda

$$k_1^{(i)} = h \cdot f\left(x_i, u_i\right)$$

$$k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_4^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h, u_i + k_3^{(i)}\right), \quad x_i = a + h \cdot i, \; i = \overline{0, N}$$

2-tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalar va ularni sonli yechish usullari.

Mexanika va tutash mexanikasi matematik modellarini masalalarini yechish davomida 2-tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalar ko‘p xollarda yechish zarurati tug‘iladi. Shundan kelib chiqib, 2-tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalar sonli yechishning chekli ayirmali usuli va progonka usullarini ko‘rib o‘tamiz.

Ikkinchi darajali oddiy differensial tenglama quyidagi umumiy ko‘rinishda berilgan bo‘lsin

$$A(x)\frac{d^2u}{dx^2}+B(x)\frac{du}{dx}+C(x)u(x)=f(x) \qquad (a,b) \qquad (1)$$

chegaraviy shartlar bilan

$$\alpha_1 u(a)+\beta_1\frac{du(a)}{dx}=\gamma_1 \qquad x=a \qquad (2)$$

$$\alpha_2 u(b)+\beta_2\frac{du(b)}{dx}=\gamma_2 \qquad x=b \qquad (3)$$

[a, b] kesmani N kismga ajrataylik,

$$h=\frac{b-a}{N}, \qquad x_i=a+hi \qquad (4)$$

$$u(x_i)\equiv u_i$$

U xola chekli ayirmali tenglamani topish mumkin

$$A_i\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+B_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+C_iu_i=f_i \qquad i=1.,N-1 \qquad (5)$$

$$\alpha_1u_0+\beta_1\frac{u_1-u_0}{h}=\gamma_{01} \qquad i=0 \qquad (6)$$

$$\alpha_2u_N+\beta_2\frac{u_N-u_{N-1}}{h}=\gamma_{02} \qquad i=N \qquad (7)$$

(5-7) tenglamalari kuyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$\begin{cases} a_iu_{i+1}+b_iu_i+c_iu_{i-1}=f_i, & (8)\\ \alpha_{01}u_0+\beta_{01}u_1=\gamma_{01}, & (9)\\ \alpha_{02}u_{N-1}+\beta_{02}u_N=\gamma_{02}, & (10)\end{cases}$$

Bu yerda

$$a_i=\frac{A_i}{h^2}+\frac{B_i}{2h}, \qquad b_i=\frac{-2A_i}{h^2}+C_i, \qquad c_i=\frac{A_i}{h^2}-\frac{B_i}{2h} \qquad (11)$$

$$\alpha_{01}=\alpha_1-\frac{\beta_1}{h}, \quad \alpha_{02}=-\frac{\beta_2}{h}, \quad \beta_{01}=\frac{\beta_1}{h}, \quad \beta_{02}=\alpha_2+\frac{\beta_2}{h} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} a_iy_{i+1}+b_iy_i+c_iy_{i-1}=f_i, & (8)^1\\ \alpha_{01}y_0+\beta_{01}y_1=\gamma_{01}, & (9)^1\\ \alpha_{02}y_{N-1}+\beta_{02}y_N=\gamma_{02}, & (10)^1\end{cases}$$

(8) ni yechimini ushbu ko‘rinishda izlaymiz

$$y_{i-1}=X_iy_i+Z_i \qquad (13)$$

(13) ni (8) ga qo‘yamiz

$$a_i y_{i+1} + b_i y_i + c_i X_i y_i + c_i Z_i = f_i \ , \ i = 1, N-1 \qquad (14)$$

va y_i ga nisbatan yechib olamiz

$$y_i (b_i + c_i X_i) = f_i - a_i y_{i+1} - c_i Z_i$$
$$y_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i X_i} y_{i+1} + \frac{f_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i} \qquad (15)$$

(13) da *i* ni *i + 1* ga almashtiramiz

$$y_i = X_{i+1} y_{i+1} + Z_{i+1} \qquad (16)$$

(15) va (16) larni taqqoslab topish mumkin

$$X_{i+1} = -\frac{a_i}{b_i + c_i X_i}$$
$$Z_{i+1} = \frac{f_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i} \qquad (17)$$

(9)- ifodadan topamiz

$$y_0 = -\frac{\beta_{01}}{\alpha_{01}} y_1 + \frac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}} \qquad (18)$$

(13) dan i = 1 xolda topamiz

$$y_0 = X_1 y_1 + Z_1 \qquad (19)$$

(18) bilan taqqoslab topamiz

$$X_1 = -\frac{\beta_{01}}{\alpha_{01}}, \qquad Z_1 = \frac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}} \qquad (20)$$

(13) ni $i=N$ uchun yozib olamiz

$$y_{N-1} = X_N y_N + Z_N \qquad (21)$$

va (10) -ifodaga qo‘yamiz

$$\alpha_{02} X_N y_N + \alpha_{02} Z_N + \beta_{02} y_N = \gamma_{02}$$
$$y_N (\beta_{02} + \alpha_{02} X_N) = \gamma_{02} - \alpha_{02} Z_N \qquad (22)$$

Oxirgi ifodadan topamiz

$$y_N = \frac{\gamma_{02} - \alpha_{02} Z_N}{\beta_{02} + \alpha_{02} X_N} \qquad (23)$$

Progonka usulini algoritmi:

1). Koeffisiyentlar topiladi

$$\alpha_{01}, \beta_{01}, \gamma_{01}$$
$$\alpha_{02}, \beta_{02}, \gamma_{02}$$

2). Shart tekshiriladi

$$|\alpha_{01}| > |\beta_{01}| \qquad (24)$$

U xolda o‘ng rprogonka usuligi ega bo‘lamizi:

I). $X_1 = -\dfrac{\beta_{01}}{\alpha_{01}}, \; Z_1 = \dfrac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}}$

II). $X_{i+1} = -\dfrac{a_i}{b_i + c_i X_i}, \; Z_{i+1} = \dfrac{f_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i}, \quad i = 1..N-1$

III). $y_N = \dfrac{\gamma_{02} - \alpha_{02} Z_N}{\beta_{02} + \alpha_{02} X_N}$

IV). $y_{i-1} = X_i \, y_i + Z_i \,, \quad i = N, N-1, ...1$

Quyidagi shart bajarilsa

$$|\alpha_{02}| \le |\beta_{02}| \qquad (25)$$

Chap progonka usulini algoritmini xosil qilish mumkini:

I). $X_{N-1} = -\dfrac{\alpha_{02}}{\beta_{02}}, \; Z_{N-1} = \dfrac{\gamma_{02}}{\beta_{02}}$

II). $X_{i-1} = -\dfrac{c_i}{b_i + a_i X_i}, \quad Z_{i-1} = \dfrac{f_i - a_i Z_i}{b_i + a_i X_i}, \quad i = N-1,..1$

III). $y_0 = \dfrac{\gamma_{01} - \alpha_{01} Z_0}{\alpha_{01} + \beta_{02} X_0}$

IV). $y_{i+1} = X_i \, y_i + Z_i \,, \quad i = 0,.., N-1$

Nazorat savollari

1. Boshlang‘ich shartli chegaraviy masala-Koshi masalasi
2. Eyler usuli
3. Eyler-Koshi usuli
4. Runge Kutta usuli
5. 2-tartibdi oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masala
6. Chekli ayirmali tenglama
7. 3 diagonalli matrisa tenlamalar sistemasi
8. Progonka usuli, ung va chap xollari
9. Progonka usulini yaqinlashish sharti

2-MAVZU: Chekli ayirmali usul. Chekli va chegaraviy elementlar usullari.

2.1 Chekli ayirmali usul

Odatda, tutash muxitlar mexanikasida qattiq jism, suyuqlik va gazlarda kechadigan jaroyonlar xususiy hosilali differensial tenglamalar ifodalanuvchi chegaraviy masalalarga keltiriladi. Ular giperbolik, elliptik va parabolik tipga tegishli bo‘ladi. Ularni sonli yechish usullari xam, qaysi tipga tegishliligiga qarab turlicha bo‘ladi. Bu bo‘limda, xususiy hosilali differensial tenglamalarni sonli yechishning chekli ayirmali usulini elastiklik nazariyasining dinamik chegaraviy masalasi misolida ko‘rib o‘tamiz: ma’lumki, mazkur masala xarakat tenglamasidan

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (1)$$

umumlashgan Guk qonunidan

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad (2)$$

Koshi munosabati

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right), \qquad (3)$$

mos ravishda, boshlang‘ich

$$u_i\big|_{t=t_0} = \phi_i, \quad \dot{u}_i\big|_{t=t_0} = \psi_i \qquad (4)$$

va, chegaraviy shartlardan

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0 \quad , \qquad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^0 \qquad (5)$$

tashkil topadi. Bu yerda σ_{ij} – kuchlanish tenzori, ε_{ij} – deformasiya tenzori, u_i – ko‘chishvektori. X_i – xajmiy kuch,. C_{ijkl} – 4-ranli tenzor, ρ – zichlik.
(2) ifodani (2) tenglamaga qo‘yib quyidagi ifodani topish mumkin

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \tag{6}$$

Oxirgi ifodani e’tiborga olgan xolda, anizotrop jismlar uchun elastiklik nazariyasining ko‘chishlarga nisbatan yozilgan dinamik masalasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\sum_{j,k,l,=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}) + \rho X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad x_i \in V \tag{7}$$

boshlang‘ich shartlar

$$u_i\big|_{t=t_0} = \phi_i \ , \ \dot{u}_i\big|_{t=t_0} = \psi_i \ , \tag{8}$$

chegaraviy shartlar

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^o, \qquad x_i \in \Sigma_1 \tag{9}$$

$$\sum_{k,l,j=1}^{3} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j \Bigg|_{\Sigma_2} = S_i^0 \quad , \quad x_i \in \Sigma_2 \ . \tag{10}$$

(7) tenglamani komponentlarga nisbatan kuyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\begin{cases} C_{1111}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{1212}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{1313}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{1122} + C_{1212})\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (C_{1133} + C_{1313})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \rho X_1 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ C_{1212}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{2222}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{2323}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{2211} + C_{1212})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (C_{2233} + C_{2323})\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \rho X_2 = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ C_{1313}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{2323}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{3333}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{3311} + C_{1313})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (C_{3322} + C_{2323})\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \rho X_3 = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \tag{11}$$

Bir o‘lchovli xolda (11) tenglama ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$C_{1111}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho X_1 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{12}$$

va quyidagi boshlang‘ich

$$u\Big|_{t=t_0}=\varphi\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0}=\psi \tag{13}$$

va chegaraviy shartlar

$$u_i\Big|_{\Sigma_1}=u_i^o\,,\quad C_{1111}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=S \tag{14}$$

asosida sterjenda to‘lqin tarqalish jaroyonini ifodalaydi.

(12)- tenglamani zichlikka bo‘lib

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{C_{1111}}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+X_1/\rho \tag{15}$$

quyidagi belgilashlarni kiritsak

$$a^2=\frac{C_{1111}}{\rho},\quad q=X_1/\rho$$

(12)– tenglamayb quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x,t),\quad 0\le x\le l,\ 0\le t\le T \tag{16}$$

vos ravishda quyidagi boshlang‘ich

$$\begin{aligned} &\mathrm{u}(x,t)\big|_{t=0}=f(x)\\ &\frac{\partial u}{\partial t}\,\big|_{t=0}=\Phi(x)\end{aligned} \tag{17}$$

da chegaraviy shartlar bilan

$$\begin{aligned} &\mathrm{u}(x,t)\big|_{x=0}=\varphi(t)\\ &\mathrm{u}(x,t)\big|_{x=l}=\psi(t)\end{aligned} \tag{18}$$

Oshkor chekli ayirmali sxema

Berilgan kesma l ni N ta bo‘lakka bo‘lamiz. Berilgan T vaqtni M ga bulamiz. U xolda tomonlari OX va OU o‘qlariga tayangan to‘rtburchak sohani qarashimiz mumkin.

$$h=\frac{l}{N},\quad \tau=\frac{T}{M} \tag{19}$$

Qadamlardan foydalangan xolda tugun nuqtalarning koordinatalari kuydagicha aniqlanadi

$$\begin{aligned} &x_i=a+h\cdot i,\ i=\overline{0,N}\\ &t_j=\tau\cdot j,\ j=\overline{0,M}\end{aligned} \tag{20}$$

Bu nuktalarda aniqlangan funksiyani $u(x,t)$ ni tugun nuktalarga nisbatan quyidagi ko‘rinishni oladi

$$u(x_i,t_j)=u_{ij}=u_i^j \qquad (21)$$

Ma’lumki tugun nuqtlarga nisbatan $u(x,t)$ funksiyadan olingan hosilalar kuyidanicha

$$\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2}=a^2\,\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}+q_i^j,\;\; i=\overline{1,N-1},\;\; j=\overline{1,M-1} \qquad (22)$$

$$u_i^0=f_i,\;\; i=\overline{0,N} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned}&\frac{u_i^1-u_i^0}{\tau}=\Phi_i,\;\; i=\overline{0,N} \quad \text{ёки}\\ &u_i^1=u_i^0+\tau\Phi_i=f_i+\tau\Phi_i\end{aligned} \qquad (24)$$

$$\begin{aligned}&u_0^j=\phi_1^j,\;\; j=\overline{0,M-1}\\ &u_N^j=\phi_2^j,\;\; j=\overline{0,M-1}\end{aligned} \qquad (25)$$

$$\begin{aligned}&u_i^{j+1}=\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2(u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j)+\tau^2q_i^j+2u_i^j-u_i^{j-1},\\ &\qquad\qquad i=\overline{1,N-1},\;\; j=\overline{0,M-1}\end{aligned} \qquad (26)$$

$$\begin{aligned}&u_i^0=f_i, && i=\overline{0,N}\\ &u_i^1=f_i+\tau\Phi_i, && i=\overline{0,N}\end{aligned} \qquad (27)$$

$$u_0^j=\varphi^j,\quad u_N^j=\psi^j,\qquad j=\overline{0,M-1} \qquad (28)$$

(26) – rekurrent formula. (22) chekli ayirmali sxema oshkor sxema deb ataladi. Uning shartli yaqinlashish sharti quyidagidan iborat

$$\frac{\tau^2}{h^2}<<1$$

Oshkormas sxema**:** (22) ifoda yordamida quydagi oshkormas chekli ayirmali sxemani yozib olish mumkin

$$\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2}=a^2\,\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+q_i^j,\;\; i=\overline{1,N-1},\;\; j=\overline{1,M-1} \qquad (27)$$

$$\begin{aligned}&u_i^0=f_i, && i=\overline{0,N}\\ &u_i^1=f_i+\tau\Phi_i, && i=\overline{0,N}\end{aligned} \qquad (28)$$

$$u_0^j = \varphi^j, \quad u_N^j = \psi^j, \quad j = \overline{0, M-1} \tag{29}$$

(27) sxemani shakl almashtirishlardan keyin quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$\begin{cases} a_i u_{i+1}^{j+1} + b_i u_i^{j+1} + c_i u_{i-1}^{j+1} = \tilde{f}_i, \; i = 1..N-1, \; j = 1..M-1 \\ \alpha_{01} u_0^j + \beta_{01} u_1^j = \gamma_{01}^j, \; i = 0 \\ \alpha_{02} u_{N-1}^j + \beta_{02} u_N^j = \gamma_{02}^j, \; i = N \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{gathered} a_i = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}, \; b_i = -\frac{2\tau^2 a^2}{h^2} - 1, \; c_i = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}, \; \tilde{f}_i = u_i^{j-1} - 2u_i^j - \tau^2 q_i^j \\ \alpha_{01} = 1, \; \beta_{01} = 0, \; \gamma_{01}^j = \varphi^j \\ \alpha_{02} = 0, \; \beta_{02} = 1, \; \gamma_{02}^j = \psi^j \end{gathered} \tag{31}$$

Quyida (30-31) masalaning progonka usuli asosida yechish algoritmi va unga dastur keltirilgan:

1) $u[\mathrm{N},\mathrm{M}], a[\mathrm{N}], b[\mathrm{N}], c[\mathrm{N}], x[\mathrm{N}], t[\mathrm{M}]$
$h, \tau, l, T, N, M, i, j$

5) $X_{i+1}^{j+1} = -\dfrac{a_i}{b_i + c_i X_i}, \; Z_{i+1}^{j+1} = \dfrac{f_i^j - c_i Z_i}{b_i + c_i Z_i^j}, \quad i = 1..N-1$

6) $u_N^j = \dfrac{\gamma_{02} - \alpha_{02} Z_N^j}{\beta_{02} + \alpha_{02} X_N^j}$

7) $u_{N-1}^j = X_i^j u_i^j + Z_i^j, \quad i = N, N-1, ...1$

Keltirilgan algortm asosida C++ tilida yozilgan dastur quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

2) Boshlang‘ich va chegaraviy shartlar.
3) $\alpha, \beta, ...$ lar kiritiladi
4) j – bo‘yicha sikl
$X_1^j = -\dfrac{\beta_{01}}{\alpha_{01}}, \; Z_1^j = \dfrac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}}$

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
main()
{
   float u[30][30],x[30],t[30];
   //float Bx0[30][30], By0[30][30], Tau0[30][30];
   float h, tau, a,pi;

   h=0.1; tau=0.001;
```

```
a=1; pi=3.14;
int n, m, i,j;
 n=10; m=5;

                                        for (int i=0; i<=n; i++)
                                        {
                                        x[i]=h*i;
                                        }

                                        for (int j=0; j<=m; j++)
                                        {
                                        t[i]=tau*j;
                                        }
                                        //  Boshlangich shartlar
                                        for (int i=1; i<=n-1; i++)
                                                {
                                                        u[i][0]=0;    //x[i]*(x[i]+1);
                                                        u[i][1]=u[i][0]+tau*pi*sin(pi*x[i]);
                                                }

                                // chegaraviy shart
                                for (int j=0; j<=n; j++)
                                {
                                        u[0][j]=0;                      u[n][j]=0; //2*(t[j]+1);
                                }

                for (int j=1; j<=m-1; j++)
                {
                        for (int i=1; i<=n-1; i++)
                        {

    u[i][j+1]=(a*tau/h)*(a*tau/h)*(u[i+1][j]-2*u[i][j]+u[i-1][j])+2*u[i][j]-u[i][j-1];
                        }
                }

                                                // pechatga chiqarish
        for (int j=0; j<=m; j++)
                {
                        for (int i=0; i<=n; i++)
                        {
                                cout << setprecision (3) << u[i][j] << " ";
                        }
                        cout << endl;
                }
         }
```

2.2. Chekli elementlar usuli

Tutash muxitlar mexanikasida qattiq jism, suyuqlik va gazlarda kechadigan jaroyonlarning matematik modellarni sonli yechishda, xozirgi kunda eng muxim va taniqli usullaridan biri chekli elementlar usulidir. Chekli elementlar usuli xozirgi kunda juda keng tarqalgan bo‘lib, amaliy masalarni xal etishda muxim axamiyatga. Uning asosida qator Ansys, Nastran, Cosmosm, Abaqus, FEM, Lira kabi dasturiy maxsulotlar yaratilgan. Biz bu bo‘limda, yuqorida sanab o‘tilgan dasturiy ma’sulotlarning asosini tashkil etuvchi chekli elementlar usuli bilan tanishib o‘tamiz.

Dekart koordinatalar tizimida uch o‘lchovli izotrop elastik jism tashqi kuchlar ta’sirida turg‘un xolatda bo‘lsin. Muvozanat tenglamarini va yuzada berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi siljishlarni aniqlash kerak bo‘lsin. Bu masalani yechish uchun unga teng kuchli bo‘lgan variasion masalaning qo‘yilishini ko‘ramiz. U jismning to‘liq potensial energiyasini minimizasiyalash (Lagranj prinsipi)ga asoslanadi va masalani yechish uchun taqribiy usullarni qo‘llash imkonini beradi. Ulardan biri bo‘lib chekli elementlar usuli xisoblanadi.

Masalaning variasion ko‘rinishi qo‘yidagicha tasvirlanishi mumkin

$$\int_V \delta\{\sigma^T\}\{\varepsilon\}dV - \int_S \delta\{U\}^T\{P\}dS = 0 \qquad (1)$$

bu yerda

V-jismning hajmi;

S-jismning yuzasi;

$\{U\} = \{u, v, w\}$ - siljish vektorining komponentlari;

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \ \varepsilon_{yy}, \ \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$ - deformasiya vektorining komponentlari;

$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ – ko‘chish vektorining komponentlari.

Guk qonuniga asosan kuchlanish va deformasiya vektorlar komponentlari qo‘yidagi munosabat bilan bog‘langan:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \qquad (2)$$

bu yerda $[D]$-jismning elastiklik matrisasi.

Izotrop jismning qattiqlik matrisasi atigi ikkita bog‘lanmagan parametrga ega va uning ko‘rinishi quyidagicha:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

bunda

μ – Puasson koeffisiyenti;

E – elastiklik moduli;

$G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ - siljish moduli.

Yuqoridagi barcha xollarda $[D]^{-1}-$ matrisaning determinanti nolga teng bo‘lmaganligi uchun uning $[D]-$ matrisasi albatta mavjud va qo‘yidagi ko‘rinishlarga ega:

$$\begin{bmatrix} \frac{E(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & \frac{E(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & \frac{E(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (4)$$

Deformasiya vektori $\{\varepsilon\}$ o‘z navbatida siljish vektori bilan qo‘yidagi munosabat bilan bog‘langan:

$$\{\varepsilon\} = [B]\cdot\{U\} \quad (5)$$

Bu yerda $[B]$- gradiyentlar matrisasi bo‘lib, qo‘yidagi ko‘rinishga ega:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Qo‘yilgan masala chekli elementlar usuli bilan yechiladi. Bu usulda jism egallab to‘rgan soha kichik xajmga ega bo‘lgan chekli elementlarga bo‘laklanadi. U, V, W - siljishlarning approksimasiya funksiyalari har bir chekli elementlar uchun keltiriladi. Asosiy no’malumlar sifatida tugun nuqtalar siljishi olinadi, chunki kichik soha ichidagi siljishlarning approksimasiyasi uchun sodda funksiyalarni ishlatish imkoni bor.

Ko‘rilayotgan jismning xususiyatlarini o‘rganish chekli o‘lchovlarga ega bo‘lgan elementlarning xususiyatlarini o‘rganishdan boshlanadi.

e-chi chekli elementining siljish vektori komponentalari qo‘yidagi ko‘rinishda tasvirlanadi:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = [I\ N_1, \quad I\ N_2, ..., I\ N_n]\{g\}^e \tag{7}$$

bu yerda

N_i- chekli elementning forma (ko‘rinish) funksiyasi;

n – chekli elementdagi tugun nuqtalar soni;

I –o‘lchami 3x3 bo‘lgan birlik matrisa;

$\{g\}^e = \{U_1\ V_1\ W_1, \quad U_2\ V_2\ W_2, \ldots, U_n\ V_n\ W_n\}$ – chekli element tugun nuqtalarining siljish vektori.

Xar bir chekli element uchun deformasiya vektori (1) va kuchlanish vektori o‘zaro qo‘yidagicha bog‘lanadi:

$$\{\varepsilon\}^e = [B]\{g\}^e \tag{8}$$

$$\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e \tag{9}$$

bu yerda $[B]$- gradiyentlar matrisasi bo‘lib, u qo‘yidagi ko‘rinishga ega:

$[B] = [B_1, B_2, \ldots, B_n]$ va

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Xar bir chekli element uchun Lagranj variasiya tenglamasini qo‘yidagi ko‘rinishda tasvirlash mumkin:

$$\left(\int_{V^\lambda} [B]^T [D][B] dV \right) \{g\}^e - \int_{S^e} [N]^T \{P\} dS = 0 \tag{11}$$

Qo‘idagi ifodalashlarni kiritamiz:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B]^T [D][B]\, dV \tag{12}$$

va

$$\{F\}^e = \int_{S^e} [N]^T \{P\} dS \tag{13}$$

U holda yuqoridagi (7) tenglamaning ko‘rinishi qo‘yidagicha bo‘ladi:

$$[K]^e \{g\} - \{F\}^e = 0 \tag{14}$$

bu yerda

$[K]^e$ - **e-**chi chekli elementning qattiqlik matrisasi;

$\{F\}^e$ -tugun nuqtalarga keltirilgan kuchlar vektori.

Hal qiluvchi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini qurish jarayonini ko‘rib chiqiladi. Jismning chekli-elementli modelidagi har bir tugun nuqta bir necha chekli elementning tarkibida ishtirok etganligi sababli, shu tugun nuqtaning muvozanat holatini tasvirlovchi tenglamaning satri shu chekli elementlar mos koeffisiyentlari yig‘indisini o‘z ichiga oladi. Misol uchun ***i***-chi tugun nuqtaga mos keluvchi qattiqlik matrisasi va unga mos keluvchi tugun nuqtalaridagi tashqi kuchlar vektori qo‘yidagi munosabat bilan aniqlanadi:

$$\left(\sum_e [K_{i1}]\right)^e \{g_1\} + \left(\sum_e [K_{i2}]\right)^e \{g_2\} + \text{K} + \left(\sum_e [K_{im}]\right)^e \{g_m\} - \sum_e \{F_i\}^e = 0 \tag{15}$$

bu yerda $\sum_e \{F_i\}^e$ - *i*-chi tugun nuqtaga keltirilgan tashqi kuchlar komponentalarining yig‘indisi.

Tabiiyki bu yig‘indiga faqat *i*-chi tugun nuqtani o‘z tarkibiga olgan chekli elementlar hissa qo‘shadi.

Barcha diskret modeldagi tugun nuqtalar uchun (10) ko‘rinishdagi tenglamalarni birlashtirganda boshlang‘ich jism diskret modelining umumiy tenglamalar sistemasi qo‘yidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$[K]\{G\} - \{F\} = 0 \tag{16}$$

bu yerda $[K]$-qattiqlik matrisasining global sistemasi;

$\{G\} = \{g_1, g_2, \text{K}, g_m\} -$ jami chekli elementlarning tugun nuqtalari siljishlarining umumiy vektori;

$\{F\} -$ har bir tugun nuqtalarga keltirilgan kuchlar yig‘indisining vektori;

m - jismni xosil qiluvchi chekli elementlarning umumiy soni.

2.3. Chegaraviy elementlar usuli.

Tutash muxitlar mexanikasi matematik modellarini sonli yechishga mo‘ljallangan usullardan biri chegaraviy integral tenglamalar usuli(CHITU) yoki chegaraviy elementlar usulidir. CHITU ning asosiy mohiyati, sohada qaralayotgan masalan, sohani chegarasi bo‘yicha aniqlangan integral tenglamaga keltirishdan va uni yechishdan iborat. Yuqorida, bu usul bir o‘lchovli chegaraviy masala misolida bayon etilgan edi. Bu bo‘limda, biz chegaraviy elementlar usulini ikki o‘lchovli Puasson va Laplas tenglamalari misolida ko‘rib o‘tamiz.

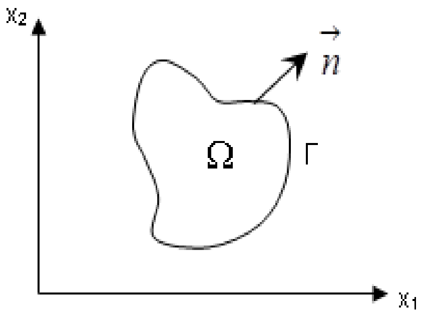
Bizga Laplas tenglamasi uchun chegaraviy masala qo‘yilgan bo‘lsin:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

$$u\Big|_{\Gamma_1} = \bar{u}, \; x \in \Gamma_1 \tag{2}$$

$$q\Big|_{\Gamma_2} \equiv \frac{du}{dh}\Big|_{\Gamma_2} = \bar{q}, \quad x \in \Gamma_2 \tag{3}$$

2-ma’ruzada ko‘rilgan o‘rtalashga qoldiqlar usuliga asosan (1-3) chegaraviy masala quyidagi ifodaga ekvivalent



$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w ds - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{dw}{dn} ds \tag{4}$$

Ikki marta bo‘laklab integrallab topish mumkin:

$$\int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot u d\Omega = \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{dw}{dn} ds + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_1} q w ds - \int_{\Gamma 2} \bar{q} w ds \tag{5}$$

yoki umumiy xolda quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$\int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot u d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{dw}{dn} ds - \int_{\Gamma} q w ds \tag{6}$$

bu yerda

$$q = \begin{cases} q, & x \in \Gamma_1 \\ \bar{q}, & x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} \bar{u}, & x \in \Gamma_1 \\ u, & x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Chegaraviy integral tenglamani hosil qilish uchun og‘irlik funksiyasi w quyidagi tenglamani yechishdan topamiz

$$\Delta^2 w = -\delta(x - \xi_i), \qquad \xi_i \in \Omega \tag{7}$$

Bu yerda $\delta(x - \xi_i)$-Dirak funksiyasi

Ma’lumki, (7) ni qanoatlantiruvchi yechim quyidagi ko‘rinishga ega

$$w^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{\left(x_i - \xi^{(1)}\right)^2 + \left(x_2 - \xi^{(2)}\right)^2} \tag{8}$$

bu yerda $\xi^{(1)}$ va $\xi^{(2)}$ - ξ_i tugun nuqtaning komponentalari.

(8) ni (6) tenglamaga qo‘yib topamiz

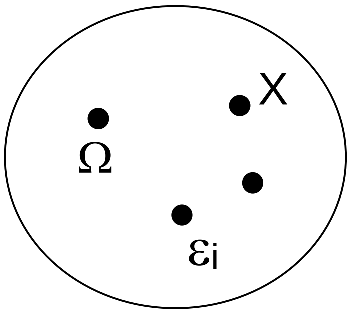
$$u(\xi) + \int_\Gamma u(x) \frac{dw\ (\xi, x)}{dn} ds(x) = \int_\Gamma q(x) w(\xi, x) ds(x) \tag{9}$$

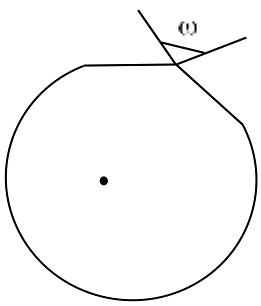
(9) asosiy integral ifoda bo‘lib, uning yordamida osnovnoye chegaraviy integral tenglamani topish mumkin. $\xi \to x$ da (9) tenglamadan topamiz

$$\mathrm{C}(\xi) u(\xi) + \int_\Gamma u(x) \frac{dw\ (\xi, x)}{dn} ds(x) = \int_\Gamma q(x) w(\xi, x) ds(x) \tag{10}$$

bu yerda

$$C(\xi) = 1 - \frac{\omega}{2\pi},$$





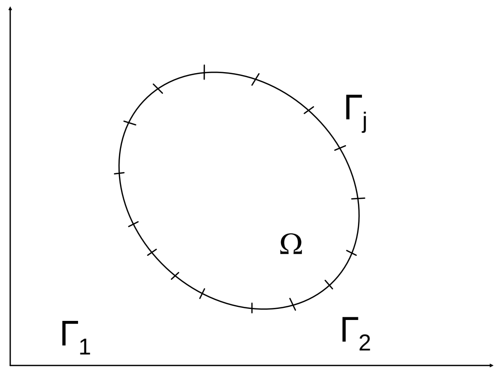
Agar sohaning chegarasi silliq bo‘lsa, $\omega = \pi$, nuqta sohaning ichida esa $\omega = 0$. Agar sohaning chegarasi siniq nuqtalarga ega bo‘lsa, ω siniq chiziqqa o‘tkazilgan normallar orasidagi burchakni ifodalaydi. Agar chegara silliq bo‘lib, ξ_i chiziqning ustida bo‘lsa, $\omega = \pi$ bo‘lib $C(\xi_i) = \frac{1}{2}$.

Chegaraviy integral tenglamadan chekli ayirmali tenlamalarga o‘tish uchun, soha chegarasini N bo‘lakka-chegaraviy elementlarga bo‘lamiz.

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} u(x) \frac{dw\ (\xi_i, x)}{dn} ds(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} q(x) w(\xi_i, x) ds(x) \tag{11}$$

Xar bir chegaraviy Γ_j elementda u ,q larni o‘zgarmas deb va segmentning o‘rtasidagi qiymatga teng deb faraz qilamiz. U xolda $\omega = \pi$ ekanligini inlbatga olib (11) quyidagicha yozib olish mumkin

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^{N} u_j \int_{\Gamma_j} \frac{dw\ (\xi_i, x)}{dn} ds(x) = \sum_{j=1}^{N} q_j \int_{\Gamma_j} w(\xi_i, x) ds(x) \tag{12}$$



(12)- ifodani quyidagicha yozib olish mumkin

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^{N} u_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^{N} q_j G_{ij} \tag{13}$$

bu yerda

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{dw}{dx} d\Gamma, \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} w d\Gamma$$

Quyidagi ifodadan foydalanib

$$\frac{1}{2} u_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} u_j \delta_{ij}$$

(13) tenglamani boshqa ko‘rinishga keltirish mumkin

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j \tag{14}$$

bu yerda

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}, & i = j \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasida koeffisiyentlar sifatida qatnashayetgan integorallarni Gauss tipidagi uvadratur formulalar orqali hisoblash mumkin.

(14) ning yechimlari bo‘yicha, (10) formuladan foydalangan xolda, no’malum funksiya *u(x)* ning ixtiyoriy ichki nuqtadagi qiymati quyidagi ifoda orqali topish mumkin

$$u_i = \int_\Gamma q(x)w(\xi,x)ds(x) - \int_\Gamma u(x)\frac{dw\ (\xi,x)}{dn}ds(x) \qquad (15)$$

yoki diskret xoldagi quyidagi ifodani topamiz

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^{N} u_j \hat{H}_{ij} \qquad (16)$$

Nazorat savollari

1. Chekli ayirmali usul
2. Dinamik masalanipg kuyilishi
3. Tor tebranishi tenglamasi,
4. Oshkor va oshkormas sxemalar
5. Chekli ayirmali tenglama shabloni,
6. Rekurrent formula,
7. Progonka usuli,
8. Chekli elementlar usuli,
9. Chegaraviy elementlar usuli
10. Chekli elementlar ko‘rinishlari
11. O‘rtalashgan qoldiqlar usuli,
12. Fundamental yechim,
13. Bo‘laklab integrallash,
14. Chegaraviy integral tenglama,

3-Mavzu: Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari, xamda amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish.

Zamonaviy sonli usullar, dasturlash texnologiyalari va vositalari

Bu bo‘limda, avvalgi darslarimizda qaralgan matematik modellar asosida, zamonaviy sonli usullardan va dasturlash texnologiyalaridan foydalangan xolda yaratilgan dasturiy ta’minot asosida konkret chegaraviy masalalar sonli yechilgan va olingan natijalar taxlil etilgan. Chiziqsiz deformasiyalanish jaroyoni temperaturani hisobga olgan xolda ikki model tenglamalar, aynan deformasion va oqim nazariyalari asosida modellashtirilgan. Masalalarni diskret xollari chekli-ayirmali usul yordamida oshkor va oshkormas sxemalar ko‘rinishida ifodalangan. Chekli- ayirmali tenglamalarni yechish, oshkor sxema paytida rekurrent formulalar bo‘yicha hisoblashga, oshkormas sxemalar xolida esa, yo‘nalishlar bo‘yicha o‘zgaruvchi progonka usuli yordamida qo‘llab yechishga keltirilgan. Dasturiy ta’minot obyektga yo‘naltirilgan dasturlash texnologiyalari asosida C# dasturlash tilida yaratilgan va natijalarni vizuallashtirish MATLAB amaliy paketi bilan integrallashgan xolda amalga oshirilgan.

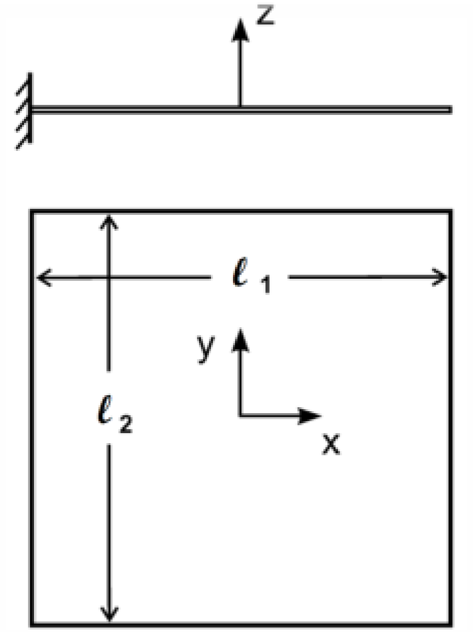
Deformasion nazariya asosida to‘g‘ri to‘rtburchak uchun bog‘liq termoplastik chegaraviy masala quyidagi boshlang‘ich

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = \sin(\pi y)\cdot\sin(\pi x), \qquad v(x,y,t)\big|_{t=0} = \sin(\pi y)\cdot\sin(\pi x),$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad T(x,y,t)\big|_{t=0} = T_0; \tag{3.1.1}$$

va chegaraviy shartlarda

$$\begin{gathered}
u(x,y,t)\big|_{x=0} = 0, \qquad v(x,y,t)\big|_{x=0} = 0,\\
u(x,y,t)\big|_{x=l_1} = 0, \qquad v(x,y,t)\big|_{x=l_1} = 0,\\
u(x,y,t)\big|_{y=0} = 0, \qquad v(x,y,t)\big|_{y=0} = 0,\\
u(x,y,t)\big|_{y=l_2} = 0, \qquad v(x,y,t)\big|_{y=l_2} = 0,\\
T(x,y,t)\big|_{x=0} = T_0, \qquad T(x,y,t)\big|_{x=l_1} = T_0,\\
T(x,y,t)\big|_{y=0} = T_0, \qquad T(x,y,t)\big|_{y=l_2} = T_0,
\end{gathered} \tag{3.1.2}$$



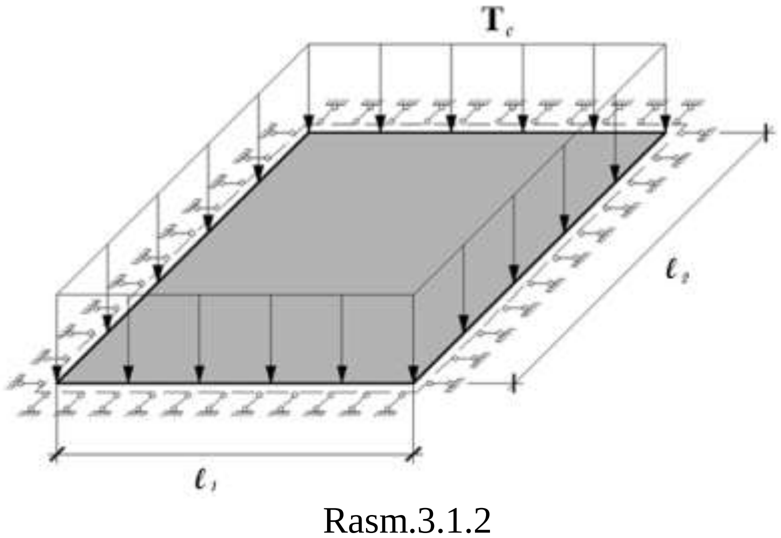
Rasm.3.1.1

sonli yechilgan. O‘zgarmaslar quyidagicha tanlangan

$$\lambda = 1.2, \quad \lambda_0 = 0.8, \quad \alpha = 0.05, \quad \mu = 0.5, \quad \rho = 0.9, \quad C_\varepsilon = 3.5,$$

$$T_0 = 90, \quad n = 10, \quad h = 0.1, \quad \tau = 0.01, \quad l_i = 1, \; i = 1,2.$$

Boshlang‘ich va chegaraviy shartlarga asosan, boshlang‘ich temperaturasi $T_0 = 90$ bo‘lgan va tomonlari bo‘yicha mahkamlangan (zashemlenniy) to‘g‘ri to‘rtburchak, $t=0$, vaqt momentida ko‘chish komponentlari qubba ko‘rinishidagi funksiya berilgan. Masala ikki plastiklik nazariyalari va ikki- progonka usuli va rekurrent formulalar yordamida sonli yechilgan.



Rasm.3.1.2

Progonka usulida olingan u(x, y, t_n) ko‘chishning qiymatlar Jadval 3.1.1a.

y / x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	0	0,1387	0,2120	0,2570	0,2748	0,2659	0,2309	0,1764	0,1030	0,0304	0
0,02	0	0,2061	0,3502	0,4510	0,5043	0,5089	0,4644	0,3785	0,2519	0,1083	0
0,03	0	0,2486	0,4503	0,5975	0,6854	0,7061	0,6577	0,5448	0,3842	0,1805	0
0,04	0	0,2695	0,5027	0,6853	0,7968	0,8302	0,7822	0,6576	0,4746	0,2411	0
0,05	0	0,2650	0,5084	0,7060	0,8301	0,8729	0,8301	0,7060	0,5175	0,2696	0
0,06	0	0,2345	0,4649	0,6576	0,7822	0,8302	0,7968	0,6853	0,5092	0,2716	0
0,07	0	0,1805	0,3788	0,5448	0,6577	0,7061	0,6854	0,5975	0,4503	0,2460	0
0,08	0	0,1083	0,2519	0,3837	0,4757	0,5194	0,5114	0,4510	0,3502	0,2061	0
0,09	0	0,0304	0,1030	0,1764	0,2374	0,2701	0,2764	0,2544	0,2120	0,1387	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Rekurrent formula bo‘yicha $u(x, y, t_n)$ ko‘chishning qiymatlari Jadval 3.1.1b.

y / x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	0	0,1394	0,2123	0,2562	0,2743	0,2657	0,2313	0,1759	0,1026	0,0298	0
0,02	0	0,2054	0,3497	0,4508	0,5049	0,5100	0,466	0,3774	0,2525	0,1081	0
0,03	0	0,2471	0,4498	0,5975	0,6857	0,7066	0,6582	0,5454	0,3845	0,1800	0
0,04	0	0,2681	0,5027	0,6855	0,7972	0,8307	0,7828	0,6582	0,4745	0,2401	0
0,05	0	0,2638	0,509	0,7064	0,8307	0,8734	0,8307	0,7064	0,5171	0,2683	0
0,06	0	0,2337	0,4662	0,6582	0,7828	0,8307	0,7972	0,6855	0,5085	0,2701	0
0,07	0	0,1800	0,3784	0,5454	0,6582	0,7066	0,6857	0,5975	0,4498	0,2447	0
0,08	0	0,1081	0,2525	0,3840	0,4757	0,5193	0,5112	0,4508	0,3497	0,2054	0
0,09	0	0,0298	0,1026	0,1759	0,2377	0,2703	0,2761	0,2537	0,2123	0,1394	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Progonka usulida olingan $v(x, y, t_n)$ ko‘chishning qiymatlari Jadval 3.1.2a.

y / x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	0	0,1387	0,2061	0,2486	0,2694	0,2648	0,2343	0,1804	0,1083	0,0303	0
0,02	0	0,2121	0,3502	0,4503	0,5028	0,5086	0,4651	0,3789	0,2520	0,1030	0
0,03	0	0,2571	0,4510	0,5975	0,6854	0,7061	0,6577	0,5448	0,3839	0,1764	0
0,04	0	0,2750	0,5044	0,6855	0,7968	0,8302	0,7822	0,6577	0,4757	0,2379	0
0,05	0	0,2661	0,5090	0,7061	0,8302	0,8729	0,8302	0,7061	0,5194	0,2704	0
0,06	0	0,2312	0,4645	0,6577	0,7822	0,8302	0,7968	0,6855	0,5115	0,2765	0
0,07	0	0,1764	0,3785	0,5448	0,6577	0,7061	0,6854	0,5975	0,4510	0,2543	0
0,08	0	0,1030	0,2520	0,3842	0,4748	0,5177	0,5093	0,4503	0,3502	0,2121	0
0,09	0	0,0303	0,1083	0,1804	0,2408	0,2693	0,2715	0,2459	0,2061	0,1387	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Rekurrent formulalar yordamida hisoblangan $v(x, y, t_n)$ ko‘chishning qiymatlari

Jadval 3.1.2b.

y / x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0,01	0	0,1394	0,2054	0,2471	0,2681	0,2637	0,2336	0,1800	0,1081	0,0298	0
0,02	0	0,2123	0,3497	0,4498	0,5028	0,5091	0,4662	0,3783	0,2525	0,1026	0
0,03	0	0,2562	0,4508	0,5975	0,6855	0,7064	0,6582	0,5454	0,3842	0,1759	0
0,04	0	0,2744	0,5049	0,6857	0,7972	0,8307	0,7828	0,6582	0,4757	0,2381	0
0,05	0	0,2659	0,5101	0,7066	0,8307	0,8734	0,8307	0,7066	0,5193	0,2705	0
0,06	0	0,2315	0,4661	0,6582	0,7828	0,8307	0,7972	0,6857	0,5112	0,2761	0
0,07	0	0,1759	0,3775	0,5454	0,6582	0,7064	0,6855	0,5975	0,4508	0,2536	0
0,08	0	0,1026	0,2525	0,3844	0,4747	0,5173	0,5086	0,4498	0,3497	0,2123	0
0,09	0	0,0298	0,1081	0,1800	0,2399	0,2682	0,2701	0,2447	0,2054	0,1394	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Progonka usulida olingan $T(x, y, t_n)$ temperaturaning qiymatlari Jadval 3.1.3a.

t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
0,01	90	90,052	90,433	90,721	90,869	90,899	90,825	90,647	90,355	90,001	90
0,02	90	90,427	90,904	91,164	91,197	91,063	90,803	90,449	90,005	89,704	90
0,03	90	90,703	91,153	91,287	91,161	90,864	90,465	90,004	89,613	89,413	90
0,04	90	90,832	91,166	91,144	90,877	90,473	90,002	89,573	89,254	89,234	90
0,05	90	90,847	91,015	90,834	90,459	89,999	89,54	89,165	88,984	89,152	90
0,06	90	90,765	90,745	90,426	89,997	89,526	89,122	88,855	88,833	89,167	90
0,07	90	90,586	90,386	89,995	89,534	89,135	88,838	88,712	88,846	89,296	90
0,08	90	90,295	89,994	89,55	89,196	88,936	88,802	88,835	89,095	89,572	90
0,09	90	89,998	89,644	89,352	89,174	89,1	89,13	89,278	89,566	89,947	90
0,1	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

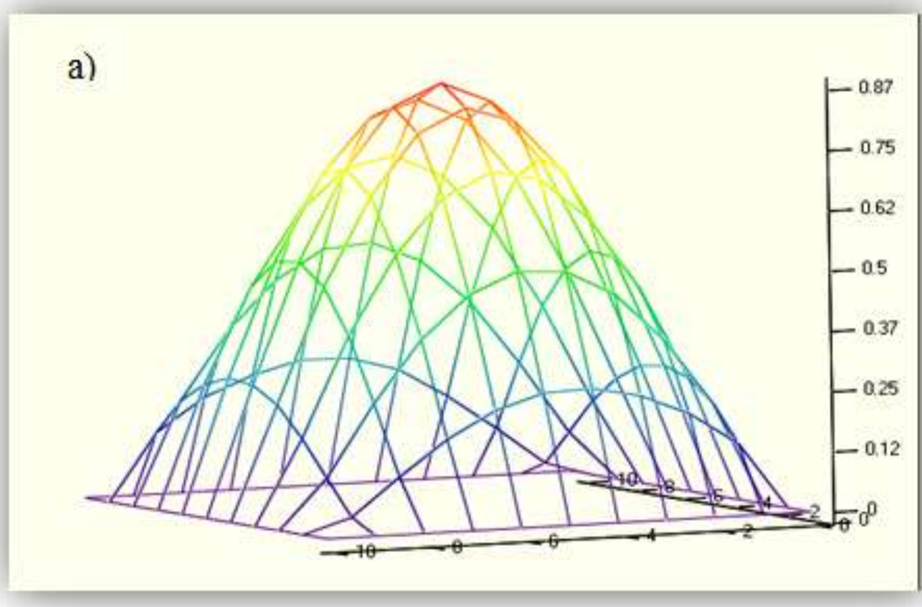
Rekurrent formulalar yordamida hisoblangan $T(x, y, t_n)$ temperaturaning qiymatlari

Tablisa 3.1.3b.

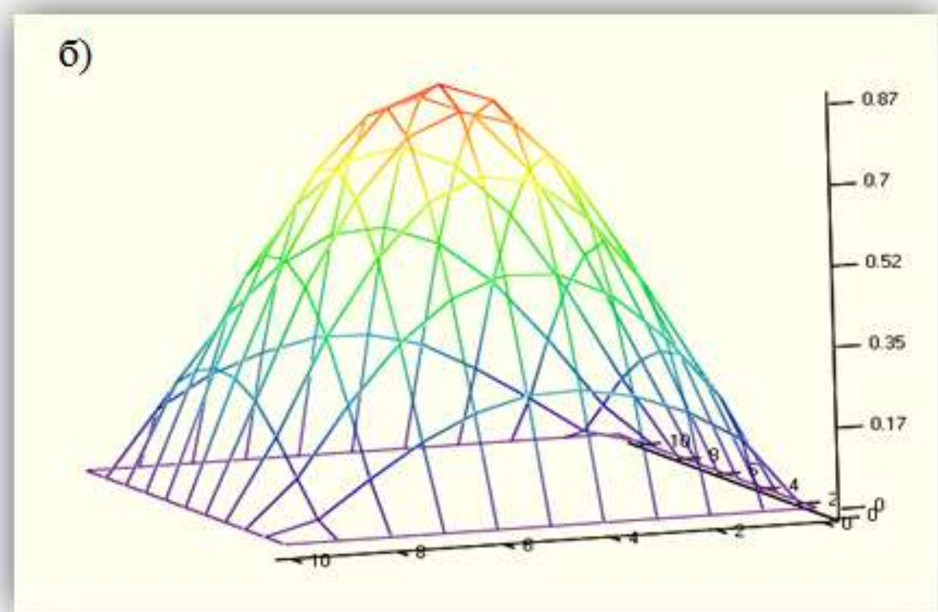
y \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
0,01	90	90,1	90,792	91,318	91,576	91,621	91,475	91,14	90,593	90	90
0,02	90	90,792	91,643	92,111	92,16	91,903	91,421	90,768	90	89,406	90
0,03	90	91,318	92,111	92,346	92,102	91,552	90,816	90	89,231	88,859	90
0,04	90	91,576	92,16	92,102	91,601	90,851	90	89,183	88,578	88,524	90
0,05	90	91,621	91,903	91,552	90,851	90	89,148	88,447	88,096	88,378	90
0,06	90	91,475	91,421	90,816	90	89,148	88,398	87,897	87,839	88,423	90
0,07	90	91,14	90,768	90	89,183	88,447	87,897	87,653	87,888	88,681	90
0,08	90	90,593	90	89,231	88,578	88,096	87,839	87,888	88,356	89,207	90
0,09	90	90	89,406	88,859	88,524	88,378	88,423	88,681	89,207	89,899	90
0,1	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Quyida keltirilgan .3.1.1.a, b-3.1.3a, b rasmlar orqali ko‘chishlar, temperatura va plastik zonalar tarqalishlarini ko‘rish mumkin. Xar xil usullar bilan sonli natijalarni taqqoslash esa, qo‘llanilgan usullar va model tenglamalarning o‘rinli ekannligini qo‘rsatadi.

a) progonka usuli

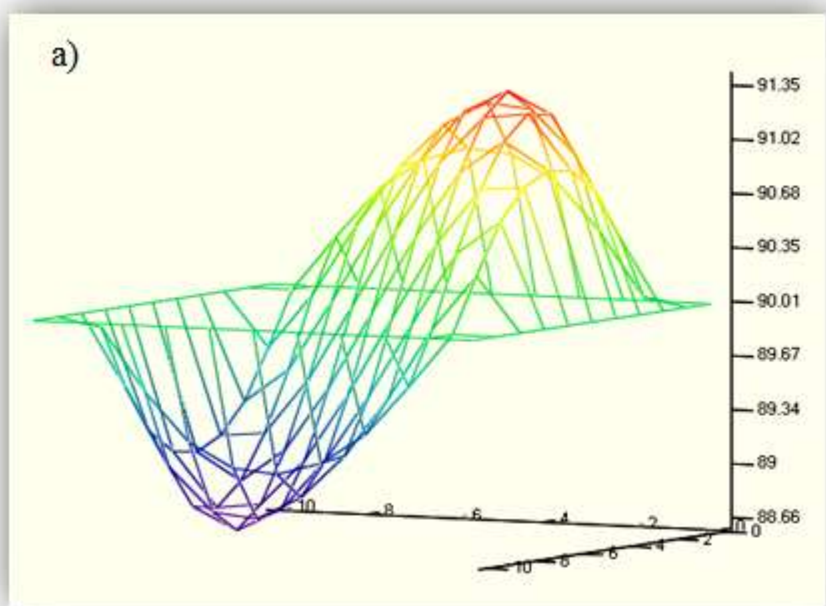


b) rekurrent formulalar

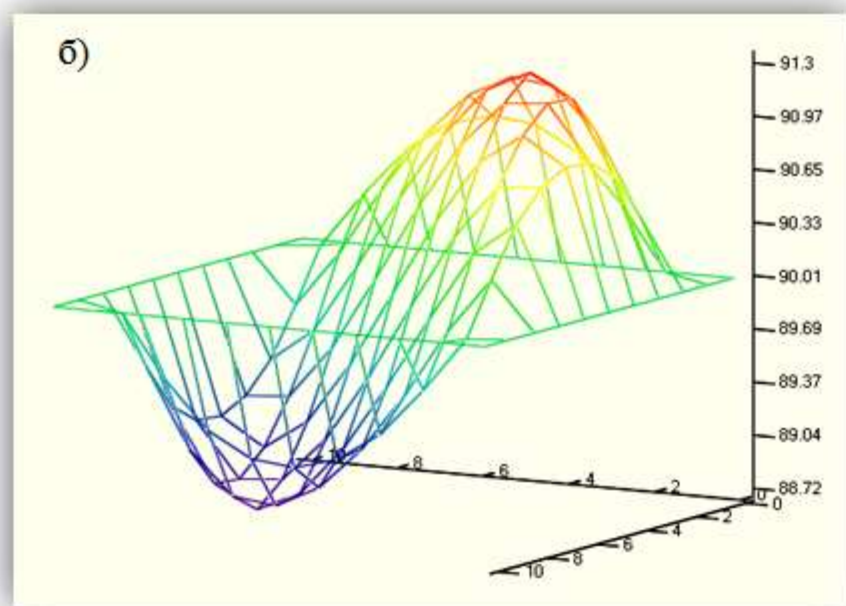


Ris.3.1.1. Raspredeleniye znacheniya komponenti peremesheniya u(x, y, t_n)
v pryamougolnike po metodu progonki (a) i rekurrentnim sootnosheniyam (b)

a) progonka metodi

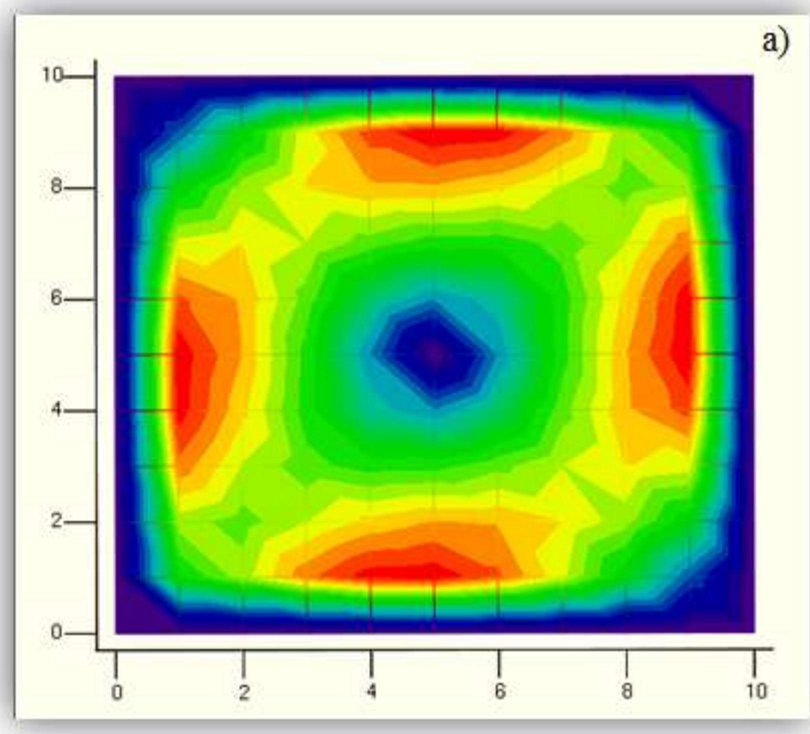


b) rekurrent formulalar

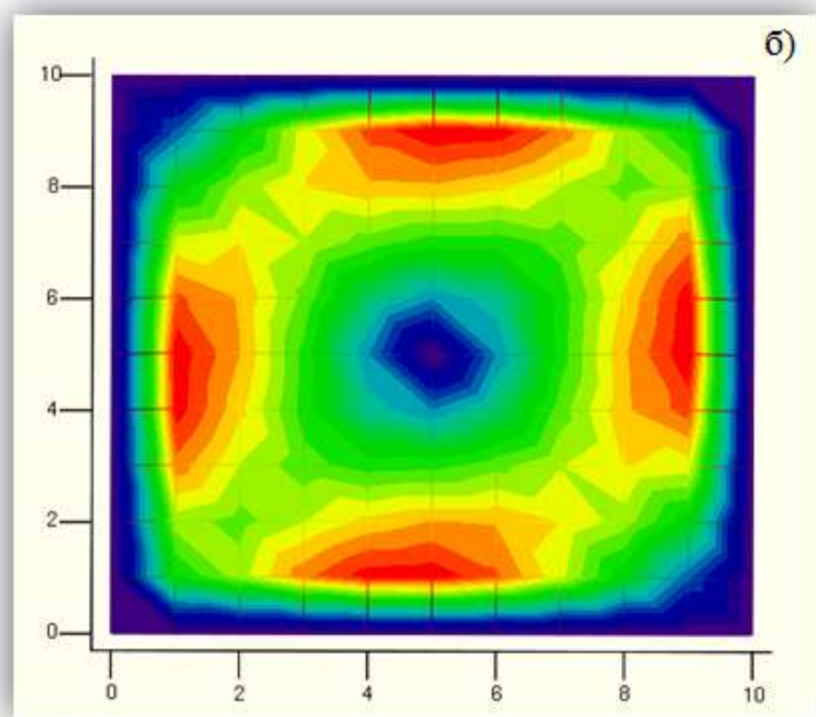


Rasm. 3.1.2. Temperaturaning T(x, y, t_n) to‘g‘ri to‘rtburchakdagi taqsimlanishi: progonka usuli(a) va rekurrent formulalar bo‘yicha (b)

a) progonka usuli.



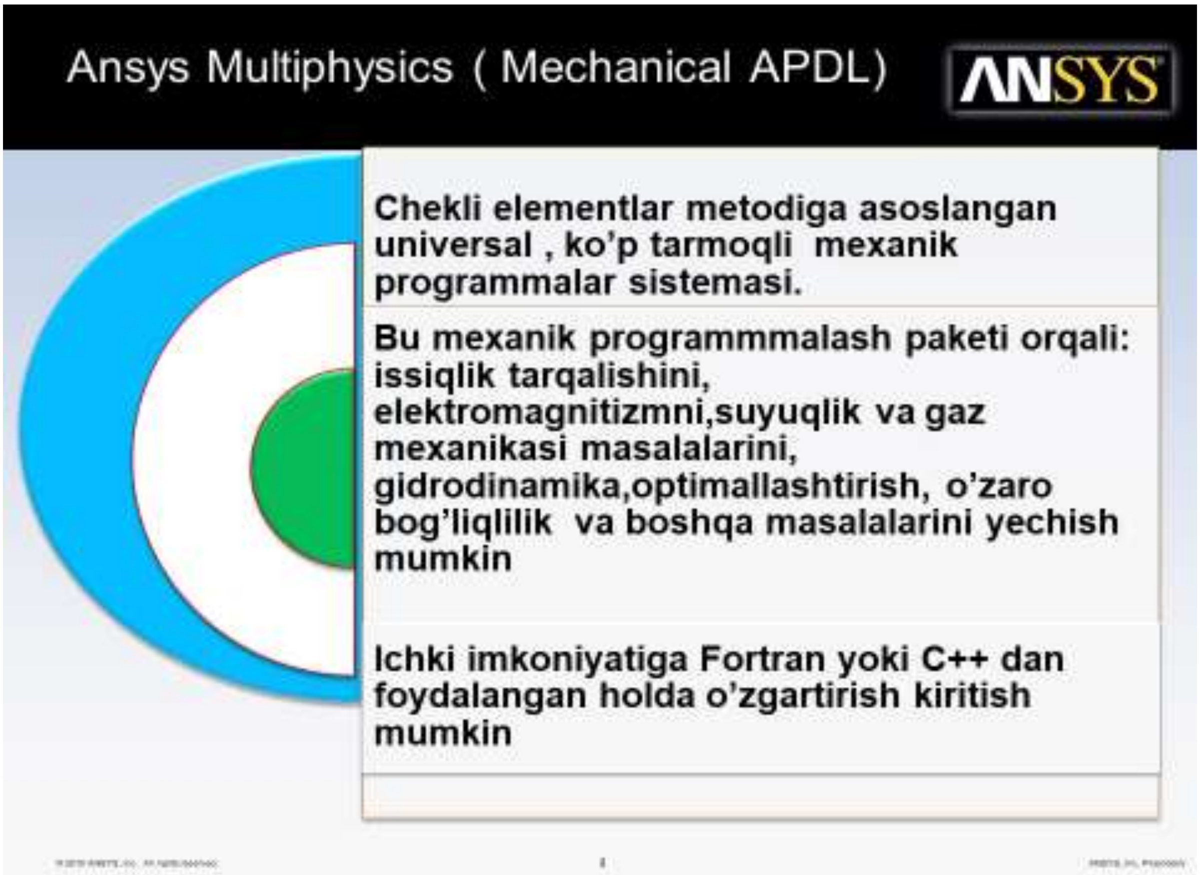
b) rekurrent formulalar.

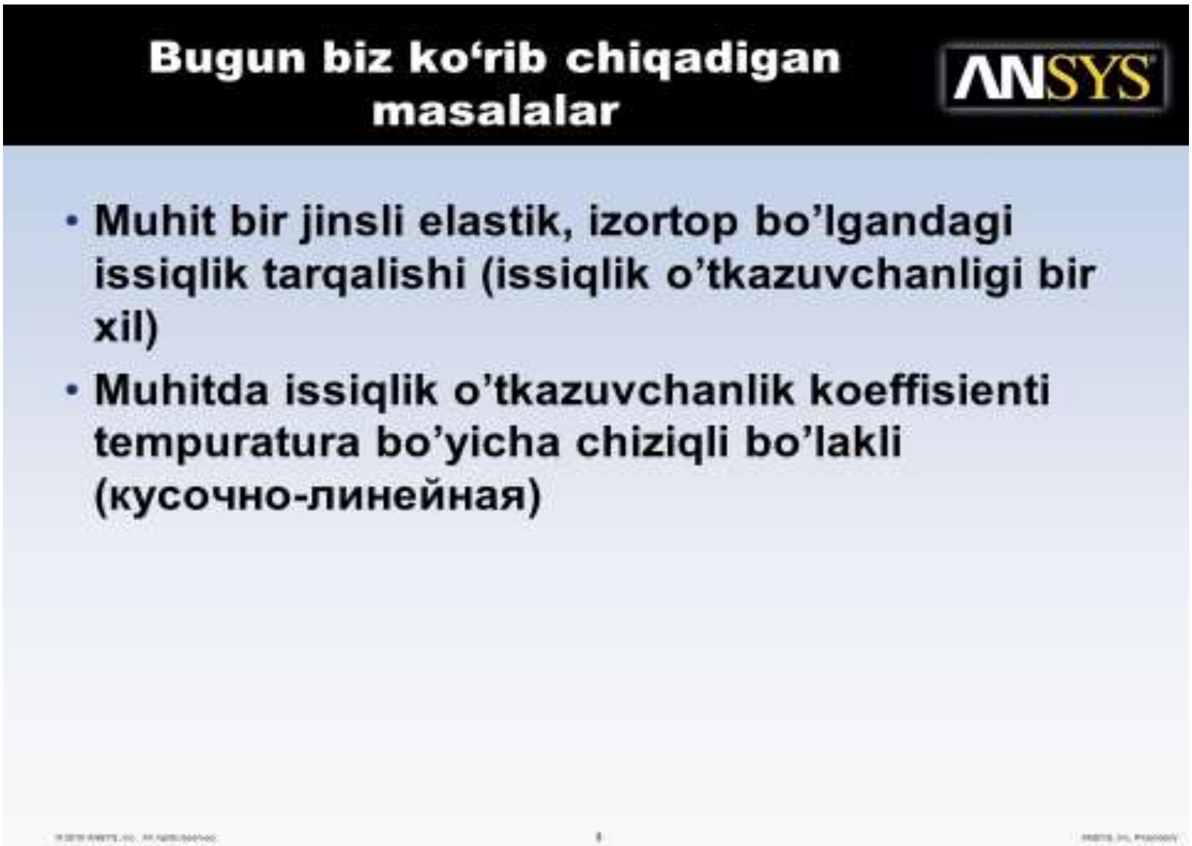


Rasm. 3.1.3. Plastik zonalarning paydo bo‘lishi: progonka usuli (a) va rekurrent formulalar bo‘yicha(b).

Amaliy dasturlar paketlaridan ilmiy-tadqiqot natijalarini 2D va 3D vizuallashtirish va tahlil qilishda foydalanish

Xozirgi kunda “Chekli elementlar usuli” asosida ANSYS, NASTRSAN, COSMOSM, Abaqus, FEM, Lira kabi qator amaliy dasturlar yaratilgan. Bu dasturlar juda keng tarqalgan bo‘lib, amaliy masalalarni yechishda muxim axamiyatga ega. Bu bo‘limda muxitlarda temperatura tarqalishiga doir masalani yechish namoish etilgan.


Ansys Multiphysics (Mechanical APDL)
ANSYS
Chekli elementlar metodiga asoslangan universal , ko'p tarmoqli mexanik programmalar sistemasi.
Bu mexanik programmmalash paketi orqali: issiqlik tarqalishini, elektromagnitizmni,suyuqlik va gaz mexanikasi masalalarini, gidrodinamika,optimallashtirish, o'zaro bog'liqlilik va boshqa masalalarini yechish mumkin
Ichki imkoniyatiga Fortran yoki C++ dan foydalangan holda o'zgartirish kiritish mumkin


Bugun biz ko'rib chiqadigan masalalar
ANSYS
• Muhit bir jinsli elastik, izortop bo'lgandagi issiqlik tarqalishi (issiqlik o'tkazuvchanligi bir xil)
• Muhitda issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisienti tempuratura bo'yicha chiziqli bo'lakli (кусочно-линейная)

Asosiy tenglamalar

ANSYS

- **Uzluksizlik tenglamasi**
- $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + div(\rho \vartheta_i) = 0$
- **Fur‘e - Kirxgofning issiqlik tarqalish tenglamasi.**
- $\frac{\partial T}{\partial \tau} + \vartheta_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vartheta_z \frac{\partial T}{\partial z} = \mathrm{c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$
- $c = \frac{\lambda}{c_\rho \rho}$
- **Qattiq jismda** $w_i = 0$ **uchun**
- $\frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathrm{c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$

4

Asosiy tenglamalar

ANSYS

- *Statsionar holat uchun:*
- $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ **Laplas tenglamasi**
- **Ichki energiyani inobatga olsak**
- $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{q_v}{\lambda}$ **Puason tenglamasi**

Chegaraviy shartlar va uning programmadagi ko'rinishi

- **Dirixle masalasi:**

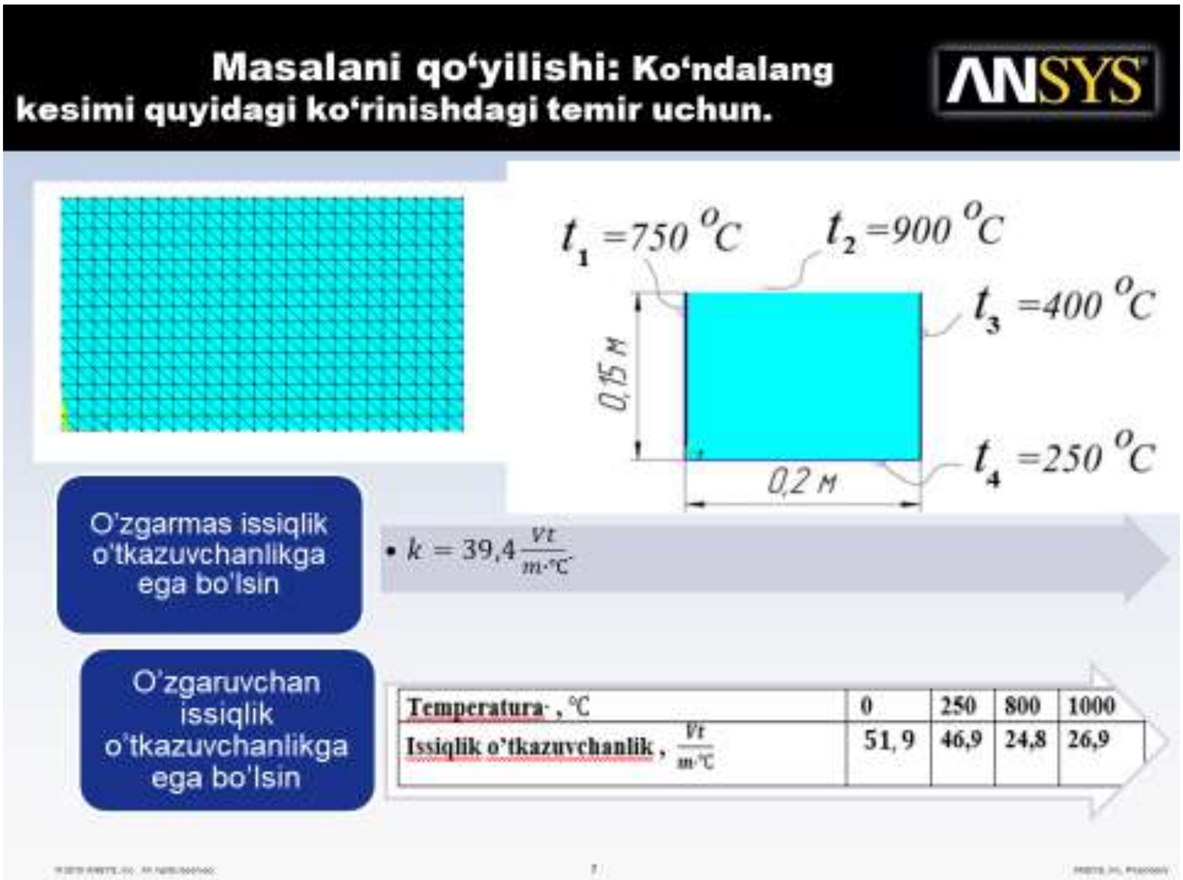
$$T(x, y, z, \tau) = \varphi(x, y, z, \tau)$$

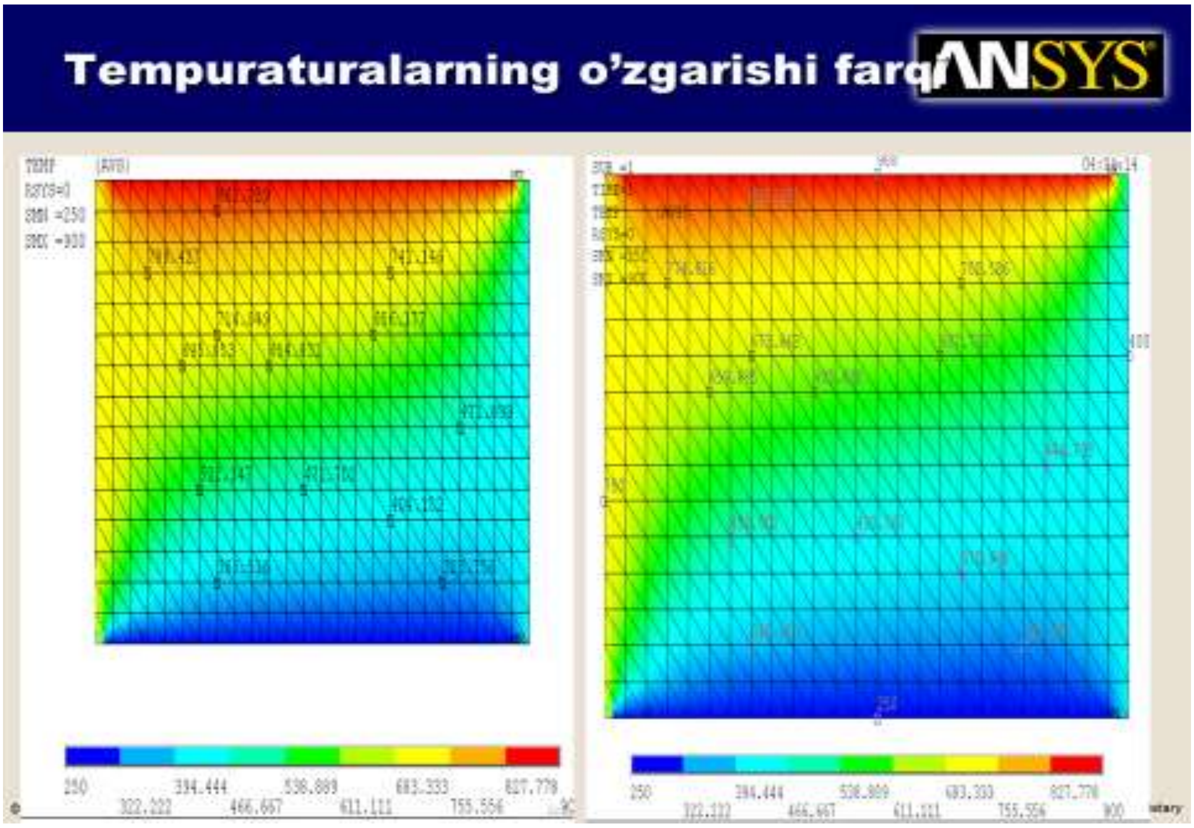
Sohani ma'lum bir qismidagi temperatura o'zgarishini "Apply Temp " orqali programmada ifodalaymiz.

Neyman masalasi:

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \psi(x, y, z, \tau)$$

Sohani ma'lum bir qismidagi temperatura o'zgarishini "Apply HFLUX" orqali programmada ifodalaymiz.


Masalani qo'yilishi: Ko'ndalang kesimi quyidagi ko'rinishdagi temir uchun.
ANSYS
t_1 =750 ^oC
t_2 =900 ^oC
t_3 =400 ^oC
t_4 =250 ^oC
0,15 м
0,2 м
O'zgarmas issiqlik o'tkazuvchanlikga ega bo'lsin
• $k = 39,4 \frac{Vt}{m \cdot ℃}$
O'zgaruvchan issiqlik o'tkazuvchanlikga ega bo'lsin
Temperatura , ℃ | 0 | 250 | 800 | 1000
Issiqlik o'tkazuvchanlik , $\frac{Vt}{m \cdot ℃}$ | 51, 9 | 46,9 | 24,8 | 26,9


Tempuraturalarning o'zgarishi farqi
ANSYS
250
322.222
394.444
466.667
538.889
611.111
683.333
755.556
827.778
900

Nazorat savollari

1. **S**onli usullar,
2. Chekli ayirmali tenglamalar
3. Chekli elementlar usuli
4. Dasturlash texnologiyalari,
5. Obyektga yo‘naltirilgan dasturlash texnologiyasi,
6. C# dasturlash tili,
7. Amaliy paketlar majmuasi
8. ANSYS amaliy paketi,
9. MATHLAB amaliy paketi
10. Vizuallashtirish.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi: ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlarida hisoblash usullari fanlarni o‘qitish metodikasi sohasidagi yangi ma’lumotlar, zamonaviy texnika hamda texnologiyalar bilan tanishtirish, nazariy bilimlarini mustahkamlash.

O‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, grafik organayzerlardan, keyslardan foydalanish, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, blis-so‘rovlardan, sinkveyn va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

V. KEYSLAR BANKI

1-kichik-keys. “Termoelastik masalalarni sonli yechishga doir mulohaza”.

Muammoning qo‘yilishi: Chekli ayirmali tenglamalarni iterasiya usuli yordamida sonli yechish usulini tushintiring.

1. Tinglovchilardan olingan javoblar quyidagicha:

Tenglama va chegaraviy shartlardagi hosilalarni chekli ayirmali munosabatlar bilan almashtirish kerak. Ularni Gauss metodi yordamida sonli yechish zarur va olingan natijalar tenglamani qanoatlantiradi.

2. Tinglovchilardan olingan javoblar quyidagicha:

Chekli ayirmali munosabatlar yordamida differensial tenglama izlanuvchi funksiyaning tugun nuqtalardagi qiymatlariga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Xosil bo‘lgan chekli ayirmali tenglamalar izlanuvchi funksiyaning markaziy tugun nuqtalariga nisbatan yechib olinadi va bu ifoda asosida ketma-ket yaqinlashish jaroyoni tashkil etiladi.

Nima uchun bunday javoblar kelib chiqdi va uning sababini, vaziyatdan chiqish yo‘lini ko‘rsating.

2-kichik-keys. “Elastik-plastik maslalarni sonli yechishda ketma-ket yaqinlashishi usulini qo‘llash bo‘yicha mulohaza”.

Muammoning qo‘yilishi: Chiziqli bo‘lmagan plastik masallarni yechishga o‘rganilgan iterasiya usuli bilan yechish termoelastik masalani sonli yechishdan nima bilan farq qiladi qiladi?

1. Tinglovchilardan olingan javoblar quyidagicha:

Chiziqli differensial tenglamalarni yechish usulini chiziqsiz tenglamalarga xam qo‘llash mumkin. Buning uchun, tenglamaning chiziqsiz qismini ajratib olish zarur va uni tenglamaning o‘ng tomoni sifadida qarab, iterasiya jaroyonini tashkil etish mumkin.

2. Tinglovchilardan olingan javoblar quyidagicha:

VI. MUSTAQIL TA'LIM MAVZULARI.

Mustaqil ishni tashkil etishning shakli va mazmuni.

Tinglovchi mustaqil ishni muayyan modulni xususiyatlarini hisobga olgan xolda quyidagi shakllardan foydalanib tayyorlashi tavsiya etiladi:

- meyoriy xujjatlardan, o'quv va ilmiy adabiyotlardan foydalanish asosida modul mavzularini o'rganish;
- tarqatma materiallar bo'yicha ma'ruzalar qismini o'zlashtirish;
- avtomatlashtirilgan o'rgatuvchi va nazorat qiluvchi dasturlar bilan ishlash;
- maxsus adabiyotlar bo'yicha modul bo'limlari yoki mavzulari ustida ishlash;
- tinglovchining kasbiy faoliyati bilan bog'liq bo'lgan modul bo'limlari va mavzularni chuqur o'rganish.

1. Tutash muhit mexanikasi masalalarining qo'yilishi haqida. Boshlang'ich va chegaraviy shartlar.
2. Eyler xarakat tenglamasini chekli ayirmali usul yordamida sonli yechish.
3. Nave-Stoks tenglamasini chekli ayirmali usul yordamida sonli yechish
4. Deformasion nazariya asosida plastik masalaning qo'yilishi.
5. Oqim plastiklik nazariyasi
6. Yuklanish sirti deformasiyalar fazosida bo'lgan oqish nazariyalari.
7. Tolali kompozitlarni chiziqli deformasiyalanish jaroyonini sonli modellashtiri sh
8. Tutash muhitning noklassik modellari.
9. Elastik-plastik muhitlar**.**

MUSTAQIL ISH TOPSHIRIQLARI

Mustaqil ishni tashkil etishning shakli va mazmuni.

Tinglovchi mustaqil ishni muayyan modulni xususiyatlarini hisobga olgan xolda quyidagi shakllardan foydalanib tayyorlashi tavsiya etiladi:

- meyoriy xujjatlardan, o‘quv va ilmiy adabiyotlardan foydalanish asosida modul mavzularini o‘rganish;
- tarqatma materiallar bo‘yicha ma’ruzalar qismini o‘zlashtirish;
- avtomatlashtirilgan o‘rgatuvchi va nazorat qiluvchi dasturlar bilan ishlash;
- maxsus adabiyotlar bo‘yicha modul bo‘limlari yoki mavzulari ustida ishlash;
- tinglovchining kasbiy faoliyati bilan bog‘liq bo‘lgan modul bo‘limlari va mavzularni chuqur o‘rganish.

Mustaqil ta’lim mavzulari:

1. Laplas tenglamasini chekli ayirmali usul yordamida sonli yechish
2. Issiqliq tarqalishi masalasini sonli yechish
3. Termoelastik masala uchun chekli ayirmali tenglamalar qurish.
4. Bog‘liq termoelastik masalaning qo‘yilishi.(1 o‘lchovli xol)
5. Izotrop jismlar uchun deformasion nazariya
6. Transversal izotrop jismlar uchun deformasion nazariya

VII. GLOSSARIY

Termin	O‘zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Chekli ayirmali usul	To‘rgan nisbatan hosilalarni chekli ayirmalar bilan alishtirish	Finite difference relations, derivatives replaces with a finite differences
Chekli elementlar usuli	Sohani uchburchak, turtburchak, tetraedr va parallelepipedlar ko‘rinishidagi chekli elementlar bilan zich bo‘laklarga ajratish va xosil bo‘lgan tugun nuqtalarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilish	Cover the considered area with finite elements in the form of triangle, rectangle, tetrahedron and parallelepipeds.
Chegaraviy elementlar usuli.	Sohada qaralayotgan differensialarni sohaning chegarasida berilgan integral tenglamalar bilan almashtirish va sonli yechish	The sonsidered differencial equations replaces with a integral equatins defined on the boundaru of the domain in with given differencial equation
anizotrop jismlar	xususiyatlari barcha yo‘nalishlarda turlicha bo‘lgan muhit	Proporties depend on the considered directions in the body.
Elastik jismlar	Chiziqli deformasiyalanuvchi jismlar	Solids with linear strains. time
Approksimasiya, turg‘unlik va yaqinlashish	Chekli ayirmali tenglamalarni(sxemalarni) yechimlarining aniq yechimga intilishini taminovchi shartlar	Approxiation, stability and convergence rovides approximation to the exact solution
Umumlashgan Guk qonuni	anizotrop jismlartning chiziqli deformasiyalanish	The Hooks love describe the linear deformation

	jaroyonini ifodalaydigan qonun	process of anisotropic materials
Plastik deformasiya	Chiziqsiz deformasiyalanish jaroyonida xosil bo‘ladigan qoldiq deformasiY.	Residual deformation occurs during plastic deformation process

VIII. ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Karimov I.A. Ozod va obod Vatan erkin va farovon hayot pirovard maqsadimiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2000.
2. Karimov I.A. Vatan ravnaqi uchun har birimiz ma’sulmiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2001.
3. Karimov I.A. Yuksak ma’naviyat – yengilmas kuch. - T.: “Ma’naviyat”, 2008.-176 b.
4. Karimov I.A. O‘zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida. -T.: “O‘zbekiston”, 2011.-440 b.
5. Karimov I.A. Ona yurtimiz baxti iqboli va buyuk kelajagi yo‘lida xizmat qilish – eng oliy saodatdir. –T:. “O‘zbekiston”, 2015. – 302 b.
6. Mirziyoyev SH.M. “Erkin va farovon, demokratik O‘zbekiston davlatini mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz” mavzusidagi O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag‘ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo‘shma majlisidagi nutqi. – T.: “O‘zbekiston”, 2016. – 56 b.
7. Mirziyoyev SH.M. “Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta’minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligi garovi” mavzusidagi O‘zbekiston Respublikasi Konstitusiyasi qabul qilinganining 24 yilligiga bag‘ishlangan tantanali marosimdagi ma’ruzasi. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 48 b.
8. Mirziyoyev SH.M. Tanqidiy tahlil, qat’iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo‘lishi kerak. –T.: “O‘zbekiston”. – 2017.– 102b.
9. Mirziyoyev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob halqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

1. O‘zbekiston Respublikasining Konstitusiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2014.
2. O‘zbekiston Respublikasining “Normativ-huquqiy hujjatlar to‘g‘risida”gi Qonuni. 2000 yil 14 dekabr.
3. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2006 yil 16-fevraldagi “Pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va ularni malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida”gi 25-sonli Qarori.
4. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining “Ta’lim muassasalarining bitiruvchilarini tadbirkorlik faoliyatiga jalb etish borasidagi qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 2010 yil 28 iyuldagi 4232-sonli Farmoni.
5. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyundagi “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi 4732-son Farmoni.

6. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2015 yil 20 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirishni tashkil etish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi 242-sonli Qarori.

7. O‘rta maxsus, kasb–hunar ta’limining tayyorlov yo‘nalishlari, kasblar va ixtisosliklar umumdavlat Tasniflagichi.-T., 2015. – 91 b.

8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2012 yil 28 maydagi «Malakali pedagog kadrlar tayyorlash hamda o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi muassasalarini shunday kadrlar bilan ta’minlash tizimini yanada takomillashtirishga oid chora-tadbirlar to‘g‘risida» PQ–1761-son qarori.

9. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2012 yil 6 iyuldagi “O‘zbekiston Respublikasida o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi to‘g‘risidagi nizomni tasdiqlash haqida”gi 200-sonli qarori. O‘zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari to‘plami, 2012 y., 28-son, 315-modda.

10. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2012 yil 10 avgustdagi “O‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish va ularni qayta tayyorlash tizimini yanada takomillashtirishga doir chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 242-sonli qarori. *O‘zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari to‘plami, 2012 y., 33-34-son, 389-modda.*

11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining qarori “Oliy ma’lumotli mutaxassislar tayyorlash sifatini oshirishda iqtisodiyot sohalari va tarmoqlarining ishtirokini yanada kengaytirish chora-tadbirlari to‘g‘risida“ (*O‘zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari to‘plami, 2017 y., 30-son, 729-modda*)

12. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining Qarori “Oliy o‘quv yurtidan keyingi ta’lim tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” (*O‘zbekiston Respublikasi qonun hujjatlari to‘plami, 2017 y., 21-son, 396-modda)*.

13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 2 fevraldagi “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi O‘zbekiston Respublikasi Qonunining qoidalarini amalga oshirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2752-sonli Qarori.

14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 26 sentabrdagi «Oliy ta’lim muassasalariga kirish uchun nomzodlarni maksadli tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida” PQ-3290-sonli qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

1. Shabana A.A. Computational Continuum Mechanics.- New York. Cambridge Univ.Press, 2012 (328p)
2. Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. 7th Edition.- New York, McGraw Hill Education, 2015 (992p)Pobedrya B.YE. Chislenniye metodi teorii uprugosti i plastichnosti. M. MGU, 1996.
3. Babuška I., P.G. Ciarlet, T. Miyoshi (eds.) Mathematical Modeling and Numerical Simulation in Continuum Mechanics.- Springer, 2000 (305p)

4. Kukudjanov V.N. Chislenniye metodi v mexanike sploshnoy sredi.(Uchebnoye plsobiye) Moskva, 2006, 158 s.
5. Vorojsov YE.V. Raznostniye metodi resheniya zadach mexaniki sploshnix sred: Uchebnoye posobiye. Izd-vo NGTU, 1998, 86 s.
6. Samarskiy A.A. Nikolayev YE.S. Metodi resheniya setochnix uravneniy. M.Nauka, 1978.
7. Rixtmayer R., Morton K. Raznostniye metodi resheniya krayevix zadach. – M.: Mir, 1972. – 418 s.
8. Fletcher Vichislitelniye metodi v mexanike jidkostey. T.1 i 2. – M.: Mir, 1990.
9. Kukudjanov V.N. Kompyuternoye modelirovaniye deformirovaniya, povrejdayemosti i razrusheniya neuprugix materialov i konstruksiy. Chislenniye metodi v mexanike sploshnoy sredi.(Uchebnoye posobiye) Moskva, MFTI, 2008, 215 s.
10. Samarskiy A.A. Matematicheskoye modelirovaniye. M. Nauka, 1997.
11. Zenkevich O.S. Morgan K. Konechniye elementi i approksimasii. M. MIR, 1986
12. Jamolov Z.J., Xoljigitov A.A. Chekli va chegaraviy elementlar usullari. “Universitet” nashriyoti, 1994, 64 b.
13. Godunov S.K., Ryabenkiy V.S. Raznostniye sxemi.(Vvedeniye v teoriyu). M.1973, 400s.
14. Brebbiya K. Telles J., Vroubel L. Metodi granichnix elementov .M. MIR 1987.
15. Xaldjigitov A.A., Kalandarov A.K., Yusupov Y.S. Svyazanniye zadachi termouprugosti i termoplastichnosti. –Tashkent, «Fan va texnologiya», 2019, 193 s.

IV. Elektron ta’lim resurslari

1. O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi: www.edu.uz.

2. O‘zbekiston Respublikasi Aloqa, axborotlashtirish va telekommunikasiya texnologiyalari davlat qo‘mitasi: www.aci.uz.
3. Kompyuterlashtirish va axborot-kommunikasiya texnologiyalarini rivojlantirish bo‘yicha Muvofiqlashtiruvchi kengash: www.ictcouncil.gov.uz.
4. O‘zRes.OO‘MTV huzuridagi Bosh ilmiy-metodik markaz: www.bimm.uz
5. www. Ziyonet. Uz.
6. Infocom.uz elektron jurnali: www.infocom.uz.

O'zbekiston milliy universiteti huzuridagi pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish tarmoq (mintaqaviy) markazi "Mexanika va matematik modellashtirish" yo'nalishidagi mutaxassislik fanlaridan tayyorlangan "HISOBLASH MEXANIKASI" moduli bo'yicha qayta tayyorlash va malaka oshirish masofaviy kurslari uchun tayyorlangan materiallar talablarga javob berishi bo'yicha

EKSPERT XULOSASI

"Mexanika va matematik modellashtirish" yo'nalishi qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi mutaxassilik fanlaridan fanlaridan tayyorlangan **"HISOBLASH MEXANIKASI"** moduli bo'yicha test savollari, o'quv-uslubiy majmua, bitiruv ishi mavzulari hamda masofaviy materiallar mazkur modul bo'yicha tasdiqlangan namunaviy **dastur doirasida tayyorlangan va unga qo'yilgan talablarga javob beradi** hamda BIMM internet portaliga qo'yishga tavsiya etiladi.

Tarmoq (mintaqaviy) markazi direktori — **O'.Tilavov**

Bo'lim boshlig'i — **O'.Muxamadiyev**

" Mexanika va matematik modellashtirish" kafedrasi мудири — **prof .A.B.Axmedov**

Tuzuvchi: — **A.Xoljigitov**