O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISH BOSH ILMIY - METODIK MARKAZI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

“MEXANIKADA MATEMATIK MODELLASHTIRISH”

MODULI BO‘YICHA

O‘QUV–USLUBIY MAJMUA

Toshkent – 2022

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi: O‘zMU, Mexanika va matematik modellashtirish kafedrasi mudiri, f.-m.f.d., professor A.B.Axmedov

Taqrizchilar: Kimyo va texnologiya instituti professori f.-m.f.d. I.Safarov
O‘zMU, Mexanika va matematik modellashtirish kafedrasi professori, f.-m.f.d., A.Xoljigitov

O‘quv -uslubiy majmua Bosh ilmiy-metodik markaz Ilmiy metodik Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan
(2020 yil “30” dekabrdagi 5/4-sonli bayonnoma)

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

Dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019 yil 8 oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmonlari hamda O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni kredit modul tizimi va o‘quv jarayonini tashkil etish, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, pedagogning kasbiy professionalligini oshirish, ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish, maxsus maqsadlarga yo‘naltirilgan ingliz tili, mutaxassislik fanlar negizida ilmiy va amaliy tadqiqotlar, o‘quv jarayonini tashkil etishning zamonaviy uslublari bo‘yicha so‘nggi yutuqlar, pedagogning kreativ kompetentligini rivojlantirish, ta’lim jarayonlarini raqamli texnologiyalar asosida individuallashtirish, masofaviy ta’lim xizmatlarini rivojlantirish, vebinar, onlayn, «blended learning», «flipped classroom» texnologiyalarini amaliyotga keng qo‘llash bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishining o‘ziga xos xususiyatlari hamda dolzarb masalalaridan kelib chiqqan holda dasturda tinglovchilarning mutaxassislik fanlar doirasidagi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar takomillashtirilishi mumkin.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulining maqsadi: pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi tinglovchilarini tajribaviy natijalar va nazariy ma’lumotlar asosida olingan qonunlar, postulatlar, gipotezalar va formulalarni texnika va ishlab chiqarish obektlarida ishlata olishni o‘rgatish, turli texnikaviy masalalarda jismlarning mustahkamligi, ustivorligi va bikirligini aniqlash usullarini, yopishqoqlik hususiyatini hisobga olgan holda suyuqlik oqimini gaz holatlarini o‘rganish hisoblanadi

Modulning vazifalari:

mazkur dastur doirasida tinglovchilarga tutash muhitlar mexanikasining dolzarb muammolarini aniqlash, tahlil qilish va ularni yechish usullari bo‘yicha nazariy bilim berish va muayyan ko‘nikmalar hosil qilish hisoblanadi

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

Modulni o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida**:**

Tinglovchi:

- Mexanika fani rivojining zamonaviy bosqichlarini, kursning asosiy gipotezalari, modellari, qonunlari, natijalari, tutash muhitlarning xususiyatlari, ularda hosil bo‘ladigan mexanik jarayonlarni ***bilishi*** kerak.
- eksperimental tadqiqotlar natijalariga ishlov berish, ularni tahlil qilish va aks ettirish, xulosalar chiqarish, ilmiy maqolalar tayyorlash, tavsiyalarini ishlab chiqish, innovatsion faoliyatni tashkil etishb ilg‘or tajribalardan foydalanish, o‘z ustida ishlab, fanning yangi tadqiqotlarini o‘qitish tizimini qo‘llash;
- klassik mexanikaga zamonaviy qarash, mexanikaning zamonaviy yo‘nalishlari bo‘yicha ma’ruza, amaliy mashg‘ulot va nazorat ishlarini tashkil etish, maxsus kursni o‘zlashtirish jarayonida ideal, yopishqoq suyuqliklar va elastik jismlar, ularning harakat tenglamalarini, chegaraviy va boshlang‘ich shartlarni bilishlari va shu asosda qo‘yilgan muayyan mexanik masalani yecha bilish **ko‘nikmalariga ega bo‘lishlari kerak.**
- Tajribaviy natijalar asosida olingan, amaliyotda keng qo‘llanib kelinayotgan formulalarni texnik obektlarda hisoblashga qo‘llash, tabiiy va aniq fanlarni turli sohalarga tatbiq qilish, mexanika masalalarini yechishga sonli hisoblash usullarni qo‘llash **malakasiga ega bo‘lishi kerak**.
- Mexanikaga oid masalalarni yechishda zamonaviy texnologiyalar va usullardan foydalana olish, tabiiy va aniq fanlar sohasida kasbiy faoliyat yuritish uchun zarur bo‘lgan bilim, ko‘nikma, malakaga ega bo‘lish, ilg‘or

axborot-texnologiyalarida ishlash, videodarslarni tayyorlash, egallangan tajribani tanqidiy ko‘rib chiqish qobiliyati, zarur bo‘lganda o‘z kasbiy faoliyatining turi va xarakterini o‘zgartira olish, tabiiy va aniq fanlarda tizimli tahlil usulidan foydalanish yo‘llarini ishlab chiqish, klassik mexanikaga zamonaviy qarash, kompyuter injiniringiga oid zamonaviy manbalardan foydalana olish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

“Mexanikada matematik modellashtirish” kursi ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Kursni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, axborotkommunikatsiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

- ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsion va elektron-didaktik texnologiyalardan;
- o‘tkaziladigan amaliy (seminar) mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi - “Mexanikada matematik modellashtirish” moduli mazmuni o‘quv rejadagi “Ta’limda axborot-kommunikatsion texnologiyalar” o‘quv moduli bilan uzviy bog‘langan holda mexanikaning dolzarb muammolari bo‘yicha pedagoglarning kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni - Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar suyuqlik va gaz modellari, gidrotexnik inshootlar, eksperimental aerodinamika, atmosferada va texnikaning boshqa sohalarida uchraydigan muammolarni tadqiq qilish yo‘llarini o‘rganish, ularni tahlil qilish va amalda qo‘llashga kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Modul bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya uquv yuklamasi			
		Жами	Jumladan		
			Назарий	Амаий машғулот	Кўчма машғулоти
1.	Zamonaviy mexanikada matematik modellashtirishning fundamental asoslari.	6	2	4	
2.	Tutash muxitlarning turli modellari.	6	2	4	
3	Termodinamika. Tutash muxitlarda to‘lqin tarqalishi va akustikada va astrofizikada qo‘llanilishi Termogidravlika. Elektromagnit elastiklik. Maksvel tenglamalari. Atmasfera va okean dinamikasi.	6	2	4	
	Jami:	**18**	**6**	**12**	

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. Zamonaviy mexanikada matematik modellashtirishning fundamental asoslari (2 soat).

1.1. Asosiy postulatlar va gipotezalar. Massaning saqlanish qonuni. Uzuliksizlik tenglamasi. .

1.2. Deformatsiya tenzori komponentalarini ko‘chish orqali ifodalash. Grin va Almansi tenzorlari

1.3. Sirt va hajmiy kuchlar. Kuchlanish tenzori. Harakat miqdorining saqlanish qonuni.

2-mavzu. Tutash muxitlarning turli modellari (2 soat).

2.1. Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari.Gromeke-Lemb tenglamasi

2.2 Yopishqoq suyuqlik va elastik jism modellari. Guk va Nave-Stoks qonunlari. Nave-Stoks va Lame tenglamalari.

2.3 Kompozitlar mexanikasida modellashtirish. Effektiv modullar tushunchasi.

3-mavzu. Termodinamika.Tutash muxitlarda to‘lqin tarqalishi va akustikada va astrofizikada qo‘llanilishi Termogidravlika. Elektromagnit elastiklik. Maksvel tenglamalari. Atmasfera va okean dinamikasi (2 soat).

3.1. Tutash muxitlarda to‘lqin tarqalishi va akustikada va astrofizikada qo‘llanilishi.

3.2. Magnitogidrodinamika. Termogidravlika. Magnitogidrodinamika. Elektromagnitelastiklik. Maksvel tenglamalari

3.3. Kompozitlar mexanikasida modellashtirish.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg‘ulot. Zamonaviy mexanikada matematik modellashtirishning fundamental asoslari. *Tutash muhit harakatini tavsiflashda Lagranj va Eyler koordinatalari. Muhitning harakat tenglamasi.Deformatsiya tenzori, uning bosh o‘qlari va bosh qiymatlari. Jism hajmini o‘zgarish tezligi* (4 soat).

2-amaliy mashg‘ulot. Tutash muxitlarning turli modellari. *Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari. Yopishqoq suyuqlik va elastik jism modellari. Nave-Stoks va Lame tenglamalari Tutash idishlardagi suyuqliklar mexanikasi Kompozitlar mexanikasida modellashtirish. Effektiv modullar tushunchasi* (4 soat).

3-amaliy mashg‘ulot. Tutash muxitlarda to‘lqin tarqalishi va akustikada va astrofizikada qo‘llanilishi Termogidravlika. Elektromagnit elastiklik. Maksvel tenglamalari. Atmasfera va okean dinamikasi (4 soat).

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi: - ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);

- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan loyiha yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);

- bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

Xulosalash (Rezyume, Veyer) metodi

Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Xulosalash” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

har bir guruh o‘ziga berilgan muammoni atroflicha tahlil qilib, o‘z mulohazalarini tavsiya etilayotgan sxema bo‘yicha tarqatma materialga yozma bayon qiladi;

vbatdagi bosqichda barcha guruhlar o‘z taqdimotlarini o‘tkazadilar. Shundan so‘ng, trener tomonidan tahlillar umumlashtiriladi, zaruriy axborotlr bilan to‘ldiriladi va mavzu yakunlanadi

Namuna:

Tahlil turlarining qiyosiy tahlili					
Tizimli tahlil		**Syujetli tahlil**		**Vaziyatli tahlil**	
Afzalligi	**kamchiligi**	**afzalligi**	**kamchiligi**	**afzalligi**	**kamchiligi**
Mummoni kelib chiqish sababli va kechish jarayonini aloqadorligi jihatidan o‘rganish imkoniyatiga ega	Alohida tayyorgarlikka ega bo‘lishni, ko‘p vaqt ajratishni talab etadi	O‘z vaqtida munosabat bildirish imkoniyatini beradi	Munosabat boshqa bir syujetga nisbatan qo‘llanishga yaroqsiz	Vaziyat ishtirokchilarining (obekt va subekt) vazifalarini belgilab olish imkonini beradi	Dinamik xususiyatni belgilab olish uchun qo‘llab bo‘lmaydi
Xulosa: Tahlilning barcha turlari ham o‘zining afzalligi va kamchiligi bilan bir biridan farqlanadi. Lekin, ular qatoridan pedagogik faoliyat doirasida qaror qabul qilish uchun tizimli tahlildan foydalanish joriy kamchiliklarni bartaraf etishga, mavjud resurslardan maqsadli foydalanishda afzalliklarga egaligi bilan ajralib turadi.					

“FSMU” metodi

Texnologiyaning maqsadi: Mazkur texnologiya ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, taqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o‘zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur texnologiyadan ma’ruza mashg‘ulotlarida, mustahkamlashda, o‘tilgan mavzuni so‘rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg‘ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Texnologiyani amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo‘lgan yakuniy xulosa yoki g‘oya taklif etiladi;
- har bir ishtirokchiga FSMU texnologiyasining bosqichlari yozilgan qog‘ozlarni tarqatiladi;
- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhiy tartibda taqdimot qilinadi.

□

□

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o‘zlashtirilishiga asos bo‘ladi.

Namuna.

Fikr: *“Tizim atrof muhitdan ajralgan, u bilan yaxlit ta’sirlashuvchi, bir-biri bilan o‘zaro bog‘langan elementlar majmuasi bo‘lib, tadqiqotlar obekti sanaladi”.*

Topshiriq: Mazkur fikrga nisbatan munosabatingizni FSMU orqali tahlil qiling.

“Assesment” metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashxis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assesment” lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida tinglovchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Namuna. Har bir katakdagi to‘g‘ri javobni baholash mumkin.

III. NAZARIY MASHG‘ULOT materiallari

1-MAVZU. ZAMONAVIY MEXANIKADA MATEMATIK MODELLASHTIRISHNING FUNDAMENTAL ASOSLARI.

1.4. Asosiy postulatlar va gipotezalar. Massaning saqlanish qonuni. Uzuliksizlik tenglamasi. .

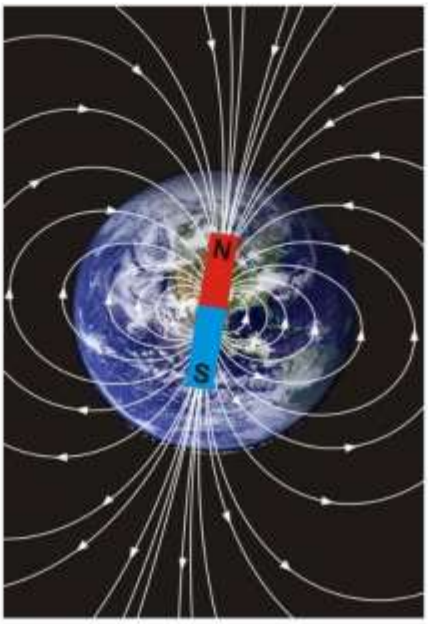
1.5. Sirt va hajmiy kuchlar. Harakat miqdorining saqlanish qonuni.

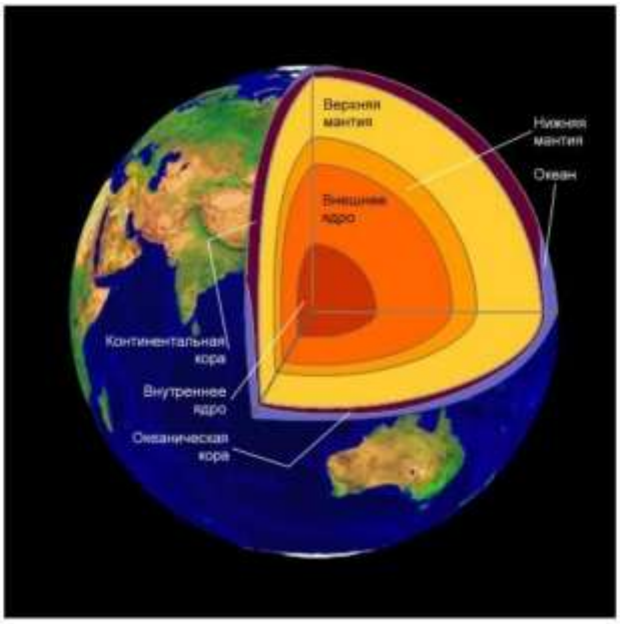
1.6. Deformatsiya tenzori komponentalarini ko‘chish orqali ifodalash. Grin va Almansi tenzorlari.

Tayanch so‘zlar: *Tutash muhit , gaz, suyuqlik, mexanika, postulat, uzuliksizlik, massa, zichlik, Eyler o‘zgaruvchilari, Lagranj koordinatalari, harakat miqdorining saqlanish qonuni, muvozanat tenglamalari.*

1.1. Asosiy postulatlar va gipotezalar. Massaning saqlanish qonuni. Uzuliksizlik tenglamasi

Tutash muhit mexanikasi (TTM) da gaz, suyuqlik va deformatsiyalanuvchi qattiq jismlarning makroskopik harakati o‘rganiladi. Ushbu fan fundamental tushunchalar, postulatlar va qonunlar asosida modellashtirilgan. TMM asosida qaralayotgan turli jismlar fazoning biror chekli yoki cheksiz qismini tutash holatida egallagan deb hisoblanadi, boshqacha qilib aytganda TTM molekulyar darajada jismning fizik holatini o‘rganmaydi. Bu esa o‘rganilayetgan jaroyonlarni tavsiflovchi funksiyalar uziliksizligini ta’minlaydi. Jism fazoning egallagan qismini to‘la qoplashi haqidagi fikr TMMning asosiy tushunchasi hisoblanadi.





Jismlar tashqi ta’sir natijasida o‘z o‘lchami va shaklini o‘zgartiradi va fikran ajratib olingan elementar hajmda kuchlar, zo‘riqishlar, bosimlar, cho‘zilishlar, siqilashlar va siljishlar kabi mexanik miqdorlar paydo bo‘ladi. Ushbu miqdorlar faqat tashqi ta’sirgagina bog‘liq bo‘lmay balki, jismning shakliga, uning fizik hossalariga ham bog‘liq bo‘ladi. Ushbu qonuniyatlarni ochish, o‘zaro bog‘lanishini aniqlash TMMning asosiy vazifasi hisoblanadi. Tutash muhitlar turli sabablar bilan fazoda harakatlanishi mumkin, ushbu harakatlanish moddiy nuqtalar orasidagi masofani o‘zgarishi bilan aniqlanadi. Bu yerda shuni yaqqol ko‘rish mumkinki, tutash muhit tushunchasini kiritmay yaxlit jismni tassavur etish mumkin emas, lekin moddiy nuqta tashqi ta’sir natijasida harakatlanganda ular orasidagi masofa o‘zgaradi, ya’ni muayyan “bo‘shliq” hosil bo‘ladi. Ikkinchi tomondan mikroskopik darajada muayyan “bo‘shliq”lar hamisha mavjud, lekin ular makroskopik darajada sezilmaydi.

Tutash muhitlar mexanikasining asosiy postulatlari va gipotezalari.

Tutash muhit mexanikasi (TTM) da gaz, suyuqlik va deformatsiyalanuvchi qattiq jismlarning makroskopik harakati o‘rganiladi. Ushbu fan fundamental tushunchalar, postulatlar va qonunlar asosida modellashtirilgan. TMM asosida qaralayotgan turli jismlar fazoning biror chekli yoki cheksiz qismini tutash holatida egallagan deb hisoblanadi, boshqacha qilib aytganda TTM molekulyar darajada jismning fizik holatini o‘rganmaydi. Bu esa o‘rganilayetgan jaroyonlarni tavsiflovchi funksiyalar uziliksizligini ta’minlaydi. Jism fazoning egallagan qismini to‘la qoplashi haqidagi fikr TMMning asosiy tushunchasi hisoblanadi.

Jismlar tashqi ta’sir natijasida o‘z o‘lchami va shaklini o‘zgartiradi va fikran ajratib olingan elementar hajmda kuchlar, zo‘riqishlar, bosimlar, cho‘zilishlar, siqilashlar va siljishlar kabi mexanik miqdorlar paydo bo‘ladi. Ushbu miqdorlar faqat tashqi ta’sirgagina bog‘liq bo‘lmay balki, jismning shakliga, uning fizik hossalariga ham bog‘liq bo‘ladi. Ushbu qonuniyatlarni ochish, o‘zaro bog‘lanishini aniqlash TMMning asosiy vazifasi hisoblanadi.

Tutash muhitlar turli sabablar bilan fazoda harakatlanishi mumkin, ushbu harakatlanish moddiy nuqtalar orasidagi masofani o‘zgarishi bilan aniqlanadi. Bu yerda shuni yaqqol ko‘rish mumkinki, tutash muhit tushunchasini kiritmay yaxlit jismni tassavur etish mumkin emas, lekin moddiy nuqta tashqi ta’sir natijasida harakatlanganda ular orasidagi masofa o‘zgaradi, ya’ni muayyan “bo‘shliq” hosil bo‘ladi. Ikkinchi tomondan mikroskopik darajada muayyan “bo‘shliq”lar hamisha mavjud, lekin ular makroskopik darajada sezilmaydi.

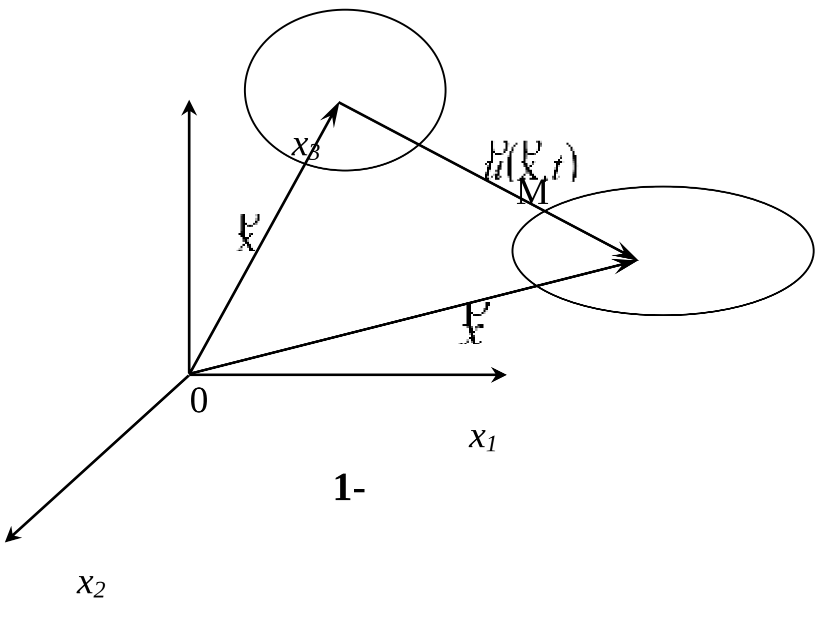
Tutash muhitdagi muayyan vaqt oraligida nuqtalar harakati fazoda amalga oshiraladi. Fazoni koordinatalar deb ataluvchi nuqtalar to‘plami aniqlaydi. Agar fazoda ikki nuqta orasidagi masofa aniqlangan bo‘lsa ushbu fazo metrik fazo deb ataladi. Metrik fazoda ikki nuqta orasidagi masofa $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ bo‘lsa, Yevklid fazosi hosil bo‘ladi. Yevklid fazosida Dekart koordinata sistemasini muomilaga kiritish mumkin. Ushbu fazoda biz Nyuton mexanikasini o‘rganamiz. Yevklid fazosinining ixtiyoriy geometrik nuqtasida tutash muhit mavjud bo‘ladi.

TMMda ixtiyoriy koordinata sistemalari uchun bir xil bo‘lgan absolyut vaqt bilan ish ko‘ramiz. Shunday qilib TMMning kontinium harakati Yevklid fazosida absolyut vaqtda o‘rganiladi.

TMM da matematik-taxlil usulari o‘rinlidir, ya’ni mexanik masala ma’lum matematik masalani yechishga keltiriladi va olingan yechim tajribalarda tekshiriladi. Nazariya bilan tajriba bir-birini to‘ldiradi.

1.2. Lagranj va Eyler koordinatalarida tutash muhit harakatini tavsiflash*;*

Tutash muhit ixtiyoriy nuqtalarining t_0 - dastlabki paytdagi holatini $\vec{X}(X^1,X^2,X^3)$ koordinatalar orqali va ixtiyoriy $t\geq t_0$ momentidagi koordinatalar $\vec{x}\{x^1,x^2,x^3\}$ lar bilan belgilaylik. Tutash muhitning t_0 momentda egallagan τ_0 hajmi $t\geq t_0$ momentda τ hajmga o‘zgaradi (1-rasm).



1-

Shunday qilib:

$$x^\alpha=x^\alpha\{X^1,X^2,X^3,t\},\ (\alpha=1,2,3) \tag{1.3}$$

yoki vektor ko‘rinishida :

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \tag{1.4}$$

boshlang‘ich $\vec{X}$ koordinatalari orqali ifodalangan moddiy nuqtaning harakat qonuniga ega bo‘lamiz. Lekin bu qonuniyat jism birga harakatlanayotgan hamroh $ox_1x_2x_3$ koordinatalari orqali ifodalandi. Agar biz ushbu qonuniyatni boshlang‘ich va qo‘zg‘olmas koordinatalar $OX_1X_2X_3$ orqali ifodalashimiz zarur bo‘lsa, $\vec{x}$ va $\vec{X}$ lar o‘rtasida har bir $t \geq t_0$ uchun bir qiymatli akslantirishni ta’minlash sharti bajarilishi zarur, ya’ni quyidagi yakobian noldan farqli bo‘lishi zarur:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \frac{\partial x^1}{\partial X^2} & \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial X^1} & \frac{\partial x^2}{\partial X^2} & \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial X^1} & \frac{\partial x^3}{\partial X^2} & \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

U holda, (1.4) o‘rniga: $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ ya’ni:

$$\begin{aligned} X^1 &= X^1\{x^1, x^2, x^3, t\} \\ X^2 &= X^2\{x^1, x^2, x^3, t\} \\ X^3 &= X^3\{x^1, x^2, x^3, t\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

ega bo‘lamiz, va aksincha (1.5) dan (1.4) ga o‘tish uchun, vaqtning qaralayotgan $t = t_0$ momentida:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \frac{\partial X^1}{\partial x^2} & \frac{\partial X^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^2}{\partial x^1} & \frac{\partial X^2}{\partial x^2} & \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^3}{\partial x^1} & \frac{\partial X^3}{\partial x^2} & \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilishi zarur.

Tutash muhit moddiy nuqtalarining ixtiyoriy trayektoriyadagi harakatlari uchun yuqorida keltirilgan yakobianlar vaqtning ayrim $t \geq t_0$onlarida nolga ham teng bo‘lishi mumkin. Bunday nuqtalar kritik nuqtalar yoki kiritik nuqtalar to‘plami deb ataladi. Tutash muhitlar mexanikasida yakobianlar noldan farqli deb hisoblanadi. Yakobianlar nolga teng bo‘lgan husisiy hollar alohida o‘rganiladi. Shaklga ko‘ra (2-rasm):

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \tag{1.6}$$

va $\vec{u}(X^1, X^2, X^3, t)$ ko‘chish vektori deyiladi. Ixtiyoriy M modiy nuqta harakatlanayotgan paytda, $\vec{X}$ koordinatalari vaqtga bog‘liq emas, demak moddiy nuqta tezligi vaqtning t momentida quyidagicha aniqlanadi:

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \tag{1.7}$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \tag{1.8}$$

$$\vec{W} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

Shunday qilib $\vec{u}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ lar $\vec{X}$ va t larga bog‘liq bo‘ldi:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}\{X^1, X^2, X^3, t\} \\ \vec{V} &= \vec{V}\{X^1, X^2, X^3, t\} \\ \vec{W} &= \vec{W}\{X^1, X^2, X^3, t\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Yuqorida foydalanilgan $\vec{X}$, t lar Lagranj koordinatalari deyiladi. Ushbu koordinata sistemasida moddiy nuqtaning vaqtning ixtiyoriy momentida gi holati uning dastlabki holati orqali aniqlanadi.

Moddiy nuqta harakatini tavsiflashda Eyler usuli.
Eyler va Lagranj koordinatalari o‘rtasidagi bog‘lanish.

Tutash muhit harakatini vaqtning ixtiyoriy momentida Dekart koordinatalar sistemasida qaraymiz. Fazoning $\vec{x}$ - radius vektorini harakat davomida o‘zgarmas qilib olamiz. U holda radius-vektor orqali belgilangan fazodagi moddiy nuqta turli parametrlar bilan tavsiflanishi mumkin. Fazoning tanlab olingan $\vec{x}$ nuqtasidan vaqtning turli momentida turli moddiy nuqtalar o‘tib turadi. Boshqacha qilib aytganda, hamrox Dekart koordinata sistemasining ma’lum nuqtasidan, o‘tib borayotgan moddiy nuqtalarga tegishli parametrlar o‘rganiladi. Masalan $\vec{V}(\vec{x},t)$ - tezlik Eyler maydonini hosil qiladi va $\vec{x}$ - Eyler koordinatasidir. Har bir $\vec{x} = const$ uchun moddiy nuqta o‘z trayektoriyasini “chizib” o‘tadi. Agar ushbu maydonda $\vec{V}(\vec{x},t)$ tezlik ma’lum bo‘lsa vaqtning dt bo‘lagida $\vec{V}(\vec{x},t)dt$ ko‘chishga ega bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Ushbu ko‘chishni $d\vec{x}$ desak:

$$d\vec{x} = \vec{V}(\vec{x},t)dt$$

bo‘ladi. Bundan

$$\frac{dx^k}{dt} = V^k(x^1, x^2, x^3, t) \tag{1.11}$$

Faraz qilaylik, (1.11) differensial tenglamalar sistemasi integrallari aniqlangan bo‘lsin:

$$x^k = x^k(c_1, c_2, c_3, t) \tag{1.12}$$

Boshlang‘ich holatda moddiy nuqtalar holati X^k lar bilan aniqlanadi:

$$x^k\Big|_{t=t_0} = X^k$$

c_1, c_2, c_3 lar X^k lar orqali ifodalanadi.

Demak, x^1, x^2, x^3, t Eyler koordinatalaridan $V^k(x^1, x^2, x^3, t)$ ma’lum bo‘lsa X^1, X^2, X^3, t Lagranj koordinatalariga o‘tish mumkin. Xuddi shuningdek

Lagranj koordinatalaridan Eyler koordinatalariga ham o‘tish mumkin. Masalan, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t)$ ma’lum bo‘lsa $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$ topish zarur bo‘lsin:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{V}(\vec{X}, t)$$

Bundan

$$\vec{V} = \vec{V}\left\lfloor \vec{X}(\vec{x}, t), t \right\rfloor = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

kelib chiqdi.

Eyler koordinata sistemasida tezlik va tezlanish. Ixtiyoriy nuqtalar tezligi $\vec{V} = \vec{V}(x^1, x^2, x^3, t)$ va $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ ma’lum bo‘lsa u holda, $\vec{V} = \vec{V}(x^1(\vec{X}, t), x^2(\vec{X}, t), x^3(\vec{X}, t), t)$ $\vec{X}$ nuqtada aniqlanadi.

$$V^k = V^k(x^i, t)$$

ifoda uchun

$$\frac{\partial V^k}{\partial t}$$

tezlanish bo‘la olmaydi, chunki

$$W^i = \frac{dV^i}{dt} = \frac{\partial V^i}{\partial t} + \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial t} = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^j \cdot \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$$

Umuman olganda har ikki usul bo‘yicha moddiy nuqta harakatini tavsiflash ekvivalent hisoblanadi. Tutash muhit holatiga muvofiq u yoki bu koordinata sistemasini qo‘llash mumkin. Odatda suyuqlik muhitida Eyler koordinatasini qo‘llash maqsadga muvofiq. Qattiq jismlar uchun Lagranj koordinatasini qo‘llash maqsadga muvofiqdir.

Muhitning massasi va zichligi. Massaning saqlanish qonuni. Uziliksizlik tenglamasi.

Berilgan koordinata sistemasida vaqt bo‘yicha harakatlanuvchi va inersiyasi bilan xarakterlanuvchi jismga moddiy jism deb ataladi. Jism inersiyasi uning massasi orqali xarakterlanadi. Jismning umumiy massasi elementar hajmda joylashgan jism bo‘lagi massalarining yig‘indisi sifatida qaraladi. Ixtiyoriy jism vaqtning istalgan momentida massa o‘zgarmasdir – bu **massaning saqlanish qonunidir**. Agar biror jism massasini m desak,

$$m = const \text{ yoki } \frac{dm}{dt} = 0$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

Tutash muhit $\Delta\tau$ hajmda Δm massaga ega bo‘lsin. U holda ushbu jism uchun o‘rtacha zichlik $\rho_{o'rt.}$ tushunchasini kiritishimiz mumkin:

$$\rho_{o'rtacha} = \frac{\Delta m}{\Delta \tau}$$

Jismning ixtiyoriy moddiy nuqtasining zichligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \tau}.$$

Cheksiz kichik hajm uchun massa quyidagicha aniqlanishi mumkin: $\Delta m \approx \rho \cdot \Delta \tau$. Umumiy hajm uchun massa quyidagicha aniqlanadi:

$$m = \int_{\tau} \rho\left(x^1, x^2, x^3, t\right) d\tau$$

Eyler koordinatasida aniqlangan hajm uchun massaning saqlanish qonuni quyidagi munosabatni hosil qiladi:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{\upsilon})\right) d\tau$$

Bundan ixtiyoriy nuqta uchun

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{\upsilon}) = 0$$

Yoki vaqt bo‘yicha to‘la differensial ko‘rinishida

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div \vec{\upsilon} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Ushbu tenglama Eyler koordinatalaridagi uzuliksizlik tenglamasi deb ataladi. Massaning saqlanish qonuning quyidagi hususiy hollarini qaraymiz:

1. Zichlik vaqtga bog‘liq emas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \ div(\rho \vec{\upsilon}) = 0.$$

2. $\rho = const$:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \ div \vec{\upsilon} = 0.$$

Oxirgi tenglama siqilmaydigan muhit uchun uziliksizlik tenglamasidir.

1.3. Deformatsiyalar tenzori Grin va Almansi tenzorlari

Ixtiyoriy nuqta atrofi deformatsiyasi ma’lum bo‘lishi uchun shu nuqtada olingan ixtiyoriy yo‘nalishdagi cheksiz kichik $\vec{X}_N(\vec{X} + \vec{\xi}) - \vec{X}_M(\vec{X}) = d\vec{X} = \vec{\xi}$ ning qiymati ma’lum bo‘lishi zarur va yetarliligi geometrik nuqtai nazardan ravshandir. YA’ni $t = t_0$ da

$$(d\vec{X})^2 = (\vec{\xi})^2 = \xi^i \xi^j \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}\, dX^i \cdot dX^j$$

Lekin $t = t_0$ da to‘g‘riburchakli Dekart koordinatalar sistemasi uchun $g_{ij} = \delta_{ij}$ bo‘lgani tufayli $(d\vec{X})^2 = \xi^i \xi^j \cdot \delta_{ij}$ bo‘ladi. Ma’lumki:

$$(\vec{x})_M = \vec{x}(X^i, t)$$

$$(\vec{x})_N = \vec{x}(X^i + \xi^i, t)$$

Lekin $\vec{\rho} = (\vec{x})_N - (\vec{x})_M$ ni X^i nuqta atrofida qatorga yoysak, quyidagini topamiz:

$$\vec{\rho} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^k}\xi^k = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i} dX^i + ...$$

Ko‘p nuqtalar bilan ko‘rsatilgan hadlar birinchi hadga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik o‘zgaruvchilar deb olsak va $\vec{\text{э}}_k = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^k}$ Lagranj koordinatalariga bog‘liq ifodaligini eslab yoza olamiz:

$$\vec{\rho} = \vec{\text{э}} \cdot dX^k = \vec{\text{э}}_k \cdot \xi^k$$

Demak, $t = t_0$ dagi $\vec{\xi} = \xi^k \cdot \vec{e}_k$ tola $t \geq t_0$ da $\vec{\rho} = \xi^k \cdot \vec{\text{э}}_k$ bo‘ladi.

$\vec{\rho} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^k}\xi^k$ dan $\rho^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \cdot \xi^k$ orqali bu almashtirishda $A_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^k}$ matritsa $\vec{\xi}$ ni $\vec{\rho}$ ga ko‘rilayotgan nuqta atrofida affin (chiziqli) almashtiradi. Uni $\vec{\rho} = \tilde{A}\vec{\xi}$ sifatida yozish mumkin.

Yuqoridagi xossalar asosida ko‘rish qiyin emaski, $\vec{\xi}$ tola (vektor) $\vec{\rho}$ tolaga (vektorga) o‘tadi. Masalan, $\xi^i \cdot \xi^i = R^2$ sfera $B_k^i \cdot B_j^i \cdot \rho^k \cdot \rho^j = R^2$ ellipsoidga o‘tadi.

Shunday qilib, biz yuqorida

$$\vec{\xi} = \xi^k \cdot \vec{e}_k \rightarrow \vec{\rho} = \xi^k \cdot \vec{\text{э}}_k \quad \left(\vec{\text{э}}_k = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^k} \right)$$

ifodalarni hosil qildik. Yoza olamiz:

$$\vec{\xi}^2 = \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \xi^2 = \delta_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j, \quad \left(\delta_{ij} = g_{ij}\big|_{t=t_0} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right)$$

$$\vec{\rho}^2 = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} = g_{ij} \cdot \xi_i \xi_j, \qquad \left(g_{ij} = \vec{\text{э}}_i \cdot \vec{\text{э}}_j\right)$$

$$\rho^2 - \xi^2 = \left(g_{ij} - \delta_{ij}\right) \cdot \xi^i \cdot \xi^j$$

Endi tola uchun quyidagi nisbiy o‘zgarishni xarakterlovchi miqdorni

$$e_\xi = \frac{\rho - \xi}{\xi} = \frac{\rho}{\xi} - 1$$

va

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - \delta_{ij}\right) \tag{3.18}$$

rangi ikkidan iborat tenzor elementlari ifodasini kiritaylik. U holda:

$$\rho^2 - \xi^2 = 2\varepsilon_{ij} \cdot \xi^i \cdot \xi^j$$

va

$$\frac{\xi^i}{\left|\vec{\xi}\right|} = l^i$$

desak,

$$\frac{\rho^2 - \xi^2}{\left|\vec{\xi}\right|^2} = 2\varepsilon_{ij} \cdot l^i \cdot l^j$$

bo‘ladi.

U holda

$$e_\xi = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ij} \cdot l^i \cdot l^j} - 1$$

ga ega bo‘lamiz.

ε_{ij} metrik tenzorlar elementlari orqali ifodalanganligi tufayli, shubhasiz tenzor elementlari bo‘la oladi va uni e bilan belgilaymiz:

$$E = \varepsilon_{IJ}\left(\vec{э}^I \otimes \vec{э}^j\right) \tag{3.19}$$

(3.19) bilan birga ko‘rilayotgan Lagranj koordinatalarida ushbu $E = \varepsilon^{ij}\left(\vec{э}_i \otimes \vec{э}_j\right)$, $E = \varepsilon^{i}_{\cdot j}(\vec{э}_i \otimes \vec{э}^j)$ larga ham ega bo‘lamiz.

Bu tenzor deformatsiya tenzori deyiladi va tutash muhit nuqtasi atrofi deformatsiyasini aniqlaydi.

Shunday qilib, (3.18) formula Lagranj koordinatalarida aniqlandi va ixtiyoriy dastlabki $t = t_0$ da olingan $\vec{X} = X^k \cdot \vec{e}_k$ nuqtadagi cheksiz kichik $\vec{\xi}$ tola (o‘zaro ortogonal koordinatalar sistemasida aniqlangan) $\vec{\rho} = \xi^i \cdot \vec{э}_i$ tola bo‘lib o‘zgaradi. O‘zaro ortogonal birlik bazis e_i vektorlar umumiy holda $\left|\vec{э}_i\right| \neq 1$ ga mos ravishda o‘tadi. Ixtiyoriy $t \geq t_0$ uchun $\vec{э}_i$ lar Lagranj koordinatalarida aniqlanadi va nuqta ko‘chgan yangi holat uchun o‘zaro ortogonal bo‘lishi shart bo‘lmagan bazis vektorlarni tashkil etadi. Agar dastlabki $\left(t = t_0\right)$ da nuqta atrofida olingan tola uchun $\vec{e}_i$ bazislar o‘zaro ortogonalligi $t \geq t_0$ da ham saqlansa va ularning uzunliklari (ular birga teng) ham saqlansa, ko‘rilayotgan tutash muhit zarrasi deformatsiyalanmaydi va u absolyut qattiq jism uchun olingan $\vec{\xi}$ tola kabi fazoda Lagranj koordinatalarida ilgarilama va aylanma harakatni (yoki ular yig‘indisi bo‘lgan vint harakatini) sodir etishi mumkin. U holda $t = t_0$ da olingan

$\dot{g}_{ij}$ (bu ifoda xususiy holda, biz ko‘rgandek $\dot{g}_{ij} = \delta_{ij}$ bo‘lishi mumkin va bunday olinishi Yevklid fazosida umumiylikka zid emas) $\dot{g}_{ij}$ ga teng bo‘lganicha (yoki δ_{ij} bo‘lganicha) qoladi va deformatsiya sodir bo‘lmaydi.

Deformatsiya tenzori uning bosh o‘qlari va bosh komponentalari

Biz ko‘rdikki, deformatsiya tenzori-simmetrikdir. Shuning uchun $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ tenzor elementlari bilan tutash muhitning har bir nuqtasida $\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j = C$ kvadratik formani tuzish mumkin. Ma’lumki, agar $\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j$ kvadratik forma tutash muhit biror nuqtasiga tegishli bo‘lsa, algebradan ma’lumki, shu nuqtada uni kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin, ya’ni

$$\varepsilon_1\left(d\eta^1\right)^2 + \varepsilon_2\left(d\eta^2\right)^2 + \varepsilon_3\left(d\eta^3\right)^2 = C_1$$

Bu yerda o‘zaro ortogonal η^1, η^2, η^3 koordinata o‘qlari o‘qlaridir. Bunda ε_{ij} lar koordinata o‘qlari o‘zgarishiga qarab o‘zgaradi va η^1, η^2, η^3 larga nisbatan $\varepsilon_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ bo‘ladi. O‘zaro ortogonal η^1, η^2, η^3 lar ma’lum bo‘lsa, kvadratik forma $\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j$ kanonik ko‘rinishga keladi.

Shunday qilib, deformatsiyalanuvchi tutash muhit istalgan nuqtasi atrofi deformatsiyasi ε_{ij} bilan beriladigan bo‘lsa, shu nuqtada deformatsiya jarayoni davomida o‘zaro ortogonal bo‘lgan uzluksiz harakatlananuvchi 3 ta o‘qlarni tuzish mumkin. Bu o‘qlarga nisbatan $\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j$ kvadratik forma ko‘rilganda, u eng sodda holda bo‘lib, deformatsiyani xarakterlovchi tenzor elementlaridan tuzilgan matritsa diagonal matritsadan iborat bo‘ladi.

Shunday qilib, bosh o‘qlarga nisbatan ushbu matritsalarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon^{1.}_{.1}, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon^{2.}_{.2}, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon^{3.}_{.3} \end{pmatrix}$$

Tushunish qiyin emaski, bu holda o‘qlar bo‘ylab olingan tola uchun faqat cho‘zilish yoki siqilish deformatsiyasigina mavjud bo‘lishi mumkin.

Endi deformatsiya tenzorining bosh komponentalari haqida fikr yuritaylik. Dastlabki $t = t_0$ momentda, ya’ni boshlang‘ich paytda tutash muhit holati ma’lum deb qabul qilamiz. Bu paytda, asosan, eng tabiiy holat sifatida tutash muhit deformatsiyalanmagan va uning holatini uch o‘lchovli Dekart koordinata sistemasida berish mumkin.

Deformatsiya tenzori sirti

Shunday qilib, deformatsiyalangan tutash muhit har bir nuqtasida shu nuqtaning funksiyalari sifatida 6 ta ε_{ij} ga egamiz. Ular nuqtadan nuqtaga o‘tishda, umuman olganda, o‘zgarishi bilan birga vaqtga ham bog‘liq bo‘lishi mumkin. Deformatsiya tenzori bosh o‘qlari va bosh qiymatlari ustida fikr yuritilganda har bir ondagi yo‘nalish va qiymatlar nazarda tutiladi. Olingan har bir nuqta uchun to‘g‘ri burchakli Dekart koordinata sistemasi kiritib, ushbu $\varepsilon_{ij}\, x^i \cdot x^j = c^2$ kvadratik forma orqali tuzilgan ikkinchi tartibli sirt deformatsiya tenzori sirti deyiladi. Deformatsiya tenzori bosh o‘qlari va bosh qiymatlari shu sirtning bosh o‘qlari va bosh qiymatlari bilan bir xil qilib olinishi mumkin. Analitik geometriyadan ma’lumki, ikkinchi tartibli sirtlar o‘z invariantlariga ega bo‘ladilar, ya’ni shu sirtni xarakterlovchi shunday 3 ta skalyar miqdor ko‘rsatish mumkinki, deformatsiyalangan tutash muhit har bir nuqtadagi to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini almashtirganda bu miqdorlar o‘zgarmaydilar va ular, tabiiy holda, ε_{ij} lar orqali aniqlanadilar.

Agar bosh o‘qlarni x^i lardan farqlash uchun η^i lar bilan belgilasak, ularga nisbatan deformatsiya tenzori sirti quyidagicha bo‘ladi:

$$\varepsilon_1(\eta^1)^2 + \varepsilon_2(\eta^2)^2 + \varepsilon_3(\eta^3)^2 = c_1^2 \qquad (3.21)$$

Endi yuqorida aytilgan bosh qiymatlar va bosh o‘qlarni topish bilan shug‘ullanamiz.

Agar $2F(x^1, x^2, x^3) = \varepsilon_{ij} x^i x^j = c^2$ desak, bosh yo‘nalishlar uchun $gradF = \lambda \vec{x}$ bo‘lishi kerak. Bu yerda λ -skalyar miqdor.

Agar $\vec{e}_i$ - birlik bazis vektorlar kiritsak, yoza olamiz:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_i = \lambda x^j \vec{e}_j$$

$$(\varepsilon_{ij} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_j) \cdot x^j = 0$$

Bundan

$$(\varepsilon_{i1} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_1) = 0$$
$$(\varepsilon_{i2} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_2) = 0$$
$$(\varepsilon_{i3} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_3) = 0$$

$\vec{e}_i$ lar o‘zaro tik birlik bazislar bo‘lganligi tufayli

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

bo‘lishi kerak. Bundan

$$-\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0$$

Bu yerda

$$J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$J_2 = \left(J_1^2 - \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}\right) \cdot \frac{1}{2} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

$$J_3 = det\left|\varepsilon_{ij}\right|$$

Bu miqdorlar - deformatsiya tenzori sirtining invariantlaridir.

Bu tenglamaning haqiqiy, o‘zaro teng bo‘lmagan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ildizlari bosh miqdorlarni belgilaydi. Masalan, xususiy holda, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ bo‘lsa, deformatsiya tenzori sirti sferadan iborat bo‘ladi va barcha o‘zaro tik qilib olingan (tekshirilayotgan nuqta uchun) yo‘nalishlar bosh yo‘nalishlar bo‘ladi va bosh miqdorlar o‘zaro teng bo‘ladi.

Deformatsiya tenzori sirtining bosh yo‘nalishlarini topaylik. Buning uchun yuqoridagi

$$\left(\varepsilon_{ij} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_j\right) \cdot x^j = 0$$

ifodaning har ikkala tomonini birlik bazis vektor $\vec{e}_i$ ga skalyar ravishda ko‘paytiramiz:

$$\left(\varepsilon_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}\right) \cdot x^j = 0$$

Agar

$$l^i = \frac{x^i}{\left|\vec{x}\right|} = cos\left(\vec{l} \cdot \vec{e}_i\right) \qquad \text{kiritsak}$$

$$\left(\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) \cdot l^j = 0 \qquad (3.23)$$

va $(l^1)^2 + (l^2)^2 + (l^3)^2 = 1$ ifodalarga ega bo‘lamiz va bulardan har bir λ_i ga mos ravishda to‘g‘ri keladigan 3 ta bosh yo‘nalishlarni topa olamiz.

Grin va Almansi tenzorlari

To‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi amalda ko‘p ishlatilishi tufayli deformatsiya tenzori E ning ε_{IJ} elementlarini ko‘chish vektori $\vec{u}(\vec{X}, t)$ orqali ifodasini keltirish maqsadga muvofiqdir. ε_{IJ} larning ko‘chish vektori komponentalari orqali Lagranj koordinatalarda ifodalaymiz. Buning uchun oldingi paragrafda keltirilgan formulalarda $\overset{\circ}{g}_{ij} = \delta_{ij}$ ekanligini nazarda tutib, izlanayotgan ifodalar formulalarini xususiy hol sifatida yoza olishimiz mumkin. Lekin biz bu yerda izlanayotgan formulalarni oddiy hisoblashlar orqali keltiramiz. Ma’lumki:

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij})$$

$$g_{ij} = (\vec{\vartheta}_i \cdot \vec{\vartheta}_j), \quad \vec{\vartheta}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i}\left\{\frac{\partial x^1}{\partial X^i}, \frac{\partial x^2}{\partial X^i}, \frac{\partial x^3}{\partial X^i}\right\}$$

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}, \quad \vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

Yoza olamiz:

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^i} = \frac{\partial X^k}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k(X^1, X^2, X^3, t)}{\partial X^i} = \delta_{ki} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i}$$

Bundan:

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial X^j}\right) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^k}{\partial X^j}\right) =$$

$$= \delta_{ki} \cdot \delta_{kj} + \delta_{ki} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j} + \delta_{kj} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j} =$$

$$= \delta_{ij} + \frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j}$$

Bu ifodani ε_{IJ} ifodasiga qo‘yib topa olamiz:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j}\right) \tag{3.29}$$

Ilova 1.

Tutash muhit harakati Dekart koordinatalarida, $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\vec{X}, t)$ ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, $\frac{\partial x_i}{\partial X_j}$ tenzori deformatsiya moddiy gradiyenti tenzori deyiladi. Harakat eyler koordinatalarida berilgan bo‘lsa, $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ deformatsiyaning fazoviy gradiyenti deyiladi.

$c_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_j}$ -Koshining deformatsiya tenzori,

$G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial X_j}$ -Grinning deformatsiya tenzori deyiladi.

Ilova 2.

(3.28) formula ko‘chish vektorining Lagranj koordinatalari orqali ifodalash orqali olinganligi tufayli uni Grinning chekli deformatsiya tenzori deb ham ataladi. Chekli deformatsiyaning Eyler koordinatalaridagi ifodasi (3.27) asosida olinadi va uning ifodasi Dekart koordinatalarida quyidagicha bo‘ladi:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{3.30}$$

Ushbu tenzor Almansining chekli deformatsiya tenzori. (3.29) va (3.30) formulalar tutash muhit ixtiyoriy nuqtasidagi mazmun jihatdan yagona bo‘lgan deformatsiya o‘lchovlarining mos ravishda Lagranj va Eyler koordinatalaridagi ifodalaridir, ularni, yuqorida ta’kidlangandek, L_{ij} va E_{ij} deb ham belgilanadi.

Nazorat savollari

1. Eyler va Lagranj o‘zgaruvchilarida uzluksizlik tenglamasi.
2. Ichki kuchlanish. Chekli hajmdagi tutash muhit uchun harakat miqdori tenglamasi.
3. Kuchlanish vektori. Kuchlanish vektori uchun asosiy munosabat. Kuchlanish tenzori.
4. Tutash muhit harakat tenglamasi (Dekart koordinata sistemasi va ixtiyoriy chiziqli koordinata sistemasi).
5. Harakat miqdori momenti tenglamasi. Klassik hol.
6. Tenzorning bosh yo‘nalishlari va xos vektorlari.
7. Tenzorning kanonik ko‘rinishi. Asosiy invariantlar. Tenzor sirti.
8. TMM fanini o‘rganishning Lagranj va Eyler usullari.
9. DeformatsiY. Nisbiy uzayish koeffitsiyenti. Deformatsiya tenzori, tenzorning kovariant komponentalarining fizik ma’nosi.
10. Deformatsiya tenzorini ko‘chish vektori orqali hisoblash formulalari.

2-MAVZU Muhit massasining saqlanish qonuni. Uzuliksizlik tenglamasi.

REJA:

2.1 Muhit massasining saqlanish qonuni. Uzuliksizlik tenglamasi;
2.2 Tutash muhitga ta’sir etuvchi sirt va hajmiy kuchlar. Harakat miqdori tenglamalari ;
2.3Kuchlanish tenzori. Bosh normal va urinma kuchlanishlar.

Tayanch so'zlar: *Tutash muhit , gaz, suyuqlik, mexanika, postulat, uziliksizlik, massa, zichlik, Eyler o'zgaruvchilari, Lagranj koordinatalari, harakat miqdorining saqlanish qonuni, muvozanat tenglamalari, kuchlanishlar tenzori, bosh o'qlar va bosh kuchlanishlar*

2.1 Muhit massasining saqlanish qonuni. Uzuliksizlik tenglamasi;

Berilgan koordinata sistemasida vaqt bo'yicha harakatlanuvchi va inersiyasi bilan xarakterlanuvchi jismga moddiy jism deb ataladi. Jism inersiyasi uning massasi orqali xarakterlanadi. Jismning umumiy massasi elementar hajmda joylashgan jism bo'lagi massalarining yig'indisi sifatida qaraladi. Ixtiyoriy jism vaqtning istalgan momentida massa o'zgarmasdir – bu **massaning saqlanish qonunidir**. Agar biror jism massasini m desak,

$$m = const \text{ yoki } \frac{dm}{dt} = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

Tutash muhit $\Delta\tau$ hajmda Δm massaga ega bo'lsin. U holda ushbu jism uchun o'rtacha zichlik $\rho_{o'rt.}$ tushunchasini kiritishimiz mumkin:

$$\rho_{o'rtacha} = \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

Jismning ixtiyoriy moddiy nuqtasining zichligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\rho = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}.$$

Cheksiz kichik hajm uchun massa quyidagicha aniqlanishi mumkin: $\Delta m \approx \rho \cdot \Delta\tau$. Umumiy hajm uchun massa quyidagicha aniqlanadi:

$$m = \int_{\tau} \rho\left(x^1, x^2, x^3, t\right) d\tau$$

Eyler koordinatasida aniqlangan hajm uchun massaning saqlanish qonuni quyidagi munosabatni hosil qiladi:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{\upsilon})\right) d\tau$$

Bundan ixtiyoriy nuqta uchun

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{\upsilon}) = 0$$

Yoki vaqt bo'yicha to'la differensial ko'rinishida

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div\vec{\upsilon} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Ushbu tenglama Eyler koordinatalaridagi uzuliksizlik tenglamasi deb ataladi. Massaning saqlanish qonuning quyidagi hususiy hollarini qaraymiz:

2. Zichlik vaqtga bog‘liq emas:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,\ div(\rho\vec{\upsilon})=0.$$

2. $\rho=const$:

$$\frac{d\rho}{dt}=0,\ div\vec{\upsilon}=0.$$

Oxirgi tenglama siqilmaydigan muhit uchun uziliksizlik tenglamasidir.

Tutash muhit harakatiga sabab bo‘la oladigan ta’sirlar kuchlardir. TMM asosan hajmlarga (ya’ni ulardagi moddiy nuqtalarga) taqsimlangan kuchlar va jismning deformatsiyalanishi tufayli fazoda har bir vaqt uchun muayyan zarralar (nuqtalar)dan tashkil topgan tutash muhitlar o‘zaro ta’sir kuchlari bilan ish ko‘radi.

Tutash muhit gipotezasiga asoslangan harakatda mujassamlangan kuchlar tushunchasi, aslida, ayrim sirt bo‘lagi yoki ma’lum hajmdagi tutash muhitga ta’sir etadi, deb qarash o‘rinlidir.

Δm massali elementga ta’sir etuvchi kuch bosh vektori $\Delta\vec{F}$ bo‘lsin deylik. U holda

$$\Delta\vec{F}=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta m}$$

olingan nuqtadagi ***massaviy kuch zichligi*** deyiladi (limit olinganda nuqta hamma vaqt Δm ni o‘z ichiga olgan hajmga tegishlidir).

$$\Delta\vec{\Phi}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta\tau}$$

hajmiy kuch zichligi deyiladi.

Cheksiz kichik $\Delta\tau$ hajmdagi Δm massali muhit uchun $\Delta\vec{F}=\vec{\Phi}\Delta\tau$ va $\Delta\vec{F}=\vec{F}\Delta m$ bo‘ladi.

Bundan $\vec{\Phi}=\rho\vec{F}$ bo‘ladi.

Yuqorida aytganimizdek, TMMda sirt kuchlari ham ko‘riladi va u asosiy tushunchalardan biri hisoblanadi. Tutash muhitga tegishli sirtni olaylik. Bu sirt tutash muhit ayrim zarralari geometrik o‘rni yoki muhitni chegaralovchi sirt ham bo‘lishi mumkin. Shu sirt orqali har bir on uchun sirtning bir tomonidagi muhit ikkinchi tomoniga ta’sir etadi. Agar bu ta’sir ichki Σ sirti uchun ko‘rilayotgan bo‘lsa, bunday ta’sir ichki kuchlanishlar tushunchasiga olib keladi.

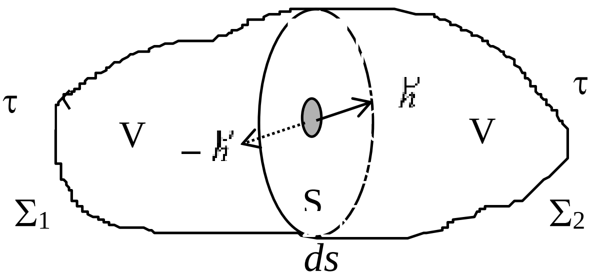
Endi Σ sirtning $d\sigma$ elementi uchun $d\vec{P} = \vec{p}\cdot d\sigma$ elementar kuchni kiritamiz. Bunda

$$\vec{p} = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta\tau}$$

bo‘lsin. U holda $\vec{p}$ - sirt kuchlari zichligi deyiladi. Ravshanki, $\vec{p}$ sirtning turli nuqtalarida turlicha va $\Delta\sigma$ element olingan nuqtadan o‘tuvchi ixtiyoriy boshqa Σ sirtlar uchun ham bir-biridan farq qiladi.

So‘nggi fikrni ravshanlashtirish uchun quyidagicha ish ko‘raylik. Tutash muhitga tegishli bo‘lgan V hajmni fikran Σ kesim bilan V_1 va V_2 hajmlarga ajrataylik (2-rasm).

Bu Σ kesimga tegishli *M* nuqta va uni o‘z ichiga olgan $d\sigma$ elementar yuza bo‘ylab V_1 va V_2 hajmdagi tutash muhitlarning o‘zaro ta’siri kuchini o‘rganaylik. Ko‘rish qiyin emaski, ixtiyoriy tanlangan *M* nuqtadan boshqa turlicha joylashgan Σ sirtlarni va ularda joylashgan cheksiz ko‘p elementar $d\sigma$ yuzalarni tasavvur qilish mumkin. Olingan har bir konkret hol uchun V_1 hajmdagi V_2 hajmga turli *S* yuzalar va ulardagi turlicha joylashgan elementar yuzachalar orqali sirt kuchlari ta’sir etadi. Bu yuzachalarni bir-biridan farqlash yo‘lini tuzishdan biri - shu yuzachalarga tik bo‘lgan birlik $\vec{n}$ vektorlar olishdir. Demak, olingan *M* nuqta o‘z koordinatalari bilan va ulardan o‘tuvchi Σ yuzalarga tegishli elementar yuzalar birlik $\vec{n}$ vektorlari bilan bir qiymatli farqlanadi.



2-расм

V_2 hajmdagi tutash muhitning V_1 hajmdagi tutash muhitga $d\sigma$ sirti orqali ta’sir kuchini $d\vec{P}$, so‘ngra $d\vec{P} = \vec{P}_n d\sigma$ deylik. $\vec{P}_n$ *M* nuqtaga, ya’ni $d\sigma$ ning holatiga bog‘liqdir. U holda $\vec{n}$ yo‘nalishining shakldagi V_2 ning V_1 ga $d\sigma$ orqali ta’siri $\vec{P}_n d\sigma$ ga teng bo‘lib, $\vec{n}$ V_1 ga nisbatan tashqi tomonga yo‘nalgan bo‘lsin. U holda $\vec{P}_n = -\vec{P}_{-n}$ ligini ko‘rish qiyin emas. Bu formula ichki kuchlanishlarning asosiy xossasi deb ham yuritiladi.

Ichki kuchlanish $\vec{P}_n$ chekli miqdor va uni $d\sigma$ elementar yuzaga normal bo‘lgan $\vec{n}$ va unga biror tik yo‘nalishda bo‘lgan va shu yuza bo‘ylab ta’sir etadigan urinma yo‘nalishi $\vec{\tau}$ ga proyeksiyalash mumkin:

$$\vec{P}_n = P_{nn} \cdot \vec{n} + P_{n\tau} \cdot \vec{\tau}$$

$P_{nn} \cdot \vec{n}$ - normal kuchlanish, $P_{n\tau} \cdot \vec{\tau}$ - urinma kuchlanishi deyiladi.

Endi tutash muhit harakat miqdori bilan tanishaylik. Nazariy mexanikadan ma’lumki, massalari m_i, tezliklari $\vec{\upsilon}_i$ bo‘lgan n ta moddiy nuqtalar sistemasi uchun harakat miqdori

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i$$

dir. Bu tushunchani Σ sirtli, V hajmda joylashgan va tezlik maydoni $\vec{\upsilon}$ hamda ρ ma’lum bo‘lgan tutash muhit uchun umumlashtiraylik.

Tutash muhit harakat miqdori deb, ta’rifga ko‘ra, ushbu miqdorga aytiladi:

$$\vec{Q} = \int_V \vec{\upsilon} \cdot \rho d\tau .$$

*2.2*Tutash muhitga ta’sir etuvchi sirt va hajmiy kuchlar. Harakat miqdori tenglamalari *;*

Tutash muhit harakati davomida o‘zgaruvchan, lekin chekli V hajmda joylashgan bo‘lib, uni chegaralovchi sirt Σ dan iborat bo‘lsin, deylik. Harakat miqdori

$$\vec{Q} = \int_{V(t)} \vec{\upsilon} \cdot \rho d\tau$$

bo‘ladi.

Harakat miqdorining o‘zgarishi tenglamasi xuddi moddiy nuqtalar sistemasi uchun yoziladigan munosabatga o‘xshash bo‘lib, quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}\int_V \vec{\upsilon} \cdot \rho d\tau = \int_{V(t)} \vec{F} \cdot \rho d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma$$

Hajmi V bo‘lgan tutash muhit harakat miqdoridan vaqt bo‘yicha olingan hosila ta’sir etuvchi barcha massaviy va sirt kuchlarining yig‘indisiga tengdir. Bu yerda V hajm ixtiyoriy, lekin unga joylashgan tutash muhit o‘z moddiy zarralarini jarayonda chegaralangan Σ sirt ichida saqlaydi deb tushuniladi.

Agar tutash muhitda hajmi V va sirti Σ da taqsimlangan kuchlardan tashqari kuchlar bo‘lsa, ularni tenglamaning o‘ng tomoniga qo‘shib yozish kerak.

Keltirilgan tenglama harakat miqdorining o‘zgarishini integral formasidagi ifodasidir. Shuning uchun bu formula harakat jarayonini xarakterlovchi parametrlar uzilishlarga ega bo‘lganda ham o‘rinli bo‘laveradi. Umuman aytganda, bu tenglama ixtiyoriy tutash muhit uchun o‘rinli bo‘lishdan tashqari, nazariy mexanikada Nyutonning ikkinchi qonuni qanchalik ahamiyatli bo‘lsa, TMMda ham bu tenglama shu qadar keng ishlatiladi va katta ahamiyatga ega.

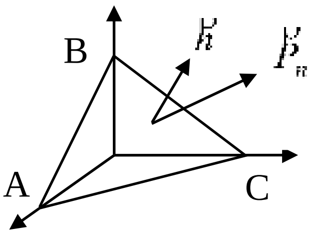
Harakat miqdori tenglamasini ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:

$$d\int_V \vec{\upsilon}\cdot\rho d\tau = \int_V \vec{F}\cdot\rho d\tau\cdot dt + \int_\Sigma \vec{p}_n\cdot dt\cdot d\sigma$$

Bu tenglamani ***impulslar tenglamasi*** ham deyiladi.

Ravshanki, keltirilgan integral ifodali tenglamalar uzluksiz va uzluksiz hosilali jarayonlarga ishlatilganda, differensial tenglamalarga keltirilishi mumkin.

Endi $\vec{P}_n = -\vec{P}_{-n}$ bilan birga, ushbu formulalarning o‘rinliligini yozaylik:



3-расм

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \vec{\upsilon}\cdot\rho d\tau\right) = \frac{d}{dt}\int_M \vec{\upsilon}dm = \int_M \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dm = \int_V \frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}\rho d\tau\right)$$

Tutash muhit ixtiyoriy *M* nuqtasida qirralari mos ravishda cheksiz kichik dx^1, dx^2, dx^3 lardan iborat bo‘lgan va ular Dekart koordinatalari o‘qlari x^1, x^2, x^3 lar bo‘ylab yo‘nalgan tetraedr olaylik (3-rasm). Uning hajmi V *ABC* tomoniga tushirilgan balandligi *h* va *ABC* yuzasiga tik ravishda tetraedr tashqi tomoniga yo‘nalgan birlik vektorni $\vec{n}$, unga ta’sir etuvchi kuchlanishni $\vec{p}_n$ deylik. Tetrayedr qolgan uch tomonlariga tik bo‘lgan birlik vektorlarni koordinata o‘qlari bo‘ylab yo‘nalgan bazis vektorlar $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ lar bilan berish mumkin. Bu maydonchalardagi kuchlanishlarni mos ravishda $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3$ deylik. U holda:

$$\vec{n} = n_i\cdot\vec{e}_i = cos\left(\vec{n},^\wedge x^i\right)\cdot\vec{e}_i$$

Agar *ABC* tomonining yuzasi *S* bo‘lsa, ravshanki, *OBC*, *OAB*, *OAC* tomonlari yuzalari mos ravishda $S\,cos\left(\vec{n}^\wedge x^1\right)$, $S\,cos\left(\vec{n},^\wedge x^2\right)$, $S\,cos\left(\vec{n},^\wedge x^3\right)$ ga teng bo‘ladi. Ko‘rilayotgan tetraedr uchun harakat miqdorining o‘zgarishi tenglamasini ishlataylik:

$$\int_V \vec{F}\rho d\tau + \int_\Sigma \vec{P}_n d\sigma - \int_V \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\rho d\tau = 0$$

Tetrayedr cheksiz kichik bo‘lganligi uchun:

$$-(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\rho)_M\cdot\frac{S\cdot h}{3}+(\vec{F}\cdot\rho)_M\cdot\frac{S\cdot h}{3}+\vec{p}_n\cdot S-\vec{p}^1\cdot S\cdot cos(\vec{n},x^1)-$$
$$-\vec{p}^2\cdot S\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2)-\vec{p}^3\cdot S\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3)+$$

$h\to 0$ da

$$\vec{P}_n=\vec{p}^1\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1)+\vec{p}^2\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2)+\vec{p}^3\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3)$$

muhim formulaga ega bo‘lamiz. Biz bu formulani chiqarganda *O* nuqta tutash muhit ichki nuqtasi va tetrayedr o‘z hajmi bilan harakatlanish jarayonida tutash muhit zarralaridan iborat degan tushunchaga asoslandik. Olingan formula tutash muhitni chegaralovchi sirt nuqtalari uchun ham ishlatilishi mumkinligini ko‘rish qiyin emas.

Tutash muhit xarakat tenglamalari.

Harakat miqdorining chekli V hajmdagi tutash muhit uchun o‘zgarishi tenglamasida ushbu

$$\int_{\Sigma}\vec{p}_n d\sigma=\int_V(\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x^2}+\frac{\partial\vec{p}}{\partial x^3})d\tau$$

almashtirish bajaraylik:

$$\int_V\vec{F}\cdot\rho d\sigma+\int_V(\frac{\partial\vec{P}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\vec{P}^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\vec{P}^3}{\partial x^3})d\tau-\int_V\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\rho d\tau=0$$

Bundan yoza olamiz:

$$\rho\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\rho\cdot\vec{F}+\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\vec{p}^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\vec{p}^3}{\partial x^3}.$$

Bu vektor ko‘rinishidagi differensial tenglama ***ixtiyoriy tutash muhit harakati differensial tenglamasi*** deyiladi. Bu tenglama uzluksiz va uzluksiz differensialli parametrlari bilan xarakterlanuvchi tutash muhit uchun hosil qilindi va uzluksizlik bajarilganda chekli hajm uchun keltirilgan harakat miqdorining o‘zgarishi haqidagi tenglamaga ekvivalentdir. Demak, chekli hajmi uchun olingan harakat miqdori o‘zgarishi tenglamasi umumiyroq va undan xususiy holda yuqorida keltirilgan differensial tenglamani olish mumkin. Dekart koordinatalari sistemasida

$$\vec{P}^i=p^{ki}\cdot\vec{e}_k\qquad\vec{\upsilon}=\upsilon^k\cdot\vec{e}_k$$
$$\vec{F}=F^k\cdot\vec{e}_k,\qquad\vec{p}_n=p_n{}^i\cdot\vec{e}_i$$

deb olsak, ushbu tenglamalarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} p_n{}^1 = p^{11} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{12} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{13} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \\ p_n{}^2 = p^{21} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{22} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{23} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \\ p_n{}^3 = p^{31} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{32} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{33} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\upsilon^1}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^1 + \dfrac{\partial p^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{12}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{13}}{\partial x^3} \\ \rho \dfrac{d\upsilon^2}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^2 + \dfrac{\partial p^{21}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{22}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{23}}{\partial x^3} \\ \rho \dfrac{d\upsilon^3}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^3 + \dfrac{\partial p^{31}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{32}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{33}}{\partial x^3} \end{cases}.$$

2.3Kuchlanish tenzori. Bosh normal va urinma kuchlanishlar.

Tashqi va ichki kuchlar ta’sirida tutash muhit deformatsiyalanishi bilan birga uning har bir nuqtasida mos zarralarda kuchlanganlik holati vujudga keladi.

$\vec{P}_n$ kuchlanish vektori, umuman olganda, nuqta koordinatalari bo‘yicha va olingan har bir birlik vektor $\vec{n}$ ning yo‘nalishiga bog‘liq ravishda o‘zgaradi. Tutash muhit kuchlanganlik holatida bo‘lganida, uning har bir nuqtasida ushbu jadvalni kiritish mumkin:

$$\begin{pmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{pmatrix}$$

Kuchlanish vektori $\vec{P}_n$ ning ixtiyoriy Dekart koordinatalar sistemasida ushbu formulasini yoza olamiz:

$$\vec{p}_n = \vec{p}^i \cdot n_i = p^{ki} \cdot \vec{\jmath}_k \cdot n_i = \vec{p}^i \cdot (\vec{\jmath}_i \cdot \vec{n}) = p^{ki} \cdot \vec{\jmath}_i \cdot (\vec{\jmath}_i \cdot \vec{n})$$

Bu ifoda $\vec{P}_n$ va $\vec{n}$ vektorlari o‘rtasidagi munosabatdir va u ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ham o‘rinli bo‘ladi. U holda p^{ki} kontravariant tashkil etuvchilariga ega

$$P = p^{ki} \cdot \vec{\jmath}_k \otimes \vec{\jmath}_i$$

tenzorni kiritish mumkin. Bu tenzor ichki kuchlanishlar tenzori deyiladi va ushbu

$$p_n = \vec{p}^i \cdot n_i$$

ixtiyoriy koordinatalar sistemasida o‘rinli bo‘ladi. Biz

$$p^{ki} = p^{ik}$$

bo‘lgan holni ko‘rish bilan chegaralanamiz.

Kuchlanish tenzori uchun tenzor sirti deb Dekart koordinatalar sistemasida olingan

$$p^{ki} \cdot x_k \cdot x_i = 2\phi(x_1, x_2, x_3) = const$$

ikkinchi tartibli sirtga aytiladi.

Bu sirtni kuchlanganlik holatidagi ixtiyoriy nuqtada tuzish uchun shu nuqtada ixtiyoriy $\vec{n}$ normalli yuzachaga ta'sir etuvchi $\vec{P}_n$ kuchlanishni olaylik va uning uchun quyidagi ifodalar o'rinli bo'lishini osonlik bilan ko'rish mumkin:

$$\vec{p}_n \cdot \vec{n} = p_{nn} = (\vec{p}^i \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}_i = p^{ki} \cdot n_k \cdot n_i .$$

Agar to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida tekshirilayotgan nuqtada olingan radius-vektori

$$\vec{r} = x_i \cdot \vec{e}_i \quad \text{ва} \quad n_i = \frac{x_i}{r}$$

desak, yuqoridagi kvadratik formani tuzib tenzor sirtini hosil qila olamiz. Bu sirt uchun shunday o'zaro tik uchta $\vec{r}$ yo'nalishlarni ko'rsatish mumkinki, bu yo'nalishlarga tik bo'lgan maydonchalarda urinma kuchlanishlar nolga teng bo'ladi va bu yo'nalishlar kuchlanish tenzorining bosh o'qlari bo'ladi. Bu o'qlarga nisbatan, ravshanki, sirt tenglamasi kanonik ko'rinishga ega bo'lib, bu sirt bosh qiymatlarini ham topish mumkin. Bosh o'qlarga tik bo'lgan elementar maydonchaga (olingan nuqta shu maydonchadadir) tegishli $\vec{P}_n$ kuchlanish $\vec{n}$ normal yo'nalishida bo'lishidan, yoza olamiz:

$$\vec{p}_n = \lambda \cdot \vec{n},$$

$$\vec{p}_n = \lambda \cdot n_i \cdot \vec{e}_i,$$

$$p^{ki} \cdot n_i \cdot \vec{e}_k - \lambda n_i \cdot \vec{e}_i = 0$$

$$p^{ki} \cdot n_i \cdot \vec{e}_k - \lambda \cdot \delta_k^i \cdot n_i \cdot \vec{e}_k = 0$$

$$(p^{ki} - \lambda \cdot \delta_k^i) \cdot n_i \cdot \vec{e}_k = 0$$

Bundan $(p^{ki} - \lambda \cdot \delta_k^i) \cdot n_i = 0$. Bu tenglamadan $\left| p^{ki} - \lambda \cdot \delta_k^i \right| = 0$ ni topamiz. Agar bu determinantni λ ga nisbatan yozsak, quyidagi haqiqiy ildizga ega bo'lgan kubik tenglamani hosil qila olamiz:

$$-\lambda^3 + J_1' \cdot \lambda^2 - J_2' \cdot \lambda + J_3' = 0$$

Bu yerdan

$$J_1' = p^{11} + p^{22} + p^{33} = p^1 + p^2 + p^2$$

$$J_2' = \begin{vmatrix} p^{11} & p^{12} \\ p^{21} & p^{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p^{11} & p^{13} \\ p^{31} & p^{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p^{22} & p^{23} \\ p^{32} & p^{33} \end{vmatrix}$$

$$J_3' = det\left\| p^{ki} \right\|$$

J_1', J_2' va J_3' lar ***kuchlanish tenzori invariantlari*** deyiladi va bu miqdor ixtiyoriy koordinatalar sistemasida o‘z qiymatini o‘zgartirmaydi. Ularning qiymati muayyan payt uchun olingan tutash muhit kuchlanganligini belgilovchi p^{ki} largagina bog‘liqdir. Ular tutash muhit turli nuqtalarida turli kuchlanganlik holati mavjud bo‘la olishi va ular vaqtga ham bog‘liq bo‘la olishi tufayli invariantlar p^{ki} lar orqali olingan nuqta va vaqtga bog‘liqdir. Berilgan kubik tenglama $p^{ki} = p_{ki}$ bo‘lganligi uchun 3 ta haqiqiy ildizga ega, ular ***kuchlanish tenzorining bosh qiymatlari*** deyiladi va ularni quyidagicha yozamiz:

$$\lambda_1 = p_{n1} = p_1, \lambda_2 = p_{n2} = p_2, \lambda_3 = p_{n3} = p_3.$$

Nazorat savollari

11. Ideal suyuqlik modeli. Eyler tenglamalari.
12. Elastik jism va yopishqoq suyuqlik. Izotrop muhitlar uchun Guk va Nave-Stoks qonunlari.
13. Lame tenglamalari. Yung moduli va Puasson koeffitsiyentlari.
14. Nave-Stoks tenglamalari. Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsiyentlari.

 p_{ki} bo‘lganligi uchun 3 ta haqiqiy ildizga ega, ular ***kuchlanish tenzorining bosh qiymatlari*** deyiladi va ularni quyidagicha yozamiz:

$\square_1 \square p_{n1} \square p_1, \square_2 \square p_{n2} \square p_2, \square_3 \square p_{n3} \square p_3.$

Nazorat savollari

1. Ideal suyuqlik modeli. Eyler tenglamalari.
2. Elastik jism va yopishqoq suyuqlik. Izotrop muhitlar uchun Guk va Nave-Stoks qonunlari.
3. Lame tenglamalari. Yung moduli va Puasson koeffitsiyentlari.
4. Nave-Stoks tenglamalari. Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsiyentlari.

3-MAVZU: Tutash muhitlarning klassik modellari..

REJA:

3.1. **Ideal suyuqlik harakatining to'la tenglamalari sistemasi*****;***

3.2. **. Yopishqoq suyuqlik va elastik jism modellari*****;***

3.3. **Nave-Stoks va Lame tenglamalari .**

Tayanch so'zlar *Tutash muhit , gaz, suyuqlik, mexanika, postulat, uziliksizlik, massa, zichlik, Eyler o'zgaruvchilari, Lagranj koordinatalari, harakat miqdorining saqlanish qonuni, muvozanat tenglamalari, kuchlanishlar tenzori, bosh o'qlar va bosh kuchlanishlar*

3.1. Ideal suyuqlik harakatining to'la tenglamalari sistemasi*;*

Jismlarning tutash muhitlarga mansubligini tajribalar asosida tekshirish mumkin. Suyuqliklar, gazlar va deformatsiyalanadigan qattiq jismlar tutash muhit sifatida eng umumiy fizik xususiyatlarga ega bo‘lishlaridan tashqari, ularning har birlariga xos farqlari mavjudki, ularni e’tiborga olgan holda tahlil etish ham tutash muhit mexanikasining asosiy vazifalaridandir. Ichki va tashqi kuchlarga, kuchlanishlarga tutash muhit zarralari reaksiyalari turlicha bo‘lishi tabiiydir. Masalan, suv va temir bo‘laklari og‘irlik maydonida bir-biridan nihoyatda katta farq qila oladigan mexanik ko‘chishlarga, siljishlarga ega bo‘lishi kundalik hayotda ma’lum: suyuqlik zarralarida har bir elementar maydonchaga tegishli urinma kuchlanishlar temirdagiga qaraganda nihoyatda kichik yoki nolga tengligini elementar fizika kursi asosida, oddiy tajriba asosida ta’kidlash mumkin. Albatta, tutash muhitlar sifatida faqatgina suyuqlik va gazlar, ma’lum qonuniyatlar asosida deformatsiyalanadigan qattiq jismlargina emas, balki murakkab ichki kuchlanganlik, u bilan bog‘liq bo‘lgan va vaqt o‘tishiga ham bog‘liq bo‘lgan jarayonlar tekshirilishi mumkin.

Bu bobda tutash muhitning eng sodda modellari sifatida tan olingan va shuning uchun ham klassik modellar deb ataluvchi tutash muhit modellari bilan ish ko‘ramiz. Har bir model uchun ta’rif berish asosida ularning boshqa tutash muhit modellaridan farqi va ta’sir doirasi ajratiladi, ular uchun mexanika qonunlari tatbiqi asosida asosiy tenglamalari keltirib chiqariladi. Olingan tenglamalar massaning saqlanish qonuni, harakat miqdori, uning momenti o‘zgarishi tenglamalari va, umuman olganda, keyingi boblarda o‘rganiladigan termodinamika qonunlaridan kelib chiqadigan munosabatlar asosidagi tenglamalar sistemasidan iborat bo‘lib, bu tenglamalar real fizik jarayonlarga mos keluvchi chegaraviy va boshlang‘ich shartlarni ifodalovchi tenglamalar bilan birgalikda yagona sistemani tashkil etadi.

Bu bobda termodinamik jarayonlar o‘zgarmas bo‘lgan hol uchun tutash muhitning eng sodda modellari - klassik modellari o‘rganiladi. Bu modellarni tuzish yopiq tenglamalar sistemasini tuzishdan iboratdir.

Ideal suyuqlik va gazlar

Ideal suyuqlik va gazlar uchun ushbu ta’rifni berish mumkin: muvozanat va harakat jarayoni uchun har bir ko‘rilayotgan $\vec{P}_n$ kuchlanish vektori shu kuchlanish aniqlangan birlik normali $\vec{n}$ bo‘lgan ixtiyoriy yuzaga normal chizig‘i yo‘nalishida bo‘lgan tutash muhitga ***ideal suyuqlik (gaz)*** deyiladi.

Ta’rifdan ideal suyuqlik va gazlarda $\vec{P}_n$ kuchlanishning $\vec{n}$ ga tik yo‘nalishga proyeksiyasi - urunma tashkil etuvchisi nolga teng bo‘ladi. Ta’rifdan $\vec{P}_n = \lambda \cdot \vec{n}$ ligi kelib chiqadiki, bu yerda λ skalyar miqdor va u noldan farqli deb olinishi kerak. Umuman olganda, λ musbat va manfiy bo‘lishi mumkin. Lekin ideal suyuqlik (gazlar) odatda siqilgan holda uchrashini e’tiborga olsak $\lambda < 0$ bo‘ladi va uni $\lambda = -P$ (P>0 - bosim deb ataladi) deb belgilanadi. Bunday tutash muhit ixtiyoriy nuqtasida harakat va muvozanat onlarida kuchlanish sirti sferadan iborat bo‘lib, bosh kuchlanishlar uzaro teng va $p_1 = p_2 = p_3 = -p$ bo‘ladi.

Shunday qilib, kuchlanish tenzori ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

Bunday tenzorga shar tenzori deyiladi, ko‘rish qiyin emaski, ushbu formulalar o‘rinli bo‘ladi:

$$P^{ij} = -p \cdot \delta^{ij}, \; P_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} \tag{3.3}$$

Ideal suyuqlik va gazlarning Dekart koordinatalari sistemasidagi harakat differensial tenglamalarini chiqaraylik. Buning uchun ixtiyoriy tutash muhitning eyler koordinatalaridagi ushbu tenglamasini olaylik:

$$\rho \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \tag{3.4}$$

(3.3) ni (3.4) ga qo‘yib, topamiz:

$$\rho \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

(3.5) ni birlik $\vec{e}_i$ bazis vektorga ko‘paytirib qo‘shsak ushbu vektor tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} - grad p \tag{3.6}$$

(3.5) yoki (3.6) tenglama ideal suyuqlik (gaz) lar uchun e***ylerning harakat differensial tenglamasi*** deyiladi. Bu tenglama eyler koordinatalaridagi ushbu differensial tenglamalar sistemasidan iboratdir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3} = F_1 - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_1} \\
&\frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3} = F_2 - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_2}. \\
&\frac{\partial \upsilon_3}{\partial t} + \upsilon_1 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1} + \upsilon_2 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2} + \upsilon_3 \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3} = F_3 - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

__**Masala.**__ **e**yler koordinatalarida $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + grad \frac{\upsilon^2}{2} + 2[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]$ bo‘lishi isbotlansin. Bu yerda $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot \vec{\upsilon}$ - uyurma vektoridir.

Agar bu masaladan foydalansak, (3.6) tenglama o‘rniga ushbu tenglamani ham olish mumkin:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \frac{1}{2} grad \upsilon^2 + [rot \vec{\upsilon} \times \vec{\upsilon}] = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad p \tag{3.8}$$

(3.8) tenglama ideal suyuqlik (gaz) harakati tenglamasining Lemb-Gromeko shaklidagi vektor differensial tenglamasi deyiladi.

Ideal suyuqlik va gazlar harakati o‘rganilganda (3.6) yoki (3.7) tenglamalardan maqsadga muvofiq holda foydalanish mumkin.

Yuqoridagi tenglamalar qatoriga massaning saqlanish qonuni tenglamasini qo‘shib qaraylik. U holda tenglamalar sistemasi uchta (7) tenglama va ushbu to‘rtinchi tenglamadan iborat bo‘ladi:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{\upsilon}) = 0 \qquad (3.9)$$

Massaviy kuchlar zichligi $\vec{F}$ ma’lum desak, (3.7) va (3.9) tenglamalar sistemasida v_1, v_2, v_3, p va ρ lar noma’lumlardan iborat bo‘lib, tenglamalar soni to‘rtta, noma’lumlar soni esa beshta bo‘ladi. Tenglamalar sistemasi yopiq sistemadan iborat bo‘lishi uchun, ravshanki, yana bitta tenglama etishmaydi.

Endi ideal suyuklik va gaz tenglamalari sistemasi yopiq bo‘lgan ayrim hollarni ko‘raylik:

a) bosim va zichliklar o‘rtasida har bir muhit zarrasi uchun funksional munosabat o‘rnatilgan hol - $p = f(\rho)$. Agar bu munosabat yuqorida keltirilgan tenglamalar sistemasi safiga keltirilsa, u holda tenglamalar sistemasi yopiq bo‘ladi. Bunday munosabat mavjud bo‘lgan jarayon ***barotrop jarayon*** deyiladi. $p = R\cdot\rho\cdot T$ tenglamasiga bo‘ysinuvchi elementar fizika kursidan ma’lum bo‘lgan gaz holati tenglamasi bunga misol bo‘la oladi (bu yerda R va T lar o‘zgarmas miqdorlar).

b) $\frac{dp}{dt} = 0$ bo‘lgan hol. Bu holda massaning saqlanish tenglamasi $div\vec{\upsilon} = 0$ bo‘ladi. Bu ikki tenglamani eyler tenglamalari bilan birgalikda olinganda yopiq tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bunday holat har bir fizik zarra zichligi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmas, deb olinishini bildiradi.

Yuqorida keltirilgan yopiq tenglamalar sistemasi chekli yoki cheksiz sohalarda ko‘riladi va ularni integrallashda soha chegarasidagi shartlar va izlanuvchi funksiyalarni topish uchun boshlang‘ich shartlar berilishi talab etiladi.

3.2. . Yopishqoq suyuqlik va elastik jism modellari*;*

Tutash muhitning klassik modellaridan yana biri chiziqli elastik jism deb qaraladigan deformatsiyalanuvchi tutash muhit modelidir. Chiziqli elastik jism umumiy holda ta’rif berish mumkin bo‘lgan elastik jismlarning xususiy holi bo‘lib, tutash muhit ayrim zarrasi yoki ko‘rilayotgan muhit zarralaridan tashkil topgan uzluksiz soha fizik nuqtalari uchun kuchlanish tenzori elementlari deformatsiya tenzori va boshqa o‘zgaruvchilarning chiziqli funksiyasi bo‘ladi. elastik jism modeli ta’rifini berishdan ilgari deformatsiyalanuvchi qattiq jismlar haqida umumiy tasavvurimizni kengaytirishga harakat qilaylik. Jism bo‘lagi qo‘yilgan tashqi va ichki kuchlar ta’sirida o‘zining hajmi va shaklini o‘zgartirishi va bu ta’sirlar yo‘qotilsa, u o‘zining dastlabki holatiga qaytishi mumkin. Bunday jism e***lastik jism*** deyiladi. Jismlarning uning deformatsiyalanishiga sabab bo‘lgan ta’sirlari olib tashlanishi bilan, o‘zining dastlabki shakli va hajmiga qayta olishi xossasi jism elastiklik xossasi deyiladi, yo‘qotilgan deformatsiya esa elastik deformatsiyani ifodalaydi. Turli muhitlarda tashqi kuchlar olib tashlanganda o‘z holatiga to‘la qayta olmaydigan jarayonlar ham mavjudligini kuzatish mumkin, bunday jism elastik jism bo‘la olmaydi: yuksizlanish jarayonida hosil bo‘lgan deformatsiya qoldiq deformatsiya bo‘ladi va bunday deformatsiya plastik deformatsiya deyiladi va jismni elastik jism modeli bilan ifodalab bo‘lmaydi.

Elastik jism modelining ta’rifini beraylik: kuchlanish tenzori elementlari jism zarrasida ushbu $p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ bir qiymatli munosabat bilan aniqlansa, bunday muhit elastik jism deyiladi. Bu erda $g^{\alpha\beta}$ - metrik tenzor elementlari, T - harorat, χ_i lar jismni xarakterlovchi parametrlar.

Tajribalar shuni ko‘rsatadiki, ko‘pgina qattiq jismlar uchun kuchlanish tenzori elementlari deformatsiya tenzori elementlari va haroratning o‘zgarishi bilan chiziqli munosabatda bo‘ladi. Bunday chiziqli munosabat Guk qonuni deyiladi. Formal nuqtayi nazardan deformatsiyalanish boshlanishidan oldin, ya’ni dastlabki paytda jism harorati ko‘rilayotgan zarra uchun o‘zgarmas va o‘z qiymatini saqlaydi va shu paytda $p^{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ deylik. U holda $p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta})$ ni teylor qatoriga yoyib, ε_{ij} lar cheksiz kichik miqdorlar deb olib, ushbu munosabatni - umumlashgan Guk qonuni deb ataluvchi formulani yoza olamiz:

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} \tag{3.10}$$

(3.10) formula elastik jism biror zarrasi uchun yozilgan bo‘lib, muhit turli nuqtalarida $A^{ij\alpha\beta}$ lar o‘zgarishi mumkin. $A^{ij\alpha\beta}$ lar T va χ_i larga ham bog‘liq bo‘lishi, T va χ_i lar turli zarralar uchun turlicha o‘zgarishi yoki turli o‘zgarmas miqdorlarga teng bo‘lishi mumkin. Shunday qilib, $A^{ij\alpha\beta}$ lar muhit turli qismlari (zarralari) uchun turlicha o‘zgarmaslarni berishi mumkin. Bunday elastik jism bir jinsli bo‘lmagan elastik jism deyiladi, aks holda jism bir ljinsli elastik jism deyiladi.

Umumlashgan *Guk qonunini* ifodalovchi (3.10) ifodadagi $A^{ij\alpha\beta}$ rangi 4 ga teng tenzorligi p^{ij} va ε_{ij} lar tenzorligidan ravshandir va bu tenzor elementlari soni 81 tadir. $p^{ij}=p^{ji}$ va $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$ ligidan (3.10) ifodada $A^{ij\alpha\beta}$ lar soni 36 tadan iboratligini ko‘rish qiyin emas.

Barcha yo‘nalishlar bo‘yicha jism xossalari bir xil bo‘lsa bu jism izotrop, aks holda anizotrop deyiladi. Ushbu munosabatlarni yoza olamiz:

$$\begin{aligned} p^{ij} = A^{ij11}\cdot\varepsilon_{11} + A^{ij22}\cdot\varepsilon_{22} + A^{ij33}\cdot\varepsilon_{33} + (A^{ij12} + A^{ij21})\cdot\varepsilon_{12} + \\ + (A^{ij13} + A^{ij31})\cdot\varepsilon_{13} + (A^{ij23} + A^{ij32})\cdot\varepsilon_{23} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} p^{ji} = A^{ji11}\cdot\varepsilon_{11} + A^{ji22}\cdot\varepsilon_{22} + A^{ji33}\cdot\varepsilon_{33} + (A^{ji12} + A^{ji21})\cdot\varepsilon_{12} + \\ + (A^{ji13} + A^{ji31})\cdot\varepsilon_{13} + (A^{ji23} + A^{ji32})\cdot\varepsilon_{23} \end{aligned} \tag{3.12}$$

(3.11) va (3.12) munosabatlarda chap va o‘ng tomonlari o‘zaro tengligidan ushbu munosabatlarni keltirib chiqaramiz:

$$A^{ij11} = A^{ji11},\ A^{ij22} = A^{ji22},\ A^{ij33} = A^{ji33} \tag{3.13}$$

$$A^{ij12} + A^{ij21} = A^{ji12} + A^{ji21}$$

$$A^{ij13} + A^{ij31} = A^{ji13} + A^{ji31} \tag{3.14}$$

$$A^{ij23} + A^{ij32} = A^{ji23} + A^{ji32}$$

(3.13) va (3.14) asosida, umumiyatga chek qo‘ymagan holda, ushbu munosabatlarni olamiz:

$$A^{ij\alpha\beta} = A^{ji\alpha\beta}, A^{ij\alpha\beta} = A^{ij\beta\alpha} \tag{3.15}$$

Shunday qilib, eng umumiy holdagi anizotrop chiziqli elastik jism uchun $A^{ij\alpha\beta}$ lar soni 36 ta bo‘ladi.

Izotrop muhit uchun Guk qonuni

Dekart koordinatalar sistemasini ixtiyoriy ravishda o‘zgartirganda elastik jism xossalarini aniqlovchi $A^{ij\alpha\beta}$ lar o‘zgarmasdan qolsa, bunday jism izotrop elastik jism deyiladi va $A^{ij\alpha\beta}$ izotrop to‘rtinchi rangli tenzor deyiladi. endi δ_{ij} -birlik izotrop tenzorligi asosida olingan ushbu rangi to‘rtga teng bo‘lgan $\delta_{ij} \cdot \delta_{kl}$ va $\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{kj}$ izotrop tenzorlarni olaylik. Ixtiyoriy izotrop tenzor $A^{ij\alpha\beta}$ ni ularning chiziqli kombinatsiyasi sifatida, ya’ni

$$A^{ij\alpha\beta} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \mu \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}) \tag{3.16}$$

ko‘rinishida yozish mumkinligini isbotlaylik. (3.11) da *i* va *j* indekslarni *1, 2, 3* lar bo‘yicha qo‘yib o‘qlarni almashtirishdan p^{ij} lar o‘zgarmas bo‘lishi kerakligini e’tiborga olsak, masalan, ushbu munosabatlarni hosil qilamiz:

$$A^{1122} = A^{1133} = A^{2211} = A^{2233} = A^{3311} = A^{3322}$$
$$A^{1212} = A^{1313} = A^{2121} = A^{2323} = A^{3131} = A^{3232} \tag{3.17}$$

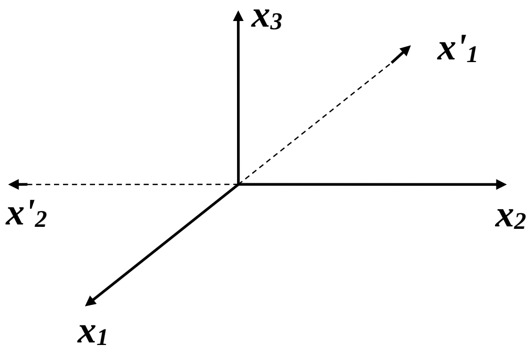
Endi x_1, x_2, x_3 o‘rniga akslantirib hosil qilingan $x_1' = -x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$ yangi koordinatalar sistemasini olaylik. $A^{ij\alpha\beta}$ tenzorning x_i koordinatalaridan x_i' koordinatalariga o‘tishda $A'^{ij\alpha\beta}$ bo‘lib o‘zgarishi tenzor ta’rifidan ushbu formulaga ko‘ra almashadi:

$$A'^{ij\alpha\beta} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial x_j'}{\partial x_q} \cdot \frac{\partial x_\alpha'}{\partial x^\lambda} \cdot \frac{\partial x_\beta'}{\partial x^\mu} \cdot A^{pq\lambda\mu} \tag{3.18}$$

Tenzor izotrop bo‘lsa

$$A^{ij\alpha\beta} = A^{ij\alpha\beta} \tag{3.19}$$

bo‘ladi.



4-расм

Agar to‘gri burchakli koordinatalar sistemasini -o‘q atrofida *180⁰* ga bursak (masalan *i=3* da x_1’=-x_1, x_2’=-x_2, x_3’=x_3 bo‘ladi):

$$A'^{ij\alpha\alpha} = -A^{ij\alpha\alpha} \quad (i \neq j) \tag{3.20}$$

bo‘ladi. (3.18) va (3.19) asosida $i \neq j$ da

$$A^{ij\alpha\alpha} = 0 \tag{3.21}$$

kelib chiqadi. Agar to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini i o‘qqa nisbatan akslantirsak (masalan *i=1* da $x_1' = -x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$),

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_q} = \delta_q^j$$

$$A'^{1j\alpha\beta} = -\delta_q^j \cdot \delta_\lambda^\alpha \cdot \delta_\mu^\beta \cdot A^{iq\lambda\mu} = -A^{1j\alpha\beta} \tag{3.22}$$

Ikkinchi tomondan $A'^{1j\alpha\beta} = A^{1j\alpha\beta}$

Bu munosabatlar asosida *i=1* o‘q teskari yo‘nalishga almashtirishdan

$$A^{11\alpha\beta} = A^{12\alpha\beta} = A^{13\alpha\beta} = 0, \ (\alpha \neq \beta) \tag{3.23}$$

yekani kelib chiqadi. Xuddi shunday akslantirishni *i=2* va *i=3* uchun ham ko‘rish mumkin va tegishli $A^{ij\alpha\beta}$ lar nolga teng ekani kelib chiqasi. Natijada noldan farqli elementlar A^{1111}, A^{1122} va A^{1212} dan iborat bo‘ladi.

Endi ushbu chiziqli almashtirishni ko‘raylik:

$$x'_j = (\delta_{ij} + d\theta \cdot \varepsilon_{3ij}) \cdot x_i \tag{3.24}$$

(3.24) almashtirish yangi x'_j koordinatalar sistemasini eski koordinatalar sistemasi x_i ni x_3 o‘qi atrofida cheksiz kichik $d\theta$ burchakka burish natijasida hosil qilinishini ko‘rsatadi. U holda

$$A'^{pqrs} = A^{pqrs} + d\theta \cdot \left[\varepsilon_{3ip} \cdot A^{iqrs} + \varepsilon_{3iq} \cdot A^{pirs} + \varepsilon_{3ir} \cdot A^{pqis} + \varepsilon_{3is} \cdot A^{pqri}\right] \tag{3.25}$$

(3.22) ifodani qisqartirgandi $d\theta$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorlar tashlab yuborilgan A^{pqrs} izotrop tenzorligidan $A'^{pqrs} = A^{pqrs}$ bo‘ladi. U holda (3.22) dan

$$-A^{2222} + A^{1122} + A^{1212} + A^{1221} = 0$$

(3.15) ning ikkinchi ifodasini e’tiborga olsak

$$A^{2222} = A^{1122} + 2A^{1212}$$

bo‘lib, $A^{1122} = \lambda$, $A^{1212} = \mu$ belgilash kiritsak $A^{2222} = \lambda + 2\mu$ bo‘ladi va demak,

$$A^{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \mu \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}) \tag{3.26}$$

deb yozish mumkin.

Ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida (3.26) formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$A^{ijkl} = \lambda \cdot g^{ij} \cdot g^{kl} + \mu \cdot (g^{ik} \cdot g^{jl} + g^{il} \cdot g^{jk}) \qquad (3.27)$$

Shunday qilib, Dekart koordinatalari sistemasida izotrop chiziqli elastik jism uchun ***Guk qonuni*** quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$p^{ij} = \lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \qquad (3.28)$$

Yelastik jism uchun (3.28) munosabat va cheksiz kichik deformatsiya nazariyasi asosidagi $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ o‘rinli bo‘lsin deylik. (3.28) ni Dekart koordinatalari sistemasi a yozilgan ushbu harakat differensial tenglamalar sistemasiga qo‘yamiz:

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \qquad (3.29)$$

U holda elastik jismning ko‘chish vektori komponentalariga nisbatan ushbu differensial tenglamalar sistemasini yozish mumkin:

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) + \mu \cdot \Delta u_i + \rho \cdot F_{\text{i}} \qquad (3.30)$$

(3.30) tenglama (i=1,2,3) 3 ta tenglamadan iborat sistema bo‘lib, bu tenglamalarga Lyame tenglamalari deyiladi. Bu tenglamani $\vec{e}_i$ birlik bazis vektorga ko‘paytirib qo‘shilsa, Lamening ushbu vektor ko‘rinishdagi tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$(\lambda + \mu) \cdot graddiv\vec{u} + \mu \cdot \Delta\vec{u} + \rho \cdot \vec{F} = \rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad (3.31)$$

(3.28), (3.29) va (3.31) tenglamalar to‘g‘riburchakli Dekart koordinatalar sistemasida yozilgan bo‘lib, ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ham yozish mumkin. elastiklik nazariyasi chiziqli masalalarida jism zichligini o‘zgarmas deb olish mumkin. Agar dastlabki zichlik ρ_0 bo‘lsa, deformatsiyalanish jarayonidagi zichlik $\rho = \rho_0 + \rho'$ va $\rho' << \rho_0$ deyish mumkin. (3.31) tenglamadagi $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ tezlanish ifodasi aniqlansa, tenglama yopiq tenglamadan iborat bo‘ladi. Bu tenglamada cheksiz kichik deformatsiya va $\rho = \rho_0$ uchun olinsa ham, ko‘chish vektori, tezlik va tezlanishlar chekli bo‘la oladi. Odatda elastiklik nazariyasining ko‘pgina masalalarida ε_{ij} bilan birga ko‘chish vektori $\vec{u}$, tezlik va tezlanishlar ham kichik miqdorlar deb qaralsa Eyler va Lagranj koordinatalarining farqi yo‘qoladi. Tezlanish uchun individual zarra tezlanishi $(\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2})_{x_i = const}$ olinadi va u holda (3.31) chiziqli elastiklik nazariyasida ushbu ko‘rinishdagi tenglamadan iborat bo‘ladi:

$$(\lambda + \mu) \cdot graddiv\vec{u} + \mu \cdot \Delta\vec{u} + \rho_0 \cdot \vec{F} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{dt^2} \qquad (3.32)$$

(3.31) tenglama bir inersial koordinatalar sistemasidan ikkinchisiga o‘tganda invariant bo‘lsa, (3.32) tenglama invariant bo‘la olmasligini ko‘rish qiyin emas.

Shunday qilib, (3.32) tenglama elastiklik nazariyasi chiziqli masalalari uchun, agar u koordinata o‘qlariga proyeksiyalansa, $u_i(x_1,x_2,x_3,t)$ larga nisbatan yopiq tenglamalar sistemasini beradi va bu tenglamalar - Lyame tenglamalari ko‘chish vektori proyeksiyalari uchun yopiq tenglamalar sistemasini beradi.

1-Masala.

Izotrop chiziqli elastik jism uchun bosh kuchlanishlar yo‘nalishlari bosh deformatsiya o‘qlari bilan bir bo‘lishi isbotlansin.

2-Masala.

(3.27) formuladan foydalanib, egri chiziqli koordinatalar sistemasida Guk qonunini

$$p^{ij} = \lambda \cdot J_1(\varepsilon) \cdot g^{ij} + 2\mu \cdot g^{i\alpha} \cdot g^{j\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}$$

ko‘rinishda yozish mumkinligi isbotlansin. Bu yerda $J_1(\varepsilon)$ - deformatsiya tenzori birinchi invarianti.

1.3. Nave-Stoks va Lame tenglamalari .

Tabiatda suyuq va gaz holatida uchraydigan barcha muhitlar o‘rnatilgan ideal suyuqlik yoki gaz modeli doirasida bo‘la olmasligiga kuzatish va tajribalar asosida ishonch hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham, «quyuq» yoki «suyuq» suyuqliklar haqida fikr yuritish mumkin. Distirlangan suv va glitserinlarda ularning harakati davomida birlik normali $\vec{n}$ bo‘lgan yuzachadagi kuchlanish vektorining shu yuzachaga proyeksiyalari miqdori suv uchun glitseringa qaraganda nihoyatda kichikligiga ishonch hosil qilish mumkin. Bu kuchlanishlar suyuqliklar muvozanat holatida birlik normal $\vec{n}$ bo‘yicha (yoki unga teskari) bo‘lishiga ham ishonch hosil qilish mumkin. Bundan suyuqlik zarralari o‘rtasida urinma kuchlanishlar ham mavjud bo‘lishiga va ularning miqdori suyuqlik moddasining ichki xossalariga bog‘liqligi va bu xossalar urinma kuchlanishlar mavjudligi va uning miqdoriga ta’sir etuvchi asosiy omillardan biri ekanligiga ham ishonch hosil qilish mumkin. Yana shuni kuzatish mumkinki, biror koordinatalar sistemasiga nisbatan muvozanatda bo‘lgan «quyuq» suyuqlik va «suyuq» suyuqliklar (masalan, ko‘rilgan glitserin va suv) uchun kuchlanish vektori birlik vektor $\vec{n}$ ga proporsional bo‘ladi va bu kuchlanish vektorining $\vec{n}$ dan og‘ishi harakat jarayonidagina vujudga keladi, ya’ni bunday tutash muhit zarralari o‘rtasida urinma kuchlanishlar paydo bo‘ladi. Bunday real hossali tutash muhitlar uchun yopishqoq suyuqlik modeli olinadi

$$p^{ij} = -p \cdot g^{ij} + \tau^{ij} \qquad (3.33)$$

ko‘rinishdagi kuchlanish tenzoriga ega bo‘lgan tutash muhitga ***yopishqoq suyuqlik*** deyiladi. Bu yerda

$$p^{ij} = p(\rho, T, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n) \qquad (3.34)$$

$$\tau^{ij} = \varphi^{ij}(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n) \qquad (3.35)$$

bo‘lib,

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla_\beta v^\alpha + \nabla_\alpha v^\beta)$$

Deformatsiya tezligi tenzori elementlari. Tutash muhit klassik modelining bu ta’rifidagi (3.34) va (3.35) bog‘lanishlarda T va χ_i larni o‘zgarmaslar, deb qarash bilan chegaralanamiz.

(3.35) munosabat uchun, umumlashgan Guk qonuni olinishi kabi, ushbu chiziqli munosabatni yozish mumkin

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta} \cdot e_{\alpha\beta} \tag{3.36}$$

Bu yerda $B^{ij\alpha\beta}$ o‘zgarmaslar ko‘rilayotgan yopishqoq suyuqlik xossasini aniqlovchi parametrlar bo‘lib, (3.36) ustida umumlashgan Guk qonuni formulasi ustida bajarilgan amaliyotlarni bajarish mumkin (bu yerda $\varepsilon_{\alpha\beta}$ o‘rniga $e_{\alpha\beta}$ ishtirok etmoqda). Chiziqli elastik jism uchun bajarilgan tenzorlar ustidagi amaliyotlarni (3.36) uchun qo‘llash mumkin. Yopishqoqlik xossasi barcha yo‘nalishlar bo‘yicha bir xil bo‘lgan jism izotrop, aks holda, bu yerda ham, jism anizotrop bo‘ladi.

Izotrop chiziqli yopishqoq suyuqlik uchun ushbu formulani yozaylik:

$$p^{ij} = -p \cdot g^{ij} + \lambda_1 \cdot div\vec{v} \cdot g^{ij} + 2 \cdot \mu \cdot g^{i\alpha} \cdot g^{j\beta} \cdot e_{\alpha\beta} \tag{3.37}$$

(3.37) formula ***Nave-Stoks formulasi*** deb ataladi. Bu yerda $div\vec{v}$ - deformatsiya tezligi tenzori 1-invarianti, λ_1 va μ_1 yopishqoqlik koyeffitsiyentlari deyiladi. (3.37) ni Dekart koordinatalar sistemasida yozaylik:

$$\begin{aligned} p_{11} &= -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} \\ p_{22} &= -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\upsilon v_2}{\partial x_2} \\ p_{33} &= -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3} \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$p_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot e_{ij} = \mu_1 \cdot \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\right), \ (i \neq j)$$

Yopishqoq suyuqliklarning ixtiyoriy egri chiziqli eyler koordinatalari sistemasidagi tenglamasi (3.37) ni ushbu tenglamaga - tutash muhit harakat differensial tenglamasiga qo‘yish orqali topiladi:

$$p \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \nabla_j p^{ij} \tag{3.39}$$

Agar Dekart koordinatalarida ish ko‘rilsa, elastik jism uchun Lyame tenglamasi olingani kabi, ushbu ko‘rinishdagi Nave-Stoks tenglamalari deb ataluvchi tenglamalar hosil bo‘ladi:

$$p \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} - gradp + (\lambda_1 + \mu_1) graddiv\vec{\upsilon} + \mu_1 \Delta \vec{\upsilon} \tag{3.40}$$

Chiziqli elastik jismlardan farqli ravishda ρ zichlik funksiyasi asosiy noma’lumlar qatoridan o‘rin oladi. Agar $\vec{F}$ berilgan bo‘lsa, (3.40) tenglama tezlik vektori proyeksiyalari v_1, v_2, v_3 , zichlik ρ va bosim funksiyasi p lar qatnashadigan skalyar ravishda yozilgan uchta tenglamani beradi.

Yopishqoq suyuqlik uchun tenglamalar sistemasi (3.40) tenglama va uzluksizlik tenglamasi $\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{\upsilon})=0$ lardan iborat bo‘lib, tenglamalar soni noma’lumlar sonidan bitta kamdir. Tenglamalar sistemasi yopiq tenglamalar sistemasidan iborat bo‘lishi uchun noma’lum funksiyalar qatnashadigan qo‘shimcha tenglama zarurdir.

Quyidagi xususiy holda, $div\vec{\upsilon}=0$ ya’ni muhit siqilmas bo‘lsa, tenglamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\cdot gradp+\frac{\mu}{\rho}\cdot\Delta\vec{\upsilon} \qquad (3.41)$$
$$div\vec{\upsilon}=0$$

(3.41) da μ o‘zgarmas son bo‘lib, agar suyuqlik yopishqoqlik koyeffitsiyenti $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ deb belgilansa, bu o‘zgarmas miqdor kinematik yopishqoqlik koyeffitsiyenti deyiladi.

Bir jinsli bo‘lmagan siqilmas yopishqoq suyuqlik uchun to‘gri burchakli Dekart koordinatalari sistemasida ushbu yopiq tenglamalar sistemasi o‘rinlidir:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon_1\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+\upsilon_2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+\upsilon_3\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=0$$
$$\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial\upsilon_1}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}=F_1-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1}+\upsilon\cdot\Delta\upsilon_1$$
$$\frac{\partial\upsilon_2}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}=F_2-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2}+\upsilon\cdot\Delta\upsilon_2 \qquad (3.42)$$
$$\frac{\partial\upsilon_3}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}=F_3-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_3}+\upsilon\cdot\Delta\upsilon_3$$

$\Delta\upsilon_i$ - v_i dan olingan Laplas operatori.

Tutash muhit klassik masalasini qo‘yilishi xaqida

«Sodda masalalar» deb ataluvchi tutash muhit masalalari o‘z ichiga tutash muhit zarralari uchun temperatura o‘zgarmas (T=T_0), issiqlik energiyasi, kimyoviy va elektrodinamik maydon va uning o‘zgarishlari e’tiborga olinmagan holda ko‘rish mumkin bo‘lgan jarayonlarni o‘z ichiga oladi. Bunday jarayonlar va ular bilan bog‘liq ravishda tutash muhitning eng sodda modellari – ideal suyuqliklar (gazlar), chiziqli elastik jismlar va yopishqoq suyuqliklar modellari-klassik modellar tutash muhitning eng rivoj topgan va amaliy masalalar yechishda keng qo‘llaniladigan sohalaridir. Ma’lumki, klassik modellar uchun $p^{ij} = p^{ji}$ kuchlanish tenzori simmetrik va bu natija zarralar uchun ichki momentlar nolga teng, deb olinishi tufayli, harakat miqdori momenti o‘zgarishi teoremasidan kelib chiqadi. Bu yerda elastiklik nazariyasi esa cheksiz kichik deformatsiya nazariyasi asosida ko‘riladi, Lagranj va eyler koordinatalari farqi yo‘qoladi.

Klassik modelga kiritiladigan tutash muhit masalalari asosiy tenglamalari massaning saqlanish qonuni, harakat miqdori va harakat miqdori momenti o‘zgarishi teoremasi (uning natijasi $p^{ij} = p^{ji}$) asosida olinishi bilan birga, eksperimentlarga asoslangan va har bir tutash muhit ta’rifidan kelib chiqadigan fizik munosabatlari sistemasi olinishini yuqorida ko‘rgan edik. Bu tenglamalar sistemasi bo‘lgandagina ularni yechish uchun urinish mumkin. Faraz qilaylik, yopiq tenglamalar ixtiyoriy turdagi klassik tutash muhit uchun tuzilgan bo‘lsin. U holda har bir aniq hol uchun bu tenglamalar sistemasi soni nechta bo‘lishidan qat’iy nazar, bu tenglamalardagi noma’lumlar va erkli o‘zgaruvchilar (masalan, fazoviy koordinatalar va vaqt) o‘zgarish sohalari aniqlangan bo‘lishi kerak.

Ko‘rilayotgan sohada maxsus nuqta yoki nuqtalar to‘plami mavjud bo‘lishligi mumkin. Bu nuqtalarda izlanayotgan funksiyalar uzilishga ega bo‘lishi, ularning mazmuni esa, masalan, nuqtaviy massa manbalar, nuqtaga qo‘yilgan mujassamlangan kuchlar va h.k. lar bo‘lishi mumkin. Tutash muhitga ta’sir etuvchi tashqi sabablar ham maxsus nuqtalar orqali tenglamalar sistemasidan alohida holda berilishi mumkin.

Tutash muhitning Yevklid fazosi chekli va cheksiz sohasidagi harakati va muvozanati o‘rganiladi. Izlanayotgan funksiyalar uchun soha chegaralarida avvaldan qo‘yilgan mexanik munosabatlar bajarilishi talab qilinishi mumkin. Agar soha o‘z ichiga cheksiz uzoq nuqtalarni olsa, bu nuqtalarda ham masala qo‘yilishidagi mexanik mazmunni akslantiruvchi shartlar qo‘yilishi kerak. Shuni ta’kidlash joizki, matematik ifodalarda yoziladigan bu shartlar mexanika qonunlariga va ular asosida yozilgan har bir tutash muhit modellari tenglamalari sistemasiga zid bo‘lmasligi kerak. Ikkinchi tomondan, har bir tutash muhit yopiq tenglamalari sistemasi integrallanishida ixtiyoriy funksiya va o‘zgarmaslar paydo bo‘ladiki, bu o‘zgarmaslar qo‘shimcha shartlar va jumladan, boshlang‘ich shartlar asosida aniqlanishi mumkin (masalan $t = t_0$ boshlang‘ich onda tutash muhit zarralari holati va ularning tezliklari berilishi kerak). Tutash muhit tenglamalari sistemasi aniqlanadigan sohaning o‘zi ham o‘zining o‘zgaruvchan chegaralariga ega bo‘lib, bu chegaralar noma’lum bo‘lishi va ularni ham aniqlash talab etilishi mumkin. Bu chegaralarda mexanik jarayonni akslantiruvchi munosabatlar yozilishi mumkin. Umumiy holda deformatsiyalanadigan yoki o‘zgarmas umumiy chegaralarga ega bo‘lgan turli tutash muhit modellari tenglamalari sistemasi birgalikda ko‘rilishi va tutash muhitlarning o‘zaro dinamik yoki statik o‘zaro mexanik ta’sirlari dolzarb masalalardan iborat bo‘lishligi mumkin. Bunday holda, masalan, suyuqlik va elastik jismlar o‘zaro ta’siri masalalarida chegaraning har ikki tomonidan masala yechilishidan ilgari, umuman olganda, noma’lum bo‘lgan kuchlanishlar o‘zaro tengligi, ko‘chish vektori yoki zarralar o‘zaro tezligi shartlari yozilishi mumkin. Ayrim hollarda bulardan ancha murakkab bo‘lgan matematik munosabatlar ham yozilishi mumkin. Tabiiyki, bu munosabatlar o‘z mazmuniga ega, kuzatish va qonuniyatlarga asoslangan bo‘lishi kerak.

Endi ideal suyuqlik va gazlarga xos bo‘lgan eng sodda masalalar qo‘yilishini ko‘raylik. Birinchi navbatda tenglamalar sistemasini (massaning saqlanish qonuni va eyler tenglamalari-ularning soni 4 ta bo‘lib) 5 ta noma’lumlarni (tezlik vektori 3 ta komponentalari, bosim va zichlik) o‘z ichiga oladi. Agar beshinchi tenglama ham mavjud bo‘lsa (masalan, barotropik munosabat yoki siqilmas suyuqlik deb olinadigan xususiy hollar), u holda yopiq tenglamalar sistemasiga-tenglamalar soni noma’lumlar soniga teng bo‘lgan holat vujudga keladi. Bu modelga tegishli ixtiyoriy muvozanat va harakat tenglamalari, agar tashqi massaviy kuchlar berilgan bo‘lsa, ko‘rilayotgan yopiq tenglamalar sistemasini integrallashga keltiriladi. Har bir aniq masalada chegaraviy va boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lishi kerak. Ideal suyuqlik yoki gazlar uchun urinma kuchlanishlar barcha zarralarda nolga tengligi va bu xossa chegaraviy sirtlarda ham saqlanishini e’tiborga olish kerak: gaz va suyuqlik zarralari deformatsiyalanuvchi yoki absolyut qattiq sirtlarda ularga o‘tkazilgan har bir ondagi urinma tekisliklarda qarshilikka uchramagan holda bemalol harakatlana olishi va bu tekisliklarga normal yo‘nalishi bo‘yicha olingan tezliklar jism normal yo‘nalishi bo‘yicha olingan tezliklarga teng bo‘lishi kerak:

$$(v_n)_{suyuqlik} = (v_n)_{chegara}$$

$$(v_\tau)_{suyuqlik} \neq (v_\tau)_{chegara}$$

Agar ideal suyuqlik potensialli tezlik maydoniga ega, ya’ni $\vec{v} = grad\vec{\varphi}$ bo‘lsa,

$$(v_n)_{suyuqlik} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = (v_n)_{chegara}$$

bo‘ladi.

Agar ideal suyuqlik tezlik maydoni olinayotgan koordinatalar sistemasiga nisbatan qo‘zg‘almas chegaraviy sirtlarga ega bo‘lsa, chegaradagi shart

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$$

ga almashadi.

Agar ideal suyuqlik yoki gaz uchun soha erkin sirtlarga ega bo‘lsa, va bu sirtlarning fazodagi holati noma’lum bo‘lsa, masala qo‘yilishida bu sirtlarni aniqlash masalasi ham qo‘yilishi mumkin. Odatda bunday noma’lum va o‘zgarishi mumkin bo‘lgan sirtlarda suyuqlik va gaz zarralari uchun bosim chegaradagi ikkinchi bir ma’lum(masalan, atmosfera bosimiga teng) bosimga teng qilib olinishi mumkin. Bu holda chegaraviy shart, masalan, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $p_{nn} = -p_0$, $p_{n\tau} = 0$-normali $\vec{n}$ bo‘lgan yuzadagi kuchlanishning normalga proyeksiyasi $-p_0$, urinma yo‘nalishga proyeksiyasi nolga teng bo‘ladi deyish mumkin.

Chiziqli elastik jism modeliga kiruvchi tutash muhit masalalari qo‘yilishi va Sen-Venan prinsipi deb ataluvchi prinsip bilan tanishaylik.

Chiziqli elastik jism tashqi va ichki kuchlar ta’sirida kuchlanganlik-deformatsiyalanish holati uning egallagan hajmi va dinamik jarayon bilan bog‘langan bo‘lishi mumkin. Cheksiz kichik deformatsiya nazariyasiga asosan deformatsiya tenzori elementlari ko‘chish vektori komponentalari hosilalari Koshi munosabatlari orqali bog‘langan va odatda gaz, suyuqliklardan farqli ravishda jism zarralari zichligi o‘zgarmas, va uni ma’lum deyish mumkin. Jismning deformatsiyalanmagan holda fazodagi ko‘chishiga chek qo‘yish ham maqsadga muvofiqdir. Buning uchun elastik jism biror nuqtasida ko‘chish vektori va bu nuqtada olingan o‘zaro tik o‘qlar atrofida aylanish miqdorlari nolga teng deb olinishi kerak. elastik jism egallagan hajm va uning chegarasi Lagranj va Eyler koordinatalari o‘rtasidagi farq bo‘lmaganligi tufayli chegaraviy shartlar elastik jism dastlabki egallagan chegaralarida beriladi va bu chegaralar holati fazoda o‘zgarishi cheksiz kichik bo‘lganligi uchun chegaraviy shartlar jism dastlabki holati chegarasiga nisbatan qaraladi.

Chiziqli elastik jism uchun tenglamalar sistemasi quyidagi tenglamalardan iborat:

1. Lame tenglamalari (3 ta tenglama);
2. Koshi munosabatlari (6 ta tenglama);
3. Guk qonuni (6 ta tenglama);
4. Sen-Venan ayniyatlari yoki Beltrami-Mitchell tenglamalari (6 ta tenglama).

Masala qo‘yilishida bu tenglamalar o‘zaro zid bo‘lmagan holda yechimga ega bo‘lishini va bu yechimlar jism chegaraviy shartlari va dinamik masalalar uchun boshlang‘ich shartlarni bajarilishini ta’minlagan yagona yechimga ega bo‘lishimiz kerak.

Klassik elastiklik nazariyasi masalalari qo‘yilishida chegaraviy shartlarni shartli ravishda ushbu uchta guruhga ajratgan holda ko‘rish mumkin:

1) Chegarada ko‘chish vektori komponentalari beriladi;
2) Chegarada kuchlanish tenzori elementlariga nisbatan bajarilishi talab etiladigan shartlar beriladi;
3) Chegaraning ayrim qismlarida ko‘chishlar va boshqa qismlarida esa kuchlanishlarga nisbatan bajarilishi kerak bo‘lgan shartlar berilishi mumkin.

So‘nggi holda berilgan chegaraviy shartlar vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarishlari yoki o‘zgarmas bo‘lib qolishlari mumkin.

Masalalar vaqtga bog‘liq ravishda o‘rganiladigan bo‘lsa, tabiiy ravishda, boshlang‘ich shartlar berilgan bo‘lishi (masalan, $t = t_0$ boshlang‘ich onda ko‘chish va tezlik vektorlari) kerak bo‘ladi.

Nazorat savollari

1. Qanday jismga elastik jism deyiladi?
2. Umumlashgan qonunini ifodalovchi formulani yozing.
3. Izotrop chiziqli elastik jism uchun Guk qonuni qanday k**o‘**rinishda b**o‘**ladi?
4. Yopishqoq suyuliq modelini kuchlanish tenzori orqali ifodasini yozing.
5. Izotrop chiziqli yopishqoq suyuqlik uchun Nave-Stoks formulasi qanday k**o‘**rinishda b**o‘**ladi?
6. Nave-Stoks tenglamasining Dekart koordinalar sistemasidagi ifodasini yozing.
7. Tenglamalar **sistemas**i **yopiq** tenglamalar **sistemas**i qachon **yopiq** tenglamalar sitemasini tashkil qiladi?
8. Suyuqlikning dinamik va kinematik yopishqoqlik **koeffitsiyent**lari orasidagi munosabatni aniqlang.
9. Deformatsiya tenzorini ko‘chish vektori orqali hisoblash formulalari.
10. Harakat qonuni berilganda deformatsiya tenzorini hisoblash formulalari (Grin va Almansi tenzorlari).
11. Ideal suyuqlik modeli. Eyler tenglamalari.
12. Elastik jism va yopishqoq suyuqlik. Izotrop muhitlar uchun Guk va Nave-Stoks qonunlari.
13. Lame tenglamalari. Yung moduli va Puasson koeffitsiyentlari.
14. Nave-Stoks tenglamalari. Dinamik va kinematik yopishqoqlik koeffitsiyentlari.

4-MAVZU: Termodinamikaning asosiy tushunchalari

REJA:

4.1 Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari. Ichki energiY.

4.2 Termodinamik holat parametrlari

4.3.Termodinamikaning birinchi qonuni

Tayanch so‘zlar: *gidrologiya, meteorologiya, gidrometeorologiya xizmati, gidrometeorologiya markazi, gidrometeorologiya ilmiy tekshirish instituti, boshqarmalar, xizmat sohalari, bo‘limlar, bo‘linmalar.*

4.1 Termodinamikaning asosiy tushunchalari va tenglamalari. Ichki energiY.

Tutash muhit termodinamikasi asosiy tushunchalari va qonuniyatlarini o‘rganishdan avval ixtiyoriy tutash muhit kinetik energiyasi tushunchasi va uning harakat jarayonida o‘zgarishini ko‘raylik. Agar tutash muhit egallagan hajmni τ bilan belgilab, uni cheksiz kichik hajmlarga va ulardagi tutash muhit bo‘laklariga ajratsak, har bir ajralgan elementar $d\tau$ bo‘laklar uchun kinetik energiya tushunchasini, moddiy nuqtalar uchun aniqlagandek, ushbu ifoda asosida hisoblash mumkin:

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2}d\tau .$$

Bu yerda $\rho(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{\upsilon}(x_1,x_2,x_3)$-zichlik va tezliklar olingan elementar hajm nuqtalariga tegishli va tutash muhit barcha zarralari uchun olingan biror umumiy t onda aniqlanadi va elementar $d\tau$ hajmdagi tutash muhit kinetik energiyasi deyiladi. Bu elementar kinetik energiyalar yig‘indisi integral yig‘indini ifodalaydi va ta’rifga ko‘ra

$$K=\int_\tau \frac{\rho\vec{\upsilon}^2}{2}d\tau$$

miqdor ko‘rilayotgan tutash muhit kinetik energiyasi deyiladi. Moddiy nuqtalar sistemasi kinetik energiyasi ta’rifiga o‘xshash, tutash muhit uchun uning elementar bo‘laklari kinetik energiyalari yig‘indisi additivlik xossasiga ega deb faraz qilinadi.

1. Endi Σ sirtga ega chekli τ hajmdagi tutash muhit kinetik energiyasi o‘zgarishi teoremasini ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalar sistemasida ko‘raylik.

Buning uchun harakat miqdori o‘zgarishi teoremasini yozamiz:

$$\rho\vec{w}=\rho\vec{F}+\nabla_j\vec{P}^j \tag{5.1}$$

(5.1) ning har ikki tomonini $d\vec{r}=\vec{\upsilon}\cdot dt$ ga ko‘paytirib, $\sum$ sirtga ega τ hajm bo‘yicha integrallaymiz:

$$\int_\tau \rho\vec{w}\cdot\vec{\upsilon}\cdot dt\cdot d\tau=\int_\tau \rho\vec{F}\cdot d\vec{r}\cdot d\tau+\int_\tau(\nabla_j P^{ij})\upsilon_i\cdot dt\cdot d\tau \tag{5.2}$$

Lekin:

$$\vec{w}\cdot\vec{\upsilon}=\frac{1}{2}\frac{d\vec{\upsilon}^2}{dt} \quad \text{va} \quad \int_\tau \rho\vec{w}\cdot\vec{\upsilon}\cdot\rho\cdot dt\cdot d\tau=d\left(\int_\tau \rho\frac{\upsilon^2}{2}d\tau\right)$$

bo‘lgani uchun yoza olamiz:

$$dK=\int_\tau \rho\vec{F}\cdot d\vec{r}\cdot d\tau+\int_\tau(\nabla_j \mathrm{P}^{ij})\upsilon_i\cdot dt\cdot d\tau \tag{5.3}$$

(5.2) ifodadagi so‘nggi hadni alohida ko‘raylik. Bu yerda

$$\left(\nabla_j P^{ij}\right)\upsilon_i = \nabla_j\left(P^{ij}\cdot\upsilon_i\right) - P^{ij}\nabla_j\upsilon_i = \nabla_j\left(P^{ij}\cdot\upsilon_j\right) - P^{ij}\cdot e_{ij} - P^{ij}\cdot\omega_{ij}$$

bo‘lib, buerda

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j\upsilon_i + \nabla_i\upsilon_j\right),\ \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j\upsilon_i - \nabla_i\upsilon_j\right)$$

U holda

$$\int_\tau \nabla_j(P^{ij})\cdot\upsilon_i\cdot dt\cdot d\tau = \int_\tau \nabla_j(P^{ij}\cdot\upsilon_i)\cdot dt\cdot d\tau - \int_\tau P^{ij}\cdot e_{ij}\cdot dt\cdot d\tau - \int_\tau P^{ij}\cdot\omega_{ij}\cdot dt\cdot d\tau =$$

$$= \int_\Sigma P^{ij}\cdot\upsilon_i\cdot n_j\cdot d\sigma\cdot dt - \int_\tau P^{ij}e_{ij}\cdot dt\cdot d\tau - \int_\tau P^{ij}\omega_{ij}\cdot dt\cdot d\tau \qquad (5.4)$$

Agar kuchlanish tenzori simmetrik bo‘lsa, so‘nggi integral nolga teng bo‘lishini isbotlaylik:

ω_{ij} antisimmetrik, ya’ni $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ bo‘lganligi va $\omega_{11}=\omega_{22}=\omega_{33}=0$ bo‘lganligi uchun yoza olamiz:

$$P^{ij}\cdot\omega_{ij} = \left(P^{ij} - P^{ji}\right)\omega_{ij} \quad (i<j).$$

(5.4) da hajm integraldan sirt integralga o‘tish formulasi ishlatilgan va bu ishlatilgan had uchun yoza olamiz:

$$\int_\Sigma P^{ij}\cdot\upsilon_i\cdot n_j\cdot d\sigma\cdot dt = \int_\Sigma \vec{P}_n\cdot d\vec{r}\cdot d\sigma \qquad (5.5)$$

(5.4) va (5.5) ni (5.3) ga qo‘yib, $P^{ij}=P^{ji}$ bo‘lgan hol uchun yoza olamiz:

$$dK = dA_m^{(e)} + dA_m^{(i)} + dA_c^{(e)} + dA_c^{(i)} \qquad (5.6)$$

bu yerda

$$dA_m^{(e)} = \int_\tau \rho(\vec{F}^{(e)}\cdot d\vec{r})\cdot d\tau,\ dA_m^{(i)} = \int_\tau \rho(\vec{F}^{(i)}\cdot d\vec{r})\cdot d\tau \qquad (5.7)$$

$$dA_c^{(e)} = \int_\Sigma (\vec{P}_n\cdot d\vec{r})d\sigma,\ dA_c^{(i)} = -\int_\tau P^{ij}\cdot e_{ij}\cdot dt\cdot d\tau$$

$dA^{(e)}_m$-τ hajmdagi tutash muhitning $d\vec{r} = \vec{\upsilon}\cdot dt$ elementar ko‘chishidagi tashqi massaviy kuchlar zichligi bajargan ishi, $dA^{(i)}_m$-ichki massaviy kuchlar bajargan ishi, $dA^{(e)}_c$-tashqi sirt kuchlarining bajargan ishi va $dA^{(i)}_c$-ichki sirt kuchlarining bajargan ishi deyiladi.

Eslatma.

Agar kuchlanish tenzori simmetrik bo‘lmasa, ichki sirt kuchlari bajargan ish formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$dA_c^{(i)} = -\int_\tau P^{ij} \cdot e_{ij} \cdot dt \cdot d\tau - \int_\tau P^{ij} \cdot \omega_{ij} \cdot dt \cdot d\tau \qquad (5.8)$$

Shunday qilib, chekli hajmdagi tutash muhit harakat jarayonida cheksiz kichik ko‘chish tufayli kinetik energiyaning o‘zgarishi (5.6) formulaga ko‘ra o‘zgaradi.

2. Cheksiz kichik hajmdagi tutash muhit uchun kinetik energiyaning o‘zgarishi teoremasini ko‘raylik.

Endi (5.3) formulani $\rho \cdot d\tau = dm$ elementar massaga ega tutash muhit zarrasi uchun yozaylik. Buning uchun (5.3) formulaga o‘rta qiymat haqidagi formulani qo‘llaylik va dm massaga bo‘lib, $\tau \to 0$ uchun yoza olamiz:

$$d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla_j\left(P^{ij}\right) \cdot \upsilon_i \cdot dt \qquad (5.9)$$

bu yerda

$$\frac{1}{\rho}\nabla_j\left(\mathrm{P}^{ij}\right) \cdot \upsilon_i \cdot dt = \frac{1}{\rho}\nabla_j\left(\mathrm{P}^{ij} \cdot \upsilon_i\right) \cdot dt - \frac{1}{\rho}\mathrm{P}^{ij} \cdot \nabla_j \cdot \upsilon_i \cdot dt$$

bo‘lib, birinchi had tashqi sirt kuchlari bajaradigan ish zichligi, ikkinchisi esa ichki sirt kuchlari bajaradigan ish zichligi deyiladi.

Ichki sirt kuchlari bajaradigan ish zichligi ifodasini ko‘raylik:

$$\frac{1}{\rho d\tau} dA_c^{(i)} = -\frac{1}{\rho} P^{ij} \cdot \nabla_j \cdot \upsilon_i \cdot dt = -\frac{1}{\rho} P^{ij} e_{ij} \cdot dt - \frac{1}{\rho} P^{ij} \cdot \omega_{ij} \cdot dt$$

Agar tutash muhit absolut qattiq jism sifatida harakat qilsa, Gelmgols teoremasi asosida, ya’ni

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}] + grad\Phi$$

ga ko‘ra $F \equiv 0$ bo‘lganligi uchun va demak $e_{ij} = 0$ bo‘lib, ichki sirt kuchlari bajargan ish zichligi $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{\upsilon} \neq 0$ bo‘lgan holda

$$\frac{1}{\rho d\tau} dA_c^{(i)} = -\frac{1}{\rho}(P^{ij} - P^{ji}) \cdot \omega_{ij}$$

bo‘ladi.

Agar kuchlanish tenzori simmetrik bo‘lsa:

$$\frac{1}{\rho d\tau} dA_c^{(i)} = -\frac{1}{\rho} P^{ij} e_{ij} \cdot dt \qquad (5.10)$$

bo‘ladi.

4.2 Termodinamik holat parametrlari.

Suyuqliklar, gazlar va deformatsiyalanuvchi qattiq jismlar klassik modellari ayrim o‘zgarmas ichki va tashqi sharoitlardagina o‘z ta’riflari bo‘yicha aniqlangan chegaralar doirasida o‘rinli bo‘la olishini tasavvur qilish qiyin emas. Haqiqatan ham, masalan temperatura o‘zgarishi bilan suyuqliklar muzlashi va hatto oddiy statik kuchlar ta’sirida ham bu muhit ichki urinma kuchlar ishlari noldan farqli bo‘lishini ko‘rish mumkin. Huddi shuningdek, temperatura o‘zgarishi izotrop elastik jismlarning siqilishi yoki cho‘zilishiga, va demak, ichki kuchlanishlarning o‘zgarishiga olib kelishi mumkin. Birinchi misol tutash muhit bir turdagi modelidan boshqa turga o‘tishi-suyuqlik o‘rniga qattiq jism bilan ish ko‘rish kerakligini taqozo etsa, ikkinchisi esa klassik elastik jism modelidagi kuchlanish tenzori va deformatsiya tenzorlari o‘rtasidagi funksional munosabatni kengroq doirada tahlil qilishga, ya’ni temperatura o‘zgarishining bu muhitni xarakterlovchi p^{ij} va ε^{ij} lar qatorida bo‘lishi zarurligini taqozo etadi. Albatta, temperaturaning o‘zgarishi hamma vaqt bizga ma’lum bo‘lgan suyuqlik va gazlar modellaridan voz kechishga olib kelmaydi: temperaturaning o‘zgarishi suyuqlik va gazlar holatini aniqlovchi funksional munosabatda o‘z aksini topishi va demak, masalan bosim funksiyasi P, muhitning zichligi ρ lar qatorida bo‘lishi kerakligi e’tiborda bo‘lishligini tushinish kerak bo‘ladi.

Tutash muhit termodinamikasi asoslarida tutash muhit cheksiz kichik zarrasi uchun “holat parametrlari” deb ataluvchi termodinamik holat parametrlari kiritiladi. Bu parametrlar ko‘rilayotgan tutash muhitning ixtiyoriy zarrasi uchun mexanik jarayonda uni to‘la aniqlab bera oladigan o‘zgaruvchan va o‘zgarmas miqdorlarga aytiladi. Tutash muhit zarrasi tushunchasi makroskopik nuqtai nazardan ko‘riladi. Makroskopik nuqtai nazardan zarra bir tomondan chekli hajmdagi muhitga tegishli bo‘lsa, ikkinchi tomondan shu hajm ichra holat parametrlari o‘zgarishi e’tiborga olinmaydigan darajada kichik, deb qaralishi bilan xarakterlanadi va shuning uchun ham holat parametrlari har bir individual zarra va uning markazi sifatida qaraladigan geometrik nuqtaga tegishli deb olinishi mumkin. Shuning uchun ham tutash muhitlar mexanikasida makroskopik holat parametrlari bilan ish ko‘riladi va bu parametrlar ajratilgan ayrim «fizik zarraga» tegishli deb qaraladi. Masalan, gazlar uchun ρ va p lar holat parametrlari bo‘la oladi. O‘zgaruvchi holat parametrlarini $\mu^1, \mu^2, \ldots\ldots, \mu^n$, o‘zgarmaslarini $k^1, k^2, \ldots\ldots, k^m$ bilan belgilaylik.

Tutash muhit zarrasi holatini akslantirish uchun holat parametrlari soniga teng bo‘lgan n o‘lchovli fazoni kiritaylik va bu fazoning har bir M nuqtasi n ta koordinatalar bilan bir qiymatli aniqlanishidan foydalanaylik. Bu fazoga holat fazosi deyiladi va μ^i larning o‘zgarishi shu fazo uchun ma’lum chiziq trayektoriyalarni beradi: har bir chiziq bo‘ylab siljish “fizik zarra” uchun uning mexanik jarayon davomida o‘zgarishini beradi. Gazlar uchun holat parametrlari sifatida, masalan, $\mu^1 = \mathrm{p}, \mu^2 = \dfrac{1}{\rho}$ olinishi (bosim va zichliklar holat parametrlari sifatida olinishi), klassik elastik jismlar uchun $\mu^1 = \mathrm{p}^{11}, \mu^2 = p^{22}$, $\mu^3 = \mathrm{p}^{33}, \mu^4 = \mathrm{p}^{12}, \mu^5 = \mathrm{p}^{23}, \mu^6 = \mathrm{p}^{31}, \mu^7 = T$ -temperatura olinishi mumkin. Birinchi holda *n=2* bo‘lib, holat fazosi tekislikdan, ikkinchi holda *n=7* bo‘lib, holat fazosi yetti o‘lchovli holat fazosidan iboratdir.

Agar holat fazosi parametrlari mexanik jarayon davomida o‘zgarishi o‘zaro bog‘lanishda bo‘lsa, holat parametrlari uchun erkin holat parametrlari tushunchasini kiritish mumkin. Bu bog‘lanishlar m ta integrallanmaydigan differensial munosabatlardan iborat bo‘lsa, nazariy mexanikadagi sistema erkinlik darajasi aniqlangani singari aniqlanadi, ya’ni erkinlik darajasi *n-m* ta bo‘lib, o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan μ^i lar orqali ifodalanadi, qolgan m ta μ^i lar differsisial munosabatlar asosida aniqlanishi mumkin. Bunday mexanik sistema golonom bo‘lmagan termodinamik sistema deyiladi.

Holat fazosida μ^i larning $d\mu^i$ larga o‘zgartirish hisobiga oldingi holatga nisbatan yangi termodinamik holatga o‘tish mumkin. Bu ko‘chishni turli tutash muhitlar uchun real vaqt o‘zgarishi davomida sodir bo‘ladi, deb qarash kerak. Bu ko‘chish termodinamik jarayon deyiladi. Holat fazosida biror *M* nuqtadan ikki n nuqtaga uzluksiz ravishda o‘tish turli chiziqlar bilan bajarilishi mumkin. Umuman aytganda, ko‘chish jarayonida ayrim holat parametrlari o‘zgarmas sondan iborat bo‘lgan tarzda sodir bo‘lishi ham mumkin.

Termodinamik jarayonlarda μ^i lar uzilishga ega bo‘lgan holda ham sodir bo‘lishi mumkin. Agar uzluksiz termodinamik jarayonda mexanik sistema o‘z holatidan boshqa holatlarga μ^i lar o‘zgarishi (ayrim μ^i lar o‘zgarmasdan iborat bo‘lib qolishi ham mumkin) tufayli uzluksiz chiziq chizib o‘z holatiga qaytib kelsa, bunday yopiq chiziq sikl deyiladi.

Tutash muhit holat parametrlari o‘zgarishi tabiiy holda o‘z-o‘zidan bo‘la olmaydi. Buning uchun ko‘rilayotgan «makroskopik elementar zarra» o‘ziga nisbatan va umuman, ko‘rilayotgan chekli hajmdagi tutash muhit zarralari va tashqi muhit tufayli ta’sir sabablariga ega bo‘ladi. Bular mexanik energiya, issiqlik miqdori o‘zgarishiga bog‘liq issiqlik energiyasi, elektrodinamik maydon va kimyoviy reaksiyalar bilan bog‘liq energiya va nihoyat, turli kuch maydonlaridan iborat bo‘lishi mumkin. Chekli τ hajmdagi Σ sirt bilan ajratilgan tutash muhit ustida fikr yuritilganda ham, massaviy va sirt kuchlaridan tashqari bu tutash muhit turli bo‘laklarida energiya almashinuvi va ichki o‘zgarishlar ham ko‘rilayotgan tutash muhit turli qismlaridagi «makroskopik elementar zarra» lar holat parametrlari o‘zgarishiga olib kelishi mumkin va bularning trayektoriyalari holat fazosida turli chiziqlarni «chizishi» mumkin. Mexanik kuchlar bilan birga, sistemaga issiqlik o‘tkazuvchanlik sababli, issiqlik energiyasining kelishi va boshqa turdagi energiya oqimlarini hisobga olish zarurati ham paydo bo‘lishi mumkin.

Termodinamikaning birinchi qonuni

Biz yuqorida energiyaning turli ko‘rinishlari mavjudligini ta’kidladik.Tajribalar asosida energiya o‘z-o‘zidan hosil bo‘lmasligi va yo‘qolmasligi energiya miqdori o‘zgarmas bo‘lib qolishi va bir formadan boshqa formaga o‘ta olishini kuzatish mumkin. Tajribalar asosida o‘rnatilgan bu haqiqat XIX asr o‘rtalarida nemis olimi, ma’lumoti bo‘yicha vrach R. Mayer (1814-1878), ingliz olimi D.Djoul (1818-1889) tomonidan ochilgan bo‘lib, nemis olimi G.Gelmgols (1821-1894) asarlarida energiyaning saqlanish qonuni sifatida yetarli darajada o‘z ifodasini topdi.

Issiqlik hodisalari bilan bog‘liq ravishda energiyaning bir turdan ikkinchi turga o‘tishi va har bir tutash muhit zarrasi uchun uning holat fazosidagi ko‘chishiga bu qonunning tatbiqi tutash muhit mexanikasida termodinamikaning birinchi qonuni ifodalanishiga, ya’ni energiya saqlanish qonuni o‘rnatilishiga olib keladi.

Faraz qilaylik, tutash muhit «fizik zarrasi» dastlab biror onda holat fazosi $A(\mu_0^1,\mu_0^2,.....,\mu_0^n)$ nuqtasi bilan aniqlansin. Sifat jihatidan turli ko‘rinishda bo‘lgan energiyalarning bu zarra tomonidan qabul qilinishi(yoki sarflanishi-manfiy ishoraga ega holda qabul qilinishi) tutash muhit zarrasi holat parametrlari μ^i larning o‘zgarishiga olib kelishi mumkin. Boshqacha aytganda, tutash muhit kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holati, uning mexanik nuqtayi nazardan ko‘chishi faqat massaviy va sirt kuchlariningina emas, balki xususan mexanik energiyaga aylanishi mumkin bo‘lgan boshqa turdagi energiyalar ta’siri tufayli ma’lum jarayonlar holat fazosida uzluksiz trayektoriyalar chizishini tasavvur etaylik. *A* nuqtadan holat fazosining $B(\mu^1,\mu^2,.....,\mu^n)$ nuqtasiga turli chiziqlar bilan o‘tish mumkin, ya’ni ko‘chish jarayoni tashkil etuvchi cheksiz kichik $d\mu^i$ lar, agar ular o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan holat parametrlari sifatida qabul qilinsa, ixtiyoriy ravishda o‘zgarishi mumkin. Tushunish qiyin emaski, μ^i larning ayrimlari ko‘chish jarayonida o‘zgarmasdan qolishi mumkin.

Endi ko‘rilayotgan jarayon holat fazosida ixtiyoriy yopiq kontur *S* bo‘yicha olinsa, barcha ma’lum bo‘lgan tajribalar asosida ushbu integral nolga teng bo‘ladi:

$$\oint (P_i + Q_i) d\mu^i = 0 \qquad (5.11)$$

(5.11) munosabat termodinamikaning birinchi qonuni deyiladi.

Agar *S* yopiq konturni $Z = Z_1 + Z_2$ -ikki kontur yig‘indi sifatida olsak:

$$\int_{Z_1} (P_i + Q_i) d\mu^i = -\int_{Z_2} (P_i + Q_i) d\mu_i \qquad (5.12)$$

A holatdan *V* holatga o‘tganda tutash muhit zarrasi qabul qilgan to‘la energiya

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{Z_1} (P_i + Q_i) d\mu^i \qquad (5.13)$$

ga teng bo‘ladi.

(5.11), (5.12) va (5.13) asosida tutash muhit holati *A* nuqtada aniqlangan bo‘lsa, *V* holatga o‘tganda uning energiyasi *A* va *V* larni tutashtiruvchi ixtiyoriy egri chiziqlar qanday bo‘lishidan qat’iy nazar, zarra qabul qilingan energiya miqdori bir hil bo‘lganligi uchun shunday e$(\mu^1,\mu^2,.....,\mu^n)$ funksiya kiritish mumkinki, natijada ushbu formulani yozish mumkin:

$$A^{(e)}+Q^{*}=e(\mu^1,\mu^2,.....,\mu^n)-e(\mu_0^1,\mu_0^2,.....,\mu_0^n) \qquad (5.14)$$

$$dE=dA^{(e)}+dQ^{*}=(P_i+Q_i)d\mu^i \qquad (5.15)$$

$E=e(\mu^1,\mu^2,.....,\mu^n)$ funksiya ko‘rilayotgan tutash muhit zarrasi to‘la energiyasi deyiladi. Bu funksiya, (5.14) asosida tasdiqlash mumkinki, o‘zgarmas son kattaligida aniqlanadi.

Taqqoslash uchun nazariy mexanikadagi massasi m bo‘lgan moddiy nuqtaning og‘irlik maydonidagi harakati o‘rganilgandagi to‘la energiya tushunchasini ko‘raylik. To‘la kinetik energiya $T=\dfrac{m\upsilon^2}{2}$ va potensial energiya ($V=mgh+const$ ko‘rinishidagi ifodani olaylik) lar yig‘indisi $T+V=const$ ga teng bo‘lib, va bu miqdor o‘zgarmas son kattaligida aniqlanadi.

Agar P_i va Q_i lar berilgan bo‘lsa, to‘la energiyani hisoblash mumkin. (5.15) asosida P_i va Q_i lar ixtiyoriy funksiyalar bo‘la olmasligi va bular uchun, agar barcha $d\mu^i$ o‘zaro bog‘lanish tenglamalariga ega bo‘lmasa, ushbu munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:

$$(P_i+Q_i)=\frac{\partial E}{\partial\mu^i} \qquad (5.16)$$

Cheksiz kichik $\Delta\tau$ hajmda tutash muhit uchun ichki energiyasini ikki qismga ajratib qaraylik: birinchisi $\Delta\tau\cdot\rho\cdot\dfrac{\upsilon^2}{2}$ va ikkinchisi $E-\Delta\tau\cdot\rho\cdot\dfrac{\upsilon^2}{2}=U\cdot\Delta m$. Bu yerda kiritilgan $U(\mu^1,\mu^2,.....,\mu^n)$ funksiya birlik massaga mos keluvchi ichki energiyani ifodalaydi.

Agar tutash muhit τ hajmni egallagan chekli sohaga tegishli bo‘lsa, ko‘rish qiyin emaski, uning to‘la energiyasi uchun ushbu formulani keltirish mumkin:

$$E=\int_\tau\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2}+U\right)d\tau \qquad (5.17)$$

(5.14) asosida ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$dE+dU_m=dA^{(e)}+dQ^{*} \qquad (5.18)$$

yoki baribir:

$$dE+dU_m=dA^{(e)}+dQ^{(e)}+dQ^{**} \qquad (5.19)$$

(5.19) da dU_m-jism ichki energiyasi o‘zgarishi.

Issiqlik oqimi tenglamasi

(5.19) va (5.16) tengliklar bir xil hajmda joylashgan chekli massaga ega tutash muhit uchun holat fazosida bir holatdan ikkinchi holatga o‘tish jarayonlari uchun yozilgan deylik. U holda bu tengliklardan yoza olamiz:

$$dU_m = dA^{(e)} - (dA_m^{(e)} + dA_n^{(i)} + dA_c^{(e)} + dA_c^{(i)}) + dQ^{(e)} + dQ^{**}$$

$$dU_m = -dA^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^{**} \qquad (5.20)$$

bu yerda $dA^{(e)} = dA_m^{(e)} + dA_c^{(e)}$ -barcha tashqi massaviy va sirt kuchlari ishi, $dA^{(i)} = dA_m^{(i)} + dA_c^{(i)}$ -barcha ichki massaviy va sirt kuchlari ishi.

(5.20) tenglama ***issiqlikning oqishi tenglamasi*** deyiladi.

Agar jarayon juda sekinlik bilan ro‘y beradigan bo‘lsa, $dE=0$ deyish mumkin bo‘lsa,

$$dA^{(i)} = -dA^{(e)}$$

bo‘ladi.

U holda issiqlikning oqish tenglamasi ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$dU_m = dA^{(e)} + dQ^{*} \qquad (5.21)$$

Bu tenglama (5.18) tenglamadan ham kelib chiqadi.

(5.19), (5.20) va (5.21) tenglamalar chekli τ hajmdagi tutash muhit uchun yozilgan edi. endi bu tengliklar ixtiyoriy cheksiz kichik hajmdagi tutash muhit uchun ko‘raylik. Bu tengliklar ixtiyoriy cheksiz kichik hajmdagi tutash muhit uchun ham o‘rinli ekanligi va integral ostidagi ifodalar uzluksiz bo‘lgan holni ko‘raylik. endi birlik massalar uchun ushbu munosabatlar o‘rinli deb faraz qilaylik:

$$\lim_{\Delta m \to 0} \frac{V_{\Delta m}}{\Delta m} = U, \quad \lim_{\Delta m \to 0} \frac{dQ^{(e)}}{\Delta m} = dq^{(e)},$$

$$\lim_{\Delta m \to 0} \frac{dQ^{**}}{\Delta m} = dq^{**}.$$

U holda

$$dU = \frac{1}{\rho} \rho^{ij} \nabla_j \upsilon_i dt + dq^{(e)} + dq^{**} \qquad (5.22)$$

Agar cheksiz kichik deformatsiya nazariyasi doirasida ish ko‘rilsa, klassik tutash muhitlar uchun $p^{ij} = p^{ji}$ ni hisobga olingan hol uchun issiqlikning oqish differensial tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$dU = \frac{1}{\rho}\rho^{ij}d\varepsilon_{ij} + dq^{(e)} + dq^{**} \qquad (5.23)$$

bu yerda

$$d\varepsilon_{ij} = e_{ij}dt\ .$$

Nazorat savollari

15. Tirik kuch teoremasi. Tashqi va ichki kuchlar ishi.
16. Termodinamikaning birinchi qonuni.
17. Adiabatik, izotermik va politrop jarayenlar. Puasson adiabatasi.
18. Termodinamikaning 2nchi qonuni. Karno teoremasi.
19. Yopishqoq suyuqlik harakati matematik modeli. Gibbs formulasi.
20. Termoelastik jism harakati matematik modeli.
21. Termoelastik jism uchun Guk qonuni.

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-AMALIY MASHG‘ULOT. TUTASH MUHIT HARAKATINI TAVSIFLASHDA LAGRANJ VA EYLER KOORDINATALARI.

.

1 **2-mavzu.** Tutash muxitlarning turli modellari. Ideal suyuqlik (gaz),yopishqoq suyuqlik va deformatsiyalanuvchi qatiq jism modellari.
2.1. Ideal suyuqlik (gaz) modeli. Eyler tenglamalari.Gromeke-Lemb tenglamasi
2.2 Yopishqoq suyuqlik va elastik jism modellari. Guk va Nave-Stoks qonunlari. Nave-Stoks va Lame tenglamalari.
2.3 Kompozitlar mexanikasida modellashtirish. Effektiv modullar tushunchasi.

Tayanch so‘z va iboralar: *tekis parallel harakat, ideal suyuqlik va gaz, shar tenzori, statsionar harakat, nostatsionar harakat, siqilmas suyuqlik.*

Gidrodinamika – gidromexanikaning siqilmas suyuqliklarning harakatini va ularning qattiq jismlar bilan yoki boshqa suyuqlikdan ajratuvchi sirtlar bilan o‘zaro tasirini o‘rganishga bag’ishlangan qismidir. Gidrodinamikaning metodlari suyuqlikning tezlik, bosim va boshqa parametrlarni mazkur suyuqlik egallagan sohaning ixtiyoriy nuqtasida va ixtiyoriy onda aniqlash imkonini beradi. Bu esa suyuqlikda harakat qiluvchi jismga yoki suyuqlikni chegaralovchi qattiq jism sirtlariga tasir qiluvchi bosim va ishqalanish kuchlarini aniqlash imkonini beradi. Gidrodinamika metodlari kichik tezlik bilan (tovush tezligiga nisbatan) harakat qiluvchi gazlar uchun ham o‘rinli.

Tekis yoki tekis-parallel harakat- suyuqlikning biror qo‘zg’almas tekislikka perpendikulyarda yotuvchi barcha zarralari shu tekislikka parallel va bir xil harakat qilsa. Bu holda suyuqlik zarralari parallel harakat qiluvchi tekislikni Oxy bilan belgilab, suyuqlik harakatini faqat shu tekislikda qaraladi.

Ideal suyuqlik va gazlar.

Ideal suyuqlik va gazlar uchun ushbu ta’rifni berish mumkin: muvozanat va harakat jarayoni uchun har bir ko‘rilayotgan $\vec{P}_n$ kuchlanish vektori shu kuchlanish aniqlangan birlik normali $\vec{n}$ bo‘lgan ixtiyoriy yuzaga normal chizig‘i yo‘nalishida bo‘lgan tutash muhitga *ideal suyuqlik (gaz)* deyiladi.

Ta'rifdan ideal suyuqlik va gazlarda $\vec{P}_n$ kuchlanishning $\vec{n}$ ga tik yo'nalishga proyeksiyasi - urunma tashkil etuvchisi nolga teng bo'ladi. Ta'rifdan $\vec{P}_n = \lambda \cdot \vec{n}$ ligi kelib chiqadiki, bu yerda λ skalyar miqdor va u noldan farqli deb olinishi kerak. Umuman olganda, λ musbat va manfiy bo'lishi mumkin. Lekin ideal suyuqlik (gazlar) odatda siqilgan holda uchrashini e'tiborga olsak $\lambda < 0$ bo'ladi va uni $\lambda = -P$ (*p>0* - bosim deb ataladi) deb belgilanadi. Bunday tutash muhit ixtiyoriy nuqtasida harakat va muvozanat onlarida kuchlanish sirti sferadan iborat bo'lib, bosh kuchlanishlar uzaro teng va $p_1 = p_2 = p_3 = -p$ bo'ladi.
Shunday qilib, kuchlanish tenzori ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix} \qquad (1.1)$$

Bunday tenzorga shar tenzori deyiladi, ko'rish qiyin emaski, ushbu formulalar o'rinli bo'ladi:

$$P_j^i = -p \cdot \delta_j^i, \quad P^{ij} = -p \cdot g^{ij}, \quad P_{ij} = -p \cdot g_{ij} \qquad (1.2)$$

Bu formulalar ixtiyoriy egri chiziqli koordinatalarida ham o'rinlidir. Dekart koordinatalari sistemasida esa yoza olamiz:

$$P^{ij} = -p \cdot \delta^{ij}, \quad P_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} \qquad (1.3)$$

Ideal suyuqlik harakati differensial tenglamalar sistemasi.

Ideal suyuqlik va gazlarning Dekart koordinatalari sistemasidagi harakat differensial tenglamalarini chiqaraylik. Buning uchun ixtiyoriy tutash muhitning Eyler koordinatalaridagi ushbu tenglamasini olaylik:

$$\rho \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \qquad (1.4)$$

(1.3) ni (1.4) ga qo'yib, topamiz:

$$\rho \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (1.5)$$

(1.5) ni birlik $\vec{e}_i$ bazis vektorga ko'paytirib qo'shsak ushbu vektor tenglamaga ega bo'lamiz:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} - gradp \qquad (1.6)$$

(1.5) yoki (1.6) tenglama ideal suyuqlik (gaz) lar uchun *Eylerning harakat differensial tenglamasi* deyiladi. Bu tenglama Eyler koordinatalaridagi ushbu differensial tenglamalar sistemasidan iboratdir:

$$\frac{\partial\upsilon_1}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}=F_1-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial\upsilon_2}{\partial t}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_3}=F_2-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2}$$
$$\frac{\partial\upsilon_3}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}=F_3-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_3}\,. \qquad (1.7)$$

Tutash muhit mexanikasida ideal suyuqlik uchun quyidagi to‘la tenglamalar sistemasi olingan [1,3,4]:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,div\vec{v}=0, \qquad (1.8)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\,gradp, \qquad (1.9)$$

$$\rho=\phi(p)\,. \qquad (1.10)$$

Buerda (1.10) – holat tenglamasi (barotrop suyuqlik); $\bar{V}$ - suyuqlik zarrasining tezlik vektori; ρ va p - mos ravishda zichlik va bosim, $\vec{F}$ – massaviy kuchlar vektori, $\phi(p)$ – avvaldan beriladigan funktsiY.

Ideal muhit harakat tenglamalarining birinchi integrallari.

Suyuqlikning statsionar harakatini, yani tezlik va bosim suyuqlikning ixtiyoriy nuqtasida vaqt davomida o‘zgarmas bo‘lib, mazkur nuqtaning suyuqlik oqimidagi o‘rniga bog’liq bo‘lgan harakatini qaraymiz.

Ideal suyuqlik va gazlar harakat differensial tenglamasi–Eyler tenglamasining Gromeko-Lemb shaklidagi vektor differensial tenglamasini olamiz:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}grad\,v^2+\left[rot\,\vec{v}\times\vec{v}\right]=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\;p \qquad (1.10)$$

(1.10) da $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$ bo‘lsin deylik, yani harakat jarayonida muhitning muayyan nuqtasida vaqt o‘tishi bilan tezlik o‘zgarmaydi deylik. Bu shartdan tashqari ideal suyuqlik va gazlar harakatini akslantiruvchi (1.10) da massaviy kuchlar zichligi potensialga ega, yani $\vec{F}=grad\,U$ deb yozish mumkin bo‘lsin deylik. Oqim maydonining har bir nuqtasida (1.10) o‘rinli va bu nuqtada tenglamaga kiruvchi barcha miqdorlar, yani $\vec{v},\rho,p$ va $\vec{F}$ lar uzluksiz vayetarli darajada differensiallanuvchi funksiyalardan iborat deylik.

Ideal suyuqlik va gazlar to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida fazoning biror chekli yoki cheksiz qismida harakatda bo‘la oladi va harakat tenglamasi

(1.10) yuqoridagi qo‘shimcha shartlar o‘rinli bo‘lgan holni olaylik. Bu fazoga tegishli ixtiyoriy L chizig‘i va unda hisob boshi sifatida biror O nuqta olaylik. U holda bu chiziqqa tegishli ixtiyoriy M nuqta holatini OM chizig‘i yoyi uzunligi S bilan bir qiymatli aniqlash mumkin. M da urunma yo‘nalishni $d\vec{s}$ cheksiz kichik vektor holati bilan aniqlaylik va ushbu skalyar tenglamani yozaylik:

$$grad\frac{v^2}{2}\cdot d\vec{s}+\left[rot\vec{v}\times\vec{v}\right]\cdot d\vec{s}=\vec{F}\cdot d\vec{s}-\frac{1}{\rho}grad\; p\cdot d\vec{s}$$

Bundan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{\partial U}{\partial s}=-\left[rot\vec{v}\times\vec{v}\right]\cdot d\vec{s} \qquad (1.11)$$

L chizig‘i bo‘ylab zichlik va bosim s koordinataga va umuman olganda L chizig‘iga bog‘liq bo‘ladi:

$$\begin{cases}\rho=\rho(s,L)\\ p=p(s,L)\end{cases} \qquad (1.12)$$

Berilgan har bir L chizig‘i uchun (1.12) dan yozaolamiz

$\rho=\rho(p,L)$.

Har bir L chizig‘i uchun bosim funksiyasi deb ataluvchi $P=P(p,L)$ ni shunday kiritaylikki (1.11) dagi ikkinchi had $\frac{\partial P}{\partial s}$ teng bo‘lsin deylik. U holda $\frac{\partial P}{\partial s}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$ dan $P(p,L)=\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho(p,z)}$ bo‘lib, p_1 o‘zgarmas son kattaligi aniqligida olinadi va bu son turli L chiziqlari uchun turli bo‘lishi mumkin.

Suyuqlik nostatsionar harakatda bo‘lsin. Suyuqlikning ihtiyoriy nuqtasidagi tezlik va bosim vaqt davomida o‘zgaruvchan bo‘lsa, bunday harakatga nostatsionar harakat deyiladi. Suyuqlikning uyurmasiz nostatsionar harakati qaralsa, bu holda ham Eyler tenglamasining birinchi integrali – Koshi-Lagranj integrali o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{V^2}{2}+P+U=C(t), \qquad (1.13)$$

buerda φ - tezlik potensiali, yani $\vec{V}=grad\varphi$; C(t)- ixtiyoriy funktsiY.

Siqilmas suyuqlik uchun (1.1) uzluksizlik tenglamasi va harakatning potensialli ekanligidan tezlik potensiali uchun Laplas tenglamasini olamiz:

$$\Delta\varphi=0 \qquad (1.14)$$

Agar massaviy kuchlar etiborga olinmasa, yuqoridagi birinchi integrallar quyidagi ko‘rinishni oladi

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C_0=const\,, \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C(t)\,. \tag{1.16}$$

Shunday qilib, ideal siqilmas suyuqlikning potensialli harakatini tadqiq qilish - bunday harakatga oid masalaniyechish, muayyan boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi Laplas tenglamasining yechimini topishga keltiriladi. Bunda p bosim (1.15) yoki (1.16) munosabatlardan topiladi.

Suyuqlikning nostatsionar harakati holida bosim p harakat sodir bo‘layotgan sohaning bir nuqtasida berilgan bo‘lsa, ixtiyoriy Funksiya $C(t)$ ni aniqlash mumkin.

Quyidagi shartlar bajarilganda suyuqlikni *siqilmas* deb hisoblash mumkin: harakat statsionar bo‘lib, Bernulli integrali o‘rinli bo‘lganda $v \ll a$, buerda v - suyuqlik zarrasi tezligi, a - tovush tezligi; harakat nostatsionar bo‘lganda oxirgi shartdan tashqari $T \gg l/a$ shartning bajarilishi zarur, buerda l va T mos ravishda xarakterli chiziqli kattalik va xarakterli vaqt.

Ushbu modulni o‘qish quyidagi sabablarga ko‘ra maqsadga muvofiq deb hisoblanadi. Birinchidan, aviatsiyaning paydo bo‘lishi va rivojlanishida o‘ta muhim ahamiyatga ega qanot profilini oqib o‘tish masalasi yuqorida keltirilgan faraz va mulohazalar o‘rinli deb hal qilingan. Ikkinchidan, texnikada ko‘p uchraydigan katta tezlik bilan sodir bo‘ladigan jarayonlarni ideal suyuqlik doirasida tadqiq qilish natijalari bilan tasdiqlanadi.

Modul jismning barcha yo‘nalishlarida chegaralanmagan hajmni egallagan va cheksiz uzoq nuqtalarda harakatsiz holatda bo‘lgan suyuqlikdagi harakatga oid masalalarga bag’ishlangan.

Nazorat savollari

1. Suyuqlikning statsionar oqimi deganda nimani tushunasiz?

2. Ideal suyuqlikning harakat tenglamasini Gromeko-Lamb ko‘rinishida yozing.

3. Eyler tenglamasining birinchi integrali – Koshi-Lagranj integrali o‘rinli bo‘lgan shartlarni ayting?

4. Siqilmas potensialli ideal suyuqlik oqimiga massaviy kuchlar tasir hisobga olinmasa, Eyler tenglamasining birinchi integrali qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

5. Barotropik jarayon uchun suyuqlikning gidrodinamik parametrlari orasidagi boglanishni aniqlang?

6. Suyuqlikning nostatsionar oqimi deganda nimani tushunasiz?

Qanday shart bajarilganda jismni siqilmas

-**Mavzu : Ideal siqilmaydigan suyuqlikni tekis uyurmasiz xarakati**

Reja:

2.1 Koshi-Lagranj integrali.

2.2 Ideal siqilmaydigan suyuqlikni uyurmasiz harakatini o‘rganishga kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasini qo‘llash.

2.3 Kompleks potensiallarga misollar .

Tayanch so‘z va iboralar: *ideal suyuqlik differensial tenglamasining Gromeko-Lemb ko‘rinishini, Laplas tenglamasi, tok funktsiyasi, kompleks tezlik, kompleks potensial. elastik jism, Guk qonunini, yopishqoq suyuqlik, Nave-Stoks formulasi, izotrop chiziqli elastik jism, izotrop chiziqli yopishqoq suyuqlik.*

2.1 Koshi-Lagranj integrali.

Ideal suyuqlik va gazlar uchun tutash muhit harakat miqdori o‘zgarishi tenglamasi asosida olingan Eyler tenglamalari stasionar va nostatsionar oqimlar, siqiluvchan va siqilmas ideal suyuqlik va gazlar oqimlarini ifodalay olishiga ishonch hosil qilgan edik.

Bu tenglamalarda, agar $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ bo‘lsa va ma’lum qo‘shimcha shartlar bajarilganda, Bernulli integrali olinishini ko‘rdik. endi $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \neq 0$ bo‘la oladigan, nostatsionar tezlik maydoniga ega muhit harakatini ko‘raylik.

Ideal suyuqlik uchun biror koordinatalar sistemasidagi harakat differensial tenglamasining Gromeko-Lemb ko‘rinishini yozaylik :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad\,\frac{v^2}{2} + 2[\vec{\omega} \times \vec{v}] = -\frac{1}{\rho} grad\ p + \vec{F} \qquad (2.1)$$

Quyidagi shartlar bajariladi deb faraz qilaylik:

1) $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{v} = 0$ va $\vec{v} = grad\,\varphi$

2) $p = p(\rho)$ - baratropik oqim ko‘riladi va demak butun harakat maydoni uchun bosim funksiyasi mavjud bo‘lib,

$$\frac{1}{\rho} grad\ p = grad P$$

bo‘lsin deylik.

U holda (2.1) quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$grad\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{v^2}{2} + P\right) = \vec{F}$$

Bundan massaviy kuchlar zichligi $\vec{F}$ potensialli bo‘lishi kerakligi kelib chiqadi: $\vec{F} = grad U$.

U hodla dastlabki (2.1) tenglama ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$grad\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{v^2}{2}+P-U\right)=0 \qquad (2.2)$$

(2.2) dan ushbu munosabatni hosil qilamiz:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{2}(grad\varphi)^2+P-U=f(t) \qquad (2.3)$$

buerda $f(t)$ vaqtning ixtiyoriy funksiyasi (2.3) ni (2.1) ning yuqoridagi keltirilgan shartlar bajarilgandagi integrali deyish mumkin. Bu integral Koshi-Lagranj integrali deyiladi va bu integral oqim sohasining barcha nuqtalarida o‘rinlidir.

Oqimning biror nuqtasida (2.3) ning chap qismi ma’lum bo‘lsa, u holda $f(t)$ ni aniqlab yozish mumkin. Bundan tashqari (2.3) da $\varphi(x,y,z,t)$ o‘rniga $\varphi_1(x,y,z,t)=\varphi(x,y,z,t)+\int f(t)dt$ kiritilsa, φ_1 ga nisbatan o‘ng tomoni nolga aylangan (2.3) tenglamani hosil qilish mumkin. $grad\varphi=grad\varphi_1$ bo‘lganligi uchun bunday almashtirish tezlik maydoni aniqlanishiga tasir etmaydi.

(2.3) da $f(t)=0$ deb olaylik va U ma’lum bo‘lib, $\varphi(x,y,z,t)$ aniqlangan bo‘lsa, suyuqlik oqimi har bir nuqtasidagi bosimni hisoblash mumkin bo‘ladi.

Ko‘rish qiyin emaski, Koshi–Lagranj integralidan hususiy holda Bernulli integrali hosil bo‘laoladi.

Harakatdagi koordinatalar sistemasida Koshi-Lagranj integrali. Ma’lumki, mexanik harakat, jumladan suyuqlik zarralarining harakati biror koordinatalar sistemasiga nisbatan o‘rganiladi. Yuqorida keltirilgan Koshi–Lagranj integrali harakat o‘rganilayotgan koordinatalar sistemasida olingandir. Ayrim hollarda Koshi–Lagranj integralini dastlabki tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan yozilishi qulay bo‘lishi mumkin. Haqiqatdan ham, masalan, suyuqlikda harakatda bo‘lgan jismga biriktirilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan ham o‘rganilishi mumkin.

Jism bilan mustahkamlangan koordinatalar sistemasini ξ,η,ζ, dastlabki koordinatalar sistemasini x,y,z deylik. Koordinatalar almashtirish formulalarini yozaylik:

$$x=x(\xi,\eta,\zeta,t),\ y=y(\xi,\eta,\zeta,t),\ z=z(\xi,\eta,\zeta,t) \qquad (2.4)$$

Ko‘rish qiyin emaski, agar $\varphi(x,y,z,t)$ tezlik potensiali bo‘lsa, umumiy holda

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{x,y,z=const}\neq\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi,\eta,\zeta=const} \qquad (2.5)$$

(2.4) ni etiborga olib yozaolamiz:

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}=\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial t}+grad\varphi\cdot\vec{v}_{куч} \qquad (2.6)$$

(2.6) ifoda o‘ng tomonining ikkinchi hadi invariant miqdor bo‘lib, x,y,z va ξ,η,ζ koordinatalar sistemasida bir hil qiymatga ega. x,y,z koordinatalarida yuqorida keltirilgan (2.6) ifoda ξ,η,ζ koordinatalarida ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}-\vec{v}\cdot\vec{v}_{куч}+\frac{v^2}{2}+\mathrm{P}-U=f(t) \qquad (2.7)$$

Agar harakatdagi koordinatalar sistemasi absolyut qattiq jism sifatida harakatda bo‘laoladi desak, bu harakat tezligida, nazariy mexanikadan ma’lumki, ko‘chirma harakat tezligi ilgarilanma va oniy burchak tezliklari orqali ifodalanadi:

$$\vec{v}_{куч}=\vec{v}_{0_1}+[\vec{\omega}\times\vec{r}] \qquad (2.8)$$

Buerda $\vec{v}_{0_1}$ - x,y,z koordinatalar boshi nuqtasi tezligi, $\vec{\omega}$ - harakatdagi koordinatalar sistemasi oniy burchak tezligi, $\vec{r}$ - harakatdagi koordinatalar sistemasiga ko‘ra nuqta radius vektori.

Agar harakatdagi koordinatalar sistemasi hususiy holda $0x$ o‘qi bo‘ylab $\vec{v}$ tezlikda harakatda bo‘laoladigan hol ko‘riladigan bo‘lsa, (4.4) formula ushbu ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial\varphi(\xi,\eta,\zeta,t)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot V+\frac{(grad\varphi)^2}{2}+\mathrm{P}-U=f(t) \qquad (2.9)$$

Agar ko‘rilayotgan suyuqlik bir jinsli siqilmas suyuqlikdan iborat bo‘lsa, (2.6) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\cdot V+\frac{(grad\varphi)^2}{2}+\frac{P}{\rho}-U=f(t) \qquad (2.10)$$

Ideal siqilmas suyuqlikning potensialli tezlik maydonidagi impulsiv bosim ta’siridagi harakati masalasi.

Biror τ hajmdagi ideal siqilmas suyuqlikga juda qisqa t' vaqt davomida cheksiz katta yuqori bosim tasir etadi deylik. Suyuqlik harakatini o‘rganish uchun Eyler tenglamasining vektor ko‘rinishini yozaylik

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}grad\ p \qquad (2.11)$$

$[0,t']$ vaqt oralig‘ida bu tenglamani integrallaylik

$$\vec{v}(t',x,y,z)-\vec{v}(0,x,y,z)=\int_0^{t'}\vec{F}dt-\int_0^{t'}\frac{1}{\rho}grad\ p\,dt \qquad (2.12)$$

Cheksiz kichik t' vaqt davomida tasir etuvchi bosim p' cheksiz katta bo‘lib, uning impulsi $\int_0^{t'}p'dt$ chekli miqdor bo‘lsin deylik. U holda, $p_t=\lim_{t'\to 0}\int_0^{t'}p'dt$ kiritsak, ushbu munosabatga ega bo‘lamiz

$$\vec{v}(t', M) - \vec{v}(0, M) = grad\varphi$$

buerda $\varphi = -\frac{p_t}{\rho}$.

Siqilmas suyuqlik uchun $\vec{v} = grad\varphi$ bo‘lgani uchun, $\Delta\varphi = 0$ bo‘lib, bu tenglama Laplas tenglamasi deyiladi.

$\sum$ sirt bilan chegaralangan bir bog‘li τ sohada Laplas tenglamasiningechimini uning chegaradagi qiymatiga ko‘ra topish (tashqi bosim impulsi berilgan bo‘lsa), Dirixle masalasidan iborat bo‘ladi va uningechimi bir qiymatli ravishda aniqlanadi. $\sum$ sirtga tasir etuvchi tashqi impulsiv kuch tasiri butun τ sohaga cheksiz katta tezlikda tarqalishi zichlikning o‘zgarmasligidan kelib chiqadi.

2.2Kompleks o‘zgaruvchili analitik funksiyalar va ideal suyuqlikning potensialli harakati.

Oqish (tok)funksiyasi. Siqilmas suyuqlikni statsionar harakati uchun

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} = 0,$$

tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi [1, 285-288,2, 163-172]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad (2.13)$$

Oqish chiziqlari differentsal tenglamasi esa:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \text{yoki} \quad -vdx + udy = 0,$$

Bu yerda u va v - suyuqlik zarrasi teziligi vektorining tashkil etuvchilari.

So‘nggi tenglamaning chap tomoni biror ψ funksiyaning to‘la differensiali, yani $d\psi = 0$ ekanini ko‘rish qiyin emas. Buning uchun

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

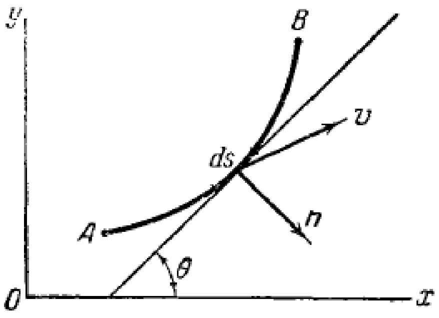
(2.14)

Ushbu $\psi(x, y)$ funktsiyani oqish (tok) funtsyiasi deb olish kifoY. U har bir oqish chizig’ida o‘zgarmas qiymatni qabul qiladi: $\psi(x, y) = C$.

Ushbu Funksiya yordamida biror egri chiziqning (oqish chizig’i bo‘lmagan) ikkita $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalari orasidan o‘tuvchi suyuqlik oqimini hisoblash mumkin (6-rasm). Haqiqatdan

$$Q = \int_B^A (\vec{V} \cdot \vec{n})ds = \int_B^A [u\cos(n, x) + v\cos(n, y)]ds =$$
$$= \int_B^A (u\sin\theta - v\cos\theta)ds = \int_B^A (-vdx + udy) = \int_B^A d\psi = \psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2) \qquad (2.15)$$

Buerda θ - ds va Ox orasidagi burchak.



6-rasm

Yuqoridagi formulalar harakat potensialligi (uyurmalar yo'qligi) talab qilinmasdan olingan. Haqiqatdan, (2.14) ga ko'ra uyurma vektorining tashkil etuvchilari ushbu ko'rinishga ega

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = -\Delta\psi$$

Endi harakatning potensialliligini, ya'ni uyurmalar mavjud emasligini talab qilsak

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{yoki} \quad \vec{V} = grad\varphi; \; \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \qquad (2.16)$$

ish funksiyasi Laplas tenglamasini qanoatlantirishini ko'rish mumkin:

$$\Delta\psi = 0$$

(2.17)

(2.13) va (2.14) dan esa

$$\Delta\varphi = 0$$

(2.18)

ekanligi kelib chiqadi.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

(2.19)

Kompleks tezlik va Kompleks potensial.

φ va ψ funktsyialar Koshi – Riman sharti (2.19) ni qanoatlantirgani tufayli $W = \varphi + i\psi$ ifoda $z = x + iy$ kompleks argumentning analitik funksiyasi bo'ladi. Bu $w = f(z)$ Funksiya kompleks potensial deb ataladi.

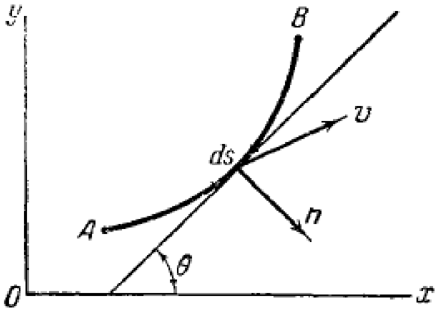
$w = f(z)$ funktsiyaning hosilasini hisoblaymiz

$$\bar{V} = \frac{dW}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}i = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (2.20)$$

Ushbu hosila $\frac{dW}{dz} = u - iv$ tezlik bilan bog'liq ekanligi ko'rinib turibdi.

Agar haqiqiy birlik +1 va mavhum birlik i larni Ox va Oy o'qlari bo'ylab yo'nalgan birlik vektorlar sifatida qaralsa, $u + iv$ Kompleks son tezlik vektori V

bilan tasvirlanadi (7-rasm); qo‘shma son $\frac{dW}{dz}=u-iv$ tezlik vektori V ning Ox o‘qiga nisbatan ko‘zgu aksi bo‘lib, $\overline{V}$ vektor bilan tasvirlanadi.



7-rasm

Mazkur $\overset{\rho}{V}=\frac{dW}{dz}$ kompleks sonni k*ompleks tezlik* deb ataladi; Kompleks tezlik moduli tezlik miqdoriga teng: $\left|\frac{dW}{dz}\right|=\sqrt{u^2+v^2}=|V|$.

Yuqorida aytilganlardan va (2.20) dan har bir $f(z)$ analitik Funksiya oqish chiziqlari $\psi = c\ o\ n$ va $\varphi = const$ izopotensial chiziqlarining muayyan sistemasini beradi, yani, umuman olganda, muayyan tezlik maydoni kinematikasi kartinasini aniqlaydi. Kompleks argumentli funktsiyalar nazariyasi va suyuqlik tekis harakati kinematikasini o‘rganish orasidagi ushbu bog’lanish mazkur harakatni tadqiq qilish uchun katta imkoniyatlar beradi. Bunda kompleks potensiali W addiktiv o‘zgarmas aniqligida kiritiladi.

2.3Kompleks potensiallarga misollar

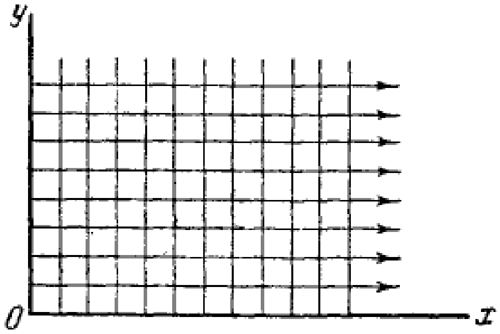
1) $W=az$, buerda a- musbat son. W funksiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib quyidagilarni topamiz

$$\varphi = ax = const, \quad \psi = ay = const$$

bundan izopotensiallar Oy o‘qiga parallel, oqish chiziqlari esa Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar ekanligini ko‘ramiz (8-rasm). Tezlik o‘zgarmas va $a>0$ bo‘lsa Ox o‘qi bo‘ylab yo’nalgan:

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=a, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \quad \varphi = const$$

Bunday oqim bir jinsli ilgarlanma deb ataladi.

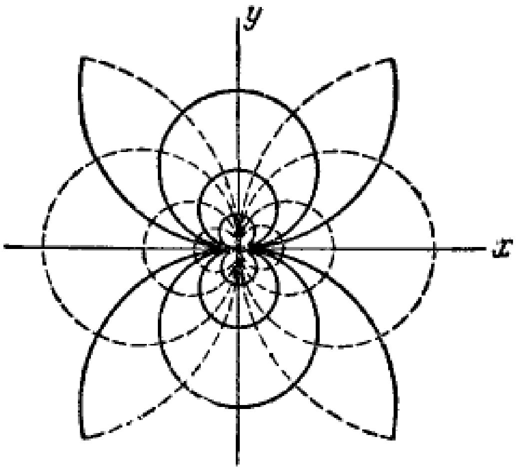


8-rasm

2) Funksiya $W=\frac{1}{z}$, yani $W=\varphi+i\psi=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$ bo‘lsa, oqish chiziqlari Ox o‘qiga koordinata boshida urinuvchi aylanalar sistemasidan iborat bo‘ladi

$$\frac{y}{x^2+y^2}=const=C\Rightarrow x^2+y^2-\frac{1}{c}y=0,$$

izopotensial chiziqlar esa $\frac{x}{x^2+y^2}=const$ Oy o‘qiga koordinata boshida urinuvchi aylanalar sistemasini beradi (9-rasm).



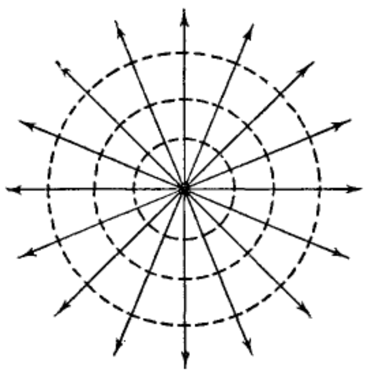
9-rasm

Kompleks tezlik ifodasi $\frac{dW}{dz}=-\frac{1}{z^2}$ tezlik miqdori koordinata boshida cheksiz katta bo‘lishini ko‘rsatadi. Bu holda koordinata boshi tezlik uchun maxsus nuqta ikki karrali qutb va Kompleks potensial uchun oddiy qutb bo‘ladi.

1) $W=\ln z$. Kompleks o‘zgaruvchini qutb koordinatalar sistemasida yozsak

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

$\varphi=\ln r=const$, $\psi=\theta=const$ ekanligini, yani oqish chiziqlari $\theta=const$ to‘g’ri chiziqlar va izopotensial chiziqlari markazi koordinata boshida bo‘lgan $r=const$ konsentrik aylanalar bo‘lishini ko‘ramiz (10-rasm). Koordinata boshi tezlik uchun oddiy qutb bo‘lib, Kompleks potensial uchun logarifmik maxsuslikni beradi.



10-rasm

Nazorat savollari

1. Ideal suyuqlikning harakat tenglamasini Gromeko-Lamb ko‘rinishida yozing.
2. Eyler tenglamasining birinchi integrali – Koshi-Lagranj integrali o‘rinli bo‘lgan shartlarni ayting?
3. Suyuqlikning qanday harakati potensialli deyiladi?
4. Qanday shartlar bajarilsa Laplas tenglamasi kelib chiqadi.
5. Barotropik jarayon uchun suyuqlikning gidrodinamik parametrlari orasidagi bog‘lanishni aniqlang?
6. Oqim sohasida Kompleks potensial analitik Funksiya bo‘lishi uchun qanday shartlar bajarilishi kerak.
7. Kompleks tezlik qanday aniqlanadi.
8. Kompleks potensiallarga misollar keltiring.
9. Ideal siqilmas suyuqlikning tekislikka parallel potensialli oqimi uchun Koshi-Riman shartini tushuntiring.

3-Mavzu: Nave-Stoks tenglamasining aniq yechimlari.

Reja:

1. Nave-Stoks tenglamasini yechishga chiziqli masalalar.
2. Kanaldagi Kuett oqimi.
3. Stoks masalalari, ikkita koaksal aylanuvchi silindrlar orasidagi oqim.

Tayanch so‘z va iboralar: *potensialli oqim, Nave-Stoks tenglamasining aniq yechimlari, Kuett oqimi, sof siljishli oqim, qatlamli nostatsionar oqim, koaksial aylanuvchi silindrlar*.

3.1 Nave-Stoks tenglamasini yechishga chiziqli masalalar.

Nave-Stoks tenglamasining aniq yechimlarini qidirish umumiy holda bartaraf etib bo‘lmaydigan matematik qiyinchiliklarga olib keladi. Bu qiyinchiliklar, avvalo Nave-Stoks tenglamasining chiziqsiz ekanligi va ideal suyuqliklarning potensialli oqimini o‘rganishdagi prinsiplarni qo‘llash mumkin emasligi ta’sirida yuzaga keladi. Shunga qaramasdan Nave-Stoks tenglamasining aniq yechimlarini xususiy hollarda topish mumkin. Bunday hollarda tenglamalardagi kvadratik hadlar o‘z-o‘zidan yo‘qolib ketadi.

Siqilmaydigan suyuqlik uchun Nave-Stoks tenglamasi []:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
&\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
&\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Uzluksizlik tenglamasi

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (3.2)$$

Tezligi faqat bitta tashkil etuvchisi mavjud bo‘lgan qatlamli deb ataluvchi oqimlar - aniq yechimlarning oddiy sinfini tasvirlaydi.

Aytaylik, tezlikning u tashkil etuvchisi noldan farqli, v va w tashkil etuvchilari nolga teng bo‘lsin. Bu holda uzluksizlik tenglamasidan $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ kelib chiqadi va tezlik tashkil etuvchisi x koordinataga bog‘liq bo‘lmaydi.

Ko‘rinib turibdiki, bunday oqim uchun

$$u=u(y,z,t),\ v\equiv 0, w\equiv 0,$$

(3.1) dan

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

Bunday oqim uchun bosim faqat x va t larga bog‘liqligi kelib chiqadi. x yo‘nalishi uchun Nave-Stoks tenglamasida barcha konvektiv hadlar tushib qoladi va ancha oddiy ko‘rinishga o‘tadi:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (3.3)$$

(3.3) tenglama $u(y,z,t)$ o‘zgaruvchiga nisbatan chiziqli differensial tenglama hisoblanadi.

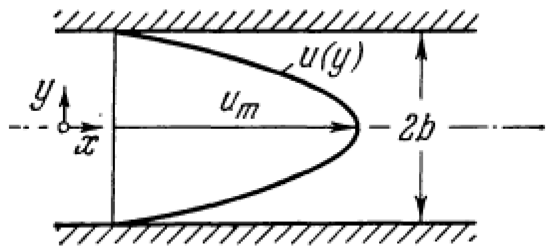
1.1 Kuettning kanaldagi oqimi.

Ikkita parallel tekis devor bilan chegaralangan kanaldagi statsionar tekis oqim uchun (3.3) tenglama juda sodda yechiladi (14-rasm). Bu holda (3.3) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{dp}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2}, \qquad (3.4)$$

Agar devorlar orasidagi masala $2b$ ga teng bo‘lsa, chegaraviy shartlar quyidagicha bo‘ladi:

$$y=\pm b \ \text{ da } \ u=0.$$



14-rasm.

$\frac{\partial p}{\partial y}=0$ ekanligi uchun (3.4) tenglamadan bosimlar farqi bo‘ylama yo‘nalishda o‘zgarmasligi kelib chiqadi, ya’ni $\frac{dp}{dx}=const$. Shu sababli (4) tenglamani integrallab,

$$u=-\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(b^2-y^2). \qquad (3.5)$$

Bundan ko‘rinadiki, kanalda tezliklar parabolik taqsimotga ega bo‘ladi.

Endi ikkita parallel tekis devor bilan chegaralangan kanaldagi statsionar tekis oqim qaraladi, bunda ulardan bittasi tinch holatda, ikkinchisi esa o‘z tekisligida o‘zgarmas tezlik U bilan harakat qiladi. Bunday oqim **Kuett oqimi** deyiladi. Bu holda (3.4) tenglama juda oddiy yechiladi.

Devorlar orasidagi masofa h ga teng bo‘lsin. U holda chegaraviy shart quyidagicha:

$$y = 0 \text{ da } \quad u = 0$$

$$y = h \text{ da } \quad u = U$$

va (3.4) tenglamaning yechimi

$$u = \frac{y}{h}U - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}(1 - \frac{y}{h}) . \qquad (3.6)$$

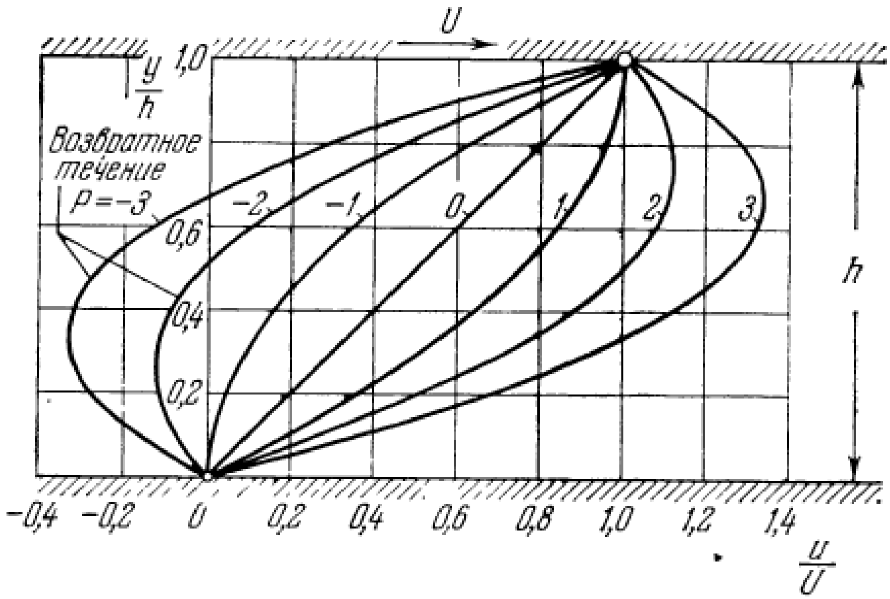
Bosimlar farqining har xil qiymatlari uchun tezliklar taqsimoti 2-rasmda ko‘rsatilgan. Xususan, nolinchi bosimlar farqi uchun tezliklar taqsimoti chiziqli ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u = \frac{y}{h}U . \qquad (3.7)$$

Bunday tezliklar taqsimoti o‘rinli bo‘lgan oqimni **Kuettning oddiy** yoki **sof siljishli oqimi** deyiladi.

Tezliklar taqsimoti chiziqlari ko‘rinishi Kuett oqimida o‘lchamsiz bosim gradiyenti bilan aniqlanadi:

$$P = -\frac{h^2}{2\mu U}\frac{dp}{dx}$$



15-rasm.

1.2 Stoks masalalari, ikkita koaksal aylanuvchi silindrlar orasidagi oqim.

Stoksning 1-masalasi. Qatlamli nostatsionar oqimlar harakatini qaraymiz. Bunday oqimlarda tezlanishning konvektiv tashkil etuvchilari aynan nolga teng, u holda Nave-Stoks tenglamasida faqat tezlanishning lokal tashkil etuvchilari va ishqalanish kuchlari qatnashgan hadlari qoladi.

Aytaylik, tekis devor tinch holatdan to‘satdan o‘z tekisligida o‘zgarmas U_0 tezlik bilan harakat qila boshlaydi. Devor yaqinida qanday oqim yuzaga kelishini aniqlaymiz. Devor xz tekislik bilan ustma-ust tushsin.

Tekislikdagi masala uchun Nave-Stoks tenglamasida quyidagi ko‘rinishni keladi [2,474-477,]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \qquad (3.8)$$

Oqim sohasida bosim o‘zgarmas. Quyidagi boshlang‘ich shartlar o‘rinli

$$\begin{aligned} &t \le 0 \text{ da} \quad u = 0, \text{ barcha } y \text{ uchun} \\ &t > 0 \text{ da} \quad u = U_0, \quad y = 0 \text{ uchun} \\ &\qquad u = 0, \quad y = \infty \text{ uchun.} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

(3.8) differensial tenglama $y > 0$ yarim fazoda issiqlik tarqalishini tasvirlovchi issiqlik tarqalish tenglamasi bilan ustma-ust tushadi, bu holda $t = 0$ vaqtda $y = 0$ devor atrof-muhit temperaturasidan yuqori bo‘lgan qandaydir temperaturagacha yetkaziladi.

Agar yangi o‘lchovsiz o‘zgaruvchi kiritsak,

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \qquad (3.10)$$

u holda (3.8) xususiy hosilali tenglamani oddiy differensial tenglamaga keltirish mumkin.

So‘ngra, u ni

$$u = U_0 f(\eta), \qquad (3.11)$$

ko‘rinishda olsak, u holda $f(\eta)$ uchun oddiy differensial tenglama olinadi:

$$f'' + 2\eta f' = 0 \qquad (3.12)$$

chegaraviy shartlar

$$\eta = 0 \text{ da } f = 1 \text{ va } \eta = \infty \text{ da } f = 0.$$

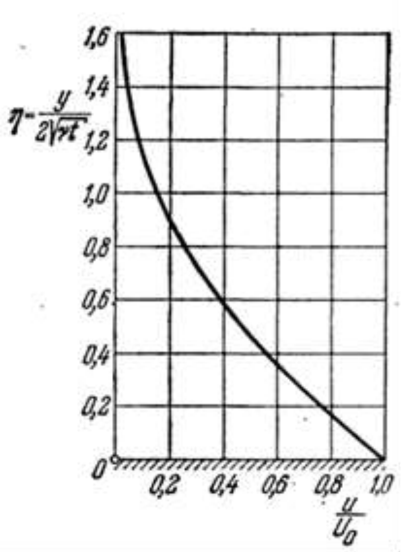
Bu tenglamaning yechimi

$$u = U_0 \, erf\, \eta, \qquad (3.13)$$

bunda

$$erf\, \eta = \frac{\sqrt{2}}{\sum \pi} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$$

ehtimollik integrali qiymatlari jadvalda keltiriladi.Tezliklar taqsimoti 16-rasmda tasvirlangan. (3.13) tenglikka kiruvchi ehtimollik integrali $\eta = 2$ da 0,01 qiymatga ega bo‘ladi.



16-rasm

Ikkita koaksial aylanuvchi silindrlar orasidagi oqim.

Har xil, lekin o‘zgarmas burchak tezlik bilan aylanuvchi ikkita koaksial silindrlar orasidagi oqimi Nave-Stoks tenglamasining oddiy aniq yechimiga olib kelinadi.

r_1 va r_2 - silindrning ichki va tashqi radiuslari, ω_1 va ω_2 - ularning burchak tezliklari. Qaralayotgan oqimni tekis deb hisoblash mumkinligi sababli, Nave-Stoks tenglamalar sistemasining qutb koordinatalar sistemasida ifodasida faqat birinchi ikkitasi qoladi:

$$\rho\frac{u^2}{r}=\frac{dp}{dr} \qquad (3.14)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{d}{dr}\left(\frac{u}{r}\right)=0 \qquad (3.15)$$

Chegaraviy shartlar

$$r=r_1 \text{ da } u=\omega_1 r_1$$

$$r=r_2 \text{ da } u=\omega_2 r_2$$

(3.15) tenglamani berilgan chegaraviy shartlarda integrallasak:

$$u(r)=\frac{1}{r_2^2-r_1^2}\left[r(\omega_2 r_2^2-\omega_1 r_1^2)-\frac{r_2^2 r_1^2}{r}(\omega_2-\omega_1)\right] \qquad (3.16)$$

Radial yo‘nalishda bosim taqsimoti (3.14) tenglama bilan aniqlanadi.

Ichki silindr tinch holatda, tashqi silindr aylanayotgan hol amaliy ahamiyatga ega. Tashqi silindrdan suyuqlikka uzatiluvchi aylantiruvchi moment

$$M_2=4\pi\mu h\frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2-r_1^2}\omega_2 \qquad (3.17)$$

bu yerda h - silindr balandligi.

Xuddi shunday kattalikka tinch holatdagi ichki silindrga uzatilyotgan M_1 aylantiruvchi moment ega bo‘ladi. Bunday qurilma ikki o‘qli silindrdan iborat bo‘lib, ba’zan yopishqoqlik koeffitsiyentini aniqlashda qo‘llaniladi.

(3.17) tenglik yordamida yopishqoqlik koeffitsiyentini hisoblash mumkin.

Nazorat savollari

1. Tekislikdagi siqilmaydigan suyuqlik oqimi uchun Nave-Stoks tenglamasini yozing.
2. Qatlamli oqim deganda nimani tushunasiz?
3. Nave-Stoks tenglamasi aniq yechimga egami?
4. Kuettning kanaldagi oqimida bosimlar farqi qaysi shartni qanoatlantiradi?
5. Kanaldagi statsionar oqim uchun tezliklar taqsimoti qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
6. Kuettning kanaldagi oqimi masalasi uchun chegaraviy shartni izohlang.
7. Stoksning 1-masalasi qaysi turdagi oqimlar uchun o‘rinli?
8. Ikkita koaksial aylanuvchi silindrlar orasidagi oqim masalasida Nave-Stoks tenglamasining qaysi ko‘rinishidan foydalaniladi?

V. GLOSSARIY

Termin	O‘zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Atmosfera.	Yer va boshqa fazoviy jismlarning gazsimon qobig‘i. Yer yuzasida u asosan azot (78,08%), kislorod (20,95%), argon (0,93%) suv but (0,2-2,6%), karbonat angidrid gazidan (0,03%) tashkil topgan.	**Atmosphere**– gaseous outer cover of the Earth and other celestial bodies. At the very earth surface it mainly consists of nitrogen (78,08%), oxygen (20,95%), argon (0,93%), water steam (0,2-2,6%), carbonic acid gas (0,03%).
Atmosfera bosimi, havo bosimi.	Yer sirtiga atmosfera og’irligi ko’rsatadigan bosim, havo bosimi.	**Atmospheric pressure; air pressure.** The pressure exerted by the weight of the atmosphere on the Earth’s surface.
Ideal suyuqlik	Harakat davomida faqat normal kuchlanishlar paydo bo‘ladigan suyuqlik.	.
Bosh kuchlanishlar –.	Berilgan nuqtadagi kuchlanish bosh o‘qlariga perpendikulyar yuzachalarga normal kuchlanishlar	.
Siqiluvchan suyuqlik –.	Zichligi bosimga bog‘liq bo‘lgan suyuqlik	
Yopishqoq suyuqlik –	Zarrachalarining defor-masiyasi bilan bog‘liq normal va urinma kuchlanishlari paydo bo‘ladigan suyuqlik..	**Atmospheric water.** Water in the atmospheric in the form of vapour or suspended products of condensation such as drops, crystals, etc.

Atmosfera yog'inlari.	Yer sirtiga atmosferadan yomg'ir, qor, do'l, shudring va boshqa korinishlarda tushadigan namlik.	**Precipitation.** The deposition of moisture from the atmosphere onto the Earth's surface, including dew, hail, rain, snow, etc.
Elastik jism -	Kuch olib tashlangandan so'ng o'z holatiga to'liq qayuvchi jism.	
Tok chizig'i	Urinma va tezlik vektori ustma-ust tushadigan chiziq .	
AeroklimatologiY.	Erkin atmosfera klimatologiyasi, ya'ni troposfera va strotasferada 20-25 km gacha balandlikdagi iqlimiy sharoitlarni o'rganadi.	**Aeroclimatology.** Climatology of the free atmosphere, i.e. the study of climatic conditions in the troposphere and stratosphere up to 20-25 km.
Atmosfera bosimi, havo bosimi.	Yer sirtiga atmosfera og'irligi ko'rsatadigan bosim, havo bosimi.	**Atmospheric pressure; air pressure.** The pressure exerted by the weight of the atmosphere on the Earth's surface.
Atmosfera fronti.	Turlicha fizik xususiyatlarga ega bo'lgan ikkita havo massalari orasidagi yuza.	**Atmospheric front.** The surface of separation of two air masses with different physical properties.
Atmosfera hodisasi.	Meteostansiya va uning atrofida ko'z bilan kuzatiladigan fizik hodisa: gidrometeorlar, momoqaldiroq, kuchli shamol, tuman va boshqalar.	**Atmospheric phenomenon.** A physical phenomenon visually observed at a meteorological station and around: hydrometeors, thunderstorm, fog, squall, etc.
Atmosfera sirkulyatsiyasi	Butun yer kurrasi miqyosida havo oqimlari tizimi hamda uning to'liq statik bayoni.	**Atmospheric circulation; circulation of the atmosphere.** Planetary system of air flow patterns over the whole globe and its complete statistical description

Atmosfera suvi.	Atmosfera havosidagi suv bug'lari, kichik tomchilar yoki kristallar ko'rinishidagi muallaq zarrachalar.	**Atmospheric water.** Water in the atmospheric in the form of vapour or suspended products of condensation such as drops, crystals, etc.
Atmosfera yog'inlari.	Yer sirtiga atmosferadan yomg'ir, qor, do'l, shudring va boshqa korinishlarda tushadigan namlik.	**Precipitation.** The deposition of moisture from the atmosphere onto the Earth's surface, including dew, hail, rain, snow, etc.
Aeroklimatolo giY.	Erkin atmosfera klimatologiyasi, ya'ni troposfera va strotasferada 20-25 km gacha balandlikdagi iqlimiy sharoitlarni o'rganadi	**Aeroclimatology.** Climatology of the free atmosphere, i.e. the study of climatic conditions in the troposphere and stratosphere up to 20-25 km.
BMT.	Birlashgan Millatlar Tashkiloti.	**UN.** United Nations.
Boshgidromet	Gidrometeorologiya bosh boshqarmasi	**Glavgidromet** Department of Hydrometeorology
Gidrometeoro logiya Bosh Boshqarmasi	Xalq xo'jaligi tarmoqlari va mamlakat mudofaasini meteorologik, klimatologik, aerologik, agrometeorologik, gidrologik va dengiz gidrometeorologik ma'lu-motlari bilan ta'minlashdir.	**Hydrometeorology Department.** Sectors of the economy and the country's defense meteorological, climatological, top, agro-meteorological, hydrological and meteorological data supply
Gidrologiya	Yer to'g'risidagi fanlar turkumiga kiruvchi fan bo'lib, u Gidrosferaning xususiyatlarini, unda kechadigan jarayonlarni va hodisalarni atmosfera, litosfera va biosfera bilan bog'liq holda o`rganadi	**Hydrology.** Earth Science class, science, especially Gidrosferaning, events, and processes in which the atmosphere, lithosphere, and biosphere research in connection with the
Gidrometeoro logiya Bosh Boshqarmasi	Xalq xo'jaligi tarmoqlari va mamlakat mudofaasini meteorologik, klimatologik, aerologik, agrometeorologik, gidrologik va dengiz	**Hydrometeorology Department.** Sectors of the economy and the country's defense meteorological, climatological, top, agro-meteorological, hydrological and meteorological data supply

	gidrometeorologik ma'lu-motlari bilan ta'minlashdir	
Gidrometeoro logiya xizmati	Bu xizmat umumdavlat xizmati hisoblanib, uning vazifasi xalq xo'jaligini gidrometeorologik ma'lumotlar bilan ta'minlashdir	**Hydrometeorological.** This state of its responsibility for providing meteorological data of the national economy
Gidrosfera	Yerning suv qobig'i	**Hydrosphere.** The water shell of the Earth
Iqlim	Yer yuzasidagi ma'lum hudud uchun obhavoning ko'p yillik rejimi	**Climate.** A long-term weather conditions typical of this region of the Earth
JKD	Jahon Klimatologiya dasturi	**DCD.** World Climatology
JMT	Jahon meterologiya tashkiloti	**WMO.** World Meteorological Organization

VI.ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.

2. Mirziyoyev SH.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.

3. Mirziyoyev SH.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.

4. Mirziyoyev SH.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.

5. Mirziyoyev SH.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitusiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.

7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.

8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.

9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.

10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.

11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini innovasion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.

12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.

13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillarda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida talab yuqori bo‘lgan malakali kadrlar tayyorlash tizimini tubdan takomillashtirish va ilmiy salohiyatini rivojlantiri choratadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4358-sonli Qarori.

14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.

15. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.

16. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 29 oktabr “Ilm-fanni 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.

17. O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning 2020 yil 25 yanvardagi Oliy Majlisga Murojaatnomasi.

18. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabr “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarori.

SH. Maxsus adabiyotlar

1. Bruce R. Munson, Alric P. Rothmayer, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 2017. 792r.

2. Charlie Brau Notes on Analytical Mechanics. 2005.

12. Gantmaxer F.R. Leksii po analiticheskoy mexanike. 3-izd. M.: Fizmatmex, 2005. 17

3. Chung T.J. Computational Fluid Dynamics. - Cambridge University Press, 2002 (1012p).

4. Grant R. Fowles and George L. Cassiday. Analytical Mechanics. Brooks Cole. USA, 2014.

5. Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko. Classical Mechanics. Classical Mechanics. USA, 2013.

6. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

7. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

8. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

9. Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation Butterworth, Washington, D.C. 2013.

10. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

11. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.

12. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

13. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.

14. Massey B., Ward-Smith J. Mechanics of Fluids. Solutions Manual Eighth edition. - Taylor &. Francis, 2016.

15. N.A.Korshunova and D.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics», (AIAA, USA), 2014, V.37, №5, P.1716-1719

16. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

17. Robert D. Zucker, Oscar Biblarz Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, 2002. 512r.

18. Steve Taylor "Destination" Vocabulary and grammar", Macmillan 2010.

19. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

20. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

21. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra// 2013. Izdaniye: 1-ye izd. 421 s.

22. Azimov D.M., Korshunova N.A Harakatning ustuvorlik nazariyasi bo'yicha tanlangan ma'ruzalar. - Uchebnoye posobiye. - Tashkent, Universitet, 2005.

23. Belogurov A.Y. Modernizasiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovasionnogo razvitiya obshestva: MonografiY. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0. 24. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An'anaviy va noan'anaviy ta'lim. – Samarqand: "Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi" nashriyoti, 2019. 312 b.

25. Ibraymov A.YE. Masofaviy o'qitishning didaktik tizimi. metodik qo'llanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: "Lesson press", 2020. 112 bet.

26. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O'quv jarayonida innovasion ta'lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.

27. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BXVPeterburg, 2012. — 432 s. 28. Muslimov N.A va boshqalar. Innovasion ta'lim texnologiyalari. O'quv-metodik qo'llanma. – T.: "Sano-standart", 2015. – 208 b.

29. Ignatova N. Y. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiY. Mvo obrazovaniya i nauki RF. – Nijniy Tagil: NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

30. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

31. O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Y. Bu-gakova i dr. M – Kniga 16 / Sovremenniye obrazovatelniye texnologii: pedagogika i psixologiya: Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

32. Turayev X. Harakatning turg‘unlik nazariyasi. - SamGU, 2004.

33. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish. O‘quv qo‘llanma. T.: “Tafakkur” nashriyoti, 2020 y. 120 bet.

IV. Internet saytlar

34. http://edu.uz – O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

35. http://lex.uz – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi

36. http://bimm.uz – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi

37. http://ziyonet.uz – Ta’lim portali ZiyonET

38. http://natlib.uz – Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi

O'zbekiston milliy universiteti huzuridagi pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish tarmoq (mintaqaviy) markazi "Mexanika va matematik modellashtirish" yo'nalishidagi mutaxassislik fanlaridan tayyorlangan " Mexanikada matematik modellashtirish" moduli bo'yicha qayta tayyorlash va malaka oshirish masofaviy kurslari uchun tayyorlangan materiallar talablarga javob berishi bo'yicha

EKSPERT XULOSASI

"Mexanika va matematik modellashtirish" yo'nalishi qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi mutaxassilik fanlaridan fanlaridan tayyorlangan **" Mexanikada matematik modellashtirish"** moduli bo'yicha test savollari, o'quv-uslubiy majmua, bitiruv ishi mavzulari hamda masofaviy materiallar mazkur modul bo'yicha tasdiqlangan namunaviy **dastur doirasida tayyorlangan va unga qo'yilgan talablarga javob beradi** hamda BIMM internet portaliga qo'yishga tavsiya etiladi.

Tarmoq (mintaqaviy) markazi direktori — **O'.Tilavov**

Bo'lim boshlig'i — **O'.Muxamadiyev**

" Mexanika va matematik modellashtirish" kafedrasi мудири — **prof .A.B.Axmedov**

Tuzuvchi: — **A.B.Axmedov**