TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ MARKAZI

MATEMATIKA O‘QITISH METODIKASI

Xalqaro matematik olimpiadalar metodologiyasi

MODULI BO‘YICHA O‘QUV-USLUBIY MAJMUA

TOSHKENT-2022

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchilar: **p.f.d., prof.D. Yunusova**

f-m.f.n., dots. Sh.Ismailov

Taqrizchilar: **p.f.n., dotsent A.A.Akmalov-**TDPU, “Matematika va uni o‘qitish metodikasi” kafedrasi mudiri.

f-m.f.f.d. (PhD) M.E.Nurillaev-TDPU, “Umumiy matematika” kafedrasi mudiri.

Xorijiy ekspert: f.-m.f.d., professor V.K.Jarov.- AFXTI (Rossiya), Fundamental va amaliy matematika kafedrasi mudiri

O‘quv-uslubiy majmua TDPU Kengashining 2020 yil 27 avgustdagi 1/3.6- sonli qarori bilan nashrga tavsiya qilingan.

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

Mamlakatimizda istiqbolli yoshlarni qo‘llab-quvvatlash, ularning iqtidorini ro‘yobga chiqarish, ilmiy-tadqiqot va innovatsion faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yish uchun qo‘shimcha shart-sharoitlar yaratish borasida izchil chora-tadbirlar amalga oshirib kelinmoqda.

Shu bilan birga, ulg‘ayib kelayotgan yosh avlodning ilm egallashga bo‘lgan ishtiyoqi va intellektual salohiyatini oshirish, shuningdek xalqaro maydonda mamlakatimizning nufuzini yanada yuksaltirish uchun iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini takomillashtirish zarurati mavjud.

Yoshlarni amalga oshirilayotgan islohotlarning faol ishtirokchisiga aylantirish, ilm-fanni o‘zlashtirishga bo‘lgan rag‘batini oshirish, izlanuvchanlik va yaratuvchanlik faoliyatiga keng jalb qilish, jahon miqyosida Vatanimiz dovrug‘ini keng taratgan ajdodlarga munosib avlodni tarbiyalash maqsadida 03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil yetish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori qabul qilindi.

Mazkur qaror ta’limning barcha bosqichlarida olimpiadalarga maqsadli tayyorlash tiziminini tanqidiy o‘rganish va xalqaro tajribalarga asoslanib qayta ko‘rib chiqishni taqozo etadi.

“Matematikadan xalqaro olimriadalar metodologiyasi” fani matematika o‘qituvchilarini matematika fanidan xalqaro olimpiada va musobaqalarda taqdim etiladigan masalalar yechish usullari, matematikaga ixtisoslashtirilgan umumta’lim muassasalarida chuqurlashtirilgan fan mazmunining tahlili asosida innovatsion metodlari asosida dars ishlanmalarini ishlab chiqish qo‘nimalarini shakllantirish vazifalarini bajaradi.

Yuqoridagilarni hamda O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli, 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-sonli, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmonlari, shuningdek 2017 yil 20 apreldagi “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ–2909-sonli Qarorida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi: Pedagog kadrlar tayyorlovchi oliy ta’lim muassasalari professor-o‘qituvchilari pedagogik kasbiy bilim va ko‘nikmalarini ilg‘or xorijiy davlatlarda matematika olimpiadalariga maqsadli tayyorlashning ilg‘or milliy va xorijiy tajribalar asosida chuqurlashtirish, yangilash va ta’lim-tarbiya jarayonida innovatsion texnologiyalardan foydalanish imkonini beradigan zamonaviy bilim, ko‘nikma va malakalarni tarkib toptirish.

Modulning vazifalari:

- “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonun va Kadrlar tayyorlash milliy dasturida, Xukumat qarorlarida aks etgan vazifalarni amalga oshirish;
- Pedagog kadrlar tayyorlovchi oliy ta’lim muassasasi professor-o‘qituvchilarining ilmiy-nazariy, pedagogik-psixologik, ilmiy-metodik tayyorgarligi darajasini orttirish;
- Professor-o‘qituvchilarda matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashda zamonaviy yondoshuvlarni amalga oshirish, jumladan xalqaro olimpiadalar talablariga moslashtirish, bitiruvchi talabalarga umumiy o‘rta ta’lim muassasalariga ishga kelishda mazkur yo‘nalishda tayyor holda kelishlarini ta’minlash hamda matematika fanidan iqtidorli o‘quvchi yoshlar faoliyatini ilmiy va uslubiy jihatdan ta’minlab borish uchun zarur bo‘lgan metodologik bilimlarni shakllantirish, ko‘nikmalarni tarkib toptirish;
- Ta’lim-tarbiya jarayonida innovatsion texnologiyalardan foydalanish uchun zarur bo‘lgan metodik bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiya (layoqat)ni tarkib toptirish;
- O‘qituvchilarni o‘z pedagogik faoliyatini tahlil qilishga o‘rgatish, tahliliy – tanqidiy, ijodiy va mustaqil fikr yuritish ko‘nikmalarini rivojlantirish;
- matematikani o‘qitishni takomillashtirish va samaradorligini orttirish yo‘llari bilan tanishtirish.

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

Tinglovchi:

- Umumiy o‘rta ta’limda matematika olimpiadalariga maqsadli tayyorlashda qo‘llaniladigan yondoshuvlar, tendensiyalari;

- Matematikani o‘qitish metodikasi o‘quv dasturlarini xalqaro tadqiqotlar talablariga moslashtirish yo‘llarini bilishi, bitiruvchi talabalarga umumiy o‘rta ta’lim muassasalariga ishga kelishda mazkur yo‘nalishda tayyor holda kelishlarini ta’minlash metodolgiyasini;
- iqtidorli o‘quvchi yoshlarni aniqlash, ular faoliyatini ilmiy va uslubiy jihatdan ta’minlab borish, sohada ilg‘or tajribalarni ommalashtirish va ular asosida ta’lim muassasalari uchun tavsiya va qo‘llanmalar ishlab chiqish to‘g‘risida **bilimlarga ega bo‘lish;**

Tinglovchi:

- matematika olimpiadalariga maqsadli tayyorlashda ta’lim mazmuni, vositalari, metodlari va shakllarining uzviyligi va izchilligini ta’minlash muammolari;
- o‘qitish mazmuniga oid axborotlarni qayta ishlash, umumlashtirish va talabalar ongiga yetkazish yo‘llari;
- pedagogika oliy ta’lim muassasalarida matematikani o‘qitish oldidagi dolzarb muammolar va ularni hal etish
- iqtidorli o‘quvchi yoshlarni aniqlash, ular faoliyatini ilmiy va uslubiy jihatdan ta’minlab borishga oid **ko‘nikma egallashi;**

Tinglovchi:

- o‘qitish mazmuniga oid axborotlarni qayta ishlash, umumlashtirish va talabalar ongiga yetkazish yo‘llarini tanlash;
- vujudga kelgan nostandart va notanish pedagogik vaziyatlarida samarali metodikalarni aniqlash, asoslash va qo‘llash **malakalarini egallashi;**

Tinglovchi:

- matematika olimpiadalarga tayyorlashda zamonaviy mashg‘ulotlariga qo‘yiladigan talablarni egallash;
- pedagogika oliy ta’lim muassasalarida matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlash bo‘yicha ma’ruza, amaliy mashg‘ulotlarida talabalarning faoliyatini tashkil etish va boshqarish;
- talabalarning mustaqil ishlari va ta’limini tashkil etish, ularni ilmiy-tadqiqotlarga yo‘naltirish
- iqtidorli o‘quvchi yoshlarni aniqlash, ular faoliyatini ilmiy va uslubiy jihatdan ta’minlab borish, sohada ilg‘or tajribalarni ommalashtirish va ular asosida ta’lim muassasalari uchun tavsiya va qo‘llanmalar ishlab chiqish **kompetensiyalarni egallashi lozim**

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

Modul bo‘yicha ma’ruza mashg‘ulotlari oliy ta’lim muassasalarida matematika fanlaridan o‘quv mashg‘ulotlari olib borayotgan professor-o‘qituvchilarning mavzu doirasidagi dolzarb masalalar yuzasidan o‘zaro fikr almashish, munozara, muhokamasini tashkil etishga asoslanadi. Amaliy mashg‘ulotlar davomida tinglovchilarning tahliliy, tanqidiy, ijodiy o‘rganish va tajriba almashuvi amaliy mazmundagi topshiriqlarda bevosita faol ishtirok etishi orqali amalga oshiriladi.

Ma’ruza, amaliy mashg‘ulotlar va mustaqil ta’lim topshiriqlari bir-biri bilan uzviy bog‘langan, bir-birini to‘ldiruvchi amaliy ishlardan iborat bo‘lib, bunda har bir tinglovchiga o‘zi o‘qitayotgan o‘quv fani doirasidagi mavzuni tanlash, individual ishlash imkoniyati beriladi.

O‘quv mashg‘ulotlaridan tashqari vaqtda kompyuter sinfida modul bo‘yicha tayyorlangan uslubiy ishlanmalar (ma’ruzalar matni, taqimotlar, namunalar, qo‘shimcha materiallar, yordamchi manbalar manzillari)dan, Nizomiy nomidagi TDPU matematika kafedralarida mavjud imkoniyatlardan foydalanish uchun shart-sharoit yaratiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

Modul mazmuni o‘quv rejadagi “Kredit modul tizimi va o‘quv jarayonini tashkil etish”, “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish”, “Ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish”, “Maxsus maqsadlarga yo‘naltirilgan ingliz tili”, “Matematikani o‘qitishning innovatsion ta’lim muhitini loyihalashtirish”, “Oliy ta’lim matematika fanlari mazmunining ilmiy-nazariy masalalari”, “Pedagogik tadqiqot natijalarini tahlil qiluvchi axborot tizimlari” o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan holda pedagoglarning kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar oliy ta’limda matematika fanlarini o‘qitish innovatsiyalarini, ilg‘or tajribalarni aniqlash, ularni qiyosiy tahlil etish va baholash, moslashtirish, loyihalashtirish, qo‘llashga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

Modul bo‘yicha soatlar taksimoti

T/r	Mavzu	Jami auditoriya soati	Nazariy	Amaliy
1.	03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil yetish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori mazmun-mohiyati va undan kelib chiqqan vazifalar.	2	2	
2.	Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashning xolati va zamonaviy tendensiyalari	2	2	
3.	Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashda ilg‘or milliy va xorijiy tajribalar	2	2	
4.	Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda algebra va sonlar nazariyasiga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi	2		2
5.	Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda kombinatorikaga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi	2		2
6.	Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda geometriyaga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi	2		2
Jami		**12**	**6**	**6**

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-Mavzu: 03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil yetish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori mazmun-mohiyati va undan kelib chiqqan vazifalar.

03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil yetish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori mazmun-mohiyati va undan kelib chiqqan vazifalar.

2-Mavzu: Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashning xolati va zamonaviy tendensiyalari

Iqtidorli o‘quvchi yoshlarni aniqlash, ular faoliyatini ilmiy va uslubiy jihatdan ta’minlab borish, sohada ilg‘or tajribalarni ommalashtirish va ular asosida ta’lim muassasalari uchun tavsiya va qo‘llanmalar ishlab chiqish holati;

umumiy o‘rta ta’lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o‘quvchilari o‘rtasida mahalliy va xalqaro, shu jumladan nodavlat fan olimpiadalarini tashkil etish, ularning xalqaro olimpiadalardagi ishtirokini ta’minlash holati;

yuqori malakali mutaxassislarni jalb qilgan holda olimpiadalar uchun doimiy yangi nazorat materiallarini ishlab chiqish holati;

xalqaro olimpiadalar ishtirokchilarini yuqori malakali mutaxassislar, shu jumladan olimlar, professor-o‘qituvchilar, xorijlik mutaxassislarni jalb qilgan holda tayyorlash, ingliz tili va rus tili fanlaridan muloqot qilish ko‘nikmalarini shakllantirish maqsadida maxsus kurslar tashkil etish yo‘llari;

olimpiadalarda yuqori natijalarni qayd etgan iqtidorli o‘quvchilarning kelgusidagi faoliyatini monitoring qilib borish va qo‘llab-quvvatlash choralari.

3-Mavzu: Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashda ilg‘or milliy va xorijiy tajribalar

Iqtidorli o‘quvchi yoshlarni aniqlash, ular faoliyatini ilmiy va uslubiy jihatdan ta’minlab borish, sohada ilg‘or tajribalarni ommalashtirish va ular asosida ta’lim muassasalari uchun tavsiya va qo‘llanmalar ishlab chiqishda ilg‘or milliy va xalqaro tajribalar;

umumiy o‘rta ta’lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o‘quvchilari o‘rtasida mahalliy va xalqaro, shu jumladan nodavlat fan olimpiadalarini tashkil etish, ularning xalqaro olimpiadalardagi ishtirokini ta’minlashda ilg‘or milliy va xalqaro tajribalar;

yuqori malakali mutaxassislarni jalb qilgan holda olimpiadalar uchun doimiy yangi nazorat materiallarini ishlab chiqishda ilg‘or milliy va xalqaro tajribalar;

xalqaro olimpiadalar ishtirokchilarini yuqori malakali mutaxassislar, shu jumladan olimlar, professor-o‘qituvchilar, xorijlik mutaxassislarni jalb qilgan holda tayyorlash, ingliz tili va rus tili fanlaridan muloqot qilish ko‘nikmalarini shakllantirish maqsadida maxsus kurslar tashkil etishda ilg‘or milliy va xalqaro tajribalar;

olimpiadalarda yuqori natijalarni qayd etgan iqtidorli o‘quvchilarning kelgusidagi faoliyatini qo‘llab-quvvatlash choralarini ko‘rishda ilg‘or milliy va xalqaro tajribalar.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg‘ulot: Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda algebra va sonlar nazariyasiga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi

Algebra va sonlar nazariyasiga oid olimpiada masalalari tizimi haqida. Algebra va sonlar nazariyasiga oid masalalarni yechishga zamonaviy yondashuvlar. Pedagogika yo‘nalishidagi oliy ta’lim muassasalarida matematika fanini o‘qitish jarayoniga algebra va sonlar nazariyasiga oid olimpiada masalalarini yechish usullarini joriy etishning metodik imkoniyatlari.

2-amaliy mashg‘ulot: Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda kombinatorikaga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi

Kombinatorikaga oid olimpiada masalalari tizimi haqida. Kombinatorikaga oid masalalarni yechishga zamonaviy yondashuvlar. Pedagogika yo‘nalishidagi oliy ta’lim muassasalarida matematika fanini o‘qitish jarayoniga kombinatorikaga oid olimpiada masalalarini yechish usullarini joriy etishning metodik imkoniyatlari.

3-amaliy mashg‘ulot: Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda geometriyaga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi

Geometriyaga oid olimpiada masalalari tizimi haqida. Geometriyaga oid masalalarni yechishga zamonaviy yondashuvlar. Pedagogika yo‘nalishidagi oliy ta’lim muassasalarida matematika fanini o‘qitish jarayoniga geometriyaga oid olimpiada masalalarini yechish usullarini joriy etishning metodik imkoniyatlari.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (masalalar yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (masalalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish);
- trening mashg‘ulotlar (olimpiada mavzularga oid metod va vositalardan foydalanish tajribasiga ega bo‘lish).

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

“Aqliy hujum” metodi - biror muammo bo‘yicha ta’lim oluvchilar tomonidan bildirilgan erkin fikr va mulohazalarni to‘plab, ular orqali ma’lum bir yechimga kelinadigan metoddir. “Aqliy hujum” metodining yozma va og‘zaki shakllari mavjud. Og‘zaki shaklida ta’lim beruvchi tomonidan berilgan savolga ta’lim oluvchilarning har biri o‘z fikrini og‘zaki bildiradi. Ta’lim oluvchilar o‘z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. Yozma shaklida esa berilgan savolga ta’lim oluvchilar o‘z javoblarini qog‘oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko‘rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki «pinbord» doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. “Aqliy hujum” metodining yozma shaklida javoblarni ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to‘g‘ri va ijobiy qo‘llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va nostandart fikrlashga o‘rgatadi.

“Aqliy hujum” metodidan foydalanilganda ta’lim oluvchilarning barchasini jalb etish imkoniyati bo‘ladi, shu jumladan ta’lim oluvchilarda muloqot qilish va munozara olib borish madaniyati shakllanadi. Ta’lim oluvchilar o‘z fikrini faqat og‘zaki emas, balki yozma ravishda bayon etish mahorati, mantiqiy va tizimli fikr yuritish ko‘nikmasi rivojlanadi. Bildirilgan fikrlar baholanmasligi ta’lim oluvchilarda turli g‘oyalar shakllanishiga olib keladi. Bu metod ta’lim oluvchilarda ijodiy tafakkurni rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

“Aqliy hujum” metodi ta’lim beruvchi tomonidan qo‘yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. Ta’lim oluvchilarning boshlang‘ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo‘yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.
2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog‘lash maqsad qilib qo‘yilganda –yangi mavzuga o‘tish qismida amalga oshiriladi.
3. O‘tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo‘yilganda-mavzudan so‘ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

“Aqliy hujum” metodini qo‘llashdagi asosiy qoidalar:

1. Bildirilgan fikr-g‘oyalar muhokama qilinmaydi va baholanmaydi.
2. Bildirilgan har qanday fikr-g‘oyalar, ular hatto to‘g‘ri bo‘lmasa ham inobatga olinadi.
3. Har bir ta’lim oluvchi qatnashishi shart.

Muammoli savol beriladi

↓

Fikr va g‘oyalar eshitiladi va jamlab boriladi

↓

Fikr va g‘oyalar guruhlanadi

↓

Aniq va to‘g‘ri javob tanlab olinadi

“Aqliy hujum” metodining tuzilmasi

“Aqliy hujum” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Ta’lim oluvchilarga savol tashlanadi va ularga shu savol bo‘yicha o‘z javoblarini (fikr, g‘oya va mulohaza) bildirishlarini so‘raladi;

2. Ta’lim oluvchilar savol bo‘yicha o‘z fikr-mulohazalarini bildirishadi;

3. Ta’lim oluvchilarning fikr-g‘oyalari (magnitafonga, videotasmaga, rangli qog‘ozlarga yoki doskaga) to‘planadi;

4. Fikr-g‘oyalar ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlanadi;

5. Yuqorida qo‘yilgan savolga aniq va to‘g‘ri javob tanlab olinadi.

“Aqliy hujum” metodining afzalliklari:

- natijalar baholanmasligi ta’lim oluvchilarda turli fikr-g‘oyalarning shakllanishiga olib keladi;
- ta’lim oluvchilarning barchasi ishtirok etadi;
- fikr-g‘oyalar vizuallashtirilib boriladi;
- ta’lim oluvchilarning boshlang‘ich bilimlarini tekshirib ko‘rish imkoniyati mavjud;
- ta’lim oluvchilarda mavzuga qiziqish uyg‘otadi.

“Aqliy hujum” metodining kamchiliklari:

- ta’lim beruvchi tomonidan savolni to‘g‘ri qo‘ya olmaslik;
- ta’lim beruvchidan yuqori darajada eshitish qobiliyatining talab etilishi.

«FSMU» METODI. Texnologiyaning maqsadi: Mazkur texnologiya ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, aqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o‘zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur texnologiyadan ma’ruza mashg‘ulotlarida, mustahkamlashda, o‘tilgan mavzuni so‘rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg‘ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

F	**. fikringizni bayon eting**
S	**. fikringizni bayonga sabab ko‘rsating**
M	**. ko‘rsatgan sababingizni isbotlab misol keltiring**
U	**. fikringizni umumlashtiring**

Texnologiyani amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo‘lgan yakuniy xulosa yoki g‘oya taklif tiladi;
- har bir ishtirokchiga FSMU texnologiyasining bosqichlari yozilgan qog‘ozlarni tarqatiladi:
- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhiy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o‘zlashtirilishiga asos bo‘ladi.

“INSERT” METODI. Metodning maqsadi: Mazkur metod o‘quvchilarda yangi axborotlar tizimini qabul qilish va bilmlarni o‘zlashtirilishini yengillashtirish maqsadida qo‘llaniladi, shuningdek, bu metod o‘quvchilar uchun xotira mashqi vazifasini ham o‘taydi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ➢ o‘qituvchi mashg‘ulotga qadar mavzuning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan input-matnni tarqatma yoki taqdimot ko‘rinishida tayyorlaydi;
- ➢ yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn ta’lim oluvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko‘rinishida namoyish etiladi;
- ➢ ta’lim oluvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o‘z shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilar	**1-matn**	**2-matn**	**3-matn**
“V” – tanish ma’lumot.			

“?” – mazkur ma’lumotni tushunmadim, izoh kerak.			
“+” bu ma’lumot men uchun yangilik.			
“– ” bu fikr yoki mazkur ma’lumotga qarshiman?			

Belgilangan vaqt yakunlangach, ta’lim oluvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo‘lgan ma’lumotlar o‘qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to‘liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg‘ulot yakunlanadi.

“BAHS-MUNOZARA” METODI - biror mavzu bo‘yicha ta’lim oluvchilar bilan o‘zaro bahs, fikr almashinuv tarzida o‘tkaziladigan o‘qitish metodidir.

Har qanday mavzu va muammolar mavjud bilimlar va tajribalar asosida muhokama qilinishi nazarda tutilgan holda ushbu metod qo‘llaniladi. Bahs-munozarani boshqarib borish vazifasini ta’lim oluvchilarning biriga topshirishi yoki ta’lim beruvchining o‘zi olib borishi mumkin. Bahs-munozarani erkin holatda olib borish va har bir ta’lim oluvchini munozaraga jalb etishga harakat qilish lozim. Ushbu metod olib borilayotganda ta’lim oluvchilar orasida paydo bo‘ladigan nizolarni darhol bartaraf etishga harakat qilish kerak.

“Bahs-munozara” metodini o‘tkazishda quyidagi qoidalarga amal qilish kerak:

- ✓ barcha ta’lim oluvchilar ishtirok etishi uchun imkoniyat yaratish;
- ✓ “o‘ng qo‘l” qoidasi (qo‘lini ko‘tarib, ruhsat olgandan so‘ng so‘zlash)ga rioya qilish;
- ✓ fikr-g‘oyalarni tinglash madaniyati;
- ✓ bildirilgan fikr-g‘oyalarning takrorlanmasligi;
- ✓ bir-birlariga o‘zaro hurmat.

Quyida “Bahs-munozara” metodini o‘tkazish tuzilmasi berilgan.

Muammoli savol tashlanadi

↓

Turli fikrlar tinglanadi

↓

Fikr-g‘oyalar to‘planadi

↓

Tahlil qilinadi

↓

Aniq va maqbul yechimni topish

“Bahs-munozara” metodining tuzilmasi

“Bahs-munozara” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Ta’lim beruvchi munozara mavzusini tanlaydi va shunga doir savollar ishlab chiqadi.
2. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarga muammo bo‘yicha savol beradi va ularni munozaraga taklif etadi.
3. Ta’lim beruvchi berilgan savolga bildirilgan javoblarni, ya’ni turli g‘oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu vazifani bajarish uchun ta’lim oluvchilardan birini kotib etib tayinlaydi. Bu bosqichda ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarga o‘z fikrlarini erkin bildirishlariga sharoit yaratib beradi.
4. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilar bilan birgalikda bildirilgan fikr va g‘oyalarni guruhlarga ajratadi, umumlashtiradi va tahlil qiladi.
5. Tahlil natijasida qo‘yilgan muammoning eng maqbul yechimi tanlanadi.

TRENING. Trening zamonaviy ta’lim shakllaridan biri hisoblanib, u interfaol mashg‘ulotlarni amalga oshirishning o‘ziga xos ko‘rinishidir.

Treninglar o‘rganilishi lozim bo‘lgan nazariy g‘oya va fikrlarni amaliy ish hamda mashqlar davomida o‘zlashtirish imkoniyatini beradi va ta’lim oluvchilarda shaxslararo o‘zaro hamkorlikning samarali ko‘nikmasini shakllantirishga, shuningdek, mutaxassis kasbiy kompetentligining umumiy darajasini oshirishga yo‘naltiriladi.

Har qanday pedagogik treningni tashkil etish quyidagi bosqichlardan tashkil topadi:

1. Tashkiliy bosqich: guruhni yig‘ish yoki shakllantirish.
2. Boshlang‘ich bosqich: guruh me’yorlarini ishlab chiqish, tanishuv va mashg‘ulotdan kutuvlarni aniqlash.
3. Faoliyatli bosqich: trening turi va o‘tkazish metodikasini belgilash.
4. Yakuniy bosqich (refleksiya). Trening mobaynida talabalar nazariy ma’lumotlarni o‘zlashtirish bilan birga, ularda bilish, emmotsional va xulq-atvor ko‘nikmalari ham rivojlanib boradi.

“DAVRA SUHBATI” METODI – aylana stol atrofida berilgan muammo yoki savollar yuzasidan ta’lim oluvchilar tomonidan o‘z fikrmulohazalarini bildirish orqali olib boriladigan o‘qitish metodidir.

“Davra suhbati” metodi qo‘llanilganda stol-stullarni doira shaklida joylashtirish kerak. Bu har bir ta’lim oluvchining bir-biri bilan “ko‘z aloqasi” ni o‘rnatib turishiga yordam beradi. Davra suhbatining og‘zaki va yozma shakllari mavjuddir. Og‘zaki davra suhbatida ta’lim beruvchi mavzuni boshlab beradi va ta’lim oluvchilardan ushbu savol bo‘yicha o‘z fikrmulohazalarini bildirishlarini so‘raydi va aylana bo‘ylab har bir ta’lim oluvchi o‘z fikr-mulohazalarini og‘zaki bayon etadilar. So‘zlayotgan ta’lim oluvchini barcha diqqat bilan tinglaydi, agar muhokama qilish lozim bo‘lsa, barcha fikr-mulohazalar tinglanib bo‘lingandan so‘ng muhokama qilinadi. Bu esa ta’lim oluvchilarning mustaqil fikrlashiga va nutq madaniyatining rivojlanishiga yordam beradi.

Davra stolining tuzilmasi

Yozma davra suhbatida ham stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta’lim oluvchiga konvert qog‘ozi beriladi. Har bir ta’lim oluvchi konvert ustiga ma’lum bir mavzu bo‘yicha o‘z savolini beradi va “Javob varaqasi”ning biriga o‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi. Shundan so‘ng konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta’lim oluvchi o‘z javobini “Javoblar varaqasi”ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi va yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo‘ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig‘ib olinib, tahlil qilinadi.

“Davra suhbati” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1.Mashg‘ulot mavzusi e’lon qilinadi.

2. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarni mashg‘ulotni o‘tkazish tartibi bilan tanishtiradi.

3. Har bir ta’lim oluvchiga bittadan konvert va javoblar yozish uchun guruhda necha ta’lim oluvchi bo‘lsa, shunchadan “Javoblar varaqalari”ni tarqatilib, har bir javobni yozish uchun ajratilgan vaqt belgilab qo‘yiladi. Ta’lim oluvchi konvertga va “Javoblar varaqalari”ga o‘z ismi-sharifini yozadi.

4. Ta’lim oluvchi konvert ustiga mavzu bo‘yicha o‘z savolini yozadi va “Javoblar varaqasi”ga o‘z javobini yozib, konvert ichiga solib qo‘yadi.

5. Konvertga savol yozgan ta’lim oluvchi konvertni soat yo‘nalishi bo‘yicha yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi.

6. Konvertni olgan ta’lim oluvchi konvert ustidagi savolga “Javoblar varaqalari”dan biriga javob yozadi va konvert ichiga solib qo‘yadi hamda yonidagi ta’lim oluvchiga uzatadi.

7. Konvert davra stoli bo‘ylab aylanib, yana savol yozgan ta’lim oluvchining

o‘ziga qaytib keladi. Savol yozgan ta’lim oluvchi konvertdagi “Javoblar varaqalari”ni baholaydi.

8. Barcha konvertlar yig‘ib olinadi va tahlil qilinadi.

Ushbu metod orqali ta’lim oluvchilar berilgan mavzu bo‘yicha o‘zlarining bilimlarini qisqa va aniq ifoda eta oladilar. Bundan tashqari ushbu metod orqali ta’lim oluvchilarni muayyan mavzu bo‘yicha baholash imkoniyati yaratiladi. Bunda ta’lim oluvchilar o‘zlari bergan savollariga guruhdagi boshqa ta’lim oluvchilar bergan javoblarini baholashlari va ta’lim beruvchi ham ta’lim oluvchilarni ob’ektiv baholashi mumkin.

“MUAMMOLI VAZIYAT” METODI - ta’lim oluvchilarda muammoli vaziyatlarning sabab va oqibatlarini tahlil qilish hamda ularning yechimini topish bo‘yicha ko‘nikmalarini shakllantirishga qaratilgan metoddir.

“Muammoli vaziyat” metodi uchun tanlangan muammoning murakkabligi ta’lim oluvchilarning bilim darajalariga mos kelishi kerak. Ular qo‘yilgan muammoning yechimini topishga qodir bo‘lishlari kerak, aks holda yechimni topa olmagach, ta’lim oluvchilarning qiziqishlari so‘nishiga, o‘zlariga bo‘lgan ishonchlarining yo‘qolishiga olib keladi. «Muammoli vaziyat» metodi qo‘llanilganda ta’lim oluvchilar mustaqil fikr yuritishni, muammoning sabab va oqibatlarini tahlil qilishni, uning yechimini topishni o‘rganadilar.

“Muammoli vaziyat” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1.Ta’lim beruvchi mavzu bo‘yicha muammoli vaziyatni tanlaydi, maqsad va vazifalarni aniqlaydi. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarga muammoni bayon qiladi.

2. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarni topshiriqning maqsad, vazifalari va shartlari bilan tanishtiradi.

3. Ta’lim beruvchi ta’lim oluvchilarni kichik guruhlarga ajratadi.

4. Kichik guruhlar berilgan muammoli vaziyatni o‘rganadilar. Muammoning kelib chiqish sabablarini aniqlaydilar va har bir guruh taqdimot qiladi. Barcha taqdimotdan so‘ng bir xil fikrlar jamlanadi.

5. Bu bosqichda berilgan vaqt mobaynida muammoning oqibatlari to‘g‘risida fikr-mulohazalarini taqdimot qiladilar. Taqdimotdan so‘ng bir xil fikrlar jamlanadi.

6. Muammoni yechishning turli imkoniyatlarini muhokama qiladilar, ularni tahlil qiladilar. Muammoli vaziyatni yechish yo‘llarini ishlab chiqadilar.

7. Kichik guruhlar muammoli vaziyatning yechimi bo‘yicha taqdimot qiladilar va o‘z variantlarini taklif etadilar.

8. Barcha taqdimotdan so‘ng bir xil yechimlar jamlanadi. Guruh ta’lim beruvchi bilan birgalikda muammoli vaziyatni yechish yo‘llarining eng maqbul variantlarini tanlab oladi.

“SWOT-TAHLIL” METODI. **Metodning maqsadi:** mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength)	. kuchli tomonlari
W – (weakness)	. zaif, kuchsiz tomonlari
O – (opportunity)	. imkoniyatlari
T – (threat)	. to‘siqlar

XULOSALASH» (REZYUME, VEER) METODI. Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko‘ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o‘rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo‘yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo‘yicha o‘rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o‘quvchilarning mustaqil g‘oyalari, fikrlarini yozma va og‘zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. “Xulosalash” metodidan ma’ruza mashg‘ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg‘ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- trener-o‘qituvchi ishtirokchilarni 5-6 kishidan iborat kichik guruhlarga ajratadi;
- trening maqsadi, shartlari va tartibi bilan ishtirokchilarni tanishtirgach, har bir guruhga umumiy muammoni tahlil qilinishi zarur bo‘lgan qismlari tushirilgan tarqatma materiallarni tarqatadi;
- har bir guruh o‘ziga berilgan muammoni atroflicha tahlil qilib, o‘z mulohazalarini tavsiya etilayotgan sxema bo‘yicha tarqatmaga yozma bayon qiladi;
- navbatdagi bosqichda barcha guruhlar o‘z taqdimotlarini o‘tkazadilar. Shundan so‘ng, trener tomonidan tahlillar umumlashtiriladi, zaruriy axborotlr bilan to‘ldiriladi va mavzu yakunlanadi.

O‘ZARO O‘RIN ALMASHINUVCHI JUFTLIKLAR VA GURUHLAR

Maqsadi:

- tinglovchilarni materialning tuzilishi, asosiy fikrlarni belgilay olish, esda saqlab qolish mumkin bo‘lgan shaklda ularni tasavvur eta olishga o‘rgatish;

- nutq madaniyatini rivojlantirish;

- fasilitatorlik qobiliyatini tarkib toptirish.

1. Birinchi bosqichda pedagog asosiy fikrlarni tasavvur etishning turli shakllari haqida hikoya qilib beradi.

Asosiy fikrlarni tasavvur etishning birinchi turi oddiy – bu asosiy fikrlarni so‘z yoki qisqa gaplar tarzida tasavvur etishdir. Mazkur so‘z yoki gaplar ustunlar tarzida nomer qo‘yish orqali yoziladi.

Asosiy fikrlarni tasavvur qilishning ikkinchi shaklida o‘zak belgilab olinadi va ana shu o‘zak atrofida asosiy fikrlar jamlanadi.

Asosiy fikrlarni shakllantirishning uchichnchi shakli – bu ularni qisqartirish yoki shartli belgilar bilan almashtirishdir.

2. Ikkinchi bosqichda tinglovchilar kichik guruhlarga birlashadilar. Har bir kichik guruh o‘ziga berilgan matnni oladi va uni o‘qiydi. Matnlar hammada har xil.

3. Shundan so‘ng guruhda har bir tinglovchi mustaqil ravishda mazkur matnga doir tayanch konspektni tuzishadi.

4. Navbatdagi bosqichda tinglovchilar juftliklarda o‘zlarining tayanch konspektlari haqida fikr almashishadi. Mazkur bosqichda o‘zining tayanch konspektini o‘zgartirish imkoniyati mavjud.

5. Navbatdagi bosqichda tayanch konspekt guruhiy muhokama etiladi. Guruh o‘zaro kelishgan holda qandaydir yaratilgan tayanch konspektni qabul qiladi. Mazkur bosqichda guruh butun jamoaning oldida “ovoz chiqarib” aytib beruvchi tinglovchini aniqlab olishi kerak.

6. Mazkur bosqichda guruhning bir a’zosi aniqlangan tayanch konspekt bo‘yicha chiqish qiladi va o‘qilgan matnning mazmunini bayon etadi. Barcha tinglovchilar eshitishlari kerak. Mazkur davrda me’yorlarning bajarilishini ta’minlaydigan texnik ekspertning majburiyati namoyon bo‘ladi.

7. Birinchi guruh a’zosi chiqishini tugatgandan so‘ng boshqa guruh savol berishi mumkin. Savollarga javob beriladi. Mazkur turdagi ish baholanishi mumkin (ballar jadvalda qo‘yiladi). Savollarning navbat bilan berilishini texnik ekspert yo‘lga qo‘yadi.

8. Sakkizinchi bosqichda boshqa guruhning vakili agar asosi mavjud bo‘lsa, qilingan chiqishni to‘ldiradi.

9. To‘qqiznichi bosqichda boshqa guruh vakili chiqish, savollarga javoblar bo‘yicha noroziligini ifoda etadi.

Ana shu yerda birinchi matn bilan ishlash yakunlanadi. Pedagog yoki ilmiy ekspert yakunlarni chiqaradi.

Keyingi bosqichda boshqa guruh vakili o‘zining tayanch konspektini namoyish etadi. Mazkur harakat hamma chiqishlar tugaguncha davom etadi.

Inssenirovka yakunlarni chiqarish bilan tugallanadi. Har bir guruh to‘plagan ballarni hisoblash va jami ballar ustuniga yozib qo‘yilishi kerak. Ana shu asosdan kelib chiqib, o‘rinlarni ham belgilash mumkin.

T-CHIZMA

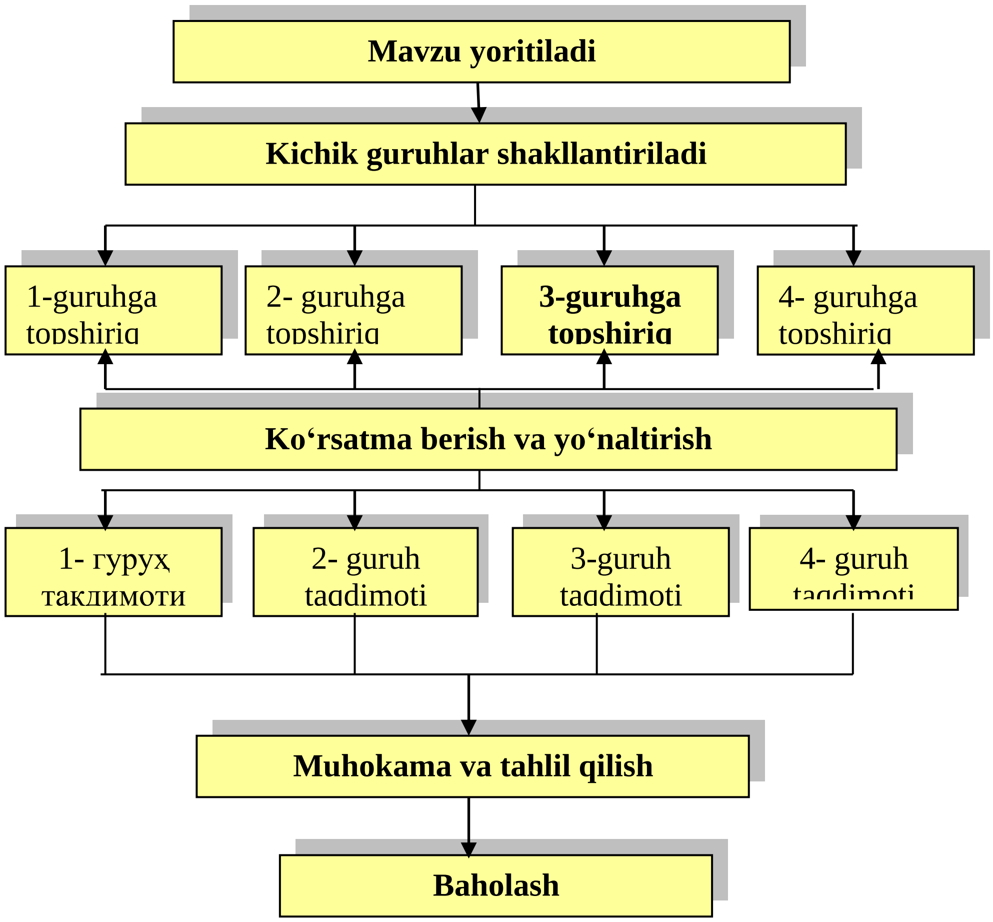
T-chizma munozara vaqtida qo‘shaloq javoblar (ha/yo‘q, tarafdor/qarshi) yoki taqqoslash-zid javoblarni yozish uchun universal grafik organayzer hisoblanadi. Masalan, “Pedagogik loyihalash shakllari” matnini “tarafdor va qarshi” tamoyiliga asoslanib o‘qilganidan so‘ng, bir juft tinglovchi quyida keltirilganidek, T-chizmani tuzishi va besh daqiqadan keyin, chizmaning chap tomonida pedagogik loyihalash shakllarining afzalliklarini yozishi mumkin. So‘ngra besh daqiqa mobaynida ular bu fikrga qarshi iloji boricha ko‘p sababni keltirishlari kerak. Ana shu vaqt oxirida ular yana besh daqiqa mobaynida o‘z T-chizmalarini boshqa juftlik chizmalari bilan taqqoslashlari mumkin.

Pedagogik loyihalash shakllarining afzalliklari	**Pedagogik loyihalash shakllarining kamchiliklari**

“KICHIK GURUHLARDA ISHLASH” METODI - ta’lim oluvchilarni faollashtirish maqsadida ularni kichik guruhlarga ajratgan holda o‘quv materialini o‘rganish yoki berilgan topshiriqni bajarishga qaratilgan darsdagi ijodiy ish.

Ushbu metod qo‘llanilganda ta’lim oluvchi kichik guruhlarda ishlab, darsda faol ishtirok etish huquqiga, boshlovchi rolida bo‘lishga, bir-biridan o‘rganishga va turli nuqtai- nazarlarni qadrlash imkoniga ega bo‘ladi.

“Kichik guruhlarda ishlash” metodi qo‘llanilganda ta’lim beruvchi boshqa interfaol metodlarga qaraganda vaqtni tejash imkoniyatiga ega bo‘ladi. Chunki ta’lim beruvchi bir vaqtning o‘zida barcha ta’lim oluvchilarni mavzuga jalb eta oladi va baholay oladi. Quyida “Kichik guruhlarda ishlash” metodining tuzilmasi keltirilgan.



“Kichik guruhlarda ishlash” metodining tuzilmasi

“Kichik guruhlarda ishlash” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Faoliyat yo‘nalishi aniqlanadi. Mavzu bo‘yicha bir-biriga bog‘liq bo‘lgan masalalar belgilanadi.
2. Kichik guruhlar belgilanadi. Ta’lim oluvchilar guruhlarga 3-6 kishidan bo‘linishlari mumkin.
3. Kichik guruhlar topshiriqni bajarishga kirishadilar.
4. Ta’lim beruvchi tomonidan aniq ko‘rsatmalar beriladi va yo‘naltirib turiladi.
5. Kichik guruhlar taqdimot qiladilar.
6. Bajarilgan topshiriqlar muhokama va tahlil qilinadi.
7. Kichik guruhlar baholanadi.

«Kichik guruhlarda ishlash» metodining afzalligi:

- o‘qitish mazmunini yaxshi o‘zlashtirishga olib keladi;
- muloqotga kirishish ko‘nikmasining takomillashishiga olib keladi;
- vaqtni tejash imkoniyati mavjud;
- barcha ta’lim oluvchilar jalb etiladi;
- o‘z-o‘zini va guruhlararo baholash imkoniyati mavjud bo‘ladi.

«Kichik guruhlarda ishlash» metodining kamchiliklari:

- ba’zi kichik guruhlarda kuchsiz ta’lim oluvchilar bo‘lganligi sababli kuchli ta’lim oluvchilarning ham past baho olish ehtimoli bor;
- barcha ta’lim oluvchilarni nazorat qilish imkoniyati past bo‘ladi;
- guruhlararo o‘zaro salbiy raqobatlar paydo bo‘lib qolishi mumkin;
- guruh ichida o‘zaro nizo paydo bo‘lishi mumkin.

“ASSESMENT” METODI. Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi: “Assesment” lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Namuna. Har bir katakdagi to‘g‘ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.

Test

Aniq mavjud predmetlar, voqealar va tuziladigan ob’ektlarning tavsifini aniqlash yoki boshqarish...
A) Bashoratlash
V) Modellashtirish
S) Konstruksiyalash
D) Rejalashtirish

Qiyosiy tahlil

“Loyihalash” va “modellashtirish” tushunchalari o‘rtasidagi o‘xshashlik va farqli jihatlarni tahlil eting.

Simptom

Pedagogning loyihaviy faoliyatga amaliy tayyorligi...

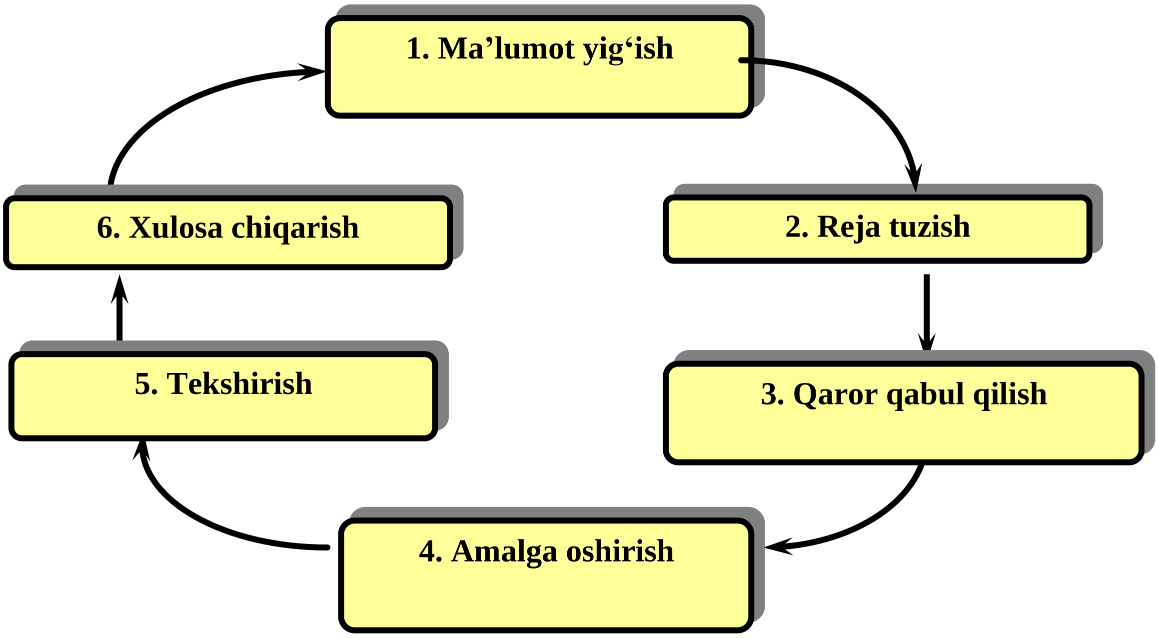
Amaliy ko‘nikma

Loyihaviy faoliyat algoritmini tuzing.

“LOYIHA” METODI - bu ta’lim oluvchilarning individual yoki guruhlarda belgilangan vaqt davomida, belgilangan mavzu bo‘yicha axborot yig‘ish, tadqiqot o‘tkazish va amalga oshirish ishlarini olib borishidir. Bu metodda ta’lim oluvchilar rejalashtirish, qaror qabul qilish, amalga oshirish, tekshirish va xulosa chiqarish va natijalarni baholash jarayonlarida ishtirok etadilar. Loyiha ishlab chiqish yakka tartibda yoki guruhiy bo‘lishi mumkin, lekin har bir loyiha o‘quv guruhining birgalikdagi faoliyatining muvofiqlashtirilgan natijasidir.

Loyiha o‘rganishga xizmat qilishi, nazariy bilimlarni amaliyotga tadbiq etishi, ta’lim oluvchilar tomonidan mustaqil rejalashtirish, tashkillashtirish va amalga oshirish imkoniyatini yarata oladigan bo‘lishi kerak.

Quyidagi chizmada “Loyiha” metodining bosqichlari keltirilgan.



“Loyiha” metodining bosqichlari

“Loyiha” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Muhandis-pedagog loyiha ishi bo‘yicha topshiriqlarni ishlab chiqadi. Ta’lim oluvchilar mustaqil ravishda darslik, sxemalar, tarqatma materiallar asosida topshiriqqa oid ma’lumotlar yig‘adilar.

2. Ta’lim oluvchilar mustaqil ravishda ish rejasini ishlab chiqadilar. Ish rejasida ta’lim oluvchilar ish bosqichlarini, ularga ajratilgan vaqt va texnologik ketma-ketligini, material, asbob-uskunalarni rejalashtirishlari lozim.

3. Kichik guruhlar ish rejalarini taqdimot qiladilar. Ta’lim oluvchilar ish rejasiga asosan topshiriqni bajarish bo‘yicha qaror qabul qiladilar. Ta’lim

oluvchilar muhandis-pedagog bilan birgalikda qabul qilingan qarorlar bo‘yicha erishiladigan natijalarni muhokama qilishadi. Bunda har xil qarorlar taqqoslanib, eng maqbul variant tanlab olinadi. Muhandis-pedagog ta’lim oluvchilar bilan birgalikda “Baholash varaqasi”ni ishlab chiqadi.

4. Ta’lim oluvchilar topshiriqni ish rejasi asosida mustaqil ravishda amalga oshiradilar. Ular individual yoki kichik guruhlarda ishlashlari mumkin.

5. Ta’lim oluvchilar ish natijalarini o‘zlarini tekshiradilar. Bundan tashqari kichik guruhlar bir-birlarining ish natijalarini tekshirishga ham jalb etiladilar. Tekshiruv natijalarini “Baholash varaqasi”da qayd etiladi.

6. Muhandis-pedagog va ta’lim oluvchilar ish jarayonini va natijalarni birgalikda yakuniy suhbat davomida tahlil qilishadi. O‘quv amaliyoti mashg‘ulotlarida erishilgan ko‘rsatkichlarni me’yoriy ko‘rsatkichlar bilan taqqoslaydi. Agarda me’yoriy ko‘rsatkichlarga erisha olinmagan bo‘lsa, uning sabablari aniqlanadi.

III. NAZARIY MATERIALLAR

1-mavzu: 03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil yetish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori mazmun-mohiyati va undan kelib chiqqan vazifalar. (2 soat)

Reja:

1. 03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori mazmun-mohiyati
2. Qarordan kelib chiqqan vazifalar

Tayanch tushunchalar: iqtidorli yoshlar, matematika, xalqaro olimpiadalar, pedagogika, metodika, qaror, vazifalar

1.1. 03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil yetish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori mazmun-mohiyati

Mamlakatimizda istiqbolli yoshlarni qo‘llab-quvvatlash, ularning iqtidorini ro‘yobga chiqarish, ilmiy-tadqiqot va innovatsion faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yish uchun qo‘shimcha shart-sharoitlar yaratish borasida izchil chora-tadbirlar amalga oshirib kelinmoqda.

Shu bilan birga, ulg‘ayib kelayotgan yosh avlodning ilm egallashga bo‘lgan ishtiyoqi va intellektual salohiyatini oshirish, shuningdek xalqaro maydonda mamlakatimizning nufuzini yanada yuksaltirish uchun iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini takomillashtirish zarurati mavjud.

Yoshlarni amalga oshirilayotgan islohotlarning faol ishtirokchisiga aylantirish, ilm-fanni o‘zlashtirishga bo‘lgan rag‘batini oshirish, izlanuvchanlik va yaratuvchanlik faoliyatiga keng jalb qilish, jahon miqyosida Vatanimiz dovrug‘ini keng taratgan ajdodlarga munosib avlodni tarbiyalash maqsadida 03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori qabul qilindi.

Qaror bilan O‘zbekiston Respublikasi Xalq ta’limi vazirligi tizimining belgilangan shtatlar soni doirasida ushbu vazirlik tuzilmasida 14 ta shtat birligidan iborat Fan olimpiadalari bo‘yicha iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash departamenti tashkil etildi va uning asosiy vazifalari belgilandi.

Jumladan:

iqtidorli o‘quvchi yoshlarni aniqlash, ular faoliyatini ilmiy va uslubiy jihatdan ta’minlab borish, sohada ilg‘or tajribalarni ommalashtirish va ular asosida ta’lim muassasalari uchun tavsiya va qo‘llanmalar ishlab chiqish;

umumiy o‘rta ta’lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o‘quvchilari o‘rtasida mahalliy va xalqaro, shu jumladan nodavlat fan olimpiadalarini tashkil etish, ularning xalqaro olimpiadalardagi ishtirokini ta’minlash;

yuqori malakali mutaxassislarni jalb qilgan holda olimpiadalar uchun doimiy yangi nazorat materiallarini ishlab chiqish;

xalqaro olimpiadalar ishtirokchilarini yuqori malakali mutaxassislar, shu jumladan olimlar, professor-o‘qituvchilar, xorijlik mutaxassislarni jalb qilgan holda tayyorlash, ingliz tili va rus tili fanlaridan muloqot qilish ko‘nikmalarini shakllantirish maqsadida maxsus kurslar tashkil etish;

Prezidentning 2019 yil 3 maydagi “Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qaroriga muvofiq fan olimpiadalari g‘oliblarini rag‘batlantirishning yangi tizimi joriy etildi.

Qarorga ko‘ra quyidagi fan olimpiadalarida g‘oliblikni qo‘lga kiritgan o‘quvchilar va ularning o‘qituvchilari bir martalik pul mukofotlari bilan taqdirlanadi: Xalqaro matematika olimpiadasi (International Mathematical Olympiad (IMO)), Xalqaro fizika olimpiadasi (International Physics Olympiad (IPhO)), Xalqaro kimyo olimpiadasi (International Chemistry Olympiad (IChO)), Xalqaro biologiya olimpiadasi (International Biology Olympiad (IBO)), Xalqaro informatika olimpiadasi (International Olympiad in Informatics (IOI)).

Pul mukofotari miqdori:

1-o‘rin (oltin medal) uchun – o‘quvchiga bazaviy hisoblash miqdorining 500 baravar (111,5 mln. so‘m), o‘qituvchisiga – 450 baravar (100,35 mln. so‘m);

2-o‘rin (kumush medal) uchun – o‘quvchiga bazaviy hisoblash miqdorining 300 baravar (66,9 mln. so‘m), o‘qituvchisiga – 250 baravar (55,75 mln. so‘m);

3-o‘rin (bronza medal) uchun – o‘quvchiga bazaviy hisoblash miqdorining 200 baravar (44,6 mln. so‘m), o‘qituvchisiga –150 baravarida (33,45 mln. so‘m).

Xalqaro fan olimpiadalari g‘oliblarini tayyorlagan o‘qituvchilar va ta’lim muassasasi direktorlari navbatdagi o‘quv yili uchun direktor jamg‘armasidan quyidagicha qo‘shimcha ustama oladilar: 1-o‘rin (oltin medal) uchun – 200%; 2-o‘rin (kumush medal) uchun – 175%; 3-o‘rin (bronza medal) uchun – 150%.

Yuqoridagi nufuzli xalqaro olimpiadalarda medal bilan taqdirlangan o‘quvchilar Oliy ta’lim muassasalariga imtihonlarsiz imtiyozli ravishda qabul qilinadi.

Asosiy olimpiadalarning respublika bosqichida g‘oliblikni qo‘lga kiritgan o‘quvchilar ixtisoslik fani bo‘yicha davlat oliy ta’lim muassasalariga kirish imtihonlarida maksimal ball olish huquqini beruvchi va uch yil davomida amal qiluvchi sertifikat taqdim qilinadi. Ularni tayyorlagan o‘qituvchilar esa, quyidagicha bir martalik pul mukofotlari bilan taqdirlanadi:

1-o‘rin (oltin medal) uchun – bazaviy hisoblash miqdorining 50 baravarida (11,15 mln. so‘m);

2-o‘rin (kumush medal) uchun – bazaviy hisoblash miqdorining 35 baravarida (7,8 mln. so‘m);

3-o‘rin (bronza medal) uchun – bazaviy hisoblash miqdorining 30 baravarida (6,69 mln. so‘m).

Ta’lim muassasalarida o‘qituvchi bo‘lib faoliyat yuritayotgan xalqaro olimpiadalar g‘oliblari lavozim maoshiga 150 foiz, asosiy olimpiadalar respublika bosqichi g‘oliblari lavozim maoshiga har oy 100 foizlik ustama haqi to‘lanadi.

Oliy ta’lim muassasasini tamomlagan olimpiada g‘oliblari Vazirlar mahkamasi huzuridagi Mutaxassislarni xorijda tayyorlash va vatandoshlar bilan muloqot qilish bo‘yicha “El-yurt umidi” jamg‘armasi tomonidan shakllantiriladigan istiqbolli mutaxassislar zaxirasiga kiritiladi.

Bundan tashqari, yuqorida ta’kidlangan qarorga muvofiq matematika, fizika, kimyo, biologiya hamda informatika va axborot texnologiyalari fanlaridan har yili bir marta o‘tkaziladigan qo‘shimcha respublika olimpiadasi joriy etilgan bo‘lib, uning g‘oliblariga quyidagicha bir martalik pul mukofotlari belgilangan:

1-o‘rin (oltin medal) uchun – o‘quvchiga bazaviy hisoblash miqdorining 100 (22,3 mln. so‘m), o‘qituvchisiga – 80 baravar (17,8 mln. so‘m);

2-o‘rin (kumush medal) uchun – o‘quvchiga bazaviy hisoblash miqdorining 85 (18,9 mln. so‘m), o‘qituvchisiga – 65 baravar (14,49 mln. so‘m);

3-o‘rin (bronza medal) uchun – o‘quvchiga bazaviy hisoblash miqdorining 70 (15,6 mln. so‘m), o‘qituvchisiga –50 baravarida (11,15 mln. so‘m).

1.2. Qarordan kelib chiqqan vazifalar

Pedagog kadrlar tayyorlovchi oliy ta’lim muassasalari matematika va informatika ta'lim yo'nalishi bitiruvchilari qarorni ro'yobga chiqarishda bevosita ishtirok etishadi. Shuning uchun oliy ta'lim muassasalari yuqori malakali kadrlar tayyorlashda oldida qo'yidagi vazifalar turibdi:

Pedagog kadrlar tayyorlovchi oliy ta'lim muassasalarida talabalarga fanlarni o'qitish metodikasi va boshqa fanlardan o'quv dasturlarini xalqaro olimpiadalar talablariga moslashtirish, bitiruvchi talabalarga umumiy o'rta ta'lim muassasalariga ishga kelishda mazkur yo'nalishda tayyor holda kelishlarini ta'minlash;

Iqtidorli o'quvchilarni tanlash va maqsadli tayyorlash bo'yicha innovatsion metodlarini ishlab chiqish va joriy etishga yo'naltirilgan ilmiy izlanishlar olib borish;

Iqtidorli o'quvchilar bilan ishlash sohasida xalqaro aloqalarni o'rnatish, fundamental va amaliy tadqiqotlar o'tkazish, xalqaro loyihalarni ishlab chiqish va amalga oshirish, xalqaro ilmiy anjumanlar va simpoziumlarni tashkil etish va o'tkazishda ishtirok etish ;

Olimpiada natijalarini boshqa davlatlar natijalari bilan qiyosiy taqqoslash;

sohadagi ilg'or tajribani ommalashtirish va uning asosida ta'lim muassasalari uchun tavsiyalar va qo'llanmalar ishlab chiqishda ishtirok etish;

o'qitishning innovatsion usullaridan foydalangan holda matematika bo'yicha pedagog kadrlarning malakasini oshirish bo'yicha o'quv-uslubiy tavsiyalar tayyorlash.

Ta'limning barcha bosqichlarida olimpiadalarga maqsadli tayyorlash tiziminini tanqidiy o'rganish va xalqaro tajribalarga asoslanib qayta ko'rib chiqish.

O'qituvchining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg'or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o'zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko'nikmalarini egallash.

Matematika olimpiada va musobaqalarda taqdim etiladigan masalalar yechish usullarini puxta o'rganish.

Matematika o'quv dasturlari hamda o'quv adabiyotlari mazmuniga o'zgartirish va qo'shimchalar kiritish;

Mavzuga oid savollari

1. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son qaroriga ko'ra Xalqaro matematika olimpiadasi (International Mathematical Olympiad (IMO)) kumush medalni qo'lga kiritgan o'quvchiga va uning o'qituvchisiga qanday bir martalik pul mukofotlari bilan taqdirlanishi ko'zda tutilgan?

2. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son qaroriga ko'ra Xalqaro matematika olimpiadasida (International Mathematical Olympiad (IMO)) kumush medal sovrindorini tayyorlagan o'qituvchi va ta'lim muassasasi direktori

navbatdagi o‘quv yili uchun direktor jamg‘armasidan qanday miqdorla qo‘shimcha ustama oladilar?

3. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son qaroriga ko‘ra Xalqaro informatika olimpiadasi (International Olympiad in Informatics (IOI)) kumush medalni qo‘lga kiritgan o‘quvchiga va uning o‘qituvchisiga qanday bir martalik pul mukofotlari bilan taqdirlanishi ko‘zda tutilgan?

Foydalanilgan adabiyotlar

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-son Farmoni.
2. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 5 iyuldagi “Yoshlarga oid davlat siyosati samaradorligini oshirish va O‘zbekiston yoshlar ittifoqi faoliyatini qo‘llab-quvvatlash to‘g‘risida”gi 5106-son Farmoni.
3. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 apreldagi “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.
4. 03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil yetish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori
5. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 29 apreldagi PF-5712-son “O‘zbekiston Respublikasi xalq ta’limi tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni
6. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 6 apreldagi 187-son “Umumiy o‘rta va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limining davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi qarori

2-mavzu: Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashning xolati va zamonaviy tendensiyalari. (2 soat)

Reja:

1. Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashning xolati
2. Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashning zamonaviy tendensiyalari.

Tayanch tushunchalar: *iqtidorli yoshlar, matematika, xalqaro olimpiadalar, maqsadli tayyorlash, tendensiyalar*

2.1. Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashning xolati

Mamlakatimizda barcha sohalarda olib borilayotgan islohotlar yildan-yilga rivojlanib borishi, axborot kommunikatsiya texnologiyalari jadallik bilan rivojlanayotgan, globallashuv, dunyo bozorida raqobat tobora kuchayib borayotgan bir davrda, demokratik taraqqiyot, modernizatsiya va yangilanish borasida belgilangan maqsadlarga erishishda eng muhim qadriyat va hal qiluvchi kuch bo‘lgan bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash muhim omil bo‘lmoqda.

Xalqaro Matematika Olimpiadasi dunyoning yosh matematiklari uchun eng katta va eng muhim forum hisoblanadi. U sport Olimpiadasi kabi nufuzli bo‘lib, unda ishtirok etish har bir mamlakat uchun katta sharafdir. Har yili iyul oyida, dunyoning 100 dan ortiq mamlakatidan kelgan 500-600 nafar iqtidorli yoshlar o‘zaro bellashadilar, muloqotda bo‘lishadi va tajriba almashishadi.

Birinchi xalqaro Matematika Olimpiadasi Brashovda 1959 yilda bo‘lib o‘tgan va unda Bolgariya, Vengriya, Sharqiy Germaniya, Polsha, Rumыniya, SSSR, Chexoslovakiya terma jamoalari ishtirok etgan.

O‘zbekiston jamoasi birinchi bor 1997 yili Argentinada bo‘lib o‘tgan Xalqaro Matematika Olimpiadasida 3 nafar ishtirokchi va 1 nafar rahbar bilan qatnashgan, ammo sovrinli o‘rinlar bo‘lmagan.

Ushbu omadsiz ishtirok natijasida hal qilinishi zarur bo‘lgan masalalar, Olimpiadaga bir jamoa sifatida ishtirok etish, ishtirokchilarni tayyorlashdagi yo‘l qo‘yilgan ko‘plab muammolar aniqlangan.

O‘zbekiston xalq ta’limi vazirligi tomonidan bu muammolar jiddiy o‘rganildi, ularni bartaraf qilish, olimpiadaga puxta tayyorgarlik ko‘rish va ishtirokchilarimiz uchun barcha shart-sharoitlarni yaratib berish bo‘yicha ko‘plab ijobiy ishlar amalga oshirildi.

O‘zbekiston terma jamoasi 1999 yildan boshlab Xalqaro Matematika olimpiadasida ishtirok etib kelmoqda va birinchi medalni 2000 yilda Janubiy Koreyada qo‘lga kiritdik.

Ayni paytda, boshqa mamlakatlar va Olimpiada tashkilotchilari bizning maktab o‘quvchilarimizning matematikadan bilim darajasi ancha yuqori ekanligini tan olishdi va O‘zbekiston jamoasi ular uchun jiddiy raqib ekanligini isbotladi.

O‘zbekiston terma jamoasi o‘tgan davrda 19 marta Olimpiadada ishtirok etib, 9 ta kumush va 27 ta bronza medallarini qo‘lga kiritganini taqdim etilgan jadvalda ko‘rishimiz mumkin. Bundan tashqari 30 dan ortiq ishtirokchilar Olimpiadaning maxsus diplomlari bilan taqdirlandi.

Xalqaro Matematik olimpiadasida O‘zbekiston katta yoshli talabalar milliy terma jamoasi natijalari

Ishtirok etgan yili, tashkilotchi-mamlakat	**Terma jamoa a’zolari soni**	**Kumush medal**	**Bronza medal**
1997, Argentina	3	0	0
1999, Ruminiya	6	0	0
2000, Janubiy Koreya	6	0	2
2001, AQSh	6	1	3
2002, Shotlandiya	6	0	0
2003, Yaponiya	6	1	1
2004, Gresiya	6	0	3
2006, Sloveniya	6	0	2
2007, Vetnam	6	1	3
2008, Ispaniya	6	0	4
2009, Germaniya	6	1	2
2010, Qozog‘iston	6	4	1
2011, Niderland Qirolligi	6	0	1
2015, Tailand	6	0	3
2016, Gonkong	6	0	1
2017, Braziliya	5	1	0
2018, Ruminiya	6	0	0
2019, Buyuk Britaniya	6	0	1
2020, Rossiya (onlayn)	6	0	0
Jami	**104**	**9**	**27**

Dastlabki medallarni va jami medallarning aksariyat qismini Buxoro viloyatining mashhur Qorakul maktab-internatining O‘zbekistonda xizmat ko‘rsatgan o‘qituvchi, tashabbuskor matematik ustozimiz T. Jumaev o‘quvchilari tomonidan qo‘lga kiritilgan bo‘lib, bu qatorga so‘ngi yillarda boshqa viloyatlar ham qo‘shilib, g‘oliblar geografiyasining kengayishi diqqatga sazovordir.

Xalqaro Matematika Olimpiadasi medallari bilan taqdirlanganlar o‘quvchilar

№	FISh	Xudud	Ishtirok etgan yili	Medallar
1.	Umid Raxmonov	Buxoro	1999, 2000, 2001	Bronza(2000) i kumush(2001) medali
2.	O‘tkir Boltaev	Buxoro	2006, 2007	Bronza(2006) va kumush (2007) medali
3.	Diyora Salimova	Samarkand	2008, 2009	Bronza(2008) va kumush (2009) medali
4.	Doniyor Nafasov	Buxoro	2003	Kumush medal
5.	Zulfiddin Kamolov	Buxoro	2000, 2001	Bronza (2000) va Bronza (2001) medali
6.	Azizxon Nazarov	Buxoro	2009,2010	Bronza (2009) va Bronza (2010) medali
7.	Jafar Abduraximov	Samarkand	2010	Kumush medal
8.	Ibroximbek Akramov	Samarkand	2010	Kumush medal
9.	Zarif Ibragimov	Samarkand	2010	Kumush medal
10.	Umidaxon Juraeva	Samarkand	2010	Kumush medal
11.	Abdumalik Abdukayumov	Buxoro	2017	Kumush medal
12.	Nozim Komilov	Andijon	2001	Bronza medal
13.	Umidjon Radjabov	Kashkadaryo	2001	Bronza medal
14.	Aziz Juraqulov	Buxoro	2002, 2003	Bronza medal (2003)
15.	Jalol Kurbonov	Buxoro	2004	Bronza medal
16.	Bekzod Tillaev	Buxoro	2004	Bronza medal
17.	Zafar Jumaev	Buxoro	2004	Bronza medal
18.	Javlonbek	Buxoro	2006	Bronza medal

	Bozorov			
19.	Baxriddin Abdiev	Kashkadaryo	2007	Bronza medal
20.	Ozod Zoyirov	Buxoro	2007	Bronza medal
21.	Xamrozjon Chuyanov	Buxoro	2007	Bronza medal
22.	Sherzod Safoev	Buxoro	2008	Bronza medal
23.	Farxod Xaydarov	Namangan	2008	Bronza medal
24.	Alisher Eshonkulov	Navoiy	2008	Bronza medal
25.	Abror Pirnapasov	Buxoro	2008, 2009	Bronza medal (2009)
26.	Javlon Isomurodov	Buxoro	2011	Bronza medal
27.	Jamshid Yaxshiev	Buxoro	2015	Bronza medal
28.	Abbos Muxammedov	Buxoro	2015	Bronza medal
29.	Sardor Bazarbaev	Toshkent sh	2015	Bronza medal
30.	Xurshid Juraev	Toshkent sh	2016	Bronza medal
31.	Jasurbek Imomov	Buxoro	2019	Bronza medal
	Jami			**27 ta bronza va 9 ta kumush medallar**

Jadvalda ko‘rib turganingizdek, eng ko‘p g‘oliblar Buxoro viloyatidan, 5 nafar Samarqanddan, 2 nafardan Toshkent shahri va Qashqadaryo viloyatidan hamda Andijon, Navoiy, Namangan, Farg‘ona viloyatlaridan 1 nafardan ishtirok etishgan.

Terma jamoa a’zo-qizlari Samarqand shahridan Umidaxon Jo‘raeva, Muhayo Ahmatova, Diyora Salimovalar, Maftuna Samatboeva Hukumatimiz tomonidan Zulfiya nomidagi Davlat mukofoti, Buxoro viloyatidan Umid Raxmonov Shuxrat medali, Toshkent shahridan Sardor Bazarbaev va Buxoro viloyatidan Jasurbek Imomov Mard o‘g‘lon Davlat mukofoti bilan taqdirlandilar.

20 yildan buyon bu olimpiadalarga o‘quvchilarimizning Ona yurti sharafini himoya qilish uchun bor kuchi va bilimi bilan g‘oliblikka intilishi, ishtiyoqini o‘lchab bo‘lmaydi. Bularning bari bizga davlatimiz tomonidan yaratib berilgan sharoit va aziz ustozlarning fidokorona mehnati samarasidir. Ammo, oldimizda yana bir pog‘ona marra- oltin medalni qo‘lga kiritish marrasi turibdi va biz iqtidorlilar bilan tizimli ishlashni yanada yaxshilasak, o‘quvchilarimiz g‘oliblar shoxsupasining chuqqisiga ko‘tarilishi hech gap emas.

Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashning xolatini tanqidiy qarab chiqaylik.

Quyidagi muammolar hal etilmagan.

1. Pedagog kadrlar tayyorlovchi oliy ta’lim muassasalarida talabalarga qiziqarli matematika va olimpiada masalalariga bag‘ishlangan mavzular asosiy fan sifatida o‘qitilmaydi va shuning uchun bitiruvchi talabalarimiz umumiy o‘rta ta’lim muassasalariga ishga kelishda mazkur yo‘nalishda tayyor emas.
2. Iqtidorli o‘quvchilarni tanlash va maqsadli tayyorlash bo‘yicha innovatsion metodlari ishlab chiqilmagan va joriy etishga yo‘naltirilgan ilmiy izlanishlar olib borilmayapti.
3. Iqtidorli o‘quvchilar bilan ishlash sohasida xalqaro aloqalar o‘rnatilmagan, fundamental va amaliy tadqiqotlar o‘tkazilmayapti.
4. Olimpiada natijalarini boshqa davlatlar natijalari bilan qiyosiy taqqoslanmayapti, kamchiliklar tahlil qilinmayapti.
5. Sohadagi ilg‘or tajribani ommalashtirish va uning asosida ta’lim muassasalari uchun tavsiyalar va qo‘llanmalar deyarli ishlab chiqilmagan.
6. O‘qitishning innovatsion usullaridan foydalangan holda matematika bo‘yicha pedagog kadrlarning malakasini oshirish bo‘yicha o‘quv-uslubiy tavsiyalar tayyorlanmagan.
7. O‘qituvchining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini egallash bo‘yicha bo‘yicha o‘quv-uslubiy tavsiyalar tayyorlanmagan.
8. Matematika olimpiada va musobaqalarda taqdim etiladigan masalalar yechish usullarini puxta o‘rganilmagan, asosiy urg‘u testlarga berilyapti.
9. Ihtisoslashtirilgan ta’lim muassasalari uchun matematika o‘quv dasturlari hamda o‘quv adabiyotlari mazmuniga o‘zgartirish va qo‘shimchalar kiritilmagan.

2.2. Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashning zamonaviy tendensiyalari.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” qaroriga muvofiq har bir tumanda (shaharda) matematika fanini chuqurlashtirib o‘qitishga ixtisoslashtirilgan maktablar ochilishi ko‘zda tutilgan.

2008 yil 7 avgustdagi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining “Ayrim fanlar chuqur o‘rganiladigan davlat ixtisoslashtirilgan umumta’lim muassasalari faoliyatini takomillashtirish to‘g‘risida”gi 173-sonli qarorida ixtisoslashtirilgan umumta’lim muassasasining asosiy vazifalari belgilangan:

umumiy o‘rta ta’limning chuqurlashtirilgan fanlari bo‘yicha o‘quvchilarning davlat ta’lim standartlari talablaridan oshadigan chuqur ta’lim tayyorgarligini ta’minlash;

o‘quvchilarning ijodiy salohiyatini namoyon qilish va faollashtirish;

har bir o‘quvchining individual xususiyatlarini hisobga olgan holda mustaqil tadqiqotchilik faoliyati ko‘nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish;

professional dastur ta’limlarini ongli tanlash va keyinchalik o‘zlashtirish uchun asos yaratish.

Yuklangan vazifalarni bajarish uchun ixtisoslashtirilgan sinf va ixtisoslashtirilgan umumta’lim muassasasi quyidagi funksiyalarni amalga oshiradi:

respublika aholisining bolalarni ixtisoslashtirilgan chuqur o‘qitishga bo‘lgan ehtiyojini ta’minlash;

o‘quvchilarning qobiliyatlari, qiziqishlarini hisobga olgan holda umumiy va ixtisoslashtirilgan shaxsga yo‘naltirilgan o‘qitishning ta’lim dasturlarini amalga oshirish;

o‘quvchilarning iqtidori va kamol topishi dinamikasining psixologik-pedagogik diagnostikasini amalga oshirish;

ta’limning uzviyligi va uzluksizligi asosida intensiv intellektual rivojlantirishni, chuqurlashtirilgan ixtisoslashtirilgan o‘qitishni ta’minlash;

asosiy va qo‘shimcha ta’lim dasturlarini ishlab chiqish va ular integratsiyasini amalga oshirish, loyihadagi o‘qitishga o‘tgan holda ta’lim jarayonini individuallashtirish va tabaqalashtirish;

ta’lim jarayoniga innovatsiya, pedagogika va zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalarini joriy etish;

o‘quvchilarning ma’lumoti darajasi oshishiga, samarali tayyorlanishiga, oliy ta’lim muassasalariga kirishiga yordam beradigan shart-sharoitlar yaratish;

o‘quvchilarning respublika va xalqaro seminarlar, konferensiyalar, festivallar va boshqa intellektual-ijodiy tadbirlarda ishtirok etishi uchun shart-sharoitlar yaratish;

iqtidor va iste’dodni aniqlash hamda kamol toptirish bo‘yicha o‘quvchilarni fanlar olimpiadalari, tanlovlar va boshqa tadbirlarda qatnashishga tayyorlash;

o‘quvchilarning ilmiy guruhlarini tashkil etish va faoliyatini yo‘lga qo‘yish.

Shu vazifalar o‘quvchilarning qobiliyatlari, qiziqishlarini hisobga olgan holda umumiy va ixtisoslashtirilgan shaxsga yo‘naltirilgan o‘qitishning asosiy va qo‘shimcha ta’lim dasturlarini ishlab chiqish va ularning integratsiyasini ta’minlash, o‘quvchilarni fanlar olimpiadalari va musobaqalarga tayyorlash bo‘yicha ilmiy asoslangan va natijalarni kafolatlaydigan metodikalarni, adabiyotlarni yaratish muammolarini hal etishga chorlamoqda.

Shu bilan birga matematika fanidan iqtidor va qobiliyat tushunchalariga, chuqurlashtirilgan ta’limni tashkil etishga oid pedagogik va psixologik qarashlarning ko‘pligi hamda ulardan ayrimlari bir-birini inkor qilishi natijasida hosil bo‘lgan qiyinchiliklarga e’tiborni qaratish lozim.

Bundan tashqari, matematikaga ixtisoslashtirilgan umumta’lim muassasalarini zamonaviy pedagogik metodikalar va texnologiyalarni egallagan malakali pedagog kadrlar bilan ta’minlash muammosi pedagogika oliy ta’lim muassasalari oldida turibdi. Buning uchun tegishli ta’lim yo‘nalishi DTS, o‘quv rejalari, fan dasturlariga ilg‘or davlatlar tajribalarini inobatga olgan holda tegishli tuzatishlarni kiritish maqsadga muvofiq.

Matematikani chuqur o‘rganishga qaratilgan ta’limiy konsepsiyasini yaratishga ilg‘or tajribalarga ega bo‘lgan mutaxassislar jalb qilinsa, o‘quvchilarning iqtidor va iste’dodni aniqlash hamda kamol toptirish tizimini shakllantirish maqsadiga erishiladi.

Shu bilan birga qo‘yidagi amaliy xarakterdagi muammolar o‘z yechimini topishi lozim:

1. Matematikadan o‘quvchilarni tayyorlash bo‘yicha metodik tavsiyalarni ishlab chiqish va ommalashtirish
2. Matematikadan olimpiada topshiriqlarning umumiy tavsifi yaratilmagan
3. Maktab o‘quvchilarini matematikadan nostandart masalalarni yechishga tayyorlash bo‘yicha metodik tavsiyalarni ishlab chiqish va ommalashtirish.
4. Matematikadan asosiy olimpiadaning birinchi bosqichiga tayyorlashda fan o‘qituvchining roli o‘rganilmagan.
5. Asosiy olimpiadaga oid asosiy mavzular (sillabus) belgilanmagan.
6. Matematikadan olimpiada topshiriqlarini baholash bo‘yicha asoslangan metodik tavsiyalarni ishlab chiqilmagan
7. Ilg‘or davlatlar olimpiada topshiriqlari tahlili yetarli emas.
8. Asosiy olimpiadaning birinchi va ikkinchi bosqichlari nazorat materiallarini shakllantirish bo‘yicha metodik tavsiyalar ishlab chiqilmagan.
9. Olimpiada mavzulari bo‘yicha o‘quv adabiyotlarni yaratish va nashr qilish.

Mavzuga oid savollari

1**.** Birinchi Xalqaro Matematika Olimpiadasi Ruminiyaning qaysi shahrida bo‘lib o‘tgan?

2. O‘zbekiston o‘quvchilari birinchi marta ishtirok etgan Xalqaro Matematika Olimpiadasi qaysi davlatda bo‘lib o‘tgan?

3. O‘zbekiston o‘quvchilari qaysi davlatda bo‘lib o‘tgan Xalqaro Matematika Olimpiadasida birinchi bronza medalini qo‘lga kiritgan?

Foydalanilgan adabiyotlar

1. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” qarori
2. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2008 yil 7 avgustdagi “Ayrim fanlar chuqur o‘rganiladigan davlat ixtisoslashtirilgan umumta’lim muassasalari faoliyatini takomillashtirish to‘g‘risida”gi 173-sonli qarori
3. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 6 apreldagi 187-son “Umumiy o‘rta va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limining davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi qarori

Internet resurslari:

1. . http://www.ziyonet.uz – Ziyonet axborot-ta’lim resurslari portali
2. http://www.wikipedia.org – onlayn ensiklopediya.
3. http://www.mccme.ru/ – Moskva uzluksiz matematik ta’limi markazi.

3-mavzu: Matematika olimpiadalarga maqsadli tayyorlashda ilg‘or milliy va xorijiy tajribalar. (2 soat)

Reja:

3.1. Xalqaro olimpiadalarga tayyorlash bo‘yicha mavzular (sillabus)
3.2. Olimpiadada taklif etilgan masala yechimini baholash

Tayanch tushunchalar: *iqtidorli yoshlar, matematika, xalqaro olimpiadalar, maqsadli tayyorlash, mavzular, baholash*

3.1. Xalqaro olimpiadalarga tayyorlash bo‘yicha mavzular (sillabus)

Quyidagi mavzular bo‘yicha tayyorlash tavsiya etiladi.

1. **Sonlar nazariyasi.**

Bo‘linish nazariyasining asoslari . Yevklid algoritmi. Arifmetikaning asosiy teoremasi. Tub sonlar. Ferma tub sonlari.

Taqqoslamalar nazariyasi . Ferma, Vilson va Eyler teoremalari. Qoldiqlar haqida Xitoy teoremasi. Kvadratik chegirmalar. Sonlar nazariyasining asosiy funksiyalari.

Diofant tenglamalari. Diofantning chiziqli tenglamalari va sistemalari. Yuqori darajali diofant tenglamalari. Katalan va Pell tenglamalari va boshqalar.

2. **Algebra.**

Ko‘phadlar. Ko‘phadlarning bo‘linishi. Ko‘phad ildizlari. Bezu, Viet teoremalari. Ko‘phadlar arifmetikasining asosiy teoremasi. Algebraning asosiy teoremasi. Haqiqiy, butun va ratsional koeffitsientli ko‘phadlar. Keltirilmaydigan ko‘phadlar. Ko‘p o‘zgaruvchili ko‘phadlar. Simmetrik ko‘phadlar.

Tengsizliklar. O‘rta qiymatlar haqidagi klassik tengsizliklar. Koshi-Bunyakovskiy-Shvars , Bernulli, Yensen, Gyolder tengsizliklari. Hosila tadbiqi. Myurxed teoremasi.

Ketma-ketliklar. Rekurrent ketma-ketliklar. Qaytma ketma-ketliklar. Ketma-ketlik limiti. Qatorlar. Ketma-ketlikning hosil qilish funksiyasi.

Funksiyalar. Funksiya hossalari va ularni qo‘llash. Funksional tenglamalar.

3. **Kombinatorika.**

Saralash kombinatorikasi. O‘rinlashtirishlar, o‘rin almashtirishlar, kombinatsiyalar. Shperner to‘plamlari.

Kombinator masalalar. Dirixle prinsipi. Ekstremal qoida. Juft-toqlik. Invariantlar. Bo‘yash va qoplashlar. Tortishlar va quyishlar. O‘yinlar va musobaqalar. Strategiyalar va algoritmlar.

Graflar. Graflar nazariyasining tili. Graflarning eng sodda turlari va sonli xarakteristikalari. Dilvort teoremasi. Ramsey nazariyasi.

4. **To‘plamlar.**

To‘plamlar algebrasi . To‘plamlar nazariyasining tili. To‘plamlar ustida amallar. Akslantirishlar. To‘plamlarni bo‘laklash. Munosabatlar.

To‘plam quvvati. Chekli va cheksiz to‘plamlar. Kantor-Bernshteyn teoremasi. To‘g‘ri chiziqda va tekislikda nuqtalar to‘plamlar turlari.

5. **Geometriya.**

Klassik geometriya . Uchburchaklar geometriyasi. Ko‘pburchaklar, aylanalar. Geometrik tengsizliklar.

Analitik geometriya . Koordinatalar metodi. Vektorlar va ularning qo‘llanilishi. Massalar geometriyasi. Geometriyada kompleks sonlar.

Sintetik geometriya. Geometrik almashtirishlar. Harakat. Shal teoremasi. O‘xshashlik. Gomotetiya. Almashtirishlar kompozitsiyalari. Inversiya. Affin va proektiv almashtirishlar.

Kombinator geometriya. Qavariq shakllar. Qavariq qobiq. Xelli teoremasi. Shperner lemmasi

3.2. Olimpiadada taklif etilgan masala yechimini baholash

Baholash- har qanday ta’lim berish jarayonining muhim qismi hisoblanadi.

Baholash tizimini oqilona tashkil etish, yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan muammo va kamchiliklarning, jumladan, o‘quvchining noroziligini oldini olish, sog‘lom raqobatni ta’minlashda uslubiy ahamiyatga ega bo‘lgan vazifalaridan biri hisoblanadi.

Quyida biz baholash bo‘yicha tavsiyalarni beramiz.

Matematika fanidan taklif etilgan masala yechimining namunaviy baholash mezonlari

№	Baholash mezoni	Ballar
1	Masala xatosiz va kamchiliklarsiz yechilgan	10
2	Masala to‘liq yechilgan, ammo yechimga ta’sir ko‘rsatmaydigan 1 ta mayda kamchilikka yo‘l qo‘yilgan	9
3	Masala to‘liq yechilgan, ammo yechimga ta’sir ko‘rsatmaydigan 2-3 ta mayda kamchiliklarga yo‘l qo‘yilgan	8
4	Masala to‘g‘ri yechilgan, ammo fikrlash mantig‘iga ta’sir ko‘rsatmayotgan hollar qaralmagan	7
5	Agar masala yechimi ikki-uchta qadamdan iborat bo‘lsa, shulardan murakkabroq bo‘lgan qadamlar to‘g‘ri qaralgani uchun	6

6	Agar masala yechimi ikki-uchta qadamdan iborat bo‘lsa, shulardan osonroq bo‘lgan qadamlar to‘g‘ri qaralgani uchun	5
7	Masala g‘oyasi to‘g‘ri keltirilgan, ammo yechim qadamlarida muhim xatolarga yo‘l qo‘yilgan	4
8	Masala yechilmagan, ammo uning yechimiga olib kelishi mumkin bo‘lgan foydali tasdiqlar isbotlangan	3
9	Masala yechilmagan, ammo uning yechimiga olib kelishi mumkin bo‘lgan foydali tasdiqlar isbotlanmasdan keltirilgan	2
10	Masala yechimi noto‘g‘ri, ammo ayrim hollarni qarashga harakat qilinganligi yoki haqiqatga yaqin chizma keltirilgan	1
11	Masala umuman yechilmagan yoki yechim birorta ham foydali tasdiqlarga ega bo‘lmagan	0

Izoh.

1. Mazkur namunaviy baholash mezonlari asosida har bir masalaning yechimi mazmuniga qarab hususiy baholash mezoni tuzilishi tavsiya etiladi

2. Har qanday to‘g‘ri yechim maksimal 10 ball bilan baholanadi. Bu holda masala yechimi uzun bo‘lgani, yoki xakamlarga ma’lum bo‘lgan yechimdan farqli bo‘lgani, yoki darslikda mavjud tasdiqlar keltirilib ularni qayta isbotlamaganligi uchun ballarni kamaytirish ta’kiklanadi.

Namunaviy baholash mezonlari asosida har bir masalaning yechimi mazmuniga qarab hususiy baholash mezoni (namuna)

Masala. $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ ko‘phad $P(1)=10, P(2)=20, P(3)=30$ shartlarni qanoatlantiradi. $P(12)+P(-8)$ qiymatni hisoblang.

Masala yechimi. $Q(x)=P(x)-10x$ ko‘phad uchun $Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$ tengliklar bajarilganligi bois $Q(x)=P(x)-10x=(x-1)(x-2)(x-3)(x-A)$ bo‘ladi, bu yerda A - haqiqiy son. Demak, $P(12)+P(-8)=11\cdot10\cdot9\cdot(12-A)+120+(-9)(-10)(-11)(-8-A)-80=19840$.

Baholash mezoni .

1. a,b,c lar uchun tenglamalar sistemasi yozilsa : **2 ball**

2. $P(x)$ uchun Lagranj interpolyatsion formulasi yozilsa : **2 ball**

3. $Q(x)=P(x)-10x=(x-1)(x-2)(x-3)(x-A)$ yozilsa : **4 ball.**

3. $Q(x)=P(x)-10x=(x-1)(x-2)(x-3)(x-A)$ isbotlansa : **6 ball.**

4. To‘liq yechim uchun: **10 ball.**

Izoh. 1,2,3,4 bandlardagi ballar qo‘shilmaydi.

Mavzuga oid savollari

1. Diofant tenglamalari larga oid olimpiada masalalari matematikaning qaysi bo‘limiga tegishli?

2. Koshi-Bunyakovskiy-Shvars tengsizligiga oid olimpiada masalalari matematikaning qaysi bo‘limiga tegishli?

3. Dirixle prinsipiga oid olimpiada masalalari matematikaning qaysi bo‘limiga tegishli?

Foydalanilgan adabiyotlar

4. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 6 apreldagi 187-son “Umumiy o‘rta va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limining davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi qarori

Internet resurslari:

5. . http://www.ziyonet.uz – Ziyonet axborot-ta’lim resurslari portali

6. http://www.wikipedia.org – onlayn ensiklopediya.

7. http://www.mccme.ru/ – Moskva uzluksiz matematik ta’limi markazi.

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-amaliy mashg‘ulot

Mavzu: Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda algebra va sonlar nazariyasiga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi. (2 soat)

Ishning maqsadi: Tinglovchilarga Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda taqdim etiladigan masalalar mavzulari hamda tanlangan mavzu bo‘yicha masalalar yechish metodikasi bilan tanishlirish

Amaliy mashg‘ulot topshiriqlari

Ko‘phadlar. Ko‘phadlarning bo‘linishi. Ko‘phad ildizlari. Bezu, Viet teoremalari. Ko‘phadlar arifmetikasining asosiy teoremasi. Algebraning asosiy teoremasi. Haqiqiy, butun va ratsional koeffitsientli ko‘phadlar. Keltirilmaydigan ko‘phadlar. Ko‘p o‘zgaruvchili ko‘phadlar. Simmetrik ko‘phadlar.

Tengsizliklar. O‘rta qiymatlar haqidagi klassik tengsizliklar. Koshi-Bunyakovskiy-Shvars, Bernulli, Yensen, Gyolder tengsizliklari. Hosila tadbiqi. Myurxed teoremasi.

Ketma-ketliklar. Rekurrent ketma-ketliklar. Qaytma ketma-ketliklar. Ketma-ketlik limiti. Qatorlar. Ketma-ketlikning hosil qilish funksiyasi.

Funksiyalar. Funksiya hossalari va ularni qo‘llash. Funksional tenglamalar.

Funksional tenglamalarni yechishning asosiy usullari.

Funksional tenglamalar ko‘plab matematika olimpiadalarida taqdim etilib, ularda berilgan shu tenglamalarni qanoatlantiradigan funksiyalarni topish talab qilinadi. Shuni aytish joizki, funksional tenglamalarni yechish uchun umumiy usul mavjud bo‘lmasdan, har bir tenglamaga alohida qarashni talab qiladi. Ayrim usullar o‘zining murakkabligi bilan ajralib turadi.

1-misol. Barcha $x, y \in R$ lar uchun

$$f(x+y) = x + yf(x) + (1-x)y \qquad (1)$$

Tenglamani qanoatlantiradigan $f: R \to R$ funksiyalar topilsin.

Y**echilishi:** $f(x)$ funksiya (1) tenglamani barcha $x, y \in R$ lar uchun qanoatlantirsin.

Hususiy holda $y = 0$ deb olsak, $f(x) = x$ tenglikni hosil qilamiz. Demak, $f(x) = x$ funksiyadan farqli hech qanday funksiya (1) tenglamani qanoatlantirishi mumkin emas. Ammo bu mulohazadan $f(x) = x$ yechim bo‘lishi kelib chiqmaydi. Uni yechim bo‘lishini isbotlash uchun $f(x) = x$ funksiya (1) ni qanoatlantirishini tekshirish lozim.

Tekshirish: $x+y=x+yx+(1-x)y$.

Demak, $f(x)=x$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Javob: $f(x)=x$, $x\in R$.

Quyidagi misol funksional tenglamadan topilgan funksiyani uni qanoatlantirishini tekshirish muhimligini ko‘rsatadi.

2-misol. Barcha $x,y\in R$ lar uchun

$$f(x+y)=x+yf(x)+(1-\sin x)y \qquad (2)$$

tenglamani qanoatlantiradigan $f:R\to R$ funksiyalar topilsin.

Ye**chilishi:** Huddi 1-misoldek $y=0$ deb olsak, $f(x)=x$ tenglikni hosil qilamiz. $f(x)=x$ funksiyani (2) ga quyamiz.

Tekshirish: $x+y\neq x+yx+(1-\sin x)y$.

Demak, $f(x)=x$ funksiya (2) tenglamaning yechimi bo‘lmaydi.

Javob: Yechim mavjud emas.

3-misol. $x,y\neq 0,\ x,y\neq 2013$ lar uchun $(2013-x)\cdot f(x)-2x\cdot f(2013-x)=1$ tenglamani qanoatlantiradigan $f:R\setminus\{0,2013\}\to R$ funksiyalar topilsin.

Ye**chilishi:** $x=2013-t$, $x=t$ deb olsak quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} t\cdot f(2013-t)-2(2013-t)\cdot f(t)=1 \\ (2013-t)\cdot f(t)-2t\cdot f(2013-t)=1 \end{cases}.$$

1-tenglamani 2 ga ko‘paytiramiz:

$$\begin{cases} 2t\cdot f(2013-t)-4(2013-t)\cdot f(t)=2 \\ (2013-t)\cdot f(t)-2t\cdot f(2013-t)=1 \end{cases}$$

Oxirgi sistemadagi tenglamalarni qo‘shamiz: $-3(2013-t)\cdot f(t)=3$.

$t\neq 0,2013$ bo‘lganligi uchun $f(t)=\dfrac{1}{t-2013}$.

Hosil bo‘lgan $f(x)=\dfrac{1}{x-2013}$ funksiyani berilgan tenglamani qanoatlantirishini ko‘rsatish qoldi. Haqiqatdan ham

$$(2013-x)\cdot\frac{1}{x-2013}-2x\cdot\left(\frac{1}{-x}\right)=-1+2=1.$$

Demak, $f(x)=\dfrac{1}{x-2013}$, $x\neq 0,2013$, funksiya berilgan tenglamaning yechimidir.

Javob: $f(x)=\dfrac{1}{x-2013}$; $x\in R\setminus\{0,2003\}$.

4-misol. Barcha $x,y\in R$ lar uchun $f(xy)=y^{2013}\cdot f(x)$ tenglamani qanoatlantiradigan $f:R\to R$ funksiyalar topilsin.

Yechilishi: $x=1 \Rightarrow f(y)=y^{2013}f(1)$. $f(1)=a=const$, deb olsak, u holda $f(x)=a\cdot x^{2013}$. bo'ladi.

Tekshirish: $a\cdot x^{2013}\cdot y^{2013}=y^{2013}\cdot a\cdot x^{2013}$. Demak, $f(x)=a\cdot x^{2013}$, $a=const$, ko'rinishdagi funksiya $f(xy)=y^{2013}\cdot f(x)$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

Javob: $f(x)=a\cdot x^{2013}$, $a=const$.

5-misol. Barcha $x,y\in R$ lar uchun $f(x+y)+f(y-x)=(y+2)\cdot f(x)+y(2y-x^2)$ tenglamani qanoatlantiradigan $f:R\to R$ funksiyalar topilsin.

Yechilishi: $x=0 \Rightarrow f(y)+f(y)=(y+2)\cdot f(0)+2y^2$. $a=f(0)$ desak, $f(y)=y^2+\dfrac{ay}{2}+a$ tenglikka ega bo'lamiz. Natijani tenglamaga qo'yamiz:

$$(x+y)^2+\frac{a}{2}(x+y)+a+(y-x)^2+\frac{a}{2}(y-x)+a=(y+2)(x^2+\frac{ax}{2}+a)+y(2y-x^2)$$

Soddalashtirib, barcha x,y lar uchun $ax(\dfrac{y}{2}+1)=0$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan $a=0$. Natijada $f(x)=x^2$ ni hosil qilamiz. Bu funksiya berilgan tenglamani qanoatlantirishi ravshan.

Javob: $f(x)=x^2$.

6-misol . Barcha $x,y\in R$ lar uchun $f(xy)=\sin y\cdot f(x)$ tenglamani qanoatlantiradigan $f:R\to R$ funksiyalar topilsin.

Yechilishi: $x=1 \Rightarrow f(y)=\sin y\cdot f(1)$. $a=f(1)$ belgilash kiritsak, $f(y)=a\cdot\sin y$ ga ega bo'lamiz. Natijani berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$a\cdot\sin(xy)=a\cdot\sin y\cdot\sin x \Leftrightarrow a(\sin(xy)-\sin y\cdot\sin x)=0$

Bu tenglik barcha x,y lar uchun bajarilganligi bois, $a=0$ bo'ladi. Demak, $f(x)\equiv 0$.

Javob: $f(x)\equiv 0$.

7-misol. Barcha $x,y\in R$ lar uchun $f(x+y)-f(x-y)=4xy$ tenglamani qanoatlantiradigan $f:R\to R$ funksiyalar topilsin.

Yechilishi: $x+y=u$, $x-y=v$ deb olsak yangi $f(u)-f(v)=u^2-v^2$ tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamada $v=0$ desak $f(u)=u^2+f(0)$, ya'ni $f(x)=x^2+a$ funksiyani hosil qilamiz , bu yerda $a=f(0)$.

Bu funksiyani tenglamaga qo'yamiz:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

Javob: $f(x)=x^2+a$, $a=const$.

8-misol. Barcha $x, y \in R$ lar uchun $f(x+y)+f(x-y)=2x^2+2y^2$ tenglamani qanoatlantiradigan $f: R \to R$ funksiyalar topilsin.

Yechilishi: $y=0 \Rightarrow f(x)+f(x)=2x^2$, $f(x)=x^2$

Natijani berilgan tenglamaga qo'yamiz: $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

Javob: $f(x)=x^2$

9-misol. Barcha $x, y \in R$ lar uchun $f(x+y)+f(x-y)-2f(x)(1+y)=2xy(3y-x^2)$ tenglamani qanoatlantiradigan $f: R \to R$ funksiyalar topilsin.

Yechilishi:

1) $x=t$, $y=t \Rightarrow f(2t)+f(0)-2f(t)(1+t)=2t^3(3-t)$

2) $x=t$, $y=-t \Rightarrow f(0)+f(2t)-2f(t)(1-t)=2t^3(3+t)$

Hosil bo'lgan $\begin{cases} f(2t)-2f(t)(1+t)=6t^3-2t^4-f(0) \\ f(2t)-2f(t)(1-t)=6t^3+2t^4-f(0) \end{cases}$ sistemadan

$2f(t)(1+t-1+t)=4t^4$ tenglama hosil bo'lib, undan $f(t)=t^3$ ni topamiz.

$f(x)=x^3$ funksiya berilgan tenglamani qanoatlantirishini tekshiramiz:

$$(x+y)^3+(x-y)^3-2x^3(1+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-2x^3-2x^3y=$$

$$=3xy^2+3xy^2-2x^3y=6xy^2-2x^3y=2xy(3y-x^2)$$

Javob: $f(x)=x^3$

10-misol. Barcha $x, y \in R$ lar uchun $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$ tenglamani qanoatlantiradigan $f: R \to R$ funksiyalar topilsin.

Yechilishi:

1) $x=0,\ y=t \Rightarrow f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t$

2) $x=\frac{\pi}{2}+t$, $y=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\pi+t)+f(t)=2f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\cos\frac{\pi}{2}$

3) $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}+t \Rightarrow f(\pi+t)+f(1-t)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t$

Demak, $\begin{cases} f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t \\ f(\pi+t)+f(t)=0 \\ f(\pi+t)+f(-t)=-2f(\pi/2)\sin t \end{cases}$

Sistemaning ikkinchi tenglamasidan uchinchi tenglamasini ayirsak quyidagi sistemaga ega bo'lamiz: $\begin{cases} f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t \\ f(t)-f(-t)=2f(\pi/2)\sin t \end{cases}$.

Bu sistemaning tenglamalarini qo'shsak, $2f(t)=2f(0)\cos t+2f(\pi/2)\sin t$.

$a=f(0)$, $b=f(\pi/2)$ belgilashlardan so'ng $f(t)=a\cos t+b\sin t$ ga ega bo‘lamiz.

$f(x)=a\cos x+b\sin x$ funksiya berilgan tenglamani qanoatlantirishini tekshiramiz:

$$a\cos(x+y)+b\sin(x+y)+a\cos(x-y)+b\sin(x-y)=2a\cos x\cos y+2b\sin x\sin y=$$
$$=(2a\cos x+2b\sin y)\cos y$$

Javob: $f(x)=a\cos x+b\sin x$, $a=const$, $b=const$

11-misol. Barcha $x,y\in R$ lar uchun $f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y$ tenglamani qanoatlantiradigan $f:R\to R$ funksiyalar topilsin.

Ye**chilishi:**

$$\begin{aligned}
&1)\quad x=0,\ \ y=t \ \Rightarrow\ f(t)+2f(-t)=3f(0)-t\\
&2)\quad x=t,\ \ y=2t \ \Rightarrow\ f(3t)+2f(-t)=3f(t)-2t\\
&3)\quad x=t,\ \ y=-2t \Rightarrow\ f(-t)+2f(3t)=3f(t)+2t
\end{aligned}$$

Demak,

$$\begin{cases} f(t)+2f(-t)=3f(0)-t\\ f(3t)+2f(-t)=3f(t)-2t\\ f(-t)+2f(3t)=3f(t)+2t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(t)+2f(-t)=3f(0)-t\\ 3f(t)=3f(t)-6t \end{cases} \Rightarrow\quad f(t)=t+a,\quad a=f(0)$$

Ravshanki, $f(x)=x+a$ funksiya tenglamani qanoatlantiradi.

Javob: $f(x)=x+a$.

12-misol. Barcha $x,y\in R$ lar uchun $f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2$ tenglamani qanoatlantiradigan $f:R\to R$ funksiyalar topilsin.

Ye**chilishi:**

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad x=0,\ \ y=t \ \Rightarrow\ f(t)-2f(-t)+f(0)-2f(t)=t-2\\
&2)\quad x=t,\ \ y=2t \ \Rightarrow\ f(3t)-2f(-t)+f(t)-2f(2t)=2t-2\\
&3)\quad x=2t,\ \ y=t \Rightarrow\ f(3t)-2f(t)+f(2t)-2f(t)=t-2\\
&4)\quad x=t,\ \ y=t \ \Rightarrow\ f(2t)-2f(0)+f(t)-2f(t)=t-2
\end{aligned}\right\}$$

Bu yerdan $f(t)=t+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}$

Tekshiramiz:

$$x+y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}-2(x-y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3})+x+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}-2(y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3})=y-2\ \Rightarrow\ f(0)=1$$

Demak, $f(x)=x+1$.

Javob: $f(x)=x+1$.

Sonlar nazariyasiga oid masalalar tizimi

Bo'linish nazariyasining asoslari. Yevklid algoritmi. Arifmetikaning asosiy teoremasi. Tub sonlar. Ferma tub sonlari.

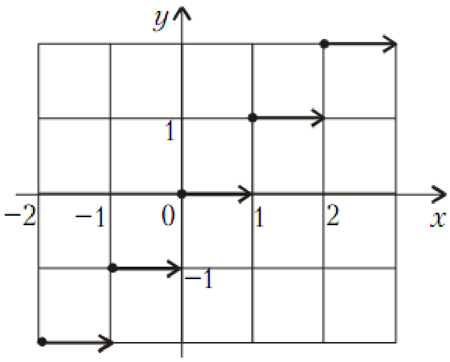
Taqqoslamalar nazariyasi. Ferma, Vilson va Eyler teoremalari. Qoldiqlar haqida Xitoy teoremasi. Kvadratik chegirmalar. Sonlar nazariyasining asosiy funksiyalari.

Diofant tenglamalari. Diofantning chiziqli tenglamalari va sistemalari. Yuqori darajali diofant tenglamalari. Katalan va Pell tenglamalari va boshqalar.

Ta'rif. Haqiqiy x sonning $[x]$ *butun qismi* deb, x dan katta bo'lmagan eng katta butun songa aytiladi.

Masalan, [-1,5]=-2, [-1]= -1, [0]=0, [1,5]=1, [π]=3.

Umuman olganda, ta'rifga binoan, $[x]=k$ tenglik quyidagini bildiradi: k son $k \le x < k+1$ shartni qanoatlantiradigan butun sondir.



1-rasm

$u=[x]$ funksiyaning grafigi zinasimon ko'rinishga ega (1-rasm).

$\{x\}=x-[x]$ tenglik bilan $x\in R$ sonining *kasr qismi* aniqlanadi.

Masalan, $\{-0,3\}=0,7,\ \left\{-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2},\ \left\{\sqrt{2}\right\}=\sqrt{2}-1,\ \{-2\sqrt{5}\}=2-\sqrt{2},\ \{1\}=0.$

Xossalar:

1) $[x]\le x;$ 2) $[x+a]=[x]+a,$ 3) $[x+y]\ge[x]+[y]$

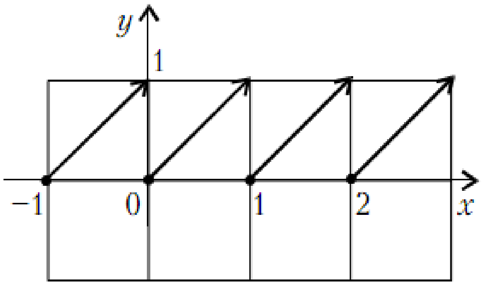
bu yerda a ixtiyoriy butun , x, y – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

3) $\{x\}=x$ tenglik $0\le x<1$ bo'lgandagina bajariladi;

4) $\{x\}=\{y\}$ tenglik $x-y=n$ (bu yerda n-butun son) bo'lgandagina bajariladi;

5) Ixtiyoriy x uchun $\{x+1\}=\{x\}$ bo'ladi.

Shunday qilib, $y=\{x\}$ funksiya eng kichik davri 1 ga teng bo'lgan davriy funksiyadir. Uning grafigi 2-rasmda keltirilgan.



2-rasm

1-masala. (II Soros olimpiadasi). $x^2-10[x]+9=0$ tenglamani yeching.

Ye**chilishi.** Faraz qilaylik, $[x]=k$ bulsin. $k\geq 0$ yekanligi tushunarli.

$x\geq k$ bo‘lganligi uchun $x\geq 0$. Natijada $x^2-10x+9\leq 0$ tengsizlikni hosil qilamiz.

Bundan $1\leq x\leq 9$ kelib chiqadi, bundan $1\leq k\leq 9$. x^2+9 son 10 ga bo‘linuvchi butun sondir. Tekshirishlar shuni ko‘rsatadiki, $1;\ \sqrt{61};\ \sqrt{71};\ 9$ sonlar tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $1;\ \sqrt{61};\ \sqrt{71};\ 9$. #

2-masala . $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=[x]$ tenglamani yeching.

*Ye***chilishi.** Faraz qilaylik, $[x]=k$. U holda

$$\begin{cases} k\leq \dfrac{2x+1}{3}<k+1 \\ k\leq x<k+1 \end{cases}$$

Teng kuchli sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-1}{2}\leq x<\dfrac{3k+2}{2} \\ k\leq x<k+1 \end{cases} \qquad (*)$$

Bundan k quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi kelib chiqadi:

$$\frac{3k-1}{2}<k+1,\quad k<\frac{3k+2}{2}.$$

Ya’ni: $-2<k<3$.

Shunday qilib, k -1; 0; 1; 2 qiymatlarga ega bo‘lishi mumkin. Ushbu qiymatlarni ketma-ket (*) sistemaga qo‘yib va hosil bo‘lgan tengsiziklarni yechib, quyidagi javobni topamiz.

Javob. $-1 \le x < -\frac{1}{2}; \quad 0 \le x < 2; \quad \frac{5}{2} \le x < 3.$ #

3-masala. $[x^2] = 2[x]$ tenglamani yeching.

Ye**chilishi.** Faraz qilaylik, $[x]= k$, $\{x\}=\alpha$. U holda $k\ge 0$, $\alpha \ge 0$ va

$$\left[(k+\alpha)^2\right] = 2[k+\alpha],$$

Shundan so‘ng quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$[2k\alpha + \alpha^2] = 2k - k^2$$

$k\ge 0$, $\alpha \ge 0$ bo‘lgani uchun bu tenglamaning chap tomoni manfiy emas.

Demak, $2k - k^2 \ge 0$ va k soni butun son bo‘lgani uchun u faqat 0, 1 yoki 2 qiymatlarga ega bo‘lishi mumkin.

$k=0$ bo‘lganda $0\le \alpha <1$. Bundan $[\alpha^2]=0$ ni hosil qilamiz. Demak, $0\le x<1$ kelib chiqadi.

$k=1$ bo‘lganda quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$[2\alpha + \alpha^2] = 1$$

Bu $1 \le 2\alpha + \alpha^2 < 2, \quad 0 \le \alpha < 1$ sistemani beradi, bundan $\sqrt{2} - 1 \le \alpha < 1, \quad \sqrt{2} \le x < 2$ kelib chiqadi.

Nihoyat, $k=2$ bo‘lganda $\left[4\alpha + \alpha^2\right] = 0$ tenglamaga ega bo‘lamiz, bu esa $0 < 4\alpha + \alpha^2 < 1, \; 0 < \alpha < 1$ sistemaga teng kuchlidir. Uning yechimi – $0 \le \alpha < \sqrt{5} - 2, \quad 2 \le x < \sqrt{5}$ kelib chiqadi.

Hosil bo‘lgan $0\le x<1$, $\sqrt{2} \le x < 2$ va $2 \le x < \sqrt{5}$ oraliqlarni birlashtirib javobni yozamiz.

Javob. $0 \le x < 1, \qquad \sqrt{2} \le x < \sqrt{5}$. #

4-masala. (V Soros olimpiadasi).

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,9 \\ y + [z] + \{x\} = 3,5 \\ z + [x] + \{y\} = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Ye**chilishi.** Faraz qilaylik, $a=[x]$, $\alpha=\{x\}$, $b=[y]$, $\beta=\{y\}$, $c=[z]$, $\gamma=\{z\}$, bu yerda a,b,s – butun sonlar, $0 \le \alpha < 1, \; 0 \le \beta < 1, \; 0 \le \gamma < 1.$ Ushbu belgilashlardan so‘ng sistema quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\begin{cases} a+\alpha+b+\gamma=3{,}9 \\ b+\beta+c+\alpha=3{,}5 \\ c+\gamma+a+\beta=2 \end{cases}$$

Tenglamalarni qo‘shib quyidagini hosil qilamiz:

$2(a+b+c+\alpha+\beta+\gamma)=9{,}4$,

ya’ni:

$a+b+c+\alpha+\beta+\gamma=4{,}7$

Hosil bo‘lgan tenglamadan birinchi, ikkinchi va uchinchi tenglamalarni ketma-ket ayirib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} c+\beta=0{,}8 \\ a+\gamma=1{,}2 \\ b+\alpha=2{,}7 \end{cases}$$

bundan $c=0$, $\beta=0{,}8$, $a=1$, $\gamma=0{,}2$, $b=2$, $\alpha=0{,}7$ yekanligi kelib chiqadi.

Javob. $x=1{,}7$; $u=2{,}8$; $z=0{,}2$. #

5-masala. Quyidagi ketma-ketlikni ko‘ramiz 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4, ... (Ketma-ketlikda bittta bir, ikkita ikki, uchta uch, to‘rtta to‘rt, beshta besh va xokazo). Qaysi son

a) 2002– nchi; b) n – nchi o‘rinda turadi?

Ye**chilishi.** Faraz qilaylik, $x_n=k$ - n – nchi had. Berilgan ketma-ketlikda k soni birinchi paydo bo‘lguncha qadar $1+2+3+\ldots+k-1=\dfrac{k(k-1)}{2}$ son ketma-ketligi yoziladi. Oxirgi k son $\dfrac{k(k+1)}{2}$ -nchi o‘rinda turadi. Shuning uchun

$$\frac{k(k-1)}{2}<n\le\frac{k(k+1)}{2}.$$

Bundan

$$k^2-k<2n\le k^2+k$$

kelib chiqadi.

Oxirgi hosil bo‘lgan tengsizlikning ung va chap kismiga $\frac{1}{4}$ ni qo‘shib quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$k^2-k+\frac{1}{4}<2n<k^2+k+\frac{1}{4},$$

$$(k-\frac{1}{2})^2<2n<(k+\frac{1}{2})^2.$$

U holda

$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<k+\frac{1}{2},$$

Bundan:

$$k<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<k+1.$$

Natijada,

$$x_n=\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right]$$

Berilgan ketma-ketlikning *n*-hadini hisoblash formulasini hosil qildik. Xususan, x_{2002}=63. #

E**slatma.** Berilgan *x* sondan kichik va *n* natural songa bo‘linadigan $k=\left[\frac{x}{n}\right]$ ta natural son mavjudligini aniqlash qiyin emas.

Bu sodda eslatma sonlar nazariyasi uchun muhim bitta formulani hosil qilish imkoniyatini beradi. Dastlab quyidagi masalani yechamiz.

6-masala . 100! son ikkining qaysi darajasiga bo‘linadi?

Y**echilishi.** 1,2,…,100 sonlar orasida quyidagilar mavjud:

$\frac{100}{2}=50$ ta juft son,

$\frac{100}{4}=25$ ta 4 ga karrali son.

$\left[\frac{100}{8}\right]=12$ ta 8 ga karrali son.

$\left[\frac{100}{16}\right]=6$ ta 16 ga karrali son.

$\left[\frac{100}{32}\right]=3$ ta 32 ga karrali son.

$\left[\frac{100}{64}\right]=1$ ta 64 ga karrali son.

Bundan $100!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdot\cdot100$ ko‘paytmada jami 50+25+12+6+3+1=97 ta 2 soni qatnashadi, ya’ni: 100! son 2^{97} bo‘linadi va 2^{98} ga bo‘linmaydi.

Javob. 97 . #

Bu masala natijasini umumlashtiramiz.

7-masala (Lejandr formulasi). $n!$ son p tub sonning qaysi darajasiga bo‘linadi?

Ye**chilishi.** Xuddi yuqorigidek, agar $p^m \le n < p^{m+1}$, bo‘lsa, u holda $n!$ ni kanonik yoyilmasida p ning daraja ko‘rsatkichi $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right]$ ga teng.

Ba’zi holda quyidagi yozuv qo‘llaniladi:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots,$$

chunki yozilgan yig‘indida biror joydan boshlab barcha qo‘shiluvchilar nolga teng bo‘ladi. #

8-masala . Agar x>0 va n natural son bo‘lsa, u holda $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$ bo‘lishini isbotlang.

Ye**chilishi.** Ravshanki, ($\alpha;\beta$) oraliqda $[\beta]-[\alpha]$ ta butun sonlar joylashgan. Haqiqatdan ham, agar m butun son $\alpha < m < \beta$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $[\alpha]+1 \le m < [\beta]$.

Huddi shunday, ($\alpha;\beta$) oraliqda $\left[\frac{\beta}{x}\right]-\left[\frac{\alpha}{x}\right]$ ta berilgan x>0 ga karrali sonlar joylashgan.

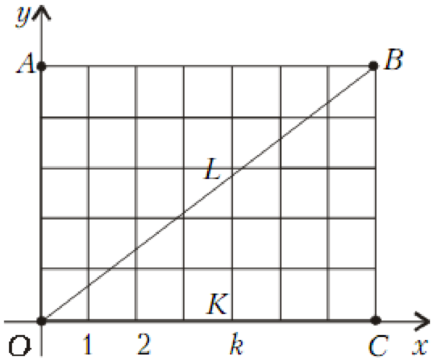
x dan kichik va n ga bo‘linadigan natural sonlarni ko‘ramiz. Bunday sonlar jami $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]-\left[\frac{0}{n}\right]$ ta. Ammo $[x]$ dan katta bo‘lmagan va n ga bo‘linadigan sonlar ham $\left[\frac{x}{n}\right]$ ta. Tenglik isbotlandi. #

9-masala . p va q –o‘zaro butun tub sonlar uchun

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

ekanligini isbotlang.

Yechilishi. XOY tekislikda butun koordinatali ($x;y$) nuqtalar to‘plamini ko‘ramiz, bunda $1 \le x \le q-1,\ 1 \le y \le p-1$ shart bajarilsin.



3-rasm

Bu to‘plam *OABC* to‘g‘ri to‘rtburchakning ichida yotib (3-rasm), jami $(p-1)(q-1)$ ta nuktalarga ega. Ushbu to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonalida *O* va *B* nuqtalardan boshqa butun koordinatalarga ega bo‘lgan nuqtalar mavjud emas. Haqiqatdan ham , agar butun koordinatali (*t; p*) nuqta *OB* da yotsa (bu yerda 1<m<*q*), u holda $tg\angle BOC=\frac{n}{m}=\frac{p}{q}$, ya’ni: *qn*= *mp*. *q* va *p* o‘zaro tub sonlar bo‘lganligi sababli *n* son *p* ga, *m* son esa q ga karrali, ya’ni, *m*≥*q*, *n*≥*p*. Ziddiyat. Shuning uchun *OBC* uchburchakda qaralayotgan butun koordinatali nuqtalarning teng yarmi, ya’ni $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ tasi yotadi.

Yendi biz ushbu miqdorni boshqacha usul bilan hisoblaymiz.

x=*k* (*k* – o‘zgaruvchi natural son) bo‘lsa, u holda *KL* kesmada jami $\left[\frac{p}{q}k\right]$ ta butun koordinatali nuqta yotadi (3 rasm).

$1\le x\le q-1,\ 1\le y\le p-1$ bo‘lgani uchun *k* sonni o‘zgartirib, uchburchakda yotgan butun koordinatali nuqtalar umumiy soni quyidagicha aniqlanadi:

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

Demak,

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

tenglik isbotlandi. #

Izoh. Xuddi shunday

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

formulani isbotlash mumkin.

10-masala (Xermit[1] formulasi). n - natural, x - haqiqiy sonlar uchun

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

tenglikni isbotlang.

Ye**chilishi.** n sonini fiksirlab,

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$$

funksiyani qaraymiz.

U holda $f(x+\frac{1}{n})=\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-[nx+1]$.

Ixtiyoriy butun k uchun $[x+k]=[x]$ formulani qo'llab barcha haqiqiy x qiymatlarida

$$f(x+\frac{1}{n})=f(x)$$

tenglik bajarilishini hosil qilamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'ladi va u $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$ oraliqda aynan nolga teng bo'lishini tekshirish qiyin emas.

Bundan $y=f(x)$ funksiya barcha haqiqiy x qiymatlarida nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. #

11-masala . $a)\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$; $\left\{(2+\sqrt{3})^{2002}\right\}>\underbrace{0{,}9\ldots9}_{1001}$ sonlar toq yekanligini isbotlang.

*Ye***chilishi.** $(2+\sqrt{3})^{2002}$ ifodada qavsni ochib $(2+\sqrt{3})^{2002}=A+B\sqrt{3}$ ni hosil qilamiz, bu yerda A va V – natural sonlar. Bundan

$$(2-\sqrt{3})^{2002}=A-B\sqrt{3}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{2002}}.$$

Bu holda

$$(2+\sqrt{3})^{2002}+(2-\sqrt{3})^{2002}=2A$$

bo'ladi.

Bundan

$$(2+\sqrt{3})^{2002}=2A-1+1-(2-\sqrt{3})^{2002}$$

kelib chiqadi.

[1] Charli Xermit (1822-1901 y.y.)- fransiyalik matematik.

Natijada, $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]=2A-1$ - toq son, ya'ni

$$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}=1-\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}$$

yekanligi kelib chiqadi.

Hosil bo'lgan tenglikning o'ng qismini baholaymiz:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}=\frac{1}{\left(7+2\sqrt{3}\right)^{1001}}<\frac{1}{10^{1001}}.$$

Shuning uchun $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>\underbrace{0,9...9}_{1001}$. #

<u>*Ta'rif*</u>. $\vartheta: N\to R$ nol bo'lmagan funksiya *multiglikativ* deyiladi, agar a, b o'zaro tub sonlar uchun $\vartheta(ab)=\vartheta(a)\vartheta(b)$ tenglik bajarilsa.

Misollar. a) $\vartheta(a)=1\ \forall a\in N$; b) $\vartheta(a)=a\ \forall a\in N$, b) $\vartheta(a)=a^{-1}\ \forall a\in N$ tengliklar bilan aniqlangan funksiyalar multiplikativ bo'ladi.

12-masala. $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$ -multiplikativ funksiyalar bo'lsin, u holda :

a) $\vartheta(1)=1$;

b) Multiplikativ funksiyalar $\vartheta_1\ \vartheta_2$ ko'paytmasi multiplikativ funksiya bo'ladi;

c) Agar $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ bo'lsa, u holda $\vartheta(a)=\vartheta(p_1^{\alpha_1})\ \vartheta(p_2^{\alpha_2})\dots\vartheta(p_n^{\alpha_n})$;

d) Agar $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ bo'lsa , u holda quyidagi *asosiy ayniyat* bajariladi.

$$\sum_{d|a}\vartheta(d)=\prod_{i=1}^{n}(1+\vartheta(p_i)+\vartheta(p_i^2)+...+\vartheta(p_i^{\alpha_i}))$$

Ye**chilishi.** a) ning isboti a va 1 soni o'zaro tub bo'lganidan kelib chiqadi.

b) a, b o'zaro tub sonlarni fiksirlaymiz. ϑ_1, ϑ_2 –multiplikativ funksiyalar uchun quyidagi tengliklar bajariladi:

$(\vartheta_1\ \vartheta_2)(ab)=\vartheta_1(ab)\vartheta_2(ab)=\vartheta_1(a)\vartheta_1(b)\ \vartheta_2(a)\vartheta_2(b)=(\vartheta_1\ \vartheta_2)(a)\ (\vartheta_1\ \vartheta_2)(b)$

Demak, ikkita multiplikativ funksiya ko'paytmasi multiplikativ funksiya bo'ladi. Induksiya usuli bilan ushbu mulohaza bir nechta ko'paytuvchilar uchun isbotlanishi ravshan.

c) ning rostligi $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$,…, $p_n^{\alpha_n}$ sonlarining o'zaro tubligidan kelib chiqadi.

d) Agar a natural sonining kanonik yoyilmasi $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ bo‘lsa, u holda a ning har qanday bo‘luvchisi $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_n^{\beta_n}$ yoyilmaga ega bo‘ladi, bunda

$0 \le \beta_k \le \alpha_k$, $k=1,2,...,n$.

c) dan quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\vartheta(p_i)+\vartheta(p_i^2)+...+\vartheta(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \sum_{0\le\beta_k\le\alpha_k}\vartheta(p_1^{\beta_1})\vartheta(p_2^{\beta_2})...\vartheta(p_n^{\beta_n}) = \sum_{0\le\beta_k\le\alpha_k}\vartheta(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}) = \sum_{d|a}\vartheta(d).$$

13-masala. $\theta(a)$ – ixtiyoriy multiplikativ funksiya uchun

$$\chi(a) = \sum_{d|a}\theta(d),$$

funksiya ham multiplikativ bo‘ladi.

Yechilishi.

$(a,b)=1$, $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $b = p_{k+1}^{\beta_1} p_{k+2}^{\beta_2} ... p_n^{\beta_n}$ bo‘lsin. U holda

Asosiy ayniyatga ko‘ra

$$\chi(ab) =$$

$$= \sum_{d|ab}\theta(d) = \prod_{i=1}^{n}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+...+\theta(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+...+\theta(p_i^{\alpha_i}))\prod_{i=k+1}^{n}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+...+\theta(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \theta(a)\theta(b)$$

#

Natija. Sonlar nazariyasida quyidagi multiplikativ funksiyalar katta ahamiyatga ega: a natural sonining natural bo‘luvchilar $\tau(a)$ soni va $\sigma(a)$ yig‘indisi.

Ular quyidagicha aniqlanadi: $\tau(a) = \sum_{d|a} 1$, $\sigma(a) = \sum_{d|a} d$

($\sum_{d|a}$ belgi a ning barcha bo‘luvchilar bo‘yicha yig‘indini bildiradi).

Asosiy ayniyat va geometrik progressiya hadlarining yig‘indisini ifodalovchi formula bilan foydalanib a natural sonining natural bo‘luvchilar $\tau(a)$ soni va $\sigma(a)$ yig‘indisi uchun

$\tau(a)=\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)$ va $\sigma(a)=\prod_{i=1}^{n}(1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right)$
formulalar o‘rinliligiga amin bo‘lamiz.

Haqiqatdan ham, $p_i^{\alpha_i}$ ning bo‘luvchilari $1, p_i, \ldots, p_i^{\alpha_i}$ bo‘lgani uchun

$\tau(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i+1$, $\sigma(p_i^{\alpha_i})=1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i}=\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$

bo‘ladi. Funksiyalarni multiplikativligidan

$$\tau(a)=\tau(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n})=\prod_{i=1}^{n}\tau(p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)$$

$$\sigma(a)=\sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n})=\prod_{i=1}^{n}\sigma(p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{n}(1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$ f

ormulalar kelib chiqadi.

14-masala. p va q – turli tub sonlar bo‘lsin. Quyidagi sonlar nechta natural bo‘luvchiga ega?

a) pq;

b) p^2q;

c) p^2q^2;

d) p^mq^n?

Y**echilishi.** a) Ravshanki, pq sonning bo‘luvchilari 1, p, q va pq sonlar bo‘ladi. Demak, $\tau(pq)=4$

b) p^2q sonning bo‘luvchilari 1, p, p^2, q, qp, qp^2 sonlar bo‘ladi. Demak, $\tau(p^2q)=6$

c) p^2q^2 sonning ikki qator bo‘luvchilarini yozamiz:

1, p, p^2,

1, q, q^2.

Qolgan bo‘luvchilar bu ikkita qatordagi aqalli bittadan olingan sonlarning ko‘paytmalaridan hosil bo‘ladi. Bunday sonlar jami 9 ta. Demak, $\tau(p^2q^2)=9$.

d) p^mq^n sonning ikki qator bo‘luvchilarini yozamiz:

1, p, p^2, ..., p^m,

1, q, q^2, ..., q^n.

Qolgan bo‘luvchilar bu ikkita qatordagi aqalli bittadan olingan sonlarning ko‘paytmalaridan hosil bo‘ladi. Bunday sonlar jami $(m+1)(n+1)$ ta. Demak, $\tau(p^m q^n) = (m+1)(n+1)$.

Javob:

a) 4;

b) 6;

c) 9;

d) $(m+1)(n+1)$. #

15-masala. Shunday natural sonlar topilsinki, ular aynan oltita natural bo‘luvchiga ega bo‘lib, bu bo‘luvchilarning yig‘indisi 3500 ga teng.

Ye**chilishi.** p natural son aynan oltita natural bo‘luvchiga ega bo‘lsa, u $p = p^5$

(bu yerda p – tub) yoki $n = p^2q$ (bu yerda p va q – turli tub sonlar) ko‘rinishga ega.

Birinchi holda

$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$ yoki $p(1 + p + p^2 + p^3 + p^4) = 3500 - 1 = 3499$.

3499 soni 2, 3, 5 va 7 ga bo‘linmaydi, shuning uchun $p > 10$. Bunda $p + (1 + p + p^2 + p^3 + p^4) > 10^5 > 3499$ tengsizlik o‘rinli.

Demak, bu hol o‘rinli bo‘lmaydi.

Ikkinchi holda $1 + p + p^2 + p + pq + p^2q = 3500$, ya’ni $(1+p+p^2)(1+q) = 5^3 \cdot 7 \cdot 4$.

Birinchi ko‘paytuvchi 2 ga va 5 ga bo‘linmaydi. (Bu uchun qoldiqlarni tekshirish yetarli).

$1 + p + p^2 > 1$ bo‘lgani uchun $1 + p + p^2 = 7$. Demak, $p = 2$ va $q = 499$. 2 va 499 sonlar tub bo‘lgani uchun $n = 2^2 \cdot 499 = 1996$. #

16-masala . 30 ga bo‘linadigan va aynan 30 ta turli bo‘luvchiga ega bo‘lgan natural sonlar topilsin.

Ye**chilishi.** $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$

bo‘lsin.

Bu son 30 ga bo‘linganligi uchun kanonik yoyilmaga albatta $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ va $p_3 = 5$ tub sonlar kiradi, demak $k \geq 3$.

Bundan $(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1)\dots(r_k+1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ va $k \leq 3$ kelib chiqadi. Demak, $k = 3$ va (r_1, r_2, r_3) uchlik 1, 2, 4 sonlarning o‘rin almashtirishlar natijasida hosil bo‘ladi. Bundan n uchun quyidagi qiymatlarni hosil qilamiz:

$2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$, $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5^4$, $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$, $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. #

17-masala . $\tau(1)+\tau(2)+...+\tau(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+...+\left[\frac{n}{n}\right]$ ni isbotlang.

Ye**chilishi.**

{1, 2, ..., *n*} to‘plamda *k* natural soniga bo‘linadigan sonlar $k, 2k, ..., \left[\frac{n}{k}\right]k$ ko‘rinishga ega bo‘lib, ularning umumiy soni $\left[\frac{n}{k}\right]$ ga teng.

Demak,

1 ga karrali sonlar jami $\left[\frac{n}{1}\right]$ ta;

2 ga karrali sonlar jami $\left[\frac{n}{2}\right]$ ta;

....

n ga karrali sonlar jami $\left[\frac{n}{n}\right]$ ta bo‘ladi.

Bularning yig‘indisi $\tau(1)+\tau(2)+\tau(3)+...+\tau(n)$ ga teng. #

Yana bitta foydali munosabatni isbotlaymiz.

18-masala . $\sigma(1)+\sigma(2)+...+\sigma(n)=\left[\frac{n}{1}\right]+2\left[\frac{n}{2}\right]+...+n\left[\frac{n}{n}\right].$

Ye**chilishi.** {1, 2, ..., *n*} to‘plamda *k* natural soniga bo‘linadigan sonlar $k, 2k, ..., \left[\frac{n}{k}\right]k$ ko‘rinishga ega bo‘lib, ularning umumiy soni $\left[\frac{n}{k}\right]$ ga teng. Shuning uchun aynan *k* ga teng bo‘lgan bo‘luvchilar yig‘indisi $k\left[\frac{n}{k}\right]$ ga teng.

Demak, 1 ga teng bo‘lgan bo‘luvchilar yig‘indisi $\left[\frac{n}{1}\right]=n$ ga , *2* ga teng bo‘lgan bo‘luvchilar yig‘indisi $2\left[\frac{n}{2}\right]$ ga , ..., *n* ga teng bo‘lgan bo‘luvchilar yig‘indisi $n\left[\frac{n}{n}\right]$ ga teng. Bularni hammasini qo‘shib chiqsak, isbotlanilayotgan tenglikning chap qismini hosil qilamiz. #

19-masala. Istalgan n uchun $\sigma(6n) \le 12\sigma(n)$ tengsizlikni isbotlang.

b) n ning qanday qiymatlarida $\sigma(6n) = 12\sigma(n)$ tenglik bajariladi?

Ye**chilishi.** a) n ning barcha bo'luvchilari $1 = d_1, d_2, ..., d_k = n$ bo'lsin. U holda $6n$ ning barcha bo'luvchilari $d_1, d_2, ..., d_k$, $2d_1, 2d_2, ..., 2d_k$, $3d_1, 3d_2, ..., 3d_k$, $6d_1, 6d_2, ..., 6d_k$ sonlar bo'ladi. Lekin ular orasida o'zaro tenglari bo'lishi mumkin. Agar n ning bo'luvchilari orasida 2 ham, 3 ham bo'lmasa, u holda ular orasida tenglari bo'lmaydi. Bundan, $\sigma(n) = d_1 + d_2 + ... + d_k$ bo'lgani uchun $\sigma(6n) \le \sigma(n) + 2\sigma(n) + 3\sigma(n) + 6\sigma(n) = 12\sigma(n)$.

b) $\sigma(6n) = 12\sigma(n)$ bo'lishi uchun n soni 2 ga ham, 3 ga ham bo'linmasligi kerak. #

20-masala. Ixtiyoriy $n \ge 2$ uchun

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right)$$

formula o'rinli.

Ye**chilishi.**

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 1 & , k \mid n \\ 0, & k \nmid n \end{cases},$$

demak ,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = \sum_{k \mid n} 1 = \tau(n).$$ #

Izoh. n tub bo'lganida $\tau(n) = 2$ bo'lgani uchun, qo'yidagiga ega bo'lamiz. n tub bo'lishi uchun

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right) = 2$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

21-masala. Ixtiyoriy $n \ge 2$ uchun

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right)$$

formula o'rinli.

Ye**chilishi.**

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 1 & , k \mid n \\ 0, & k \nmid n \end{cases},$$

demak ,

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=\sum_{k|n} k=\sigma(n)\ .\ \#$$

Izoh. n tub bo‘lganida $\sigma(n)=n+1$ bo‘lgani uchun, quyidagiga ega bo‘lamiz. n tub bo‘lishi uchun

$$\sum_{k=1}^{n} k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=n+1$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

$\varphi(x)$ orqali $\{1, 2, ..., x\}$ to‘plam ichida joylashgan va x soni bilan o‘zaro tub bo‘lgan sonlar sonini belgilaymiz.

Adabiyotlarda $\varphi(x)$ funksiya *Eyler*[2] *funksiyasi* deb yuritiladi.

p – tub son bo‘lsin. Yuqorida biz quyidagi tasdiqlarni isbotladik.

a) p dan kichik va u bilan o‘zaro tub bo‘lgan natural sonlar $p-1$ ta.

b) p^2 dan kichik va u bilan o‘zaro tub bo‘lgan natural sonlar p^2-p ta.

Demak, $\varphi(p)=p-1$, $\varphi(p^2)=p^2-p$.

Tub bo‘lmagan

$x=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$

sonlardagi Eyler funksiyasining qiymati quyidagicha hisoblanadi:

$$\varphi(x)=x\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Bu tenglikdan Eyler funksiyasi multiplikativ funksiya bo‘lishi hamda

$$\varphi(p^k)=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)=p^k-p^{k-1}$$

formula kelib chiqadi.

22-masala (Gauss ayniyati). $\sum_{d|x}\varphi(d)=x$ ayniyatni isbotlang.

Ye**chilishi.** $x=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$ **.** Multiplikativ funksiyalar uchun asosiy ayniyatga ko‘ra,

$$\sum_{d|x}\varphi(d)=(1+\varphi(p_1)+\varphi(p_1^2)+...+\varphi(p_1^{a_1})...=$$

$$=\{1+(p_1-1)+(p_1^2-p_1)+...+(p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1})\}...=$$

$$=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}=x\ .$$

[2] Eyler Leonard (1707-1783 y.y.) – shveytsariyalik matematik, mexanik, fizik, astronom. Kompleks ŏzgaruvchili funksiyalar nazariyasi va differentsial geometriya sohalarning asoschilaridan biri.

Ayniyat isbotlandi. #

23-masala. Quyidagi tengliklarni isbotlang.

a) φ (a) φ (b) = φ ((a, b)) φ ([a, b]);

b) φ (ab) φ ((a, b)) = φ (a) φ (b)(a, b).

Y**echilishi.** a) Multiplikativlikdan foydalanib, a va b sonlar bitta tub sonning darajalari bo‘lgan holni qaraymiz: a = p^α, b = p^β ($\alpha \geqslant \beta \geqslant$ 0). U holda φ (a) φ (b) = φ ((a, b)) φ ([a, b]) tenglik [a, b] = a = p^α, (a, b) = b =p^β tengliklardan kelib chiqadi.

b) Multiplikativlikdan foydalanib, a va b sonlar bitta tub sonning darajalari bo‘lgan holni qaraymiz: a = p^α, b = p^β ($\alpha \geqslant \beta \geqslant$ 0). Berilgan tenglik

φ ($p^{\alpha+\beta}$) φ (p^β) = φ (p^α) φ (p^β) p^β.

tenglikka tengkuchli. Bu tenglik esa $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}\left(p-1\right)$ tenglikdan kelib chiqadi. #

Foydalangan adabiyotlar

1. Yunusova D. Bo‘lajak matematika o‘qituvchisini innovatsion faoliyatga tayèrlash nazariyasi va amalièti. Monografiya. – Toshkent: Fan, 2009. – 165 b.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic : The IMO Compendium 1959-2009, Springer, 2011.
3. M. Becheanu : International Mathematical Olympiads 1959-2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001.
4. E. Lozansky, C. Rousseau : Winning Solutions, Springer-Verlag, New York, 1996.
5. E.J. Barbeau : Polynomials , Springer-Verlag, 2003.
6. Z. Cvetkovski : Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems , Springer, 2012.
7. T. Andreescu, D. Andrica : An Introduction to the Diophantine Equations, GIL Publishing House, Zalau, 2002.
8. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng : 104 Number Theory Problems, Birkhauser, Boston 2006
9. Sh. Ismailov, O. Ibrogimov. Tengsizliklar-II. Isbotlashning zamonaviy usullari. T.: ”Huquq va jamiyat”.2008.

2-amaliy mashg‘ulot

Mavzu: Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda kombinatorikaga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi. (2 soat)

Ishning maqsadi: Tinglovchilarga Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda taqdim etiladigan masalalar mavzulari hamda tanlangan mavzu bo‘yicha masalalar yechish metodikasi bilan tanishlirish

Amaliy mashg‘ulot topshiriqlari

Saralash kombinatorikasi. O‘rinlashtirishlar, o‘rin almashtirishlar, kombinatsiyalar. Shperner to‘plamlari.

Kombinator masalalar. Dirixle prinsipi. Ekstremal qoida. Juft-toqlik. Invariantlar. Bo‘yash va qoplashlar. Tortishlar va quyishlar. O‘yinlar va musobaqalar. Strategiyalar va algoritmlar.

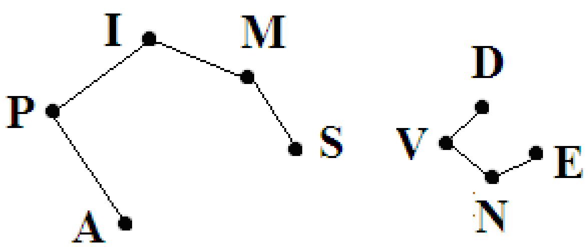
Graflar. Graflar nazariyasining tili. Graflarning eng sodda turlari va sonli xarakteristikalari. Dilvort teoremasi. Ramsey nazariyasi.

Masalalarni yechishda ob’ektlarni nuqtalar, ular orasidagi bog‘lanishlarni esa chiziqlar bilan tasvirlash ancha qo‘laylik tug‘diradi.

1-masala. Mahallada 9 ta xonadon bor. Ma’lumki, Ikrom va Alisher – Pulatning qo‘shnilari, Murod - Ikrom va Samandarning qo‘shnisi, Vali – Doniyor va Nozimning qo‘shnisi, Yerkin esa Nozimning qo‘shnisi. Boshqa qo‘shnilar yo‘q. Po‘lat devorlardan oshib Nozimnikiga bora oladimi?

(Umumiy devorga ega bo‘lgan honadonlar qo‘shni hisoblanadi.)

□ Xonadonlarni nuqtalar bilan tasvirlaymiz va qo‘shni honadonlarni kesishmaydigan chiziqlar bilan tutashtiramiz (1-rasm). Rasmdan Po‘lat devorlardan oshib Nozimnikiga bora olmasligi ko‘rinib turibdi.



1-rasm

■

Nuqtalar va ularning ayrimlarini tutushtirishgan chiziqlardan tashkil topgan shakl *graf* deyiladi. Nuqtalar grafning *uchlari*, tutashtiruvchi chiziqlar esa *qirralari* deyiladi.

Grafning qirra bilan tutashtirilgan ikkita uchi *qo'shni uchlar* deyiladi. Ikkita uchni tutashtirgan qirralar ketma-ketligi *yo'l* deyiladi.

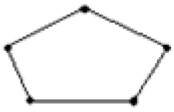
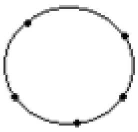
1-masalada grafning P va N uchlarini tutashtiruvchi yo'l mavjud emasligi isbotlangan.

Graflar nazariyasi hozirgi kunda matematikaning eng jadal rivojlanayotgan sohasiga aylandi. Graflar nazariyasi bo'yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo'llaniladi. Ulardan ba'zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o'yinlar; yo'llar, yelektr zanjirlari, integral sxemalar va boshqarish tizimlarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok-sxemalar va kompyuter dasturlarini tadqiq qilish va hokazo.

<u>**2-masala.**</u> 5 nafar bolalar guruhida har bir bola aynan 2 nafar bola bilan tanish bo'lishi mumkinmi?

□

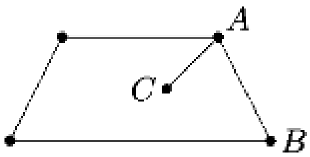
Tegishli graf chizaylik:

 yoki  .

Demak, masaladagi vaziyat bo'lishi mumkin yekan.

■

Graf uchidan chiqqan qirralar soni uning *darajasi* deyiladi. Masalan, 2-rasmda tasvirlangan grafda A uchning darajasi 3 ga, B uchning darajasi 2 ga, C uchning darajasi esa 1 ga teng.



2-rasm

Darajasi toq son bo'lgan uch *toq uch*, darajasi juft son bo'lgan uch *juft uch* deyiladi. 2-rasmdagi grafda faqat A va C uchlar toq uchlar, qolgan uchlar esa juft uchlar bo'ladi.

3- masala.

a) Firmada 50 ta kompyuter o‘rnatilgan. Ulardan ayrimlari sim bilan tutashtirilgan bo‘lishi kerak. Har bir kompyuterdan 8 ta sim chiqishi lozim bo‘lsa, jami nechta sim kerak?

b) Grafda 40 ta uch, har birining darajasi 7 ga teng. Grafning qirralari nechta?

c) Konsertda har bir ashulani birgalikda ikkita san’atkor ijro yetdi, bunda hech qanday juftlik sahnaga birgalikda bir martadan ko‘ chiqmagan. Jami bo‘lib konsertda 12 nafar san’atkor ishtirok yetdi, bunda har biri 5 marta ashula kuyladi. Jami nechta ashula ijro yetildi?

□

Javob: $a)$ 200 ta sim; $b)$ 140 ta qirra $c)$ 30 ta ashula

a) Simning ikkita uchi bor. Har bir kompyuterdan 8 ta sim chiqqan. Demak, jami $50\cdot 8=400$ ta uch va $\frac{400}{2}=200$ ta sim kerak.

b) Fikrimizda har bir qirrani sim deb, har bir uchni esa kompyuter deb faraz qilaylik. Bunda grafning qirralari soni $\frac{40\cdot 7}{2}=140$ ga teng.

c) Birga ijro yetgan ikki nafar san’atkorni qirra bilan tutashtiramiz. Har birining darajasi 5 ga teng bo‘lgan 12 ta uchli graf hosil bo‘ladi. Bunda har bir qirra bitta ashulaga mos. Oldingilarga ko‘ra grafning qirralari soni $\frac{12\cdot 5}{2}=30$ ga teng, ya’ni jami 30 ta ashula ijro yetildi. ■

Yuqoridagi masalaga o‘xshab mulohaza yuritsak quyidagi teoremani hosil qilamiz:

1-Teorema . *Grafning darajalari yig‘indisi qirralar sonining ikkalanganiga teng.*

□ Grafda n ta uch, har birining darajasi, ya’ni har biridan chiqqan qirralar soni $d_1, d_2, ..., d_n$ bo‘lsin. Har bir qirra ikkita uchni tutashtirgani uchun grafning qirralari soni $\frac{d_1+d_2+...+d_n}{2}$ ga teng. ■

Natija. *Grafdagi uchlar darajalari yig‘indisi juft bo‘ladi.*

4- masala. Grafning uchlari quyidagi darajalarga ega bo‘lishi mumkinmi: a) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;

b) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;

c) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

□

a) 8 ta uchi bor grafda 8 darajali uch mavjud bo‘lishi mumkin emas.

b) Agar har bir uch bilan tutashgan ikkita uch mavjud bo‘lsa, u holda qolgan uchlarning har biri darajasi 2 dan kichik bo‘la olmaydi.

c) Uchlarning darajalari yig‘indisi juft bo‘lishi kerak.

■

5-masala. Mahallaga 13 ta telefon o‘rnatilmoqda. Har bir telefon aynan 7 ta telefon bilan sim orqali ulanishi mumkinmi?

□

Mos bo‘lgan grafda 13 ta uchun bo‘lib, ulardan har biri darajasi 7 ga teng. Shu grafning darajalari yig‘indisi $13 \cdot 7 = 91$ toq songa teng. 2-teoremaning natijasiga ko‘ra bunday holat bo‘lishi mumkin emas.

■

6-masala. Mamlakatning har bir shahridan aynan 3 ta yo‘l chiqmoqda. Mamlakatda jami bo‘lib 100 ta yo‘l bo‘lishi mumkinmi?

□

Mamlakatda k ta shahar bo‘lsa, u holda jami $\frac{3k}{2}$ ta yo‘l bor. Bu ifoda esa hech qanday k uchun 100 ga teng bo‘lmaydi.

■

2-teorema. Ixtiyoriy grafda toq uchlar soni juft son bo‘ladi.
□ Teskarisini faraz qilaylik. Qandaydir grafda toq uchlar soni toq bo‘lsin. U holda shu *g*rafning darajalari yig‘indisi toq bo‘lishi shart. Bu esa oldingi teoremaning natijasiga zid. Demak, farazimiz notug‘ri, ya’ni ixtiyoriy grafda toq uchlar soni juft bo‘ladi. ■

Bu teorema graf uchlari darajalarining yig‘indisini hisoblamaslikka imkon beradi.

7-masala. Yer sayyorasida yashagan va toq marta qo‘l berib so‘rashgan insonlar soni juft yekanligini isbotlang.

□ Har bir insonni graf uchi deb faraz qilaylik. Agar u boshqa inson bilan qo‘l berib surashsa, shu ikki insonni qirra bilan tutashtiramiz. 2-teoremaga ko‘ra toq uchlar, ya’ni toq marta qo‘l berib so‘rashgan insonlar soni juft bo‘ladi. ■

Izoh. Bu masala 2-teoremaning o‘zginasi, faqat u boshqa tilda ifodalangan. Shuning uchun 2-teorema matematikada “Qo‘l berib so‘rashishlar haqidagi teorema” degan nom bilan mashhur.

8-masala. Sinfda 30 nafar o‘quvchi o‘qiydi. Shulardan 9 nafari 3 tadan, , 11 nafari - 4 tadan, 10 nafari esa 5 tadan do‘stga ega bo‘lishi mumkinmi?

□

30 ta uchli grafni qaraymiz. Bu holda 9 ta uchining darajasi 3 ga, 11 ta uchining darajasi 4 ga, 10 ta uchining darajasi 5 ga teng bo‘lishi kerak. Demak, toq uchlari soni $9+10=19$ ga teng. 19 – toq son bo‘lgani uchun bu holat 2-teoremaga zid.

■

9-masala. Mittiboy Disneylend parkidan kelib, u yerdagi ko‘lda 7 ta orol borligini hamda orollarning har biridan 1, 3 yoki 5 ta ko‘prik chiqqanini aytdi. Shu ko‘priklardan kamida biri ko‘lning tashqarisiga chiqqani rostmi?

□ Ha, to‘g‘ri. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni orollar ko‘prik orqali bir-bir bilan tutshtirilgan bo‘lib, hech qanday ko‘prik ko‘l tashqarisiga chiqmasin. Bu degani, hosil bo‘lgan grafda faqat 7 ta uch bo‘lib, ularning barchasining darajalari toq bo‘ladi (chunki 1,3 va 5 – toq sonlar). Bu esa 2-teoremaga zid.

■

10- masala. Tekislikda 9 ta kesma shunday chizilishi kerakki, ulardan har biri aynan 3 ta boshqa kesma bilan kesishsin. Bu ishni amalga oshirsa bo‘ladimi?

□

Mumkin emas. Har bir uchga kesmani mos qo‘yib, graf yasaymiz. Bunda agar ikkita kesma kesishsa, mos bo‘lgan uchlarni qirra bilan tutashtiramiz. Natijada hosil bo‘lgan grafda 9 ta toq uch bo‘lib, bunday grafning mavjudligi 2-teoremaga zid.

■

11- masala. Sinfdagi 10 nafar o‘g‘il bolalardan har biri 8 nafar sinfdosh qizlarga bittadan gul sovg‘a qildi. Har bir qiz 5 tadan gul olgan bo‘lsa, qizlar soni nechaga teng?

□ Vaziyatga mos grafda qirralar sonini aniqlaylik. 10 nafar o‘g‘il bolalardan har biri 8 tadan gul sovg‘a qilgani uchun, jami 80 ta gul sovg‘a qilindi. Har bir qiz 5 tadan gul olgan, demak jami 16 nafar qiz bo‘lgan.

■

12-masala. Sehrli mamlakatda Karabaslar va Barabaslar yashaydi. Har bir Karabas 6 ta Karabas va 9 ta Barabas bilan tanish. Har bir Barabas 10 ta Karabas va 7 ta Barabas bilan tanish. Mamlakatda kim ko‘proq: Karabaslarlarmi yo Barabaslarmi?

□

Har bir Karabasni unga tanish bo‘lgan Karabas va Barabas bilan qirra yordamida tutashtiramiz. U holda har bir Karabasdan 9 ta, har bir Barabasdan esa 10 ta qirra chiqadi. Demak, qirralar soni bir vaqtda Karabaslar sonidan 9 marta, Barabaslar sonidan esa 10 marta ko‘proq. Demak, Karabaslar soni Barabaslar sonidan $\frac{10}{9}$ marta ko‘proq bo‘ladi.

■

Topshiriq. 11- va 12- masalalarni graflar tiliga o‘giring.

Mashqlar.

1. Sinfda 20 nafar o‘quvchi bor. Sinfdagi har bir o‘g‘il bola har bir sinfdosh qizga bittadan gul sovg‘a qildi.

a) Eng ko‘pi bilan nechta gul sovg‘a qilingan?

b) Agar sinfda 21 nafar o‘quvchi bo‘lsa, javob qanday bo‘ladi?

2. Mamlakatda 100 ta shahar bor. Har bir shahardan 4 ta yo‘l chiqqan. Mamlakatda jami nechta yo‘l bor?

3. Mahallada 15 ta telefon bor. Shulardan 4 tasining har biri 3 ta boshqa telefonlar bilan ulangan, 8 tasining har biri 6 ta boshqa telefonlar bilan ulangan, 3 tasi har biri 5 ta boshqa telefonlar bilan ulangan bo‘lishi mumkinmi?

4. Grafning har bir uchidan 3 tadan qirra chiqmoqda. Undagi qirralar soni 2018 ta bo‘lishi mumkinmi?

5. Sehrli mamlakatda har qanday shahar aynan 5 ta boshqa shahar bilan aviareys orqali tutashtirilgan.

a) Mamlakatda 10 ta shahar bo‘lsa, aviareyslar sxemasini chizib bering.

b) Mamlakatda 50 ta shahar bo‘lsa, aviareyslar nechta bo‘ladi?

c) 46 ta aviareys bo‘lgan shahar mavjudmi?

6. Shahmat musobaqasida bir nechta shaxmatchi toq sondagi partiyalarni o‘ynashdi. Bunday shaxmatchilar soni juft yekanligini isbotlang.

7. Orolda 15 ta davlat bor. Ularning har birida kamida bitta qo‘shni davlat – hamkor davlat. Shunday davlat borki, undagi hamkor qo‘shni davlatlar soni juftligini isbotlang.

8. O‘zga sayyoraliklarda qo‘llari soni ihtiyoriy bo‘lishi mumkin. Bir kun ular barchasi qo‘llarini shunday tutashtirishdiki, bunda bo‘sh qo‘l qolmadi. Toq sondagi qo‘llarga ega bo‘lgan o‘zga sayyoraliklar soni juft yekanligini isbotlang.

9. 77 ta telefondan har biri aynan 15 ta telefon bilan ulangan. Bunday bo‘lishi mumkinmi?

10. Fermada har bir bola aynan 3 ta qo‘yga yem berdi. Har bir qo‘y 3 ta boladan yem olganini ma’lum bo‘ldi. Bolalar soni ko‘ylar soniga teng bo‘lishini isbotlang.

11. 6 ta kompyuterdan har ikkitasi o‘zining simi bilan tutashgan. Shu simlarni 5 ta turli rangga bo‘yamoqchi. Har bir kompyuterdan 5 ta turli rangdagi simlar chiqadigan bo‘yash mumkinmi?

Javoblar.

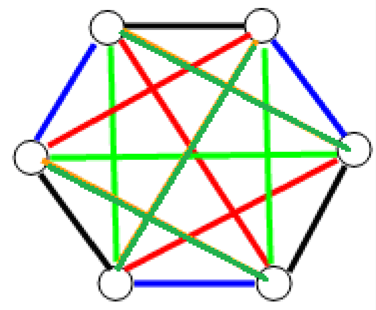
1. a) 100; b) 110

2. $100 \cdot 4 : 2 = 200$.

5. b) $50 \cdot 5 : 2 = 125$.

10. Har bir qo‘y va uni boqqan bola orasida ip tortamiz. Har bir qo‘ydan 3 ta ip, har bir boladan ham 3 ta ip chiqqan. Iplar soni bir vaqtda bolalar sonidan 3 marta, qo‘ylar sonidan ham 3 marta ko‘p. Demak, bolalar soni qo‘ylar soniga teng.

11.



Geometrik kombinator masalalardan namunalar

O‘quvchilarda matematikaga bo‘lgan qiziqishlarini orttirish, tayanch kompetensiyalarni shakllantirish uchun ta’lim jarayonida amaliy va nostandart xarakterdagi masalalardan foydalanmasdan bo‘lmaydi. Bunday masalalarni yechish o‘quvchilarda analiz, sintez, analogiya, umumlashtirish, deduksiya va induksiya kabi mantiqiy mushohada yuritish faoliyatini, intuitsiya, yegiluvchanlik va moslashuvchanlik kabi fazilatlarni rivojlantirib, o‘quvchilarni olingan natijalar ustida tanqidiy fikrlashga o‘rgatadi. Ko‘pincha nostandart xarakterdagi masalalarni yechimi darxol topilmasdan, bir necha bor urinishlar natijasidagina aniqlanishligi sababli, bu maqsadga yerishish uchun tirishqoq bo‘lishlikni, ya’ni shaxsning irodalilik kabi juda ahamiyatli sifatlarni tarkib topishiga imkon beradi. Va nihoyat, eng asosiysi: bunday masalalarni yechilishi o‘quvchilarga natijaga yerishilganlik bilan, va shuningdek yechim yo‘lining go‘zalligi va an’anaviy emasligi bilan bog‘liq bo‘lgan katta yemotsional zavq berilishi katta ahamiyatga ega. Quyida biz nisbatan yangi bo‘lgan yo‘nalish – kombinator geometriya masalalaridan namunalarni keltirmoqdamiz.

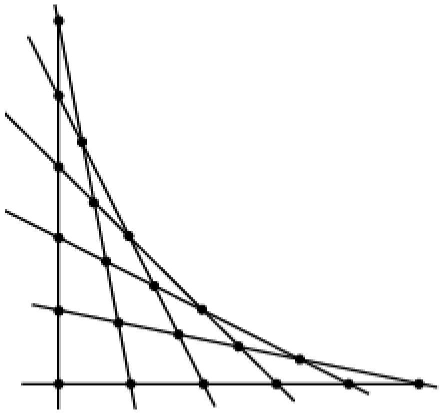
1. Tekislikda n ta nuqta shunday joylashganki, ulardan xech qaysi uchtasi bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. Shu nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo‘lib nechta to‘g‘ri chiziqlar o‘tadi?

Yechilishi. Masala shartini qanoatlantiradigan nuqtalarni $A_1, \ldots, A_n$ deb belgilaymiz. Bunday nuqtalar mavjud, misol tariqasida bitta aylanada yotgan n ta nuqtani olishimiz mumkin. A_1 nuqtani qolgan nuqtalar bilan $n – 1$ ta to‘g‘ri chiziq bilan tutashtirishimiz mumkin. Jami nuqtalar n ta bo‘lgani sababli, masala shartini qanoatlantiradigan to‘g‘ri chiziqlar soni $n(n – 1)$ ta bo‘lishi kerak. Ammo bunday sanashda biz har bir to‘g‘ri chiziqni ikki marta sanab chiqqanimiz bois n ta nuqtalarning turli juftliklaridan jami bo‘lib $\frac{n(n-1)}{2}$ ta to‘g‘ri chiziq o‘tishini hosil qilamiz.

Javob. $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. n ta to‘g‘ri chiziqlar eng ko‘pi bilan nechta nuqtada kesishishi mumkin?

Yechilishi. Ravshanki, n ta to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtalari soni eng katta bo‘lshi uchun quyidagi holat bo‘lishi kerak (rasmga qarang).



1) Har bir to‘g‘ri chiziq qolgan to‘g‘ri chiziqlardan har biri bilan kesishadi.

2) Xech qanday uchta to‘g‘ri chiziq bitta umumiy nuqtaga ega emas.

Bu holatda har bir to‘g‘ri chiziq qolgan to‘g‘ri chiziqlar bilan $n – 1$ ta kesishish nuqtadaga ega. Oldingi masaladek, jami bo‘lib $\frac{n(n-1)}{2}$ ta nuqtaga ega bo‘lamiz.

Javob. $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Bitta nuqtada kesishadigan n ta tug‘ri chiziq tekislikni nechta qismga ajratadi?

Javob. $2n$.

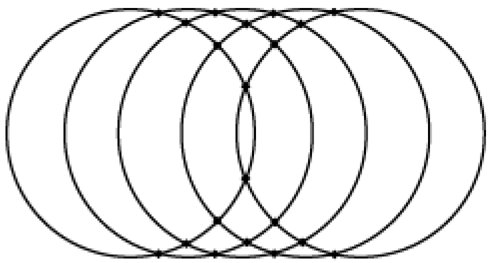
4. n ta o‘zaro kesishadigan to‘g‘ri chiziqlardan xech qaysi uchtasi umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa, tekislikni nechta qismga ajratadi?

Yechilishi. Bir nechta berilgan to‘g‘ri chiziqqa bittasini qo‘shsak tekislik qismlari nechtaga ko‘payishini aniqlaymiz. Masalan, ikkita o‘zaro kesishadigan to‘g‘ri chiziqqa uchinchi to‘g‘ri chiziqni qo‘shsak, mavjud to‘rtta tekislik qismlardan uchtasi yangi to‘g‘ri chiziq bilan teng ikkiga bo‘linadi. Demak, hosil bo‘lgan tekislik qismlari soni 7 = 4 + 3 ga teng bo‘ladi.

Umumiy holda, n – 1 ta to‘g‘ri chiziqqa n-chi to‘g‘ri chiziqni qo‘shsak, mavjud tekislik qismlaridan n – 1 tasi yangi to‘g‘ri chiziq bilan teng ikkiga bo‘linadi. Shuning uchun yangi hosil bo‘lgan tekisliklar qismlari soni n ga ko‘payadi. Demak, n ta o‘zaro kesishadigan to‘g‘ri chiziqlardan xech qaysi uchtasi umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa, tekislikni 4 + 3 +… + n $=\frac{(n+1)n}{2}+1$. ta qismga ajratadi.

5. n ta aylana eng ko‘pi bilan nechta kesishish nuqtaga ega bo‘lishi mumkin?

Yechilishi. Ravshanki, n ta aylanalarning kesishish nuqtalari soni eng katta bo‘lshi uchun quyidagi holat bo‘lishi kerak (rasmga qarang).



1) Har bir aylana qolgan aylanalardan har biri bilan kesishadi.

2) Xech qanday uchta aylana bitta umumiy nuqtaga ega emas.

Bu holatda har bir aylana qolgan aylanalar bilan 2(n – 1) ta kesishish nuqtadaga ega. Demak, jami bo‘lib n(n – 1) ta nuqtaga ega bo‘lamiz.

6. n ta aylanadan har biri qolgan aylanalardan har biri bilan kesishib, bunda xech qanday uchta aylana bitta umumiy nuqtaga ega emas bo‘lsin. Bu aylanalar

tekislikni nechta qismga ajratadi?

Yechilishi. Bir nechta berilgan aylanaga bittasini qo‘shsak tekislik qismlari nechtaga ko‘payishini aniqlaymiz. Masalan, ikkita o‘zaro kesishadigan aylanaga uchinchi aylanani qo‘shsak, mavjud to‘rtta tekislik qismlari yangi to‘g‘ri chiziq bilan teng ikkiga bo‘linadi. Demak, hosil bo‘lgan tekislik qismlari soni 8 =4 + 4 ga teng bo‘ladi. Yendi shu uchta aylanaga to‘rtinchisini qo‘shsak mavjud oltita tekislik qismlari yangi to‘g‘ri chiziq bilan teng ikkiga bo‘linadi. Demak, hosil bo‘lgan tekislik qismlari soni 14 =8 + 6 ga teng bo‘ladi.

Umumiy holda, $n-1$ ta to‘g‘ri chiziqqa n-chi to‘g‘ri chiziqni qo‘shsak, mavjud tekislik qismlaridan $n-1$ tasi yangi to‘g‘ri chiziq bilan teng ikkiga bo‘linadi. Shuning uchun yangi hosil bo‘lgan tekisliklar qismlari soni $2(n-1)$ ga ko‘payadi. Demak, n ta o‘zaro kesishadigan to‘g‘ri chiziqlardan xech qaysi uchtasi umumiy nuqtaga ega bo‘lmasa, tekislikni

$$4 +4 + 6+ \dots +2(n-1) = 2(2 +2 + 3 + \dots +(n-1) = n(n-1) +2$$

ta qismga ajratadi.

7. n-burchak nechta diagonalga ega?

Ko‘pburchak uchlarini $A_1, \dots, A_n$ deb belgilaymiz. A_1 nuqtadan 3 ta diagonal o‘tadi. Demak, n ta nuqtadan $\dfrac{n(n-3)}{2}$. ta diagonal o‘tadi.

Javob. $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

7. Diagonallar soni tomonlari soniga teng bo‘lgan ko‘pburchaklar mavjudmi?

$\dfrac{n(n-3)}{2}=n,$ tenglikdan $n = 5$ yekanligi kelib chiqadi.

8. To‘g‘ri chiziq uchburchakning barcha tomonlarini kesib o‘ta oladimi?

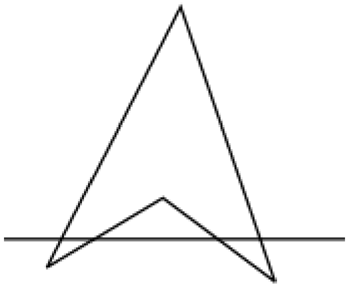
Geometriya aksiomalariga ko‘ra har bir to‘g‘ri chiziq tekislikni yarimtekislikka bo‘ladi. Bunda agar ikki nuqta tekislikning turli yarimtekisliklarga tegishli bo‘lsa, u holda ularni tutashtiruvchi kesma shu to‘g‘ri chiziq bilan kesishadi. Agar ikki nuqta tekislikning bitta yarimtekislikga tegishli bo‘lsa, u holda ularni tutashtiruvchi kesma shu to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi.

To‘g‘ri chizig‘imiz ABC uchburchakni AB va AC tomonlarini kessin. Bu holda A va B nuqtalar turli yarimtekisliklarida yotadi. A va C nuqtalar ham bu to‘g‘ri chiziqdan turli yarimtekisliklarda yotadi. Shuning uchun B va C nuqtalar bitta yarimtekislikda yotadi va BC kesma bu to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi.

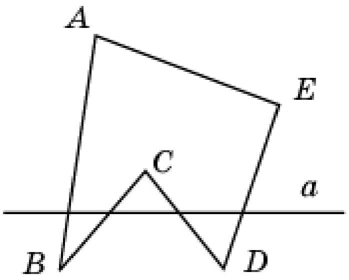
Javob: yo‘q.

9. To‘g‘ri chiziq to‘rtburchakning barcha tomonlarini kesib o‘ta oladimi?

Javob: Ha. Rasmga qarang.



10. To‘g‘ri chiziq to‘rtburchakning barcha tomonlarini kesib o‘ta oladimi?



a to‘g‘ri chiziq *ABCDE* beshburchak *AB*, *BC*, *CD* va *DE* tomonlarini kessin (rasmga qarang). *a* to‘g‘ri chiziq *AE* tomonni kesa olmasligini ko‘rsatamiz. Haqiqatdan ham, *A* va *B*, *B* va *C*, *C* va *D*, *D* va Ye nuqtalar *a* to‘g‘ri chiziq hosil qilgan turli yarimtekisliklarda yotadi. Demak, *A* va Ye nuqtalar *a* to‘g‘ri chiziq hosil qilgan bitta yarimtekislikda yotadi. Shuning uchun *AE* kesma *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi.

Foydalangan adabiyotlar

1. Yunusova D. Bo‘lajak matematika o‘qituvchisini innovatsion faoliyatga tayèrlash nazariyasi va amalièti. Monografiya. – Toshkent: Fan, 2009. – 165 b.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic : The IMO Compendium 1959-2009, Springer, 2011.
3. M. Becheanu : International Mathematical Olympiads 1959-2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001.
4. E. Lozansky, C. Rousseau : Winning Solutions, Springer-Verlag, New York, 1996.
5. T. Andreescu, Z. Feng : 102 Combinatorial Problems, Birkhauser Boston, 2002.

3-amaliy mashg‘ulot

Mavzu: Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda geometriyaga oid masalalar tizimi va ularni yechish metodikasi. (2 soat)

Ishning maqsadi: Tinglovchilarga Xalqaro matematika olimpiadalari va musobaqalarda taqdim etiladigan masalalar mavzulari hamda tanlangan mavzu bo‘yicha masalalar yechish metodikasi bilan tanishlirish

Amaliy mashg‘ulot topshiriqlari

Klassik geometriya. Uchburchaklar geometriyasi. Ko‘pburchaklar, aylanalar. Geometrik tengsizliklar.

Analitik geometriya. Koordinatalar metodi. Vektorlar va ularning qo‘llanilishi. Massalar geometriyasi. Geometriyada kompleks sonlar.

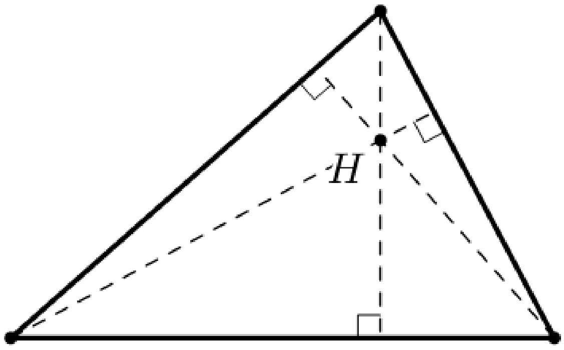
Sintetik geometriya. Geometrik almashtirishlar. Harakat. Shal teoremasi. O‘xshashlik. Gomotetiya . Almashtirishlar kompozitsiyalari. Inversiya. Affin va proektiv almashtirishlar.

Kombinator geometriya. Qavariq shakllar. Qavariq qobiq. Xelli teoremasi. Shperner lemmasi

“Uchburchakning ajoyib nuqtalari” iborasini ma’nosini yoritishga harakat qilamiz. Barchamizga ma’lumki, uchta uchburchak ichki burchaklar bissektrisalari nuqtalarda bir nuqtada, ya’ni ichki chizilgan aylana markazida kesishadi. Xuddi shunday uchburchak medianalari va balandliklari, hamda tomonlarning o‘rta perpendikulyarlari bir nuqtada kesishishi ma’lum. Hosil bo‘lgan barcha nuqtalar ajoyib nuqtalar deb ataymiz. Ularning ajoyibligi shunda bilinib turibdiki, mos bo‘lgan uchta to‘g‘ri chizik odatdagidek uchta nuqtada emas, balkim bitta nuqtada kesishadi.

Balandliklar kesishish nuqtasi (ortomarkaz)

Ta’rif. Uchburchak balandliklarining kesishish nuqtasi uchburchakning ortomarkazi deyiladi.

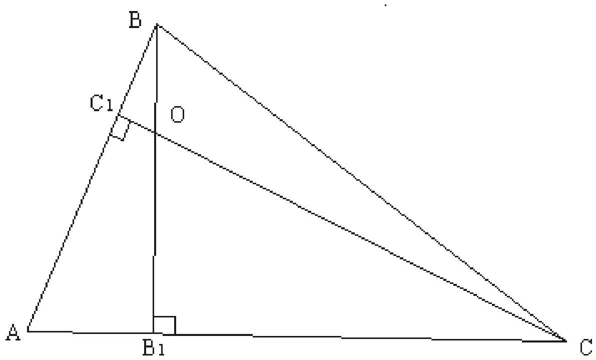


1-masala. ABC uchburchakning ortomarkazi BB_1 balandlikni uchdan bo‘ylab a va b kesmalarga ajratib, ularning nisbati $\frac{a}{b}=\frac{\cos\angle B}{\cos\angle A\cos\angle C}$ ga teng bo‘ladi.

Y**echilishi.** ABC uchburchakda BB_1 va CC_1 -balandliklar, O –ularning kesishish nuqtasi bo‘lsin.

1) $\Delta\ BC_1O$ – to‘g‘ri burchakli uchburchak, va

$$BO=\frac{BC_1}{\cos\angle ABO}=\frac{BC_1}{\cos\left(90^0-\angle A\right)}=\frac{BC_1}{\sin\angle A}.$$



2) $\Delta\ BC_1C$ – to‘g‘ri burchakli uchburchak, va

$BC_1=BC\cos\angle B=a\cos\angle B\Rightarrow$

$$\Rightarrow BO=\frac{a\cos\angle B}{\sin\angle A}=\frac{b\cos\angle B}{\sin\angle B}=\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}$$

Chunki sinuslar teoremasiga ko‘ra $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{c}{\sin\angle C}$.

3)

$$OB_1=BB_1=BO=c\sin\angle A=\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}=\frac{c(\sin\angle A\sin\angle B)}{\sin\angle C}=\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}.$$

4)

$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{b\cos\angle B}{\sin\angle A}:\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}=\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}:\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}.$$

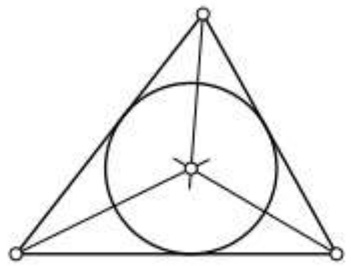
Bu yerdan

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{\cos\angle B}{\cos\angle A \cos\angle C}. \qquad (*)$$

Y*eslatma*. Agar burchaklardan biri o'tmas bo'lsa, (*) dagi mos bo'lgan kosinusning moduli olinadi.

Bissektrisalar kesishish nuqtasi (imarkaz)

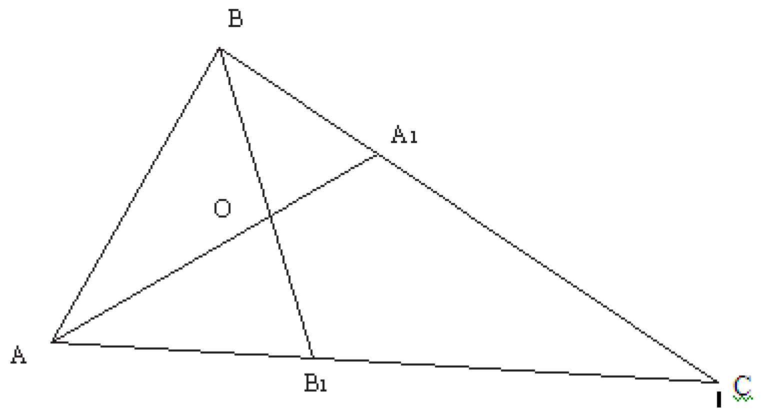
Ta'rif. Bissektrisalar kesishish nuqtasi imarkaz deb ataladi.



2-masala. Agar O – ABC uchburchakning imarkazi bo'lsa, u holda

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a},$$

bu yerda AA_1 – bissektrisa, $AB = c, BC = a, CA = b$.



Y**echilishi.**

1) $\Delta\ ABC$ da AA_1 – bissektrisa , shuning uchun

$AB : AC = BA_1 : CA_1 = BA_1 : (BC - BA_1)$ va $BA_1 = \dfrac{ac}{b+c}$.

2) $\Delta\ ABA_1$ da BO – bissektrisa , shuning uchun

$AO : OA_1 = BA : BA_1$ va $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{b+c}{a}$. (**)

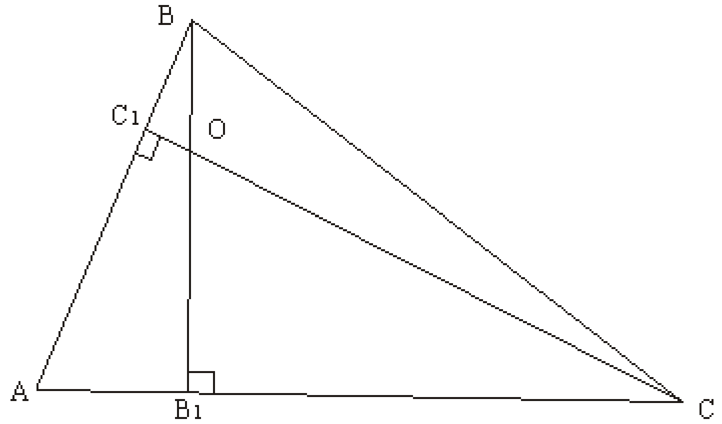
Uchburchak uchidan ortomarkaz va imarkazgacha bo'lgan masofalar.

Dastlab uchburchak uchidan ortomarkazgacha bo'lgan masofani topamiz.

3-masala. ABC uchburchakda BB_1 va CC_1 -balandliklar, O –ularning kesishish nuqtasi bo‘lsin.

OB ni toping.

Y**echilishi.**



1-masaladagi 2 -qadamidan $BO = b|ctg\angle B| = 2R|\cos\angle B|$

Kelib chiqadi. Sodda hisob-kitoblardan so‘ng

$$BO = \frac{|\cos\angle C|}{\sin\angle A \sin\angle B} BB_1$$

formulani hosil qilamiz.

4-masala. Agar *ABC* uchburchakda $AC = 5\sqrt{7},\ CB = 4\sqrt{7},\ BA = 6\sqrt{7}$ bo‘lsa *B* uchdan balandliklarning kesishish nuqtasigacha bo‘lgan masofani toping.

Y**echilishi.**

Kosinuslar teoremasidan $\cos B = \frac{6}{16}$. Demak, $\sin B = \frac{5\sqrt{7}}{16}$, $ctgB = \frac{9}{5\sqrt{7}}$.

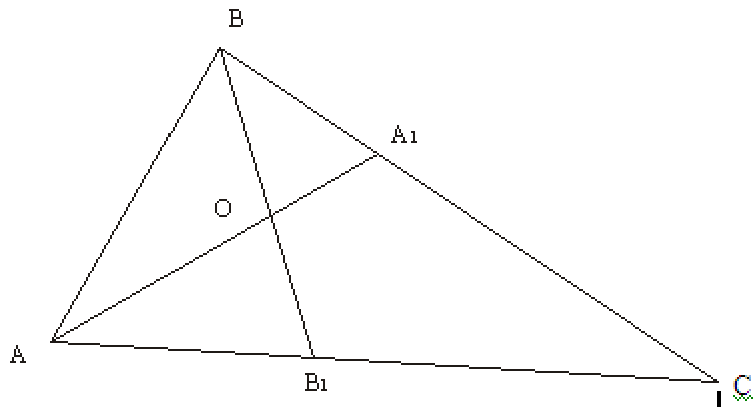
Shuning uchun *BO* = 9.

***Ye**ndi uchburchak uchidan imarkazgacha bo‘lgan masofani topamiz.

5-masala. *ABC* uchburchakda *AB* = *c*, *BC* = *a*, *CA* = *b*, AA_1 - bissektrisa, *O* – bissektrisalar kesishish nuqtasi bo‘lsin.

AO ni toping.

Y**echilishi.**



2-masaladan $AO=\dfrac{b+c}{a+b+c}AA_1$.

$AA_1=\sqrt{\dfrac{ab(b+c-a)(a+b+c)}{b+c}}$ bo‘lgani uchun

$$AO=\sqrt{\frac{cb(b+c-a)}{b+c+a}}=\sqrt{\frac{cb(p-a)}{p}\left(p-\frac{a+b+c}{2}\right)}$$

*Ye***slatma.** $AO^2 = bc - 4Rr$ formula ham o‘rinli, bu yerda R va r – mos ravishda ABC ga tashqi va ichki chizilgan aylanalar radiuslari .

6-masala. ABC uchburchakda $AB = 8$ sm, $BC = 7$ sm, $CA = 6$ sm. A nuqtadan bissektrisalar kesishish nuqtasigacha bo‘lgan masofani toping.

Ye**chilishi.**

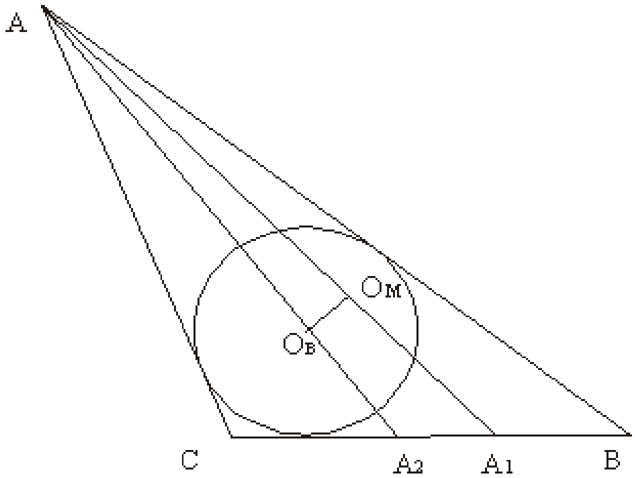
Ravshanki $AA_1 = 6$ sm. 2-masaladan foydalanamiz:

$$AO=\frac{b+c}{a+b+c}AA_2=4см.$$

Ajoyib nuqtalar orasidagi masofalar

Yeslatamiz, medianalar kesishish nuqtasi uchburchakning og‘irlik markazi deb yuritiladi. Imarkaz va og‘irlik markazi orasidagi masofani topamiz.

7-masala. ABC uchburchakda O_B va O_M nuqtalar mos ravishda ichki chizilgan aylana markazi va medianalar kesishish nuqtasi bo‘lsin. O_BO_M. ni toping.



***Ye*chilishi.**

$\overline{AC}=\overline{b},\ \overline{AB}=\overline{c},\ \angle CAB=\alpha.$

1) Medianalar hossalariga ko‘ra $\overline{AO_M}=\frac{2}{3}\overline{AA_1}=\frac{2}{3}\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}=\frac{\overline{b}+\overline{c}}{3}.$

2) 2-masaladagi (**) formulaga ko‘ra

$AO_B : O_BA_2 = (b+c) : a$, shuning uchun $AO_B : AA_2 = (b + c) : (b + c + a)$.

Uchburchak bissektrisasi hossasiga ko‘ra $AC : AB = CA_2 : A_2B$,

ya’ni $CA_2=\frac{b\cdot CB}{b+c}$.

Demak,

$$\overline{AO_B}=\frac{b+c}{a+b+c}\overline{AA_2},$$

$$\overline{AA_2}=\overline{AC}+\overline{CA_2}=\overline{b}+\frac{b}{b+c}\overline{CB}=\frac{c}{b+c}\overline{b}+\frac{c}{b+c}\overline{c}.$$

Bundan $\overline{AO_B}=\frac{c}{a+b+c}\overline{b}+\frac{b}{a+b+c}\overline{c}.$

3) Rasmdan $\overline{O_MO_B}=\frac{1}{3(a+b+c)}\left((2c-a-b)\overline{b}+(2b-a-c)\overline{c}\right).$

4) Vektorlarning skalyar kvadrati uchun $2bc\cos\alpha = b^2+c^2 - a^2$.

Bundan

$$O_MO_B^2=\frac{4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{9(a+b+c)^2}+\frac{-5abc(a+b+c)+ab^2+a^2b+ac^2+a^2c}{9(a+b+c)^2}+$$

$$+\frac{bc^2+b^2c-a^4-b^4-c^4}{9(a+b+c)^2}.$$

Soddalashtirishlardan so‘ng $O_MO_B^2=\frac{p^2+5r^2-16Rr}{9}$, bu yerda R va r – mos ravishda *ABC* ga tashqi va ichki chizilgan aylanalar radiuslari .

Yendi hisoblashga doir masalani yechamiz.

8-masala. $AC = 6$, $AB = 8$, $BC = 7$. Ichki chizilgan aylana markazi va medianalar kesishish nuqtasi orasidagi masofani toping.

Yechilishi.

2 –masalaga ko‘ra $AO_B : O_BA_2 = 14 : 7 = 2 : 1$ va $OA_B : AA_2 = 2 : 3$.

Bissektrisa hossasidan $AC : AB = CA_2 : A_2B$, ya’ni $CA_2 = \dfrac{3CB}{7}$.

Demak, $\overline{AO_B} = \dfrac{8}{21}\bar{b} + \dfrac{6}{21}\bar{c}$. $\overline{O_MO_B} = \dfrac{1}{21}\left(\bar{b} - \bar{c}\right)$.

Vektorning skalyar kvadrati uchun $2bc\cos\alpha = b^2+c^2 - a^2$.

Ammo $2bc\cos\alpha = 51$, demak $\left(O_MO_B\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.

Javob: $O_MO_B = \dfrac{1}{3}$.

Izoh. Bu masalada $O_MO_B \in A_1A_2$, chunki $OA_B : AA_2 = 2 : 3 = AO_M : AA_1$.

$$\text{Demak,}\ \ O_MO_B = \frac{2A_2A_1}{3} = \frac{2\left(CA_1 - CA_2\right)}{3},\ O_MO_B = \frac{1}{3}.$$

9-masala. *ABC* uchburchakda O_B va O_M nuqtalar mos ravishda ichki chizilgan aylana markazi va medianalar kesishish nuqtasi bo‘lsin.

Vektor tushunchasidan foydlanmasdan O_BO_M. ni toping.

Yechilishi.

1) $AA_1 = m_a$, $AO_M = \dfrac{2AA_1}{3}$.

2) Bissektrisani topamiz:

$AA_2 = l_a$ bo‘lsa , 2-masaladan $CA_2 = \dfrac{ab}{b+c}$; $AO_B = \dfrac{(b+c)l_a}{a+b+c}$.

3) $A_1A_2 = CA_1 - CA_2 = \dfrac{ac}{2(b+c)}$.

4) □ ΔA_1AA_2 da barcha tomonlar uzunligi ma’lum, shuning uchun A_1AA_2 burchak kosinusini topish mumkin.

5) $\Delta\ O_MAO_B$ da kosinuslar teoremasidan foydalanib O_MO_B ni topamiz.

10-masala. $AC = 9$, $AB = 18$, $BC = 21$. O_MO_B – ?

Yechilishi.

1) Mediana $AA_1 = 1{,}5\sqrt{41}$ va $AO_M = \sqrt{41}$.

2) Bissektrisa $AA_2 = 8$; $CA_2 = 7$; $AO_B = \dfrac{9}{2}$.

3) Bundan $A_1A_2=\frac{7}{2}$.

4) Xuddi shunday $\triangle A_1AA_2$: $\cos A_1AA_2=\frac{6}{\sqrt{41}}$.

5) $\Delta\ O_MAO_B$ da kosinuslar teoremasidan foydalanib $O_MO_B^2=\frac{29}{4}$ ni topamiz.

Javob: $O_MO_B=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

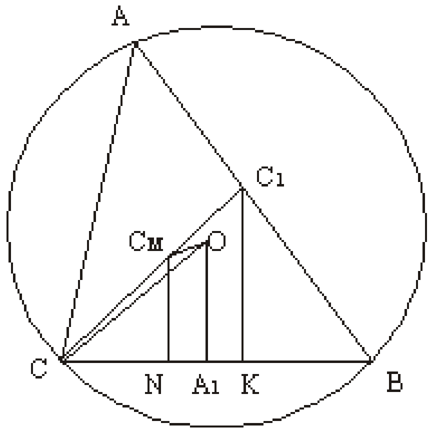
11-masala. Tashqi chizilgan aylana markazi va medianalar kesishish nuqtasi orasidagi masofani toping.

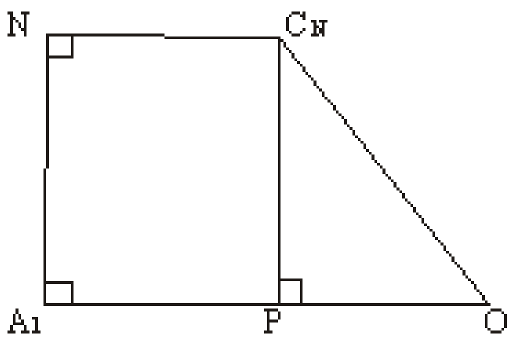
Yechilishi.

O – tashqi chizilgan aylana markazi, *OM* – medianalar kesishish nuqtasi, A_1 va C_1 mos ravishda *AB* va *BC* tomonlarning o‘rtalari bo‘lsin .

1) $\Delta\, C_1KB$ da $BC_1=\frac{c}{2},\ C_1K=0{,}5c\sin\beta,\ KB=0{,}5c\cos\beta.$

U holda $CK=a-0{,}5c\cos\beta$





2) $\Delta\ CC_1K$ va $\Delta\ CO_MN$ o‘xshash. Bundan $CN : CK = NO_M : KC_1 = 2 : 3$,

va $CN=\frac{2}{3}a-\frac{c\cos\beta}{3},\ NO_M=\frac{c\sin\beta}{3}=\frac{bc}{6R}\ \left(\sin\beta=\frac{b}{2R}\right)$.

3) 2) dan

$$NA_1=CA_1-CN=\ldots=\frac{2c\cos\beta-a}{6}.$$

4) $\angle A=\alpha,\ \angle COB=2\alpha,\ \angle COA=\alpha,\ OA_1=R\cos\alpha$.

5) $OP=OA_1-NO_M=R\cos\alpha-\frac{bc}{6R}=\frac{6R^2\cos\alpha-bc}{6R}$.

6) $\Delta\ OPO_M$ da Pifagor teoremasiga ko‘ra

$$O_MO^2=O_MP_2^2+PO^2=A_1N^2+PO^2=\frac{r^2(2c\cos\beta-a)^2+(6R^2\cos\alpha-bc)^2}{36R^2}$$

Kosinuslar teoremasi: $2ac\cos\beta = a^2+c^2 - b^2$, $2bc\cos\alpha = b^2+c^2 - a^2$;

sinuslar teoremasi: $\sin\beta = \frac{b}{2R}$, $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Bundan $O_M O^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

12-masala. $AB = 30$, $BC = 28$, $CA = 26$. Tashqi chizilgan aylana markazi va medianalar kesishish nuqtasi orasidagi masofani toping

Ye**chilishi.** 1) Geron formulasiga ko‘ra, $S = 336$, $R = \frac{65}{4}$.

2) $\sin\alpha = \frac{33}{65}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

3) $\Delta\ C_1KB$ da $BC_1 = 15$, $C_1K = 12$, $KB = 9$, demak $CK = 19$.

4) $\Delta\ CC_1K$ va $\Delta\ CO_MN$ o‘xshash. Demak, $CN : CK = NO_M : KC_1 = 2 : 3$,

va $NA_1 = CA_1 - CN = \frac{4}{3}$.

$OA_1 = R\cos\alpha = \frac{33}{4}$, $OP = \frac{1}{4}$.

5) $\Delta\ OPO_M$ da Pifagor teoremasiga ko‘ra $O_M O^2 = O_M P^2 + PO^2 = \frac{265}{144}$.

Javob: $O_M O = \frac{\sqrt{265}}{12}$.

13-masala (Eyler formulasi). Ichki va tashqi chizilgan aylanalar markazlari orasidagi masofani toping.

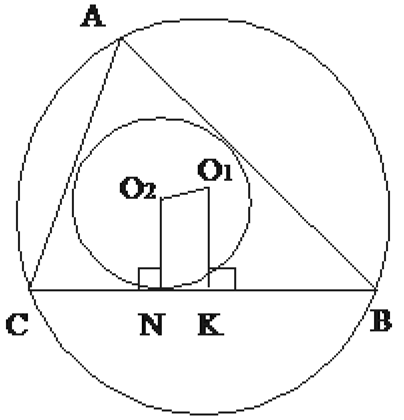
Ye**chilishi.**

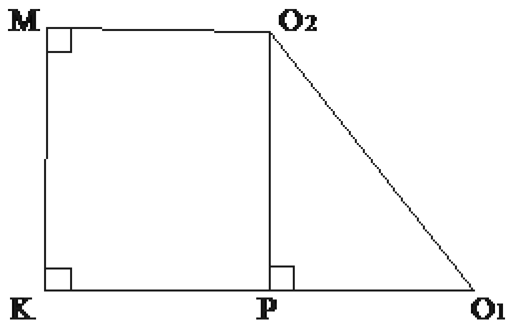
O_1 – tashqi chizilgan aylana markazi, O_2 – ichki chizilgan aylana markazi bo‘lsin.

1) $\angle A = \alpha$, $\angle CO_1B = 2\alpha$, shuning uchun $\angle BO_1K = \alpha$, $O_1K = R\cos\alpha$ va $BK = \frac{a}{2}$.

2) O_2 – ichki chizilgan aylana markazi bo‘lgani bois $O_2M = r$.

3) A, B, C nuqtalardan tashqi chizilgan aylanaga ikkitadan o‘rinma o‘tkazilaganligi bois, o‘rinmalar hossasidan $BK = p - b$.





Shuning uchun

$$KM=\frac{a}{2}-(p-b)=\frac{b-c}{2}.$$

4) $O_1P = R\cos\alpha - r$.

5) $\Delta\ O_1PO_2$ da Pifagor teoremasiga ko‘ra

$O_1O_2^2 = O_1P^2 + O_2P = O_1P^2 + KM^2$,

$$O_1O_2^2=\frac{(R\cos\alpha-r)^2+(b-c)^2}{4}=\frac{r^2-2Rr\cos\alpha+R^2\cos^2\alpha+(b-c)^2}{4}=$$

$$=\frac{R^2-2rR+r^2+2Rr(1-\cos\alpha)-R^2\sin^2\alpha+(b-c)^2}{4}.$$

Soddalashtiramiz

$$\frac{2Rr(1-\cos\alpha)-R^2\sin^2\alpha+(b-c)^2}{4}=$$

$$=\frac{2s\cdot abc\cdot 2}{(a+b+c)\cdot 4S}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)-\frac{a^2}{4}+\frac{(b-c)^2}{4}=$$

$$=\frac{a\left(a^2-(b-c)^2\right)}{2(a+b+c)}-\frac{a^2-(b-c)^2}{4}=\frac{\left(a^2-(b-c)^2\right)(a-b-c)}{4(a+b+c)}=$$

$$=\frac{-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4(a+b+c)^2}=-\frac{S^2}{p^2}=-r^2.$$

Demak, $O_1O_2^2 = R^2 - 2Rr$.

14-masala. Qanday uchburchakda ichki va tashqi chizilgan aylanalar markazlari ustma-ust tushadi?

Ye**chilishi.** Ichki va tashqi chizilgan aylanalar markazlari ustma-ust tushsa, o‘rta perpendikulyarlar kesishish nuqtasi va bissektrisalar kesishish nuqtasi ustma-ust tushadi. Demak, o‘rta perpendikulyarlar va bissektrisalar ustma-ust tushadi. Bu esa faqat teng tomonli muntazam uchburchakda bo‘lishi mumkin.

15-masala. ABC uchburchakning BC,CA va AB tomonlarida $AC_1 = AB_1$, BA_1

$= BC_1$ va $CA_1 = CB_1$ shartni qanoatlantiradigan A_1,B_1 va C_1 nuqtalar olingan. Uchburchak tomonlari ichki chizilgan aylana bilan A_1,B_1 va C_1 nuqtalarda o‘rinishini isbotlang.

Y**echilishi.** $AC_1 = AB_1 = x$, $BA_1 = BC_1 = y$ va $CA_1 = CB_1 = z$ bo‘lsin. U holda $a = y+z$, $b = z+x$ va $c = x + y$. Bundan $z = (a+b-c)|2$. Demak, berilgan ABC uchburchak uchun A_1 va B_1 nuqtalar holati bir qiymatli aniqlanadi. Xuddi shunday C_1 nuqta holati bir qiymatli aniqlanadi. Uchburchak tomonlari ichki chizilgan aylana bilan urinish nuqtalari masala shartida berilgan munosabatlarni qanoatlantirishi ravshan.

16-masala. O_a,O_b va O_c nuqtalar ABC uchburchakka tashqi –ichki chizilgan aylanalar markazlari bo‘lsin. A,B va C nuqtalar $O_aO_bO_c$ uchburcha balandliklarining asoslari bo‘lishini isbotlang.

Y**echilishi.** CO_a va CO_b o‘qlar C uchning tashqi burchaklari bissektrisalari bo‘lgani bois, C nuqta O_aO_b to‘g‘ri chiziqda yotishi hamda $\angle O_aCB = \angle O_bCA$ tenglik bajarilishi kelib chiqadi. bissektrisa BCA burchak bissektrisasi CO_c bo‘lgani uchun, $\angle BCO_c = \angle ACO_c$. Bu tengliklarni qo‘shib chiqsak $\angle O_aCO_c = \angle O_cCO_b$ ni hosil qilamiz, ya’ni O_cC — $O_aO_bO_c$ uchburchak balandligi. Xuddi shunday O_aA va O_bB – balandliklar bo‘lishi isbot qilinadi.

17-masala. ABC uchburchak BC tomoni tashqi chizilgan aylananing O markazidan $90°+\square A/2$ burchak ostida, ichki-tashqi chizilgan aylananing O_a markazida esa $90° - \square A/2$ burchak ostida ko‘rinishini isbotlang.

Y**echilishi.** Ravshanki,

$$\square BOC = 180° - \square CBO - \square BCO = 180° - \square B/2 - \square C/2 = 90° + \square A/2,$$

$$\square BO_aC = 180° - \square BOC,$$

chunki $\square OBO_a = \square OCO_a = 90°$.

18-masala. ABC uchburchak ichida

$\square PAB : \square PAC = \square PCA : \square PCB = \square PBC : \square PBA = x$

munosabatlarni qanoatlantiradigan P nuqta olingan. $x = 1$ bo‘lishini isbotlang.

Y**echilishi.** ABC uchburchakda AA_1,BB_1 va CC_1- bissektrisalar bo‘lsin, O — ularning kesishish nuqtasi. $x > 1$ deb faraz qilamiz. U holda $\square PAB > \square PAC$, ya’ni P nuqta AA_1C uchburchak ichida joylashgan. Xuddi shunday P nuqta CC_1B va BB_1A uchburchaklar ichida joylashganligi ko‘rsatiladi. Ammo, yuqoridagi uchburchaklar yagona O umumiy nuqtaga ega bo‘lganligidan ziddiyatga keldik. $x < 1$ hol xuddi shunday qaraladi.

Foydalangan adabiyotlar

1. Yunusova D. Bo‘lajak matematika o‘qituvchisini innovatsion faoliyatga tayèrlash nazariyasi va amalièti. Monografiya. – Toshkent: Fan, 2009. – 165 b.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic : The IMO Compendium 1959-2009, Springer, 2011.
3. M. Becheanu : International Mathematical Olympiads 1959-2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001.
4. E. Lozansky, C. Rousseau : Winning Solutions, Springer-Verlag, New York, 1996.

V. GLOSSARIY

O‘zbek tilida	Rus tilida	Ingliz tilida	Izoh
Xalqaro Olimpiada	Mejdunarodnaya Olimpiada	International olympiad	Bir nechta davlat o‘quvchilari, talabalarning biror fan sohasi bo‘yicha bilimlarini sinash musobaqasi, ko‘rik, tanlov
Trener	Trener	Coach	Ma’lum yo‘nalishda ta’lim olish, mashqlar bajarish bo‘yicha trening mashg‘ulotlarini olib borish (rahbarlik qilish) uchun maxsus tayèrgarlikka ega mutaxassis
O‘qitish metodi	Metod obucheniya	Method of training	Ta’lim jaraènida ta’lim beruvchi va ta’lim oluvchilalarning kutilgan maqsadga erishishga qaratilgan birgalikdagi faoliyati
Metodologiya	Metodologiya	Methodology	METODOLOGIYa (metod va…logiya so‘zlaridan) — tadqiqotchining nazariy va amaliy faoliyatini tashkil etish, tiklash tamoyillari va usullari tizimi hamda bunday tizim haqidagi ta’limot.
Algebra	Algebra	Algebra	Kattaliklar ustida

			bajariladigan amallar yuzasidan umumiy qoidalarni o‘rganadigan va bunda kattalikning son qiymatini o‘rniga boshqa shartli belgilar (harflar) qo‘llash orqali, ish yuritiladigan matematika bo‘limi
Kombinatorika	Kombinatorika	Combinatorics	KOMBINATORIKA (lot. combinare – birlashtirish) , kombinator analiz, kombinator matematika — matematikaning chekli to‘plamlar ustida bajariladigan amallarni o‘rganadigan bo‘limi.
Matematika	Matematika	Mathematics	MATEMATIKA (yun. mathematike, mathema — bilim, fan) — aniq mantiqiy mushohadalarga asoslangan bilimlar haqidagi fan.
Geometriya	Geometriya	Geometry	GEOMETRIYa (geo… va metriya) — matematikaning predmet shakllari va shakliy munosabatlarini o‘rganadigan bo‘limi.
Masala	Masala	Problem	o‘quvchilarga muayyan fanlardan bilim berish va ularda

			ko‘nikmalar hosil qilish hamda bilimlarni tekshirish metodlaridan biri.
Iste’dod	Talant	Talent	ISTE’DOD, talant — nihoyatda zo‘r qobiliyat, biror sohada yuksak darajadagi layoqat.

VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari:

1. Karimov I.A. Yuksak ma’naviyat – yengilmas kuch. -T.: “Ma’naviyat”. 2008.-176 b.

2. Karimov I.A. O‘zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida. -T.: “O‘zbekiston”. 2011. -440 b.

3. Karimov I.A. Ona yurtimiz baxti iqboli va buyuk kelajagi yo‘lida xizmat qilish – eng oliy saodatdir. –T:. “O‘zbekiston”, 2015. – 302 b.

4. Mirziyoev Sh.M. “Erkin va farovon, demokratik O‘zbekiston davlatini mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz” mavzusidagi O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti lavozimiga kirishish tantanali marosimiga bag‘ishlangan Oliy Majlis palatalarining qo‘shma majlisidagi nutqi. – T.: “O‘zbekiston”, 2016. – 56 b.

5. Mirziyoev Sh.M. “Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta’minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligi garovi” mavzusidagi O‘zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganining 24 yilligiga bag‘ishlangan tantanali marosimdagi ma’ruzasi. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 48 b.

6. Mirziyoev Sh.M. Tanqidiy tahlil, qat’iy tartib-intizom va shaxsiy javobgarlik – har bir rahbar faoliyatining kundalik qoidasi bo‘lishi kerak. –T.: “O‘zbekiston”. – 2017.– 102 b.

7. Mirziyoev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob halqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.

8. Mirziyoev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 591 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

9. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.

10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-son Farmoni.

11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 5 iyuldagi “Yoshlarga oid davlat siyosati samaradorligini oshirish va O‘zbekiston yoshlar ittifoqi faoliyatini qo‘llab-quvvatlash to‘g‘risida”gi 5106-son Farmoni.

12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyundagi “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi 4732-son Farmoni.

13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF- 5789-sonli Farmoni.

14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 11 iyuldagi “Oliy va o‘rta mahsus ta’lim sohasida boshqaruvni isloh qilish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5763-sonli Farmoni.

15. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 11 iyuldagi “ Oliy va o‘rta mahsus ta’lim tizimiga boshqaruvning yangi tamoyillarini joriy etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4391-sonli Qarori.

16. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 2 fevraldagi “Korrupsiyaga qarshi kurashish to‘g‘risida”gi O‘zbekiston Respublikasi Qonunining qoidalarini amalga oshirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2752-sonli Qarori.

17. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 apreldagi “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.

18. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2012 yil 26 sentyabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 278-sonli Qarori.

19. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2015 yil 3 dekabrdagi “Oliy va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi muassasalarining boshqaruv kadrlari zaxirasini maqsadli o‘qitishni tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 351-sonli Qarori.

20. 03.05.2019 y. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining PQ-4306-son "Iqtidorli yoshlarni aniqlash va yuqori malakali kadrlar tayyorlashning uzluksiz tizimini tashkil yetish chora-tadbirlari to‘g‘risida"gi Qarori

21. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 29 apreldagi PF-5712-son “O‘zbekiston Respublikasi xalq ta’limi tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni

22. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 6 apreldagi 187-son “Umumiy o‘rta va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limining davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi qarori

23. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” qarori

24. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2008 yil 7 avgustdagi “Ayrim fanlar chuqur o‘rganiladigan davlat ixtisoslashtirilgan

umumta’lim muassasalari faoliyatini takomillashtirish to‘g‘risida”gi 173-sonli qarori

25. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 6 apreldagi 187-son “Umumiy o‘rta va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limining davlat ta’lim standartlarini tasdiqlash to‘g‘risida”gi qarori

III. Maxsus adabiyotlar.

26. Yunusova D. Matematikani o‘qitishning zamonaviy texnologiyalari. Darslik. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2011. – 200 b.

27. Yunusova D.I.Uzluksiz ta’lim tizimi matematika o‘qituvchisini tayèrlashning nazariy asoslari. Monografiya. –Toshkent: Fan va texnologiya, 2008. – 160 b.

28. Yunusova D. Bo‘lajak matematika o‘qituvchisini innovatsion faoliyatga tayèrlash nazariyasi va amalièti. Monografiya. – Toshkent: Fan, 2009. – 165 b.

29. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic : The IMO Compendium 1959-2009, Springer, 2011.

30. M. Becheanu : International Mathematical Olympiads 1959-2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001.

31. E. Lozansky, C. Rousseau : Winning Solutions, Springer-Verlag, New York, 1996.

32. T. Andreescu, V. Cartoaje, G. Dospinescu, M. Lascu : Old and New Inequalities , GIL Publishing House, 2004.

33. E.J. Barbeau : Polynomials , Springer-Verlag, 2003.

34. Z. Cvetkovski : Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems , Springer, 2012.

35. T. Andreescu, Z. Feng : 103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser Boston, 2004.

36. I.F. Sharygin : Problems in Plane Geometry, Imported Pubn, 1988.

37. T. Andreescu, D. Andrica : An Introduction to the Diophantine Equations, GIL Publishing House, Zalau, 2002.

38. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng : 104 Number Theory Problems, Birkhauser, Boston 2006

39. T. Andreescu, Z. Feng : 102 Combinatorial Problems, Birkhauser Boston, 2002.

IV. Internet saytlar

40. http://edu.uz – O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi.

41. http://lex.uz – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi.

42. http://bimm.uz – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi.

43. http://ziyonet.uz – Ta’lim portali ZiyoNET

44. http://natlib.uz – Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi.