TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI
HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI QAYTA
TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI
OSHIRISH TARMOQ MARKAZI

MATEMATIKA O'QITISH METODIKASI

Oliy ta'lim matematika fanlari mazmunini ilmiy-nazariy masalalari

MODULI BO'YICHA

O'QUV-USLUBIY MAJMUA

TOSHKENT-2022

Mazkur o'quv-uslubiy majmua Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2020 yil "7"_dekabrdagi 648-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan o'quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchilar: p.f.d., prof. D.Yunusova,
f.-m.f.n., dots. R.M.Turgunbaev,
f.-m.f.n., dots. D.E.Davletov,

Taqrizchi: Geydelberg pedagogika universiteti (Germaniya),
professor. Hans-Werner Huneke.

O'quv-uslubiy majmua TDPU Kengashining 2020 yil "27"_avgustdagi 1/3.6- sonli qarori bilan nashrga tavsiya qilingan.

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining "Oliy ta'lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida" 2015 yil 12 iyundagi PF-4732-son Farmoni, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 20 avgustdagi "Oliy ta'lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish chora-tadbirlari to'g'risida"gi 242-sonli Qarori, "Pedagogik kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish haqidagi Nizom" talablari asosida ishlab chiqilgan "Pedagogika" hamda "Matematika" ta'lim sohalari bo'yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligi hamda kompetentligiga qo'yilgan malaka talablaridan kelib chiqqan holda oliy ta'lim tizimida matematika fanlaridan o'quv mashg'ulotlari olib borayotgan pedagoglar nazariy va metodik tayyorgarligini pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish kursi modullari qatorida "Oliy ta'lim matematika fanlari mazmunining ilmiy-nazariy masalalari" o'quv moduli yordamida takomillashtirish rejalashtirilgan.

Dastur oliy ta'lim muassasalari pedagog kadrlarining kasbiy predmet tayyorgarligi darajasini rivojlantirish, oliy ta'lim matematika fanlari mazmunini takomillashtirish tendentsiyalari bilan tanishtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular tinglovchilarning "Algebra va sonlar nazariyasi", "Matematik analiz", "Geometriya" va boshqa matematika fanlari bo'yicha matematik kompetentsiyalarini rivojlantirishga qaratilgan.

Modulning maqsadi va vazifalari

"Oliy ta'lim matematika fanlari mazmunini ilmiy-nazariy masalalari" modulining maqsadi: pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi tinglovchilarini oliy ta'limda matematika fanlarini o'qitish mazmunini shakllantirishning zamonaviy muammolari haqidagi bilimlarini takomillashtirish, algebra, matematik analiz, geometriya va boshqa matematika fanlari mazmunini talabalar tomonidan to'liq o'zlashtirilishiga yo'naltirilgan tabaqalashtirilgan misol va masalalar tizimini ishlab chiqish, matematika fanlarini o'qitishning pedagogik va axborot kommunikatsiya texnologiyalariga asoslangan innovatsion ta'lim muhitini loyihalashtirish, tashkil etish, korrektsiyalash ko'nikmalarini rivojlantirish, ularning predmet tayyorgarligi sifatini orttirishdan iborat.

"Oliy ta'lim matematika fanlari mazmunini ilmiy-nazariy masalalari" modulining vazifalari:

- predikatlar algebrasining tatbiqlari haqida tasavvurlarini aniqlashtirish;

- matematikaning turli bo'limlarida algebraik tizimlarning qo'llanilishi haqidagi nazariy bilimlarini rivojlantirish;
- r-adik sonlar maydoni asoslari bilan tanishtirish;
- differentsiallanuvchi r-adik funktsiyalar haqida tasavvurlarini aniqlashtirish;
- Evklid va Lobachevskiy geometriyalari qiyosiy tahlili bilan tanishtirish;
- Gilьbert aksiomalaridan kelib chiqadigan ba'zi natijalar haqida tasavvurlarini aniqlashtirish;
- Algebraik tizimlarni qurishga oid ko'nikmalarini takomillashtirish;
- r-adik funktsiyalarni differentsiallash ko'nikmalarini rivojlantirish;
- parallel proektsiyalash usuli haqidagi tasavvurlarini kengaytirish;
- tinglovchilarda o'z kasbiy predmet tayyorgarligini takomillashtirish, o'zini-o'zi rivojlantirish ehtiyojni faollashtirish.

Modul bo'yicha tinglovchilarning bilimi, ko'nikmasi, malakasi va kompetentsiyalariga qo'yiladigan talablar

"Oliy ta'lim matematika fanlari mazmunini ilmiy-nazariy masalalari" modulini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida tinglovchilar:

- mulohazalar algebrasini;
- predikatlar algebrasini;
- algebralar, algebralar gomomorfizmini;
- algebraik tizimlarni;
- normalangan maydonlarni;
- r-adik maydonlarni;
- r-adik son ta'rifi, normasini;
- r-adik ketma-ketlik va qatorlarni;
- r-adik funktsiya, uning uzluksizligi, hosilasini;
- aksiomatik metod mohiyatini;
- Lobachevskiy geometriyasini;
- Gilbert aksiomalar sistemasi sharhini ***bilishi***;
- predikatlar algebrasini tatbiq etish;
- n-ar, binar munosabatlardan foydalanish;
- algebra, algebraik tizimlarni qiyosiy tahlil qilish;
- matematik ob'ektlarni algebra, algebraik tizim tashkil etishini asoslash;
- matematikaning turli bo'limlarida algebralar nazariyasini qo'llash;
- sonning r-adik normasini topish;
- r-adik sonlar ustida amallar bajarish (r-adik sonlar ketma-ketligi limitini hisoblash, r-adik sonlar qatorlar yig'indisini hisoblash);

- Gilbert, Pogorelov va Veyl aksiomalari natijalaridan foydalanish;
- tekislikda yasashga doir masalalarni tasniflash ***ko'nikmalariga*** ega bo'lishi;
- oliy ta'lim matematika fanlari mazmunini takomillashtirish;
- talabalar matematik kompetentsiyalarini rivojlantiruvchi misol va masalalar tizimini ishlab chiqish ***malakasiga*** ega bo'lishi;
- matematika fani turli sohalari yutuqlarini oliy ta'lim matematika fanlarini o'qitish jarayoniga joriy etish;
- oliy ta'limda matematikani o'qitishning innovatsion texnologiyalarga asoslangan innovatsion muhitini yaratish ***kompetentsiyasiga*** ega bo'lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o'tkazish bo'yicha tavsiyalar

Modul bo'yicha ma'ruza mashg'ulotlari oliy ta'lim muassasalarida matematika fanlaridan o'quv mashg'ulotlari olib borayotgan professor-o'qituvchilarning mavzu doirasidagi dolzarb masalalar yuzasidan o'zaro fikr almashish, munozara, muhokamasini tashkil etishga asoslanadi. Amaliy mashg'ulotlar davomida tinglovchilarning tahliliy, tanqidiy, ijodiy o'rganish va tajriba almashuvi amaliy mazmundagi topshiriqlarda bevosita faol ishtirok etishi orqali amalga oshiriladi.

Ma'ruza, amaliy mashg'ulotlar va mustaqil ta'lim topshiriqlari bir-biri bilan uzviy bog'langan, bir-birini to'ldiruvchi amaliy ishlardan iborat.

O'quv mashg'ulotlaridan tashqari vaqtda kompьyuter sinfida modul bo'yicha tayyorlangan uslubiy ishlanmalar (ma'ruzalar matni, taqdimotlar, namunalar, qo'shimcha materiallar, yordamchi manbalar manzillari)dan, Nizomiy nomidagi TDPU matematika kafedralarida mavjud imkoniyatlardan foydalanish uchun shart-sharoit yaratiladi.

Modulning o'quv rejadagi boshqa modullar bilan bog'liqligi va uzviyligi

Modul mazmuni o'quv rejadagi "Kredit modul tizimi va o'quv jarayonini tashkil etish", "Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish", "Ta'lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish", "Maxsus maqsadlarga yo'naltirilgan ingliz tili", "Xalqaro matematik olimpiadalar metodologiyasi", "Matematikani o'qitishning innovatsion muhitini loyihalashtirish" o'quv modullari bilan uzviy bog'langan holda pedagoglarning kasbiy predmet tayyorgarlik darajasini orttirishga xizmat qiladi

Modulning uslubiy jihatdan uzviy ketma-ketligi

Modul bo'yicha ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar mazmuni mantiqiy izchillikda mavzuni nazariy hamda amaliy yoritishga yo'naltirilgan. Mashg'ulotlarda modulni o'qitishda qo'llash rejalashtirilgan metod va vositalar mavzu, mashg'ulot shakli, o'quv axborotiga mos tanlanadi va ularning izchilligiga e'tibor qaratiladi.

Modulning oliy ta'limdagi o'rni

Modulni o'zlashtirish orqali tinglovchilar oliy ta'limda matematika fanlari mazmunini takomillashtirish, matematik nazariy ma'lumotlarni talabalar tomonidan to'la o'zlashtirilishini ta'minlashga qaratilgan amaliy topshiriqlarni ishlab chiqishga doir kasbiy kompetentlikka ega bo'ladilar.

Modul bo'yicha soatlar taqsimoti

№	Modul Mavzulari	Jami auditoriya soatiтория соати	Jumladan:	
			Nazariy	Amaliy
1.	Pedagogika OTMda algebraik tizimlarni o'qitishning nazariy masalalari	**4**	**4**	
2.	p-adik norma, p-adik sonlar maydoni va uning xossalari	**2**	**2**	
3.	p-adik darajali qatorlar va asosiy elementar funksiyalar	**2**	**2**	
4.	p-adik funksiyalar, differensiallanuvchi funksiyalar	**2**	**2**	
5.	Evklidga qadar geometriya. Evklidning "Negizlar" asari. Evklidning V postulati va uni isbotlashga urinishlar. Evklid va Lobachevskiy geometriyalari qiyosiy tahlili. Gilbert va Lobachevskiy aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan natijalar	**2**	**2**	
6.	Tekislikda yasashga doir masalalar va ularni yechish usullari. Fazoviy figuralarning tasvirlarini yasash. Markaziy va parallel proyeksiyalash. Parallel proyeksiyalash usuli.	**2**	**2**	
7.	Predikatlarning tatbiqlari	**2**		**2**

8.	Algebraik tizimlar	**2**		**2**
9.	Algebralar gomomorfizmi va uning turlari	**2**		**2**
10.	Normalangan maydon. Ekvivalent normalar. p-adik norma	**2**		**2**
11.	p-adik sonlar maydoni va uning xossalari. p-adik sonlar ketma-ketligi va qatorlar	**2**		**2**
12.	p-adik darajali qatorlar, elementar funksiyalar	**2**		**2**
13.	Gilbert aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan naijalar	**2**		**2**
14.	Tekislikda yasashga doir masalalarni yechish usullari. Uchburchaklardagi geometrik yasashlar	**2**		**2**
15.	Yasashga doir masalalarda algebraik metod. Sirkul va chizg'ich yordamida yechilmaydigan yasashga doir ba`zi masalalar. To'rtburchaklardagi geometrik yasashlar	**2**		**2**
16.	Ko'pyoqlarda kesimlar yasash	**2**		**2**
Жами		**34**	**14**	**20**

NAZARIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu: Pedagogika OTMda algebraik tizimlarni o'qitishning nazariy masalalari

Predikatlar algebrasining tatbiqlari. Algebralar. Algebraik tizimlar. Matematikaning turli bo'limlarida algebraik tizimlarning qo'llanilishi. Algebralar gomomorfizmi va uning turlari.

2-Mavzu: p-adik norma, p-adik sonlar maydoni va uning xossalari

Normalangan maydon tushunchasi, ekvivalent normalar. Ratsional sonlar maydonida p-adik norma. Ostrovskiy teoremasi. p-adik sonlar maydoni, sodda xossalari. p-adik sonlar maydonining topologik xossalari.

3-Mavzu: p-adik darajali qatorlar va asosiy elementar funksiyalar

p-adik darajali qatorlar. p-adik logarifm va p-adik eksponenta. p-adik eksponenta va logarifmlarning xossalari

4-Mavzu: p-adik funksiyalar, differensiallanuvchi funksiyalar

Lokal doimiy funksiyalar. Uzluksiz va tekis uzluksiz funksiyalar. *p*-adik funksiyalarning differensiallanuvchanligi

5-Mavzu: Evklidga qadar geometriya. Evklidning "Negizlar" asari. Evklidning V postulati va uni isbotlashga urinishlar. Evklid va Lobachevskiy geometriyalari qiyosiy tahlili. Gilbert va Lobachevskiy aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan natijalar

Evklidga qadar geometriya. Evklidning "Negizlar" asari. Evklidning V postulate va uni isbotlashga urinishlar. Gilbert aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan teoremalar. Lobachevskiy aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan teoremalar. Parallel to`g`ri chiziqlar va ularning xossalari.

6-Mavzu: Tekislikda yasashga doir masalalar va ularni yechish usullari. Fazoviy figuralarning tasvirlarini yasash. Markaziy va parallel proyeksiyalash. Parallel proyeksiyalash usuli.

Sirkul va chizg`ich yordamida yasash aksiomalari. Tekislikda yasashga doir masalalar yechish bosqichlari. Yasashga doir masalalarni yechish usullari va yasashga doir sodda masalalar. Markaziy va parallel proyeksiyalash. Ikki tekislikning perspektiv affin mosligi. Pozitsion masalalar. Fazoviy figuralarda kesimlarni yasash

AMALIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg'ulot. Predikatlarning tatbiqlari

Mulohazalar algebrasi formulasining turini aniqlash. Formulalarni teng kuchli almashtirishlar. Predikatlarni kvantorlar bilan bog'lash. Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida yozish.

2-amaliy mashg'ulot. Algebraik tizimlar

n - ar amallar. Algebra. Gruppa. Halqa. Jism. Maydon. Algebraik sistemalar. Matematikaning turli bo'limlarida algebraik tizimlarga misollar.

3-amaliy mashg'ulot. Algebralar gomomorfizmi va uning turlari

Akslantirishlar va ular kompozisiyasi. In'ektiv, syur'ektiv, teskarilanuvchi akslantirishlar. Algebralar gomomorfizmi. Algebraik sistemalar gomomorfizmi.

4-amaliy mashg'ulot. Normalangan maydon. Ekvivalent normalar. p-adik norma

Normalangan maydon. Ekvivalent normalar. p-adik normaga oid misol va masalalar yechish

5-amaliy mashg`ulot. p-adik sonlar maydoni va uning xossalari. p-adik sonlar ketma-ketligi va qatorlar

p-adik sonlar maydoni va uning xossalari. p-adik sonlar ketma-ketligi va qatorlar.

6-amaliy mashg`ulot. p-adik darajali qatorlar, elementar funksiyalar

p-adik darajali qatorni analitik davom ettirish masalasi. p-adik darajali qatorlarning nollari. Mashqlar

7-amaliy mashg'ulot. Gilbert aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan naijalar

Gilbert aksiomalar sistemasi. Gilbert aksiomalar sistemasi aksiomalaridan kelib chiqadigan natijalar. Aksiomalar yordamida isbotlashga doir masalalar.

8-amaliy mashg'ulot. Tekislikda yasashga doir masalalarni yechish usullari. Uchburchaklardagi geometrik yasashlar

Yasashga doir elementar masalalar. Yasashga doir masalalarni yechish usullari. Uchburchaklardagi geometrik yasashlar.

9-amaliy mashg'ulot. Yasashga doir masalalarda algebraik metod. Sirkul va chizg'ich yordamida yechilmaydigan yasashga doir ba`zi masalalar. To'rtburchaklardagi geometrik yasashlar

Yasashga doir masalalarda algebraik metod. Sirkul va chizg'ich yordamida yechilmaydigan yasashga doir ba`zi masalalar. To'rtburchaklardagi geometric yasashlar.

10-amaliy mashg'ulot. Ko'pyoqlarda kesimlar yasash

Prizmalarda kesimlar yasash. Piramidalarda kesimlar yasash

O'QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo'yicha quyidagi o'qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma'ruzalar, amaliy mashg'ulotlar (ma'lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);

- davra suhbatlari (ko'rilayotgan mazmun bo'yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish);
- trening mashg'ulotlar (oliy ta'lim matematika fanlari o'quv materiallarini takomillashtirish tajribasiga ega bo'lish).

II. MODULNI O'QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA'LIM METODLARI

"Aqliy hujum" metodi - biror muammo bo'yicha ta'lim oluvchilar tomonidan bildirilgan erkin fikr va mulohazalarni to'plab, ular orqali ma'lum bir yechimga kelinadigan metoddir. "Aqliy hujum" metodining yozma va og'zaki shakllari mavjud. Og'zaki shaklida ta'lim beruvchi tomonidan berilgan savolga ta'lim oluvchilarning har biri o'z fikrini og'zaki bildiradi. Ta'lim oluvchilar o'z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. Yozma shaklida esa berilgan savolga ta'lim oluvchilar o'z javoblarini qog'oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko'rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki «pinbord» doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. "Aqliy hujum" metodining yozma shaklida javoblarni ma'lum belgilar bo'yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to'g'ri va ijobiy qo'llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va nostandart fikrlashga o'rgatadi.

"Aqliy hujum" metodidan foydalanilganda ta'lim oluvchilarning barchasini jalb etish imkoniyati bo'ladi, shu jumladan ta'lim oluvchilarda muloqot qilish va munozara olib borish madaniyati shakllanadi. Ta'lim oluvchilar o'z fikrini faqat og'zaki emas, balki yozma ravishda bayon etish mahorati, mantiqiy va tizimli fikr yuritish ko'nikmasi rivojlanadi. Bildirilgan fikrlar baholanmasligi ta'lim oluvchilarda turli g'oyalar shakllanishiga olib keladi. Bu metod ta'lim oluvchilarda ijodiy tafakkurni rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

"Aqliy hujum" metodi ta'lim beruvchi tomonidan qo'yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. Ta'lim oluvchilarning boshlang'ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo'yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.
2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog'lash maqsad qilib qo'yilganda –yangi mavzuga o'tish qismida amalga oshiriladi.
3. O'tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo'yilganda-mavzudan so'ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

"Aqliy hujum" metodini qo'llashdagi asosiy qoidalar:

1. Bildirilgan fikr-g'oyalar muhokama qilinmaydi va baholanmaydi.
2. Bildirilgan har qanday fikr-g'oyalar, ular hatto to'g'ri bo'lmasa ham inobatga olinadi.
3. Har bir ta'lim oluvchi qatnashishi shart.

Muammoli savol beriladi

↓

Fikr va g'oyalar eshitiladi va jamlab boriladi

↓

Fikr va g'oyalar guruhlanadi

↓

Aniq va to'g'ri javob tanlab olinadi

"Aqliy hujum" metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Ta'lim oluvchilarga savol tashlanadi va ularga shu savol bo'yicha o'z javoblarini (fikr, g'oya va mulohaza) bildirishlarini so'raladi;
2. Ta'lim oluvchilar savol bo'yicha o'z fikr-mulohazalarini bildirishadi;
3. Ta'lim oluvchilarning fikr-g'oyalari (magnitafonga, videotasmaga, rangli qog'ozlarga yoki doskaga) to'planadi;
4. Fikr-g'oyalar ma'lum belgilar bo'yicha guruhlanadi;
5. Yuqorida qo'yilgan savolga aniq va to'g'ri javob tanlab olinadi.

"Aqliy hujum" metodining afzalliklari:

- natijalar baholanmasligi ta'lim oluvchilarda turli fikr-g'oyalarning shakllanishiga olib keladi;
- ta'lim oluvchilarning barchasi ishtirok etadi;
- fikr-g'oyalar vizuallashtirilib boriladi;
- ta'lim oluvchilarning boshlang'ich bilimlarini tekshirib ko'rish imkoniyati mavjud;
- ta'lim oluvchilarda mavzuga qiziqish uyg'otadi.

"Aqliy hujum" metodining kamchiliklari:

- ta'lim beruvchi tomonidan savolni to'g'ri qo'ya olmaslik;
- ta'lim beruvchidan yuqori darajada eshitish qobiliyatining talab etilishi.

«FSMU» METODI. Texnologiyaning maqsadi: Mazkur texnologiya ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, aqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o'zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko'nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur texnologiyadan ma'ruza mashg'ulotlarida, mustahkamlashda, o'tilgan mavzuni so'rashda, uyga vazifa berishda hamda amaliy mashg'ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

F	**. fikringizni bayon eting**
S	**. fikringizni bayonga sabab ko'rsating**
M	**. ko'rsatgan sababingizni isbotlab misol keltiring**
U	**. fikringizni umumlashtiring**

Texnologiyani amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo'lgan yakuniy xulosa yoki g'oya taklif etiladi;
- har bir ishtirokchiga FSMU texnologiyasining bosqichlari yozilgan qog'ozlarni tarqatiladi:
- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhiy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o'zlashtirilishiga asos bo'ladi.

"INSERT" METODI. Metodning maqsadi: Mazkur metod o'quvchilarda yangi axborotlar tizimini qabul qilish va bilmlarni o'zlashtirilishini yengillashtirish maqsadida qo'llaniladi, shuningdek, bu metod o'quvchilar uchun xotira mashqi vazifasini ham o'taydi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

➢ o'qituvchi mashg'ulotga qadar mavzuning asosiy tushunchalari mazmuni yoritilgan input-matnni tarqatma yoki taqdimot ko'rinishida tayyorlaydi;

➢ yangi mavzu mohiyatini yorituvchi matn ta'lim oluvchilarga tarqatiladi yoki taqdimot ko'rinishida namoyish etiladi;

➢ ta'lim oluvchilar individual tarzda matn bilan tanishib chiqib, o'z

shaxsiy qarashlarini maxsus belgilar orqali ifodalaydilar. Matn bilan ishlashda talabalar yoki qatnashchilarga quyidagi maxsus belgilardan foydalanish tavsiya etiladi:

Belgilar	1-matn	2-matn	3-matn
"V" – tanish ma'lumot.			
"?" – mazkur ma'lumotni tushunmadim, izoh			

kerak.			
"+" bu ma'lumot men uchun yangilik.			
"– " bu fikr yoki mazkur ma'lumotga qarshiman?			

Belgilangan vaqt yakunlangach, ta'lim oluvchilar uchun notanish va tushunarsiz bo'lgan ma'lumotlar o'qituvchi tomonidan tahlil qilinib, izohlanadi, ularning mohiyati to'liq yoritiladi. Savollarga javob beriladi va mashg'ulot yakunlanadi.

"BAHS-MUNOZARA" METODI - biror mavzu bo'yicha ta'lim oluvchilar bilan o'zaro bahs, fikr almashinuv tarzida o'tkaziladigan o'qitish metodidir.

Har qanday mavzu va muammolar mavjud bilimlar va tajribalar asosida muhokama qilinishi nazarda tutilgan holda ushbu metod qo'llaniladi. Bahs-munozarani boshqarib borish vazifasini ta'lim oluvchilarning biriga topshirishi yoki ta'lim beruvchining o'zi olib borishi mumkin. Bahs-munozarani erkin holatda olib borish va har bir ta'lim oluvchini munozaraga jalb etishga harakat qilish lozim. Ushbu metod olib borilayotganda ta'lim oluvchilar orasida paydo bo'ladigan nizolarni darhol bartaraf etishga harakat qilish kerak.

"Bahs-munozara" metodini o'tkazishda quyidagi qoidalarga amal qilish kerak:

- ✓ barcha ta'lim oluvchilar ishtirok etishi uchun imkoniyat yaratish;
- ✓ "o'ng qo'l" qoidasi (qo'lini ko'tarib, ruhsat olgandan so'ng so'zlash)ga rioya qilish;
- ✓ fikr-g'oyalarni tinglash madaniyati;
- ✓ bildirilgan fikr-g'oyalarning takrorlanmasligi;
- ✓ bir-birlariga o'zaro hurmat.

Quyida "Bahs-munozara" metodini o'tkazish tuzilmasi berilgan.

Muammoli savol tashlanadi

↓

Turli fikrlar tinglanadi

↓

Fikr-g'oyalar to'planadi

↓

Tahlil qilinadi

↓

Aniq va maqbul yechimni topish

"Bahs-munozara" metodining tuzilmasi

"Bahs-munozara" metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Ta'lim beruvchi munozara mavzusini tanlaydi va shunga doir savollar ishlab chiqadi.

2. Ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilarga muammo bo'yicha savol beradi va ularni munozaraga taklif etadi.

3. Ta'lim beruvchi berilgan savolga bildirilgan javoblarni, ya'ni turli g'oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu vazifani bajarish uchun ta'lim oluvchilardan birini kotib etib tayinlaydi. Bu bosqichda ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilarga o'z fikrlarini erkin bildirishlariga sharoit yaratib beradi.

4. Ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilar bilan birgalikda bildirilgan fikr va g'oyalarni guruhlarga ajratadi, umumlashtiradi va tahlil qiladi.

5. Tahlil natijasida qo'yilgan muammoning eng maqbul yechimi tanlanadi.

TRENING. Trening zamonaviy ta'lim shakllaridan biri hisoblanib, u interfaol mashg'ulotlarni amalga oshirishning o'ziga xos ko'rinishidir.

Treninglar o'rganilishi lozim bo'lgan nazariy g'oya va fikrlarni amaliy ish hamda mashqlar davomida o'zlashtirish imkoniyatini beradi va ta'lim oluvchilarda shaxslararo o'zaro hamkorlikning samarali ko'nikmasini shakllantirishga, shuningdek, mutaxassis kasbiy kompetentligining umumiy darajasini oshirishga yo'naltiriladi.

Har qanday pedagogik treningni tashkil etish quyidagi bosqichlardan tashkil topadi:

1. Tashkiliy bosqich: guruhni yig'ish yoki shakllantirish.

2. Boshlang'ich bosqich: guruh me'yorlarini ishlab chiqish, tanishuv va mashg'ulotdan kutuvlarni aniqlash.

3. Faoliyatli bosqich: trening turi va o'tkazish metodikasini belgilash.

4. Yakuniy bosqich (reflektsiya). Trening mobaynida talabalar nazariy ma'lumotlarni o'zlashtirish bilan birga, ularda bilish, emmotsional va xulq-atvor ko'nikmalari ham rivojlanib boradi.

"DAVRA SUHBATI" METODI – aylana stol atrofida berilgan muammo yoki savollar yuzasidan ta'lim oluvchilar tomonidan o'z fikrmulohazalarini bildirish orqali olib boriladigan o'qitish metodidir.

"Davra suhbati" metodi qo'llanilganda stol-stullarni doira shaklida joylashtirish kerak. Bu har bir ta'lim oluvchining bir-biri bilan "ko'z aloqasi"ni o'rnatib turishiga yordam beradi. Davra suhbatining og'zaki va yozma shakllari mavjuddir. Og'zaki davra suhbatida ta'lim beruvchi mavzuni boshlab beradi va ta'lim oluvchilardan ushbu savol bo'yicha o'z fikrmulohazalarini bildirishlarini so'raydi va aylana bo'ylab har bir ta'lim oluvchi o'z fikr-mulohazalarini og'zaki bayon etadilar. So'zlayotgan ta'lim oluvchini barcha diqqat bilan tinglaydi, agar muhokama qilish lozim bo'lsa, barcha fikr-mulohazalar tinglanib bo'lingandan so'ng muhokama qilinadi. Bu esa ta'lim oluvchilarning mustaqil fikrlashiga va nutq madaniyatining rivojlanishiga yordam beradi.

Davra stolining tuzilmasi

Yozma davra suhbatida ham stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta'lim oluvchiga konvert qog'ozi beriladi. Har bir ta'lim oluvchi konvert ustiga ma'lum bir mavzu bo'yicha o'z savolini beradi va "Javob varaqasi"ning biriga o'z javobini yozib, konvert ichiga solib qo'yadi. SHundan so'ng konvertni soat yo'nalishi bo'yicha yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta'lim oluvchi o'z javobini "Javoblar varaqasi"ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo'yadi va yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo'ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig'ib olinib, tahlil qilinadi.

"Davra suhbati" metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1.Mashg'ulot mavzusi e'lon qilinadi.

2. Ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilarni mashg'ulotni o'tkazish tartibi bilan tanishtiradi.

3. Har bir ta'lim oluvchiga bittadan konvert va javoblar yozish uchun guruhda necha ta'lim oluvchi bo'lsa, shunchadan "Javoblar varaqalari"ni tarqatilib, har bir javobni yozish uchun ajratilgan vaqt belgilab qo'yiladi. Ta'lim oluvchi konvertga va "Javoblar varaqalari"ga o'z ismi-sharifini yozadi.

4. Ta'lim oluvchi konvert ustiga mavzu bo'yicha o'z savolini yozadi va "Javoblar varaqasi"ga o'z javobini yozib, konvert ichiga solib qo'yadi.

5. Konvertga savol yozgan ta'lim oluvchi konvertni soat yo'nalishi bo'yicha

yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi.

6. Konvertni olgan ta'lim oluvchi konvert ustidagi savolga “Javoblar varaqalari”dan biriga javob yozadi va konvert ichiga solib qo'yadi hamda yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi.

7. Konvert davra stoli bo'ylab aylanib, yana savol yozgan ta'lim oluvchining o'ziga qaytib keladi. Savol yozgan ta'lim oluvchi konvertdagi “Javoblar varaqalari”ni baholaydi.

8. Barcha konvertlar yig'ib olinadi va tahlil qilinadi.

Ushbu metod orqali ta'lim oluvchilar berilgan mavzu bo'yicha o'zlarining bilimlarini qisqa va aniq ifoda eta oladilar. Bundan tashqari ushbu metod orqali ta'lim oluvchilarni muayyan mavzu bo'yicha baholash imkoniyati yaratiladi. Bunda ta'lim oluvchilar o'zlari bergan savollariga guruhdagi boshqa ta'lim oluvchilar bergan javoblarini baholashlari va ta'lim beruvchi ham ta'lim oluvchilarni ob'ektiv baholashi mumkin.

“MUAMMOLI VAZIYAT” METODI - ta'lim oluvchilarda muammoli vaziyatlarning sabab va oqibatlarini tahlil qilish hamda ularning yechimini topish bo'yicha ko'nikmalarini shakllantirishga qaratilgan metoddir.

“Muammoli vaziyat” metodi uchun tanlangan muammoning murakkabligi ta'lim oluvchilarning bilim darajalariga mos kelishi kerak. Ular qo'yilgan muammoning yechimini topishga qodir bo'lishlari kerak, aks holda yechimni topa olmagach, ta'lim oluvchilarning qiziqishlari so'nishiga, o'zlariga bo'lgan ishonchlarining yo'qolishiga olib keladi. «Muammoli vaziyat» metodi qo'llanilganda ta'lim oluvchilar mustaqil fikr yuritishni, muammoning sabab va oqibatlarini tahlil qilishni, uning yechimini topishni o'rganadilar.

“Muammoli vaziyat” metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1.Ta'lim beruvchi mavzu bo'yicha muammoli vaziyatni tanlaydi, maqsad va vazifalarni aniqlaydi. Ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilarga muammoni bayon qiladi.

2. Ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilarni topshiriqning maqsad, vazifalari va shartlari bilan tanishtiradi.

3. Ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilarni kichik guruhlarga ajratadi.

4. Kichik guruhlar berilgan muammoli vaziyatni o'rganadilar. Muammoning kelib chiqish sabablarini aniqlaydilar va har bir guruh taqdimot qiladi. Barcha taqdimotdan so'ng bir xil fikrlar jamlanadi.

5. Bu bosqichda berilgan vaqt mobaynida muammoning oqibatlari to'g'risida fikr-mulohazalarini taqdimot qiladilar. Taqdimotdan so'ng bir xil fikrlar jamlanadi.

6. Muammoni yechishning turli imkoniyatlarini muhokama qiladilar, ularni tahlil qiladilar. Muammoli vaziyatni yechish yo'llarini ishlab chiqadilar.

7. Kichik guruhlar muammoli vaziyatning yechimi bo'yicha taqdimot qiladilar

va o'z variantlarini taklif etadilar.

8. Barcha taqdimotdan so'ng bir xil yechimlar jamlanadi. Guruh ta'lim beruvchi bilan birgalikda muammoli vaziyatni yechish yo'llarining eng maqbul variantlarini tanlab oladi.

"SWOT-TAHLIL" METODI. Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo'llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength)	• kuchli tomonlari
W – (weakness)	• zaif, kuchsiz tomonlari
O – (opportunity)	• imkoniyatlari
T – (threat)	• to`siqlari

XULOSALASH» (REZYUME, VEER) METODI. Metodning maqsadi: Bu metod murakkab, ko'ptarmoqli, mumkin qadar, muammoli xarakteridagi mavzularni o'rganishga qaratilgan. Metodning mohiyati shundan iboratki, bunda mavzuning turli tarmoqlari bo'yicha bir xil axborot beriladi va ayni paytda, ularning har biri alohida aspektlarda muhokama etiladi. Masalan, muammo ijobiy va salbiy tomonlari, afzallik, fazilat va kamchiliklari, foyda va zararlari bo'yicha o'rganiladi. Bu interfaol metod tanqidiy, tahliliy, aniq mantiqiy fikrlashni muvaffaqiyatli rivojlantirishga hamda o'quvchilarning mustaqil g'oyalari, fikrlarini yozma va og'zaki shaklda tizimli bayon etish, himoya qilishga imkoniyat yaratadi. "Xulosalash" metodidan ma'ruza mashg'ulotlarida individual va juftliklardagi ish shaklida, amaliy va seminar mashg'ulotlarida kichik guruhlardagi ish shaklida mavzu yuzasidan bilimlarni mustahkamlash, tahlili qilish va taqqoslash maqsadida foydalanish mumkin.

Metodni amalga oshirish tartibi:

•trener-o'qituvchi ishtirokchilarni 5-6 kishidan iborat kichik guruhlarga ajratadi;

•trening maqsadi, shartlari va tartibi bilan ishtirokchilarni tanishtirgach, har bir guruhga umumiy muammoni tahlil qilinishi zarur

bo'lgan qismlari tushirilgan tarqatma materiallarni tarqatadi;

•har bir guruh o'ziga berilgan muammoni atroflicha tahlil qilib, o'z mulohazalarini tavsiya etilayotgan sxema bo'yicha tarqatmaga yozma bayon qiladi;

•navbatdagi bosqichda barcha guruhlar o'z taqdimotlarini o'tkazadilar. SHundan so'ng, trener tomonidan tahlillar umumlashtiriladi, zaruriy axborotlr bilan to'ldiriladi va mavzu yakunlanadi.

O'ZARO O'RIN ALMASHINUVCHI JUFTLIKLAR VA GURUHLAR

Maqsadi:

- tinglovchilarni materialning tuzilishi, asosiy fikrlarni belgilay olish, esda saqlab qolish mumkin bo'lgan shaklda ularni tasavvur eta olishga o'rgatish;
- nutq madaniyatini rivojlantirish;
- fasilitatorlik qobiliyatini tarkib toptirish.

1. Birinchi bosqichda pedagog asosiy fikrlarni tasavvur etishning turli shakllari haqida hikoya qilib beradi.

Asosiy fikrlarni tasavvur etishning birinchi turi oddiy – bu asosiy fikrlarni so'z yoki qisqa gaplar tarzida tasavvur etishdir. Mazkur so'z yoki gaplar ustunlar tarzida nomer qo'yish orqali yoziladi.

Asosiy fikrlarni tasavvur qilishning ikkinchi shaklida o'zak belgilab olinadi va ana shu o'zak atrofida asosiy fikrlar jamlanadi.

Asosiy fikrlarni shakllantirishning uchichnchi shakli – bu ularni qisqartirish yoki shartli belgilar bilan almashtirishdir.

2. Ikkinchi bosqichda tinglovchilar kichik guruhlarga birlashadilar. Har bir kichik guruh o'ziga berilgan matnni oladi va uni o'qiydi. Matnlar hammada har xil.

3. SHundan so'ng guruhda har bir tinglovchi mustaqil ravishda mazkur matnga doir tayanch konspektni tuzishadi.

4. Navbatdagi bosqichda tinglovchilar juftliklarda o'zlarining tayanch konspektlari haqida fikr almashishadi. Mazkur bosqichda o'zining tayanch konspektini o'zgartirish imkoniyati mavjud.

5. Navbatdagi bosqichda tayanch konspekt guruhiy muhokama etiladi. Guruh o'zaro kelishgan holda qandaydir yaratilgan tayanch konspektni qabul qiladi. Mazkur bosqichda guruh butun jamoaning oldida "ovoz chiqarib" aytib beruvchi tinglovchini aniqlab olishi kerak.

6. Mazkur bosqichda guruhning bir a'zosi aniqlangan tayanch konspekt bo'yicha chiqish qiladi va o'qilgan matnning mazmunini bayon etadi. Barcha tinglovchilar eshitishlari kerak. Mazkur davrda me'yorlarning bajarilishini ta'minlaydigan texnik ekspertning majburiyati namoyon bo'ladi.

7. Birinchi guruh a'zosi chiqishini tugatgandan so'ng boshqa guruh savol berishi mumkin. Savollarga javob beriladi. Mazkur turdagi ish baholanishi mumkin

(ballar jadvalda qo'yiladi). Savollarning navbat bilan berilishini texnik ekspert yo'lga qo'yadi.

8. Sakkizinchi bosqichda boshqa guruhning vakili agar asosi mavjud bo'lsa, qilingan chiqishni to'ldiradi.

9. To'qqiznichi bosqichda boshqa guruh vakili chiqish, savollarga javoblar bo'yicha noroziligini ifoda etadi.

Ana shu yerda birinchi matn bilan ishlash yakunlanadi. Pedagog yoki ilmiy ekspert yakunlarni chiqaradi.

Keyingi bosqichda boshqa guruh vakili o'zining tayanch konspektini namoyish etadi. Mazkur harakat hamma chiqishlar tugaguncha davom etadi.

Instsenirovka yakunlarni chiqarish bilan tugallanadi. Har bir guruh to'plagan ballarni hisoblash va jami ballar ustuniga yozib qo'yilishi kerak. Ana shu asosdan kelib chiqib, o'rinlarni ham belgilash mumkin.

"ASSESMENT" METODI. Metodning maqsadi: mazkur metod ta'lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o'zlashtirish ko'rsatkichi va amaliy ko'nikmalarini tekshirishga yo'naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta'lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo'nalishlar (test, amaliy ko'nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo'yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi: "Assesment" lardan ma'ruza mashg'ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o'rganishda, yangi ma'lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg'ulotlarda esa mavzu yoki ma'lumotlarni o'zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o'z-o'zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. SHuningdek, o'qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o'quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo'shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Namuna. Har bir katakdagi to'g'ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.

Test

Har qanday halqa ...
A) Algebraik sistema
V) Algebra
S) Maydon.
D) Kommutativ

Qiyosiy tahlil

Arifmetik vektor fazo va chiziqli vektor fazo tushunchalari o'rtasidagi o'xshashlik va farqli jihatlarni tahlil eting.

Ta'rif

Arifmetik vektor fazo ...

Amaliy ko'nikma

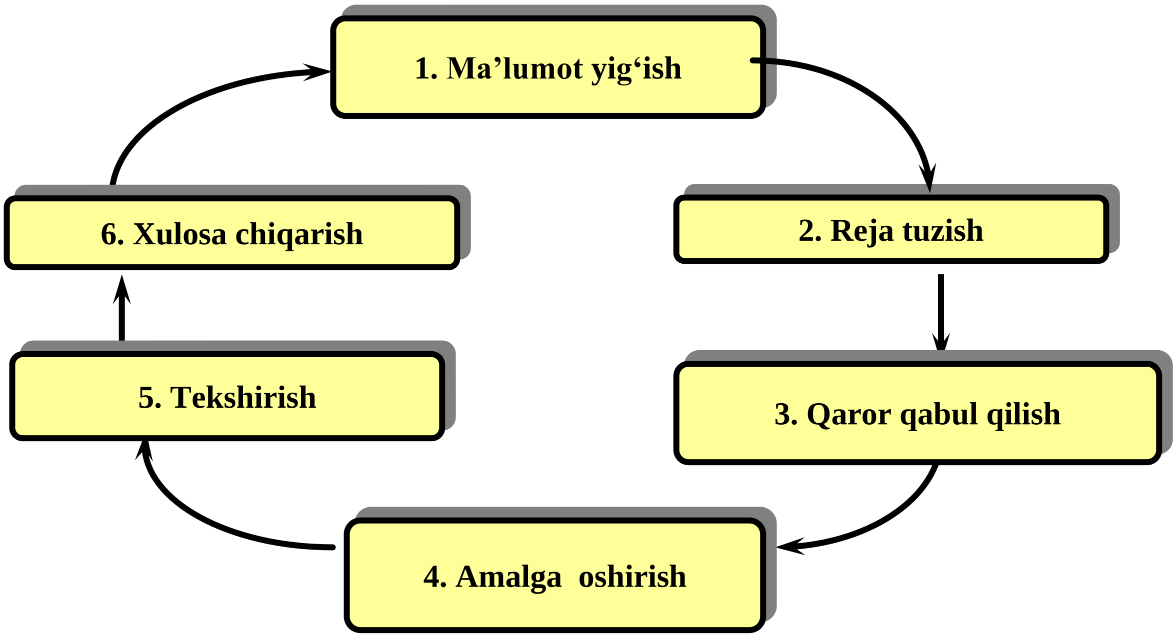
R to'plamning maydon tashkil etishini tekshirish algoritmini tuzing.

T-CHIZMA. T-chizma munozara vaqtida qo'shaloq javoblar (ha/yo'q, tarafdor/qarshi) yoki taqqoslash-zid javoblarni yozish uchun universal grafik organayzer hisoblanadi. Masalan, "Pedagogik loyihalash shakllari" matnini "tarafdor va qarshi" tamoyiliga asoslanib o'qilganidan so'ng, bir juft tinglovchi quyida keltirilganidek, T-chizmani tuzishi va besh daqiqadan keyin, chizmaning chap tomonida pedagogik loyihalash shakllarining afzalliklarini yozishi mumkin. So'ngra besh daqiqa mobaynida ular bu fikrga qarshi iloji boricha ko'p sababni keltirishlari kerak. Ana shu vaqt oxirida ular yana besh daqiqa mobaynida o'z T-chizmalarini boshqa juftlik chizmalari bilan taqqoslashlari mumkin.

Pedagogik loyihalash shakllarining afzalliklari	Pedagogik loyihalash shakllarining kamchiliklari

"LOYIHA" METODI - bu ta'lim oluvchilarning individual yoki guruhlarda belgilangan vaqt davomida, belgilangan mavzu bo'yicha axborot yig'ish, tadqiqot o'tkazish va amalga oshirish ishlarini olib borishidir. Bu metodda ta'lim oluvchilar rejalashtirish, qaror qabul qilish, amalga oshirish, tekshirish va xulosa chiqarish va natijalarni baholash jarayonlarida ishtirok etadilar. Loyiha ishlab chiqish yakka tartibda yoki guruhiy bo'lishi mumkin, lekin har bir loyiha o'quv guruhining birgalikdagi faoliyatining muvofiqlashtirilgan natijasidir.

Loyiha o'rganishga xizmat qilishi, nazariy bilimlarni amaliyotga tadbiq etishi, ta'lim oluvchilar tomonidan mustaqil rejalashtirish, tashkillashtirish va amalga oshirish imkoniyatini yarata oladigan bo'lishi kerak. Quyidagi chizmada "Loyiha" metodining bosqichlari keltirilgan.



"Loyiha" metodining bosqichlari

"Loyiha" metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Muhandis-pedagog loyiha ishi bo'yicha topshiriqlarni ishlab chiqadi. Ta'lim oluvchilar mustaqil ravishda darslik, sxemalar, tarqatma materiallar asosida topshiriqqa oid ma'lumotlar yig'adilar.

2. Ta'lim oluvchilar mustaqil ravishda ish rejasini ishlab chiqadilar. Ish rejasida ta'lim oluvchilar ish bosqichlarini, ularga ajratilgan vaqt va texnologik ketma-ketligini, material, asbob-uskunalarni rejalashtirishlari lozim.

3. Kichik guruhlar ish rejalarini taqdimot qiladilar. Ta'lim oluvchilar ish rejasiga asosan topshiriqni bajarish bo'yicha qaror qabul qiladilar. Ta'lim oluvchilar muhandis-pedagog bilan birgalikda qabul qilingan qarorlar bo'yicha erishiladigan natijalarni muhokama qilishadi. Bunda har xil qarorlar taqqoslanib, eng maqbul variant tanlab olinadi. Muhandis-pedagog ta'lim oluvchilar bilan birgalikda "Baholash varaqasi"ni ishlab chiqadi.

4. Ta'lim oluvchilar topshiriqni ish rejasi asosida mustaqil ravishda amalga oshiradilar. Ular individual yoki kichik guruhlarda ishlashlari mumkin.

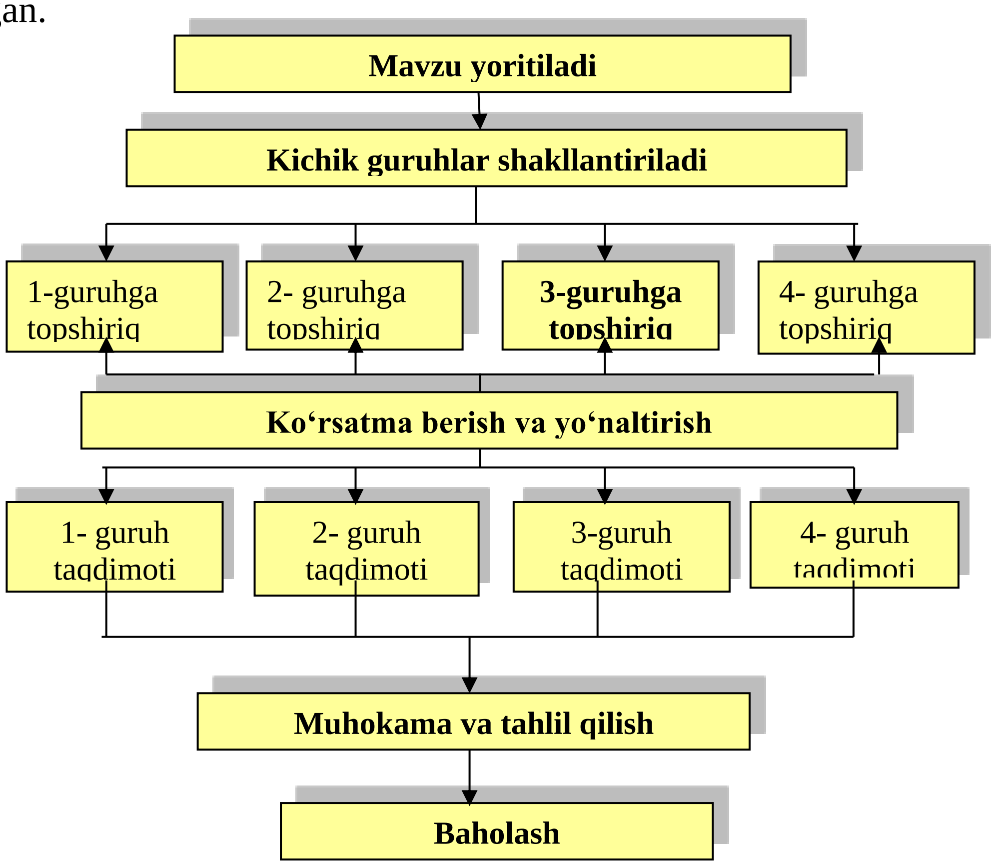
5. Ta'lim oluvchilar ish natijalarini o'zlarini tekshiradilar. Bundan tashqari kichik guruhlar bir-birlarining ish natijalarini tekshirishga ham jalb etiladilar. Tekshiruv natijalarini "Baholash varaqasi"da qayd etiladi.

6. Muhandis-pedagog va ta'lim oluvchilar ish jarayonini va natijalarni birgalikda yakuniy suhbat davomida tahlil qilishadi. O'quv amaliyoti mashg'ulotlarida erishilgan ko'rsatkichlarni me'yoriy ko'rsatkichlar bilan taqqoslaydi. Agarda me'yoriy ko'rsatkichlarga erisha olinmagan bo'lsa, uning sabablari aniqlanadi.

"KICHIK GURUHLARDA ISHLASH" METODI - ta'lim oluvchilarni faollashtirish maqsadida ularni kichik guruhlarga ajratgan holda o'quv materialini o'rganish yoki berilgan topshiriqni bajarishga qaratilgan darsdagi ijodiy ish.

Ushbu metod qo'llanilganda ta'lim oluvchi kichik guruhlarda ishlab, darsda faol ishtirok etish huquqiga, boshlovchi rolida bo'lishga, bir-biridan o'rganishga va turli nuqtai- nazarlarni qadrlash imkoniga ega bo'ladi.

"Kichik guruhlarda ishlash" metodi qo'llanilganda ta'lim beruvchi boshqa interfaol metodlarga qaraganda vaqtni tejash imkoniyatiga ega bo'ladi. CHunki ta'lim beruvchi bir vaqtning o'zida barcha ta'lim oluvchilarni mavzuga jalb eta oladi va baholay oladi. Quyida "Kichik guruhlarda ishlash" metodining tuzilmasi keltirilgan.



"Kichik guruhlarda ishlash" metodining tuzilmasi

"Kichik guruhlarda ishlash" metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:

1. Faoliyat yo'nalishi aniqlanadi. Mavzu bo'yicha bir-biriga bog'liq bo'lgan masalalar belgilanadi.
2. Kichik guruhlar belgilanadi. Ta'lim oluvchilar guruhlarga 3-6 kishidan bo'linishlari mumkin.
3. Kichik guruhlar topshiriqni bajarishga kirishadilar.
4. Ta'lim beruvchi tomonidan aniq ko'rsatmalar beriladi va yo'naltirib turiladi.
5. Kichik guruhlar taqdimot qiladilar.
6. Bajarilgan topshiriqlar muhokama va tahlil qilinadi.
7. Kichik guruhlar baholanadi.

«Kichik guruhlarda ishlash» metodining afzalligi:

- o'qitish mazmunini yaxshi o'zlashtirishga olib keladi;
- muloqotga kirishish ko'nikmasining takomillashishiga olib keladi;
- vaqtni tejash imkoniyati mavjud;
- barcha ta'lim oluvchilar jalb etiladi;
- o'z-o'zini va guruhlararo baholash imkoniyati mavjud bo'ladi.

«Kichik guruhlarda ishlash» metodining kamchiliklari:

- ba'zi kichik guruhlarda kuchsiz ta'lim oluvchilar bo'lganligi sababli kuchli ta'lim oluvchilarning ham past baho olish ehtimoli bor;
- barcha ta'lim oluvchilarni nazorat qilish imkoniyati past bo'ladi;
- guruhlararo o'zaro salbiy raqobatlar paydo bo'lib qolishi mumkin;
- guruh ichida o'zaro nizo paydo bo'lishi mumkin.

III. NAZARIY MATERIALLAR

1-mavzu: Pedagogika OTMda algebraik tizimlarni o'qitishning nazariy masalalari

Reja:

1. Predikatlar algebrasining tatbiqlari. Matematikaning turli bo'limlarida algebraik tizimlarning qo'llanilishi.
2. Algebralar. Algebraik tizimlar.
3. Algebralar gomomorfizmi va uning turlari.

Tayanch iboralar: algebra, algebraik amal, binar munosabat, algebraik tizim, predikatlar algebrasi, gomomorfizi.

1. **Predikatlar algebrasining tatbiqlari. Matematikaning turli bo'limlarida algebraik tizimlarning qo'llanilishi**.

Matematik mantiq, matematikaga oid isbotlarni o'rganadigan va matematika fanini asoslaydigan hozirgi kundagi izlanishlarda hal qiluvchi rol o'ynaydi, u barcha matematikaga oid fanlar sistemasiga kirib boradi, uning bazasida matematika faniqat'iy mantiqan qurilishi mumkin bo'ladi

Mantiq (logika) alohida fan sifatida eramizdan avvalgi IV asrda vujudga kelgan. Uning asoschisi-yunon faylasufi Aristoteldir (eramizdan oldingi 384-322 yillar). U mantiqiy (logik) ta'limotlarni ba'zi tarqoq bo'laklarini bir sistemaga keltirgan bo'lib, u hozirgacha formal mantiq sifatida saqlanib kelmoqda. Nemis faylasufi Kant XVIII asrning oxirida shunday degan edi: «Aristotelь zamonidan beri mantiq nazariy jihatdan deyarli rivojlanmadi, va aftidan uning intihosi ham shu bo'lsa kerak».

Mantiqni reforma qilish mumkinligini aniqlash, nemis olimi, ulug' matematik Gotfrid Vilьgelьm Leybnitsnig (1646-1716) xizmatidir. Unda bolalik yillaridayoq, har bir asosiy tushunchasini alohida belgilash simvoliga ega bo'lgan yangi fanni yaratish zaruriyati va mumkinligi g'oyasi tug'ildi. «Bu simvollar uchun, ularni birlashtiradigan qoidalarni joriy qilmoq kerak va u holda xuddi matematikadagiga o'xshash har qanday muhokama biror hisob ko'rinishini oladi». Leybnitsning fikricha, mantiq, «hisoblash san'ati» bo'lishi, olimlar va faylasuflarning tortishuvlari xotirjam hisoblashlar bilan hal etilishi kerak. Bir yuz ellik yildan keyin Leybnits g'oyalari, yana chex matematigi Bolьtsano (1781-1848) tomonidan izhor etildi, lekin Bolьtsanoni boshqa ilg'or g'oyalari katolik cherkovi tomonidan ig'vogorona hisoblangani kabi, uning bu qarashlari ham hayotlik paytida ro'yobga chiqmadi. XIX asrda Irlandiyalik matematik Djordj Bulь (1815-1864) ilmiy ishlarida Leybnitsning g'oyalari qisman ro'yobga chiqa boshladi.

Dj. Bul o'zining «Matematik tahlil mantiqi» (1847) va «Tafakkur qonunlari» ilmiy ishlarida birinchi marta «Mantiq algebrasi» (ko'pincha «Bulь algebrasi» deyiladi) ni bayon etadi. U shunday algebrani yaratdiki, unda harflar mulohazalarni anglatib, oddiy algebradagi barcha qonunqoidalar yangi algebrada o'z kuchini saqlaydi. SHunday qilib, bizning barcha fikrlarimiz mulohazalardan va muhokamalardan iborat bo'ladigan bu yangi algebra, mantiq algebrasi nomini oladi.

Nemis matematigi Gotlib Frege (1848-1925) XIX asrning oxirlarida arifmetikani, matematik mantiq yordamida asoslashdek murakkab masalaga qo'l urdi va shu bilan yangi mantiqning kelgusi tadqiqi uchun yo'l ochib berdi. Italiyalik matematik Djuzeppe Peano (1858-1932) bu ishni matematikaning keng tarmoqlarida va boshqa fanlarda amalga oshirdi.

Rossiyada matematik mantiq masalalari bilan Qozon Universitetining astronom-kuzatuvchisi Platon Sergeevich Poretskiy (1846-1907) shug'ullandi. U 1887 va 1888 yillarda Rossiyada birinchi bo'lib, Qozon Universitetida matematik mantiq bo'yicha lektsiyalar o'qidi. P.S. Poretskiyning ilmiy ishlarida, matematik mantiqning avvalgi rivojlanishiga tanqidiy tahlil berilgan. XIX asrning matematiklaridan, matematik mantiq bo'yicha D. Grassman (1815-1905) (taniqli matematik German Grassmanning ukasi), E. SHreder (1853-1901) va boshqalar e'tiborga sazovor ilmiy ishlar qildilar. XIX asrning boshlarida, matematik mantiq juda ko'p matematiklarning diqqatini jalb etadi. Uni yirik nemis matematigi D. Gilьbert (1862-1943), ingliz faylasufi va mantiq olimi Bertran Rassel (1872-1970) va Uaytxed (1861-1947) kabilar rivojlantirdilar. Hozirgi kunda, g'arbda matematik mantiqning eng yirik vakillaridan biri Kurt Gyodelь hisoblanadi. Rus matematiklaridan matematik mantiqning rivojlanishiga I.I. Jegalkin (1860-1947), P.S. Novikov (1901-1975) va A.A. Markovlar (1903- 1979) o'zlarining salmoqli hissalarini qo'shdilar.

Mulohaza matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir.

1-ta'rif. Berilgan A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi va $\rceil A$ yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.

2-ta'rif. A va B mulohazalar rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va B mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi va $A \wedge B$ yoki A & B ko'rinishda belgilanadi

3-ta'rif. A va B mulohazalar diz'yunksiyasi deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \vee B$ mulohazaga aytiladi.

4-ta'rif. A va B mulohazalar <u>implikasiyasi</u> deb, A mulohaza rost va B mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \to B$ mulohazaga aytiladi.

5-ta'rif. A va B mulohazalar <u>ekvivalensiyasi</u> deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \leftrightarrow B$ mulohazaga aytiladi

6-ta'rif. 1) Har qanday mulohaza MAning formulasidir.

2) Agar A, B lar MAning formulasi bo'lsa, u holda

$(\rceil A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ lar ham MAning formulasidir.

3) MAning formulalari 1),2)-punktlar yordamida hosil qilinadi.

7-ta'rif. MA ning A va B formulalari tarkibiga kirgan barcha mulohazalar $A_1 \ldots A_n$ lardan iborat bo'lsin. Agar $A_1 \ldots A_n$ mulohazalarning barcha $(i_1, \ldots, i_n)$ qiymatlari tizimida A va B formulalar bir xil qiymatlar qabul qilsalar, u holda bu formulalar <u>teng kuchli formulalar</u> deyiladi va $A \equiv B$ ko'rinishida belgilanadi.

8-ta'rif. Formulada qatnashgan mantiq amallari soni <u>formulaning rangi</u> deyiladi.

9-ta'rif. 1. A formula - A mulohazadan iborat bo'lsa, uning formulaosti faqat uning o'zidan iborat.

2. Agar formulaning ko'rinishi $A * B$ dan iborat bo'lsa, u holda uning formulaostilari A, B, $A * B$ lar hamda A va B larning barcha formulaostilaridan iborat bo'ladi. Bu erda $*$ - $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ amallaridan biri.

Agar formulaning ko'rinishi $\rceil A$ bo'lsa, uning formulaostilari A formula, A formulaning barcha formulaostilari va $\rceil A$ ning o'zidan iborat.

Boshqa formulaostilari yo'q.

10-ta'rif. Mulohazalar algebrasining A formulasi, shu formula tarkibiga kirgan barcha mulohazalarning qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlari tizimida rost bo'lsa, bu formula <u>aynan rost</u> formula yoki <u>mantiq qonun</u> yoki <u>tovtologiya</u> deyiladi.

11-ta'rif. MA ning $A(A_1 \ldots A_n)$ formulasi $A_1 \ldots A_n$ mulohazalarning kamida bitta qiymatlari tizimida rost qiymat qabul qilsa, <u>bajariluvchi</u> formula, barcha qiymatlari tizimida yolg'on qiymat qabul qilsa, <u>aynan yolg'on</u> formula yoki <u>ziddiyat</u> deyiladi.

1-teorema. MA ning A va B formulalari teng kuchli formulalar bo'lishi uchun $A \Leftrightarrow B$ formula aynan rost formula bo'lishi zarur va etarlidir.

MA ning asosiy teng kuchli formulalari quyidagilardan iborat:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & A \wedge A \equiv A \\ 2. & A \vee A \equiv A \end{array}\right\} \text{idempotentlik qonunlari.}$$

3. $A \vee 1 \equiv 1$
4. $A \wedge 1 \equiv A$
5. $A \wedge 0 \equiv 0$
6. $A \vee 0 \equiv A$
7. $A \vee \overline{A} \equiv 1$ - uchinchisini inkor qilish qonuni.
8. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$ - ziddiyatga keltirish qonuni.
9. $\overline{\overline{A}} = A$ - qo'sh inkor qonuni.

$$\left.\begin{array}{ll} 10. & A \wedge (B \vee A) \equiv A \\ 11. & A \vee (B \wedge A) \equiv A \end{array}\right\} \text{yutilish qonunlari.}$$

12. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$
13. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$

$$\left.\begin{array}{ll} 14. & \overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \\ 15. & \overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B} \end{array}\right\} \text{De Morgan formulalari.}$$

16. $A \wedge B \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$
17. $A \vee B \equiv \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$

$$\left.\begin{array}{ll} 18. & A \wedge B \equiv B \wedge A \\ 19. & A \vee B \equiv B \vee A \end{array}\right\} \text{kommutativlik qonunlari.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 20. & (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \\ 21. & (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C) \end{array}\right\} \text{assosiativlik qonunlari.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 22. & A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ 23. & A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array}\right\} \text{distributivlik qonunlari.}$$

M to'plamning a elementi haqida aytilgan tasdiq a ning o'rniga M ning aniq bitta elementini qo'ysak mulohaza bo'lar ekan. Bunday tasdiqlarni <u>bir o'zgaruvchili mulohazaviy formula</u> yoki <u>bir o'zgaruvchili predikat</u> deb ataymiz.

M to'plamda aniqlangan bir o'zgaruvchili R(x)-predikat berilgan bo'lsin. U holda $\forall x R(x)$ ifoda, M to'plamning barcha elementlari uchun R(x) rost bo'lganda rost, M to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0)$ yolg'on bo'lganda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Bu erdagi $\forall$ belgi umumiylik kvantorini bildiradi.

Endi umumiylik kvantorining ko'p o'zgaruvchili predikatlarga qo'llanilishi bilan tanishib chiqamiz. M to'plamda aniqlangan $R(x_1,\dots,x_n)$ predikat berilgan bo'lsin. U holda $\forall x_1 R(x_1,\dots,x_n)$-(n-1) o'zgaruvchili predikatdir. Haqiqatdan $x_2,\dots,x_n$ lar o'rniga M to'plamning $a_2,\dots,a_{n-1}$ elementlarini qo'ysak, $\forall x_1 R(x_1,a_2,\dots,a_{n-1})$ - mulohazaga ega bo'lamiz. Bu mulohaza yo rost, yo yolg'on qiymatni qabul qiladi.

$\forall x_1 R(x_1,\dots,x_n)$ ifoda «barcha x_1 lar uchun $R(x_1,\dots,x_n)$», yoki «ixtiyoriy x_1 uchun $R(x_1,\dots,x_n)$» deb o'qiladi. $\forall x_1 R(x_1,\dots,x_n)$ ifodadagi x_1 o'zgaruvchi <u>bog'liq</u>

o'zgaruvchi, $x_2,\dots,x_n$ o'zgaruvchilar erkin o'zgaruvchilar deyiladi.

M to'plamda aniqlangan bir o'zgaruvchili R(x) predikat berilgan bo'lsin. U holda $\exists x R(x)$ mulohaza bo'lib, M to'plamning kamida bitta x_0 elementi uchun $R(x_0)$ rost bo'lganda rost qolgan hollarda, ya'ni M to'plamning barcha elementlari uchun R(x)- yolg'on bo'lganda yolg'on bo'ladigan mulohazadir.

M to'plamda aniqlangan $R(x_1,\dots,x_n)$ predikat berilgan bo'lsin, u holda $\exists x_1 R(x_1,\dots,x_n)$- ifoda n-1 o'zgaruvchili predikat bo'lishini ko'rib chiqamiz. Haqiqatdan, $x_2,\dots,x_n$ o'zgaruvchilar M to'plamdan olingan $a_2,\dots,a_{n-1}$ qiymatlarni qabul qilsin, u holda $\exists x_1 R(x_1,a_2,\dots,a_{n-1})$ ifodalar x_1 ning M to'plamdan olingan kamida bitta qiymatida rost bo'lsa rost, aks holda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Ko'rinib turibdiki, $\exists x_1 R(x_1,\dots,x_n)$ - predikat $x_2,\dots,x_n$ o'zgaruvchilarning M dagi qiymatlari bilan aniqlanib x_1 ga bog'liq emas ekan. Ya'ni n-1 o'zgaruvchili predikat ekan.

$\exists x_1 R(x_1,\dots,x_n)$ - ifoda «Shunday x_1 mavjud-ki, $R(x_1,\dots,x_n)$ bo'ladi» deb o'qiladi. $\exists$ - simvol esa mavjudlik kvantori deyiladi.

Predikatlar mantiqining A formulasi tarkibidagi elementar formulalarni, har qanday predikatlar bilan almashtirish natijasida aynan rost predikat hosil bo'lsa bunday formula aynan rost formula yoki mantiq qonun yo umumqiymatli formula deyiladi. Predikatlar algebrasining ikkita formulasi ularga kirgan barcha predikatlarni har qanday predikatlar bilan almashtirganimizda bir xil qiymatlar qabul qilsalar, ular teng kuchli deyiladi. A va B formulalar teng kuchliligi $A \equiv B$ ko'rinishida belgilanadi.

Mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklarda mulohazalarni predikatlar mantiqining formulalari bilan almashtirib predikatlar mantiqining teng kuchli formulalarini hosil qilishimiz mumkin, masalan, $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ teng kuchlilikdagi A, B mulohazalarni predikatlar mantiqining mos ravishda A va B formulalari bilan almashtirsak $\overline{\mathcal{A}} \wedge \overline{\mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} \vee \overline{\mathcal{B}}$ teng kuchlilikka ega bo'lamiz, xususan $\overline{F(x) \wedge F(y)} \equiv \overline{F(x)} \vee \overline{F(y)}$

Bu teng kuchliliklardan tashqari predikatlar mantiqning o'zigagina xos bo'lgan teng kuchli formulalar ham bor. Shunday teng kuchli formulalar namunalarini keltiramiz:

1. $\rceil(\forall x R(x)) \equiv \exists x \rceil R(x)$.
2. $\rceil(\exists x R(x)) \equiv \forall x \rceil R(x)$.
3. $\forall x R(x) \equiv \rceil(\exists x \rceil R(x))$.
4. $\exists x R(x) \equiv \rceil(\forall x \rceil R(x))$.
5. $\exists x A(x) \vee \exists x V(x) \equiv \exists x(A(x) \vee V(x))$.
6. $\forall x A(x) \wedge \forall x V(x) \equiv \forall(x)(A(x) \wedge V(x))$.

Natural sonlar to'plamida qaralgan tub son tushunchasi uchun quyidagi formulani keltirish mumkin :$(\forall n\in N)((n\text{-tub son})\Leftrightarrow(n\neq 1\wedge n \vdots p\Rightarrow p=1\vee p=n))$.

Yoki quyidagi belgilashlarni kiritsak :

A(x) – «x-tub son», V(x) – «$x\neq 1$», S(x) –« $x \vdots p$», D(x) – «x=1», P(x) – «x=p» , u xolda yuqoridagi formulani quyidagicha ifodalash mumkin :

$(\forall x\in N)\ (A(x) \Leftrightarrow B(x) \wedge C(x) \Rightarrow D(x) \vee P(x))$.

Isbot tushunchasi. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (1) mulohazalar berilgan bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsa:

1. A_1 - aksioma yoki avval isbot qilingan mulohaza bo'lsin.

2. Har bir A_i, $i \geq 2$ yoki o'zidan oldingi mulohazadan keltirib chiqarilsin, yoki avval isbot qilingan mulohaza bo'lsin.

U holda (1) ketma-ketlikni biz A_n mulohazaning isboti deymiz.

2. Algebralar. Algebraik tizimlar.

12-ta'rif. $A\neq\varnothing$ to'plam berilgan bo'lsin. A^n ning ixtiyoriy ρ to'plamostini A to'plamda aniqlangan n-ar yoki n-o'rinli munosabat deyiladi. Hususan A^2 ning ixtiyoriy to'plamostisi A to'plamida berilgan binar munosabat deyiladi. Agar

(a, b) juftliklar ρ binar munosabatga tegishli bo'lsa, $a\rho b$ deb belgilaymiz.

13-ta'rif. P va Q binar munosabatlar bo'sh bo'lmagan A to'plamda berilgan bo'lsin. U holda $P \circ Q = \{(a,c)|\ \exists\, b\in A,\ (a,b)\in Q \wedge (b,c)\in P\}$ to'plam P va Q binar munosabatlarning kompozisiyasi deyiladi.

2–teorema. Agar f, h, g lar A to'plamida berilgan binar munosabatlar bo'lsa, u holda $f\circ(h\circ g)=(f\circ h)\circ g$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni binar munosabatlar kompozisiyasi assosiativdir.

Isbot. $\forall(x,t)\in f\circ(g\circ h)$ bo'lsin, u holda kompazisiya ta'rifga ko'ra shunday $y,z\in A$ elementlar topilib $(x,y)\in f, (y,z)\in g$ va $(z,t)\in L$ bo'ladi. Demak $(x,z)\in f\circ g$ va $(z,t)\in L$ u holda $(x,t)\in(f\circ g)\circ h$ bo'ladi. YA'ni $f\circ(g\circ L)\subseteq(f\circ g)\circ h$. Shunga o'xshash $(f\circ g)\circ h\subseteq f\circ(g\circ h)$ bo'lishi isbotlanadi.

14-ta'rif. A to'plamida R –binar munosabat berilgan bo'lsin.

$a)$ Agar $\forall a\in A$ uchun $(a,a)\in R$ bo'lsa, R –binar munosabat refleksiv munosabat deyiladi;

$b)$ Agar $(a,b)\in R$ bo'lishidan $(b,a)\in R$ bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R^{-1}=R$ shart bajarilsa, R-simmetrik munosabat deyiladi;

$c)$ Agar $\forall(a,b)\in R$ va $(b,a)\in R$ bo'lishidan $(a,c)\in R$ bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R\circ R\subset R$ shart bajarilsa, R-tranzitiv munosabat deyiladi;

$d)$ refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lgan binar munosabat ekvivalentlik munosabati deyiladi.

15-ta'rif. A^n to'plamni A ga akslantiradigan har qanday akslantirish A to'plamda berilgan n-ar yoki n-o'rinli algebraik amal deyiladi. Bu erda n-manfiy bo'lmagan butun son bo'lib, algebraik amalning rangi deyiladi. $n=0$ bo'lsa, $A^0=\varnothing$ bo'lgani uchun, 0-ar amal $f:\{\varnothing\}\to A$ ko'rinishidagi akslantirish bo'lib $\varnothing$ ni A ning birorta elementiga o'tkazadi. Boshqacha qilib aytganda 0-ar amal A to'plamning ajratilgan elementidan iborat. Bir o'rinli amal $f:A\to A$ ko'rinishdagi funksiyadan iborat bo'lishi ravshan. Bir o'rinli algebraik amal qisqalik uchun ba'zan unar amal deyiladi.

16-ta'rif. $A\neq 0$ to'plam va unda aniqlangan $*$ binar algebraik amal berilgan bo'lsin. U holda $(A,*)$ juftlik gruppoid deb ataladi.

17-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin, u holda

a) Agar $\forall a,b\in A$ uchun $a*b=b*a$ bo'lsa, u holda $*$-amali algebraik amal A to'plamida kommutativ deyiladi;

b) Agar $\forall a,b,c\in A$ uchun $a*(b*c)=(c*b)*c$ shart bajarilsa, $*$- A to'plamida assosiativ algebraik amal deyiladi;

c) Agar $\forall a\in A$ uchun shunday $e\in A$ topilib, $e*a=a$ shart bajarilsa, e element $*$ amalga nisbatan chap neytral element, agar $a*e=a$ shart bajarilsa, o'ng neytral element, agar ikkala shart ham bajarilsa neytral element deyiladi.

18-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin. Agar $e\in A$ element $*$-amalga nisbatan neytral element bo'lsa, u holda e grippoidning neytral elementi deyiladi.

19-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid berilgan bo'lsin, u holda $a\in A$ element va $\forall b,c\in A$ elementlar uchun $a*b=a*c$ tenglikdan $b=c$ kelib chiqsa, u holda a element $(A,*)$ gruppoidning chap regulyar elementi, $b*a=c*a$ shartdan $b=c$ kelib chiqsa, a element $(A,*)$ gruppoidning o'ng regulyar elementi deyiladi. Ham chap, ham o'ng regulyar element regulyar element deyiladi.

20-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid neytral elementga ega bo'lsin. U holda $a\in A$ element uchun shunday $a'\in A$ element topilib, $a'*a=e$ bo'lsa, a' element a elementga chap simmetrik element, $a*a'=e$ bo'lsa o'ng simmetrik, ikkala shart ham bajarilsa, simmetrik element deyiladi.

21-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid, R esa A to'plamdagi ekvivalentlik munosabati bo'lsin. Agar $a_1,a_2,b_1,b_2\in A$ elementlar uchun a_1Rb_1 va a_2Rb_2 shartlardan $(a_1*a_2)R(b_1*b_2)$ kelib chiqsa, u holda R-ekvivalentlik munosabati $(A,*)$ gruppoidda kongruensiya deyiladi.

22-ta'rif. $(A,*)$-gruppoidda $*$-assosiativ amal bo'lsa, bunday gruppoid yarimgruppa deyiladi.

Neytral elementga ega bo'lgan yarimgruppa monoid deyiladi.

23-ta'rif. $(A,*)$-gruppoid va $B \subset A$ bo'lsin. Agar $\forall b_1, b_2 \in B$ elementlar uchun $b_1 * b_2 \in B$ bo'lsa, B to'plam $*$ algebraik amalga nisbatan algebraik yopiq deyiladi. $(B,*)$ juftlik esa $(A,*)$ gruppoidning qism gruppoidi yoki gruppoidosti deyiladi.

24-ta'rif. $A \neq \varnothing$ to'plam va A da bajariladigan algebraik amallar to'plami Ω berilgan bo'lsin (A,Ω) - juftlik algebra deyiladi. A - to'plam algebraning bosh to'plami, Ω-algebraning bosh amallari to'plami deyiladi.

(A,Ω) to'plam berilgan bo'lsa, A to'plam Ω dagi barcha amallarga nisbatan algebraik yopiq bo'lishi ravshan. Algebradagi Ω-amallar to'plami chekli, ya'ni $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ bo'lsa, $(A, \{\omega_1, \dots, \omega_n\})$ o'rniga yozuvni ihchamlashtirish maqsadida (A, Ω) - deb yozishga kelishib olamiz.

25-ta'rif. (A,Ω) va (B,Ω') algebralarning amallari to'plamlari Ω va Ω' lari orasida biektiv moslik o'rnatilgan bo'lib, Ω to'plamidagi har bir ω n-ar amalga nisbatan Ω' dan ω' n-ar amal mos qo'yilgan bo'lsa, bu algebralar bir hil turli algebralar deyiladi.

Agar (A,Ω) algebra berilgan bo'lsa, Ω-to'plamdagi amallarning ranglaridan iborat to'plam algebraning turi deyiladi. Xususan $(A, \varpi_1, \dots, \omega_n)$ algebraning turi $\{r(\omega_1), \dots, r(\omega_n)\}$ to'plamdan iborat. Bir hil turdagi algebralarning bir-biriga mos keladigan amallarining ranglari bir hil bo'lishi ravshan.

26-ta'rif. Bizga $(2,1)$ turli $(G,*,1)$ algebra berigan bo'lib quyidagi shartlar bajarilsin.

1. $*$-binar algebraik amal assosiativ, ya'ni $\forall a,b,c \in G$ uchun $(a*b)*c = a*(b*c)$ bo'lsin.

2. G da neytral element mavjud, ya'ni $\forall a \in G$ uchun shunday $e \in G$ topilib, $e * a = a$ shart bajarilsin.

3. Har qanday $a \in G$ uchun $a' * a = e$ bo'lsin.

U holda $(G,*,')$ - algebra gruppa deyiladi.

Gruppadagi amal kommutativ, ya'ni $\forall a,b \in G$ uchun $a*b = b*a$ shart bajarilsa, bunday gruppa abel gruppasi deyiladi.

27-ta'rif. Agar $(K,+,-,\bullet)$ $(2,1,2)$ turli algebra uchun quyidagi shartlar bajarilsa

(1) $(K,+,-,)$ abelь gruppasi;

(2) $(K,\bullet)$-yarim gruppa;

(3) $\forall a,b,c \in K$ uchun $a \bullet (b+c) = a \bullet b + a \bullet c$ va $(b+c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$ u holda $(K,+,-,\bullet)$ - algebra halqa deyiladi.

$(K,+,-,)$ additiv gruppaning neytral elementi halqaning noli deyiladi va 0 orqali belgilanadi.

Z halqa unda bajarilgan "$\bullet$"-amalining xossalariga mos ravishda nomlanadi.

Agar ko'paytirish amali assosiativ bo'lsa, halqa assosiativ halqa, ko'paytirish amaliga nisbatan birlik element mavjud bo'lsa, halqa birlik elementli halqa deyiladi.

Agar halqada $a \neq 0$ va $b \neq 0$ elementlar uchun $a \bullet b = 0$ bo'lsa, a nolning chap bo'luvchisi, b esa nolning o'ng bo'luvchisi deyiladi. Nolning ham chap, ham o'ng bo'luvchisi bo'lgan element nolning bo'luvchisi deyiladi. Biz asosan birlik elementga ega bo'lgan assosiativ halqalarni o'rganamiz. Halqaning birlik elementini odatda 1 orqali belgilaymiz.

28-ta'rif. Nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan assosiativ, kommutativ halqada $1 \neq 0$ shart bajarilsa, bunday halqa butunlik sohasi deyiladi.

29-ta'rif. $A \neq \varnothing$ to'plam uchun Ω - A dan aniqlangan amallar to'plami Ω' - A da aniqlangan munosabatlar to'plami bo'lsin. U holda (A, Ω, Ω'') - tartiblangan uchlik- algebraik sistema deyiladi.

A-to'plam algebraik sistemaning asosiy to'plami, Ω-algebraik sistemaning bosh amallari to'plami, Ω'- algebraik sistemaning bosh munosabatlari to'plami deyiladi.

Har qanday n-o'rinli algebraik amalni $(n+1)$- o'rinli algebraik munosabat sifatida qarashimiz mumkinligi ayon. Haqiqatdan ham $\omega : A^n \to A$ n-ar algebraik amalni $R_\omega = \{(a_1,...,a_n); \omega(a_1,...,a_n) \mid \forall a_1,...,a_n \in A\}$ $n+1$ o'rinli munosabat deyishimiz mumkin. Agar (A, Ω, Ω') algebraik sistema berilgan bo'lsa, uni A to'plam va unda berilgan $\Omega \cup \Omega'$- munosabatlar to'plamidan iborat $(A, \Omega \cup \Omega')$- juftlik sifatida qarashimiz mumkin. Aytilganlarni hisobga olsak quyidagilarga ega bo'lamiz.

30-ta'rif. $A \neq \varnothing$ to'plam unda aniqlangan Ω- munosabatlar to'plamidan iborat (A, Ω) juftlik algebraik sistema deyiladi.

3. Algebralar gomomorfizmi va uning turlari

31-ta'rif. $f - A$ to'plamda berilgan binar munosabat bo'lsin. Agar $\forall x, y, z \in A$ lar uchun $(x, y) \in f$ va $(x, z) \in f$ bo'lishidan $y = z$ kelib chiqsa, u holda f binar munosabat akslantirish (funksiya) deyiladi.

32-ta'rif. f va g funksiyalar berilgan bo'lsin, u holda $f \circ g = \{(x, z) \, / \exists t (x,t) \in g \text{ ва } (t, z) \in f \}$ to'plam f va g funksiyalarning kompozisiyasi deyiladi.

33-ta'rif. $A \neq \varnothing$ to'plamning har bir elementini o'zini o'ziga akslantiradigan akslantirish ayniy akslantirish yoki birlik akslantirish deyiladi. Bunday akslantirishni E_A orqali belgilaymiz

34- ta'rif. $f : A \to B$ akslantirish A to'plmamni B to'plamiga akslantirish bo'lsin. U holda, agar $\forall x_1, x_2 \in A$ va $x_1 \neq x_2$ elementlar uchun $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lsa, f -in'ektiv, $\operatorname{Im} f = B$ bo'lsa, f - syur'ektiv akslantirish deyiladi.

Agar f ham syur'ektiv, ham in'ektiv akslantirish bo'lsa, u holda biektiv akslantirish deyiladi.

35-ta'rif. $f: A \to B,\ \ g: B \to A$ akslantirishlar berilgan bo'lsin, u holda agar $f \circ g = E_B$ bo'lsa f akslantirish g akslantirishga chapdan teskari, akslantirish esa f akslantirishga o'ngdan teskari deyiladi. Agar $f \circ g = E_B$ va $g \circ f = E_A$ shartlar bajarilsa, u holda f va g akslantirishlar bir biriga teskari akslantirishlar deyiladi.

36-ta'rif. Agar ikkita A va B to'plamlarning birini ikkinchisiga o'zaro bir qiymatli akslantiradigan kamida bitta akslantirish mavjud bo'lsa, to'plamlar teng quvvatli deyiladi va $A \cong B$ ko'rinishida yoki $|A| = |B|$ ko'rinishida belgilanadi.

37-ta'rif. (A,Ω), (B,Ω') algebralar berilgan bo'lsin. Ω dagi barcha amallarni saqlaydigan $\varphi: A \to B$ akslantirish (A,Ω) agebraning (B,Ω) algebraga gomomorfizmi deyiladi.

38-ta'rif. $\varphi: A \to B$ akslantirish (A,Ω) agebraning (B,Ω') algebraga gomomorfizmi bo'lsin. U holda agar φ - in'ektiv akslantirish bo'lsa, monomorfizm, φ - syur'ektiv akslantirish bo'lsa, epimorfizm, φ - biektiv akslantirish bo'lsa izomorfizm deyiladi. Monomorf akslantirishni izomorf joylashtirish deb ham yuritiladi.

39-ta'rif. Algebrani o'zini o'ziga gomomorf akslantirish endomorfizm, algebrani o'zini o'ziga izomorf akslantirish esa avtomorfizm deyiladi.

40-ta'rif. (A,Ω) algebrani (B,Ω') algebraga akslantiradigan kamida bitta izomorfizm mavjud bo'lsa, u holda (A,Ω) algebra (B,Ω') algebraga izomorf deyiladi.

3-teorema. Agar (A,Ω_1) algebraning (B,Ω_2) algebraga izomorfizmi bo'lsa, u holda φ ga teskari bo'lgan φ^{-1} akslantirish (B,Ω_2) algebraning (A,Ω_1) algebraga izomorfizmidir.

Isbot. φ-biektiv akslantirish bo'lganligi sababli φ^{-1} ham biektiv akslantirish bo'lishi 6.16-teoremada isbot qilingandek. SHuning uchun teoremani isbot qilish uchun φ^{-1} akslantirish algebraik amallarni saqlishini ko'rsatish kifoya.

Faraz qilaylik, $\omega_1 \in \Omega$ n-ar algebraik amalga Ω_2 to'plamidan ω_2 amal mos kelsin. $\forall b_1,\ldots,b_n \in B$ elementlar uchun $\varphi(a_1) = b_1,\ldots,\varphi(a_n) = b_n$ deb olsak, u holda $\varphi^{-1}(b_1) = a_1,\ldots,\varphi^{-1}(a_n) = b_n$.

Endi $\varphi^{-1}(\omega_2(b_1,\ldots,b_n)) = \omega_1(\varphi^{-1}(b_1),\ldots,\varphi^{-1}(b_n))$ bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan agar φ-akslantirish amallarni saqlashini hisobga olsak,

$$\varphi^{-1}(\omega_2(b_1),\ldots,\omega_2(b_n)) = \varphi^{-1}(\omega_2(\varphi(a_1)),\ldots,(\varphi(a_n))) = \varphi^{-1}(\varphi(\omega_1(a_1,\ldots,a_n))) =$$
$$= (\varphi^{-1} \circ \varphi)(\omega(a_1,\ldots,a_n)) = \omega_1(a_1,\ldots,a_n) = \omega_1(\varphi^{-1}(b_1),\ldots,\varphi^{-1}(b_n))$$

Natija. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

4-teorema. Algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik, tranzitiv munosabat, ya'ni noqat'iy tartib munosabatdir.

Isbot. Haqiqatdan $\forall(A,\Omega_1)$ algebra (B,Ω_2) algebraning algebraostidir. Agar (A,Ω_1) algebra (B,Ω_2) algebraning algebraosti bo'lsa va aksincha (B,Ω_2) algebra (A,Ω_1) algebraning algebraosti bo'lsa, $A\subset B$ va $B\subset A$ bo'ladi, bundan $A=B$ kelib chiqadi. U holda, agar Ω_1 dagi ω_1 n-ar algebraik amalga Ω_2 dan ω_2 n-ar amal mos kelsa, $\forall a_1,...,a_n\in A$ uchun $\omega_1(b_1,...,b_n)=\omega_2(b_1,...,b_n)$ bo'ladi.

Algebraosti munosabati tranzitiv bo'lishi ham bevosita tekshiriladi. Buni mustaqil isbotlash uchun talabalarga qoldiramiz.

Shunday qilib, algebraosti bo'lish munosabati refleksiv, antisimmetrik va tranzitiv munosabat, ya'ni, noqat'iy tartib munosabat ekan.

5-teorema. Agar (A,Ω) algebrada hech bo'lmaganda bitta nol o'rinli algebraik amal bo'lsa, bu algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi algebraostilar kesishmasi yana (A,Ω) ning algebraosti bo'ladi.

Isbot. Nol o'rinli amal ajratilgan element ekanligini hisobga olsak, bu element (A,Ω) algebraning har qanday algebraostining ham ajratilgan elementi bo'lishi kelib chiqadi. Demak, (A,Ω) algebraning algebraostilari ixtiyoriy to'plamidagi algebraostilari kesishmasi bo'sh emas. Natijada bu kesishma yuqorida isbotlaganimizga ko'ra algebraosti bo'ladi.

41-ta'rif. $(G,\bullet,^{-1}),(H,\bullet,^{-1})$ gruppalar berilgan bo'lsin. Agar G ni H ga akslantiradigan kamida bitta izomorf akslantirish mavjud bo'lsa bu gruppalar <u>izomorf</u> deyiladi va $G\cong H$ orqali belgilanadi.

6-teorema. Gruppalarning izomorfizmi ekvivalentlik munosabatidir.

(A,Ω_1) va (B,Ω_2) bir xil turli algebraik sistemalar berilgan bo'lib, $\omega_1\in\Omega_1$ n-ar munosabatga $\omega_2\in\Omega_2$ n- ar algebraik munosabat mos qo'yilgan bo'lsin. Agar, A to'plamni B to'plamga akslantiradigan $\varphi:A\to B$ akslantirish berilgan bo'lib, $\forall a_1,\dots,a_n\in A$ elementlar uchun $(a_1,\dots,a_n)\in\omega_1$ bo'lishidan $(\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_n))\in\omega_2$ bo'lishi kelib chiqsa, φ akslantirish, R_1 <u>munosabatni saqlaydi</u> deb ataymiz. A to'plamni B to'plamga akslantiradigan $\varphi:A\to B$ akslantirish Ω_1 dagi har bir ω_1 munosabatni saqlasa, bunday akslantirish (A,Ω_1) algebraik sistemani (B,Ω_2) algebraik sistemaga <u>gomomorf akslantirish</u> deyiladi. Xuddi algebralardagidik φ- syur'ektiv bo'lsa, <u>epimorfizm</u>, in'ektiv bo'lsa <u>monomorfizm</u>, biektiv bo'lsa <u>izomorfizm</u> deyiladi.

Sistemaosti tushunchasi ham algebraosti tushunchasiga o'xshash usulda kiritiladi (A,Ω_1) va (B,Ω_2) bir xil turli algebraik sistemalar berilgan. $A\subset B$, va $\omega_1\in\Omega_1$ n- ar munosabatga $\omega_2\in\Omega_2$ n- ar algebraik munosabat mos qo'yilgan bo'lsin. Agar $\forall a_1,\dots,a_n \in A$ uchun $(a_1,\dots,a_n)\in\omega_1$, bo'lishidan $(a_1,\dots,a_n)\in\omega_2$ bo'lishi kelib chiqsa ω_1 munosabat ω_2 munosabatning A to'plam bilan cheklangani deyiladi. Agar (A,Ω_1) sistemadagi har bir $\omega_1\in\Omega$ munosat bu munosabatga Ω_2 to'plamdan mos bo'lgan ω_2 munosabatning cheklangani bo'lsa, u holda (A,Ω_1) algebraik sistema (B,Ω_2) algebraik sistemaning sistemaostisi deyiladi.

Nazorat savollari:

1. Mulohaza deb qanday gapga aytiladi?
2. Mantiqiy amallar qanday, ularning bajarilish tartibini ayting.
3. Mulohazaviy formula ta'rifini ayting.
4. Teng kuchli, Aynan rost, aynan yolg'on, bajariluvchi formulalar ta'riflarini ayting.
5. Teng kuchli formula bilan mantiq qonuni orasida qanday bog'lanish bor?
6. Predikatning qiymatlar sohasi, rostlik sohasi nima?
7. Umumiylik va mavjudlik kvantorlarini qo'llashga misollar keltiring.
8. Predikatli formulaning qanday turlarini bilasiz?
9. Teoremaning qanday turlarini bilasiz?
10. Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida ifodalashga misol keltiring.
11. Akslantirishlar kompozisiyasi xossalarini ayting.
12. In'ektiv, syur'ektiv, biektiv akslantirishga misol keltiring.
13. n-ar algebraik amal ta'rifini ayting.
14. Gruppoid nima?
15. Gruppoidning neytral, regulyar, simmetrik elementi nima?
16. Kongruensiyani misollar yordamida tushuntiring.
17. Yarimgruppa deb nimaga aytiladi?
18. Monoidga ta'rif bering va misol keltiring.
19. Algebralar gomomorfizmini tushuntiring.
20. Monomorfizm, epimorfizmga misollar keltiring.
21. Algebralar izomorfizmi ekvivalentlik munosabati ekanligini asoslang.
22. Algebraostilar kesishmasi yana algebra bo'lishini isbotlang.
23. Additiv, multiplikativ gruppalarga algebra, geometriya kursidan misollar keltiring.
24. Gruppalar gomomorfizmining qanday turlarini bilasiz?
25. Har qanday gomomorfizm izomorfizm bo'la oladimi, yoki aksincha?
26. Halqaning qanday turlarini bilasiz?
27. Algebraik sistemaga ta'rif bering.
28. Algebraik sistemalar gomomorfizmini tushuntiring.
29. Algebraik sistemalar avtomorfizmi deb nimaga aytiladi?

30. Algebraik sistema sistemaosti tushunchasiga ta'rif bering.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. A.Yunusov. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. O'quv qo'llanma. T., Yangi asr avlodi. 2006. https://n.ziyouz.com/books/kollej_va_otm_darsliklari/matematika/Matematik%20mantiq%20va%20algoritmlar%20nazariyasi%20elementlari%20(A.Yunusov).pdf

2. D.Yunusova, A.Yunusov. Algebra va sonlar nazariyasi. modul texnologiyasi asosida tayyorlangan misol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. https://n.ziyouz.com/books/kollej_va_otm_darsliklari/matematika/Algebra%20va%20sonlar%20nazariyasi%20(D.Yunusova,%20A.Yunusov).pdf

3. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M., Visshaya shkola. 1979 g. https://booksee.org/book/1221511

4. Zavalo S.T. i dr. Algebra i teoriya chisel.CH. I,II.Kiïv. Visha shkola.1983g. https://bookree.org/reader?file=787768

5. Petrova V.T.Leksii po algebre i geometrii.Ch.1,2. Moskva,1999g

6. Kostrikin I.A. Vvedenie v algebru. M., Nauka.1977 g.

7. Xojiev J.X. Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, «O'zbekiston», 2001y.

8. Jim Hefferon. Lab Manual for Linear Algebra. Jim Hefferon Mathematics, Saint Michael's College Colchester, Vermont USA 2019-Dec-25.

9. Martyn R. Dixon, Leonid A. Kurdachenko, Igor Ya. Subbotin, "ALGEBRA AND NUMBER THEORY" 2013

10. Sadaddinova S.S., Abduraxmanova Yu.M., Raximova F.S. Diskret matematika. O'quv qo'llanma. Tashkent 2014

11. http://www.math.usf.edu/~eclark/numtheory_links.html.

12. http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/- Jim Hefferon. linear algebra.

2-Mavzu: p-adik norma, p-adik sonlar maydoni va uning xossalari

Reja.

1. Normalangan maydon tushunchasi, ekvivalent normalar
2. Ratsional sonlar maydonida p-adik norma. Ostrovskiy teoremasi
3. p-adik sonlar maydoni, sodda xossalari
4. p-adik sonlar maydonining topologik xossalari

Tayanch so'z va iboralar: normalangan maydon, metrika, noarximed norma, teng yonli uchburchak prinsipi, ekvivalent normalar, p-adik norma, p-adik butun sonlar, p-adik birliklar, yopiq va ochiq sharlar

1. Normalangan maydon tushunchasi, ekvivalent normalar

Aytaylik, F maydon bo'lsin.

1.1-ta'rif. F maydonda aniqlangan norma deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy funksiyaga aytiladi:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. Ixtiyoriy $x, y \in F$ $uchun$ $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|;$
3. Ixtiyoriy $x, y \in F$ $uchun$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$

$(F, \|\cdot\|)$ juftlik normalangan maydon deyiladi.

Ravshanki, Q ratsional sonlar maydonida aniqlangan sonning absolyut qiymati, ya'ni $|x| = \begin{cases} x, \ agar \ x \geq 0, \\ -x, \ agar \ x < 0 \end{cases}$ funksiya norma aksiomalarini qanoatlantiradi.

Endi norma ta'rifidan kelib chiqadigan ba'zi xossalarni o'rganamiz.

1^0. $\|1\| = 1$.

Isbot. Haqiqatdan ham, normaning ikkinchi xossasiga ko'ra $\|1\| = \|1 \cdot 1\| = \|1\| \cdot \|1\| = \|1\|^2$, bundan $\|1\| = 1$ yoki $\|1\| = 0$. So'ngi hol normaning birinchi xossasiga zid, shu sababli $\|1\| = 1$ bo'ladi.

2^0. $\|-1\| = 1$.

Isbot. Haqiqatdan ham, $(-1) \cdot (-1) = 1$ bo'lganligi sababli, ikkinchi xossadan quyidagini yozish mumkin:

$\|1\| = \|(-1) \cdot (-1)\| = \|-1\| \cdot \|-1\| = \|-1\|^2 = 1 \Rightarrow \|-1\| = 1$.

3^0. Ixtiyoriy $x, y \in F$ uchun $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4^0. Ixtiyoriy $x, y \in F$ uchun $\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x + y\|$.

Matematik induksiya metodidan foydalansak, quyidagi xossalar kelib chiqadi:

5^0. $\|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n\| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \|x_3\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$.

6^0. $\|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \ldots + \|x_n\|$.

Quyidagicha aniqlangan norma trivial norma deyiladi:

ixtiyoriy $x \in F$ uchun

$$\|x\| = \begin{cases} 1, \ agar \ x \neq 0, \\ 0, \ agar \ x = 0 \end{cases}$$

Trivial bo'lmagan norma notrivial norma deyiladi. Notrivial normaga ratsional sonlar maydonida aniqlangan absolut qiymat misol bo'ladi.

1.2-ta'rif. Agar $\|\cdot\|$ norma uchun har doim $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ tengsizlik bajarilsa, u noarximed norma deyiladi.

Agar ixtiyoriy $x, y \in F$ uchun $d(x,y) = \|y - x\|$ funksiyani aniqlasak, bu funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantiradi, ya'ni

1) $d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) $d(x,y) = d(y,x)$,

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

shartlar o'rinli bo'ladi.

Masalan, ikkinchi shartni tekshiramiz:

$$d(x,y) = \|y - x\| = \|-1(x-y)\| = \|-1\| \cdot \|x - y\| = 1 \cdot d(y,x) = d(y,x)$$

Qolgan aksiomalarning o'rinli ekanligini ham yuqoridagi kabi isbotlash mumkin.

Agar uchinchi shartni $d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$ shart bilan almashtirsak, bunday metrika noarximed metrika (ultrametrika) deyiladi.

Metrikaning uchinchi $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ xossasi "uchburchak tengsizligi" deb nomlanadi. Bunga sabab C kompleks sonlar maydonida ushbu $d(a+ib, c+id) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$ metrikaga nisbatan bu tengsizlik quyidagini anglatadi: kompleks tekislikdagi uchburchakning ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta. Bu xossa noarximed metrika holida qanday bo'lishini qaraymiz. Soddalik uchun $z = 0$ deb olamiz. U holda noarximed uchburchak tengsizligi $\|x - y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ ko'rinishda bo'ladi.

Noarximed normalar uchun quyidagi teorema o'rinli:

1.1-teorema. Agar $\|x\| > \|y\|$ bo'lsa, u holda $\|x + y\| = \|x\|$ bo'ladi.

Isbot. Bir tomondan $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) = \|x\|$ ya'ni

$$\|x + y\| \leq \|x\|. \qquad (1)$$

Ikkinchi tomondan $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \max(\|x + y\|, \|y\|)$.

Agar $\max(\|x + y\|, \|y\|) = \|y\|$ deb olsak, u holda $\|x\| \leq \|y\|$ bo'lib, $\|x\| > \|y\|$ shartga zid bo'lar edi. Shu sababli $\max(\|x + y\|, \|y\|) = \|x + y\|$

Demak,

$$\|x\| \leq \|x + y\|. \qquad (2)$$

(1) va (2) dan $\|x + y\| = \|x\|$.

Shunday qilib, agar uchburchakning x va y "tomonlari" teng bo'lmasa, u holda ularning kattasi uchinchisiga teng bo'lishi lozim. Bundan noarximed holda barcha uchburchaklarning "teng yonli" ekanligi kelib chiqadi.

Bu xossa kelgusida *teng yonli uchburchak prinsipi* deb yuritiladi.

1.2-teorema. F maydonidagi $\|\cdot\|$ norma noarximed norma bo'lishi uchun har qanday natural n sonning normasi 1 dan katta bo'lmasligi zarur va yetarli.

Metrika aniqlangan maydonda limitga o'tish amalini aniqlaymiz.

Aytaylik, $\{x_n\}$ F maydon elementlari ketma-ketligi va $x \in F$ bo'lsin.

1.3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_ε nomer topilib, barcha $n > N_\varepsilon$ larda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va quyidagicha yoziladi: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Bu holda $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ketma-ketlik limiti qaysi normaga nisbatan aniqlanishi muhim hisoblanadi.

Limiti 0 ga teng bo'lgan ketma-ketlikni nol ketma-ketlik deb ataymiz.

Haqiqiy analizdagi kabi yaqinlashuvchi ketma-ketliklar uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning limiti yagona bo'ladi.

2^0. Agar ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u chegaralangan bo'ladi.

3^0. Agar $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi va limiti noldan farqli bo'lsa, u holda shunday ε_0 va n_0 lar topilib, barcha $n > n_0$ larda $\|x\| \geq \varepsilon_0$ bo'ladi.

4^0. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x,\ \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n),\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0)$ limitlar mavjud va $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y,\ \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ bo'ladi.

5^0. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x) = 0$ bo'ladi va aksincha.

1.4-ta'rif. Agar F maydonda aniqlangan ikkita d_1 va d_2 metrika (ularga mos $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar) aynan bitta limitga o'tish amalini aniqlasa, u holda d_1 va d_2 metrikalar (ularga mos $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar) ekvivalent deyiladi.

Boshqacha aytganda $\lim_1$ birinchi normaga nisbatan limitga o'tish amalini, $\lim_2$ ikkinchi normaga nisbatan limitga o'tish amalini bildirsa, u holda $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalarning ekvivalentligi $\lim\limits_{n\to\infty}{}_1 x_n = x$ va $\lim\limits_{n\to\infty}{}_2 x_n = x$ tengliklarning teng kuchli ekanligini bildiradi.

Odatda ikkita normaning ekvivalentligi $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ kabi belgilanadi.

Yuqoridagi yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning 5-xossasiga ko'ra $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar teng kuchli bo'lishi uchun birinchi normaga nisbatan nol ketma-ketlik ikkinchi normaga nisbatan nol ketma-ketlik va aksincha bo'lishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

1.3-teorema. $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar ekvivalent bo'lishi uchun $\|x\|_1 > \|y\|_1$ va $\|x\|_2 > \|y\|_2$ tengsizliklar teng kuchli bo'lishi zarur va yetarli.

1.4-natija. $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar ekvivalent bo'lishi uchun $\|x\|_1 < 1$ va $\|x\|_2 < 1$ tengsizliklar teng kuchli bo'lishi zarur va yetarli.

Birinchi teorema va yuqoridagi natijadan har bir ekvivalentlik sinfi faqat noarximed normalar yoki faqat arximed normalardan iborat ekanligi kelib chiqadi.

1.5-teorema. Agar $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar ekvivalent bo'lsa, u holda shunday $\alpha > 0$ son topilib, barcha x larda $\|x\|_1 = \|x\|_2^{\alpha}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Agar $\|\cdot\|$ arximed norma bo'lsa, u holda $\|\cdot\|^{\alpha}$ α ning ixtiyoriy qiymatida ham norma bo'lavermaydi.

Masalan, ratsional sonlar to'plamida aniqlangan oddiy absolut qiymatni qaraylik va $\alpha > 1$ bo'lsin. U holda $|1+1|^{\alpha} = 2^{\alpha} > |1|^{\alpha} + |1|^{\alpha} = 2$ bo'lib, uchburchak aksiomasi bajarilmaydi.

$\|\cdot\|^{\alpha}$ uchun normaning 1 va 2 shartlari bajariladi. Shu sababli $\|\cdot\|^{\alpha}$ norma bo'lishi uchun $\|x+y\|^{\alpha} \le \|x\|^{\alpha} + \|y\|^{\alpha}$ tengsizlik ixtiyoriy x, y uchun bajarilishi zarur va yetarli.

So'ngi tengsizlik $0 < \alpha \le 1$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.

2. Ratsional sonlar maydonida p-adik norma. Ostrovskiy teoremasi

Ratsional sonlar maydonida oddiy absolyut qiymatdan farqli notrivial norma mavjudmi? degan savolga javob izlaymiz.

2.1-ta'rif. Aytaylik $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ biror tub son bo'lsin. Noldan farqli bo'lgan har qanday *a* butun son uchun $ord_p a$ bilan *a* ni tub ko'paytuvchilarga yoyilmasidagi *p* tub sonning daraja ko'rsatkichini, ya'ni $a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p^m)$ bo'ladigan eng katta nomanfiy butun *m* sonni belgilaymiz. Masalan:

$$ord_5 35 = 1,\ ord_5 250 = 3,\ ord_3 35 = 0,\ ord_2 250 = 1$$

Agar, *a=0* bo'lsa $ord_p a = \infty$ deb yozishga kelishamiz.

Darajaning xossalaridan quyidagi tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi:

$$ord_p(a \cdot b) = ord_p a + ord_p b \qquad (3)$$

Endi ixtiyoriy $x = \dfrac{a}{b}$ ratsional son uchun

$$ord_p x = ord_p a - ord_p b \qquad (4)$$

deb qabul qilamiz.

$ord_p x$ ning qiymati faqat x ga bog'liq bo'ladi, ya'ni x ni ifodasiga bog'liq emas.

Haqiqatdan ham, agar $x = \frac{ac}{bc}$ deb olsak, u holda (4) va (3) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$ord_p x = ord_p \frac{ac}{bc} = ord_p(ac) - ord_p(bc) =$$

$$= ord_p a + ord_p c - ord_p b - ord_p c = ord_p a - ord_p b = ord_p \frac{a}{b}$$

Q ratsional sonlar maydonida quyidagi $|\cdot|_p$ akslantirishni qaraymiz:

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{ord_p x}}, \text{ agar } x \neq 0 \\ 0, \text{ agar } x = 0 \end{cases}$$

2.1-teorema. $|\cdot|_p$ funksiya Q da norma bo'ladi.

Isbot. Normaning birinchi xossasi o'z-o'zidan ravshan. Normaning ikkinchi xossasini isbotlaymiz. Agar x yoki y ning biri 0 ga teng bo'lsa, isbot o'z-o'zidan ravshan. Faraz qilaylik $x \neq 0, y \neq 0$ bo'lsin. U holda ta'rif bo'yicha $|x|_p = \frac{1}{p^{ord_p x}}$, $|y|_p = \frac{1}{p^{ord_p y}}$, $|xy|_p = \frac{1}{p^{ord_p(xy)}}$; $ord_p(xy) = ord_p x + ord_p y$ ekanligini e'tiborga olsak:

$$|xy|_p = \frac{1}{p^{ord_p(xy)}} = \frac{1}{p^{ord_p x + ord_p y}} = \frac{1}{p^{ord_p x} \cdot p^{ord_p y}} = \frac{1}{p^{ord_p x}} \cdot \frac{1}{p^{ord_p y}} = |x|_p \cdot |y|_p$$

Demak, $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$.

Normaning uchinchi xossasini isbotlaymiz.

Agar $x=0$ yoki $y=0$ yoki $x+y=0$ bo'lsa, bu xossa o'z-o'zidan ravshan. Shu sababli $x, y, x+y$ sonlarni noldan farqli deb qaraymiz. Aytaylik $x = \frac{a}{b}$ va $y = \frac{c}{d}$, bu yerda $\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ qisqarmaydigan kasrlar bo'lsin. U holda

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ va } ord_p(x+y) = ord_p(ad+bc) - ord_p b - ord_p c.$$

Endi ikkita butun son yig'indisini bo'luvchi p ning eng katta darajasi har bir qo'shiluvchisini bir vaqtda bo'ladigan p ning ixtiyoriy darajasidan kichik emasligini e'tiborga olamiz, ya'ni agar m, n butun sonlar bo'lsa, u holda

$ord_p(m+n) \geq \min(ord_p m, ord_p n)$. U holda

$$ord_p(x+y) \geq \min(ord_p(ad); ord_p(bc)) - ord_p b - ord_p d =$$
$$= \min(ord_p a + ord_p d, ord_p b + ord_p c) - ord_p b - ord_p d =$$
$$= \min(ord_p a - ord_p b, ord_p c - ord_p d) = \min(ord_p x; ord_p y)$$

Demak,

$$|x+y|_p = p^{-ord_p(x+p)} \leq \max(p^{-ord_p x}, p^{-ord_p y}) = \max(|x|_p, |y|_p) \leq |x|_p + |y|_p.$$

Shunday qilib, $|\cdot|_p$ noraximed norma shartlarini qanoatlantiradi.

$\mathbb{Q}$ da aniqlangan $|\cdot|_p$ akslantirishning qiymatlar to'plami $\{p^n, n \in Z\} \cup \{0\}$ ekanini ko'rish qiyin emas.

Ostrovskiy teoremasi

Ratsional sonlar maydonidagi oddiy absolut qiymat uchun quyidagi belgilash kiritamiz: $|\cdot| = |\cdot|_\infty$

2.2-teorema (Ostrovskiy teoremasi). Ratsional sonlar maydonidagi har qanday notrivial norma biror p – tub son yoki $p = \infty$ uchun $|\cdot|_p$ normaga ekvivalent bo'ladi.

Isbot. 1 – hol. Faraz qilaylik biror n natural son mavjud bo'lib, $\| n \| > 1$ bo'lsin. Aytaylik n_0 shunday n larning eng kichigi bo'lsin. $\| n_0 \| > 1$ bo'lganligi sababli, biror α haqiqiy son uchun $\| n_0 \| = n_0^\alpha$ tenglik o'rinli bo'ladi. Endi ixtiyoriy n natural sonni n_0 - li sanoq sistemasida yozib olamiz:

$n = a_0 + a_1 n_0 + a_2 n_0^2 + \ldots + a_s n_0^s$, bu yerda $0 \leq a_i < n_0$, $a_s \neq 0$. U holda

$$\| n \| \leq \|a_0\| + \|a_1 n_0\| + \|a_2 n_0^2\| + \ldots + \|a_s n_0^s\| = \|a_0\| + \|a_1\| \cdot \|n_0\| + \|a_2\| \cdot \|n_0\|^2 +$$
$$+ \ldots + \|a_s\| \cdot \|n_0\|^s = \|a_0\| + \|a_1\| \cdot n_0^\alpha + \|a_2\| \cdot n_0^{2\alpha} + \ldots + \|a_s\| \cdot n_0^{s\alpha}.$$

$a_i < n_0$ va n_0 ni tanlashimizga ko'ra $\|a_i\| \leq 1$. Demak, $\| n \| \leq 1 + n_0^\alpha + n_0^{2\alpha} + \ldots + n_0^{s\alpha} =$

$$= n_0^{s\alpha}(1 + n_0^{-\alpha} + n_0^{-2\alpha} + \ldots + n_0^{-s\alpha}) \leq n_0^{s\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^\alpha}\right)^i \leq n^\alpha \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^\alpha}\right)^i$$

chunki $n \geq n_0^s$. $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n_0^\alpha}\right)^i$ qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisini C bilan belgilaymiz. Shunday qilib, barcha $n=1, 2, 3, \ldots$ uchun $\|n\| \leq Cn^\alpha$

Endi yetarlicha katta N natural sonni qaraymiz. So'ngi tengsizlikda n o'rniga n^N ni qo'yamiz va hosil bo'lgan tengsizlikning ikkala tomonidan N darajali ildiz chiqaramiz: $\|n\| \le \sqrt[N]{C}n^{\alpha}$. Bu tengsizlikda $N \to \infty$ da limitda o'tamiz. U holda $\lim\limits_{N\to\infty} \sqrt[N]{C} = 1$ ekanligini e'tiborga olsak, $\|n\| \le n^{\alpha}$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Teskari tengsizlikni quyidagicha isbotlash mumkin:

Yuqoridagi holdagi kabi n ni n_0-li sanoq sistemasida yozamiz. U holda $n_0^{s+1} > n \ge n_0^s$ bo'ladi. Shuningdek $\left\|n_0^{s+1}\right\| = \left\|n + n_0^{s+1} - n\right\| \le \|n\| + \left\|n_0^{s+1} - n\right\|$ ekanligini e'tiborga olsak, $\|n\| \ge \left\|n_0^{s+1}\right\| - \left\|n_0^{s+1} - n\right\| \ge n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n)^{\alpha}$ bo'ladi, chunki $\left\|n_0^{s+1}\right\| = \|n_0\|^{s+1} = n_0^{\alpha(s+1)}$ va yuqorida isbotlangan tengsizlikka ko'ra $\|n\| \le n^{\alpha}$.

Demak, $n \ge n_0^s$ tengsizlikni e'tiborga olsak,

$$\|n\| \ge n_0^{(s+1)\alpha} - (n_0^{s+1} - n_0^s)^{\alpha} = n_0^{(s+1)\alpha}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^{\alpha}\right) \ge C'n^{\alpha}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda $C' = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_0}\right)^{\alpha}\right)$ koeffitsiyent n ga bog'liq emas, u faqat α va n_0 ga bog'liq.

Yuqoridagi kabi $\|n\| \ge C'n^{\alpha}$ tengsizlikda n o'rniga n^N ni qo'yamiz. Hosil bo'lgan tengsizlikning ikkala tomonidan N – darajali ildiz chiqaramiz, hamda $N \to \infty$ da limitga o'tib, ixtiyoriy n uchun $\|n\| \ge n^{\alpha}$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Normaning ikkinchi xossasidan foydalanib, ixtiyoriy ratsional son uchun $\|x\| = |x|^{\alpha}$ ekanligini isbotlash mumkin.

Normalarning ekvivalentligi haqidagi teoremadan $|x|^{\alpha}$ normaning $|x|$ normaga ekvivalentligi kelib chiqadi.

2 – hol. Barcha natural n lar uchun $\|n\| \le 1$ deb faraz qilaylik. Aytaylik n_0 $\|n\| < 1$ shartni qanoatlantiruchi eng kichik natural son bo'lsin. Bunday son mavjud, chunki $\|\cdot\|$ - notrivial norma.

n_0 tub son bo'lishi lozim. Haqiqatdan ham, agar $n_0 = n_1 \cdot n_2$ va $n_1 < n_0$, $n_2 < n_0$ bo'lsa, u holda $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$ Bundan $\|n_0\| = \|n_1\| \cdot \|n_2\| = 1$ bo'lib, $\|n_0\| < 1$ shartga zid.

Demak, n_0 tub son, uni p bilan belgilaymiz. Endi p dan farqli har bir q tub son uchun $\|q\| = 1$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun quyidagi lemmadan foydalanamiz.

2.3-lemma. Agar M va N o'zaro tub sonlar bo'lsa, u holda shunday m va n butun sonlar topilib, $mM + nN = 1$ bo'ladi.

Isbot. $mM+nN$, bu yerda m,n butun sonlar, ko‘rinishdagi butun sonlar ichida eng kichik musbat son mavjud. Bu son m_0M+n_0N bo‘lsin. U holda M va N sonlar shu songa qoldiqsiz bo‘linadi. Haqiqatan ham, agar masalan M shu songa qoldiqsiz bo‘linmaydi deb faraz qilsak, u holda $M=(m_0M+n_0N)q+r$, bu yerda $0<r<m_0M+n_0N$, bo‘ladi. So‘ngi tenglikdan $r=M-(m_0M+n_0N)q=(1-m_0q)M-n_0qN$ hosil bo‘ladi. Demak, r musbat, m_0M+n_0N dan kichik va $mM+nN$ ko‘rinishdagi son. Bu esa m_0M+n_0N ning $mM+nN$ ko‘rinishdagi eng kichik son ekanligiga zid. Shunday qilib, M soni m_0M+n_0N songa qoldiqsiz bo‘linadi. Shunga o‘xshash N sonining m_0M+n_0N songa qoldiqsiz bo‘linishini ko‘rsatish mumkin. M va N sonlar o‘zaro tub bo‘lganligi sababli $m_0M+n_0N=1$ bo‘ladi. Lemma isbotlandi.

Endi teorema isbotiga qaytamiz. Teskaridan faraz qilamiz, ya’ni $\|q\|<1$ bo‘lsin. U holda yetarlicha katta N uchun $\left\|q^N\right\|=\|q\|^N<\frac{1}{2}$ bo‘ladi. Shunga o‘xshash yetarlicha katta M son uchun $\left\|p^M\right\|<\frac{1}{2}$ bo‘ladi. p^M va q^N sonlar o‘zaro tub, ya’ni 1 dan farqli umumiy bo‘luvchisi yo‘q. Shu sababli yuqorida isbotlangan lemmaga asosan $mp^M+nq^N=1$ shartni qanoatlantiruvchi m va n butun sonlarni topish mumkin. U holda normaning ikkinchi va uchinchi xossalariga ko‘ra

$$1=\|1\|=\left\|mp^M+nq^N\right\|\le\left\|mp^M\right\|+\left\|nq^N\right\|=\|m\|\cdot\left\|p^M\right\|+\|n\|\cdot\left\|q^N\right\|.$$

$\|m\|\le 1, \|n\|\le 1$ bo‘lganligi sababli $1\le\left\|p^M\right\|+\left\|q^N\right\|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$.

Biz ziddiyatga keldik! Demak, $\|q\|=1$ ekan.

Ma’lunki har bir a musbat butun sonni tub ko‘paytuvchilarga yoyish mumkin.

Aytaylik, $a=p_1^{b_1}\cdot p_2^{b_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{b_r}$ bo‘lsin. U holda $\|a\|=\|p_1\|^{b_1}\cdot\|p_2\|^{b_2}\cdot\ldots\cdot\|p_r\|^{b_r}$ So‘ngi ko‘paytmada $p_i=p$ ko‘paytuvchidan boshqa barchasi 1 ga teng, p_i ga mos b_i daraja ko‘rsatkich $ord_p a$ ga teng. Shu sababli $\|a\|=\|p\|^{ord_p a}$.

Normaning ikkinchi xossasidan foydalanib, so‘ngi formula manfiy a uchun ham o‘rinli ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Normalarning ekvivalentligi haqidagi teoremaga asosan bu normaning biror $|\cdot|_p$ normaga ekvivalent ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

3. p-adik sonlar maydoni, sodda xossalari

Aytaylik, p –tayinlangan tub son bo‘lsin. Quyida ratsional sonlar ketma-ketliklarini qaraymiz.

3.1-ta'rif. Agar ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday N_ε son topilib, barcha $n,\ n'>N_\varepsilon$ larda $|a_n-a_{n'}|_p<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{a_n\}$ ratsional sonlar ketma – ketligi fundamental deyiladi.

Agar $\{a_n\}$ ratsional sonlarning fundamental ketma – ketligi bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, yoki biror nomerdan boshlab $|a_n|_p=|a_{n'}|_p$ bo'lishligi kelib chiqadi (mashq).

Barcha fundamental ketma-ketliklar to'plamini S bilan belgilayiz. Bu to'plamda ekvivalentlik munosabatini quyidagicha aniqlaymiz.

3.2-ta'rif. Agar $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-b_n|_p=0$ bo'lsa, $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ fundamental ketma-ketliklar ekvivalent deyiladi va $\{a_n\}\sim\{b_n\}$ kabi yoziladi.

Bu munosabat haqiqatdan ham ekvivalentlik munosabati bo'ladi, ya'ni:

1) $\{a_n\}\sim\{a_n\}$;

2) $\{a_n\}\sim\{b_n\}$ bo'lsa $\{b_n\}\sim\{a_n\}$ bo'ladi;

3) agar $\{a_n\}\sim\{b_n\}$, $\{b_n\}\sim\{c_n\}$ bo'lsa, u holda $\{a_n\}\sim\{c_n\}$ bo'ladi.

Quyida uchinchi shartning bajarilishini ko'rsatamiz.

Biz $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-b_n|_p=0$ va $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n-c_n|_p=0$ dan $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-c_n|_p=0$ ekanini ko'rsatishimiz lozim. Ushbu

$$0\le|a_n-c_n|_p=|a_n-b_n+b_n-c_n|_p\le\max(|a_n-b_n|_p,|b_n-c_n|_p),$$

ya'ni $0\le|a_n-c_n|_p\le\max(|a_n-b_n|_p,|b_n-c_n|_p)$ o'rinli. Bu tengsizlikda limitga o'tsak, $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-c_n|_p=0$ bo'ladi. Demak, $\{a_n\}\sim\{c_n\}$.

Yuqorida aniqlangan "$\sim$" ekvivalentlik munosabati S to'plamni o'zaro kesishmaydigan ekvivalent sinflarga ajratadi.

$\{0\}$ sinfni *0* bilan belgilaymiz. a ekvivalentlik sinfini qaraymiz va uning normasini quyidagicha aniqlaymiz.

3.3-ta'rif. Aytaylik, $\{a_n\}$ ketma-ketlik a sinfga tegishli bo'lsin. a ekvivalentlik sinfining normasi deb ushbu songa aytiladi: $|a|_p=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|_p$.

Bu limit mavjud. Chunki:

1) agar $a=0$ bo'lsa, u holda ta'rif bo'yicha $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|_p=0$;

2) agar $a\ne0$ bo'lsa, u holda biror $\varepsilon>0$ va ixtiyoriy N uchun shunday $n_N>N$ topilib, $|a_{n_N}|_p>\varepsilon$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $n,n'>N$ da $|a_n-a_{n'}|<\varepsilon$ tengsizliklar bajariladigan N tayinlansa, u holda barcha $n>N$ larda $|a_n-a_{n_N}|_p<\varepsilon$ bo'ladi.

$|a_{n_N}|_p > \varepsilon$ bo'lganligi sababli, teng yonli uchburchak prinsipiga ko'ra $|a_n|_p = |a_{n_N}|_p$ bo'ladi. Shu sababli $|a_n|_p$ $n > N$ dan boshlab doimiy $|a_{n_N}|_p$ qiymatni qabul qiladi. Bu holda $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|_p = |a_{n_N}|_p$ ga teng bo'ladi.

3.1-eslatma. a ekvivalentlik sinf normasi shu sinfga tegishli bo'lgan fundamental ketma-ketlik tanlashiga bog'liq emas.

Haqiqatdan ham, agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar shu sinfga tegishli bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n - b_n|_p = 0$ bo'lishi ravshan. Bundan biror N nomerdan boshlab $|a_n|_p = |b_n|_p$ ekanligi kelib chiqadi. Yuqoridagi mulohazalardan

$$|a|_p = \lim_{n\to\infty}|a_n|_p = \lim_{n\to\infty}|b_n|_p$$

kelib chiqadi.

3.1-lemma. Agar $\{a_n\}, \{b_n\}$ ratsional sonlarning fundamental ketma-ketliklari bo'lsa, u holda $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ ketma-ketliklar ham fundamental ketma- ketlik bo'ladi.

3.2-lemma. Agar $\{a_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{a_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi.

3.3-lemma. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ratsional sonlarning fundamental ketma-ketliklari bo'lsa, u holda $\{a_n \cdot b_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'ladi.

3.4-lemma. Agar $\{a_n\},\{b_n\} \in S$ va $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ bo'lsa, u holda $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \in S$ bo'ladi.

Yuqorida isbotlangan lemmalar yordamida ekvivalentlik sinflarida arifmetik amallarni aniqlaymiz.

Bizga a va b ekvivalentlik sinflari berilgan bo'lsin. Har bir sinfdan ixtiyoriy vakilni tanlab olamiz. Aytaylik $\{a_n\} \in a$, $\{b_n\} \in b$ bo'lsin.

3.4-ta'rif. a va b sinflarning yig'indisi deb $\{a_n + b_n\}$ ketma-ketlik tegishli bo'lgan sinfga aytiladi.

Bu ta'rifning korrekt ekanlini ko 'rsatamiz, ya'ni, agar $\{a'_n\},\{b'_n\}$ mos ravishda a va b sinflarga tegishli boshqa fundamental ketma-ketliklar bo'lsa, u holda $\{a'_n + b'_n\} \sim \{a_n + b_n\}$ ekanligini, ya'ni ular bitta sinfga tegishli ekanligini ko'rsatishimiz lozim. Uning uchun $\lim\limits_{n\to\infty}((a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)) = 0$ ekanligini ko'rsatish yetarli.

$$\lim_{n\to\infty}((a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)) = \lim_{n\to\infty}((a_n - a'_n) + (b_n - b'_n)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}((a_n - a'_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n - b'_n)) = 0 + 0 = 0.$$

Shunday qilib, yig'indi a va b sinflardan vakil tanlashga bog'liq emas ekan.

Yig'indi sinfni $a+b$ kabi belgilaymiz.

3.5-ta'rif. a va b sinflarning ko'paytmasi deb $\{a_n \cdot b_n\}$ fundamental ketma-ketliklarga tegishli bo'lgan sinfga aytiladi. Ularning ko'paytmasi $a \cdot b$ kabi belgilanadi.

Agar $\{a_n'\} \in a,\ \{b_n'\} \in b$ bo'lsa, u holda

$$|a_n \cdot b_n - a_n' \cdot b_n'|_p = |a_n \cdot b_n - a_n' \cdot b_n + a_n' \cdot b_n - a_n' \cdot b_n'|_p =$$

$$= |(a_n - a_n') \cdot b_n + a_n' \cdot (b_n - b_n')|_p \le \max(|b_n|_p \cdot |a_n - a_n'|_p, |a_n'|_p \cdot |b_n - b_n'|_p),$$

ya'ni $|a_n \cdot b_n - a_n' \cdot b_n'|_p \le \max(|b_n|_p \cdot |a_n - a_n'|_p,\ |a_n'|_p \cdot |a_n - a_n'|_p)$.

Bu tengsizlikda $n \to \infty$ da limitga o'tsak, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n|_p \cdot |a_n - a_n'|_p = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p \cdot |a_n - a_n'|_p = 0$ ekanligini e'tiborga olsak, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n \cdot b_n - a_n' \cdot b_n'|_p = 0$ hosil bo'ladi. Bu degani a va b sinflarning ko'paytmasi bu sinflardan vakil tanlashga bog'liq emasligini anglatadi.

Agar $\{b_n\}$ fundamental ketma-ketlik va $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$ bo'lsa, u holda uning barcha hadlari noldan farqli deb qarashimiz mumkin.

Haqiqatdan ham, agar bu ketma-ketlikning biror b_k hadlari nolga teng bo'lsa, uni $b_k = p^k$ deb almashtirsak, dastlabki ketma-ketlikka ekvivalient ketma-ketlik hosil bo'ladi. Yana shuni ta'kidlash kerakki, agar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$ bo'lsa, u holda uning nolga teng hadlari soni chekli bo'ladi.

Endi a va b $(b \ne 0)$ sinflarning nisbati deb $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ fundamental ketma-ketlik tegishli bo'lgan sinfga aytamiz. Bu amalning a va b sinflardan vakil tanlashga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Aytaylik $\{a_n'\} \in a,\ \{b_n'\} \in b$ bo'lsin. U holda

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n'}{b_n'}\right|_p = \frac{|a_n \cdot b_n' - a_n' \cdot b_n'|_p}{|b_n|_p \cdot |b_n'|_p} \le \frac{1}{K^2} \cdot |a_n \cdot b_n' - a_n' \cdot b_n|_p =$$

$$= \frac{1}{K^2} |a_n \cdot b_n' - a_n \cdot b_n + a_n \cdot b_n - a_n' \cdot b_n|_p =$$

$$= \frac{1}{K^2} \max(|b_n|_p \cdot |a_n - a_n'|_p, |a_n'|_p \cdot |b_n - b_n'|_p)$$

Bu yerda K ushbu $|b_n| > K, |b_n'| > K$ shartlarni qanoatlantiruvchi musbat son. Bundan $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a_n'}{b_n'}\right|_p = 0$ bo'ladi. Demak, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \sim \left\{\dfrac{a_n'}{b_n'}\right\}$ va $\dfrac{a}{b}$ sinfni aniqlaydi.

Ekvivalentlik sinflar to'plamini Q_p bilan belgilaymiz. Yuqorida aniqlangan amallarga nisbatan Q_p maydon tashkil etadi. Masalan, maydonning distributivlik xossasini tekshiramiz:

Aytaylik $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ mos ravishda $a,b,c \in Q_p$ sinflarning vakillari bo'lsin. U holda $a\cdot(b+c)$ sinf $\{a_n(b_n+c_n)\}=\{a_n\cdot b_n+a_n\cdot c_n\}$ ketma-ketliklardan tashkil topgan bo'ladi. Ammo, $a\cdot b+b\cdot c$ sinf ham yuqoridagi ketma-ketliklar sinfi bilan ustma – ust tushadi. Demak, $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Q maydonni Q_p maydonning qism maydoni bilan ayniylashtirish mumkin. Ya'ni, Q_p maydonning doimiy ketma-ketliklardan tashkil topgan sinflardan iborat qism maydoni deb qarash mumkin.

Q_p maydon elementlarini p – adik sonlar deb ataymiz.

3.1-teorema. Q_p ga tegishli har bir a ekvivalentlik sinfida, bu yerda $|a|_p\le 1$, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yagona $\{a_n\}$ fundamental ketma-ketlik mavjud:

(1) $0\le a_n < p^n$, $n=1,2,3,...$

(2) $a_n \equiv a_{n+1} (\operatorname{mod} p^n)$, $n=1,2,3,...$

Isbot. Dastlab bunday fundamental ketma-ketlikning yagonaligini isbotlaymiz. Agar $\{a'_n\}$ (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi boshqa bir fundamental ketma-ketlik bo'lsa, u holda biror n_0 uchun $a_{n_0} \ne a'_{n_0}$ bo'ladi. Bundan $a_{n_0} \not\equiv a'_{n_0} (\operatorname{mod} p^{n_0})$, chunki $0\le a_{n_0} < p^{n_0}$ va $0\le a'_{n_0} < p^{n_0}$. U holda har bir $n > n_0$ uchun $a_n \equiv a_{n_0} \not\equiv a'_{n_0} \equiv a'_n (\operatorname{mod} p^{n_0})$, ya'ni $a_n \not\equiv a'_n (\operatorname{mod} p^{n_0})$ munosabatga ega bo'lamiz. Demak, barcha $n > n_0$ da $|a_n - a'_n| > \frac{1}{p^{n_0}}$, bu $\{a_n\}$ ketma-ketlikning $\{a'_n\}$ ga ekvivalent emasligini bildiradi. Yagonaligi isbotlandi.

Endi faraz qilaylik biror $\{b_n\}\in a$ berilgan bo'lsin. Biz shu ketma-ketlikka ekvivalent hamda (1) va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi $\{a_n\}$ ketma-ketlikni topamiz. Buning uchun quyidagi lemmadan foydalanamiz:

3.5-lemma. Aytaylik, $x\in Q$ va $|x|_p\le 1$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy n natural son uchun $\alpha\in\mathbb{Z}$ topilib, $|\alpha - x|_p < p^{-n}$ bo'ladi. Bundan tashqari α ni $\{0,1,2,3,..., p^n-1\}$ to'plamdan tanlab olish mumkin.

Lemmaning isboti. Aytaylik, $x=\frac{a}{b}$ qisqarmaydigan kasr bo'lsin. U holda $|x|_p\le 1$ bo'lganligi sababli b soni p ga bo'linmaydi. Demak, b va p^n sonlari o'zaro tub. 5.2-lemmaga asosan m va s butun sonlarni topish mumkinki $mb+sp^n=1$ bo'ladi. $\alpha = a\cdot m$ deb olamiz. U holda quyidagi baholash o'rinli:

$$|\alpha - x|_p = \left|a\cdot m - \frac{a}{b}\right|_p = \left|\frac{a}{b}\right|_p \cdot |m\cdot b - 1|_p \le |m\cdot b-1|_p = |s\cdot p^n|_p =$$

$$= |s|_p \cdot p^{-n} \le p^{-n} = \frac{1}{p^n}.$$

α soni lemmada ko'rsatilgan to'plamga tegishli bo'lishi uchun unga mos keladigan p^n ning karralisini qo'shish yetarli, bunda $|\alpha - x|_p \le p^{-n}$ saqlanadi. Lemma isbotlandi.

Teorema isbotiga qaytamiz. $\{b_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin. Har bir $l = 1,2,3,...$ natural songa shunday $N(l)$ sonni mos qo'yamizki, natijada barcha $n, n' > N(l)$ da $|b_n - b_{n'}| \le p^{-l}$ bo'lsin (biz $N(l)$sonlar ketma – ketligini qat'iy o'suvchi, xususan $N(l) \ge l$ deb olishimiz mumkin). U holda $n \ge N(1)$ da $|b_n|_p \le 1$ bo'ladi, chunki har bir $n' > N(1)$ uchun $|b_n|_p \le \max(|b_{n'}|_p, |b_n - b_{n'}|_p) \le \max(|b_{n'}|_p, \frac{1}{p})$, va $n \to \infty$ da $|b_{n'}|_p \to |a|_p \le 1$ bo'ladi. 6.12-lemmaga asosan $0 \le a_l < p^l$ va $|a_l - b_{N(l)}| \le \frac{1}{p^l}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\{a_l\}$ sonlar ketma – ketligini tanlab olishimiz mumkin. Bu ketma-ketlik yuqoridagi talablarga javob beradi. Ravshanki, buning uchun $a_{l+1} \equiv a_l (\mathrm{mod}\, p^l)$ va $\{b_n\} \sim \{a_l\}$ ekanligini ko'rsatish yetarli. Ulardan birinchisi quyidagi tengsizliklardan kelib chiqadi:

$$|a_{l+1} - a_l|_p = |a_{l+1} - b_{N(l+1)} + b_{N(l+1)} - b_{N(l)} + a_l - b_{N(l)}|_p \le$$

$$\le \max(|a_{l+1} - b_{N(l+1)}|_p,\ |b_{N(l+1)} - b_{N(l)}|_p,\ |a_l - b_{N(l)}|_p) \le$$

$$\le \max(\frac{1}{p^{l+1}},\ \frac{1}{p^l},\ \frac{1}{p^l}) = \frac{1}{p^l}.$$

Ikkinchi tasdiqni isbotlash uchun ixtiyoriy l ni tanlab olamiz. U holda ixtiyoriy $n > N(l)$ uchun

$$|a_n - b_n| = |a_n - a_l + a_l - b_{N(l)} - (b_n - b_{N(l)})|_p \le$$

$$\le \max(|a_n - a_l|_p,\ |a_l - b_{N(l)}|_p,\ |b_n - b_{N(l)}|_p \le \max(\frac{1}{p^l},\ \frac{1}{p^l},\ \frac{1}{p^l}) = \frac{1}{p^l}.$$

Shu sababli $n \to \infty$ da $|a_n - b_n|_p \to 0$ bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Agar a p – adik son $|a|_p \le 1$ shartni qanoatlantirmasa, a ni p^m ga ko'paytiramiz. Bu yerda $m = |a|_p$. U holda $a' = ap^m$ son $|a'|_p \le 1$ shartni qanoatlantiradi. Bu a' songa mos $\{a'_n\}$ ketma-ketlikni tanlab olish mumkin. U holda

$a = a' \cdot p^{-m}$ songa $\{a_n\}$ ketma-ketlik mos keladi, bu yerda $a_n = a'_n \cdot p^{-m}$.

a' songa mos keladigan $\{a'_n\}$ ketma-ketlik barcha hadlarini qo‘laylik uchun p – lik sanoq sistemasida yozib olamiz, ya’ni quyidagicha yozamiz:

$a'_n = b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + ... + b_{n-1} \cdot p^{n-1}$ Bu yerda b_l “p – lik raqamlarni” ifodalaydi, ya’ni b_l soni $\{0,1,2,..., p-1\}$ to‘plamdan qiymat qabul qiladi.

Yuqorida isbotlangan teoremadagi $a'_n \equiv a'_{n+1} (\mathrm{mod}\, p^n)$ taqqoslamalar $a'_{n+1} = b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + ... + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + b_n \cdot p^n$ sonning “raqamlari” $b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ a'_n sonning mos “raqamlari” ga teng ekanligiga teng kuchli. Shu sababli a' sonini cheksiz p – lik yozuvga ega bo‘lgan son sifatida tasavvur qilishimiz mumkin. a'_n dan a'_{n+1} ga o‘tganda har safar yangi “raqam” qo‘shib boriladi.

a sonini quyidagicha yozish mumkin:

$$a = \frac{b_0}{p^m} + \frac{b_1}{p^{m-1}} + ... + \frac{b_{m-1}}{p} + b_m + b_{m+1} \cdot p + b_{m+2} \cdot p^2 + ... \qquad (5)$$

Bu yozuvni hozircha umumiy hadi $a_n = b_0 p^{-m} + b_1 p^{-m+1} + ... + b_{n-1} p^{n-1-m}$ bo‘lgan $\{a_n\}$ ketma-ketlikning qo‘lay yozilishi deb qabul qilamiz. (5) qator yaqinlashadi.

(5) ga a p – adik sonning p – adik yoyilmasi deyiladi.

Shunday qilib, yuqorida aytganimizdek, a sonining normasi uni aniqlaydigan $\{a_n\}$ ketma-ketlik orqali quyidagicha aniqlanadi: $|a|_p = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|_p$. Bundan p-adik son normasining qiymatlar to’plami $\left\{p^n, n \in Z\right\} \cup \{0\}$ to‘plamdan iborat ekani, ya’ni $\left|\cdot\right|_p$ akslantirishning qiymatlar to‘plami Q da ham Q_p da ham bir xil bo’ladi.

Bunday hol oddiy absolut qiymat uchun o’rinli emas. Uning Q dagi qiymatlar to‘plami nomanfiy ratsional sonlar, R dagi qiymatlar to‘plami nomanfiy haqiqiy sonlardan iborat bo‘ladi.

Endi Q_p p – adik sonlar maydonining ba’zi qism to‘plamlarini o‘rganamiz.

$\mathbb{Z}_p$ orqali normasi 1 dan katta bo‘lmagan p – adik sonlarni belgilaymiz:

$\mathbb{Z}_p = \{a \in Q_p, \ |a|_p \le 1\}$.

Bu to‘plamning elementlari butun p – adik sonlar deyiladi. Butun p – adik sonlarning yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi yana p – adik butun son bo‘ladi. Shu sababli $\mathbb{Z}_p$ to‘plam Q_p ning qism halqasi bo‘ladi.

$\mathbb{Z}_p^{\times}$ - orqali normasi 1 ga teng p – adik sonlarni belgilaymiz:

$\mathbb{Z}_p^{\times} = \{a \in Q_p, \ |a|_p = 1\}$.

Bu to‘plamning elementlari p – adik birliklar deyiladi.

Masalan, agar p = 5, bo‘lsa, $a = 4$, $a = 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^3 + ...$ sonlar p – adik birliklar bo'ladi.

Q_p maydonda arifmetik amallarni bajarish o'nlik kasrlar bilan amallar bajarishga o'xshash. Ularni farqi quyidagidan iborat: "qarz olish", "boshqa razryadga o'tkazish", "ustun usulida ko'paytirish" va boshqa amallar chapdan o'ngga bajariladi (o'ngdan chapga emas). Masalan Q_7 uchun:

$$\begin{array}{r l}
\times & 3+6\cdot 7+2\cdot 7^2+\ldots \\
 & 4+5\cdot 7+1\cdot 7^2+\ldots \\
\hline
 & 5+4\cdot 7+4\cdot 7^2+\ldots \\
 & 1\cdot 7+4\cdot 7^2+\ldots \\
 & 3\cdot 7^2+\ldots \\
\hline
 & 5+5\cdot 7+4\cdot 7^2+\ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{r l}
- & 2\cdot 7^{-1}+0\cdot 7^0+3\cdot 7^1+\ldots \\
 & 4\cdot 7^{-1}+6\cdot 7^0+4\cdot 7^1+\ldots \\
\hline
 & 5\cdot 7^{-1}+0\cdot 7^0+4\cdot 7^1+\ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
1+2\times 7+4\times 7^2+\ldots & \underline{3+5\times 7+1\times 7^2+\ldots} \\
\underline{1+6\times 7+1\times 7^2+\ldots} & 5+1\times 7+6\times 7^2+\ldots \\
\quad 3\times 7+2\times 7^2+\ldots & \\
\quad \underline{3\times 7+5\times 7^2+\ldots} & \\
\qquad 4\times 7^2+\ldots & \\
\qquad \underline{4\times 7^2+\ldots} &
\end{array}$$

4. p-adik sonlar maydonining topologik xossalari

Ma'lumki, har qanday (M,d) metrik fazoda markazi a nuqtada radiusi $r\,(r\in R^+)$ bo'lgan ochiq shar quyidagicha aniqlanadi:

$$B(a,r)=\{x\in M : d(a,x)<r\}.$$

Q_p fazoda quyidagi to'plamlar ochiq sharlar bo'ladi:

$$B(a,r)=\left\{x\in Q_p : |x-a|_p<r\right\},$$

bunda p-adik norma ushbu $\left\{p^n,\, n\in Z\right\}\cup\{0\}$ diskret to'plamdan qiymat qabul qilishini e'tiborga olib, radiusi $r=p^n,\ n\in Z$ bo'lgan sharlarni qarash yetarli.

Agar M metrik fazoning A qism to'plamining har bir nuqtasi uchun shu nuqtani o'z ichida saqlaydigan $B(a,r)\subset A$ shar mavjud bo'lsa, u holda A ochiq to'plam deyiladi.

Agar A to‘plamning to‘ldiruvchisi $M \setminus A$ ochiq to‘plam bo‘lsa, u holda A yopiq to‘plam deyiladi.

Q_p fazoda sfera quyidagicha aniqlanadi:

$$S(a,r)=\{x\in Q_p : |x-a|_p = r\}.$$

4.1-teorema. $S(a,r)$ sfera ochiq to‘plam.

Isbot. Aytaylik, $x\in S(a,r),\ 0<\varepsilon<r$ bo‘lsin. $B(x,\varepsilon)\subset S(a,r)$ ekanligini ko‘rsatamiz. $y\in B(x,\varepsilon)$ bo‘lsin. U holda $|y-x|_p<\varepsilon<r=|x-a|_p$ va ushbu $|x-a|_p\le \max(|x-y|_p,|y-a|_p)$ tengsizlikdan teng yonli uchburchak prinsipiga ko‘ra $|y-a|_p=|x-a|_p=r$, ya’ni $y\in S(a,r)$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan $B(x,\varepsilon)\subset S(a,r)$.

4.2-teorema. Q_p fazoda sharlar bir vaqtda ochiq va yopiq to‘plam bo‘ladi.

Isbot. Har qanday metrik fazoda ixtiyoriy ochiq shar ochiq to‘plam bo‘ladi. Chunki har bir $x\in B(a,r)$ nuqta $B(a,r)$ sharning qismi bo‘lgan $B(a,r)$ sharda yotadi. $B(a,r)$ sharning yopiqligini isbotlash uchun, uning $C=\{x\in Q_p : |x-a|_p\ge r\}$ to‘ldiruvchisi ochiq ekanligini ko‘rsatamiz. Ammo $C=S(a,r)\cup D$, bu yerda $D=\{x\in Q_p : |x-a|_p>r\}$. D to‘plam ixtiyoriy metrik fazo uchun ochiq to‘plam bo‘ladi. Haqiqatan ham, aytaylik $y\in D$ bo‘lsin. U holda $|y-a|_p=r_1>r$ bo‘ladi. $B(y,r-r_1)$ shar D sharning qismi bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun teskaridan faraz qilamiz. Aytaylik $B(y,r-r_1)$ shar D sharning qismi bo‘lmasin, u holda shunday $x\in B(y,r-r_1)$ topilib, $|x-a|_p\le r$ bo‘ladi. U holda $r_1=|y-a|_p=|a-x+x-y|_p\le |a-x|_p+|x-y|_p<r+r_1-r=r_1$ bo‘lib, ziddiyatga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, D ochiq to‘plam. C to‘plam esa ikkita ochiq to‘plamning birlashmasi sifatida ochiq to‘plam bo‘ladi. Uning to‘ldiruvchisi $B(a,r)$ shar yopiq to‘plam bo‘ladi.

Endi chegaraviy nuqta ta’rifini eslatib o‘tamiz. M metrik fazo, uning A qism to‘plami va $x\in M$ nuqta berilgan bo‘lsin. Agar markazi x nuqtada bo‘lgan ixtiyoriy shar A to‘plamga tegishli bo‘lgan nuqtalarni ham, tegishli bo‘lmagan nuqtalarni ham o‘z ichida saqlasa, x nuqta A to‘plamning chegaraviy nuqtasi deyiladi.

A yopiq to‘plam bo‘lishi uchun u barcha chegaraviy nuqtalarini o‘z ichida saqlashi zarur va yetarli. Bundan Q_p fazoda $S(a,r)$ sfera $B(a,r)$ ochiq sharning chegarasi bo‘lmaydi. Yuqorida isbotlangan teoremadan $B(a,r)$ shar umuman chegaraga ega emasligi kelib chiqadi. Va albatta

$$\overline{B(a,p^n)} = \left\{x \in Q_p : |x-a|_p \le p^n\right\} = \left\{x \in Q_p : |x-a|_p < p^{n+1}\right\} = B(a,p^{n+1}) \quad (6)$$

yopiq shar $B(a,p^n)$ ochiq sharning yopilmasiga teng emas.

Shuningdek (6) munosabatdan ochiq sharlar uchun isbotlangan barcha xossalar yopiq sharlar uchun ham o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

4.3 – teorema. Agar $b \in B(a,r)$ bo'lsa, $B(b,r) = B(a,r)$ bo'ladi, ya'ni boshqacha aytganda sharning har bir nuqtasi uning markazi bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, b nuqta $B(a,r)$ doiraning ixtiyoriy nuqtasi, ya'ni $|b-a|_p < r$ bo'lsin. U holda $B(a,r) = B(b,r)$ ekanligini isbotlashimiz zarur. Agar $x \in B(a,r)$ bo'lsa, u holda $|x-a|_p < r$, ikkinchi tomondan $|x-b|_p = |x-a+a-b|_p \le \max\left(|x-a|_p, |a-b|_p\right) < r$, demak $x \in B(b,r)$. Bundan $B(a,r) \subset B(b,r)$ kelib chiqadi. $B(a,r) \supset B(b,r)$ munosabat ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Bu isbotlangan xossadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

4.4-natija. Agar ikki shar umumiy nuqtaga ega bo'lsa, u holda ularning biri ikkinchisining qismi bo'ladi yoki ular ustma-ust tushadi.

4.5-natija. Ixtiyoriy ikkita shar kesishmaydi yoki biri ikkinchisining qismi bo'ladi.

4.6-teorema. $S(a,r)$ sfera bir vaqtda ochiq va yopiq to'plam bo'ladi.

Isbot. $S(a,r)$ to'plamning ochiq ekanligini bilamiz. $\overline{B(a,r)}$ yopiq to'plam, $B(a,r)$ ochiq to'plam bo'lganligi sababli uning to'ldiruvchisi $\left\{x \in Q_p : |x-a|_p \ge r\right\}$ yopiq to'plam. $S(a,r) = \overline{B(a,r)} \cap \left\{x \in Q_p : |x-a|_p \ge r\right\}$ bo'lganligi sababli, $S(a,r)$ yopiq to'plam bo'ladi. Shuni aytib o'tish kerakki, sfera har qanday metrik fazoda yopiq to'plam bo'ladi.

Ma'lumki, haqiqiy sonlar to'plamidagi barcha sharlar to'plamining quvvati kontinuumga teng. Lekin Q_p da bunga qarama-qarshi natija o'rinli.

4.7-teorema. Q_p da barcha sharlar to'plami sanoqli.

Isbot. $B(a,p^{-s})$ shar markazini kanonik shaklda yozib olamiz: $a = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n$ va $b = \sum_{n=-m}^{s} a_n p^n$ belgilash kiritamiz. Ravshanki b ratsional son bo'lib, $|a-b| < p^{-s}$, ya'ni $b \in B(a,p^{-s})$ bo'ladi. U holda 4.3-teoremaga asosan $B(a,p^{-s}) = B(b,p^{-s})$ bo'ladi.

Shunday qilib, sharlarning markazlari ham, radiuslari ham sanoqli to'plam tashkil etadi. Demak, barcha (b,s) juftliklar ham sanoqli to'plam tashkil etadi, bu esa Q_p dagi barcha sharlar to'plamining sanoqliligini isbotlaydi.

4.1-ta'rif. Agar metrik fazodagi K to'plam nuqtalaridan tuzilgan ixtiyoriy ketma-ketlikdan K to'plamdagi nuqtaga yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin bo'lsa, K kompakt to'plam deyiladi.

Demak, avval isbotlaganimizga ko'ra (4.2-teorema) Q_p dagi ixtiyoriy chegaralangan to'plam, xususan ixtiyoriy shar kompakt to'plam bo'ladi. Bundan quyidagi natija kelib chiqadi.

4.8-teorema. Q_p lokal kompakt fazo, ya'ni har bir nuqtasining yopilmasi kompakt bo'lgan ochiq atrofi mavjud.

Quyidagi teorema o'rinli.

4.9-teorema. Z_p to'la metrik fazo.

Isbot. Z_p kompakt to'plam. Uning nuqtalaridan tuzilgan ixtiyoriy ketma-ketlik, xususan fundamental ketma-ketlikdan Z_p dagi nuqtaga yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Fundamental ketma-ketlik ham qism ketma-ketligi yaqinlashgan nuqtaga yaqinlashadi. Demak, Z_p to'la metrik fazo.

4.10-teorema. N natural sonlar to'plami Z_p da zich to'plam.

Isbot. Aytaylik, $x \in Z_p$ bo'lsin. U holda $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ bo'ladi. $x_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ belgilash kiritamiz. U holda $x_n \in N$ va $|x - x_n| < p^{-n}$ bo'ladi. Bundan natural sonlar to'plamining Z_p da zich ekanligi kelib chiqadi.

4.2-ta'rif. X topologik fazo bo'lsin. Agar X to'plamni o'zaro kesishmaydigan bo'sh bo'lmagan ikkita ochiq to'plamlarning birlashmasi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, X bog'lamli bo'lmagan topologik fazo deyiladi. Aks holda u bog'lamli fazo deyiladi.

X fazoning qism to'plami indutsirlangan topologiyaga nisbatan bog'lamli fazo bo'lsa, bu qism to'plam bog'lamli deyiladi.

Agar X fazoning bog'lamli qism to'plamlari faqat bo'sh to'plam va bir elementli to'plamlardan iborat bo'lsa, u to'la bog'lamli bo'lmagan fazo deyiladi.

4.11-teorema. Q_p to'la bog'lamli bo'lmagan fazo.

Isbot. Har bir $a \in Q_p$ va $n \in N$ uchun

$$U_n(a) = \{x \in Q_p : |x-a|_p \le p^{-n}\} = \{x \in Q_p : |x-a|_p < p^{-n+1}\}$$

to'plam a nuqtaning ochiq va yopiq atrofi bo'ladi. Aytaylik $a \in A$, bunda $A \ne \{a\}$ bo'lsin. U holda shunday $n \in N$ topilib, $U_n(a) \cap A \ne A$ bo'ladi. Bundan

$A=\left(U_n(a)\cap A\right)\cup\left(Q_p\setminus U_n(a)\cap A\right)$, bu yerda $U_n(a)$ va uning to‘ldiruvchisi $Q_p\setminus U_n(a)$ bo‘sh bo‘lmagan ochiq to‘plamlar. Bundan A bog‘lamli emasligi kelib chiqadi.

Nazorat savollari

1. Normalangan maydon ta’rifini ayting, misollar keltiring.
2. Maydonda aniqlangan normaning xossalarini ayting.
3. Norma yordamida metrika qanday aniqlanadi?
4. Qanday norma noarximed norma deyiladi?
5. Arximed va noaximed normalarga misollar keltiring.
6. Teng yonli uchburchak prinsipini ayting.
7. Qanday normalar ekvivalent normalar deyiladi?
8. Normalarning ekvivalentlik shartlarini ayting.
9. $\mathrm{ord}_p a$ funksiya qanday aniqlanadi (a)butun sonlar to’plamida, b) ratsional sonlar to’plamida)?
9. p-adik norma qanday aniqlanadi?
10. Q-ratsional sonlar maydonidan p-adik sonlar maydonini hosil qilish yolini tushuntiring.
11. p-adik son deganda nimani tushunasiz?
12. p-adik sonni kanonik ko’rinishini tavsiflang.
13. p-adik sonni normasi qanday qniqlanadi?
14. p-adik sonlar ustida arifmetik amallar qanday aniqlanadi?
15. p-adik butun sonlarni tavsiflang, misollar keltiring.
16. p-adik birliklarni tavsiflang, misollar keltiring.
17. p-adik sonlar fazosidagi yopiq va ochiq sharlarni ta’riflang.
18. p-adik sonlar fazosidagi yopiq va ochiq sharlarni xossalarini ayting.

3-Mavzu: p-adik darajali qatorlar va asosiy elementar funksiyalar

Reja:

1. p-adik darajali qatorlar
2. p-adik logarifm va p-adik eksponenta
3. p-adik eksponenta va logarifmlarning xossalari

Tayanch so’z va iboralar: p-adik darajali qator, ko‘phad, yaqinlashish radiusi, yaqinlashish sohasi, darajali qator yig’indisi, uzluksiz funksiya, p-adik logarifm, p-adik eksponenta, gruppa, izomorfizm

1. p-adik darajali qatorlar

Ushbu

$$f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n$$

ifoda formal darajali qator deyiladi, bu yerda $a_n\in Q_p$, X esa o‘zgaruvchi.

Koeffitsientlari Q_p ga tegishli bo‘lgan barcha darajali qatorlarni $Q_p[[X]]$, ko‘phadlarni $Q_p[X]$ bilan belgilaymiz.

Berilgan $x\in Q_p$ va $f\in Q_p[[X]]$ uchun $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ sonli qatorni qarashimiz mumkin. Bu qator faqat $|a_nx^n|_p\to 0$ bo‘lganda yaqinlashuvchi bo‘lishini bilamiz.

Haqiqiy analizdagi kabi "yaqinlashish radiusi"ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$r=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|_p^{1/n}}. \qquad (1)$$

Ketma-ketlikning yuqori limiti $\limsup\limits_{n\to\infty}$ deb uning limit nuqtalari to‘plamining aniq yuqori chegarasiga $(\sup)$ aytilar edi. Shunday qilib, agar $0<r<\infty$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $C>\frac{1}{r}$ uchun C dan katta bo‘lgan faqat chekli sondagi $|a_n|_p^{1/n}$ hadlar mavjud bo‘ladi.

Quyidagi tasdiq "yaqinlashish radiusi" atamasini to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi.

1.1-teorema. Aytaylik, $0<r<\infty$ bo‘lsin. U holda

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

qator $|x|_p<r$ da yaqinlashuvchi, $|x|_p>r$ da uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, avval, $|x|_p<r$ bo‘lsin. $|x|_p=(1-\varepsilon)r$ deb olamiz. U holda

$$|a_nx^n|_p=\left(r|a_n|_p^{1/n}\right)^n(1-\varepsilon)^n.$$

$|a_n|_p^{1/n}>\frac{1}{r-(1/2)\varepsilon r}$ shartni qanoatlantiruvchi n lar soni chekli bo‘lganligi uchun

$$\lim_{n\to\infty}|a_nx^n|_p\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-\varepsilon)r}{(1-\varepsilon/2)r}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}\right)^n=0$$

bo‘ladi, ya’ni berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Shunga o‘xshash, agar $|x|_p>r$ bo‘lsa, $|x|_p=(1+\varepsilon)r$ deb olamiz. U holda

$$\left|a_n x^n\right|_p = \left(r\left|a_n\right|_p^{1/n}\right)^n (1+\varepsilon)^n .$$

$\left|a_n\right|_p^{1/n} > \dfrac{1}{r+(1/2)\varepsilon r}$ shartni qanoatlantiruvchi n lar soni chekli bo‘lganligi uchun

$$\limsup_{n\to\infty}\left|a_n x^n\right|_p \ge \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+\varepsilon)r}{(1+\varepsilon/2)r}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon/2}\right)^n \ne 0$$

va berilgan qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

$|x|_p = r$ shartni qanoatlantiruvchi “chegaraviy” nuqtalarda qator qanday bo‘ladi? Arximed holda (haqiqiy sonlar yoki kompleks sonlar to‘plamida) qatorning yaqinlashish intervali yoki yaqinlashish doirasi chegarasida uning o‘zgarishi murakkab bo‘lishi mumkin. Masalan, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$ logarifmik darajali qatorning yaqinlashish radiusi 1 ga teng. Bu qator yaqinlashish intervali chegaralari bo‘lgan $x=-1$ da uzoqlashuvchi, $x=1$ da yaqinlashuvchi (shartli) bo‘ladi.

Noarximed holda darajali qatorning o‘zgarishi $|x|_p = r$ shartni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarda bir xil bo‘ladi. Chunki qator $\left|a_n x^n\right|_p \to 0$ shartdagina yaqinlashadi. Bu esa $|x|_p$ normaga bog‘liq bo‘lib, x ning konkret qiymatiga bog‘liq emas.

Yuqoridagi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$ qatorni Q_p da qaraymiz. Bu holda $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\left|a_n\right|_p = p^{ord_p n}$ va $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|_p^{1/n} = \lim_{n\to\infty} p^{\frac{ord_p n}{n}} = 1$ bo‘ladi. So‘ngi tenglik $\dfrac{ord_p n}{n} \le \dfrac{k}{p^k \cdot n_1} \le \dfrac{k}{p^k}$ tengsizlikdan kelib chiqadi, bunda $n = p^k \cdot n_1$.

Bu qator $|x|_p < 1$ da yaqinlashuvchi, $|x|_p > 1$ da uzoqlashuvchi bo‘ladi. Agar $|x|_p = 1$ bo‘lsa, u holda $\left|a_n x^n\right|_p = p^{ord_p n} \ge 1$ bo‘ladi. Demak, $|x|_p = 1$ nuqtalarda bu qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

1.1-lemma. Koeffitsientlari butun *p*-adik sonlardan iborat darajali qator $\left(f(X) \in \mathrm{Z}[[X]]\right)$ $\left\{x \in Q_p :\ |x|_p < 1\right\}$ sohada yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, $|x|_p < 1$ va $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bo‘lsin. Barcha $n \ge 0$ larda $\left|a_n\right|_p \le 1$

tengsizlik o'rinli bo'lganligi sababli, $n \to \infty$ da $\left|a_n x^n\right|_p \le |x|_p^n \to 0$ bo'ladi. Bundan qatorning yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

1-misol. Biror $a \in Z_p$ sonni tayinlaymiz va quyidagi qatorni qaraymiz:

$$f_a(X) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^a X^n \in Z_p\left[\left[X\right]\right],$$

bu yerda $C_n^a = \dfrac{a(a-1)(a-2)...(a-n+1)}{n!}$ va $f_a(X) := (1+X)^a$.

1.2-lemma. Agar $a \in Z_p$ va $n \ge 0$ bo'lsa, u holda $C_n^a \in Z_p$ bo'ladi.

Isbot. Har bir $n \ge 0$ uchun ushbu

$$P_n(X) = \frac{X(X-1)(X-2)...(X-n+1)}{n!} \in Q[X]$$

ko'phadni qaraymiz. Har qanday ko'phad singari P_n ham $Q_p \to Q_p$ uzluksiz akslantirishni aniqlaydi. Agar m, n natural sonlar bo'lsa, u holda $C_n^m \in N$ bo'lib, $a \in N$ uchun $P_n(a) = C_n^a \in N$ bo'ladi.

Shunday qilib, P_n uzluksiz funksiya N ni N ga akslantiradi. U holda bu funksiya N to'plamning yopilmasini N ning yopilmasiga akslantiradi. N to'plam Z_p da zich. Demak, P_n funksiya Z_p ni Z_p ga akslantiradi.

Quyidagi natija haqiqiy analizdagi natijaga o'xshash.

1.3-lemma. Aytaylik, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ a_n \in Q_p$ yaqinlashish sohasi $D \subset Q_p$ ochiq va yopiq shardan iborat p-adik darajali qator bo'lsin. U holda $f : D \to Q_p$ funksiya D da uzluksiz bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $x \in D,\ x \ne 0$ va $|x - x'|_p < \delta$ bo'lsin, bu yerda $\delta < |x|_p$ (δ keyin tanlanadi). U holda teng yonli uchburchak prinsipiga ko'ra $|x|_p = |x'|_p$ bo'ladi.

$$|f(x) - f(x')|_p = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n - a_n x'^n\right)\right|_p \le \max_n \left|a_n x^n - a_n x'^n\right|_p =$$

$$= \max_n \left(|a_n|_p \left|(x-x')(x^{n-1} + x^{n-2}x' + ... + x'^{n-1})\right|_p\right).$$

Ammo $\left|x^{n-1} + x^{n-2}x' + ... + x'^{n-1}\right|_p \le \max_{1 \le i \le n} \left|x^{n-i} x'^{i-1}\right|_p = |x|_p^{n-1}$.

Shunday qilib,

$$|f(x) - f(x')|_p \le \max_n \left(|x-x'|_p |a_n|_p |x|_p^{n-1}\right) < \frac{\delta}{|x|_p} \max_n \left(|a_n|_p |x|_p^n\right).$$

$\left|a_n x^n\right|_p$ sonlar $n \to \infty$ da chegaralangan bo'lganligi sababli mos δ uchun $\left|f(x)-f(x')\right|_p < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $x \in D,\ x \neq 0$ nuqtada funksiya uzluksiz.

Agar $x=0$ bo'lsa, u holda $\left|0-x'\right|_p = \left|x'\right|_p < \delta$ uchun

$\left|f(0)-f(x')\right|_p = \left|a_0 - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x'^n\right|_p = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x'^n\right|_p \leq \max_n |a_n|_p \cdot \delta$ bo'ladi. Bundan berilgan funksiyaning $x=0$ nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi. Demak, $f: D \to Q_p$ funksiya D da uzluksiz bo'ladi.

1.2-teorema. $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in Q_p[[X]]$ qatorning yaqinlashish radiusi uning hosilasining $Df(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n X^{n-1}$ yaqinlashish radiusiga teng bo'ladi, ya'ni $r_f = r_{Df}$ bo'ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $n \in N$ uchun $|n|_p \leq 1$. U holda

$$r_{Df} = \limsup_{n\to\infty} |na_n|_p^{1/n-1} = \limsup_{n\to\infty} |na_n|_p^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|_p^{1/n} = r_f .$$

Quyidagi misol darajali qator va uning hosilasi yaqinlashish sohasining chegarasida turlicha bo'lishini ko'rsatadi. Ushbu $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{p^n}$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi 1 ga teng va $|x|_p = 1$ da uzoqlashuvchi. Uning hosila qatori $Df(X) = \sum_{n=1}^{\infty} p^n X^{p^n - 1}$ $|x|_p = 1$ da yaqinlashuvchi bo'ladi (chunki $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ qator yaqinlashuvchi).

2. p-adik logarifm va p-adik eksponenta

Quyidagi qatorni qaraymiz:

$$\ln(1+X) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{X^n}{n}. \qquad (2)$$

Bu qatorni barcha koeffitsientlari ratsional sonlardan iborat bo'lganligi sababli, qator $Q[[X]]$ ga tegishli bo'ladi. Bu darajali qator Q_p da $|x|_p < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi, uning yig'indisini $\ln_p(1+x)$ kabi belgilaymiz va p-adik logarifm deb ataymiz.

Shunga o'xshash:

$$\ln_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

qatorni aniqlaymiz, bu qator $x\in B=\{x\in Z_p:|x-1|_p<1\}=1+pZ_p$ to‘plamda yaqinlashadi.

2.1-teorema. *p*-adik logarifm uchun qo‘shish formulasi o‘rinli.

Isbot. Ushbu

$$\ln(1+X)+\ln(1+Y)-\ln(1+X+Y+XY)=0 \qquad (3)$$

ayniyat formal qatorlar uchun o‘rinli ekanligini bevosita tekshirish mumkin. Buning uchun o‘ng tomonini qatorlarga yoyish va hadlarni qayta guruhlash natijasida hosil bo‘lgan qatorning barcha koeffitsientlari 0 ga teng ekanligini ko‘rsatish lozim. Buni o‘quvchilarga havola qilamiz.

Endi ushbu

$$\exp(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}$$

qatorni Q_p qaraymiz. Bu qator *p*-adik eksponenta deyiladi va $\exp_p(x)$ kabi belgilanadi.

2.2-teorema. $\exp_p(x)$ *p*-adik eksponenta $D_p=\{x\in Q_p:|x|_p<r_p\}$ doirada, bu yerda $r_p=p^{-1/(p-1)}$ yaqinlashadi, Q_p ning boshqa nuqtalarida uzoqlashadi.

Isbot. Avval, bu qatorning r_p yaqinlashish radiusini (1) formula yordamida topamiz. Bu holda $a_n=1/n!$. Birinchi bobdagi 4-mashqdan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left|\frac{1}{n!}\right|_p=p^{\frac{n-S_n}{p-1}}.$$

(1) formulada r_p son *p*-ning darajasi ekanligini e’tiborga olsak,

$$ord_p r_p=\liminf\frac{1}{n}ord_p a_n=\liminf\left(-\frac{n-S_n}{n(p-1)}\right)=-\frac{1}{p-1}$$ bo‘ladi. (So‘ngi tenglik $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n-S_n}{n}\right)=-1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=-1$ ekanligidan kelib chiqadi.) Bundan $r_p=p^{-1/(p-1)}$.

Endi $|x|_p=p^{-1/(p-1)}$, ya’ni $ord_p(x)=1/(p-1)$ bo‘lganda qatorni yaqinlashishga tekshiramiz. Quyidagini yozib olish mumkin:

$$ord_p(a_nx^n)=-\frac{n-S_n}{p-1}+\frac{n}{p-1}=\frac{S_n}{p-1}.$$

Agar $n=p^m$ bo'lsa, u holda $S_n=1$ va $ord_p(a_{p^m}x^{p^m})=1/(p-1)$. Shu sababli $|x|_p=p^{-1/(p-1)}$ bo'lganda $\lim\limits_{n\to\infty}|a_nx^n|_p\neq 0$ bo'lib, bu nuqtalarda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

2.1-izoh. Agar $p=2$ bo'lsa, u holda yaqinlashish radiusi $1/2$ ga teng bo'ladi. Shu sababli $\exp_2(x)$ qator $4Z_2$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar $p>2$ bo'lsa, u holda yaqinlashish radiusi $p^{-1/(p-1)}$ ga teng. Ammo *p*-adik norma bunday qiymat qabul qila olmaydi. Va $\frac{1}{p}<p^{-1/(p-1)}<1$ bo'lganligi sababli, $\exp_p(x)$ qator pZ_p da yaqinlashuvchi bo'ladi.

2.4-teorema. Agar x va y *p*-adik eksponentaning D_p yaqinlashish doirasiga tegishli bo'lsa, u holda $\exp_p(x+y)=\exp_p(x)\cdot\exp_p(y)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Bu tenglik formal darajali qatorlar uchun o'rinli bo'lganligi sababli, isboti 2.1-teorema isbotiga o'xshash.

2.5-teorema. Agar $x\in D_p=\{|x|_p<p^{-1/(p-1)}\}$ bo'lsa, u holda

$$|\exp_p(x)-1|_p<1,$$

ya'ni $\exp_p(x)$ $\ln_p(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli va

$$\ln_p(\exp_p(x))=x \qquad (4)$$

bo'ladi. Va aksincha, agar $x\in D_p$ bo'lsa, u holda

$$|\ln_p(1+x)|_p<p^{-1/(p-1)}$$

va

$$\exp_p(\ln_p(1+x))=1+x \qquad (5)$$

bo'ladi.

Isbot. (4) va (5) munosabatlar formal darajali qatorlar uchun o'rinli bo'lgan mos munosabatlardan kelib chiqadi. Shu sababli berilgan qatorlarning yaqinlashuvchi ekanligini tekshirish yetarli.

Agar $x\in D_p$ bo'lsa, u holda $\exp_p(x)$ yaqinlashuvchi va 2.2.3-teoremaga ko'ra

$$|\exp_p(x)-1|_p\leq\max_n\left|\frac{x^n}{n!}\right|_p.$$

1-bobdagi 4-mashqning natijasidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right|_p<p^{-\frac{n}{p-1}}p^{ord_p(n!)}<p^{-\frac{n}{p-1}}p^{\frac{n}{p-1}}=1.$$

Shu sababli tasdiqlanganidek, $|\exp_p(x)-1|_p \le 1$ bo'ladi.

Tasdiqning ikkinchi qismini isbotlash uchun $ord_p(n)$ ni baholash lozim.

2.6-lemma. Quyidagi tenglik o'rinli: $ord_p(n)-\dfrac{n}{p-1} \le \dfrac{-1}{p-1}$.

Lemmaning isboti. n=1 va n=p uchun tenglik o'rinli. Agar $1<n<p$ bo'lsa, u holda $ord_p(n)=0$ bo'lib, qat'iy tengsizlik o'rinli bo'ladi. $n>p$ bo'lganda $ord_p(n)$ uchun yuqoridan quyidagi baholash o'rinli (1- mashq):

$$ord_p(n) \le \frac{\ln n}{\ln p}.$$

U holda

$$\frac{n-1}{p-1} - ord_p(n) \ge \frac{n-1}{p-1} - \frac{\ln n}{\ln p}. \qquad (6)$$

Ushbu $f(x)=\dfrac{x-1}{p-1}-\dfrac{\log x}{\log p}$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun $f(p)=0$ va barcha $x>p$ uchun $f'(x)>0$. Bundan f funksiya o'suvchi, xususan $n>p$ bo'lganda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$\frac{n-1}{p-1} - \frac{\ln n}{\ln p} > 0.$$

Bu tengsizlikni (6) bilan solishtirib talab qilingan tasdiqni olamiz.

Aytaylik, $x \in D_p$ bo'lsin. U holda

$|\ln_p(1+x)|_p \le \max\limits_n \left|\dfrac{x^n}{n}\right|_p$ bo'ladi. Lemmani tatbiq etib, quyidagini olamiz:

$$\left|\frac{x^n}{n}\right|_p < p^{-\frac{n}{p-1}} p^{ord_p(n)} \le p^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Bundan $\left|\ln_p(1+x)\right|_p < p^{-1/(p-1)}$ hosil bo'ladi.

2.1-misol. Aytaylik, $p=2$ bo'lsin. U holda $-1 \in \{x \in Z_2 : |x-1|_2 < 1\}$ ekanligi ravshan. Shunday qilib, $\ln_2(-1)$ 2-adik logarifmni quyidagi qator yordamida hisoblash mumkin:

$$\ln_2(-1) = \ln_2(1-2) = -\left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots\right).$$

Ikkinchi tomondan

$0=\ln_2(1)=\ln_2(-1)+\ln_2(-1)=2\ln_2(-1)$, bundan $\ln_2(-1)=0$. Bu degani

$n \to \infty$ da $2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + ... + \frac{2^n}{n}$ yig‘indi 2-adik normaga nisbatan 0 ga intiladi, ya’ni agar n yetarlicha katta bo‘lsa, u holda bu yig‘indi 2 ning istalgan katta darajasiga bo‘linadi.

3. p-adik eksponenta va logarifmlarning xossalari

$\exp_p$ qatorning

$$D_p = \left\{ x \in Z_p : |x|_p < p^{-\frac{1}{p-1}} \right\}$$

yaqinlashish sohasini qaraymiz. Agar $p \neq 2$ bo‘lsa, u holda $D_p = pZ_p$, agar p=2 bo ‘lsa, $D_2 = 4Z_2$. Ushbu akslantirishlar

$\exp_p : D_p \to 1 + D_p$ va $\ln_p : 1 + D_p \to D_p$

o‘zaro bir qiymatli. Eksponensial va logarifmik funksiyalar orasidagi asosiy xossalarni gruppalar tilida quyidagicha aytish mumkin.

3.1-teorema. p-adik logarifmik funksiya

$\ln_p : 1 + D_p \to D_p$

gruppalar izomorfizmini aniqlaydi, bu yerda $1 + D_p$ ko‘paytirishga nisbatan gruppa, D_p esa qo‘shishga nisbatan gruppa deb qaraladi. $\exp_p$ teskari izomorfizm bo‘ladi.

Isbot. Avval $1 + D_p$ ning Z_p ning multiplikativ qism gruppasi ekanligini tekshiramiz. Bu D_p ning Z_p da ideal ekanligidan kelib chiqadi: agar $x, y \in D_p$ bo‘lsa, u holda $x + y + xy \in Z_p$, va demak, $(1+x)(1+y) \in D_p$. Qolgan qismi 2.5-teoremadan to‘g‘ridan to‘g‘ri kelib chiqadi.

3.1-natija. $1 + D_p$ multiplikativ gruppa buralishga ega emas, ya’ni $1 + D_p$ da birdan farqli va biror m natural son uchun $x^m = 1$ bo‘ladigan x element mavjud emas.

Isbot. D_p additiv gruppaning buralishi yo‘q, chunki Q_p maydonda $my = 0$ munosabatdan $y = 0$ munosabat kelib chiqadi, bundan talab etilgan tasdiq kelib chiqadi.

3.1-izoh. 1. Birinchi tasdiq $\ln_p$ funksiyaning $1 + D_p$ va D_p gruppalar orasida o‘zaro bir qiymatli akslantirishni aniqlashini, bunda ko‘paytmaning obrazi obrazlar yig‘indisiga teng bo‘ladi. Xususan $\ln_p$ akslantirish in’ektiv, ya’ni $1 + D_p$ da $\ln_p$ ning qiymatlari teng bo‘ladigan ikkita har xil son mavjud emas. Shuni aytish lozimki, $1 + D_p$ doira $\ln_p$ akslantirish in’ektiv bo‘lgan eng katta doira bo‘ladi. Haqiqatan ham, $p \neq 2$ uchun $1+D_p$ doira $\ln_p$ funksiyaning yaqinlashish sohasi bo'ladi. Shu sababli $p=2$ holni qarash yetarli. Avval ko'rganimizdek $|-1-1|_2 = 1/2$, demak $-1 \in 1+2Z_2$, $1+2Z_2$ esa $\ln_2$ funksiyaning aniqlanish sohasidan iborat. Ammo $-1 \notin 1+D_2 = 1+4Z_2$, ya'ni $\exp_2$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli emas. Ikkinchi tomondan $\ln_2(1) = \ln_2(-1) = 0$. Shu sababli $1+D_2$ dan tashqarida in'ektivlik yo'qoladi.

2. Bu izomorfizm haqiqiy analizdagi ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalar xossalariga o'xshash. (musbat haqiqiy sonlarning ko'paytirishga nisbatan gruppasi va haqiqiy sonlarning qo'shishga nisbatan gruppasi orasida o'zaror teskari izomorfizm).

Ammo, qiziqarlisi shundan iboratki, eksponenta izometriya bo'ladi. Buni isbotlash uchun bizga quyidagi tasdiq kerak bo'ladi.

3.2-teorema. Har bir $x \in D_p$ uchun quyidagi munosababtlar o'rinli:

1) $|\exp_p(x)|_p = 1$;

2) $|\ln_p(1+x)|_p = |x|_p$;

3) $|1-\exp_p(x)|_p = |x|_p$.

Isbot. Ixtiyoriy natural son $n \geq 1$ uchun $S_n \geq 1$ (n sonning p adik raqamlar yig'indisi). U holda

$$ord_p(n!) = \frac{n-S_n}{p-1} \leq \frac{n-1}{p-1}.$$

Ikkinchi tomondan $ord(n) \leq ord(n!)$. Aytaylik, D_p doiraning radiusi $r_p = p^{-\frac{1}{p-1}}$ bo'lsin. U holda

$$|n|_p \geq |n!|_p \geq p^{-\frac{n-1}{p-1}} = r_p^{n-1}$$

va $n \geq 2$, $0 < |x|_p < r_p$ uchun

$$\left|\frac{x^n}{n}\right|_p \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right|_p \leq \left(\frac{|x|_p}{r_p}\right)^{n-1} |x|_p < |x|_p < 1 \text{ tengsizlik o'rinli.}$$

Teng yonli uchburchak prinsipidan foydalanamiz. Uning uchun

$$\exp_p(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

deb yozib olamiz.

$$|1|_p = 1 \text{ va } \left|x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right|_p < 1$$

ekanligidan $\left|\exp_p(x)\right|_p = 1$ kelib chiqadi. Shunga o'xshash 2) va 3) tengliklar isbotlanadi.

3.2-natija. $\exp_p : D_p \to 1 + D_p$ va $\ln_p : 1 + D_p \to D_p$ akslantirishlar izometriya bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $x, y \in D_p$ bo'lsin. U holda

$|\exp_p(x) - \exp_p(y)|_p = |\exp_p(y)|_p |\exp_p(x-y) - 1|_p = |\exp_p(x-y) - 1|_p = |x-y|_p$

, bundan eksponentaning izometrikligi kelib chiqadi. $\exp_p(\ln_p(1+x)) = 1 + x$ ekanligidan

$|\ln_p(1+x) - \ln_p(1+y)|_p = |(1+x) - (1+y)|_p = |x-y|_p$, bundan logarifmning izometrikligi kelib chiqadi.

Bu paragrafning so'ngida $\exp_p(x)$ va $\ln_p(x)$ funksiyalarning hosilalari ko'rinishi haqiqiy analizdagi kabi ekanligini ko'rsatamiz.

Nazorat savollari

1. p-adik darajali qatorni umumiy ko'rinishini yozing.
2. p-adik darajali qatorning yaqinlashish radiusi qanday topiladi?
3. p-adik darajali qatorning yaqinlashish sohasini ta'riflang.
4. p-adik darajali qatorning qator yig'indisining uzluksiz funksiya ekanligini asoslang.
5. Koeffitsientlari butun *p*-adik sonlardan iborat darajali qatorning yaqinlashish sohasi nimadan iborat?
6. p-adik darajali qatorni hadma-had differensiallash mumkinmi? Yaqinlashish sohasi o'zgaradimi?
7. p-adik logarifmni ta'riflang.
8. p-adik logarifmni xossalarini ayting.
9. p-adik logarifmning aniqlanish sohasini ko'rsating.
10. p-adik logarifmning qiymatlar to'plamini ko'rsating.
11. p-adik eksponentani ta'riflang.
12. p-adik eksponentaning aniqlanish sohasini ko'rsating.
13. p-adik eksponentaning qiymatlar to'plamini ko'rsating
14. p-adik eksponentaning xossalarini ayting.
15. p-adik logarifm va p-adik eksponenta orasidagi bog'lanishni ifodalovchi teoremaning ma'nosini tushuntiring.
16. $\exp_p$ va $\ln_p$ akslantirishlarning izometriya ekanini asoslang.

4-Mavzu: p-adik funksiyalar, differensiallanuvchi funksiyalar

Reja:

1. Lokal doimiy funksiyalar
2. Uzluksiz va tekis uzluksiz funksiyalar
3. *p*-adik funksiyalarning differensiallanuvchanligi

Tayanch so'z va iboralar: uzluksiz funksiya, tekis uzluksiz funksiya, lokal doimiy funksiya, bo'lakli doimiy funksiya, psevdodoimiy funksiya, uzilish nuqtasi, hosila, differensiallanuvchi funksiya

1. Lokal doimiy funksiyalar

1.1-ta'rif. Agar $\varepsilon>0$ son uchun $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in\mathbb{Q}_p$ uchun $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p$ funksiya $a\in\mathbb{Q}_p$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Agar $f:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p$ funksiya har bir $a\in\mathbb{Q}_p$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u $\mathbb{Q}_p$ da uzluksiz deyiladi.

Agar $\varepsilon>0$ son uchun $\delta>0$ son mavjud bo'lib, $|x-y|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x,y\in Z_p$ uchun $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p$ funksiya tekis uzluksiz deyiladi.

1.1-misol. Ma'lumki, $\mathbb{Q}_p$ fazo bog'lamli emas. Har qanday $U\subset\mathbb{Q}_p$ sharning xarakteristik funksiyasi

$$\xi_U(x)=\begin{cases}1, \ agar\ x\in U,\\ 0,\ agar\ x\in\mathbb{Q}_p\setminus U\end{cases}$$

uzluksiz bo'ladi. Haqiqatan ham, U shar va uning to'ldiruvchisi $\mathbb{Q}_p\setminus U$ ochiq to'plamlar bo'lganligi sababli yuqoridagi funksiyaning uzluksizligi o'z - o'zidan ravshan.

Bu tushunchani quyidagicha umumlashtirish mumkin:

1.2-ta'rif. Agar har bir $x\in Z_p$ uchun uning U_x atrofi mavjud bo'lib (masalan markazi x nuqtada radiusi p^{-m}, biror $m\in N$ uchun, bo'lgan shar: $\{y\in Z_p:|x-y|_p<p^{-m}\}$), bu atrofda funksiya o'zgarmas songa teng bo'lsa, u holda $f:Z_p\to Q_p$ lokal doimiy funksiya deyiladi.

Izoh. R da yoki intervalda (yoki ixtiyoriy bog'lamli fazoda) lokal doimiy funksiyalar faqat konstanta funksiyalardan iborat bo'ladi.

1.1-teorema. Lokal doimiy funksiyalar uzluksiz bo'ladi.

Isbot. O‘z o‘zidan ravshan, ta’rifdan kelib chiqadi.

Ushbu tasdiq Z_p fazoning kompaktligidan kelib chiqadi.

1.2-teorema. Aytaylik, $f:Z_p \to Q_p$ lokal doimiy funksiya bo‘lsin. U holda Z_p ni chekli sondagi o‘zaro kesishmaydigan sharlarning birlashmasi ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lib ($Z_p = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}$), funksiya bu sharlarning har birida doimiy bo‘ladi. Xususan, funksiyaning qiymatlar to‘plami $\{f(x): x \in Z_p\}$ chekli sondagi elementlardan tashkil topadi.

Isbot. Lokal doimiy funksiyaning ta’rifidagi barcha U_x sharlar to‘plamini qaraymiz. Bunday sharlar Z_p fazoning ochiq qoplamasini tashkil etadi. Z_p fazo kompaktligidan qoplamadan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin: $U_1, U_2, ..., U_{x_k}$. Ma’lumki, ultrametrik fazoda ikkita shar kesishmaydi, yoki biri ikkinchisining qismi bo‘ladi. Agar ajratib olingan qoplamada ikkinchi bir sharning qismi bo‘lgan sharlarni chiqarib tashlasak, u holda o‘zaro kesishmaydigan sharlardan iborat chekli qism qoplamaga ega bo‘lamiz.

1.1-natija. Z_p fazoda aniqlangan ixtiyoriy lokal doimiy funksiya tekis uzluksiz bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, p^{-m_i}, bu yerda $i = 1, 2, ..., k$, U_{x_i} sharning radiusi, $m = \max_i m_i$ bo‘lsin. U holda tekis uzluksizlik ta’rifidagi ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\delta = p^{-m}$ son topiladi. Haqiqatan ham, $|x-y|_p < p^{-m}$ bo‘lsin deb faraz qilaylik. Biror i uchun $x \in U_{x_i}$ bo‘lganligi sababli hamda sharning har bir nuqtasi uning markazi bo‘lishidan $x = x_i$ deb olishimiz mumkin. U holda $|x_i - y|_p < p^{-m} \le p^{-m_i}$, ya’ni $f(y) = f(x_i) = f(x)$ bo‘ladi. Bundan $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$ kelib chiqadi.

Z_p to‘plam o‘zida zich bo‘lgan N natural sonlar to‘plami va Z butun sonlar to‘plamini saqlaydi. Shu sababli ba’zida $f:N \to Q_p$ yoki $f:Z \to Q_p$ funksiyalarni, umuman olganda $E \subset Z_p$ uchun $f:E \to Q_p$ funksiyalarni qaraymiz.

1.3-ta’rif. Aytaylik, E Z_p fazoning qism to‘plami (kompakt bo‘lishi shart emas) bo‘lsin. Agar shunday t natural son mavjud bo‘lib, $|x - x_0| \le p^{-t}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x, x_0 \in E$ uchun $f(x) = f(x_0)$ bo‘lsa, u holda $f:E \to Q_p$ funksiya bo‘lakli doimiy deyiladi. Bu shart bajariladigan eng kichik t natural son f funksiyaning tartibi deyiladi.

Ta’rifdan tushunarliki, bo‘lakli doimiy funksiya Eda tekis uzluksiz va lokal doimiy bo‘ladi.

Har bir t natural son uchun quyidagi tarzda E to‘plamning bo‘laklanishini tuzamiz. $N_t = \{0, 1, 2, \ldots, p^t - 1\}$ deb belgilash kiritamiz. Har bir $x \in Z_p$ uchun kanonik yoyilmasini yozamiz:

$x = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots + x_{t-1} p^{t-1} + \ldots$ va

$$N_x = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots + x_{t-1} p^{t-1} \qquad (1)$$

deb olamiz. U holda $N_x \in N_t$ va

$$| x - N_x |_p \le p^{-t} \qquad (2)$$

Har bir $N \in N_t$ uchun

$E(N) = E \cap U(N,t),$ bu yerda $U(N,t) = \{x \in Z_p : | x - N |_p \le p^{-t} < p^{-t+1}\}$,deb olamiz.

Avval har bir $x \in Z_p$ biror $U(N,t)$ sharga tegishli bo‘lishini ko‘rdik. Hamda ixtiyoriy $N, M \in \square_t$ uchun $| N - M |_p > p^{-t}$ bo‘lganligi sababli $U(N,t)$ sharlar o‘zaro kesishmaydi. Shunday qilib, E to‘plamning bo‘laklanishini hosil qilamiz:

$$E = \bigcup_{N=0}^{p^t - 1} E(N) \qquad (3)$$

Endi, quyidagi kutilmagan teoremani isbotlashimiz mumkin:

1.3-teorema. $\square$ dagi yoki $\square_p$ dagi har qanday bo‘lakli doimiy funksiya davriy bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, $E = \square$ yoki $E = \square_p$ bo‘lsin. Va $f : E \to Q_p$ funksiya t tartibli bo‘lakli doimiy funksiya bo‘lsin. E to‘plamning yuqoridagi (3) bo‘laklanishini qaraymiz. Agar $x, y \in E(N)$ bo‘lsa, u holda kuchli uchburchak tengsizligidan, quyidagiga ega bo‘lamiz: $|x - y|_p = |(x - N) + (N - y)|_p \le p^{-t}$, demak $f(x) = f(y)$. Agar $x \in E(N)$ bo‘lsa, u holda $x + p^t \in E(N)$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. Shunday qilib barcha $x \in E$ uchun $f(x + p^t) = f(x)$, ya’ni funksiya davriy bo‘ladi.

Haqiqiy analizda kesmada uzluksiz funksiyaga bo‘lakli doimiy funksiya bilan tekis yaqinlashish mumkinligi haqida teorema mavjud. Shunga o‘xshash natija p-adik analiz uchun ham o‘rinli.

1.4-teorema. Aytaylik $E = \square$ yoki $E = \square_p$ bo‘lsin. $f : E \to Q_p$ funksiya E da tekis uzluksiz bo‘lishi uchun har bir s natural songa mos $t = t(s)$ natural son va tartibi t dan katta bo‘lmagan $S : E \to Q_p$ bo‘lakli doimiy funksiya mavjud bo‘lib, har bir $x \in E$ uchun

$$| f(x) - S(x) |_p \le p^{-s} \qquad (4)$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Faraz qilaylik, f va S funksiyalar (4) tengsizlikni qanoatlantirsin. Agar x_0 ushbu $|x-x_0|_p\le p^{-t}$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $S(x)=S(x_0)$, $|f(x)-S(x)|_p\le p^{-s}$, $|f(x_0)-S(x_0)|_p\le p^{-s}$ bo'ladi, va

$|f(x)-f(x_0)|_p=\left|(f(x)-S(x))-(f(x_0)-S(x_0))\right|_p\le p^{-s}$, bundan f funksiyaning tekis uzluksizligi kelib chiqadi.

Teskarisi, f funksiya E da tekis uzluksiz bo'lsin. U holda har bir s natural son uchun shunday $t=t(s)$ natural son mavjudki, agar $x,x_0\in E$ va $|x-x_0|_p\le p^{-t}$ bo'lganda

$$|f(x)-f(x_0)|_p\le p^{-s} \qquad (5)$$

bo'ladi.

$S:E\to Q_p$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar $x\in E$ bo'lsa, u holda $S(x)=f(N_x)$, bu yerda N_x (1) munosabatdan aniqlanadi. Bu holda S bo'lakli doimiy funksiya bo'lib, uning tartibi t dan katta emas. (2) va (5) tengsizliklardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|f(x)-S(x)|_p=|f(x)-f(N_x)|_p\le p^{-s}.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

2. Uzluksiz va tekis uzluksiz funksiyalar

Aytaylik, $E\subset\mathbb{Q}_p$, $x_0\in E$ hamda x_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

2.1-teorema. Aytaylik, $f:E\to\mathbb{Q}_p$, $g:E\to\mathbb{Q}_p$ bo'lsin.

1) f funksiya $x_0\in E$ nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$ bo'lishi zarur va yetarli.

2) agar f va g funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f+g,\ f-g,\ fg$ funksiyalar shu nuqtada uzluksiz bo'ladi. Agar $g(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda f/g funksiya ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti haqiqiy analizdagi kabi bo'lganligi sababli, isbotlashni o'quvchilarga qoldiramiz.

Quyida birnechta uzilishga ega funksiyalarga misollar keltiramiz.

2.1-misol. Aytaylik $f:N\to\mathbb{Q}_p$ funksiya quyidagi formula bilan aniqlansin: $f(x)=\dfrac{1}{x-c}$, bu yerda $c\in\mathbb{Q}_p$. Agar $c\notin\mathbb{N}$ bo'lsa, u holda mahraj $\mathbb{N}$ da nolga aynalmaydi, yuqoridagi teoremaga asosan funksiya uzluksiz (ammo tekis uzluksiz emas) bo'ladi. Ammo funksiya $\mathbb{N}$ da chegaralanmagan bo'ladi. Haqiqatan ham, c

butun $p-$adik son bo'lganligi uchun shunday x natural son mavjudki $|x-c|_p$ norma yetarlicha kichik bo'ladi, shu sababli $|f(x)|_p$ yetarlicha katta bo'ladi. Agar $c\in\mathbb{N}$ bo'lsa, f funksiya c nuqtada uzilishga ega bo'ladi.

2.2-misol. Aytaylik $\{a_n\}$ butun $p-$adik son larning cheksiz kichik ketma-ketligi bo'lsin va bunda barcha $n\in\mathbb{N}$ uchun $a_n\neq 0$ bo'lsin. Shu ketma-ketlik asosida quyidagi ikkita $f_1:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$ va $f_2:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p$ funksiyalarni tuzamiz:

$$f_1(x)=\begin{cases} a_x, agar\ x\in\mathbb{N}, \\ 0,\ agar\ x\notin\mathbb{N}\ \ (x\in\mathbb{Z}_p), \end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} a_x, agar\ x\in\mathbb{N}, \\ 1,\ agar\ x\notin\mathbb{N}\ \ (x\in\mathbb{Z}_p). \end{cases}$$

Ikkala funksiya ham $\mathbb{N}$ ning nuqtalarida uzilishga ega. Bunga ishonch hosil qilish uchun ixtiyoriy $x\in\mathbb{N}$ olamiz, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x+p^n)=x$ va

$\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x+p^n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_{x+p^n}=0$, chunki $\left\{a_{x+p^n}\right\}$ ketma-ketlik $\{a_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlikning qism ketma-ketligi. Ammo $f_1(x)=x\neq 0$. Shunga o'xshash tasdiq f_2 funksiya uchun ham o'rinli.

f_1 funksiyaning barcha $x\in\mathbb{Z}_p\setminus\mathbb{N}$ nuqtalarda uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik, $\{x_n\}$ x nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsin va $\{x_{r_n}\}$ $\mathbb{N}$ dagi qism ketma-ketlik bo'lsin. U holda $\{a_{r_n}\}$ cheksiz kichik ketma-ketlikning qism ketma-ketligi sifatida $\lim\limits_{n\to\infty} a_{r_n}=0$ bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x_n)=0$.

f_2 funksiyaning barcha $x\in\mathbb{Z}_p$ nuqtalarda uzlishga ega. Haqiqatan ham, agar $x\in\mathbb{Z}_p\setminus\mathbb{N}$ bo'lsa, u holda x ga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ natural sonlar ketma ketligini olamiz. U holda $\lim\limits_{n\to\infty} f_2(x_n)=0\neq 1=f_2(x)$ bo'ladi.

$\mathbb{Z}_p$ to'plam kompakt bo'lganligi sababli quyidagi teorema o'rinli.

2.2-teorema. $\mathbb{Z}_p$ da uzluksiz bo'lgan $f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$ funksiya shu to'plamda tekis uzluksiz va chegaralangan bo'ladi.

Quyidagi muhim teoremani isbotlaymiz.

2.3-teorema. Aytaylik E to'plam $\mathbb{Q}_p$ ning qismi, $\overline{E}$ uning yopilmasi bo'lsin. Shuningdek, $f:E\to\mathbb{Q}_p$ funksiya E to'plamda tekis uzluksiz bo'lsin. U holda $\overline{E}$ to'plamda tekis uzluksiz va chegaralangan hamda barcha $x\in E$ uchun $F(x)=f(x)$ bo'ladigan yagona $F:\overline{E}\to\mathbb{Q}_p$ funksiya mavjud bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $X\in\overline{E}$ bo'lsin. U holda E da $\{x_n\}$ ketma-ketlik mavjud bo'lib,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = X \qquad (6)$$

bo'ladi. ($X \notin E$ holni qaraymiz,). f funksiya E to'plamda tekis uzluksiz bo'lganligi sababli, har bir s natural son uchun $t(s)$ natural son topilib, uning uchun (5) formula o'rinli bo'ladi. (6) munasobatga ko'ra shunday $N = N(t)$ natural son mavjudki, $n \geq N$ bo'lganda $|x_n - X|_p \leq p^{-t}$ bo'ladi. U holda $n, m \geq N$ uchun $|x_m - x_n|_p = |(x_m - X) - (x_n - X)|_p \leq p^{-t}$ bo'ladi va (5) formuladan $|f(x_m) - f(x_n)|_p \leq p^{-s}$ ni hosil qilamiz. Bu degani $\{f(x_n)\}$ Koshining $p-$adik ketma ketligi. Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$ bo'lsin.

Bu limitning X nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikni tanlashga bog'liq emasligini oson ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham, agar X nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x'_n\}$ boshqa bir ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{x_n - x'_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. f funksiya E to'plamda tekis uzluksiz bo'lganligi sababli $\{f(x_n) - f(x'_n)\}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik bo'ladi. Bundan esa $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $F(X) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ formula bilan berilgan $F : \overline{E} \to \mathbb{Q}_p$ funksiya, bunda $X \in \overline{E}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$, $x_n \in E$, korrekt aniqlangan.

Bu funksiyaning $\overline{E}$ da tekis uzluksizligini isbotlaymiz. Aytaylik, $\overline{E}$ to'plamdan olingan X va X_0 nuqtalar jufti $|X - X_0| \leq p^{-t}$ tengsizlikni qanoatlantirsin. E to'plamdan quyidagi tengsizliklar o'rinli bo'ladigan x va x_0 nuqtalarni tanlab olamiz:

$$|x - X|_p \leq p^{-t}, \quad |x_0 - X_0|_p \leq p^{-t},$$

$$|f(x) - F(X)|_p \leq p^{-s}, \quad |f(x_0) - F(X_0)|_p \leq p^{-s}.$$

U holda

$$|x - x_0|_p = |(x - X) + (X - X_0) - (x_0 - X_0)|_p \leq p^{-t},$$

Va (5) formuladan $|f(x) - f(x_j)|_p \leq p^{-s}$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $|F(X) - F(X_0)|_p = |-(f(x) - F(x)) + (f(x) - f(x_0)) + (f(x_0) - F(X_0))|_p \leq p^{-s}$, demak F funksiya $\overline{E}$ da tekis uzluksiz.

Endi F funksiyaning $\overline{E}$ da chegaralanganligini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilsak, u holda $\{X_n\} \subset \overline{E}$ ketma-ketlik topilib,

$$\lim_{n\to\infty} |F(X_n)|_p = \infty \qquad (7)$$

bo'ladi. E to'plam, demak $\overline{E}$ to'plam ham $\mathbb{Q}_p$ kompakt to'plamning qism to'plami bo'lganligi sababli, berilgan ketma-ketlikning yaqinlashuvchi $\{X_{r_n}\}$ qism ketma ketligi mavjud bo'ladi: $\lim\limits_{n\to\infty} X_{r_n} = X_0$.

Ketma-ketlikning barcha hadlari $\overline{E}$ to'plamga tegishli va $\overline{E}$ yopiq to'plam bo'lganligidan $X_0 \in \overline{E}$ bo'ladi. Yuqorida isbotlaganimizdek, F funksiya $\overline{E}$ da tekis uzluksiz, demak X_0 nuqtada uzluksiz. Bundan quyidagini olamiz:

$\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = F(X_0)$. Bu esa (7) ga zid.

F funksiyaning yagonaligini isbotlash uchun shunday xossalarga ega bo'lgan yana bitta F^* funksiya mavjud deb faraz qilamiz. U holda $F - F^*$ ayirma $\overline{E}$ da tekis uzluksiz, E to'plamda aynan nolga teng. E to'plam $\overline{E}$ to'plamda zich bo'lganligi sababli, $F - F^*$ funksiya ham $\overline{E}$ to'plamda aynan nolga teng. Demak, $F = F^*$.

3. *p*-adik funksiyalarning differensiallanuvchanligi

Avval p-adik analiz nuqtai nazardan hosilaga ta'rif beramiz.

3.1-ta'rif. Aytaylik, $X \subset Q_p, a \in X$ limit nuqta bo'lsin. Agar $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ mavjud bo'lsa, u holda $f: X \to Q_p$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi, $f'(a)$ funksiyaning a nuqtadagi hosilasi deyiladi. Agar funksiya X to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya X to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Hosila quyidagi standart xossalarga ega:

1. Yig'indi, ko'paytma, bo'linma va kompozitsiyalarni differensiallash qoidalari saqlanadi.

2. $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ ko'phadning hosilasi $P'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

3. Ratsional funksiyalar differensiallanuvchi.

4. Differensiallanuvchi funksiyalar uzluksiz.

Biz 1.6-teoremada $f(X) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ darajali qatorning formal hosilasi $Df(X) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n X^{n-1}$ ham berilgan qatorning yaqinlashish radiusiga teng radiusga ega bo'lishini isbotlagan edik. Haqiqiy (kompleks) analizdagi kabi $Df(X)$ formal darajali qator yaqinlashish sohasida $f'(x)$ funksiyani ifodalaydi.

3.2-teorema. Ushbu $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n\in Q_p[[X]]$ darajali qatorni qaraymiz va $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ qator $U\subset Q_p$ ochiq sharda yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya U da differensiallanuvchi va barcha $x\in U$ uchun $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Bundan tashqari, $f(x)$ funksiya U da barcha tartibli hosilalariga ega bo'ladi:

$$f^{(k)}(x)=k!\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k a_n x^{n-k}.$$

Endi $\exp_p(x)$ va $\ln_p(x)$ funksiyalarning hosilalarini hisoblashimiz mumkin.

3.3-teorema. 1. $\exp_p$ funksiya D_p da differensiallanuvchi va $\exp_p'(x)=\exp_p(x)$ bo'ladi.

2. $\ln_p$ funksiya $1+pZ_p$ da differensiallanuvchi va $\ln_p'(x)=\frac{1}{x}$ bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham

$$\exp_p'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\exp_p(x).$$

Shunga o'xshash,

$$\ln_p'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-1)^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}=\frac{1}{x}\text{ bo'ladi.}$$

O'rta qiymat haqidagi Lagranj teoremasi differensial hisobning kamartoshi hisoblanadi. U f differensiallanuvchi funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan har bir $x\neq y$ juftlik uchun x va y lar orasida yotuvchi ξ nuqta mavjud bo'lib,

$$f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x) \qquad (8)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib, agar barcha x lar uchun $f'(x)=0$ bo'lsa, u holda (1) tenglikdan $f(x)=f(y)$ kelib chiqadi.

Bu fakt $p-$adik funksiyalar uchun o'rinli emas: doimiy bo'lmagan hosilasi nolga teng funksiyalar mavjud. Shu sababli o'rta qiymat haqidagi teoremani, hatto "orasida" iborasini olib tashlasak ham, bu holga o'tkazish mumkin emas ($p-$adik holda "orasida" iborasi ma'noga ega emas). Kelgusi misol $p-$adik holda nima yuz berishini ko'rsatadi.

3.1-misol. Aytaylik, $E\subset\mathbb{Q}_p$ yakkalangan nuqtalari bo'lmagan qism to'plami va f funksiya E to'plamda aniqlangan lokal doimiy funksiya bo'lsin. U holda har bir $a\in E$ uchun $\varepsilon>0$ son topilib, agar $x\in E$ ushbu $|x-a|_p<\varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $f(x)=f(a)$ bo'ladi. Shunday qilib, agar $|x-a|_p<\varepsilon$ bo'lsa, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ bo'ladi. Shu sababli f funksiya E da differensiallanuvchi va barcha $a\in E$ uchun $f'(a)=0$ bo'ladi.

Bu misoldan ko'rinadiki, hosilasi nolga teng bo'lgan doimiy bo'lmagan funksiyalar sinfi keng. Bu natija nafaqat haqiqiy analiz natijalariga, balki analitik funksiya xossalariga ham zid. Haqiqatan ham, aytaylik $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $x\in\mathbb{R}$ va E shu darajali qatorning yaqinlashish sohasi bo'lsin. Agar f' aynan nolga teng funksiya bo'lsa, u holda uning barcha hosilalari ham aynan nolga teng bo'ladi va darajali qatorning a_k koeffitsientlari $k\geq 1$ bo'lganda nolga teng. Shu sababli $f(x)=a_0$, ya'ni funksiya doimiy bo'ladi.

Hosilasi nolga teng bo'lgan $f:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p$ funksiya psevdodoimiy funksiya deyiladi. Psevdodoimiy funksiyalar to'plami $\{f:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p : f'=0\}$ lokal doimiy funksiyalarni qamrab oladi. Quyidagi misol lokal doimiy bo'lmagan psevdodoimiy funksiyalarning mavjudligini ko'rsatadi.

3.2-misol. Hosilasi nolga teng bo'lgan in'ektiv (demak, lokal doimiy bo'lmagan) $f:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p$ funksiya mavjud.

Isbot. Aytaylik, $x=\sum_{n=0}^{\infty}a_np^n\in\mathbb{Q}_p$ bo'lsin. f funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_np^{2n}\in\mathbb{Q}_p$. U holda agar $x=\sum_{n=0}^{\infty}a_np^n\in\mathbb{Q}_p$ va $y=\sum_{n=0}^{\infty}b_np^n\in\mathbb{Q}_p$ sonlar biror $j=0,1,2,...$ uchun $|x-y|_p=p^{-j}$ bo'lsa, u holda $a_0=b_0,\ a_1=b_1,...,a_{j-1}=b_{j-1},\ a_j\neq b_j$ bo'ladi. Shuning uchun $|f(x)-f(y)|_p=p^{-2j}$. Shunday qilib, $x,y\in\mathbb{Q}_p$ uchun $\left|f(x)-f(y)\right|_p=\left|x-y\right|_p^2$ bo'ladi. Bundan f funksiyaning in'ektivligi ($f(x)=f(y)$ tenglikdan $x=y$ kelib chiqadi) va $y\to x$ da $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|_p=|x-y|_p\to 0$ kelib chiqadi, ya'ni $f'\equiv 0$ (aynan nolga teng funksiya).

Bu misol funksiyalar uchun Gelder sharti tushunchasini kiritishni taqoza qiladi.

3.2-ta'rif. Aytaylik, $E\subset\mathbb{Q}_p$, $f:\mathbb{Q}_p\to\mathbb{Q}_p$ va $\alpha>0$ bo'lsin. Agar shunday

$M > 0$ son mavjud bo‘lib, barcha $x, y \in E$ uchun

$$|f(x) - f(y)|_p \le M |x - y|_p^\alpha$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya α tartibli Gelder shartini qanoatlantiradi deyiladi.

3.2-misoldagi funksiya 2-tartibli Gelder shartini qanoatlantiradi. Agar funksiya birdan yuqori tartibli Gelder shartini qanoatlantirsa, u holda $f' = 0$ bo‘ladi. Shu sababli haqiqiy holda funksiya doimiy bo‘ladi.

Haqiqiy analizda Roll teoremasi o‘rinli, ya’ni agar $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi va $f(a) = f(b)$ bo‘lsa, u holda shunday $\xi \in (a,b)$ nuqta topilib, $f'(\xi) = 0$ bo‘ladi.

Quyidagi misol $p-$adik holda bu teorema, umuman olganda, bajarilmasligini ko‘rsatadi.

3.3-misol. Ushbu $f(x) = x^p - x$ formula bilan berilgan $f: \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya uchun $f(0) = f(1) = 0, f'(x) = px^{p-1} - 1$ bo‘ladi. Bundan barcha $x \in \mathbb{Z}_p$ uchun$|f'(x) + 1|_p \le 1/p,$ ya’ni $f'(x) \in -1 + p\mathbb{Z}_p$, demak $f'(x) \ne 0$.

$p-$adik funksiyalarning haqiqiy funksiyalardan yana bir farqi uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalarning lokal teskarilanuvchanligini qaraganimizda ko‘rinadi. Haqiqiy analizda quyidagi o‘rinli: agar uzluksiz differensiallanuvchi f funksiya uchun $f'(x_0) \ne 0$ bo‘lsa, u holda f funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida lokal teskarilanuvchi bo‘ladi. $p-$adik funksiyalar uchun bu fakt bajarilmasligini quyidagi misol ko‘rsatadi.

3.4-misol. Shunday $f: \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ differensiallanuvchi funksiya mavjudki, barcha $x \in \mathbb{Q}_p$ uchun $f'(x) = 1$, ammo barcha $n \in N$ uchun $f(p^n) = f(p^n - p^{2n})$ bo‘ladi. Shu sababli f funksiya 0 nuqtaning hech bir atrofida in’ektiv emas.

Har bir $n \in N$ uchun $B_n = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x - p^n|_p < p^{-2n} \right\}$ to‘plamni qaraymiz. Agar $x \in B_n$ bo‘lsa, u holda $|x|_p = p^{-n}$, shu sababli B_i doiralar o‘zaro kesishmaydi.

Quyidagi funksiyani qaraymiz:

$$f(x) = \begin{cases} x - p^{2n}, agar\ n \in \mathbb{N}, x \in B_n, \\ x, \qquad agar\ \ x \in \mathbb{Q}_p \setminus \bigcup_n B_n. \end{cases}$$

$p^n \in B_n$ bo‘lganligi sababli $f(p^n) = p^n - p^{2n}$ bo‘ladi, ikkinchi tomondan $p^n - p^{2n}$ son B_m doiralarning hech biriga tegishli emas. Bundan esa

$f(p^n - p^{2n}) = p^n - p^{2n}$, ya'ni f funksiya 0 nuqtaning hech bir atrofida in'ektiv emas.

$f' = 1$ ekanligini ko‘rsatish uchun $g(x) = x - f(x)$ funksiyani qaraymiz,

$$g(x) = \begin{cases} p^{2n}, \ agar \ n \in \square, \ x \in B_n, \\ 0, \quad agar \ \ x \in \square_p \setminus \bigcup_n B_n. \end{cases}$$

$g(x)$ funksiya $\square_p \setminus \{0\}$ to‘plamda lokal doimiy bo‘lganligi sababli $g' = 0$ bo‘ladi. Shu sababli $g'(0) = 0$ ekanligini tekshirish yetarli. Aytaylik, $x \in \square_p$, $x \neq 0$ bo‘lsin. U holda

$$\left| \frac{g(x) - g(0)}{x} \right|_p = \begin{cases} \dfrac{|p^{2n}|_p}{|x|_p} = p^{-n}, \ agar \ \ n \in \square, \ x \in B_n, \\ 0, \qquad\qquad agar \quad x \in \square_p \setminus \bigcup_n B_n \end{cases}$$ bo‘ladi. Va bundan

$g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 0.$ Shunday qilib, barcha $x \in \square_p$ uchun $f'(x) = 1$.

Nazorat savollari

1. Nuqtada, to'plamda uzluksiz p-adik funksiyaga ta'rif bering.
2. Tekis uzluksiz p-adik funksiyaga ta'rif bering.
3. Uzluksiz funksiyaga misollar keltiring.
4. Uzluksiz, ammo tekus uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.
5. Uziishga ega bo'lgan funksiyaga misol keltiring.
6. Lokal doimiy funksiyaga ta'rif bering, misol keltiring.
7. Lokal doimiy funksiyaning uzluksizligini asoslang.
8. Bo‘lakli doimiy funksiyani ta'riflang, misol keltiring.
9. Bo‘lakli doimiy funksiya $E \subseteq Z_p$ da tekis uzluksiz va lokal doimiy bo‘ladi. Asoslang.
10. $\square$ dagi yoki $\square_p$ dagi har qanday bo‘lakli doimiy funksiya davriy bo‘ladi. Asoslang.
11. $\square_p$ da uzluksiz bo‘lgan funksiyaning xossalarini ayting.
12. P-adik funksiyaning hosilasiga ta'rif bering.
13. Differensiallanuvchi p-adik funksiyalarning xossalarini ayting.
14. O‘rta qiymat haqidagi Lagranj teoremasi p-adik funksiyalar uchun o'rinlimi? Javobingizni asoslang.
15. Hosilasi nolga teng, ammo doimiy bo'lmagan funksiyaga misol keltiring.
16. Psevdodoimiy funksiyani ta'riflang, misol keltiring.

17. Lokal doimiy va psevdodoimiy funksiyalar orasida qanday munosabat mavjud?

18. $\exp_p$ va $\ln_p$ funksiyalarning hosilalarini yozing.

19. Haqiqiy analizda Roll teoremasi o'rinli. P-adik holda bu teorema o'rinlimi? Javobingizni asoslang.

20. Haqiqiy analizda quyidagi o'rinli: agar uzluksiz differensiallanuvchi f funksiya uchun $f'(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda f funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida lokal teskarilanuvchi bo'ladi. Bu xossa p-adik analizda o'rinlimi? Javobingizni asoslang.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Turgunbayev R.M. Matematik analiz 1-qism. Darslik. T.:- "Innovatsiya-ziyo". 2019. 340 b.
2. Каток С.Б. p-адический анализ в сравнении с вещественным. М.: МЦНМО, 2004,-112с.
3. Коблиц Н. p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.-192 с.
4. Alain M. Robert. A Course in p-adic Analysis. 2000. Springer-Verlag. New York, 438 p.
5. Fernando Q. Gouvea. p-adic Numbers. Corrected 3rd printing. 2003. Springer-Verlag. 301 p.
6. Khrennikov A., Anashin V. Applied algebraic dynamics. Copyright 2009 by Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 10785 Berlin, Germany.
7. Ayupov Sh.A., Turgunbayev R.M. p-adik analizga kirish.(oquv qo'llanma). 80-b. (OO'MTV qoshidagi muvofiqlashtiruvhi kengashga topshirilgan)

5-Mavzu: Evklidga qadar geometriya. Evklidning "Negizlar" asari. Evklidning V postulati va uni isbotlashga urinishlar. Evklid va Lobachevskiy geometriyalari qiyosiy tahlili. Gilbert va Lobachevskiy aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan natijalar

Reja:

1. Evklidga qadar geometriya. Evklidning "Negizlar" asari. Evklidning V postulate va uni isbotlashga urinishlar
2. Gilbert aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan teoremalar
3. Lobachevskiy aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan teoremalar
4. Parallel to`g`ri chiziqlar va ularning xossalari

Tayanch tushunchalar: tegishlilik aksiomasi, kongurent figuralar, uzluksizlik aksiomasi, parallellik aksiomalari, Lobachevskiy aksiomasi, noyevklid geometriya aksiomalari

1. Evklidga qadar geometriya. Evklidning "Negizlar" asari. Evklidning V postulate va uni isbotlashga urinishlar

Geometrik tasavvurlar juda qadim zamonlarda paydo bo'lgan. Qadimgi Vavilon va Misr madaniyatida geometrik fikrlashlarni uchratish mumkin.

Eramizdan avvalgi VII asrlardan boshlab Grek olimlarining ishlarida geometriya paydo bo'la boshlagan. Eramizdan avvalgi VI va V asrlarda ko'pgina asosiy geometrik faktlar ma'lum edi. SHu paytlardan teoremani isbotlash tushunchasi paydo bo'lgan.

Eramizdan avvalgi III asrlarga kelib greklar chuqur geometrik bilimga ega bo'lish bilan birga geometrik isbotlash usullarini ham bilardilar. Tabiiyki, bu davrda to'plangan faktlarni mantiqiy bog'liqligi bo'yicha joylashtirib, yozib chiqish zarurati paydo bo'ladi.

Geometriyaning asosini yozishga ko'pgina grek mualliflari harakat qilishgan. Lekin ularning asarlari bizgacha etib kelmagan.

Qadimgi buyuk geometrlardan biri Evklid (taxminan Eramizdan avvalgi 33O yil dan 275 yilgacha yashagan). Uning «Negizlar» asari 13 ta kitobdan iborat bo'lib, beshinchi, ettinchi, sakkizinchi, to'qqizinchi va o'ninchi kitoblari proporsiyalar nazariyasi va arifmetikaga (geometrik usulda yozilgan), qolganlari geometriyaga bag'ishlangan.

Birinchi kitobi

1-ta'rif. Nuqta-bo'laklarga ega emas.

2-ta'rif. *CH*iziq-ensiz uzunlik.

3-ta'rif. CHiziqning chegarasi - nuqtalardan iborat.

4-ta'rif. To'g'ri chiziq - o'zining barcha nuqtalariga nisbatan bir xil joylashgan chiziq.

5-ta'rif. Sirt-faqat uzunlikka va enga ega.

6-ta'rif. Sirtning chegaralari chiziqlardan iborat.

7-ta'rif. Tekislik-unda yotadigan barcha to'g'ri chiziqlarga nisbatan bir xil joylashgan sirt.

8-ta'rif. Yassi burchak-bir tekislikdagi ikkita kesishuvchi chiziqning bir-biridan og'ishi.

Ta'riflardan so'ng Evklid isbot talab qilmaydigan jumlalar - postulatlar va aksiomalar keltiradi.

Postulatlar

I Har bir nuqtadan boshqa nuqtaga to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

II Har bir to'g'ri chiziqni istalgancha davom ettirish mumkin.

III Istalgan nuqtani markaz qilib istalgan radiusli aylana chizish mumkin.

IV Barcha to‘g‘ri burchaklar teng.

V Ikki to‘g‘ri chiziqni kesuvchi to‘g‘ri chiziq ular bilan ichki bir tomonli burchaklar hosil qiladi, bu ikki to‘g‘ri chiziq ichki bir tomonli burchaklar yig‘indisi ikki to‘g‘ri burchakdan kichik bo‘lgan tomonda kesishadi.

Aksiomalar

I. Bitta miqdorga teng miqdorlar o‘zaro teng.

II. Teng miqdorlarga teng miqdorlar qo‘shilsa, teng miqdorlar hosil bo‘ladi.

III. Teng miqdordan teng miqdorni ayirsak, teng miqdorlar hosil bo‘ladi.

IV. Teng bo‘lmagan miqdorga teng miqdorlarni qo‘shsak, teng bo‘lmagan miqdorlar hosil bo‘ladi.

V. Teng miqdorlarni ikkilantirsak, teng miqdorlar hosil bo‘ladi.

VI. Teng miqdorlarning yarimlari teng miqdorlar bo‘ladi.

VII. Ustma-ust tushuvchi miqdorlar teng.

VIII. Butun miqdor qismdan katta.

IX. Ikki to‘g‘ri chiziq fazoni chegaralay olmaydi.

Negizlar asarining ba’zi nashrlarida *IV, V* postulatlar aksioma deb olinadi. SHuning uchun *V* postulat *XI* aksioma deb ham yuritiladi. Hozircha Evklid aksioma va postulatni qaysi prinsipga asosan olganligi aniqmasligicha qolmoqda.

Evklid aksiomalardan so‘ng teoremalarni mantiqiy bog‘liqlik tartibini qat’iy etib joylashtirgan. YA’ni, keltirilgan har bir teoremani oldin keltirilgan tasdiq, aksioma va postulatlarga tayangan holda isbotlash mumkin.

Barcha keyingi teoremalarni qat’iy mantiqiy isbotlash uchun etarli bo‘ladigan ta’rif va aksiomalarni keltirish geometriyani asoslash deyiladi.

Geometriyani asoslash masalasi Evklid tomonidan to‘g‘ri qo‘yildi va o‘zining «Negizlar» asarida o‘sha davrga nisbatan to‘liq echildi.

Evklid «Negizlar» asarining zamonaviy matematika nuqtai nazaridan qaraganda, kamchiliklari mavjud. Ba’zi bir ta’riflari ta’riflanishi zarur bo‘lgan tushunchalarga asoslanadi. Masalan, «chegara», «uzunlik» va hokazo tushunchalar. I-VIII ta’riflardan birortasi teoremalar isbotlashda foydalanilmaydi. Bu ta’riflar kitobda keltirilgan boshqa materiallarga bog‘liq emas, ya’ni ularni tushirib qoldirsa ham kitobdagi keyingi mulohazalarga ta’sir qilmaydi. Bu ta’riflar faqat geometrik ob’ektlarni tasvirlash uchun kerak bo‘lgan.

Postulat va aksiomalarga kelsak, umuman olganda ular muhim jumlalar hisoblanadi. Juda ko‘p jumlalarni isbotlashda aksioma va postulatlardan foydalanishga to‘g‘ri keladi. Masalan, to‘g‘ri chiziq o‘zining ikkita nuqtasi bilan aniqlanadi, istalgan radiusli aylana mavjud va hokazo. Lekin Evklidning isbotsiz qabul qilgan jumlalari qat’iy mantiqqa asoslangan geometriyani qurish uchun juda kamlik qiladi. Evklid ko‘proq chizmalarga asoslanib fikr yuritadi.

Evklidning «Negizlar» asarining kamchiliklari qadimgi olimlar tomonidan ham aniqlangan.

Geometrik postulatlar Arximed tomonidan kengaytirilgan. O‘sha davrda Evklid faqat uzunlik, yuza va hajmlar nisbati to‘g‘risida yozadi. Masalan, doiralar yuzalari radiuslari kvadrati, sharlar hajmlari esa radiuslari kublari kabi nisbatda bo‘lishini yozgan. Arximed esa, bevosita bu kattaliklarni aniqlash uchun zarur jumlalarni ifoda etadi.

Arximed tomonidan beshta postulat kiritilgan, shulardan birinchisi va oxirgisini keltiramiz.

1) Umumiy uchlarga ega bo‘lgan barcha chiziqlar ichida eng qisqasi to‘g‘ri chiziqdir.

2) Ikkita teng bo‘lmagan chiziq (sirt va jism) lardan kattasi kichigini etarli marta oshirganimizdan kichik bo‘ladi.

Ikkinchi postulatni Arximed postulati deyiladi. Bu postulatni qisqacha qilib quyidagicha ifodalash mumkin: ixtiyoriy a va b $(a<b)$ sonlari uchun shunday n soni topiladiki, $na>b$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Elementar geometriyani o‘rgangan har bir kishi uchun V postulatning o‘rni qanchalik muhimligi ma’lum. Parallel to‘g‘ri chiziqlar nazariyasi va unga bog‘liq bo‘lgan figuralarning o‘xshashligi, trigonometriya kabi tushunchalar geometriyaning V postulatiga asoslangan.

V postulat birinchi marta qayerda uchrashini aniqlash uchun planimetriya boshlang‘ich tushunchalari ketma-ketligini esga olamiz. Avval geometriyaning asosiy tushunchalari: nuqta, to‘g‘ri chiziq, kesma tushunchalari kiritiladi. So‘ngra burchak, uchburchaklarning tengligi, kesma va burchaklarni taqqoslash kabi tushunchalar kiritiladi. Keyin bir nechta asosiy teoremalar keltiriladi. Jumladan, uchburchaklarning tenglik alomatlari, teng yonli uchburchaklarning xossalari, uchburchak ixtiyoriy uchidagi tashqi burchagi unga qo‘shni bo‘lmagan uchidagi ichki burchaklarining har biridan katta, uchburchak katta tomoni qarshisida katta burchagi yotadi (va aksincha), perpendikulyar va og‘malar haqidagi teorema, uchburchak ixtiyoriy tomoni qolgan ikki tomoni yig‘indisidan kichik. Bu jumlalardan so‘ng parallel to‘g‘ri chiziqlarga ta’rif beriladi.

Va nihoyat, berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan unga parallel bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligi parallel to‘g‘ri chiziqlar nazariyasida isbotlanadi. Bu teoremani isbotlashda V postulat muhim o‘rin tutadi. Agar yuqoridagi teoremani aksioma sifatida qabul qilsak, V postulatni isbotlash mumkin. Keyinchalik bizga ko‘proq kerak bo‘ladigan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

2.1-teorema. Uchburchakning bir uchidagi tashqi burchagi unga qo‘shni bo‘lmagan ichki burchaklarining har biridan katta.

Ta’rif. Bir tekislikda yotuvchi, umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlar parallel deyiladi. Bu ta’rifdan so‘ng parallel to‘g‘ri chiziqlar mavjudligini isbotlashimiz kerak. Quyidagi teoremadan parallel to‘g‘ri chiziqlarning mavjudligi kelib chiqadi.

2.2-teorema. Bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar ikkita to‘g‘ri chiziq o‘zaro parallel.

Bu erdan to‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi yotgan har qanday nuqtadan, berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin degan xulosa kelib chiqadi.

Demak, parallel to‘g‘ri chiziqning mavjudligi isbotlandi. Endi parallel to‘g‘ri chiziqlarning sonini aniqlash kerak.

Parallel to‘g‘ri chiziqlar nazariyasida tekislikdagi to‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi har qanday nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel yagona to‘g‘ri chiziq o‘tishi isbotlanadi.

Parallel to‘g‘ri chiziqning yagonaligini isbotlash uchun V postulat muhim o‘rin tutishini ko‘rsatiladi. Osongina ishonch hosil qilish mumkinki, to‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi har qanday nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tadi degan jumlani postulat sifatida olsak, V postulatni isbotlash mumkin.

SHunday qilib, V postulat berilgan to‘g‘ri chiziqqa undan tashqaridagi nuqtadan yagona parallel to‘g‘ri chiziq o‘tadi degan jumlaga ekvivalentligi isbotlanadi.

Demak, V postulat to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan unga parallel bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin degan tasdiqqa ekvivalent ekan, bu tasdiqqa asoslanib Evklid geometriyasini qurish mumkin. Bu tasdiqdan foydalanib parallel to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesish natijasida hosil bo‘lgan mos burchaklar teng, uchburchakning ichki burchaklari yig‘indisi 2d ga teng kabi bir nechta teoremalar isbotlanadi.

Evklid zamonidan XIX asrning oxirigacha V postulat muammosi geometriyaning eng keng tarqalgan muammolaridan biri hisoblangan. Evklid ham V postulatni isbotlashga harakat qilgan bo‘lsa kerak. CHunki uning «Negizlar» kitobidagi birinchi 28 tasdiq V postulatga asoslangan emas. Bundan Evklid V postulatni majbur bo‘lmaguncha ishlatmagan degan xulosa qilish mumkin. V postulatni isbotlashga urinishlar ijobiy natija bermagan bo‘lsada, geometriyani rivojlanishiga katta hissa qo‘shdi. Buning natijasida V postulatning bir qator ekvivalentlari paydo bo‘ldi. Misol tariqasida quyidagi teoremalarni keltirish mumkin:

1. Berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan unga parallel faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

2. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi natijasida o‘zaro teng mos burchaklar hosil bo‘ladi.

3. Uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi 2d ga teng.

4. Berilgan to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda hamda bir xil masofada joylashgan nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziq hosil qiladi.

5. Etarlicha katta yuzaga ega bo‘lgan uchburchaklar mavjud.

6. O‘xshash, lekin teng bo‘lmagan uchburchaklar mavjud.

7. O‘tkir burchakning bir tomoniga o‘tkazilgan perpendikulyarlar ikkinchi tomonini ham kesadi.

Bulardan tashqari geometriya V postulatdan foydalanmasdan isbotlanadigan teoremalar bilan ham boyidi. Masalan, Lejandr quyidagi teoremani isbotladi:

Uchburchak ichki burchaklari yig‘indisidan katta emas.

XVIII asr va XIX asrning birinchi yarmida yashab ijod qilgan ko‘pgina geometrlar V postulatni isbotlash uchun quyidagicha usul qo‘llashgan.

Beshinchi postulatni uning inkori yoki uning inkoriga ekvivalent bo‘lgan tasdiq bilan almashtirilgan. Bu usul bilan o‘zgartirilgan postulatlar va aksiomalar sistemasiga tayanib, mumkin bo‘lgan va ulardan kelib chiqadigan barcha jumlalar Evklidning «Negizlar» asaridagiga o‘xshash isbotlangan. Agar V postulat qolgan postulat va aksiomalardan kelib chiqsa, u holda o‘zgartirilgan postulat va aksiomalar sistemasi ziddiyatga keladi. SHuning uchun qachondir bir-biriga zid keladigan jumlalarga kelamiz. Natijada, V postulat isbot bo‘ladi, deb fikr yuritishgan.

Xuddi shu usul bilan V postulatni isbotlashga D. Sakkeri (1667-1733), N. G. Lambert (1728-1777) va A. M. Lejandrlar (1752-1833) urinishgan.

Sakkeri (1733 y) asosidagi ikkita burchagi to‘g‘ri, yon tomonlari teng bo‘lgan to‘rtburchak qaraydi. Bu to‘rtburchakning qolgan ikkita burchaklari o‘zaro teng ekanligini ko‘rsatish mumkin. Sakkeri bu burchaklar uchun quyidagicha uchta gipotezani o‘rganadi: 1) Ikkala burchagi to‘g‘ri; 2) Ikkala burchagi o‘tmas; 3) Ikkala burchagi o‘tkir.

Sakkeri to‘g‘ri burchak gipotezasi V postulatga ekvivalentligini isbotlaydi, ya’ni to‘g‘ri burchak gipotezasini postulat qilib olib V postulatni isbotlaydi va aksincha, V postulatdan foydalanib to‘g‘ri burchak gipotezasini isbotlaydi. O‘tmas burchak gipotezasini postulat sifatida olib ziddiyatga keladi, so‘ngra o‘tkir burchak gipotezasini postulat sifatida oladi. Natijada, Sakkeri o‘rgangan geometriya nuqtai nazaridan bema’ni har xil xulosalarga keladi. Masalan:

Parallel to‘g‘ri chiziqlar faqat bitta umumiy perpendikulyarga ega va perpendikulyarning ikkala tomonida to‘g‘ri chiziqlar cheksiz uzoqlashishadi yoki ular umumiy perpendikulyarga ega emas bitta yo‘nalish bo‘yicha cheksiz yaqinlashishadi, ikkinchi yo‘nalish bo‘yicha cheksiz uzoqlashishadi.

Sakkeri mantiqiy ziddiyatga kelishga harakat qiladi va hisoblashlardagi hatoliklar natijasida ziddiyatga keladi.

Lambert (1766 y) Sakkerinikiga o‘xshaydigan to‘rtburchak qaraydi. U uchta burchagi to‘g‘ri bo‘lgan to‘rtburchakni olib, to‘rtinchi burchagi uchun Sakkeriga o‘xshash uchta gipoteza qaraydi.

Lambert to‘g‘ri burchak gipotezasi V postulatga ekvivalentligini isbotlaydi, hamda o‘tmas burchak gipotezasi mumkin emas degan xulosaga keladi. Sakkeriga o‘xshash Lambert o‘tkir burchak gipotezasini postulat sifatida olib ko‘pgina natijalar oladi. Lambert ham Sakkeri singari mantiqiy ziddiyat topa olmaydi.

Lambert o‘tkir burchak gipotezasi natijalarini rivojlantira borib, sfera ustidagi geometriyaga o‘xshashligini aniqlaydi va «o‘tkir burchak gipotezasi qaysidir mavhum sferada o‘rinli» deb to‘g‘ri fikrni oldinga suradi. XVIII asr geometrlari ichidan V postulat haqidagi gipotezani to‘g‘ri echimiga Lambert yaqin kelgandi.

Lejandr V postulatni isbotlash uchun quyidagicha uchta gipoteza qaraydi:

1. Uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi 2d ga teng.
2. Uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi 2d dan katta.
3. Uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi 2d dan kichik.

Lejandr birinchi gipoteza V postulatga ekvivalentligini, ikkinchi gipoteza mumkin emasligini isbotlaydi va nihoyat uchinchi gipotezani qabul qilib ziddiyatga uchraydi. U bu ziddiyatga o‘zi bilmagan holda V postulat ekvivalentlaridan birini qo‘llash natijasida uchragandi.

V postulat muammosini hal etish uchun ilmiy izlanishlar olib borgan olimlardan biri shoir, faylasuf, matematik va astronom Umar Xayyom (1048-1131 y.)dir.

Umar Xayyomning V postulati muammosi uning «Evklid kitobining qiyin postulatlarga sharhlar» (1077y.) nomli asarida bayon etilgan. Bu asarda Xayyom parallel to‘g‘ri chiziqlar nazariyasi sohasida o‘zidan oldin o‘tgan matematiklar– Geron, Evdokiy, al-Xaziniy, ash-SHoniy, an-Nayriziy, Ibn al-Xaysam kabi olimlarning ishiga to‘xtalib, ularning V postulatga bergan isbotlari to‘la emasligini ta’kidlaydi va ular quyida keltirilgan faylasuf (Aristotel)dan o‘zlashtirilgan prinsiplarga e’tibor qaratmaganlarini tanqid qiladi.

1. Miqdorlarni cheksiz ravishda bo‘lish mumkin, ya’ni ular bo‘linmaydiganlardan tuzilgan.
2. To‘g‘ri chiziqni cheksiz davom ettirish mumkin.
3. Har qanday kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq kesishish burchagi uchidan nari ketgan sari bir-biridan uzoqlasha boradi.
4. Yaqinlashuvchi ikki tug‘ri chiziq kesishadi, ularning yaqinlashuvi ikki to‘g‘ri chiziq yaqinlashish yo‘nalishida bir-biridan uzoqlashib ketishi mumkin emas.
5. O‘zaro teng bo‘lmagan ikkita chekli miqdordan, kichigini shunday karrali marta olish mumkinki, u kattasidan ham oshib ketadi.

Bu erda 4- prinsip V postulatga ekvivalent.

Dastlab Umar Hayyom quyidagi 8 ta jumla (teorema)larni isbotlaydi.

1-jumla [«Negizlar», 29 -jumla] AB ga perpendikulyar AC va BD teng chiziqlarni o'tkazamiz. Agar ular parallel bo'lsa, CD ni o'tkazsak, u holda bo'ladi.

2-jumla [«Negizlar», 30 -jumla] ABCD to'rtburchakni AB tomonini teng ikkita bo'luvchi E nuqtadan unga EG perpendikulyarni o'tkazsak, u holda CG =GD va EG perpendikulyar DC bo'ladi.

3-jumla [«Negizlar», 31 -jumla] ABCD to'rtburchakda -to'g'ri burchakli.

Ushbu jumla asosiy jumlalardan biri bo'ladi, chunki bunda to'rtburchak burchaklardan biri o'tkir yoki o'tmas bo'lmasligi inkor etilgan.

4-jumla [«Negizlar», 32-jumla] to'g'ri to'rtburchakda qarama-qarshi tomonlari teng.

5-jumla [«Negizlar», 33 -jumla] Bir to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ikki to'g'ri chiziq quyidagi xossaga ega, ya'ni ulardan biriga perpendikulyar to'g'ri chiziq ularning umumiy perpendikulyari bo'ladi .

6-jumla [«Negizlar», 34 -jumla]Evklid ta'rifiga ko'ra parallel har qanday ikki to'g'ri chiziq, ya'ni davom ettirganda kesishmasa, u holda bir to'g'ri chiziqni ikki perpendikulyari bo'ladi.

7-jumla [«Negizlar», 35 -jumla]. Agar ikki parallel tug'ri chiziqlarni uchinchi to'g'ri chiziq bilan kessak, u holda ichki almashinuvchi burchak va mos burchaklar teng bo'ladi, hamda ichki bir tomonlama burchaklar yig'indisi ikki to'g'ri burchakli bo'ladi.

Ushbu jumla Evklidning «Negizlar» asarini 1-kitobi 29 jumlasi bilan ustma-ust tushadi, ammo Xayyom uni isbotlash jarayonida Evklidning parallellik aksiomasidan emas, o'zining jumlalariga asoslanadi.

Va, nihoyat Umar Xayyom 8-jumlada V postulatni isbotlashga urinadi.

8-jumla [«Negizlar», 36-jumla] EG-to'g'ri chiziq berilgan. Bunda ikkita EA va GC to'g'ri chiziqlar shunday o'tkazilsinki, hosil bo'lgan AEG va CGE burchaklar birgalikda ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lsin. U holda bu to'g'ri chiziqlar A yotgan tomonda kesishadi .

Umar Xayyomning keltirilgan mulohazalari Prokl (yunon matematigi, V asrlarda yashagan) isbotiga juda yaqin. Agar Umar Xayyomda kesishmaydigan EH va CD to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa o'zgarmasligi tushuntirilsa, Proklda oshkormas holda faraz qilingan. Uning bu Erdagi asosiy xatosi shundan iboratki, Umar Xayyom ham o'tmishdoshlari kabi isbotlash jarayonida V postulatga ekvivalent bo'lgan 4- prinsipdan foydalangan.

Umar Xayyomning parallel to'g'ri chiziqlar nazariyasidagi asosiy xizmati shundan iboratki, geometriya tarixida birinchi bo'lib oshkor holda V postulatni unga ekvivalent 4-prinsip bilan almashtiradi, asoslardagi burchaklarning har biri to'g'ri va yon tomonlari o‘zaro teng bo‘lgan to‘rtburchak-Xayyom-Sakkeri to‘rtburchagidan foydalaniladi.

Rus olimi N. I. Lobachevskiy (1792-1856) ham o‘zining geometriya asoslariga oid ishlarini V postulatni isbotlashga urinishdan boshlagan. Bizga ma’lumki, V postulatning ekvivalentlaridan biri berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan unga parallel bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Lobachevskiy V postulatni quyidagi postulat bilan almashtirdi:

Berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan u bilan kesishmaydigan ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Lobachevskiy ham bir-biriga zid bo‘lgan tasdiqlarni topishga harakat qiladi. Postulat va aksiomalar sistemasi yordamida «Negizlar» asaridagidek geometriya qurdi, lekin hech qanday ziddiyatga uchramadi. SHundan so‘ng, Evklid geometriyasidan farqli geometriya mavjud va bu geometriyada V postulat o‘rinli emas degan fikrga (1826 y) keldi.

Lobachevskiy Evklid geometriyasidan farqli geometriya mavjud degan birinchi geometrik edi. Lekin K. Gauss (1777-1855) ham yangi geometriya mavjud degan fikrni zamondoshlariga yozgan xatida bildirgan edi.

Lobachevskiy ishlari e’lon qilingandan uch yil o‘tgach, venger matematigi yanosh Bolyai (1802-1860) Lobachevskiy ishlaridan bexabar ravishda yangi geometriya mavjudligini va ba’zi natijalarni e’lon qildi.

Noevklid geometriyaning zidsizligi aniqlangandan so‘ng, V postulatni isbotlash muammosi to‘liq echildi deyish mumkin. Lobachevskiy geometriyasining Beltrami (1849-1925), Puankare (1854-1912) talqinlarida noevklid geometriyaning zidsizligi haqiqiy sonlar aksiomatikasining zidsizligiga teng kuchli ekanligi isbotlangan.

2. Gilbert aksiomalar sistemasi sharhi

Gilbert aksiomasida asosiy ob’ektlar “nuqta”, “to’g’ri chiziq”, “tekislik” – dan iborat bo’lib ular orasidagi munosabatlar “tegishli”, “orasida”, “kogurentlik” dir, bularning xossalarini aniqlovchi aksiomalar besh gruppaga bo’linadi:

I – gruppa: Bog’lanish (tegishlilik) aksiomalari. (8 ta)

II – gruppa: Tartib aksiomalari. (4 ta)

III – gruppa: Kogurentlik aksiomalari. (5 ta)

IV – gruppa: Uzluksizlik aksiomalari. (1 ta)

V – gruppa: Paralellik aksiomalari. (1 ta)

Geometriyani va har qanday matematik nazariyani aksiomalar asosida qurish ishni 1-dan asosiy ob’ektlar kategoriyasini, 2-dan bu ob’ektlar orasidagi asosiy munosabatlarni 3-dan aksiomalarni ko’rsatishdan boshlanishi kerak. Geometriyada qaraladigan undan kam ob’ektlar va ular orasidagi munosabatlar asosiy ob’yektlar orqali ta’riflanishi kerak va barcha teoremalarni aksiomalarga suyanib isbotlash kerak.

Gilbert aksiomalar sistemasida asosiy tushunchalar nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik.

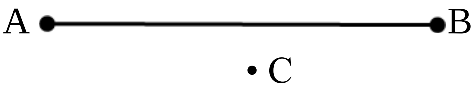
I – gruppa. Bog'lanish aksiomalari.

I_1. Ixtiyoriy A va B nuqtalar uchun shunday to'g'ri chiziq mavjud bo'lib, bu nuqtalar shu to'gri chiziqda yotadi.

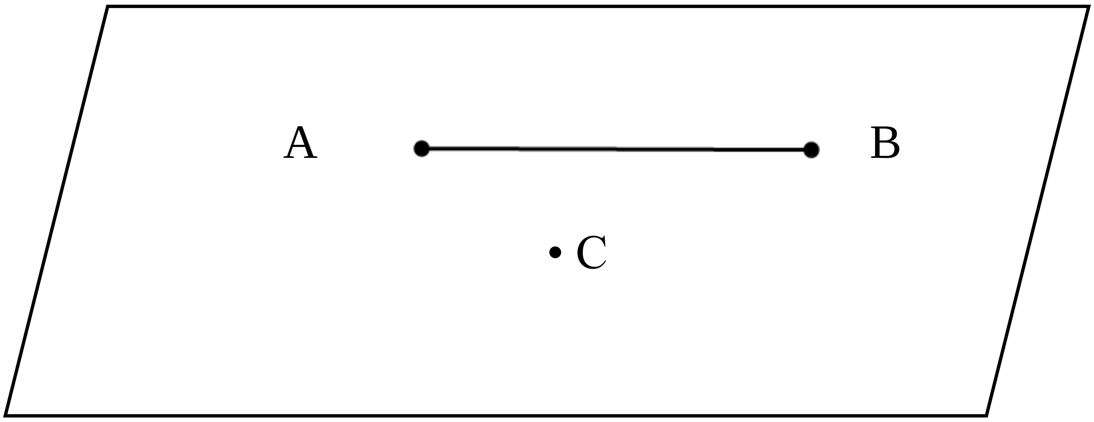
I_2. A va B nuqtalardan o'tuvchi bittadan ortiq to'g'ri chiziq mavjud emas.

I_3. Har qanday to'g'ri chiziqda kamida ikkita nuqta mavjud.

Bitta to'gri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta mavjud.



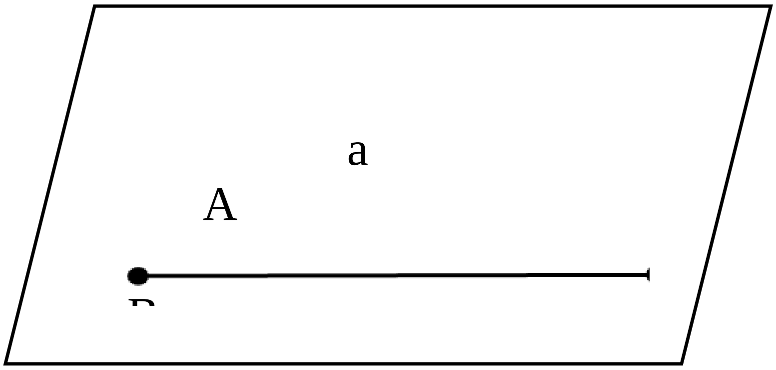
I_4. Bir to'gri chiziqda yotmaydigan har qanday uchta A, B, C nuqtalardan o'tuvchi tekislik mavjud.



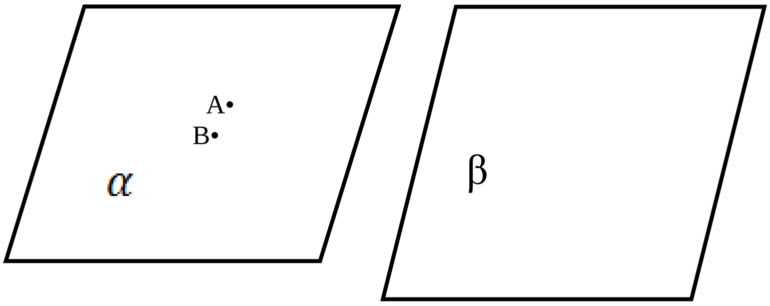
I_5. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan har qanday A, B, C nuqtalardan o'tuvchi yagona tekislik mavjud.

I_4 va I_5 aksiomalarda quyidagi tekislik kelib chiqadi.

I_6. Agar a to'g'ri chiziqning A va B nuqtalari α tekislikda yotsa, a to'g'ri chiziqning har qanday nuqtasi ham shu tekislikda yotadi.



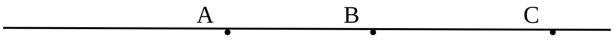
I_7. Agar α *va* β tekisliklar umumiy A nuqtaga ega bo'lsa, u holda A nuqtadan farqli B nuqta mavjud.



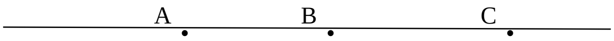
I_8. Bitta tekislikda yotmaydigan kamida to'rtta nuqta mavjud.

II – gruppa. Tartib aksiomalari.

II_1. Agar B nuqta A va C nuqtalar orasida yotsa, u holda A, B, C bir to'g'ri chiziqdagi turli nuqtalar bo'lib, B nuqta C va A nuqtalar orasida yotadi.



II_2. Agar A, B biror to'g'ri chiziqning nuqtalari bo'lsa, shu to'g'ri chiziqda kamida shunday bitta C nuqta topiladiki B nuqta A bilan C ning orasida yotadi.

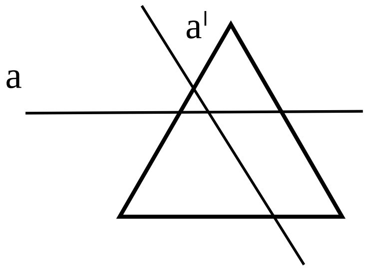


II_3. To'g'ri chiziqdagi har qanday uchta nuqtadan bittadan ortig'i qolgan ikkitasi orasida yotmaydi.

II_4. Pash aksiomalari.

ABC uchburchakning birorta ham uchidan o'tmaydigan va uning tekisligida yotadigan to'g'ri chiziq shu uchburchakning AB tomoni bilan umumiy nuqtaga ega

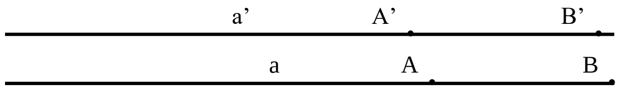
bo'lsa, u holda bu to'g'ri chiziq yo BC kesma yoki AC kesma nuqtasi orqali o'tadi.



III- gruppa aksiomalari. Kongruentlik aksiomalari.

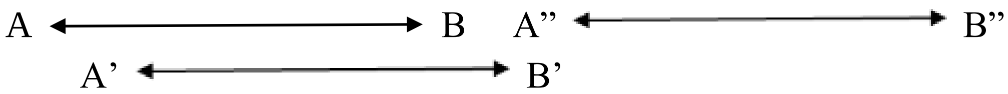
Bu gruppa aksiomalari kesma va burchaklarning kongruentlik (tenglik) tushunchasini aniqlaydi.

III$_1$. Ikki A va B nuqta a to'g'ri chiziqning nuqtasi, A^{I} esa shu tog'ri chiziqning yoki boshqa biror a^{I} to'g'ri chiziqning nuqtasi bo'lsa, u holda shu to'g'ri chiziqning A^{I} nuqtadan berilgan tomonida yotuvchi faqat bitta B, nuqtani doimo topish mumkinki, AB kesma A'B' kesmaga kongruent bo'ladi.

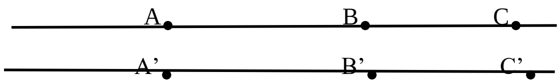


[AB] ≡ [A'B']

III$_2$. Ikki kesma uchinchi kesmaga kongruent bo'lsa, u holda ular bir – biriga kongruentdir ya'ni A'B' ≡ AB, A" B" ≡ AB bo'lsa, A'B' ≡ A"B"



III$_3$. AB va BC kesmalar *a* to'g'ri chiziqning ikki umumiy nuqtalarga ega bo'lmagan kesmalari bo'lsin, shu to'gri chiziqning yoki boshqa a' to'g'ri chiziqning A'B', B'C' kesmalari ham ichki umumiy nuqtalarga ega bo'lmay AB ≡ A'B', BC ≡ B'C' bo'lsa, AC ≡ A'C' bo'ladi.



$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ BC \equiv B'C' \end{array}\right\} AC \equiv A'C'$$

III$_4$. P tekislikda < (h, k) burchak va shu tekislikda yoki biror P' tekislikda *a'* to'g'ri chiziq berilgan bo'lib, *a* to'g'ri chiziq bilan aniqlangan yarim tekisliklardan biri hamda *a'* to'g'ri chiziqdagi *0'* uchli *h'* nur tayin bo'lsin.

U holda 0' nuqtadan chiquvchi va aniqlangan yarim tekislikda yotgan shunday yagona *R'* nur mavjudki, < (h, k) burchak < *(h', k')* burshakka kongruent bo'ladi. Burchaklar orasidagi bunday nisbat < *(h, k)* = < *(h', k')* ko'rinishda belgilanadi. Har bir burchak uz – uziga kongruent deb olinadi.

III$_5$. ABC va A'B'C' uchburchaklar uchun *AB* ≡ *A'B'*, *BAC*≡ *B'A'C'* bo'lsa *ABC* ≡ *A'B'C'* bo'ladi.

1.1-ta'rif. ABC va A'B'C' uchburchaklarning uchta burchaklari va uchta tomonlari mos ravishda kongruent bo'lsa, bu uchburchaklar o'zaro kongruent deyiladi va $\triangle$ ABC ≡ $\triangle$ A'B'C' ko'rinishda belgilnadi.

IV-gruppa aksiomalari. Uzluksizlik aksiomalari.

Bu aksiomaning mohiyati shundan iboratki, u to'g'ri chiziq nuqtalari to'plami bilan barcha haqiqiy sonlar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishga imkon beradi.

IV. AB kesmaning barcha nuqtalari shu kesma uchlari bilan birgalikda quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan qilib ikki sinfga ajratilgan bo'lib:

a) AB kesmaning har bir nuqtasi faqat bitta sinfga tegishli bo'lib, A nuqta birinchi sinfga, B nuqta esa ikkinchi sinfga tegishli bo'lsin, bu sinflar bo'sh bo'lmasin;

b) Birinchi sinfning A dan farqli har bir nuqtasi A bilan ikkinchi sinfning ixtiyoriy nuqtasi orasida yotsin. U holda AB kesmada shunday C nuqta topiladiki, A bilan C orasidagi barcha nuqtalar birinchi sinfga, C bilan B orasidagi barcha nuqtalar ikkinchi sinfga tegishli bo'lib, C nuqtaning o'zi birinchi yoki ikkinchi sinfga tegishli bo'ladi. C nuqta esa AB kesma nuqtalarini ikki sinfga ajratuvchi (kesadigan) nuqta deb ataladi.

V – gruppa aksiomlari. Parallellik aksiomalari.

To'g'ri chiziq tashqarisida olingan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishmaydigan kamida bitta to'g'ri chiziq o'tadi.

Yuqorida absolyut geometriyaning bu teoremasiga e'tibor qilsak, unda to'g'ri chiziq tashqarisida olingan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishmaydigan kamida bitta to'g'ri chiziqning o'tishi ta'kidlanib, biroq shunday to'g'ri chiziqning yagonaligi haqida hukm chiqarilmagan. Bunday to'g'ri chiziqning yagonaligi yoki yagona emasligi to'g'risida qo'shimcha talabning qo'yilishiga qarab Yevklid geometriyasi yoki Lobachevskiy geometriyasi to'g'risidagi ta'limotni hosil qilamiz. I- IV gruppa aksiomalariga suyangan geometriya bu ikki geometriyaning umumiy qismidir.Yevklid geometriyasida parallellik aksiomasi quyidagicha ifodalanadi.

V. To'g'ri chiziq tashqarisidagi nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishmaydigan to'g'ri chiziq bittadan ortiq emas.

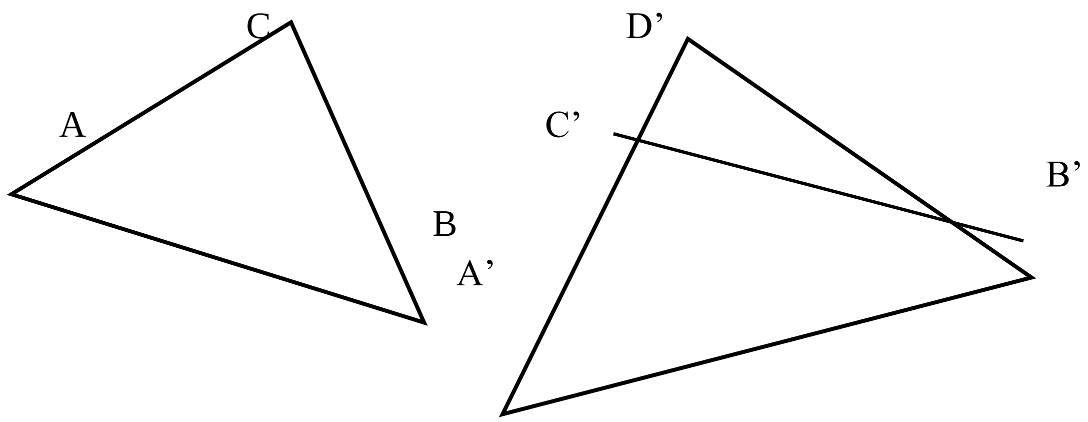
Yuqoridagi 19 ta aksioma absolyut geometriyani tashkil etadi.

2.1-teorema. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan har qanday uchta A' B' C nuqtalardan bitta va faqat bitta ABC tekislik o'tkazish mumkin.

Kongruentlik aksiomalari yordamida uchburchakning tenglik alomatlarini isbotlash mumkin.

2.2-teorema. ABC va A'B'C' uchburchaklarda $AB \equiv A'B'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ bo'lsa, $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ bo'ladi.

Isbot. Avval AC va A'C' tomonlarning o'zaro kongruentligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, AC ≡ A'C' bo'lsin.



III. ga asosan A'C' nurda shunday D' nuqta mavjudki. AC≡A'B' bo'ladi. Bu vaqtda yuqoridagi teoremaga asosan ΔABC ≡ Δ A'B'D' bo'lish, ABC ≡ A'B'D' bo'ladi. Lekin shartga ko'ra ABC ≡ A'B'C'.

Bu esa III aksiomaga zid. Demak, AC ≡ A'C' bo'ladi. U holda yuqoridagi teoremaga asosan ΔABC ≡ Δ A'B'C'.

3. Lobachevskiy aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan teoremalar

Beshinchi postulatni isbotlashga doir urunishlar geometriya strukturasini oydinlashtirish borasida muhum ro'l kasb etdi va beshinchi postulatni qolgan aksiomalar va ulardan chiqqan natijalar yordamida isbotlab bolmaydi degan fikrlar tug'ilishiga zamin yaratib berdi.

Shunday xulosaga kelgan olimlardan biri, ulug' nemis matematigi Karl Fridrix Gaussdir (1777- 1855). Noyevklidiy geometriyani yaratilish sohasidagi Gaussning ishlari uning vafotidan keyingina fan ahliga ma'lum bo'ldi. 1829 yilda Gauss o'z do'sti Basselega yozgan xatida: "Ehtimol, men yaqin orada bu masala bo'yicha nihoyatda keng tadqiqotlarimni bosmaga berish holatida emasman va umrim bo'yi bunga jur'at qilaolmasam kerak" degan fikrni aytgan.

Noyevklidiy geometriyaning yaratilishiga hissa qo'shgan matematiklardan biri vengriyalik ofitser Bol'yaidir (1802-1860). 1823 yili Yanosh Bol'yai noyevklidiy geometriyani ochishga muvaffaq bo'ldi. U 1832 yili (Lobachevskiydan keyin) o'zining otasi qalamiga mansub kitobga ilova tariqasida "Appendiks" deb atalgan asarini e'lon qiladi. Bu ish bilan tanishgan Gauss Yanoshning otasiga yozgan xatida "bu ishni men maqtolmayman, uni maqtash o'zimni maqtashdir, chunki bu ish so'ngi 30-35 yil davomida mening bu sohada qilgan ishlarimning xuddi o'zidir" deb yozadi. Katta obro'ga ega bo'gan Gaussdan bunday javobni olish yanosh

Bol'yaini juda hayajonga keltiradi va bu sohadagi ishini tark etib, qolgan hayotini og'ir musibatda o'tkazadi. Gauss va Bol'yai tomonidan noyevklidiy geometriya sohasida qilingan ilmiy ishlar ulug' rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiy tomonidan bu sohada qilingan ishlarning faqat bir qismidir. Nikolay Ivanovich Lobachevskiy 1792 yil 1 dekabrda Nijniy Novogorod shahrida mayda chinovnik oilasida dunyoga keladi. 1811 yili Qozon universitetini muvoffaqiyatli tugatganidan so'ng, uning qobilyati va mehnatsevarligiga qoyil qolgan olimlar uni shu universitetda ishga olib qolishadi. U 1816 yildan boshlab professor lavozimida ishlay boshlaydi. Lobachevskiy birinchi pedagogik faoliyatini studentlarga geometriyadan leksiya o'qishdan boshlaydi. U ayniqsa "Geometriya asoslari"ni chuqur o'rganadi, natijada Yevkilidning "Negizlari" da katta yetishmovchilik borligini sezadi, umuman geometriyani negizidan boshlab qayta ko'rib chiqishni o'z oldiga maqsad qilib qo'yadi. 1815-1817 yillardan boshlab u ham ishni boshqa olimlar kabi, beshinchi postulatni tahlil qilishdan boshlaydi. Lobachevskiy beshinchi postulatga berilgan isbotlarda qat'iylik yo'qligini sezadi. O'zining dastlabki ishlarida beshinchi postulat haqida bunday deydi: "Uning jiddiy isboti hali topilganicha yo'q".

1826 yil 11 fevralda Qozon universiteti fizika-matematika fakul'tetining ilmiy sovetida Lobachevskiy "Geometriyadagi prinsiplar haqidagi mulohazalar" nomli doklad qilib, uni 1829 yili shu universitetning "Казанский вестник" djurnalida "О началах геометрии" nomi bilan bostirib chiqardi. Ilmiy sovetda qilingan doklad va djurnalda chiqqan yuqoridagi maqola Lobachevskiyni noyevklidiy geometriya bo'yicha qilgan ilmiy ishining ilk natijalari hisoblanadi. Shuning uchun 11 fevral (1826 yil) noyevklidiy geometriyaning tug'ilish sanasi hisoblanadi. Lobachevskiy bu asardagi natija- xulosalarini yanada takomillashtirib, quyidagi asarlarni yaratadi.

1. Xayoliy geometriya (Воображаема геометрия) (1835 yil).
2. Xayoliy geometriyaning ba'zi integrallariga tatbiqi (1835 yil).
3. Parallellar nazaryasi bilan to'ldirilgan geometriya negizlari (1838).
4. Parallel to'g'ri chiziqlar nazaryasi bo'yicha tadqiqot (1840).
5. Pangeometriya (1855).

Lobachevskiyning ilmiy tadqiqotini quyidagicha yakunlash mumkin: 1. Beshinchi postulatni Yevklidning qolgan aksioma va postulatlaridan mantiq qonunlari asosida keltirib chiqarish mumkin emas. Beshinchi postulot o'rinli bo'lmagan geometriya ham mavjud. Shunisi achinarliki, uning ochgan buyuk yangiliklarini e'tirof etmadilar, buning ustiga, ba'zilar Lobachevskiyni "aqildan ozibdi" degan iboralarni ishlatishgacha borib yetdilar.

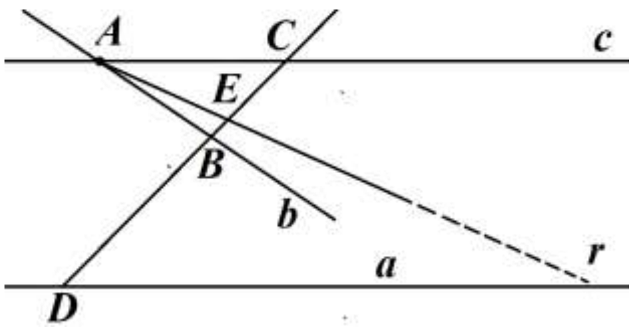
Lobachevskiy ilmiy ishlar bilan bir vaqtda tashkilotchilik ishlarida ham aktiv qatnashdi, yigirma yil davomida (1827- 1846) Qozon universitetining rektori lavozimida ishladi. Hayotining so'ngi yillarida ikkala ko'zi ojiz bo'lib qoladi, lekin shunga qaramay, ilmiy ishni davom ettirib, o'zining so'ngi asari "Pangeometriya" ni diktovka qilib yozdiradi.

Lobachevskiy geometriyasining aksiomatikasi absolyut geometriya aksiomalari qatoriga Lobachevskiy aksiomasini qo'shish bilan hosil qilinadi. Demak, Lobachevskiy geometriyasida absolyut geometriyaning barcha ta'rif va teoremalari o'z kuchini saqlaydi.

Lobachevskiy aksiomasi. Tekislikda to'g'ri chiziq tashqarisida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziq bilan kesishmaydigan kamida ikkita to'g'ri chiziq o'tadi.

Shuni ta'kidlab o'tamizki, to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan uning bilan kesishmaydigan to'g'ri chiziq o'tishligini tasdiqlovchi fakt absolyut geometriyaga taalluqlidir, bu to'g'ri chiziqning yagonaligini parallellik aksiomasi tasdiqlaydi. Lobachevckiy aksiomasi esa bunday to'g'ri chiziqning kamida ikkitaligini tasdiqlaydi.

2.1-teorema. Lobachevskiy tekisligida to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan bu to'g'ri chiziq bilan kesishmaydigan cheksiz ko'p to'g'ri chiziq o'tadi.



Isbot. Lobachevskiy aksiomasiga asosan A nuqtadan a to'g'ri chiziq bilan (1- chizma) kesishmaydigan b va c to'g'ri chiziqlari o'tsin. c to'g'ri chiziqda shunday C nuqtani olamizki, bu nuqta va a to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziq bilan aniqlanadigan turli yarim tekisliklarga tegishli bo'sin. a to'g'ri chiziqda ixtiyoriy D nuqtani olib, CD to'g'ri chiziqni o'tkazsak, bu to'g'ri chiziq b bilan biror B nuqtada kesishadi, B nuqta C bilan D orasida yotadi. BC kesmaning ixtiyoriy E nuqtasini olib, AE to'g'ri chiziqni o'tkazsak, bu to'g'ri chiziq a bilan kesishmaydi. Haqiqatan ham, AE bilan a to'g'ri chiziq biror nuqtada kesishadi deb faraz qilib, DEF uchburchak va b to'g'ri chiziqqa nisbatan Pash aksiomasini qo'llasak, a bilan b kesishadi, degan xulosaga kelamiz. Bu esa shartga zid.

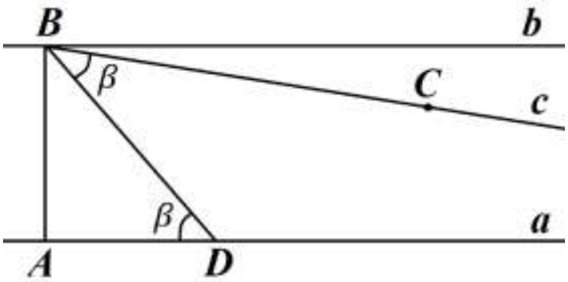
Demak, BC kesma nuqtalari cheksiz ko'p bo'lgani uchun AE ga o'xshash cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar A nuqtadan o'tib, a bilan kesishmaydi.

Beshinchi postulatning barcha ekvivalentlari ham Lobachevskiy geometriyasida o'z kuchini yo'qotadi, jumladan, uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi endi 180^o ga teng emas.

2.2-teorema. Lobachevskiy tekisligida uchburchak ichki burchaklari yig'indisi 180^o dan kichik.

2.3-teorema. Agar uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^o dan kichik bo'lsa, Lobachevskiy aksiomasi o'rinli bo'ladi.

Isbot. AB kesmaning uchlaridan shu kesmaga perpendikulyar bo'lgan a, b to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Absolyut geometriyadan ma'lumki, a, b to'g'ri chiziqlar kesishmaydi. B nuqtadan o'tib, b dan farqli a bilan kesishmaydigan yana bitta to'g'ri chiziqning mavjudligini isbotlasak, maqsadga erishgan bo'lamiz. a to'g'ri chiziqda ixtiyoriy D nuqtani olib, BD nurni o'tkazsak, $\angle ADB = \beta$ burchak hosil qilinadi, so'ngra shu burchakni B nuqtadan boshlab, bir tomoni BD nurdan iborat qilib qo'yamiz (ABD burchakdan tashqariga), bu burchakning ikkinchi tomoni BC nur bo'lsin.



Shartga ko'ra, ABD uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^o dan kichik bo'lgani uchun, ya'ni $90^o + \beta + \angle ABD < 180^o$ yoki $\beta + \angle ABD < 90^o$, bundan $\angle ABC < 90^o$. Bu vaqtda BC to'g'ri chiziq a bilan kesishmaydi. Aksincha BC tog'ri chiziq bilan a biror E nuqtada kesishadi deb faraz qilsak, DBE uchburchak hosil bo'lib, $\angle ADB$ bu uchburchak uchun tashqi burchakdir. U holda $\angle ADB = \angle DBE = \beta$ bo'lgani uchun, bu esa ziddiyatdir. Demak, BC bilan a kesishmaydi. Ushbu xulosaga keldik: Lobachevskiy aksiomasi "uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^o dan kichik" degan farazga ekvivalent.

ABC uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi $S_{\Delta ABC}$ bilan belgilasak, 180^o - $S_{\Delta ABC}$ ayirma musbatdir, uni ABC uchburchakning *nuqsoni* (defekti) deb ataladi va $\delta_{\Delta ABC}$ bilan belgilanadi.

2.4-teorema. Uchburchakning nuqsoni additivlik xossasiga bo'ysunadi, ya'ni $\delta_{\Delta ABC} = \delta_{\Delta ABD} + \delta_{\Delta BDC}$.

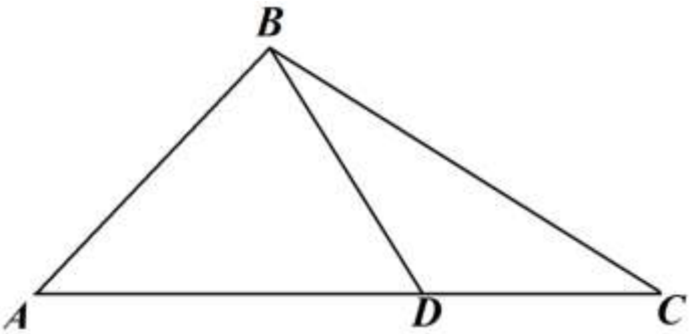
Isbot.

$$\delta_{\Delta ABC} = 180^o - S_{\Delta ABC} = 180^o - (S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} - 180^o) = (180^o - S_{\Delta ABD}) + (180^o - S_{\Delta BDC}) = \delta_{\Delta ABD} + \delta_{\Delta BDC}$$

.

2.5-teorema. Lobachevskiy tekisligida uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi turli uchburchaklar uchun turlicha qiymatga ega, ya'ni o'zgaruvchi miqdordir.

Isbot. Faraz qilaylik, barcha uchburchaklar ichki burchaklarining yig'indisi o'zgarmas γ bo'lsin (ravshanki, $\gamma < 180^o$). *ABC* uchburchakning B uchidan o'tuvchi, AC tomonini D nuqtada kesuvchi BD nur o'tkazsak, farazga asosan, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BDC} = \gamma$ bo'lib



$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} = S_{\Delta ABC} + 180^o$. Demak, $\gamma + \gamma = \gamma + 180^o$ yoki $= 180^o$. Bu esa yuqoridagi teoremaga zid.

Har qanday to'rtburchakni ikkita uchburchakka ajratish mumkin bo'lgani uchun quyidagi ikki natijani chiqaramiz.

1. Lobachevskiy tekisligida har qanday to'rtburchak ichki burchaklari yig'indisi 360^o dan kichik bo'lib, bu son har xil to'rtburchaklar uchun har xildir.

2. Lobachevskiy tekisligida burchak kattaliklari bilan chiziqli kattaliklar orasida bog'lanish mavjud.

4. Parallel to`g`ri chiziqlar va ularning xossalari

"Parallellar nazariyasigacha" bo'lgan bo'limga oid teoremalar o'rta maktab darsliklarida fuyidagi tartibda keltiriladi: geoemetrik figura, chiziq, nuqta, tekislik, kesma, nur, aylana, aylana yoyi, vatar va hokazo to'g'risidagi tushunchalarni anglatgandan so'ng, kesmalarni va yoylarni qo'shish amali qaraladi. So'ngra, to'g'ri chiziq haqidagi bobda burchak tushunchasi kiritiladi, burchaklarni qo'shish va ayirish qaraladi, bissektrisa, qo'shni burchaklar, vertikal burchaklar to'g'risida tushuncha kiritiladi. Bundan so'ng, to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tushirish mumkin, ham faqat bittagina degan muhim teorema va vetikal burchaklarning tengliginini ifoda etuvchi teorema isbot qilinadi. Siniq chiziq, ko'pburchak, uchburchak, qavariq ko'pburchak tushunchalari kiritiladi. O'qqa nisbatan simmetriya asoslari tekshiriladi, teng yonli uchburchak xossalari va uchburchaklar tengligining alomatlari o'rganiladi. Biz uchun katta ahamiyatga ega bo'lgan ushbu teorema isbotlanadi: *uchburchakning tashqi burchagi o'ziga qo'shi bo'lmagan ichki burchaklarning har biridan kattadir*. Bu teoremaning parallellar nazariyasigacha isbotlanishiga e'tibor qilish kerak.

Budan keyin, uchburchakning tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabatlar to'liq ravishda o'rganiladi: *har qanday uchburchakda teng tomonlar qarshisidan teng burchaklar yotadi; katta tomon qarshisida katta burchak yotadi.* Bu teoremalarga teskari bo'lgan teoremalar ham qaraladi.

Ikki nuqtani tutashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi, bu nuqtalarning tutashtiruvchi har qanday siniq chiziqdan kichikdir degan teorema isbotlanadi. Shu erning o'zidayoq, mos ravishda teng bo'lgan tomonlar orasidagi burchaklari teng bo'lmagan ikki uchburchak haqidagi teorema qaraladi; ya'ni: *agar bir uchburchakning ikki tomoni, ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga mos ravishda teng bo'lsa, bu tomonlar orasidagi burchaklarning kattasi qarshisida katta tomon yotadi* va teskari teorema.

Evklid geometriyasi bilan Lobachevskiy geometriyasi orasidagi eng asosiy farq ulardagi "parallellar nazariyasining" turliligidan iboratdir.

Lobachevskiy geometriyasi uchta qismga bo'linadi:

1) chiziqlarni o'lchash haqida (longimetriya), 2) sirtlarni o'lchash haqida (planimetriya) va 3) jismlarni o'lchash haqida (stereometriya).

Birinchi bo'limda — "Chiziqlarni o'lchash" bo'limida — to'g'ri chiziq; aylana va yoylar, hamda ichki chizilgan siniq chiziq uzunligidan limitni topish bilan egri chiziq uzunligini hisoblash usuli ko'rsatiladi;

Ikkinchi bo'limda — "Burchaklar haqida" degan bo'limda — Lobachevskiy chiziqli burchak, tekisliklar orasidagi burchak, to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni qaraydi, sfera to'g'risida bahs qiladi, uchburchaklarni va ko'pburchaklarni turlarga bo'ladi va ko'pyoqlar haqida ozgina to'xtalib o'tadi.

Uchinchi bo'limda — "Perpendikulyarlar haqida" degan bo'limda — perpendikulyar to'g'ri chiziqlardan tashqari perpendikulyar tekisliklar hamda tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqlar tekshiriladi.

To'rtinchi bo'lim — "Mujassam burchaklarni o'lchash. Muntazam ko'pburchaklar va jismlar haqida" degan sarlavhali bo'lib, muntazam ko'pyoqlarning mavjudligini isbotlash va ularni turlarga ajratish bilan tugaydi. Lobachevskiy bu bo'limda, parallellar nazariyasiga mumkin qadar tayanmaslik maqsadida, o'z davrida qabul qilingan isbotlardan ancha farq qiladigan isbotlarni keltiradi.

"Uchburchaklarning bir xilligi haqida" nomli beshinchi bo'limda uchburchaklarning tenglik hollari tekshiriladi.

"To'g'ri to'rtburchaklarni o'lchash haqida" nomli oltinchi bo'lim quyidagi so'zlar bilan boshlanadi: "Tekisliklarni o'lchash ushbu haqiqatga asoslanadi: agar ikki to'g'ri chiziq, uchinchi to'g'ri chiziqdan bir tarafda turib, bulardan biri shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar, ikkinchisi esa u bilan o'tkir burchak tashkil qilsa, ular kesishadi.

Bu haqiqatning isboti hozirgacha topilgan emas. Berilgan isbotlarni faqat unga berilgan izoh deb aytish mumkin bo'lib, to'liq ma'noda matematik isbot nomiini olishga arzimaydi".

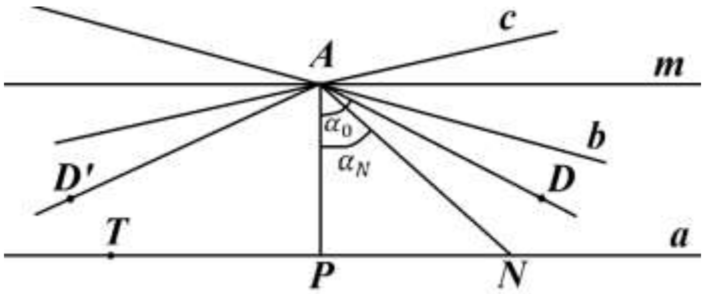
Lobachevskiy parallellar nazariyasiga bog'liq bo'lmagan ko'p ma'lumotni to'pladi. Bu ma'lumotlarning joylashish tartibi va bayoni odatdagiday shu qadar farq qilar ediki, akademik Fuss qo'lyozmaga yomon baho beradi va u bosilmaydi.

Lobachevskiy yozgan bu asarning keyinchalik Lobachevskiy nomini olgan g‘ayrievklid geometriyani vujudga keltirishda g‘oyat darajada katta rol o‘ynaganini endigina biz ko‘rib turamiz.

Lobachevskiy geometriyasining Yevklid geometriyasidan yana bir asosiy farqi tekislikdagi to’g’ri chiziqlarning joylashishida yuz beradigan yangi hollardan iborat. Yevklid geometriyasida tekislikdagi umumiy nuqtaga ega bo’lmagan to’g’ri chiziqlar parallel deyiladi; Lobachevskiy tekisligida esa parallel to’g’ri chiziqlarni boshqacha ta’riflashga tog’ri keladi. a to’g’ri chiziqda yotmaydigan A nuqtadan a bilan kesishmaydigan cheksiz ko’p to’g’ri chiziq o’tadi.

Demak, markazi A nuqtada bo’lgan to’g’ri chiziqlar dastasi ikki sinfga ajratiladi. Birinchi sinfga dastaning a to’g’ri chiziq bilan kesishadigan barcha to’g’ri chiziqlarni, ikkinchi sinfga esa dastaning qolgan hamma to’g’ri chiziqlarini kiritamiz. (Ravshanki, ikkala sinfda ham cheksiz ko’p chiziqlar mavjud.) A nuqtadan a to’g’ri chiziqqa AP perpendikulyar tushiraylik (4- chizma) hamda a to’g’ri chiziqda yo’nalishni aniqlab olaylik. AP, AN to’g’ri chiziqlar birinchi sinfga tegishlidir. $\angle PAN = \alpha_N$ bo’lsin, ravshanki $\alpha_N < 90^o$. N nuqta a to’g’ri chiziq bo’ylab aniqlandan yo’nalishda harakatlanib borsa, AN to’g’ri chiziq doimo birinchi sinfga tegishli bo’lib boraveradi, lekin doimo 90^o dan kichikligicha qoladi. Shunday α_N burchaklar to’plamini ω deb belgilaylik; u chegaralangan cheksiz to’plam bo’lganligi sababli, aniq yuqori α_0 chegaraga egadir. Uchi A nuqtada, bir tomoni AP nurdan iborat α_0 burchakning ikkinchi tomoni AD nurni hosil qiladi. AD to’g’ri chiziq quyidagi xossalarga ega:

1°. AD to’g’ri chiziq a bilan kesishmaydi. Haqiqatan ham ilarni biror K nuqtada kesishadi deb faraz qilsak, a to’g’ri chiziqda K nuqtadan o’ng tomonda undan farqli K' nuqtani olib, AK' to’g’ri chiziqni o’tkazsak, AK to’g’ri chiziq birinchi sinfga tegishli bo’lib, $\angle PAK$ ham ω ga tegishli bo’lib, $\angle PAK < \alpha_0$. Buning bo’lishi mumkin emas, chunki α_0 burchak ω ning aniq yuqori chegarasi.



4- chizma

2°. A nuqtadan o’tib, PA bilan α_0 dan kichik burchak hosil qilingan har qanday to’g’ri chiziq a bilan kesishadi, chunki bu vaqtda u to’g’ri chiziq birinchi sinfga tegishli bo'ladi.

Lobachevskiy yuqoridagi ikki xossaga ega bo'lgan shunday AD to'g'ri chiziqni a to'g'ri chiziqqa berilgan yo'nalishda *parallel* deb ataydi. Demak, Lobachevskiy geometriyasida parallel to'g'ri chiziqlar tushunchasi boshqacha ta'riflanadi: berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa roppa-rosa ikkita parallel to'g'ri chiziq o'tadi, bulardan biri a bilan bir xil yo'nalishda, ikkinchisi esa qarama-qarshi yo'nalishdadir. Yevklid geometriyasidagi kabi parallel to'g'ri chiziqlarni $\|$ bilan belgilaymiz.

Lobachevskiy tekisligidagi a to'g'ri chiziqda yotmagan A nuqtadan o'tgan barcha to'g'ri chiziqlar ikki sinfga ajralib, birinchi sinfga a bilan kesishadiganlari, ikkinchi sinfga esa a bilan kesishmaydiganlari kiradi; bu ikkinchi sinfga qarashli to'g'ri chiziqlar uzoqlashuvchi deyiladi. Bu ikki sinf to'g'ri chiziqlarini ajratib turuvchi AD, AD' to'g'ri chiziqlarni a ga parallel deb ataymiz. α_0 – parallellik burchagi, AP – shu burchakka mos parallellik kesmasi deb ataladi.

Endi parallel to'g'ri chiziqlarning ba'zi xossalariga to'xtalib o'taylik: parallel to'g'ri chiziqlarga ta'rif berilganda A nuqta maxsus rol o'ynagan edi, hozir bu nuqta o'rniga AD to'g'ri chiziqdagi boshqa nuqtani olsak ham parallellik ta'rifiga halal yetmasligini ko'rsatamiz.

3.1-teorema. Agar A nuqtaga nisbatan $AD||PN$ bo'lsa, u holda AD to'g'ri chiziqning ixtiyoriy C nuqtasi uchun ham $AD||PN$ bo'ladi.

Isbot. Avvalo shuni ta'kidlaymizki, $AD||PN$ bo'lgani uchun AD bilan PN kesishmaydi (5- chizma). Ikki holni tekshiramiz:

1-hol. C nuqta AD nurga tegishli bo'lsin. PN to'g'ri chiziqning ixtiyoriy S nuqtasini olib, SA va SC to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz, so'ngra $\angle SCD$ ning ichidan CE nurni o'tkazamiz. CE bilan PN to'g'ri chiziqlarning kesishishligini ko'rsatamiz. CE nurda ixtiyoriy E nuqtani olaylik, agar E nuqta PN ga tegishli bo'lsa, yoki E nuqta SN to'g'ri chiziqqa nisbatan C bilan har xil tomonda joylashib qolsa teorema isbot etilgan bo'ladi. E nuqta C nuqta bilan birga SN to'g'ri chiziqning bir tomonida yotsin. U holda AE nur PN bilan biror F nuqtada kesishadi (chunki $AD||PN$).

SAF uchburchak va CE to'g'ri chiziq uchun Pash aksiomasini tatbiq qilsak, CE to'g'ri chiziq SA yoki SF kesmalardan birini kesishi kerak, lekin SA ni kesmaydi, chunki, u kesma $\angle DCS$ ning tashqarisida, CE nur esa uchburchakning ichida, demak CE nur SF ni kesadi va $AD||PN$.

2- hol. C nuqta AD nurga tegishli bo'lmasdan, uning to'liruvchisiga tegishli bo'lsin, ya'ni A nuqta C bilan D ning orasida yotsin. P, C, A nuqtalardan PCA

uchburchakni hosil qilamiz (6- chizma). $\angle PCA$ ning ichidan o'tgan CE ixtiyoriy nurni PN bilan kesishishligini isbotlasak, maqsadga erishgan bo'lamiz. CE ning toldiruvchisida biror T nuqtani olib, TA to'g'ri chiziqni o'tkazsak, y $\angle PAD$ ning ichidan o'tadi va $AD||PN$ bo'lgani uchun PN bilan biror S nuqtada kesishadi. U holda PAS uchburchak va CE to'g'ri chiziq uchun Pash aksiomasidan CE nur PS bilan kesishadi degan natijaga kelamiz. Parallel to'g'ri chiziqlar haqida gapirilganda ularning qaysi nuqtasiga nisbatan parallelligi ta'kidlanmaydi.

3.2-teorema. $AD||PN \Rightarrow PN||AD$.

Isbot. AD to'g'ri chiziqning ixtiyoriy A nuqtasidan PN ga AP perpendikulyar tushiramiz (7- chizma). Shartga ko'ra PN bilan AD to'g'ri chiziqlar kesishmaydi. $\angle APN$ ning ichidan o'tgan ixtiyoriy PE nurning AD_{PN} bilan kesishishini ko'rsatsak kifoya.

Buning uchun PE to'g'ri chiziqning PN bilan hosil qilgan β burchak α_0 dan (parallellik burchagidan) kichik bo'lgan holni ko'rsatsak bo'ladi. $AE\perp PE$ ni o'tkazib, $\angle PAE = \gamma$ desak, APE uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^o dan kichik bo'lgani uchun $\gamma + 90^o - \beta + 90^o < 180^o$ yoki $\gamma < \beta$ bo'ladi. $AE < AD$ bo'lgani uchun (gipotenuza katetdan kata) AP ga A dan boshlab AE kesmani o'lchab qo'yib ($AE = AF$), F nuqtani topamiz. $AP\perp FC$ ni o'tkazib, FC nurni hosil qilamiz. $AN\perp AP$, $AP\perp FC$ bo'lgani uchun PN bilan FC kesishmaydi, $\angle DAE$ ning ichiga γ ni qo'yamiz, uning bir tomoni AB nur PN bilan T nuqtada kesishadi (chunki AB nur parallellik burchagi ichidan o'tadi). Pash aksiomasiga asosan FC to'g'ri chiziq AT bilan biror G nuqtada kesishadi. AD ning ustiga $AG = AG'$ ni qo'yib, G' nuqtani hosil qilamiz. U holda $AG' \equiv AG$, $AE \equiv AF$ va $\angle FAB \equiv \angle EAG'$ bo'lgani uchun $\Delta AEG' \equiv \Delta AFG$, bundan $\angle AEG' = \angle AFG = 90^o$. Lekin $AE\perp PE$ bo'lgani uchun EG' kesma PE nurga tegishli, demak PE nur AD ni G' nuqtada kesadi.

Quyidagi teoremalarni yuqoridagi kabi isbotlash mumkin.

3.3-teorema. Ikki to'g'ri chiziqning har biri ma'lum yo'nalishdagi bitta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular ham shu yo'nalishda o'zaro parallel bo'ladi.

3.4-teorema. Ikki parallel to'g'ri chiziqdan biridagi nuqtadan ikkinchisigacha bo'lgan masofa parallellik yo'nalishi tomon yetarlicha kichiklashib boradi, parallellik yo'nalishiga teskari tomonda esa bu masofa yetarlicha kattalashib boradi (ya'ni parallel to'g'ri chiziqlar parallellik yo'nalishi tomon bir-biriga asimptotik yaqinlashib boradi).

3.5-teorema. Har qanday o'tkir burchakning bir vaqtda bir tomoniga perpendikulyar bo'lib, ikkinchi tomoniga parallel to'g'ri chiziq mavjud.

Bu teorema boshqacha quyidagicha ifodalanadi:
Har qanday o'tkir burchak parallellik burchagi bo'la oladi.

Nazorat savollari

1. Gilbert aksiomasida asosiy obyektlarni ayting.
2. Bog'lanish aksiomlari haqida ma'lumot bering.
3. Tartib aksiomalari haqida ayting.
4. Gilbert aksiomalar sistemasiga kiradigan aksiomalarni tavsiflang.
5. Bir kesma ikkinchi kesmaga kongurent bo'lish shartini ayting.
6. Kongurentlik aksiomalaridan kelib chiquvchi teoremalarni ayting
7. Absoyut geometriya aksiomlariga qaysi aksiomalar kiradi?
8. Absolyut geometriya teoremlarini ayting.
9. Lobachevskiy tekisligining asosiy obyektlarini tavsiflang.
10. Lobachevskiy aksiomasini ayting.
11. Lobachevskiy aksiomasidan kelib chiqadigan asosiy teoralarga qaysi teoremalar kiradi?
12. Lobachevskiy tekisligida parallel to'g'ri chiziqlar xossalarini sharhlang.
13. Lobachevskiy geometriyasi qanday qismlarga bo'linadi? Har bir qismga tavsif bering.
14. Parallel to'g'ri chiziqlar haqidagi teoremani tavsiflang.
15. Lobachevskiy tekisligida parallel to'g'ri chiziqlar haqidagi teoremalarni ayting.
16. Ikki to'g'ri chiziqning har biri ma'lum yo'nalishdagi bitta to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, ular ham shu yo'nalishda o'zaro parallel bo'lishini ko'rsating.
17. Teng bo'lgan tomonlar orasidagi burchaklari teng bo'lmagan ikki uchburchak haqidagi teoremani sharhlang
18. Lobachevskiy tekisligida har qanday to'rtburchak ichki burchaklari yig'indisi 360° dan kichik bo'lib, bu son har xil to'rtburchaklar uchun har xildir. Bu teoremaning isbotini tavsiflang.
19. Evklidning V postulatini isbotlashga uringan olimlar ishlarini tavsiflang
20. Evklidning V postulatiga ekvivalent teoremalarni keltiring.

6-Mavzu: Tekislikda yasashga doir masalalar va ularni yechish usullari. Fazoviy figuralarning tasvirlarini yasash. Markaziy va parallel proyeksiyalash. Parallel proyeksiyalash usuli

Reja:

1. Sirkul va chizg`ich yordamida yasash aksiomalari. Tekislikda yasashga doir masalalar yechish bosqichlari

2. Yasashga doir masalalarni yechish usullari va yasashga doir sodda masalalar

3. Markaziy va parallel proyeksiyalash. Ikki tekislikning perspektiv affin mosligi.

4. Pozitsion masalalar. Fazoviy figuralarda kesimlarni yasash

Tayanch tushunchalar: geometrik o'rinlar, simmetriya, parallel ko'chirish, tahlil bosqichi, yasash bosqichi, isbot bosqichi, tekshirish bosqichi, konstruktiv masala, markaziy va parallel proyeksiyalash. Ikki tekislikning perspektiv affin mosligi fazoviy figura tasviri

1. Sirkul va chizg`ich yordamida yasash aksiomalari

Konstruktiv geometriya**.** Nuqtalarning har qanday to`plami figura deb atalishi ma`lum. Ma`lum talablarga javob beruvchi figurani bir yoki bir nechta yasash qurollari (chizg`ich, sirkul, chizmachilik uchburchagi va boshqalar) yordamida yasashni talab etgan masala *konstruktiv* masala deyiladi.

Chizg`ich, sirkul, uchburchakli chizg`ich va transporter yordamida yechiladigan tekislikdagi har qanday konstruktiv masalalarni faqat sirkul va chizg`ich vositasida yechish mumkin. Shuning uchun boshqa yasash qurollarining qolganlaridan foydalanmasa ham bo`ladi.

Konstruktiv geometriya aksiomalari. Konstruktiv geometriyada geometric figurani "yasash" deganda uning barcha elementlarini topishni tushuniladi. Geometriyaning yasashga doir asosiy talablarni tegishli aksiomalar orqali ifoda qilinadi. Konstruktiv geometriya masalalarini ixtiyoriy qurollar vositasida yechishda quyidagi aksiomalar o`rinli deb qabul qilinadi.

1. Berilgan, $F_1\,F_2\;.\;.\;.\;.F_k$ figuralarning har biri yasalgan. Bu yerda "berilgan figura" va "figura aniqlangan" tushunchalarini ajratib yubormaslik kerak. Agar biror "figura berildi" deb aytilsa, bu figura tasvirlangan, chizilgan, ya`ni yasalgan deb tushunish kerak. Agar biror "figura aniqlangan" deb aytilsa, bu ibora orqali figuraning o`zi berilmagan bo`lib, faqat figuraning vaziyatini aniqlaydigan elementlar berilgan degan ma`noni tushunmoq kerak. Masalan, to`g`ri chiziqning ikki nuqtasi berilgan bo`lsa, bu nuqtalarni birlashtiradigan yagona to`g`ri chiziq mavjud, ya`nib u to`g`ri chiziq o`zining ikki nuqtasi bilan aniqlangan, biroq bu to`g`ri chiziq o`zining ikki nuqtasi bilan aniqlangan, biroq bu to`g`ri chiziq yasalmagan(chizimagan) uni yasash kerak.

2. Ikkita figura yasalgan bo`lsa, u holda bu figuralarning birlashmasi ham yasalgan.

3. Ikkita F_1 va F_2 yasalgan bo`lib, ularning kesishmasi bo`sh bo`lmasa, ularning $F_1 \cap F_2$ kesishmasi yasalgan bo`ladi.

4. Agar F_1 va F_2 figuralar yasalgan va $F_1 \neq F_2$ bo`lsa $F_1 / F_2$ figura yasalgan bo`ladi.

5. Agar F figura yasalgan bo`lsa bu figuraga qarashli nuqtani yasash mumkin.

Biz Yevklid tekisligiga taalluqli yasashga doir masalalar bilangina shug`ullanamiz. Tekislikda yasashga doir masalalarni yechishda yasash qurollaridan odatda chizg`ich va sirkul ishlatiladi. Yasashga doir masalalarni chizg`ich va sirkul yordamida yechishda chizma praktikasida qo`llaniladigan chizg`ich va sirkul emas, balki abstract chizg`ich hamda sirkul e`tiborga olinadi. Bu qurollarning konsttruktiv imkoniyatlari quyidagi ikkita aksioma orqali ifoda qilinadi.

6. Agar A, B nuqtalar (A≠ B) belgilangan bo`lsa, AB nurni yasash mumkin.

7. Agar O nuqta va AB kesma yasalgan bo`lsa markazi O nuqtada va radiusi r=AB bo`lgan aylanani chizish mumkin. Bu aylanani S (o, r) ko`rinishida belgilaymiz.

2. Tekislikda yasashga doir masalalar yechish bosqichlari

Tekislikda yasashga oid masalalarni sirkul va chizg`ich yordamida yechishda geometrik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko`ruvchi to`g`irlash, geometrik o`rinlar, simmetriya, parallel ko`chirish, o`xshashlik yoki geometriya inversiya hamda algebraik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko`ruvchi algebraik metodlardan foydalaniladi.

Yasashga oid geometrik masalalarni yechish jarayoni qaysi metod bilan amalga oshirilishidan qat`iy nazar, u bir qancha bosqichlarda bajariladi va tekislikda yasashga oid masalalarni yechish bosqichlari deb yuritiladi. Bular, tahlil, yasash va isbot va tekshirish bosqichlari bo`lib, har bir bosqich masala yechish jarayonida ma`lum bir maqsadni amalga oshirishni nazarda tutadi.

Tahlil bosqichi: masala yechishning eng muhim, ijodiy bosqichi bo`lib bunda yasalishi lozim bo`lgan F figura, masala talablariga mumkin qadar to`la javob beradigan darajada taxminan chizib olinadi.

Tahlil rasmida masala shartida berilganlar bor yo`qligi aniqlanadi, agar ular rasmda aks etmagan bo`lsa qo`shimcha chizib olinadi. Natijada asosiy ya`ni yasalishi lozim bo`lgan figura bilan hamjihatlikda bo`lgan bir qancha yordamchi figuralar hosil bo`ladi. Yordamchi figuralarda masala shartida berilganlar bilan bir qatorda, izlangan ya`ni yasalishi lozim bo`lgan asosiy figuraning nuqtalari ham joylashadi. Shu tariqa berilganlar va izlanganlar orasidagi bog`lanishlarni o`rnatish natijasida asosiy figurani yasash imkoniyatlari axtariladi va aniqlanadi. Yasash mumkin bo`lgan yordamchi figura orqali izlangan figurani yasashga o`tiladi.

Yasash bosqichi: tahlil bosqichida aniqlanganlarni amaliy jihatdan bajarilishini nazarda tutadi.

Bunda yasalishi mumkin bo`lgan yordamchi figuralar yasash vositalari yordamida yasaladi va ular orqali yasalishi lozim bo`lgan asosiy figuraning nuqtalari va elementlari yasab olinadi.

Isbot bosqichi: masla yechimining sinash bosqichi bo`lib tahlil bosqichida taxminan chizib olingan asosiy figura bilan yasash bosqichida yasalgan figuraning masala shrtlariga javob berishi isbotlanadi.

Tekshirish bosqichi: masala yechishning yakunlash bosqichi hisoblanib, unda masala shartida belgilanganlarga asosan figura yasash mumkinmu? agar mumkin bo`lmasa berilganlarni qanday tasnlash lozim qanday hollarda yechim mavjud, berilganlarga asoslanib nechta yechimga ega ekanligi aniqlanadi.

3. Yasashga doir masalalarni yechish usullari va yasashga doir sodda masalalar

Odatda yasashga doir geometrik masalalarni yechishda masala yechilishini osonlashtirish va to`la yechimni ta`minlash maqsadida yuritiladigan muhokama aniq bir umumiy sxemada olib boriladi. Bu sxema quyidagi 4 ta bosqichdan iborat:

ANALIZ. Analiz konstruktiv masalalarni yechishning dastlabki tayyorlov bosqichidir. Bu bosqichning asosiy vazifasi masalani yechilishi oldindan ma`lum bo`lgan masalalarga ajratish va ularning yechilishi tartibini aniqlashdan iborat. Bundan tashqari, masala yechildi deb faraz qilinib, izlangan va berilgan figuralar masala talabiga mumkin qadar to`laroq javob beradigan tarzda taxminan chizib qo`yiladi. So`ngra kerakli geometrik faktlardan foydalanib, so`raglan va berilgan figura orasidagi bog`lanishlar aniqlanadi va figuraning qaysi elementni qay tartibda yasash mumkinligi belgilanadi. Shunday qilib, izlangan figuraning yasash plani tuziladi.

So`ralgan va berilgan figura elementlari orasidagi bog`lanishni topishni osonlashtirish uchun odatda yordamchi figuradan foydalaniladi. Yordamchi figura shunday bo`lishi kerakki, uni berilganlarga asosan yasash va undan izlangan figuraga o`tish mumkin bo`lsin.

YASASH. Masalada so`raglan figurani toppish uchun kerak bo`lgan asosiy yasashlar ketma- ketligi analiz bosqichida tuzilgan plan asosida, chizg`ich va sirkul yordamida hosil qilinadi.

Isbot. Bu bosqichda yasalgan figura masalada izlangan figura ekanligi isbot qilinadi, ya`ni uning masalada berilgan barcha shartlarga javob berishi isbotlanadi. Isbotlash yasashda bajarilgan ishlarga ve tegishli geometriya teoremalariga asoslanadi.

TEKSHIRISH. Yasashga doir masalalarni to`la yechish uchun quyidagi savollarni oydinlashtirish kerak:

1. Masalada berilgan elementlarni ixtiyoriy tanlab olganda ham masala yechimga ega bo`ladimi, agar berilgan elementlar ixtiyoriy tanlab olinganda masala

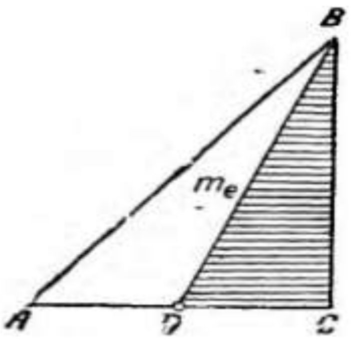
yechimga ega bo`lmasa, u holda qanqanday tanlab olganda masala yechimga ega bo`ladi, qanday hollarda yechimga ega bo`lmaydi?

2. Berilgan elementlar imkoniyati boricha tanlab olinganda masala nechta yechimga ega bo`ladi?

Bu savollarga javob berish uchun yasashning borishini tekshirish kerak. Bu degan so`z, yasash bosqichida bajarilgan eng sodda va asosiy yasashlarni birin- ketin yana bir bor tekshirish kerak hamda bu masalalarni hamma vaqt yechish mumkinmi, yechish mumkin bo`lsa, nechta yechim borligini aniqlash kerak. Yasashga doir masalalarni bosqichlab yechish masalani to`g`ri yechishning garovidir. Lekin shuni sedan chiqarmaslik kerakki, har qanday masalani yechishda ham bu to`rtta bosqichga qat`iy roiya qilish shart emas. Masalaning og`ir yengilligiga, soda-murakkabligiga qarab, bu bosqichlarning ba`zilariga to`xtalmasdan ketish ham mumkin.

1- Masala*: Bir kateti va ikkinchi katetiga o`tkazilgan medianasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.*

ANALIZ. Izlanuvchi uchburchak topildi deb faraz qilib, uni taxminan chizib qo`yaylik. 3.1 chizmadagi *ABC*-izlanuvchan ucburchak va uning berilgan elementlari $BC=\alpha$ $BD=m$ va burchak *C*= $90^0$ bo`lsin. Bu uchburchakni yasash uchun uning *A, B* va *C* uchlarini toppish kerak. $BC=\alpha$ tomoni berilgani uchun uning *B* va *C* uchlari ma`lum. *A* uchi uchburchak *AC* va *AB* tomonlarning kesishish nuqtasi bo`lsa ham bu tomonlar noma`lum bo`lgani uchun ular yordamida *A* nuqtani bevosita topib bo`lmaydi. Shuning uchun to`g`ri burchakli uchburchak *BCD* ni qaraymiz. Uning *BC* kateti, *BD* gipotenuzasi va burchak *C*= $90^0$ berilgani uchun uni yasash mumkin. Berilishiga ko`ra *BD* kesma median abo`lgani uchun, *AD=CD.* Shunung uchun uchburchak *BCD* ning *CD* kateti davomida unga teng kesma olib, *A* nuqtani olish mumkin. So`ngra A va B nuqtalarni tutshtirsak, uchburchak *ABC* hosil bo`ladi.



3.1-Chizma.

Demak, masala shartida berilganlar bo`yicha to`g`ri burchakli uchburchak *BCD* ni yasab uning yordamida izlanuvchi uchburchak *ABC* ga o`tish mumkin ekan. Masala yechishda foydalanilgan uchburchak *BCD* yordamchi figura bo`ladi.

Yechimning yasash, isbotlash va tekshirish bosqichlari o`z- o`zidan ravshan bo`lgani uchun ular ustida to`xtashga ehtiyoj yo`q.

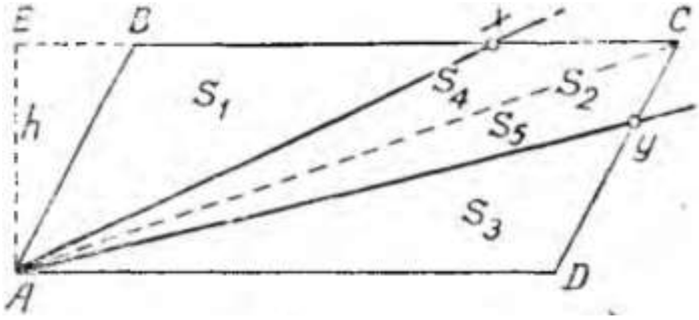
2-Masala: *Parallelogramni uning bir uchidan chiquvchi ikki to`g`ri chiziq bilan uchiga tengdosh bo`lakka bo`ling.*

ANALIZ. Berilgan parallelogram *ABCD* va masalaning talabiga javob beruvchi to`g`ri chiziqlar *AX* va *AY* (2.2 chizma) deb faraz qilaylik (X va Y to`g`ri chiziqlarning parallelogram tomonlari bilan kesishish nuqtalari). Masala shartiga muvofiq

$$\triangle ABX_{yuzi} = \square AXCY_{yuzi} = \triangle BYD_{yuzi}$$

Yoki $$S_1 = S_2 = S_3 \qquad (1)$$

Izlanuvchi to`g`ri chiziqlarni topish uchun X va Y nuqtalarni topish kifoya. Bu nuqtalarni topishda ularning parallelogram tomonlarida yotishidan va AC dioganal parallellogrammni ikkita teng uchburchakka bo`lishidan foydalanamiz.



3.2– Chizma.

Chizmadan:

$\triangle ABC_{yuzi} = \triangle ADC_{yuzi}$ yoki

$$S_1 + S_4 = S_3 + S_5 \qquad (2)$$

Bundan (1) ga asosan $S_4 = S_5$

$S_4 + S_5 = S_2$ bo`lgani uchun:

$$S_4 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}S_1 \qquad (3)$$

$$S_5 = \frac{1}{2}S_2 = \frac{1}{2}S_3 \qquad (4)$$

Parallellogrammning A uchidan BC- tomoniga o`tkazilgan balandlikni *h* bilan belgilab, uchburchaklar yuzlari uchun quyidagi ifodalarni yoza olamiz:

$$S_1 = \frac{1}{2}BX \cdot h; \qquad S_4 = \frac{1}{2}CX \cdot h.$$

Bu ifodalarni $S_4 = \frac{1}{2}S_1$ tenglikka qo`ysak:

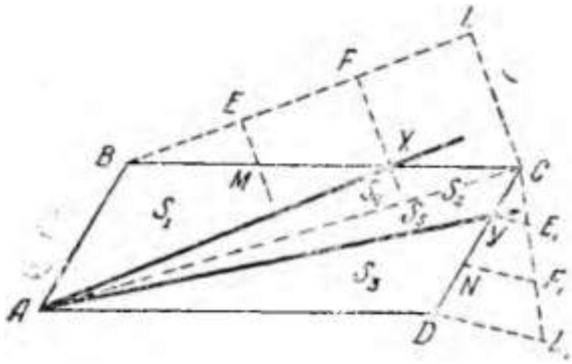
$$\frac{1}{2}CX \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}BX \cdot h\right)$$

Bundan esa:

$$CX = \frac{1}{2}BX. \qquad (5)$$

Xuddi shu yo`l bilan CY = $\frac{1}{2}$ DY ekanligi aniqlanadi. Bulardan quyidagilar ma`lum bo`ladi:

$$CX = \frac{1}{3}BC, \quad CY = \frac{1}{3}CD \qquad (6)$$



2.3-chizma

Demak, izlanuvchi to`g`ri chiziqlarni aniqlashda yordam beruvchi X va Y nuqtalarni topish uchun berilgan parallellogrammning CB va CD tomonlarini teng uch bo`lakka bo`lish kerak. Bundagi X va Y nuqtalar yordamchi figura bo`ladi.

YASASH. Berilgan ABCD parallellogramning CB va CD tomonlarini har birini teng uch bo`lakka bo`lamiz. C uchidan boshlab hisoblanganda tomonning uchdan bir bo`lagini ko`rsatuvchi nuqtalar izlangan X va Y nuqtalar bo`ladi.

So`ngra parallellogramning A uchini topilgan X va Y nuqtalar bilan tutashtiramiz; AX va AY to`g`ri chiziqlar parallellogrammni izlangan tengdosh bo`laklarga bo`ladi.

ISBOT. Yasashga ko`ra quyidagilar ma`lum:

BM = MX = XC;

DN = NY = YC.

Budan:

$$BX = 2\,XC, \quad DY = 2\,YC. \qquad (7)$$

(7)dan ABX uchburchakning yuzi S_1 AXC uchburchakning yuzi S_4 dan ikki marta katta. ADY uchburchakning yuzi S_3 esa AYC uchurburchakning yuzi S_5 dan ikki marta katta ekanligi ravshan:

$$S_1 = 2\,S_4 \qquad S_3 = 2\,S_5\,. \qquad (8)$$

Parallelogramning AC dioganali uni teng ikki uchburchakka bo`lishini e`tiborga olib, quyidagilarni yoza olamiz:

$$\triangle\, ABC_{yuzi} = \triangle\, ADC_{yuzi}$$

Bundan;

$$S_1 + S_4 = S_3 + S_5 \qquad (9)$$

Agar S_1 va S_5 ning (8) dagi qiymatlarini (9) ga qo`ysak, quyidagi tenglikka ega bo`lamiz:

$$2S_4 + S_4 = 2S_5 + S_5\ ; \qquad 3S_4 = 3S_5$$

Bundan:

$$S_4 = S_5 \qquad (10)$$

Bundan tashqari, (8) dan $S_1 = 2S_4$ $S_3 = 2S_5$ va (10) dan $S_4 = S_5$ bo`lgani uchun

$$S_1 = S_3 \qquad (11)$$

Chizmadan esa $S_4 + S_5 = S_2$ (8) va (11) da

$$S_4 = S_5 = \frac{1}{2}S_1 = \frac{1}{2}S_3$$

Demak,

$$S_1 = S_2 = S_3$$

TEKSHIRISH. Berilgan parallellogrammning shakli va kattaligi har qanday bo`lsa ham bu masala yechimga ega bo`ladi, chunki parallellogrammning tomonlarini hamma vaqt teng uch bo`lakka bo`lish mumkin va tomonning uchdan bit bo`lagini ko`rsatuvchi nuqta bitta bo`lgani uchun yechim ham bitta bo`ladi.

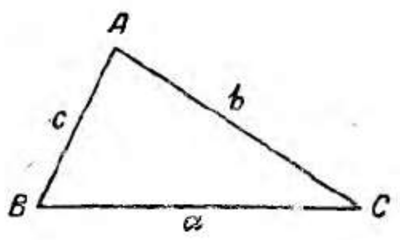
3-Masala: *Uch tomoni berilgan uchburchak yasang*.

ANALIZ. Masala yechildi deb faraz qilib, izlangan uchburchakni taxminan chizib qo`yamiz. (3.4 chizma)

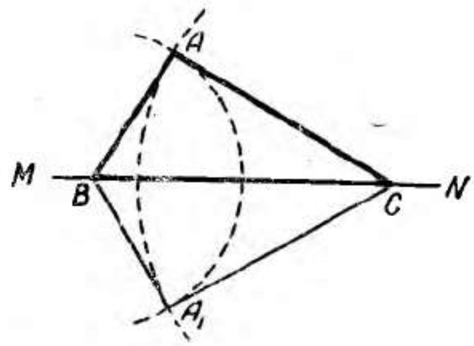
Bunda BC = a, AC = b, AB = c.

Agar, a kesma yasalsa uning B va C uchlari ABC uchburchakning ikki uchi bo`ladi. Endi uchinchi A uchining qayerda yotishini aniqlash qoladi. Buning uchun A nuqtaning quyidagi ikki xossasiga e`tabor qilamiz:

1) A nuqta B nuqtadan berilgan c masofada yotadi, demak, u B nuqtani markaz qilib c kesmaga teng radius bilan chizilgan aylanada yotar ekan,



3.4-chizma



3.5-chizma

2) Ikkinchi tomondan shu A nuqta C nuqtadan berilgan b masofada yotadi, demak, u C markazdan b kesmaga teng radius bilan chizilgan aylanada yotar ekan,

3) Shunday qilib, uchburchakning izlangan A uchi bu ikki aylana yoylarining kesishish nuqtasi bo`ladi.

YASASH. Ixtiyoriy MN to`g`ri chiziqda berilgan tomonlardan biriga masalan, a kesmaga teng qilib, BC kesma ajratamiz (3.5 chizma). Bu kesmaning B uchini markaz qilib c ga teng radius bilan va C uchini markaz qilib, b ga teng radius bilan ikkita yoy chizamiz. Bu yoylar kesishgan A(yoki A_1) nuqtani B va C nuqtalar bilan tutashtirsak, talab etilgan ABC uchburchak hosil bo`ladi.

ISBOT. Yasashga ko`ra, BC = a AC= b va AB = c bo`lgani uchun ABC uchburchak masalaning talabiga javob beradi.

TEKSHIRISH. Berilgan kesmalar

$b - c < a < b + c$

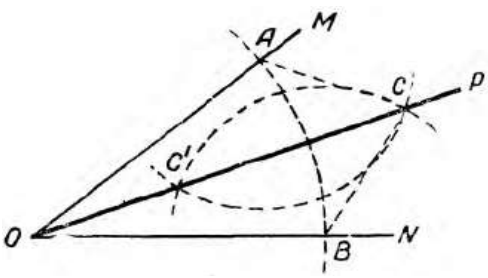
munosabatda bo`lgandagina uchburchak yasash mumkin.

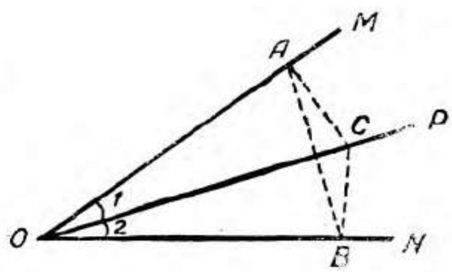
Yasash natijasida ikkita ABC va A_1BC uchburchak hosil bo`lsada, bular o`zaro teng bo`lgani uchun masalaning javobi sifatida bulardan bittasi olinadi.

Eslatma: Yasashni b yoki c tomondan boshlasa ham yuqoridagi kabi uchburchaklar hosil bo`ladi.

3-masala: *Berilgan burchakni teng ikkiga bo`ling, ya`ni burchakning bissektrisasini chizing.*

ANALIZ. NOM burchakni teng ikkiga bo`luvchi OP nur topildi deb faraz qilaylik.





3.6 - chizma 3.7- chizma

Bu farazga binoan quyidagi tengliklar to`g`rib o`ladi:

$\angle MOP = \angle NOP = \frac{\angle NOM}{2}$ (1)

OP nurning ixtiyoriy C nuqtasidan berilgan burchakning tomonlariga perpendikulyar o`tkazaylik.(3.7. chizma)

$CA \perp OM$ va $CB \perp ON$. (2)

(A va B nuqtalar – burchak tomonlari bilan perpendikulyarning kesishish nuqtalari). Hosil bo`lgan ikkita to`g`ri burchakli OAC va OBC uchburchaklar o`zaro teng, chunki ularda OC gipotenuza umumiy va farazimizga binoan bittadan o`tkir burchaklari o`zaro teng ($\angle 1 = \angle 2$). Shuning uchun:

OA= OB va AC= BC (3)

Demak, A va B nuqtalar berilgan burchakning O uchidan teng uzoqlikda, C nuqta esa AB kesmaning o`rta perpendikulyarida yotadi. C nuqtaning bu xossasidan OP nurni yasash yo`li ma`lum bo`ladi.

C nuqta OP nurning ixtiyoriy nuqtasi bo`lgani uchun quyidagi xulosaga kelamiz *burchakning bissektrisasidagi nuqta shu burchak tomonlaridan teng masofada yotadi* (to`g`ri teorema).

YASASH.

1) berilgan burchakning O uchini markaz qilib, ixtiyoriy radius bilan yoy chiziladi(4.1 chizma). bu yoy burchak tomonlarini A va B nuqtalarda kesib o`tadi.

2) AB kesmani teng ikkiga bo`lish uchun uning o`rta perpendikulyarida

yotuvchi C va C' nuqtalar topiladi.

3) C va C' nuqtalardan to`g`ri chiziq o`tkaziladi.

Eslatma: Odatda bunda aytilgan ikki nuqtadan birini topib, uni berilgan burchakning O uchi bilan tutashtirib, izlanuvchi bissektrisa hosil qilinadi.

To`g`irlash metodi.

Bir to`g`ri chiziqda yotmagan kesmalarning, masalan siniq chiziq bo`g`inlarining algebraik yig`indisiga teng kesma yasash, kesmalarni to`g`irlash deb ataladi. To`g`irlashdan foydalanib masala yechish yasashda to`g`irlash metodi deyiladi.

To`g`irlash metodi bilan masala yechishda yuqorida ko`rilgan bosqichlab yechish usulidan to`la foydalaniladi.

Yasashga doir masaladagi ma`lum elementlar qatorida izlangan figura chiziqli noma`lum elementlarning yig`indisi yoki ayirmasi berilgan bo`lsa, bunday masala to`g`irlash metodi bilan oson yechiladi.

4-masala: *Asosi unga yopishgan bir burchagi va yon tomonlarining ayirmasi berilgan uchburchak yasang.*

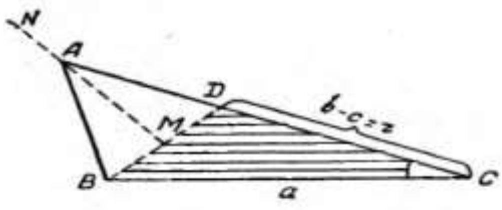
Bu masalani yechishda quyidagi ikki holni qaraymiz.

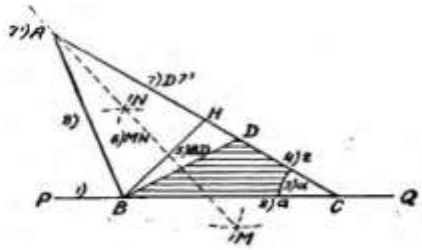
1. Asosidagi burchaklarini kichigi berilgan hol.
2. Asosidagi burchaklardan kattasi berilgan hol.

Birinchi hol.

ANALIZ. Izlangan uchburchak 3.8 - chizmadagi ABC uchburchak deb faraz qilinadi.

Berilgan r kesmani (ayirmani) bu uchburchakda ko`rsatish uchun uning AC tomoni ustiga (A uchidsn boshlab) AB=AD tomonini qo`yamiz, bunda AC-AB=AC-AD=DC=r hosil bo`ladi.





3.8 -chizma 3.9 -chizma

D nuqtani B nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo`lgan BCD uchburchakning yordamchi figura bo`la olishini isbot qilamiz.

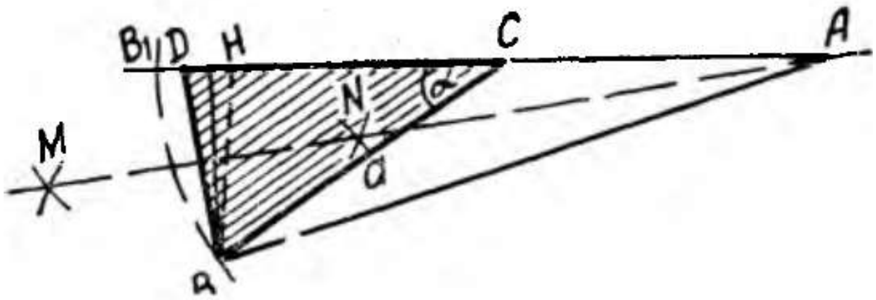
Berilgan BC=a, CD=r tomonlar va ular orasidagi C burchak bo`yicha BCD ucburchak yasash mumkin.

Bu BCD uchburchak yordamida izlanuvchi ABC uchburchakni yasash mumkin; buning uchun ABC uchburchakning A uchini toppish kerak. A nuqta ayni vaqtda teng yonli BAD uchburchakning uchidir. Bu uchburchakning uchini toppish uchun BD kesmaning o`rta perpendikulyari (MN) ni chizib, uni CD ning davomi bilan kesishtiramiz; topilgan A nuqtani B nuqta bilan tutashtirsak, izlanuvchi ABC uchburchak hosil bo`ladi.

YASASH. Analizda tuzilgan plan bo`yicha yasasak 3.9 -chizmadagi ABC uchburchak hosil bo`ladi (yasash tartibi chizmada raqamlar bilan ko`rsatilgan).

ISBOT. 3.9-chizmada yasalgan ABC uchburchak masalaning talabiga javob beradi, chunki yasalishicha BC=α ∠ACB=∠C=α bo`lib, AB=AD, ya`ni AC-AB=AC-AD=DC=r.

TEKSHIRISH. Izlanuvchi ABC uchburchakning mavjud bo`lish bo`lmasligi A uchining mavjudligiga bog`liqdir. A nuqtaning mavjudligi esa BD kesmaning o`rta perpendikulyari MN to`g`ri chiziq bilan CD kesma davomining kesishish yoki kesishmasligiga bog`liq; bu esa ABC uchburchakning B uchidan AC tomoniga BH perpendikulyar tushirishdan hosil bo`lgan to`g`ri burchakli BHC uchburchakning CH kateti bilan CD=r kesmaning hamda r bilan α kesmning nisbiy qiymatlariga bog`liqdir. To`g`ri burchakli uchburchakning CH=$\alpha\cos C$ munosabatni yozib, quyidagi xollarni qaraymiz.



3.10-chizma

1) Agar 3.9 -chizmadagi kabi CD < CH, ya`ni r < $\alpha\cos C$ bo`lsa, MN o`rta perpendikulyar CD ning davomi bilan biror nuqtada kesishib, izlangan A nuqtani hosil qiladi; bu ikki to`g`ri chiziqning kesishuvini to`g`ri burchakli BHD uchburchakdagi BDH burchakningo`tkir burchak bo`lishi bilan asoslash mumkin.

Demak, bu holda masala yechiladi va bitta uchburchak hosil bo`ladi.

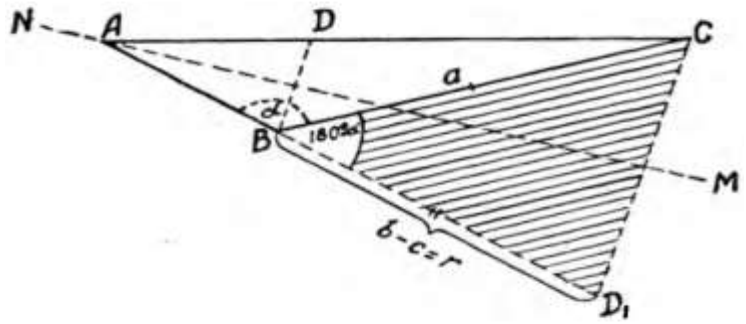
2) Agar, CD=CH, ya`ni $\alpha \cos C$ bo`lsa, BD tomon BH bo`ladi. Shuning uchun MN o`rta perpendikulyar bilan CD tomonining davomi o`zaro kesishmaydi; demak, bu holda masala yechimga ega bo`lmaydi.

3) Agar 3.10- chizmadagi singari CH<CD<CB, ya`ni $\alpha \cos C$ <r<a bo`lsa, BD kesmaning o`rta perpendikulyari bo`lgan MN to`g`ri chiziq CD kesmaning C uchidan nariga o`tkazilgan davomi bilan kesishib A nuqtani hosil qiladi. Lekin bu A nuqtani B nuqta bilan tutashtirgandan keyin hosil bo`ladigan ABC uchburchakda r=CD=AD - AC = AB – AC=c – b bo`lsada, ∠ACB≠α dir, ya`ni masalaning bitta talabiga javob bersada, uning ikkinchi talabiga javob bera olmaydi. Shuning uchun bu holda ham masala yechimga ega bo`lmaydi.

4) Agar r > α bo`lsa, uchburchak hosil bo`lmaydi, chunki bus hart uchburchakning mavjudlik shartiga to`g`ri kelmaydi.

Ikkinchi hol.

ANALIZ. Izlanuvchi uchburchak topildi deb faraz qilib, taxminan 3.8-chizmadagi ABC uchburchakni chizib qo`yaylik. Bunda berilganlardan AC-AB= b-c=r kesmani chizmada ko`rsatish uchun(birinchi holdagi singari) AB tomonni AC tomon ustiga uning A uchidan boshlab qo`ysak, AC-AB=AC-AD=DC=r hosil bo`ladi.



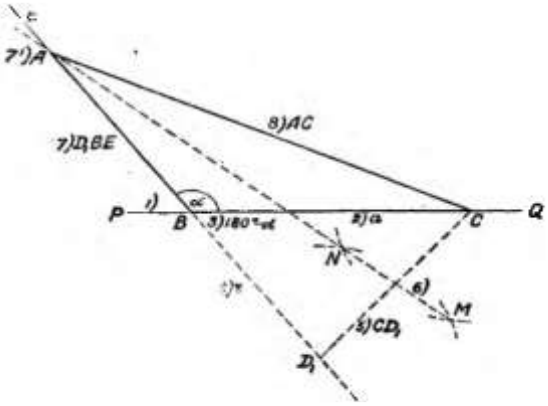
3.11- chizma

Lekin D nuqtani B nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo`ladigan BCD uchburchak yordamicha figura bo`la olmaydi, chunki uni faqat Bc va CD tomonlar bo`yicha yasab bo`lmaydi. Shuning uchun r kesmani chizmada masalaning birinchi holidagidan boshqacharoq yo`l bilan ko`rsatamiz.

Uchburchakning AC (uzun) tomonini uning AB(qisqa) tomoni ustiga A nuqtadan boshlab qo`yamiz.

Bundan AB tomon davomida BD_1=AD_1- AB=AC-AB=r kesma hosil bo`ladi; uning $D_1$uchini C nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo`lgan BCD_1 uchburchakning yordamchi figura bo`lish yoki bo`lmasligini aniqlaylik: BC=α, BD_1=r tomonlari va CBD_1=180^0-α bo`yicha bu uchburchakni yasash mumkin; berilganlarga tayanib yasalishi mumkin bo`lgan keying uchburchakdan izlanuvchi ABC uchburchakka o`tish ham mumkin

Haqiqatdan, izlanuvchi uchburchakning A uchini teng yonli CAD_1 uchburchakning uchi sifatida toppish mumkin. A nuqta shu teng yonli uchburchakning asosi bo`lgan $CD_1$ ning MN o`rta perpendikulyarida yotadi. Ikkinchi tomondan yD_1B tomon davomida yotadi. Demak, A nuqtani bu ikki ma`lum to`g`ri chiziqning kesishish nuqtasi sifatida topib, uni C nuqta bilan tutashtirgandan keyin ABC ucburchak hosil bo`ladi.



3.12-chizma

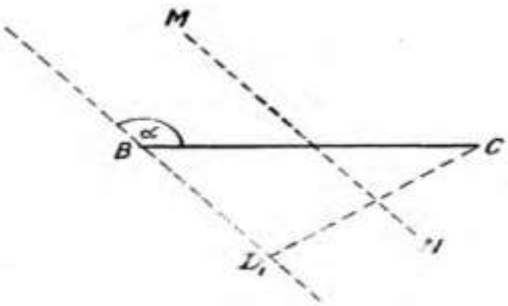
Yasash va isbotlanishni birinchi holdagi kabi bajarib, izlanuvchi uchburchakning hosil bo`lishi r<a shartdan boshqa yana α burchakka ham bog`liq ekanligidan quyidagi hollarni qaraymiz.

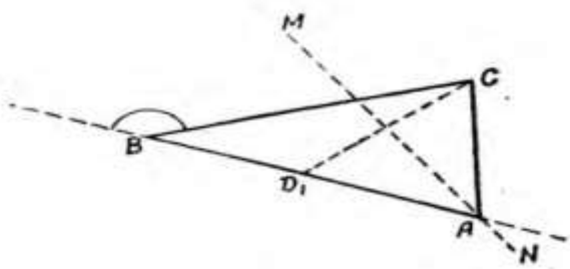
TEKSHIRISH.

1. $90^0<\alpha<180^0$ bo`lganda quyidagicha uch holdan biri bo`lishi mumkin.

a) Agar 3.9 chizmadagi singari yordamchi BCD_1uchburchak to`g`ri burchakli bo`lmasa MN o`rta perpendikulyar D_1B kesma davomi bilan kesishib masalaning talabiga javob beruvchi ABC uchburchak albatta hosil bo`ladi

b) Yordamchi BCD_1 uchburchak to`g`ri burchakli bo`lsa MN o`rta perpendikulyar BD_1kesmaga parallel bo`lib, izlangan A nuqtani hosil qilmaydi.(3.13-chizma)

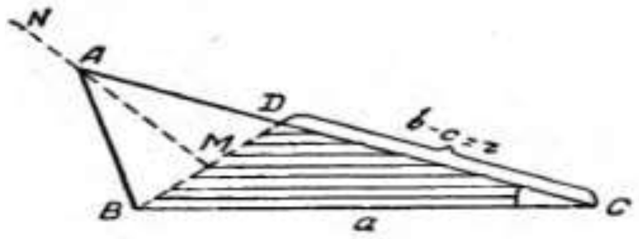




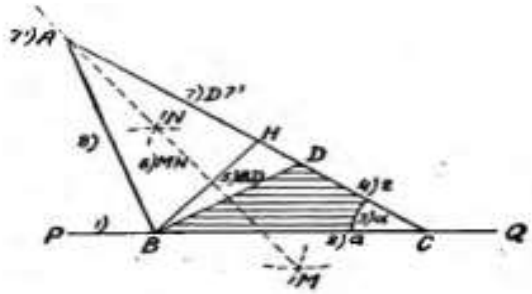
3.13-chizma 3.14-chizma

c) Yordamchi BCD_1 uchburchakning CD_1B burchagi o`tmas burchak bo`lsa MN o`rta perpendikulyar $BD_1$ kesma ning $D_1$ uchidan nariga o`tkazilgan davomi bilan biror A nuqtada kesishadi. Lekin bu A nuqtani C nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo`lgan ABC uchburchak masaladagi talablardan biriga javob bermaydi.(3.14-chizma), chunki uning B burchagi berilgan $\alpha$ o`tmas burchakka teng emas.

Demak, masala yechimga ega bo`lishi uchun berilgan $\alpha$ shunday o`tmas burchak bo`lishi kerakki, unga suyanib yordamchi BC$D_1$ uchburchakni yasaganda uning, $D_1$ burchagi o`tkir bo`lsin.



3.15-chizma



3.16-chizma

D nuqtani B nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo`lgan BCD uchburchakning yordamchi figura bo`la olishini isbot qilamiz.

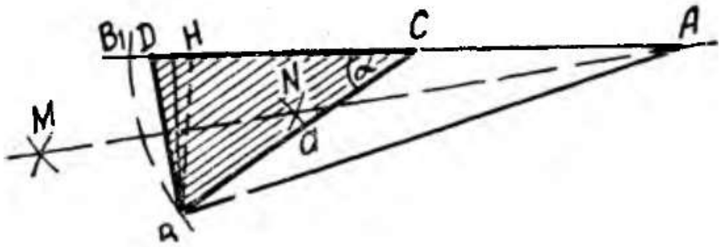
Berilgan BC=a, CD=r tomonlar va ular orasidagi C burchak bo`yicha BCD ucburchak yasash mumkin.

Bu BCD uchburchak yordamida izlanuvchi ABC uchburchakni yasash mumkin; buning uchun ABC uchburchakning A uchini toppish kerak. A nuqta ayni vaqtda teng yonli BAD uchburchakning uchidir. Bu uchburchakning uchini toppish uchun BD kesmaning o`rta perpendikulyari (MN) ni chizib, uni CD ning davomi bilan kesishtiramiz; topilgan A nuqtani B nuqta bilan tutashtirsak, izlanuvchi ABC uchburchak hosil bo`ladi.

YASASH. Analizda tuzilgan plan bo`yicha yasasak 3.16 chizmadagi ABC uchburchak hosil bo`ladi (yasash tartibi chizmada raqamlar bilan ko`rsatilgan).

ISBOT. 3.16 chizmada yasalgan ABC uchburchak masalaning talabiga javob beradi, chunki yasalishicha BC=α ∠ACB=∠C=α bo`lib, AB=AD, ya`ni AC-AB=AC-AD=DC=r.

TEKSHIRISH. Izlanuvchi ABC uchburchakning mavjud bo`lish bo`lmasligi A uchining mavjudligiga bog`liqdir. A nuqtaning mavjudligi esa BD kesmaning o`rta perpendikulyari MN to`g`ri chiziq bilan CD kesma davomining kesishish yoki kesishmasligiga bog`liq; bu esa ABC uchburchakning B uchidan AC tomoniga BH perpendikulyar tushirishdan hosil bo`lgan to`g`ri burchakli BHC uchburchakning CH kateti bilan CD=r kesmaning hamda r bilan α kesmning nisbiy qiymatlariga bog`liqdir. To`g`ri burchakli uchburchakning CH=$\alpha \cos C$ munosabatni yozib, quyidagi xollarni qaraymiz.



3.17-chizma

5) Agar 3.16 chizmadagi kabi CD < CH, ya`ni r < $\alpha \cos C$ bo`lsa, MN o`rta perpendikulyar CD ning davomi bilan biror nuqtada kesishib, izlangan A nuqtani hosil qiladi; bu ikki to`g`ri chiziqning kesishuvini to`g`ri burchakli BHD uchburchakdagi BDH burchakningo`tkir burchak bo`lishi bilan asoslash mumkin.

Demak, bu holda masala yechiladi va bitta uchburchak hosil bo`ladi.

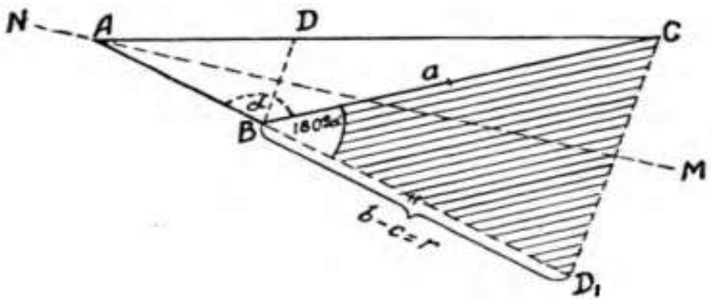
6) Agar, CD=CH, ya`ni $\alpha \cos C$ bo`lsa, BD tomon BH bo`ladi. Shuning uchun MN o`rta perpendikulyar bilan CD tomonining davomi o`zaro kesishmaydi; demak, bu holda masala yechimga ega bo`lmaydi.

7) Agar 3.17 chizmadagi singari CH<CD<CB, ya`ni $\alpha \cos C$ <r<a bo`lsa, BD kesmaning o`rta perpendikulyari bo`lgan MN to`g`ri chiziq CD kesmaning C uchidan nariga o`tkazilgan davomi bilan kesishib A nuqtani hosil qiladi. Lekin bu A nuqtani B nuqta bilan tutashtirgandan keyin hosil bo`ladigan ABC uchburchakda r=CD=AD - AC = AB – AC=c – b bo`lsada, ∠ACB≠α dir, ya`ni masalaning bitta talabiga javob bersada, uning ikkinchi talabiga javob bera olmaydi. Shuning uchun bu holda ham masala yechimga ega bo`lmaydi.

8) Agar r > α bo`lsa, uchburchak hosil bo`lmaydi, chunki bus hart uchburchakning mavjudlik shartiga to`g`ri kelmaydi.

Ikkinchi hol.

ANALIZ. Izlanuvchi uchburchak topildi deb faraz qilib, taxminan 3.15 chizmadagi ABC uchburchakni chizib qo`yaylik. Bunda berilganlardan AC-AB= b-c=r kesmani chizmada ko`rsatish uchun(birinchi holdagi singari) AB tomonni AC tomon ustiga uning A uchidan boshlab qo`ysak, AC-AB=AC-AD=DC=r hosil bo`ladi.



3.18- chizma

Lekin D nuqtani B nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo`ladigan BCD uchburchak yordamicha figura bo`la olmaydi, chunki uni faqat BC va CD tomonlar bo`yicha yasab bo`lmaydi. Shuning uchun r kesmani chizmada masalaning birinchi holidagidan boshqacharoq yo`l bilan ko`rsatamiz.

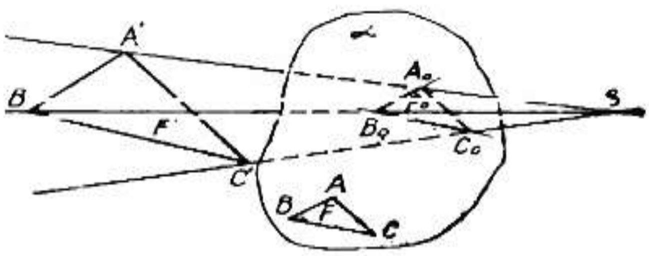
Uchburchakning AC(uzun) tomonini uning AB(qisqa) tomoni ustiga A nuqtadan boshlab qo`yamiz. Bundan AB tomon davomida B$D_1$=A$D_1$- AB=AC-AB=r kesma hosil bo`ladi; uning D_1uchini C nuqta bilan tutashtirishdan hosil bo`lgan BC$D_1$ uchburchakning yordamchi figura bo`lish yoki bo`lmasligini aniqlaylik: BC=$\alpha$, B$D_1$=r tomonlari va CB$D_1$=$180^0$-$\alpha$ bo`yicha bu uchburchakni yasash mumkin; berilganlarga tayanib yasalishi mumkin bo`lgan keying uchburchakdan izlanuvchi ABC uchburchakka o`tish ham mumkin.

Fazoviy figuralarda kesimlarni yasash

Markaziy proyeksiyalash.

Yevklid fazosida α tekislik va shu tekislikdan tashqarida yotgan A' nuqta berilgan deb faraz qilaylik (1-chizma). A' dan farqli ixtiyoriy S $(S \notin \alpha)$ nuqtani tanlab olib, uni A' nuqta bilan tutashtiramiz, hosil bo'lgan $S\,A'$ to'g'ri chiziqning α tekislik bilan kesishgan nuqtasini A_0 bilan belgilaylik. A_0 nuqtani fazodagi A' nuqtaning α (proyeksiya) tekislikdagfi markaziy proyeksiyasi, S nuqta proyeksiyalar markazi, $S\,A'$ chiziqni proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq, α tekislikni esa proyeksiyalar tekisligi deyiladi.

Yuqoridagi usul bilan F' figuraning α tekislikdagi F_0 proyeksiyasini yasaganimizdan keyin, uni o'xshash almashtirib, F' figuraning α tekislikdagi F tasvirini hosil qilamiz. Ba'zi hollarda o'xshash almashtirishga zaruruyat tug'ilmaydi, u holda F' figuraning α tekislikdagi proyeksiyasi uning tasviri bo'ladi.

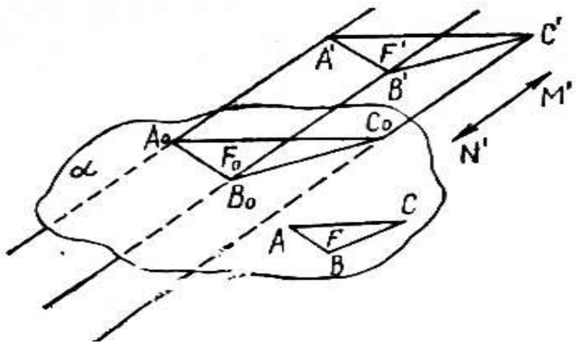


1-chizma.

Figura proyeksiyasining ko'rinishi proyeksiyalar tekisligining proyeksiyalar markaziga nisbatan joylanishiga bog'liqdir. Markaziy proyeksiyalashda kishi ko'zining ko'rish nurlari proyeksi-yalovchi nurlarga mos kelganligi sababli tasvir yaqqol ko'rinadi. Markaziy proyeksiyalar bo'yicha figuraning haqiqiy shakli va o'lchamlarini aniqlash qiyin va noqulay. Shuning uchun bu usuldan ko'pgina yirik inshootlarning umumiy ko'rinishlarini tasvirlashda foydalaniladi. Markaziy proyeksiyalash usuli bilan yasalgan tasvir proyektiva va bu usul bilan shug'ullanuvchi fan ham perspektiva deb ataladi va u chizma geometriyaning maxsus bo'limidan biri hisoblanadi.

Parallel proyeksiyalash.

Parallel proyeksiyalashni markaziy proyeksiyalashning xususiy holi deb qarash mumkin. Bunda, proyeksiyalash markazi S biror $M'N'$ to'g'ri chiziq yo'nalishi bo'yicha harakatlanib, proyeksiyalar tekisligidan cheksiz uzoqlashgan deb faraz qilamiz (2-chizma). Bu yerda $M'N'$ chiziq *proyeksiyalash yo'nalishi* deyiladi.



2-chizma.

Fazoda olingan biror F' figurani α tekislikka proyeksiyalash uchun F' figuraning har bir nutasi orqali $M'N'$ yo'nalishga parallel qilib proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning α tekislik bilan kesishgan F_0 nuqtalar to'plami F' figuraning α tekislikdagi parallel proyeksiyasi deb ataladi. Agar F_0 figuraning o'xshash almashtirsak, F' figuraning α tekislikdagi F tasviri hosil bo'ladi.

Parallel proyeksiyaning ko'rinishi va o'lchamlarining o'zgarishi faqat proyeksiyalar tekisligining proyeksiyalash yo'nalishiga nisbatan qanday joylanishiga bog'liq. Proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalar tekisligiga nisbatan qanday yo'nalishda bo'lishiga qarab, parallel proyeksiyalash qiyshiq burchakli va to'g'ri burchakli bo'ladi.

Agar proyeksiyalash yo'nalishi proyeksiyalar tekisligi bilan o'tkir burchak tashkil qilsa, bunday parallel proyeksiyalash qiyshiq burchakli burchakli deb aytiladi.

Agar proyeksiyalash yo'nalishi proyeksiyalar tekisligi bilan to'g'ri burchak tashkil qilsa, bunday parallel proyeksiyalash to'g'ri burchakli yoki orthogonal priyeksiyalash deyiladi. Bunday proyeksiyalashda proyeksiyalash yo'nalishi ko'ratilmaydi, chunki bir nuqtadan tekislikka faqat bitta perpendicular to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

Figuraning parallel proyeksiyalashdagi tasviri asosan quyidagicha hosil qilinadi:

1) berilgan fazoviy figuraning barcha nuqtalari berilgan yo'nalishda α tekislikka proyeksiyalanadi;

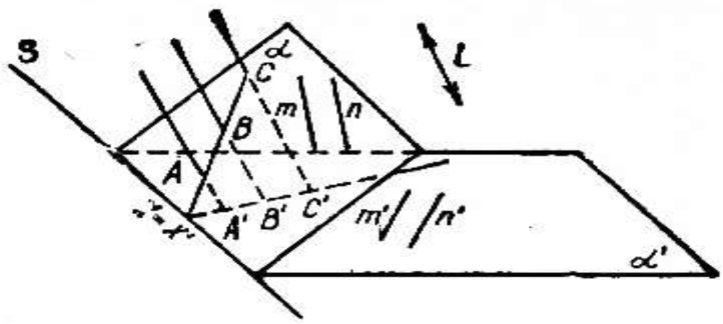
2) proyeksiya tekisligida hosil qilingan figura o'xshash almashtiriladi.

Bu ikki qadamni bajargandan keyin berilgan fazoviy figuraning tasviri hosil etiladi. Bundan ko'riadiki, tasvirdagi har bir nuqta umuman olganda, originaldagi mos nuqtaning proyeksiyasi bo'lmaydi. Ikkinchi qadam bizga kerakli o'lchamlardagi chizmani hosil qiishga imkon beradi. Ba'zi hollarda ikkinchi qadamni bajarishga zaruriyat tug'ilmaydi, u holda F' figuraning α tekislikdagi proyeksiyasi uning tasviri bo'ladi. Umuman aytganda, ikkinchi qadam ishning mohiyatini o'zgartirmaydi.

Parallel proyeksiyalash usuli hosil qilingan tasvir to'g'ri, ya'ni originalga munosib va yetarlicha ko'rgazmalidir. Bunday tasvir, markaziy proyeksiyalash usuli bilan hosi qilingan tasvirga nisbatan soddaroq yasaladi. Shuning uchun maktabda o'qitiladigan geometriya kursi bo'yicha tasvirni yasashda parallel proyeksiyalash usulidan foydalaniladi.

Ikki tekislikning perspektiv-affin mosligi.

s to'g'ri chiziq bo'yicha kesishuvchi ikkita α', α tekisliklar va bu tekisliklarni kesuvchi l yo'nalish berilgan bo'lsin. Parallel proyeksiyalash usuli bilan α', α tekisliklar nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatamiz(3-chizma). Bunday moslikni perspektiv-affin mosligi yoki jinsdosh moslik deyiladi. Bu moslikda ixtiyoriy ikkita mos A', A nuqtalarni birlashtiruvchito'g'ri chiziqlar l yo'nalishga parallel bo'ladi.



3-chizma.

Endi perspektiv-affin mosligining xossalari bilan tanishib chiqaylik. (Buni parallel proyeksiyalash xossalari deb ham yuritiladi.)

Avvalo, ikkita tekislikning kesishgan chizig'ining har bir nuqtasi bunday moslikda o'z-o'ziga o'tishini eslatib o'tishimiz lozim.

1. Perspektiv-affin mosligida kollinear nuqtalar yana kollinear nuqtalarga o'tadi.

Agar A nuqta a to'g'ri chiziqda yotsa, bu nuqta va shu to'g'ri chiziq bir-biriga *insident* deyiladi. Nuqta va tekislikning, to'g'ri chiziq va tekislikning insidentligi shunga o'xshash aniqlanadi.

2. Perspektiv-affin mosligida nuqta va to'g'ri chiziqing insidentligi saqlanadi.

3. Perspektiv-afin mosligida parallel to'g'ri chiziqlar yana parallel to'g'ri

chiziqlarga o'tadi(3-chizma).

4. Perspektiv-affin moslikda uchta nuqtaning oddiy nisbati saqlanadi.

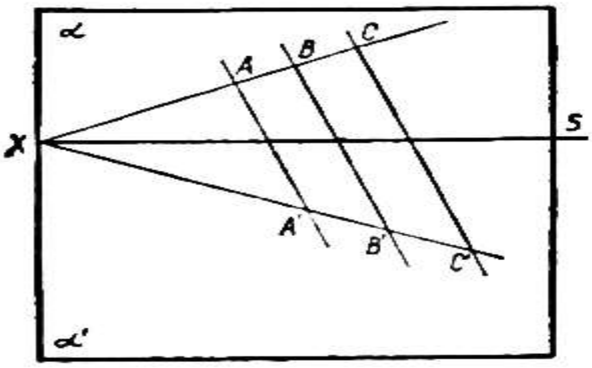
Haqiqatan ham, α tekislikdagi kollinear uchta A, B, C nuqtaga α' tekislikda A', B', C' nuqtalar mos keladi. AA', BB', CC' proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar parallel, shuning uchun ushbu tenglikni tuza olamiz

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}, \ (ABC) = (A'B'C').$$

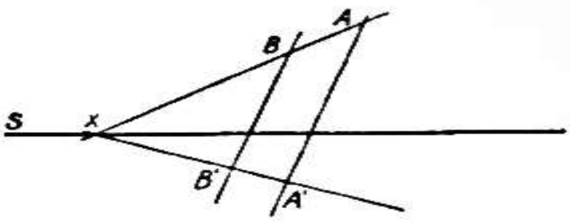
Tekislikdagi perspektiv-affin almashtirish.

Tekisliklardan birini s to'g'ri chiziq atrifida aylantiraylik, aylanayotgan tekislik qanday vaziyatda bo'lishidan qat'iy nazar proyeksiyalovchi AA', BB', CC' to'g'ri chiziqlar parallelligicha qolaveradi. Jumladan α, α' tekisliklar ustma-ust tushgan holda ham (4-chizma). Bu holda α tekislikni α' tekislikka perspektiv akslantirishni bitta $\alpha = \alpha'$ tekislik nuqtalarini o'z-o'ziga akslantirish deb qarash mumkin. Bunday perspektiv-affin akslantirishni perspektiv-affin almashtirish deb aytiladi. s to'g'ri chiziqni almashtirish o'qi deb yuritiladi. Bu hol tasvirlash matodlarini o'rganishda muhim ahamiyatga ega.

Tekislikni perspektiv-affin almashtirish bir juft mos (A, A') nuqtalarning va s o'qning berilishi bilan to'la aniqlanadi.



4-chizma.



5-chizma.

Haqiqatan ham, bizga bir juft (A, A') nuqtalar va s o'q berilgan bo'lsin $(A \notin s,\ A' \notin s)$. U holda tekislikka qarashli ixtiyoriy B nuqtaning obrazini yasashimiz mumkin(5-chizma). Buning uchun AB to'g'ri chiziqni o'tkazib, uning s to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasini X bilan belgilaylik, AX to'g'ri chiziqning obrazi $A'X$ to'g'ri chiziqdir. Izlangan nuqta $A'X$ va B nuqta orqali AA' to'g'ri chizig'iga parallel qilib o'tkazilgan g to'g'ri chiziqda yotishi shart. Demak, B nuqtaga jinsdosh B' nuqta g to'g'ri chiziq bilan $A'X$ to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasi bo'ladi. Ikkita jinsdosh figuralardan har birini ikkinchisidan parallel proyeksiyaash usuli bilan hosil qilingan deb qarash mumkin.

Pozitsion masala. To'liq va noto'liq tasvirlar.

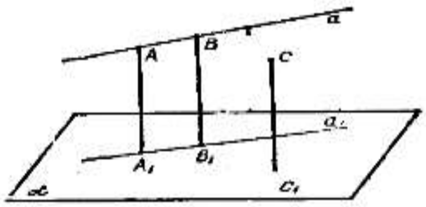
Asosiy tekislik usuli.

Fazoviy figuralarning tasvirini yasash uchun N. F. Chetveruxin tomonidan taklif qilingan asosiy tekislik usuli deb ataluvchi metoddan foydalanamiz. Bu metod aksonometrik proyeksiyalash usulining bir turidir.

Bu metod bilan tanishib chiqaylik. Fazoda birorta α' tekislikni ajratib, uni asosiy tekislik deb ataymiz. Biror yo'nalishni tanlab olib, $A', B', C', \dots$ fazo nuqtalarini α' tekislikka parallel proyeksiyalab, α' tekislikda $A_1', B_1', C_1', \dots$ nuqtalarni hosil qilamiz. Bu proyeksiyalash ichki proyeksiyalash deb ataladi (ichki proyeksiyalash markaziy proyeksiyalash ham bo'lishi mumkin).

Keyin rasm (tasvir) tekisligi deb ataluvchi tekislik olib, $A', B', C', \dots$ proyeksiyalarini, $A'A_1', B'B_1', C'C_1', \dots$ proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlarni biror yo'nalish bo'yicha biror tekislikka parallel proyeksiyalaymiz.

Natijada, rasm tekisligida 8-chizmada ko'rsatilganidek tasvirlarga ega bo'lamiz. Bu yerda α tekislik α' tekislikning, $A, B, C, \dots$ nuqtalar $A', B', C', \dots$ nuqtalarning, $A_1, B_1, C_1, \dots$ nuqtalar $A_1', B_1', C_1', \dots$ nuqtalarning, $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ to'g'ri chiziqlar proyeksiyalovchi $A'A_1', B'B_1', C'C_1', \dots$ to'g'ri chiziqlarning tasvirlaridir.



8-chizma.

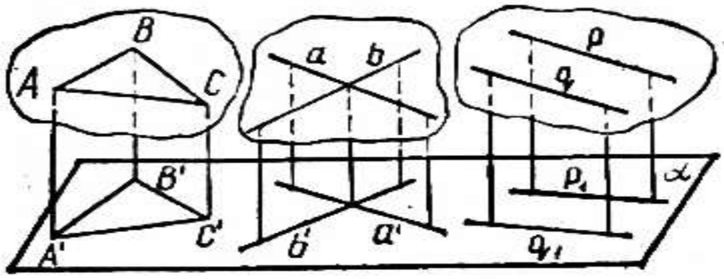
$A_1, B_1, C_1, \dots$ nuqtalarning $A, B, C, \dots$ nuqtalarning ikkinchi proyeksiyalari (tasvirlari) deb aytiladi, ba'zi hollarda $A_1, B_1, C_1, \dots$ nuqtalarni $A, B, C, \dots$ nuqtalarning asoslari deb ham aytiladi.

Agar fazodagi birorta A' nuqtaning rasm tekisligidagi tasviri A va uning ikkinchi proyeksiyasi A_1 berilsa, nuqta rasm tekisligida berilgan deb aytiladi va $A(A_1)$ ko'rinishda yoziladi.

Fazoda ikkita nuqtasi bilan aniqlangan $A'B' = a'$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin.

Agar rasm tekisligida $A(A)$ va $B(B)$ $(AB = a,\ A_1B_1 = a_1)$ lar berilgan bo'lsa, to'g'ri chiziq rasm tekisligida berilgan deb aytiladi va $a(a_1)$ ko'rinishda yoziladi.

Ixtiyoriy tekislik bir to'g'ri chiziqda yotmaydiga uchta A', B', C' nuqtalarning berilishi bilan, yoki kesishadigan a', b' to'g'ri chiziqlarning berilishi bilan, yoki parallel p', q' to'g'ri chiziqlarning berilishi bilan aniqlanadi $(p' \neq q')$ (9-chizma).

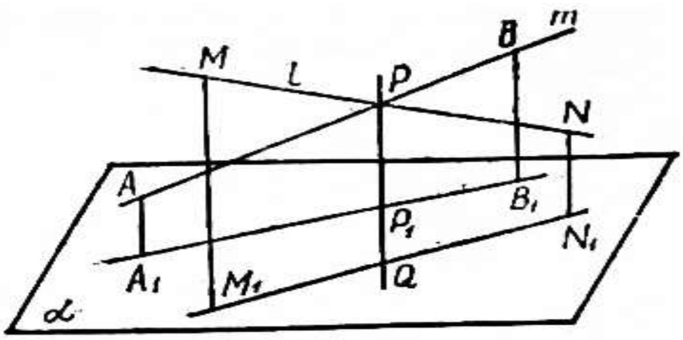


9-chizma.

Agar tekislikni aniqlovchi elementlarning rasm tekisligidagi tasvirlari va ikkinchi proyeksiyalari berilgan bo'lsa, tekislik rasm tekisligida berilgan deyiladi va $\beta(\beta_1)$ ko'rinishda yoziladi.

Agar p' va q' parallel bo'lsa, ularning p va q tasvirlari va ikkinchi proyeksiyalari p_1 va q_1 ham parallel bo'ladi (9-chizma).

Agar l' va m' to'g'ri chiziqlar ayqash bo'lsa, ularning tasviri 10-chizmada ko'rsatilganidek bo'ladi.



10-chizma.

Fazodagi F_1', F_2' figuralarning rasm tekisligida F_1, F_2 tasvirlari berilgan bo'lsin. F_1', F_2' figuralarning kesishish nuqtasining tasvirlarini yasash masalasi pozitsion masala deb aytiladi. Bunday masalalar asosiy tekislik yoki aksonometrik metod yordamida oson yechiladi.

Agar figuraning har bir nuqtasi rasm tekisligida berilgan bo'lsa, u holda bu figura tasvirini *to'liq tasvir* deb aytiladi. Aks holda *noto'liq tasvir* deyiladi.

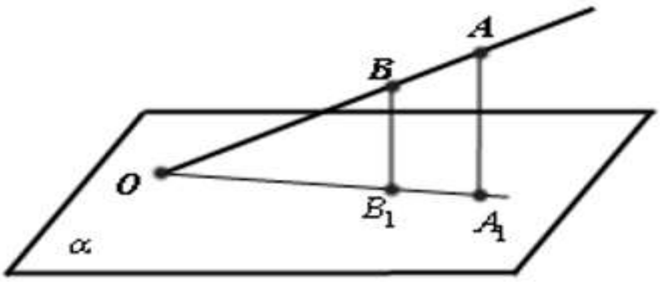
To'liq tasvir ta'rifidan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1) yassi figuralarning tasviri hamma vaqt to'liq;
2) agar tasvirning hamma elementlari aniqlangan bo'lsa, tasvir to'liq bo'ladi;
3) to'liq tasvirning ixtiyoriy ikki tekisligini asosiy tekisliklar deb olish mumkin.

Endi to'liq tasvirlarda pozitsion masalalarni yechishga o'tamiz:

1-masala. AB to'g'ri chiziqning α tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasang.

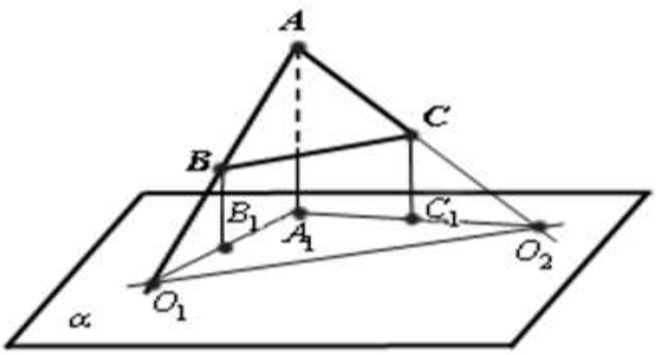
AB to'g'ri chiziq bilan uning A_1B_1 proyeksiyasi kesishgan O nuqta izlangan nuqta bo'ladi (11-chizma).



11-chizma.

2-masala. ABC tekislikning α tekislik bilan kesishgan chizig'ini (ABC tekislikning α tekislikdagi izini) yasang.

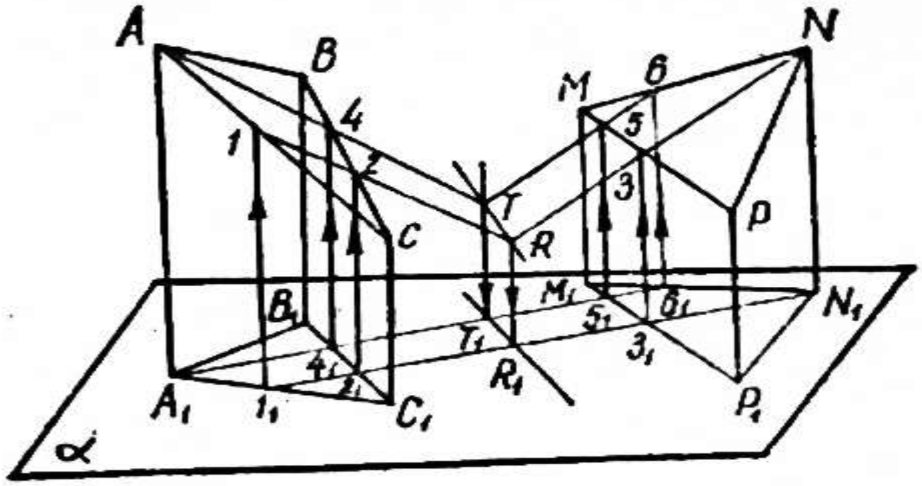
Bu masalani yechish birinchi masalaga keltiriladi. $AB \cap A_1B_1 = O_1$, $AC \cap A_1C_1 = O_2$ nuqtalar yasab, izlangan O_1O_2 to'g'ri chiziqni topamiz (12-chizma).



12-chizma.

3-masala. ABC va MNP tekisliklarning kesishgan chizig'ini yasang.

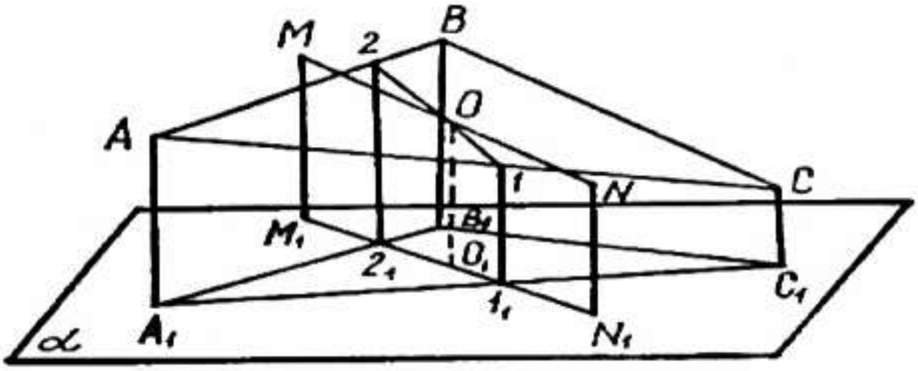
Tekisliklarning kesishgan to'g'ri chizig'ini yasash uchun bu tekisliklarga tegishi ikkita T, R nuqtalarni yasash yetarli. Asosiy tekislikdagi A_1 nuqta orqali B_1C_1, M_1P_1, M_1N_1 to'g'ri chiziqlarni mos ravishda 4_1, 5_1, 6_1 nuqtalarda kesadigan to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu nuqtalar mos ravishda BC, MP, MN to'g'ri chiziqlarda yotuvchi 4, 5, 6 nuqtalarning asoslaridir. $A4$ va 56 to'g'ri chiziqlar T nuqtada kesishadi (chunki u to'g'ri chiziqlar AA_1 va 66_1 to'g'ri chiziqlar yordamida aniqlangan tekislikda yotadi). T nuqta ABC va MNP tekisliklarning har ikkalasida yotadi. Shunga o'xshash R nuqtani topamiz. TR izlangan to'g'ri chiziq (13-chizma).



13-chizma.

4-masala. ABC tekislik bilan MN to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini yasang.

1_1, 2_2 – nuqtalar mos ravishda AB, AC to'g'ri chiziqlarda yotuvchi 1 va 2 nuqtalarning asoslari. MN va $1\ 2$ to'g'ri chiziqlar MM_1, NN_1 to'g'ri chiziqlar bilan aniqlangan proyeksiyalovchi tekislikda yotadi, ular izlangan O nuqtada kesishadi. Uning asosi O_1 nuqta M_1N_1 to'g'ri chiziqda yotadi (14-chizma).



14-chizma.

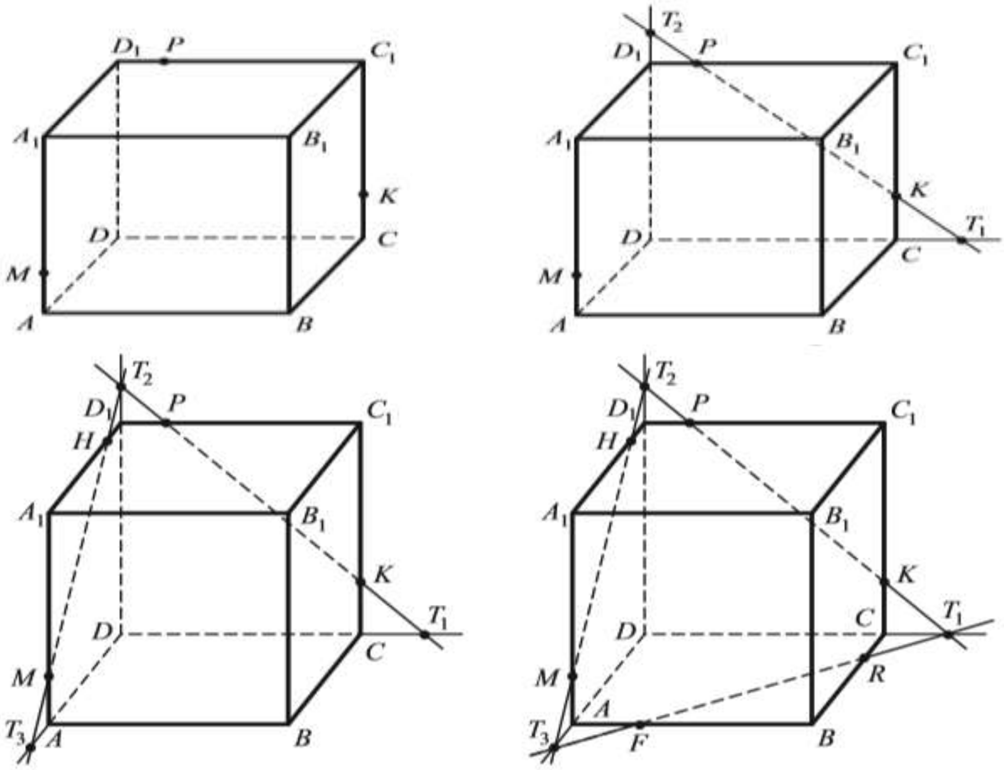
Shunday qilib barcha pozitsion masalalar bir qiymatli yechiladi. Rasm tekisligida fazoviy figura elementlarining tasviri va ikkinchi proyeksiyasining (asosining) berilishi sharti yetarli shart bo'lib qolmasdan, zaruriy shart ham ekanligini ko'rish qiyin emas.

Kubning turli kesimlarini yasash.

Kubning kesimlarini yasashni quyidagi masalalar yordamida ko'rib chiqamiz:

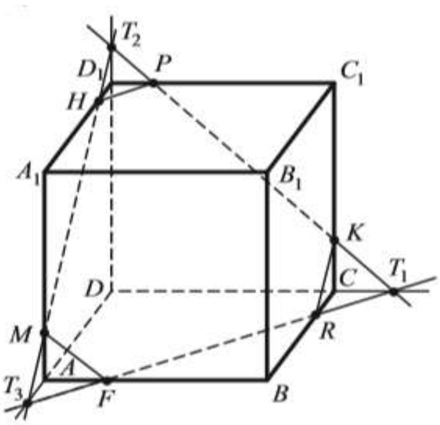
1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$– kub berilgan. Uning qirralarida yotuvchi M, P, K nuqtalaridan o'tuvchi kesimini yasang.

Yechim. Kubning A_1A, D_1C_1, C_1C qirralarida M, P, K nuqtalarni belgilab olamiz. Kubning bitta yog'ida yotgan P va K nuqtalari orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz.



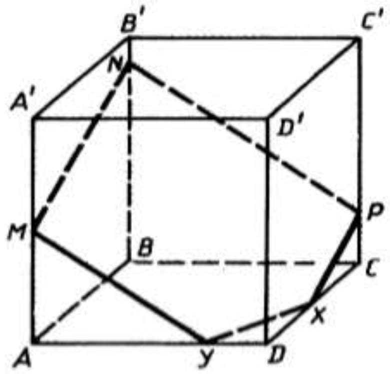
Bu to'g'ri chiziq DC to'g'ri chiziq bilan T_1 nuqtada, DD_1 to'g'ri chiziq bilan T_2 nuqtada kesishadi. M va T_2 nuqtalar bitta tekislikka tegishli nuqtalar, ular orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz. MT_2 to'g'ri chiziq A_1D_1 bilan H nuqtada, AD to'g'ri chiziq bilan T_3 nuqtada kesishadi. T_1 va T_3 nuqtalar bitta tekislikka tegishli nuqtalardir. Ular orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz. T_1T_3 to'g'ri chiziq AB bilan F nuqtada, BC bilan R nuqtada kesishadi. KR, FM va HP nuqtalarni birlashtirsak biz izlagan $MHPKRF$ kesim hosil bo'ladi. Yuqorida bajargan ishlarimiz ketma-ketligini quyidagicha yozish mumkin:

1. PK;
2. $PK \cap DC = T_1$;
3. $PK \cap DD_1 = T_2$;
4. T_2M;
5. $T_2M \cap A_1D_1 = H$;
6. $T_2M \cap AD = T_3$;
7. T_1T_3;
8. $T_1T_3 \cap AB = F$;
9. $T_1T_3 \cap BC = R$;
10. KR;
11. FM;
12. HP;
13. $MHPKRF$.



2. $ABCDA'B'C'D'$ kubning AA', BB' va CC' yon qirralarida yotuvchi MNP nuqtalari berilgan. Kubning MNP tekislik bilan kesishishi natijasida hosil bo'ladigan kesimni yasang.

Yechim.
1. MN;
2. $MN \cap AB = T_1$;
3. NP;
4. $NP \cap BC = T_2$;
5. T_1T_2;
6. $T_1T_2 \cap AD = Y$;
7. $T_1T_2 \cap DC = X$;
8. MY;
9. PX;
10. $MNPXY$.

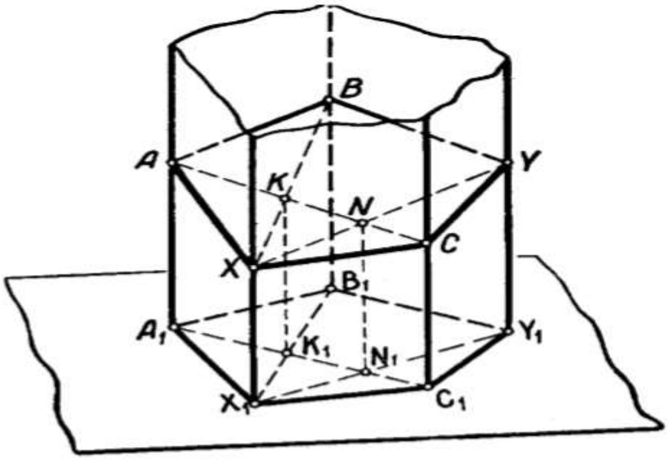


Prizmalarda kesimlar yasash.

Prizmalarning turli kesimlarini yasashni quyidagi masalalar yordamida ko'rib chiqamiz:

1. Besh burchakli prizma bilan prizma qirralarida yotuvchi A, B, C nuqtalar orqali aniqlangan tekislik kesimini yasang.

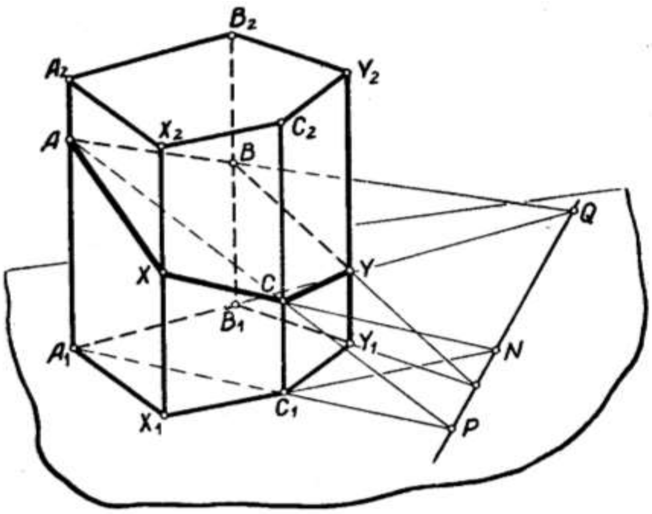
Birinchi usul. Asosiy tekislik sifatida prizma asosini, ichki proyeksiyalash deb prizma qirralariga parallel proyeksiyalashni olsak, shu bilan tasvirning to'liqligi ta'minlanadi. Kesimni yasash uchun ABC tekislik bilan prizma ikki qirrasining kesishgan X, Y nuqtalarini toppish kifoya (36-chizma). Bu nuqtalarning ikkinchi proyeksiyalari (asosari) X_1, Y_1 nuqtalardan iborat. A_1C_1, B_1X_1 to'g'ri chiziqlar K_1 nuqtada kesishadi. K_1 nuqtadan proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq o'tkazsak, bu to'g'ri chiziq ABC tekislikni K nuqtada kesadi, BK to'g'ri chiziq prizma qirrasi bilan izlanagan X nuqtada kesishadi. Shu usul bilan N nuqtani yasaymiz (chizmada ko'rsatilgan). XN to'g'ri chiziq prizma qirrasini izlangan Y nuqtada kesadi. Izlangan kesim – beshburchakdir.



Ikkinchi usul. Kesuvchi tekislikning asos tekisligidagi izidan (ya'ni kesishish chizig'idan) faoydalanib masalani yechish, ko'p hollarda kesim yasashni osonlashtiradi.

Ikkinchi masaladan foydalanib, kesuvchi tekislikning PQ izini topamiz (37-chizma). Prizmaning $X_1X_2C_2C_1$ yog'ining asos tekislikdagi X_1C_1 izi PQ to'g'ri chiziq bilan N nuqtada kesishadi. NC to'g'ri chiziq X_1X_2 qirra bilan izlangan X nuqtada kesishadi. Shunga o'xshash Y nuqtani ham topamiz.

Agar kesuvchi tekislikni aniqlovchi nuqtalarni prizma yoqlarida olsak, kesimni yasash ko'rib o'tilgan usullardan farq qilmaydi.



Nazorat savollari

1. Yasashga doir masalalarni yechishda qanday bosqichlar mavjud?
2. Sirkul va chizg`ich yordamida yasash aksiomalarini ayting.
3. Bir kateti va ikkinchi katetiga o`tkazilgan medianasi berilgan to`g`ri

burchakli uchburchak yasang.

4. Uch tomoni berilgan uchburchak yasang.

5. Parallelogramni uning bir uchidan chiquvchi ikki to`g`ri chiziq bilan uchiga tengdosh bo`lakka bo`ling.

6. Masalada berilgan elementlarni ixtiyoriy tanlab olganda ham masala yechimga ega bo`ladimi, agar berilgan elementlar ixtiyoriy tanlab olinganda masala yechimga ega bo`lmasa, u holda qanqanday tanlab olganda masala yechimga ega bo`ladi, qanday hollarda yechimga ega bo`lmaydi?

7. Berilgan elementlar imkoniyati boricha tanlab olinganda masala nechta yechimga ega bo`ladi?

8. Yasashga doir masalalarni yechishdagi bosqichlari haqida ma'lumot bering

9. Yasashga doir masalalarni to`la yechish uchun qaysi savollarni oydinlashtirish kerak?

10. Konstruktiv masalalarni yechishning dastlabki tayyorlov bosqichi qaysi bosqich?

11. To'g'irlash metodining yasash metodidagi afzalliklari nimadan iborat?

12. To'g'irlash metodi qo'llab yechiladigan masalaga misol keltiring

13. Kubning turli kesimini yasashga doir masalani sharhlang.

14. Prizmaning turli kesimini yasashga doir masalani sharhlang.

15. Besh burchakli prizma bilan prizma qirralarida yotuvchi A, B, C nuqtalar orqali aniqlangan tekislik kesimini yasang.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский, А. В. Ушаков Геометрия (2-часть) Учебное пособие для вузов. - М.: "БИНОМ. Лаборатория знаний", 2015.

2. N.D.Dadajonov, R.Yunusmetov, T.Abdullaev, Geometriya 2-qism. Toshkent «O'qituvchi» 1996 y.

3. X.X.Nazarov, X.O.Ochilova, Ye.G.Podgornova. Geometriyadan masalalar to'plami. 2 qism. Toshkent «O'qituvchi» 1993, 1997y.

4. A.Y.Narmanov, A.S.SHaripov Geometriya asoslari. T. Universitet, 2004 y.

IV.AMALIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

1-AMALIY MASHG'ULOT: Predikatlar algebrasining tatbiqlari.

Reja:

1.Mulohazalar algebrasi formulasining turini aniqlash.
2.Formulalarni teng kuchli almashtirishlar.
3.Predikatlarni kvantorlar bilan bog'lash.
4.Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida yozish.

Ishning maqsadi: oliy ta'lim muassasalarida matematika, matematika o'qitish metodikasi fanlarini o'qituvchi professor-o'qituvchilarining mavzuga oid nazariy bilimlarga asoslangan matematik kompetensiyalarini rivojlantirish.

Amaliy mashg'ulotning o'tkazilishi: har bir tinglovchi quyida taklif etilgan namuna bilan tanishgan holda mustaqil ta'lim misollsrini yechadi.

Amaliy ishni bajarish namunasi

1-misol. Quyidagi formuladan qavslar o'rnini almashtirish yordamida turli formulalar hosil qiling: $\rceil P \Leftrightarrow \rceil Q \vee R \wedge Q$.

Yechish:

1. $(\rceil P \Leftrightarrow \rceil Q) \vee (R \wedge Q)$.
2. $(\rceil P \Leftrightarrow (\rceil Q \vee R)) \wedge Q$.
3. $(\rceil P \Leftrightarrow \rceil (Q \vee R)) \wedge Q$.
4. $\rceil (P \Leftrightarrow (\rceil Q \vee R)) \wedge Q$.
5. $\rceil ((P \Leftrightarrow \rceil Q) \vee R) \wedge Q$.
6. $\rceil ((P \Leftrightarrow (\rceil Q \vee R)) \wedge Q)$.
7. $\rceil (P \Leftrightarrow ((\rceil Q \vee R) \wedge Q))$.
8. $\rceil (P \Leftrightarrow (\rceil Q \vee (R \wedge Q)))$.
9. $\rceil (P \Leftrightarrow \rceil (Q \vee (R \wedge Q)))$.
10. $\rceil (P \Leftrightarrow \rceil ((Q \vee R) \wedge Q))$.
11. $\rceil ((P \Leftrightarrow \rceil Q) \vee (R \wedge Q))$.
12. $\rceil ((P \Leftrightarrow \rceil (Q \vee R)) \wedge Q)$.
13. $\rceil (P \Leftrightarrow (\rceil (Q \vee R) \wedge Q))$.
14. $\rceil (P \Leftrightarrow \rceil Q) \vee (R \wedge Q)$.
15. $\rceil P \Leftrightarrow ((\rceil Q \vee R) \wedge Q)$.
16. $\rceil P \Leftrightarrow (\rceil (Q \vee R) \wedge Q)$.
17. $\rceil (P \Leftrightarrow \rceil (Q \vee R)) \wedge Q$.

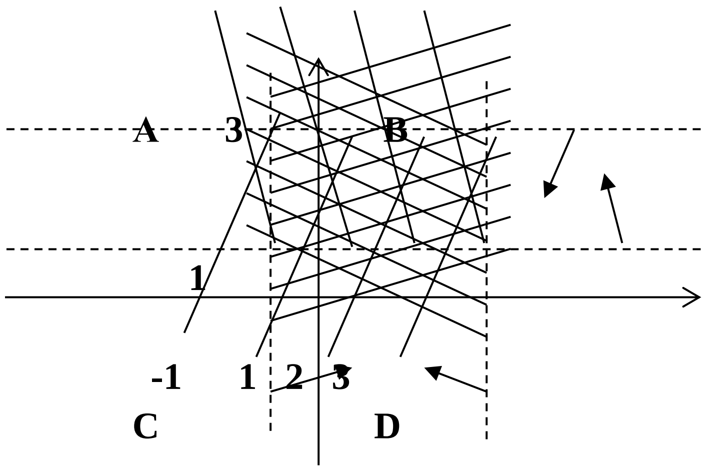
2-misol. $A \wedge B \rightarrow A \wedge C$ – formulaning rostlik jadvalini tuzaylik. Bu formulada faqat A, B, C mulohazalar qatnashib, ularning 8 ta qiymatlari tizimiga formulaning mos qiymatlari quyidagi jadvalda ko'rsatilgan:

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$A \wedge B \rightarrow A \wedge C$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1

0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1

3-misol Dekart koordinatalar tekisligida $x<3 \wedge x>-1 \wedge y < 3 \wedge y >1$ predikatning rostlik sohasini tasvirlang.

Yechish. Berilgan ikki o'rinli predikat to'rtta bir o'rinli predikatlarning kon'yunksiyasidan tashkil topgan. Kon'yunksiya amalining ta'rifidan, predikatlardagi ikkala o'zgaruvchi o'rniga qiymatlar berganimizda, ularning barchasini rost mulohazaga aylantiruvchi x va u larning qiymatlari berilgan predikatning rostlik sohasi bo'ladi. Buning uchun har bir predikatning rostlik sohalarini aniqlab, ularning kesishmasini topamiz:



hosil bo'lgan chizmadagi ABCD to'rtburchakning ichki nuqtalari berilgan predikatning rostlik sohasi bo'ladi.

4-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan «x⁝y», ya'ni, «x natural son y natural songa qoldiqsiz bo'linadi» degan predikatni R (x, y) - deb belgilaylik. U holda ∀xR (x, y) - ifoda ixtiyoriy natual son y natural songa bo'linadi, degan bir o'zgaruvchili predikatni bildiradi. Agar y=1 bo'lsa, ∀xR(x,1) = 1, y = 2, 3, … bo'lsa, ∀xR(x,2) = 0, ∀xR(x,3) = 0, … bo'ladi.

5-misol. R (x, y)- butun sonlar to'plami Z da aniqlangan «x+y>0» mazmunidagi predikat bo'lsin, u holda

∀x∀yR (x, y)- «ixtiyoriy ikkita butun son yig'inidisi musbat bo'ladi» - yolg'on mulohaza;

∀x∃yR (x, y)-«har qanday butun son x uchun shunday u butun son mavjud bo'lib ulraning yig'indisi musbat» - rost mulohaza;

$\exists x \forall y R(x, y)$-«shunday x butun son mavjud bo'lib, uning ixtiyoriy u butun son bilan yig'idisi musbat» - yolg'on mulohaza;

$\exists x \exists y R(x, y)$-«shunday x va y butun sonlar mavjud-ki, ularning yig'indisi musbat» - rost mulohaza bo'ladi.

6-misol. $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$ to'plamda quyidagi predikatlar berilgan:

A(x): «(x: 5)»; B(x): «x – juft son»; C(x): «x – tub son»; D(x): «x 3 ga karrali». $A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x) \vee D(x)$ predikatning rostlik sohasini toping.

Yechish. K orqali M to'plamning $A(x) \wedge B(x)$ predikatni rost,

$C(x) \vee D(x)$ predikatni yolg'on mulohazaga aylantiradigan elementlarini belgilab olamiz. Mantiq amallarining ta'rifiga ko'ra berilgan predikatning rostlik sohasi M to'plamdan K to'plamni ayirishdan hosil bo'lgan to'plamdan iborat. K to'plamni aniqlaymiz:

1) $A(x) \wedge B(x)$ predikat rost mulohazaga aylanadigan qiymatlar to'plami A(x) va B(x) predikatlarni bir vaqtda rost mulohazaga aylantiradigan M to'plamning elementlari, ya'ni $A_1=\{5,10,15,20\}$ va $B_1=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$ to'plamlarning kesishmasidan iborat. Bu to'plamni M_1 orqali belgilaymiz:

$M_1 = A_1 \cap B_1 = \{10,20\}$.

2)$C(x) \vee D(x)$ predikat C(x) va D(x) predikatlar bir vaqtda yolg'on mulohazaga aylanadigan M to'plamning qiymatlarida yolg'on mulohaza bo'ladi. U $S_1=\{1,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$ va $D_1=\{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}$

to'plamlarning kesishmasidan iborat $M_2 = \{1,4,8,10,14,16,20\}$ to'plamdan iborat.

Demak, berilgan $A(x) \wedge B(x) \Rightarrow C(x) \vee D(x)$ predikatning rostlik sohasi $M_1 \cap M_2 = \{10,20\}$ to'plamdan iborat.

Mustaqil ish topshiriqlari

1.Formulaning turini aniqlang :

1.1. $\left(\left((A \Leftrightarrow B) \wedge (\rceil C)\right) \Rightarrow \left(\left((A \vee B) \Rightarrow A\right) \Rightarrow (\rceil C)\right)\right)$.

1.2. $\left(\left((A \vee B) \vee (\rceil C)\right) \wedge \left((\rceil A) \vee \left((\rceil B) \vee C\right)\right)\right)$.

2.Berilgan formulalar tengkuchi ekanligini isbotlang:

1.1. $A \wedge (B \wedge (\rceil A \vee \rceil B)) \equiv \rceil(\rceil(A \vee B) \Rightarrow \rceil(A \wedge B))$

1.2. $(X \vee Y) \wedge (X \vee \rceil Y) \equiv X$.

2. Dekart koordinatalar tekisigida predikatning rostlik sohasini tasvirlang:

2.1. $((x > 2) \wedge (y \geq 1)) \wedge ((x < -1) \wedge (y < -2))$.

2.2. $x + 3y = 3 \wedge ((x < -1) \wedge (y < -2))$.

3. M={1,2, . . . ,20} to'plamda quyidagi predikatlar berilgan: A(x):« $\rceil$(x:5)»; B(x): «x – juft son»; C(x): «x – tub son»; D(x): «x 3 ga karrali». Quyidagi predikatning rostlik sohasini toping:

3.1. $B(x) \vee \rceil D(x) \wedge A(x)$.

3.2. $\rceil B(x) \vee D(x) \Leftrightarrow A(x) \wedge C(x)$.

4. Quyidagi mulohazalarni predikatlar algebrasi tilida ifodalang:

4.1. Agar berilgan to'rtburchak kvadrat bo'lsa, u romb bo'ladi.

4.2. «12 ga bo'linuvchi har qanday natural son 2, 4 va 6 ga bo'linadi».

2-AMALIY MASHG'ULOT: Matematikaning turli bo'limlarida algebraik tizimlarning qo'llanilishi

Reja:

1. n - ar amallar. Algebra.
2. Gruppa. Halqa.
3. Jism. Maydon.
4. Algebraik sistemalar.
5. Matematikaning turli bo'limlarida algebraik tizimlarga misollar.

Ishning maqsadi: oliy ta'lim muassasalarida matematika, matematika o'qitish metodikasi fanlarini o'qituvchi professor-o'qituvchilarining mavzuga oid nazariy bilimlarga asoslangan matematik kompetensiyalarini rivojlantirish.

Amaliy mashg'ulotning o'tkazilishi: har bir tinglovchi quyida taklif etilgan namuna bilan tanishgan holda mustaqil ta'lim misollsrini yechadi.

Amaliy ishni bajarish namunasi

Misol. $K=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in R\}$ to'plam maydon tashkil etishini isbotlang.

Yechish. Maydon ta'rifiga ko'ra berilgan to'plamda quyidagi shartlar bajarilishini tekshiramiz:

1) $\forall(z_1,z_2\in K),\exists!(z\in K)\ (z_1+z_2=z)$;
2) $\forall(z_1,z_2\in K)\ (z_1+z_2=z_2+z_1)$;
3) $\forall(z,z_1,z_2\in K),\ ((z+z_1)+z_2)=z+(z_1+z_2))$;
4) $\forall(z\in K),\exists!(e\in K)\ (z+e=z)$;
5) $\forall(z\in K),\exists\ (z'\in K)\ (z+z'=e)$;
6) $\forall(z_1,z_2\in K),\exists!(z\in K)\ (z_1\ \text{™} z_2=z)$;
7) $\forall(z_1,z_2\in K)\ (z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1)$;
8) $\forall(z,z_1,z_2\in K),\ ((z\cdot z_1)\cdot z_2)=z\cdot(z_1\cdot z_2))$;
9) $\forall(z\in K),\exists!(e\in K)\ (z\cdot e=z)$;

10) $\forall(z\in K), \exists\ (z'\in K)\ (z\cdot z'=e)$;

1. To'plamning ixtiyoriy $z_1=a_1+b_1\sqrt{p}$; $z_2=a_2+b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $z_1+z_2=(a_1+b_1\sqrt{p})+(a_2+b_2\sqrt{p})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{p}$ tenglik bilan aniqlanuvchi shu to'plamning $a\ \ +b\ \ \sqrt{p}=z$ elementi mavjud. Demak, K to'plamda qo'shish amali aniqlangan. <K;+> - additiv gruppoid.

2. To'plamning ixtiyoriy $z_1=a_1+b_1\sqrt{p}, z_2=a_2+b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{p})=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{p}=z_2+z_1$. Demak, qo'shish amali kommutativ va <K;+> - additiv abel gruppoid.

3. To'plamning ixtiyoriy $z=a+b\sqrt{p}, z_1=a_1+b_1\sqrt{p}, z_2=a_2+b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $(z+z_1)+z_2=((a+a_1)+(b\ +b_1)\sqrt{p})+(a_2+b_2\sqrt{p})=$
$=((a+a_1)+a_2+((b+b_1)+b_2)\sqrt{p})=a+(a_1+a_2)+(b+(b_1+b_2))\sqrt{p}=$

$=z+(z_1+z_2)$. Demak, qo'shish amali assosiativ va <K;+> - additiv abel yarimgruppa.

4. To'plamning ixtiyoriy $z=a+b\sqrt{p}$ elementi uchun $z+e=z$ tenglikni

qanoatlantiruvchi elementni aniqlaymiz: $(a+b\sqrt{p})+(x+y\sqrt{p})=a+b\sqrt{p}$ tenglikdan $(a+x)+(b+y)\sqrt{p}=a+b\sqrt{p}$ tenglikni va undan $\begin{cases} a+x=a \\ b+y=b \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uning echimi $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ bo'lib, bundan $e=0+0\sqrt{p}=0$ hosil bo'ladi. Demak, K to'plamda qo'shish amaliga nisbatan neytral element mavjud ekan. <K;+> - additiv abel monoidni tashkil etdi..

5. To'plamning ixtiyoriy $z=a+b\sqrt{p}$ elementi uchun $z+z'=e$ tenglikni qanoatlantiruvchi elementni aniqlaymiz: $(a+b\sqrt{p})+(x+y\sqrt{p})=0+0\sqrt{p}$ tenglikdan $(a+x)+(b+y)\sqrt{p}=0+0\sqrt{p}$ tenglikni va undan $\begin{cases} a+x=0 \\ b+y=0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uning echimi $\begin{cases} x=-a \\ y=-b \end{cases}$ bo'lib, bundan $z'=-a+(-b)\sqrt{p}=-(a+b\sqrt{p})$ hosil bo'ladi. Demak, K to'plamda qo'shish amaliga nisbatan simmetrik element mavjud ekan. <K;+> - additiv abel gruppani tashkil etdi.

6. To'plamning ixtiyoriy $z_1=a_1+b_1\sqrt{p}$; $z_2=a_2+b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $z_1\cdot z_2=(a_1+b_1\sqrt{p})\cdot(a_2+b_2\sqrt{p})=(a_1\cdot a_2+pb_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{p}$ tenglik

bilan aniqlanuvchi shu to'plamning $a + b\sqrt{p} = z$ elementi mavjud. Demak, K to'plamda ko'paytirish amali aniqlangan. <K;·> - multiplikativ gruppoid.

7. To'plamning ixtiyoriy $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ elementlari uchun $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 + pb_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p}) = (a_2a_1 + pb_2b_1) +$
$+ (a_2b_1 + b_2a_1)\sqrt{p} = z_2 \cdot z_1$. Demak, ko'paytirish amali kommutativ va <K;·> - multiplikativ abel gruppoid.

1. To'plamning ixtiyoriy $z = a + b\sqrt{p}, z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}, z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$
elementlari uchun $(z \cdot z_1) \cdot z_2 = ((aa_1 + pbb_1) + (ab_1 + ba_1)\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p})$
=
=
$((aa_1)a_2 + p(bb_1)a_2 + p(ab_1)b_2 + p(ba_1)b_2) + ((aa_1)b_2 + p(bb_1)b_2 + (ab_1)a_2 +$
$+ (ba_1)a_2)\sqrt{p} = (a(a_1a_2) + pb(b_1a_2) + pa(b_1b_2) + pb(a_1b_2)) +$
$+ (a(a_1b_2) + pb(b_1b_2) + a(b_1a_2) + b(a_1a_2))\sqrt{p} = (a + b\sqrt{p}) \cdot$
$\cdot ((a_1a_2 + pb_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p}) = (a + b\sqrt{p})((a_1 + b_1\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p})) =$
$= z \cdot (z_1 \cdot z_2)$. Demak, ko'paytirish amali assosiativ va <K;·> - multiplikativ abel yarimgruppa.

9. To'plamning ixtiyoriy $z = a + b\sqrt{p}$ elementi uchun $z \cdot e = z$ tenglikni qanoatlantiruvchi elementni aniqlaymiz: $(a + b\sqrt{p})(x + y\sqrt{p}) = a + b\sqrt{p}$ tenglikdan $(ax + pby) + (ay + bx)\sqrt{p} = a + b\sqrt{p}$ tenglikni va undan $\begin{cases} ax + pby = a \\ ay + bx = b \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uning echimi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ bo'lib, bundan $e = 1 + 0\sqrt{p} = 1$ hosil bo'ladi. Demak, K to'plamda ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element mavjud ekan. <K;·> - multiplikativ abel monoidni tashkil etdi..

10. To'plamning ixtiyoriy noldan farqli $z = a + b\sqrt{p}$ elementi uchun $z \cdot z' = e$ tenglikni qanoatlantiruvchi elementni aniqlaymiz: $(a + b\sqrt{p})(x + y\sqrt{p}) = 1 + 0\sqrt{p}$ tenglikdan $(ax + pby) + (ay + bx)\sqrt{p} = 1 + 0\sqrt{p}$ tenglikni va undan $\begin{cases} ax + pby = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Uning echimi $\begin{cases} x = \dfrac{a}{a^2 - pb^2} \\ y = \dfrac{-b}{a^2 - pb^2} \end{cases}$ bo'lib, bundan

$z' = \frac{a}{a^2 - pb^2} + \frac{-b}{a^2 - pb^2}\sqrt{p}$ hosil bo'ladi. Demak, K to'plamda ko'paytirish amaliga nisbatan simmetrik element mavjud ekan.

$<K;\cdot,^{-1},1>$ - multiplikativ abel gruppani tashkil etdi.

K to'plam qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan abel gruppa shartlariga bo'ysunganligi uchun $<K;+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ - maydon bo'ladi.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. M = {1, 2, . . . , 20} to'plamda berilgan quyidagi binar munosabatlarning xossalarini tekshiring va grafini chizing:

1.1. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \vdots y \}$.

1.2. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \leq y \}$.

2. Quyidagi to'plamlarni multiplikativ gruppa tashkil etishini isbotlang:

2.1. $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 > 0 \}$

2.2. $G = \{7^z \mid z \in Z \}$.

3. *Quyidagi to'plamlarni halqa tashkil etishini isbotlang:*

3.1. $K = \{\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in 3Z \}$.

3.2. $G = \{a + \sqrt{2}bi \mid a, b \in R \}$.

4. *Quyidagi to'plamlarni maydon tashkil etishini isbotlang*

4.1. $F = \{\begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in R \}$

4.2. $F = Z_5$.

3-AMALIY MASHG'ULOT: Algebralar gomomorfizmi va uning turlari

Reja:

1. Akslantirishlar va ular kompozisiyasi.
2. In'ektiv, syur'ektiv, teskarilanuvchi akslantirishlar.
3. Algebralar gomomorfizmi. Algebraik sistemalar gomomorfizmi

Ishning maqsadi: oliy ta'lim muassasalarida matematika, matematika o'qitish metodikasi fanlarini o'qituvchi professor-o'qituvchilarining mavzuga oid nazariy bilimlarga asoslangan matematik kompetensiyalarini rivojlantirish.

Amaliy mashg'ulotning o'tkazilishi: har bir tinglovchi quyida taklif etilgan namuna bilan tanishgan holda mustaqil ta'lim misollsrini yechadi.

Amaliy ishni bajarish namunasi

1- misol. $M = \{1, 2, . . . , 10\}$ to'plamda berilgan

$R=\{\langle x,y\rangle \mid x, y \in M \wedge x = y -1\}$ binar munosabatning xossalarini tekshiring va grafini chizing.

Yechish. Berilgan binar munosabatni qanday xossalarga bo'ysunishini tekshiramiz:

1) refleksivlik xossasi. $\forall(x\in M)$ $(x = x-1)$ yolg'on, chunki, masalan M to'plamning 2 elementi uchun $2 \neq 2 - 1$. Demak, R- refleksiv emas.

2) Antirefleksivlik xossasi. $\forall(x\in M)$ $\rceil(x = x-1)$ rost. Demak, R- antirefleksiv.

3) Simmetriklik xossasi. $\forall(x,y\in M)$ $(x = y -1 \Rightarrow y = x-1)$ yolg'on. Chunki, masalan $3, 4 \in M$ uchun $3 = 4-1 \Rightarrow 4 = 3-1$ da birinchi mulohaza rost va ikkinchi mulohaza yolg'on bo'lganligi uchun implikasiya yolg'on. Demak, R- simmetrik emas.

4) Antisimmetriklik xossasi. $\forall(x,y\in M)$ $(x = y-1 \wedge y = x -1 \Rightarrow x = y)$ rost. Chunki, M to'plamning har qanday x, u elementlari uchun $x = y-1$ va $y = x-1$ mulohazalar bir vaqtda rost bo'la olmaydi. Bundan ularning kon'yunksiyasi berilgan to'plam elementlari uchun yolg'on. Birinchi mulohaza yolg'onbo'lgan implikasiya rost ekanligini e'tiborga olsak, R- antisimmetrik binar munosabat ekanligi kelib chiqadi.

5) Tranzitivlik xossasi.

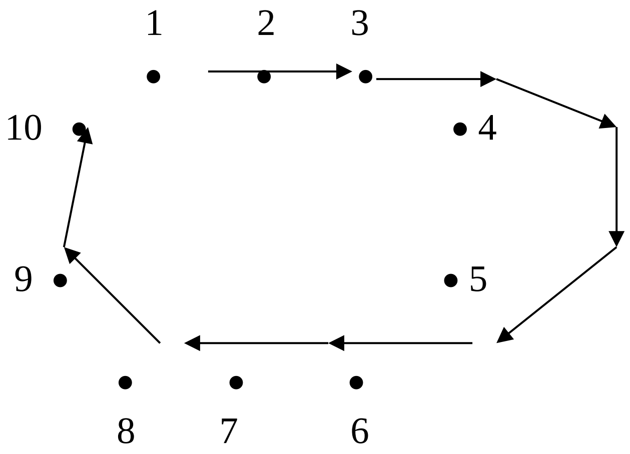
$\forall(x,y,z \in M)$ $(x = y - 1 \wedge y = z - 1 \Rightarrow x = z - 1)$ yolg'onmulohaza. Chunki, masalan M to'plamning 3,4,5 elementlari uchun

$(3 = 4-1) \wedge (4 = 5 -1) \Rightarrow (3 = 5-1)$ implikasiyada kon'yunksiya rost, lekin implikasiya natijasi yolg'on mulohaza. Implikasiya ta'rifiga ko'ra, $(3 = 4-1) \wedge (4 = 5 -1) \Rightarrow (3 = 5-1)$ mulohaza yolg'on. Demak, R- tranzitiv emas.

6)R-ekvivalentlik munosabati bo'la olmaydi, chunki refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik xossalariga ega emas.

7)R-tartib munosabati bo'la olmaydi, chunki R antisimmetrik bo'lgani bilan tranzitiv emas.

Endi berilgan binar munosabatning grafini chizamiz. Buning uchun M to'plamning elementlariga tekislikda 10 ta nuqtani mos qo'yamiz. Ular grafning uchlari bo'ladi. R munosabatda bo'lgan elementlar uchun ularni ifodalovchi graf uchlarini yo'naltirilgan kesmalar – graf qirralari bilan tutashtiramiz. M to'plamning hech bir elementi o'zi – o'zi bilan R munosabatda bo'lmagani uchun graf uchlariga halqalar chizmaymiz. R simmetrik munosabat bo'lmaganligi uchun qirralar yo'naltirilgan (orientirlangan) bo'ladi:



Misol. $K=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in R\}$ va $P=\{a+b\sqrt{q}\mid a,b\in R\}$ to'plamlar tashkil etgan maydonlar orasida izomorfizm o'rnating.

Yechish. Algebralar izomorfizmi ta'rifiga ko'ra berilgan <K;+,·,-,$^{-1}$,0,1> maydon elementlarini <R;+,·,-,$^{-1}$,0,1> maydon elementlariga akslantiradigan akslantirish asosiy amallarni saqlashi, in'ektiv va syur'ektiv bo'lishi kerak.

$f:K\to P$ akslantirishni $f(a+b\sqrt{p})=a+b\sqrt{q}$ ko'rinishda olamiz.

K to'plamning ixtiyoriy $z_1=a_1+b_1\sqrt{p}, z_2=a_2+b_2\sqrt{p}$ elementlariga R to'plamning $t_1=a_1+b_1\sqrt{q}, t_2=a_2+b_2\sqrt{q}$ elementlari mos keladi. Tanlab olingan akslantirish izomorfizm ekanligini isbotlaymiz:

1) $\forall z_1,z_2\in K$ uchun $f(z_1+z_2)=f((a_1+b_1\sqrt{p})+(a_2+b_2\sqrt{p}))=$

$=f((a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{p}))=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{q}=(a_1+b_1\sqrt{q})+$

$+(a_2+b_2\sqrt{q})=f(a_1+b_1\sqrt{p})+f(a_2+b_2\sqrt{p})$. Demak, qo'shish amali akslantirish natijasida saqlanadi.

2) $\forall z_1,z_2\in K$ uchun $f(z_1\cdot z_2)=f((a_1+b_1\sqrt{p})\cdot(a_2+b_2\sqrt{p}))=$

$=f((a_1a_2+pb_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{p}))=(a_1a_2+qb_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{q}=$

$=(a_1+b_1\sqrt{q})+(a_2+b_2\sqrt{q})=f(a_1+b_1\sqrt{p})\cdot f(a_2+b_2\sqrt{p})$.

Demak, ko'paytirish amali akslantirish natijasida saqlanadi.

3) $f(0)=f(z+(-z))=f((a+b\sqrt{p})+(-a-b\sqrt{p}))=$

$f((a-a)+(b-b)\sqrt{p}))=(a-a)+(b-b)\sqrt{q}=(a+b\sqrt{q})+$

$(-a-b\sqrt{q})=f(a+b\sqrt{p})+(-f(a+b\sqrt{p}))=0$. Demak, qo'shish amaliga nisbatan neytral element neytral elementga, simmetrik element simmetrik elementga o'tdi.

4) $f(1)=f(z\cdot z^{-1})=f((a+b\sqrt{p})\cdot(\frac{a}{a^2-pb^2}+\frac{-b}{a^2-pb^2}\sqrt{p}))=$

$$=1=(a+b\sqrt{q})\cdot(\frac{a}{a^2-qb^2}+\frac{-b}{a^2-qb^2}\sqrt{q})=(a+b\sqrt{q})\cdot(a+b\sqrt{q})^{-1}=$$

$+f(z)\cdot f^{-1}(z)=1$. Demak, ko'paytirish amaliga nisbatan neytral element neytral elementga, simmetrik element simmetrik elementga o'tdi. Aniqlangan akslantirishning gomomorfizm ekanligini isbotladik.

5) $\forall z_1, z_2 \in K$ lar uchun $f(z_1)=f(z_2)$ ekanligidan $a_1+b_1\sqrt{q}=a_2+b_2\sqrt{q}$ kelib chiqadi. Bu shart $a_1=a_2, b_1=b_2$ shartlar bajarilganda to'g'ri. Bundan esa, $a_1+b_1\sqrt{p}=a_2+b_2\sqrt{p}$ ni hosil qilamiz. Demak, bir-biriga teng tasvirlarga bir-biriga teng asllar mos keldi. Tekshirilayotgan akslantirish in'ektiv akslantirish ekan.

6) R To'plamdan olingan har qanday $f(z)=a+b\sqrt{q}$ elementga $a+b\sqrt{p}\in K$ element mos keladi. Demak, akslantirish syur'ektiv ekan.

Tekshirilgan xossalarga ko'ra, $f:<\mathrm{K},+,\cdot,-,^{-1},0,1>\to<\mathrm{P},+,\cdot,-,^{-1},0,1>$ akslantirish izomorfizm.

Mustaqil ish topshiriqlari

1. *M = {1, 2, . . . , 20} to'plamda berilgan quyidagi binar munosabatlarning xossalarini tekshiring va grafini chizing:*

1.1. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x^2 + y^2 = 10 \}$.

2.1. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge (x - y) \vdots 3 \}$.

2.2. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge (x - y) \vdots 4 \}$.

2.3. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \le y + 2 \}$.

2.4. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \le y + 3 \}$.

2.5. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x + y = 15 \}$.

2.6. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \le y + 1 \}$.

2.7. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge |x| = |y| \}$.

2.8. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \vdots y \}$.

2.9. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x < y \}$.

2.10. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \le y \}$.

2.11. $R = \{ <x,y> \mid x,y \in M \wedge x \neq y \}$.

2. *Quyidagi algebralar orasida izomorfizm o'rnating:*

2.1. $< \{ 3^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < \{ 5^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} >$

2.2. $< Z ; +, -, 0 > \wedge < 2Z ; +, -, \mathbf{0} >$.

2.3. $< \{a + bi \mid a, b \in R \wedge i^2 = -1\}; +, -, 0 > \wedge < R^2; +, -, \mathbf{0} >$.

2.4. $< Z ; +, -, 0 > \wedge < Z_2, +, -, \mathbf{0} >$

2.5. $< Z^- ; +, > \wedge < Z^+ ; + >$.

2.6. $< \{ 2^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} > \wedge < \{ 3^z \mid z \in Z \};\ \bullet, ^{-1}, \mathbf{1} >$.

2.7. $< \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in Z \}; +, -, \mathbf{0} > \wedge < \{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in Z \}; +, -, \mathbf{0} >.$

Foydalanilgan adabiyotlar va el.manzillar ro'yxati:

1. A.Yunusov. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. O'quv qo'llanma. T., Yangi asr avlodi. 2006.

2. https://n.ziyouz.com/books/kollej_va_otm_darsliklari/matematika/Matematik%20mantiq%20va%20algoritmlar%20nazariyasi%20elementlari%20(A.Yunusov).pdf

3. D.Yunusova, A.Yunusov. Algebra va sonlar nazariyasi. modul texnologiyasi asosida tayyorlangan misol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma. https://n.ziyouz.com/books/kollej_va_otm_darsliklari/matematika/Algebra%20va%20sonlar%20nazariyasi%20(D.Yunusova,%20A.Yunusov).pdf

4. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M., Visshaya shkola. 1979 g. https://booksee.org/book/1221511

5. Zavalo S.T. i dr. Algebra i teoriya chisel.CH. I,II.Kiïv. Visha shkola.1983g. https://bookree.org/reader?file=787768

6. Petrova V.T.Leksii po algebre i geometrii.Ch.1,2. Moskva,1999g

7. Kostrikin I.A. Vvedenie v algebru. M., Nauka.1977 g.

8. Xojiev J.X. Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, «O'zbekiston», 2001y.

9. Jim Hefferon. Lab Manual for Linear Algebra. Jim Hefferon Mathematics, Saint Michael's College Colchester, Vermont USA 2019-Dec-25.

10. Martyn R. Dixon, Leonid A. Kurdachenko, Igor Ya. Subbotin, "ALGEBRA AND NUMBER THEORY" 2013

11. http://www.math.usf.edu/~eclark/numtheory_links.html.

12. http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/- Jim Hefferon. linear algebra.

4-AMALIY MASHG'ULOT: Normalangan maydon. Ekvibalent normalar. P-adik norma

Reja:

1. Normalangan maydon.
2. Ekvivalent normalar.
3. p-adik normaga oid misol va masalalar yechish

1. Normalangan maydon

Ishning maqsadi: oliy ta'lim muassasalarida matematika, matematika o'qitish metodikasi fanlarini o'qituvchi professor-o'qituvchilarining mavzuga oid nazariy bilimlarga asoslangan matematik kompetensiyalarini rivojlantirish.

Amaliy mashg'ulotning o'tkazilishi: har bir tinglovchi quyida taklif etilgan namuna bilan tanishgan holda mustaqil ta'lim misollsrini yechadi.

№1. F maydonda aniqlangan norma xossalarini isbotlang (1-4).

1.1. Ixtiyoriy $x, y \in F$ uchun $\|x-y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Isbot. Normaning uchinchi xossasida y ni $-y$ ga almashtiramiz. U holda:
$\|x+(-y)\| \le \|x\| + \|(-y)\| = \|x\| + \|-1\cdot y\| = \|x\| + \|-1\| \cdot \|y\| = \|x\| + \|y\|$,
ya'ni $\|x-y\| \le \|x\| + \|y\|$.

1.2. Ixtiyoriy $x, y \in F$ uchun $\left|\|x\| - \|y\|\right| \le \|x+y\|$.

Isbot. $x = (x+y) - y$ dan 3-xossaga ko'ra $\|x\| \le \|x+y\| + \|y\|$, ya'ni $\|x\| - \|y\| \le \|x+y\|$ kelib chiqadi. Shunga o'xshash, $y = (x+y) - x$ dan $\|y\| \le \|x+y\| + \|x\|$ ya'ni $\|y\| - \|x\| \le \|x+y\|$. Bu tengsizliklarni birlashtirib, $\left|\|x\| - \|y\|\right| \le \|x+y\|$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Matematik induksiya metodidan foydalansak, quyidagi xossalar kelib chiqadi:

1.3. $\|x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n\| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \|x_3\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|$.

1.4. $\|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n\| \le \|x_1\| + \|x_2\| + \|x_3\| + \ldots + \|x_n\|$.

2. F maydonda aniqlangan ushbu funksiyaning norma ekanini isbotlang.
ixtiyoriy $x \in F$ uchun

$$\|x\| = \begin{cases} 1, & agar\ x \ne 0, \\ 0, & agar\ x = 0 \end{cases}$$

3. Ushbu teoremani isbotlang.

Teorema. F maydonidagi $\|\cdot\|$ norma noarximed norma bo'lishi uchun har qanday natural n sonning normasi 1 dan katta bo'lmasligi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi*. Agar $\|\cdot\|$ noarximed norma bo'lsa, u holda $\|n\| = \underbrace{\|1+1+1+\ldots+1\|}_{n\ ma} \le \max(\|1\|, \underbrace{\|1+1+\ldots+1\|}_{n-1\ ma}) \le 1$. Demak, $\|n\| \le 1$.

Yetarliligi. Aytaylik, $\|n\| \le 1,\ n \in N$ bo'lsin, u holda ixtiyoriy n natural son va ixtiyoriy x va y uchun

$$\|x+y\|^n = \|(x+y)^n\| = \left\|\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}\right\| \le \sum_{k=0}^{n} \|C_n^k x^k y^{n-k}\| \le \sum_{k=0}^{n} \|C_n^k\| \cdot \|x^k y^{n-k}\|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \|x^k y^{n-k}\| = \sum_{k=0}^{n} \|x^k\| \cdot \|y^{n-k}\| \le (n+1)(\max(\|x\|, \|y\|))^n$$

Bundan $\|x+y\| \le \sqrt[n]{n+1}\max(\|x\|,\|y\|)$, so'ngi tengsizlikda $n\to\infty$ da limitga o'tsak $\|x+y\| \le \max(\|x\|,\|y\|)$ kelib chiqadi.

2. Ekvivalent normalar

4. F normalangan maydonda yaqinlashuvchi ketma-ketlik uchun ushbu xossani o'rinli ekanini isbotlang.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x) = 0$ bo'ladi va aksincha.

5. F maydonda $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar aniqlangan, $\lim_1$ birinchi normaga nisbatan limitga o'tish amalini, $\lim_2$ ikkinchi normaga nisbatan limitga o'tish amalini bildirsa, u holda $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalarning ekvivalentligi $\lim\limits_{n\to\infty}{}_1\, x_n = x$ va $\lim\limits_{n\to\infty}{}_2\, x_n = x$ tengliklarning teng kuchli ekanligini bildiradi, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ kabi belgilanadi

Isbotlang: $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar teng kuchli bo'lishi uchun birinchi normaga nisbatan nol ketma-ketlik ikkinchi normaga nisbatan nol ketma-ketlik va aksincha bo'lishi zarur va yetarli.

6. Quyidagi teoremalarni isbotlang.

1-teorema. $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ normalar ekvivalent bo'lishi uchun $\|x\|_1 > \|y\|_1$ va $\|x\|_2 > \|y\|_2$ tengsizliklar teng kuchli bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. *Zaruriyligi*. Aytaylik, $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ ekvivalent va $\|x\|_1 > \|y\|_1$ bo'lsin. U holda $\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^n\right\}$ ketma-ketlik $\|\cdot\|_1$ ga nisbatan nol ketma-ketlik bo'ladi. Demak, $\|\cdot\|_2$ ga nisbatan ham nol ketma-ketlik bo'ladi. Bundan yetarlicha katta *n* larda $\left\|\frac{y}{x}\right\|_2^n < 1$, ya'ni $\|x\|_2 > \|y\|_2$ bo'ladi. $\|\cdot\|_1$ va $\|\cdot\|_2$ larni o'rnini almashtirib, teskari xulosaga kelamiz.

Yetarliligi. Endi $\|x\|_1 > \|y\|_1$ va $\|x\|_2 > \|y\|_2$ tengsizliklar teng kuchli, hamda $\{x_n\}$ birinchi normaga nisbatan nol ketma –ketlik bo'lsin. Agar $\|\cdot\|_1$ norma trivial bo'lsa, u holda yetarlicha katta *n* larda $x_n = 0$ bo'ladi. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\|\cdot\|_2$ normaga nisbatan ham nol ketma-ketlik bo'ladi. Agar $\|\cdot\|_1$ notrivial norma bo'lsa, *x* ni shunday tanlaymizki $0 < \|x\|_1 < 1$ bo'lsin. U holda $0 < \|x\|_2 < 1$ bo'ladi. Endi ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olib, *k* ni $\|x\|_2^k < \varepsilon$ tengsizlik bajariladigan qilib tanlab olamiz. $\{x_n\}$ $\|\cdot\|_1$ ga nisbatan nol ketma-ketlik bo'lganligi sababli shunday N tanlash mumkinki ixtiyoriy $n > N$ larda $\|x_n\|_1 < \|x\|_1^k$ bo'ladi. U holda $\|x_n\|_2 < \|x\|_2^k < \varepsilon$, ya'ni $\| x_n \|_2 < \varepsilon$. Demak, $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\| \cdot \|_2$ normaga nisbatan ham nol ketma-ketlik ekan. $\| \cdot \|_1$ va $\| \cdot \|_2$ larni o'rinlarini almashtirib, teskari xulosaga kelamiz.

Natija. $\| \cdot \|_1$ va $\| \cdot \|_2$ normalar ekvivalent bo'lishi uchun $\| x \|_1 < 1$ va $\| x \|_2 < 1$ tengsizliklar teng kuchli bo'lishi zarur va yetarli.

Birinchi teorema va yuqoridagi natijadan har bir ekvivalentlik sinfi faqat noarximed normalar yoki faqat arximed normalardan iborat ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar $\| \cdot \|_1$ va $\| \cdot \|_2$ normalar ekvivalent bo'lsa, u holda shunday $\alpha > 0$ son topilib, barcha x larda $\| x \|_1 = \| x \|_2^{\alpha}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Qaralayotgan normalarni notrivial deb qarashimiz mumkin. Aytaylik $\| x_0 \|_1 > 1$, demak $\| x_0 \|_2 > 1$ bo'lsin. $\| x_0 \|_1 = \| x_0 \|_2^{\alpha}$ va $\| x \|_1 = \| x_0 \|_1^{w(x)}$ bo'lsin. Agar $\dfrac{k}{l} < w(x) < \dfrac{m}{n}$ bo'lsa, u holda $\| x_0 \|_1^{\frac{k}{l}} < \| x \|_1 < \| x_0 \|_1^{\frac{m}{n}}$. Bundan $\|x_0\|_1^k < \| x \|_1^l$, $\| x \|_1^n < \|x_0\|_1^m$.

1-teoremaga ko'ra $\|x_0\|_2^k < \| x \|_2^l$, $\| x \|_2^n < \|x_0\|_2^m$, bundan $\| x_0 \|_2^{\frac{k}{l}} \le \| x \|_2 \le \| x_0 \|_2^{\frac{m}{n}}$.

$\dfrac{k}{l}$ va $\dfrac{m}{n}$ ni *w(x)* ga intiltirib $\| x \|_2 = \| x_0 \|_2^{w(x)}$ tenglikka ega bo'lamiz.

Oxirgi tenglikni ikkala tomonini α darajaga ko'taramiz. U holda $\| x \|_2^{\alpha} = \| x_0 \|_2^{\alpha w(x)} = \| x_0 \|_1^{w(x)} = \|x\|_1$, ya'ni $\| x \|_1 = \| x \|_2^{\alpha}$ tenglikka ega bo'lamiz.

6.3. Agar $\| x \|^{\alpha}$ norma bo'lsa, u holda u $\| x \|$ normaga ekvivalent bo'ladi.

6.4. Agar $\| \cdot \|$ arximed norma bo'lsa, u holda $\| \cdot \|^{\alpha}$ α ning ixtiyoriy qiymatida ham norma bo'lavermaydi. Isbotlang.

Isboti. Masalan, ratsional sonlar to'plamida aniqlangan oddiy absolut qiymatni qaraylik va $\alpha > 1$ bo'lsin. U holda $|1+1|^{\alpha} = 2^{\alpha} > |1|^{\alpha} + |1|^{\alpha} = 2$ bo'lib, uchburchak aksiomasi bajarilmaydi.

$\| \cdot \|^{\alpha}$ uchun normaning 1 va 2 shartlari bajariladi. Shu sababli $\| \cdot \|^{\alpha}$ norma bo'lishi uchun $\|x + y\|^{\alpha} \le \| x \|^{\alpha} + \| y \|^{\alpha}$ tengsizlik ixtiyoriy *x, y* uchun bajarilishi zarur va yetarli.

6.4. Agar $\| \cdot \|$ arximed norma bo'lsa, u holda $\| \cdot \|^{\alpha}$ $0 < \alpha \le 1$ bo'lganda norma bo'ladi.

Isbot. Haqiqatdan ham, aytaylik $x \ne 0$ va $\|y\| \le \|x\|$ bo'lsin. U holda

$$\|x+y\|^{\alpha} \le \left(\|x\|+\|y\|\right)^{\alpha} = \|x\|^{\alpha}\left(1+\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{\alpha} \le \|x\|^{\alpha}\left(1+\frac{\|y\|}{\|x\|}\right) \le \|x\|^{\alpha}\left(1+\frac{\|y\|^{\alpha}}{\|x\|^{\alpha}}\right) \le \|x\|^{\alpha}+\|y\|^{\alpha},$$

bunda birinchi tengsizlik $t \ge 1$ da $t^{\alpha} \le t$ ekanligidan, ikkinchi tengsizlik $0 \le t \le 1$ bo'lganda $t^{\alpha} \ge t$ ekanligidan kelib chiqadi. Demak, $0 < \alpha \le 1$ bo'lganda $\|\cdot\|^{\alpha}$ norma bo'ladi.

3. p-adik normaga oid misol va masalalar yechish

1. Hisoblang

1) $ord_2 54$; 2) $ord_3 54$; 3) $ord_2 64$; 4) $ord_3 114$; 5) $ord_2 \frac{24}{5}$;

6) $ord_7\left(-\frac{35}{49}\right)$; 7) $ord_3 \frac{4}{9}$; 8) $ord_2 \frac{64}{25}$; 9) $ord_2 0{,}128$; 10) $ord_3 10^9$;

11) $ord_3(-13{,}23)$; 12) $ord_7(-13{,}23)$; 13) $ord_5(-13{,}23)$; 14) $ord_{11}(-13{,}23)$;

15) $ord_{13}(-13{,}23)$; 16) $ord_{17}(-1/34)$; 17) $ord_3(9!)$; 18) $ord_5(-0{,}0002)$.

2. $ord_p((p^N)!) = 1+p+p^2+...+p^{N-1}$ tenglikni isbotlang.

3. Aytaylik $0 \le a \le p-1$ bo'lsin. U holda $ord_p((ap^N)!) = a(1+p+p^2+...+p^{N-1})$ tenglikni isbotlang.

4. Aytaylik $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... a_s p^s$ n natural sonining p-lik yoyilmasi bo'lsin, bu yerda $0 \le a_i \le p-1$. Shu yoyilma koeffitsientlari yig'indisini S_n bilan belgilaymiz. Quyidagi tenglikni isbotlang:

$$ord_p(n!) = \frac{n-S_n}{p-1}.$$

5. $|a-b|_p$ ni hisoblang, bu yerda

1) $a=2,\ b=27,\ p=5$; 2) $a=2,\ b=27,\ p=\infty$; 3) $a=2,\ b=27,\ p=3$;

4) $a=1/3,\ b=1/22,\ p=5$; 5) $a=1/3,\ b=27,\ p=3$; 6) $a=-1,\ b=242,\ p=3$;

7) $a=-1,\ b=1/242,\ p=3$; 8) $a=3,\ b=42,\ p=13$; 9) $a=2,\ b=93,\ p=7$;

10) $a=2,\ b=-30,\ p=2$; 11) $a=27!,\ b=0,\ p=3$; 12) $a=8!,\ b=4!,\ p=2$;

13) $a=(9!)^2/3^9,\ b=0,\ p=3$; 14) $a=2^{2^N}/2^N,\ b=0,\ p=2$;

15) $a=2^{2^N}/(2^N)!,\ b=0,\ p=2$.

6. x ratsional son uchun $|x|_p \le 1$ tengsizlikning ma'nosini tushuntiring.

7. x noldan farqli ratsional son bo'lsin. Barcha p tub sonlar va $p=\infty$ uchun $|x|_p$ larning ko'paytmasi 1 ga teng ekanligini ($\prod_p |x|_p = 1$) isbotlang.

8. Aytaylik $x \in Q$ va barcha p tub sonlar uchun $|x|_p \le 1$ bo'lsin. U holda $x \in Z$ ekanligini isbotlang.

5-AMALIY MASHG 'ULOT: p-adik sonlar maydoni va uning xossalari. P-adik sonlar ketma-ketligi va qatorlar

Reja:

1. p-adik sonlar maydoni va uning xossalari
2. p-adik sonlar ketma-ketligi va qatorlar

Ishning maqsadi: oliy ta'lim muassasalarida matematika, matematika o'qitish metodikasi fanlarini o'qituvchi professor-o'qituvchilarining mavzuga oid nazariy bilimlarga asoslangan matematik kompetensiyalarini rivojlantirish.

Amaliy mashg'ulotning o'tkazilishi: har bir tinglovchi quyida taklif etilgan namuna bilan tanishgan holda mustaqil ta'lim misollsrini yechadi.

1. p-adik sonlar maydoni va uning xossalari

1.1. Isbotlang: Agar $\{a_n\}$ ratsional sonlarning fundamental ketma – ketligi bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, yoki biror nomerdan boshlab $|a_n|_p = |a_{n'}|_p$ bo'lishligi kelib chiqadi.

1.2. Aytaylik, $x \in Q$ bo'lsin, $\{x\}$ bilan umumiy hadi x ga teng bo'lgan doimiy ketma-ketlikni belgilaymiz.

Isbotlang: ikkita doimiy $\{x\}$ va $\{x'\}$ ketma-ketliklar ekvivalent bo'lishi uchun $x = x'$ bo'lishi zarur va yetarli.

Isboti. Haqiqatdan ham, $\lim\limits_{n\to\infty} |x - x'|_p = 0$ munosabatdan p – adik norma ta'rifiga ko'ra $x = x'$ kelib chiqadi. Aksinchasi o'z – o'zidan ravshan.

1.3. Quyidagi tasdiqni isbotlang:

Agar $\{a_n\}, \{b_n\}$ ratsional sonlarning fundamental ketma-ketliklari bo'lsa, u holda $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ ketma-ketliklar ham fundamental ketma- ketlik bo'ladi.

Isbot. $\{a_n\}$ fundamental ketma-ketlik, demak ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 son topilib barcha $n, n' > N_1$ larda $|a_n - a_{n'}|_p < \varepsilon$ bajariladi. $\{b_n\}$ fundamental ketma-ketlik uchun ham ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_2 son topilib, barcha $n, n' > N_2$ larda $|b_n - b_{n'}|_p < \varepsilon$ bajariladi. $n = \max(N_1, N_2)$ deb olamiz. U holda barcha $n, n' > N$ da bir vaqtda $|a_n - a_{n'}|_p < \varepsilon, |b_n - b_{n'}|_p < \varepsilon$ tengsizliklar bajariladi. Bundan

$$|(a_n \pm b_n) - (a_{n'} \pm b_{n'})|_p = |(a_n - a_{n'}) \pm (b_n - b_{n'})|_p \le \max(|a_n - a_{n'}|_p, |b_n - b_{n'}|_p) < \varepsilon$$

bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday N son topilib, barcha $n,n'>N$ larda $|(a_n \pm b_n)-(a_{n'} \pm b_{n'})|_p<\varepsilon$ bajariladi, bundan $\{a_n \pm b_n\}$ fundamental ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

1.3. Quyidagi tasdiqni isbotlang:

Agar $\{a_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lsa, u holda $\{a_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. $\{a_n\}$ fundamental ketma-ketlik ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday N son topilib, barcha $n,n'>N$ larda $|a_n-a_{n'}|_p<\varepsilon$ bajariladi. Bundan $|a_n|_p<\varepsilon,\ |a_{n'}|_p<\varepsilon$ tengsizliklar kelib chiqadi. $\max\{|a_1|_p,|a_2|_p,...,|a_N|_p,\varepsilon\}=K$ deb olsak, u holda ixtiyoriy n uchun $|a_n|_p\le K$ bo‘ladi. Demak, $\{a_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi.

1.5. Quyidagi tasdiqni isbotlang:

Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ratsional sonlarning fundamental ketma-ketliklari bo‘lsa, u holda $\{a_n \cdot b_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday N son topilib, barcha $n,n'>N$ larda $|a_n-a_{n'}|_p<\varepsilon$ va $|b_n-b_{n'}|_p<\varepsilon$ bajariladi. U holda

$$|a_n \cdot b_n - a_{n'} \cdot b_{n'}|_p = |a_n \cdot b_n - a_{n'} \cdot b_n + a_{n'} \cdot b_n - a_{n'} \cdot b_{n'}|_p =$$
$$=|(a_n-a_{n'})\cdot b_n + a_{n'}(b_n-b_{n'})|_p \le \max(|a_n-a_{n'}|_p \cdot |b_n|_p, |a_{n'}|_p \cdot |b_n-b_{n'}|_p <$$
$$<\max(B\varepsilon, A\varepsilon).$$

Bundan $\{a_n \cdot b_n\}$ fundamental ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

1.6. Quyidagi tasdiqni isbotlang: Agar $\{a_n\},\{b_n\}\in S$ va $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$ bo‘lsa, u holda $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}\in S$ bo‘ladi.

Isbot. Ekvivalentlik sinfi normasini aniqlaganda, agar $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \ne 0$ bo‘lsa, biror $k>0$ va ixtiyoriy N uchun shunday $n_N>N$ topilib $|b_{n_N}|_p \ge k$ bo‘lishini ko‘rsatgan edik.

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n'}}{b_{n'}}\right|_p = \left|\frac{a_n \cdot b_{n'} - a_{n'} \cdot b_n}{b_n \cdot b_{n'}}\right|_p = \frac{|a_n \cdot b_{n'} - a_{n'} b_n|_p}{|b_n|_p \cdot |b_{n'}|_p} \le$$
$$\le \frac{1}{k^2}\cdot|a_n \cdot b_{n'} - a_n \cdot b_n + a_n \cdot b_n - a_{n'} \cdot b_n|_p \le$$
$$\le \frac{1}{k^2}\max(|a_n|_p \cdot |b_n - b_{n'}|_p, |b_n|_p \cdot |a_n - a_{n'}|_p)$$

1.4-tasdiqga asosan $\{a_n\},\{b_n\}$ chegaralangan ketma-ketliklar. Aytaylik ixtiyoriy n da $|a_n|_p < L, |b_n|_p < L$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N son topilib, barcha $n, n' > N$ larda $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n'}}{b_{n'}}\right|_p < \frac{1}{k^2} < \varepsilon$ bo'ladi. Bu $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ning fundamental ketma-ketlik ekanligini isbotlaydi.

1.5. quyidagi mashqlarni bajaring

1. Aytaylik $a \in Q_p$ va $a = a_{-m}p^{-m} + a_{-m+1}p^{-m+1} + ... + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ...$ uning p–adik yoyilmasi bo'lsin. $-a$ ning p–adik yoyilmasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

2. Amallarni bajaring:

1) $(6 + 4\times 7 + 2\times 7^2 + 1\times 7^3 + ...)(3 + 0\times 7 + 0\times 7^2 + 6\times 7^3 + ...)$ Q_7 da, dastlabki to'rtta hadi bilan cheklaning;

2) $1/(3 + 2\times 5 + 3\times 5^2 + 1\times 5^3 + ...)$ Q_5 da, dastlabki to'rtta hadi bilan cheklaning;

3) $9\times 11^2 - (3\times 11^{-1} + 2 + 1\times 11 + 3\times 11^2 + ...)$ Q_{11} da, dastlabki to'rtta hadi bilan cheklaning;

3. p–adik yoyilmasini toping:

1) $2/3$, Q_2 da; 2) $-1/4$, Q_5 da; 3) $1/10$, Q_{11} da;

4) $-9/16$, Q_{13} da; 5) $1/2000$, Q_5 da; 6) $6!$, Q_3 da;

7) $1/3!$, Q_3 da; 8) $4!$, Q_2 da; 9) $2/5!$, Q_5 da.

4. Isbotlang: agar $a \in Q_p$ p– adik sonning yoyilmasida chekli hadlar qatnashsa (ya'ni biror N natural sondan keyingi barcha $i > N$ lar uchun $a_i = 0$ bo'lsa), u holda a – mahraji p ning darajasiga teng bo'lgan musbat ratsional son bo'ladi va aksincha.

5. Isbotlang: agar $a \in Q_p$ p– adik sonning yoyilmasi biror joyidan boshlab davriy bo'lsa (ya'ni biror N natural sondan keyin biror r barcha $i > N$ lar uchun $a_{i+r} = a_i$ bo'lsa), u holda $a \in Q$ bo'ladi va aksincha.

6. Quyidagi sonlardan qaysi birlari Q_{11} da kvadrat ildizga ega?

1) 5; 2) 7; 3) -7; 4) $5 + 3\times 11 + 9\times 11^2 + 1\times 11^3$;

5) $3\times 11^{-2} + 6\times 11^{-1} + 3 + 0\times 11 + 7\times 11^2$; 6) $3\times 11^{-1} + 6 + 3\times 11 + 0\times 11^2 + 7\times 11^3$;

7) 1×11^7; 8) $7 - 6\times 11^2$; 9) $5\times 11^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n\times 11^n$.

7. Q_{13} da -1 dan kvadrat ildiz chiqaring (dastlabki to'rtta hadi bilan cheklaning).

8. $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ lardan qaysi birlari uchun Q_p da -1 dan kvatrat ildiz chiqarish mumkin?

2. p-adik sonlar ketma-ketligi va qatorlar

$\{\xi_n\}$ p – adik sonlar ketma – ketligi va ξ_0 p – adik son berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 son topilib, barcha $n>n_0$ da $|\xi_n-\xi_0|_p<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, ξ_0 soni $\{\xi_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0$. Bu holda ketma-ketlik yaqinlashuvchi deyiladi.

1. Quyidagi tasdiqlarni isbotlang;

1-tasdiq. $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0$ bo‘lishi uchun $\lim\limits_{n\to\infty}|\xi_n-\xi_0|_p=0$ bo‘lishi zarur va yetarli.

2-tasdiq. Agar $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0$ bo‘lsa, u holda yoki $\lim\limits_{n\to\infty}|\xi_n|_p=0$, yoki biror n_0 son topilib, barcha $n>n_0$ da $|\xi_n|_p=|\xi_0|_p$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Agar $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0=0$ bo‘lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}|\xi_n|_p=0$ ekanligi ravshan. $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0\neq 0$ bo‘lsin. U holda yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 son topilib, barcha $n>n_0$ da $|\xi_n-\xi_0|_p<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. So‘ngi tengsizlik bajarilishi uchun barcha $n>n_0$ da $|\xi_n|_p=|\xi_0|_p$ tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur. Aks holda teng yonli uchburchak prinsipiga ko‘ra $|\xi_n-\xi_0|_p=\max\left(|\xi_n|_p,|\xi_0|_p\right)$ bo‘lib, $\varepsilon=|\xi_0|_p$ uchun yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta’rifi bajarilmaydi.

2. Chegaralangan p – adik sonlar ketma – ketligiga ta’rif bering. Yaqinlashuvchi va chegaralangan ketma-ketliklar orasidagi munosabatni tahlil qiling.

Chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketluk ajratish mumkinmi?

3. Fundamental p – adik sonlar ketma – ketligiga ta’rif bering. Yaqinlashuvchi va fundamental ketma-ketliklar orasidagi munosabatni tahlil qiling.

4. Ushbu tasdiqni isbotlang:

Tasdiq. $\{\xi_n\}$ yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning fundamental ketma-ketlik bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. $\{\xi_n\}$ yaqinlashuvchi $(\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\xi_0)$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun n_0 topilib, barcha $n>n_0$ larda $|\xi_n-\xi_0|_p<\varepsilon$ bo‘ladi. Bundan $|\xi_n-\xi_m|_p=|\xi_n-\xi_0+\xi_0-\xi_m|_p\leq\max(|\xi_n-\xi_0|_p,|\xi_m-\xi_0|_p)<\varepsilon$. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 topilib, barcha $n>n_0$ va $m>n_0$ larda $|\xi_n-\xi_m|_p<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli, bundan $\{\xi_n\}$ fundamental ketma-ketlik.

Endi $\{\xi_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo‘lsin. U holda u chegaralangan bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, barcha $n > n_0$ da $|\xi_n|_p = |\xi_n - \xi_{n_0} + \xi_{n_0}|_p \le \max(|\xi_n - \xi_{n_0}|_p, |\xi_{n_0}|_p) = a$ bo‘ladi.

Agar $M = \max\{|\xi_1|_p, |\xi_2|_p, \ldots, |\xi_{n_0-1}|_p, a\}$ deb olsak, ixtiyoriy n uchun $|\xi_n|_p \le M$, ya’ni $\{\xi_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi. 2.1.3. – teoremaga ko‘ra bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin. Uning limiti ξ ga teng bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 topilib, barcha $n > n_0$ va $n_i > n_0$ larda $|\xi_m - \xi_n|_p < \varepsilon$, $|\xi_{n_i} - \xi|_p < \varepsilon$ bo‘ladi. U holda $|\xi_m - \xi|_p = |\xi_m - \xi_{n_i} + \xi_{n_i} - \xi|_p \le \max(|\xi_m - \xi_{n_i}|_p, |\xi_{n_i} - \xi|_p) < \varepsilon$, ya’ni $|\xi_m - \xi|_p < \varepsilon$ bo‘ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_m = \xi$.

5. Ushbu tasdiqni isbotlang:

Tasdiq. $\{\xi_n\}$ p – adik sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 topilib, barcha $n > n_0$ larda $|\xi_{n+1} - \xi_n|_p < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Ko‘rsatma. $m > n$ da $\xi_m - \xi_n = (\xi_m - \xi_{m-1}) + (\xi_{m-1} - \xi_{m-2}) + \ldots + (\xi_{n+1} - \xi_n)$ va $|\xi_m - \xi_n|_p \le \max\limits_{n \le i \le m-1} |\xi_{i+1} - \xi_i|_p$ o‘rinli ekanligidan foydalaning.

Aytaylik, $\{\xi_n\}$ p – adik sonlar ketma –ketligi bo‘lsin. Ushbu ifoda

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \qquad (1)$$

p – adik sonlar qatori deyiladi.

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \qquad (2)$$

p – adik sonlar qatorining xususiy yig‘indisi deyiladi.

Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda (1) qator yaqinlashuvchi deyiladi.

$\{S_n\}$ ketma-ketlik limiti S (1) qatorning yig‘indisi deyiladi.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{n-1} = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1} + \ldots$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $S_n = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1} = \dfrac{1+p^n}{1-p}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-p}$, ya’ni $S = \dfrac{1}{1-p}$ bo‘ladi.

Haqiqatdan ham,

$$\lim_{n\to\infty}|S_n - S|_p = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+p^n}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right|_p = \lim_{n\to\infty}\frac{|p^n|_p}{|1-p|_p} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{p^n} = 0$$

Demak, $\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} = \dfrac{1}{1-p}$.

Bu ifodani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots + (p-1)p^n + \ldots$

Bundan natural sonlarning "cheksiz yig'indisi" manfiy songa tengligi kelib chiqadi.

6. Ushbu tasdiqni isbotlang:

Teorema. $\{S_n\}$ yaqinlashuvchi bo'lishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 topilib, barcha $n > n_0$ larda $|S_{n+1} - S_n|_p = |\xi_n|_p < \varepsilon$ bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni $\lim_{n\to\infty}\xi_n = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

7. Ushbu tasdiqni isbotlang:

Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\right|_p \le \max_n |\xi_n|_p$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Umumiy hadi $S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k$ bo'lgan ketma-ketlikka 1.2-teoremani tatbiq etamiz. U holda shunday n_0 son topilib, barcha $n > n_0$ ushbu $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\right|_p = \left|\sum_{n=1}^{n_0}\xi_n\right|_p$ tenglik o'rinli bo'ladi. $\left|\sum_{n=1}^{n_0}\xi_n\right|_p \le \max\left(|\xi_1|_p, |\xi_2|_p, \ldots, |\xi_{n_0}|_p\right)$ ekanligidan teoremaning o'rinliligi kelib chiqadi.

p – adik sonlar qatorlari uchun ham haqiqiy sonlar qatorlaridagi kabi ba'zi xossalar o'rinli bo'ladi. Masalan, ikkita yaqinlashuvchi qatorlarning yig'indisi, ko'paytmasi yaqinlashuvchi qator bo'ladi, ammo farq qiluvchi xossalar ham mavjud.

Ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ qator hadlari o'rinlarini ixtiyoriy almashtirganda ham qator yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ qator shartsiz yaqinlashuvchi qator deyiladi.

8. Ushbu tasdiqni isbotlang:

Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda u shartsiz yaqinlashadi va uning yig'indisi qator hadlari o'rinlarini almashtirishga bog'liq bo'lmaydi.

Isbot. $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday n_0 topilib, barcha $n>n_0$ larda $|\xi_n|_p<\varepsilon$ bo'ladi. $\varphi(n)$ natural sonlar to'plamini o'ziga akslantiruvchi bir qiymatli akslantirish bo'lsin. n_1 sonni shunday tanlaymizki $\varphi(1),\varphi(2),\ldots,\varphi(n_1)$ sonlar ichida $1,2,3,\ldots,n_0$ sonlarning barchasi mavjud bo'lsin. U holda ixtiyoriy $m>n_1$ da $\left|\sum_{n=1}^{m}\xi_n-\sum_{n=1}^{m}\xi_{\varphi(n)}\right|_p\le\max_{n>n_0}|\xi_n|_p<\varepsilon$ bo'ladi.

Demak, $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_{\varphi(n)}$ qator yaqinlashuvchi va dastlabki qator yig'indisiga teng yig'indiga ega.

Ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|_p$ qator R haqiqiy sonlar fazosida yaqinlashuvchi bo'lsa, (1) qator absolut yaqinlashuvchi deyiladi.

Haqiqiy analizdagi kabi quyidagi teorema o'rinli.

9. Ushbu tasdiqlarni isbotlang:

a) Teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|_p$ qator R da yaqinlashuvchi bo'lsa, u hoda $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ qator Q_p da yaqinlashuvchi bo'ladi.

b) Teorema. Q_p da yaqinlashuvchi, lekin absolut yaqinlashmaydigan $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ qator mavjud.

Isbot. Quyidagi qatorni qaraymiz. Birinchi hadi 1, keyingi p ta hadi p ga teng, keyingi p^2 ta hadi p^2 ga teng va hakoza. Ravshanki bu qator yaqinlashuvchi (qator hadlaridan tuzilgan ketma-ketlik 0 ga intiladi). Ammo $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|_p=1+p\cdot p^{-1}+p^2\cdot p^{-2}+\ldots=\infty$.

6-AMALIY MASHG'ULOT: P-adik darajali qatorlar, elementar funksiyalar

Reja:

1. P-adik darajali qatorni analitik davom ettirish masalasi
2. p-adik darajali qatorlarning nollari
3. Uzluksiz p-adik funksiyalarga doir misollar
4. Uzilish nuqtalari va kategoriyalar haqidagi Ber teoremasi
5. Differensiallanuvchi p-adik funksiyalar

6. Uzluksiz p-adik funksiyalarga doir misollar

Ishning maqsadi: oliy ta'lim muassasalarida matematika, matematika o'qitish metodikasi fanlarini o'qituvchi professor-o'qituvchilarining mavzuga oid nazariy bilimlarga asoslangan matematik kompetensiyalarini rivojlantirish.

Amaliy mashg'ulotning o'tkazilishi: har bir tinglovchi quyida taklif etilgan namuna bilan tanishgan holda mustaqil ta'lim misollsrini yechadi.

1. P-adik darajali qatorni analitik davom ettirish masalasi

№1. p-adik qatorni analitik davom ettirish masalasi

Aytaylik, bizga biror doirada darajali qator ko'rinishda aniqlangan funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyani "tabiiy" holda kattaroq sohaga davom ettirish mumkinmi? Haqiqiy analizda javob ijobiy. Masalan, $\log(x+1)$ qator $x>1$da uzoqlashuvchi bo'lsa ham, barcha musbat haqiqiy sonlarda aniqlangan uzluksiz cheskiz differensiallanuvchi funksiya mavjud. Davom ettirish usuli quyidagicha edi: yaqinlashish sohasi ichida biror α nuqtani tanlaymiz, Shu nuqta atrofida funksiyani qatorga yoyamiz. Shunday qilib, berilgan funksiyani yangi qatorning yaqinlashish doirasiga davom ettiramiz. Afsuski, bu usul Q_p da ish bermaydi.

Quyidagi teorema o'rinli [5;76 b.].

3.1-teorema. Aytaylik, $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n \in Q_p[[X]]$, va $\alpha \in D$ bo'lsin, bu yerda D qatorning yaqinlashish doirasi. $m\geq 0$ uchun

$$b_m=\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}a_n\alpha^{n-m}, \tag{7}$$

$$g(X)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m(X-\alpha)^m \tag{8}$$

deb olamiz. U holda

1) (7) qator har bir m uchun yaqinlashuvchi, shu sababli har bir m uchun b_m korrekt aniqlangan;

2) $g(X)$ darajali qatorning yaqinlashish doirasi D bilan ustma-ust tushadi;

3) $g(\lambda)=f(\lambda)$ barcha $\lambda \in D$ uchun o'rinli.

Bu teoremadan ko'rinadiki, yangi (8) qatorning yaqinlashish doirasi o'zgarmaydi. Demak, p-adik qator yordamida aniqlangan funksiyani haqiqiy analizdagi kabi davom ettirib bo'lmaydi.

№2. p-adik darajali qatorlarning nollari

Quyidagi teoremada barcha $x\in Z_p$ nuqtalarda yaqinlashuvchi bo'lgan

$f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n$ qatorlar bilan aniqlangan $f:Z_p\to Q_p$ funksiyalar qaraladi. Bu funksiyalarga xos bo'lgan xususiyat shundan iboratki, ularga mos qatorlar $|x|_p=1$ nuqtalarda yaqinlashadi, ya'ni $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ bo'ladi.

1-teorema (Shtrassman teoremasi). Aytaylik,

$$f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n\in Q_p[[X]]$$

noldan farqli (barcha koeffitsientlari nolga teng bo'lmagan) darajali qator bo'lsin. Faraz qilaylik, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ bo'lsin, u holda $f(x)$ barcha $x\in Z_p$ da yaqinlashuvchi bo'ladi. Aytaylik, N quyidagi shartlar bilan aniqlangan natural son bo'lsin:

1) $|a_N|_p=\max|a_n|_p$,

2) $n>N$ bo'lganda $|a_n|_p<|a_N|_p$.

U holda $f:Z_p\to Q_p$ funksiya ko'pi bilan N ta nolga ega bo'ladi.

Isbot. Isbot N bo'yicha induksiya orqali bajariladi.

Induksiya bazasi. $N=0$ bo'lganda bizning farazimiz barcha $n>0$ uchun $|a_0|_p>|a_n|_p$ni anglatadi. Biz $f(x)$ funksiyaning Z_p da noli yo'q ekanligini ko'rsatishimiz lozim.

Agar $0=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ bo'lsa, u holda

$|a_0|_p=|a_1x+a_2x^2+...|_p\leq\max_{n\geq1}|a_nx^n|_p\leq\max_{n\geq1}|a_n|_p<|a_0|_p$.

Bu ziddiyat, funksiyaning noli yo'q ekanligini isbotlaydi.

Induksiya qadami. Biror nolga mos keladigan ko'paytuvchini ajratib olamiz, bo'linma ham darajali qator bo'lib, N qat'iy kichik ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $n>N$ uchun $|a_N|_p=\max|a_n|_p$ va $|a_n|_p<|a_N|_p$ bo'lsin. Aytaylik, biror $\alpha\in Z_p$ uchun $f(\alpha)=0$ bo'lsin. Ixtiyoriy $x\in Z_p$ sonni olamiz. U holda

$$f(x)=f(x)-f(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^n-\alpha^n)=(x-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}a_nx^j\alpha^{n-1-j}.$$

Ushbu teoremaga ko'ra

Aytaylik $\{b_{ij}\}$ p-adik sonlar ketma-ketligi va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $N=N(\varepsilon)$ natural son topilib, $\max(i,j)\geq N$ da $|b_{ij}|_p<\varepsilon$ bo'lsin. U holda ushbu ikkita

$$\sum_i\left(\sum_j b_{ij}\right) \text{ va } \sum_j\left(\sum_i b_{ij}\right)$$

Qatorlar yaqinlashuvchi hamda yig'indilari teng bo'ladi [Каток С.Б. p-адический анализ в сравнении с вещественным. М.: МЦНМО, 2004,-112с. 65-b.].

jamlash tartibini o'zgartirish mumkin: $k = n - j - 1$ deb,

$f(x) = (x-\alpha)\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j = (x-\alpha)g_1(x)$ ega bo'lamiz, bu yerda $b_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j+1+k}\alpha^k$

a_N elementning normasi maksimal ekanligidan barcha j lar (0 dan ∞ gacha) quyidagi tengsizlik o'rinli: $\left|b_j\right|_p \le \max |a_{j+1+k}|_p \le |a_N|_p$.

$$\left|b_{N-1}\right|_p = |a_N + a_{N+1}x + a_{N+2}x^2 + \ldots|_p = |a_N|_p,$$

va agar $j > N$ bo'lsa, u holda

$$\left|b_j\right|_p \le \max_{k\ge 0} |a_{j+1+k}|_p \le \max_{j\ge N+1} |a_j|_p < |a_N|_p$$

bo'ladi.

Shunday qilib, b_{N-1} element maksimal normaga ega, keyingi elementlarning normasi esa qat'iy kichik. g_1 funksiyaga induksiya farazini tatbiq etib, bu funksiyaning nollari $N-1$ dan ko'p emasligini olamiz, shu sababli f funksiyaning nollarining maksimal soni N ta bo'ladi.

№3. Shtrassman teoremasidan bir nechta natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Aytaylik, $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ darajali qator Z_p da yaqinlashuvchi, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $f(x)$ funksiyaning Z_p dagi barcha nollari bo'lsin. U holda Z_p da yaqinlashuvchi, lekin unda nollari mavjud bo'lmagan $g(x)$ darajali qator mavjud va $f(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots(X-\alpha_m)g(X)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $f(X) = (X-\alpha_1)g_1(X)$ deb yozish mumkin, bunda $g_1(X)$ qator Z_p da yaqinlashuvchi va unda ko'pi bilan $m-1$ noli bor. Bu jarayonni davom ettirib, m nolni ajratib olamiz va $g_m(X) = g(X)$ ni hosil qilamiz.

2-natija. Aytaylik, $f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ darajali qator biror m uchun $p^m Z_p$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda $f(X)$ $p^m Z_p$ da chekli sondagi nollarga ega bo'ladi. Nollar soni quyidagi munosabatlardan aniqlanadigan N dan katta bo'lmaydi:

$|p^{mN}a_N|_p = \max_n |p^{mn}a_n|_p$ va $n > N$ bo'lganda $|p^{mn}a_n|_p < |p^{mN}a_N|_p$.

Isbot. $g(X) = f(p^m X) = \sum a_n p^{mn} X^n$ deb olamiz. f qator $p^m Z_p$ da yaqinlashuvchi bo'lganligidan, g qator Z_p da yaqinlashuvchi bo'ladi. Endi tasdiq

1-teoremadan kelib chiqadi.

4.4-misol. Aytaylik, $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty} p^n X^n$ bo'lsin. Bu qatorning yaqinlashish sohasi va nollari sonini aniqlaymiz. Yaqinlashish radiusi 3-bob 1-paragrafdagi (1) formula bilan hisoblanadi, bu yerda $|a_n|_p=|p^n|_p=p^{-n}$. Bundan $r=p$. $|x|_p=p$ bo'lganda

$|p^n x^n|_p=|p^n|_p|x|_p^n=p^{-n}p^n=1$, qatorning umumiy hadi 0 ga intilmaydi. Shunday qilib, qator $\{|x|_p<p\}=\{|x|_p\le 1\}=Z_p$ da yaqinlashuvchi. Umumiy hadi $|p^n|_p=p^{-n}$ bo'lgan ketma-ketlik kamayuvchi, shu sababli $p^0=1$ element eng katta normaga ega. Shtrassman teoremasini tatbiq etib, $N=0$, ya'ni $f(X)$ qator o'z yaqinlashish sohasida nolga ega emas. Bu faktni bevosita ham ko'rish mumkin edi. Ya'ni berilgan qator yaqinlashish sohasida cheksiz geometrik qatorning yig'indisiga teng: $f(X)=(1-pX)^{-1}$.

3-natija. $p^m Z_p$ da yaqinlashuvchi ikkita $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, $g(X)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ p-adik darajali qatorlarni qaraymiz. Agar $f(\alpha)=g(\alpha)$ shartni qanoatlantiruvchi cheksiz ko'p $\alpha\in p^m Z_p$ nuqtalar mavjud bo'lsa, u holda barcha $n\ge 0$ uchun $a_n=b_n$ bo'ladi.

Isbot. $f(X)-g(X)$ ayirmaga 4.3-natijani tatbiq qilamiz. U $p^m Z_p$ da cheksiz ko'p nolga ega, shu sababli nol qator bo'ladi. Shunday qilib, $f(X)$ va $g(X)$ qatorlarning barcha koeffitsientlari teng bo'ladi: $a_n=b_n$ $(n\ge 0)$.

4-natija. Aytaylik, $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ darajali qator $p^m Z_p$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. Agar $f(x)$ funksiya davriy bo'lsa, ya'ni shunday $\tau\in p^m Z_p$ mavjud bo'lib, barcha $x\in p^m Z_p$ uchun $f(x+\tau)=f(x)$ bo'lsa, u holda $f(X)=const$ bo'ladi.

Isbot. $p^m Z_p$ ideal va $\tau\in p^m Z_p$ ekanligidan $n\tau\in p^m Z_p$ kelib chiqadi. $f(x)-f(0)$ funksiyaning $n\tau$ nuqtalarda nolga teng ekanligini ko'rish qiyin emas. Shunday qilib, $f(x)-f(0)$ funksiyaning $p^m Z_p$ da cheksiz ko'p nollari mavjud. Bundan $f(x)-f(0)=0$, ya'ni $f(X)=const$ kelib chiqadi.

Bu natija klassik holda o'rinli emas. Masalan, sinus, kosinus funksiyalar davriy va qatorlar yordamida ifodalanadi (butun funksiya). Bunga sabab haqiqiy (kompleks) holda agar τ davr bo'lsa, $n\tau$ ko'rinishdagi sonlar chekli intervalga tegishli bo'la olmaydi.

5-natija. Aytaylik, $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n$ - butun p-adik darajali qator, ya'ni ixtiyoriy $x\in Q_p$ da yaqinlashuvchi bo'lsin. U holda $f(x)$ funksiya ko'pi bilan sanoqli nolga ega bo'ladi. Agar nollar to'plami cheksiz bo'lsa, u holda u shunday $\{z_n\}$ ketma-ketlik tashkil qiladiki, $n\to\infty$ da $|z_n|_p\to\infty$ bo'ladi.

Isbot. Har bir $p^mZ_p,\ m\in Z$ chegaralangan doirada nollar soni chekli.

№4. Quyidagi mashqlarni bajaring:

3. Aytaylik, $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n\in Q_p[[X]]$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi $r=1/\limsup|a_n|_p^{1/n}$ bo'lsin. Agar $r=0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ faqat $x=0$ da, agar $r=\infty$ bo'lsa, $f(x)$ barcha $x\in Q_p$ da yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlang.

4. Shtrassman teoremasidan foydalanib, $p\neq 2$ da $\ln_p(x)=0$ tenglik faqat va faqat $x=1$ bo'lganda bajarilishini ko'rsating. $p=2$ da $\ln_p(x)=0$ tenglik faqat va faqat $x=\pm1$ bo'lganda bajarilishini ko'rsating.

5. Quyidagi p-adik darajali qatorlarning yaqinlashish sohalarini toping, noli haqida nima deyish mumkin:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}p^{-n}X^n$, 2) $\sum_{n=0}^{\infty}n!X^n$.

6. Darajali qatorlar yordamida sinus va kosinuslarning p-adik analoglarini aniqlang. Agar $p\equiv1(\mathrm{mod}\,4)$ bo'lsa, u holda $i^2=-1$ bo'ladigan $i\in Q_p$ mavjud va umumiy yaqinlashish sohasidan olingan ixtiyoriy x uchun quyidagi klassik tenglikning bajarilishini ko'rsating:

$$\exp_p(x)=\cos_p(x)+i\sin_p(x).$$

Dastlabki uch masalada x son $\square_p$ halqaning elementi va kanonik ko'rinishda yozilgan deb hisoblaymiz: $x=x_0+x_1p+x_2p^2+\dots$.

1. Berilgan funksiyalar $\square$ tekis uzluksiz yoki $\square_p$ da uzluksiz ekanligini aniqlang:

1) $f(x)=x_0+x_1x_2$;

2) $f(x)=P(x_0,x_1,x_3)$, bu yerda P koeffitsientlari $\square_p$ elementlari bo'lgan ko'phad.

3) $f(x)=\begin{cases}1, & agar\ x_0=0,\\ x/x_0, & agar\ x_0\neq 0\end{cases}$

2. 1-misoldagi funksiyalar lokal doimiy yoki bo'lakli doimiy funksiya bo'ladimi? Javobingizni asoslang.

3. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri uzluksiz: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n$; $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n n!$? $\mathbb{Z}_p$ da lokal doimiy?

4. $f:\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ funksiya quyidagicha aniqlanadi: $f(x)=\begin{cases} 0, \; agar \;\; x=0, \\ 1/|x|_p, \; agar \; x\neq 0 \end{cases}$. f funksiya uzluksizmi? $\mathbb{Q}_p$ da lokal doimiymi?

5. Shunday $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funksiya tuzingki, u 4.2-punktdagi 2- misoldagi f_2 funksiyaga o'xshash bo'lsin. Uning har bir nuqtada uzilishga ega ekanligini isbotlang.

2. Uzilish nuqtalari va kategoriyalar haqidagi Ber teoremasi

2.3-misoldagi f_1 funksiyaning haqiqiy analizda yaqin analogi mavjud. Bu $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Riman funksiyasi bo'lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$r(x)=\begin{cases} 1/q, \; agar \;\; x \;\; ratsional, x=p/q, \; (p,q)=1, \\ 0, \; agar \;\; x \;\; irratsional. \end{cases}$$

Bu funksiya barcha irratsional nuqtalarda uzluksiz va barcha ratsional sonlarda uzilishga ega. Barcha haqiqiy sonlar to'plamida uzilishga ega bo'lgan yana bir boshqa misol sifatida Dirixle funksiyasini qarashimiz mumkin:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases} 1, \; agar \;\; x \;\; ratsional \; son \; bo'lsa, \\ 0, \; agar \;\; x \;\; irratsional \;\; son \; bo'lsa. \end{cases}$$

Quyidagi tabiiy savol tug'iladi: barcha irratsional sonlarda uzilishga ega va ratsional sonlarda uzluksiz bo'lgan haqiqiy funksiya mavjudmi? Shunga o'xshash savol: $\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ to'plamda uzilishga ega va $\mathbb{Q}$ da uzluksiz bo'lgan $p-$adik funksiya mavjudmi? Bu ikki savolning ham javobi salbiy bo'lib, uning sababi har qanday to'la metrik fazo uchun to'g'ri bo'lgan kategoriyalar haqidagi Ber teoremasidir.

Aytaylik, (X,ρ) metrik fazo bo'lsin. G orqali X to'plamning barcha ochiq qism to'plamlari oilasini, F orqali X to'plamning barcha yopiq qism to'plamlari oilasini belgilaylik. Ta'rif bo'yicha (1-bob 7-§ qarang) F ning har bir elementi G dagi bitta elementning to'ldiruvchisi bo'ladi. G to'plam ixtiyoriy birlashma va chekli kesishmaga nisbatan, F to'plam esa ixtiyoriy kesishma va chekli birlashmaga nisbatan yopiqligini eslatib o'tamiz. Sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ochiq bo'lmagan, sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi yopiq bo'lmagan to'plamlarga misollar qurishimiz mumkin. Ammo bunday to'plamlar analizda muhim ahamitga ega bo'lib, ularga maxsus nom berilgan.

1-ta'rif. Agar $A\subset X$ to'plamni sanoqli sondagi ochiq to'plamlarning kesishmasi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda A to'plam G_δ tipidagi to'plam deyiladi; agar $A\subset X$ to'plamni sanoqli sondagi yopiq to'plamlarning birlashmasi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, u holda A to'plam F_σ tipidagi to'plam deyiladi.

1-teorema. Aytaylik, (X,ρ) va (Y,d) ikkita metrik fazo va $f:X\to Y$ ixtiyoriy akslantirish bo'lsin. U holda f akslantirish uzluksiz bo'lgan barcha nuqtalar to'plami G_δ tipidagi to'plam bo'ladi.

Isbot. Aytaylik, $A\subset X$ bo'lsin. f funksiyaning A to'plamdagi tebranishini $\mathbb{R}\cup\infty$ kengaytirilgan haqiqiy sonlarning elementi sifatida kiritamiz:

$$\omega(A)=\sup\{d(f(x),f(y)):x,y\in A\}.$$

$x_0\in X$ uchun f funksiyaning x_0 nuqtadagi tebranishini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\omega(x_0)=\lim_{\delta\to 0}\omega(B(x_0,\delta)).$$

1-lemma. Aytaylik, $f:X\to Y$ va $\varepsilon>0$ bo'lsin. U holda

$$W_\varepsilon=\{x\in X:\omega(x)<\varepsilon\}$$

ochiq to'plam bo'ladi.

Lemmaning isboti. Aytaylik $x_0\in W_\varepsilon$ bo'lsin. U holda $\omega(x_0)<\varepsilon$ bo'ladi. Bu degani, shunday $\delta>0$ son mavjudki, barcha $x,y\in B(x_0,\delta)$ uchun $d(f(x),f(y))<\varepsilon_1<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Aytaylik, $z\in B(x_0,\delta/2)$ bo'lsin. Agar $z_1,z_2\in B(z,\delta/2)$ bo'lsa, u holda $z_1,z_2\in B(x_0,\delta)$ vashuning uchun $d(f(z_1),f(z_2))<\varepsilon_1$.

Bundan $\omega(B(z,\delta/2))\le\varepsilon_1<\varepsilon$. U holda $\omega(x)<\varepsilon$ bo'lib, W_ε ochiq to'plam bo'ladi.

Teorema isbotini yakunlash uchun

$$\{x:\omega(x)=0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}W_{1/n}$$

ekanligini e'tiborga olamiz, shu sababli (9-mashqni qarang) f akslantirish uzluksiz bo'ladigan barcha nuqtalar to'plami G_δ tipidagi to'plam bo'ladi.

1-natija. Har qanday $f:X\to Y$ akslantirishning uzilish nuqtalari to'plami F_σ tipidagi to'plam bo'ladi. (mashq)

2-teorema. (kategoriyalar haqida Ber teoremasi) Aytaylik, (X,ρ) to'la metrik fazo, va $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$ bo'lib, S_n to'plamlarning hech biri X da zich bo'lmasin. U holda $X\setminus S$ to'plam X ning hamma yerida zich bo'ladi. Xususan, X to'plamni hech yerda zich bo'lmagan to'plamlarning sanoqli birlashmasi ko'rinishda ifodalab bo'lmaydi.

Isbot. Aytaylik, B_0 X da bo‘sh bo‘lmagan shar bo‘lsin. $X \setminus S$ to‘plamning zich ekanligini ko‘rsatish uchun $X \setminus S \cap B_0 \neq \varnothing$ ekanligini ko‘rsatamiz. Induksiya bo‘yicha quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi ichma ich joylashgan sharlar ketma ketligini tuzamiz: $B_n = B_n(x_n, r_n)$, $r_n < 1/n$ va

$\overline{B_{n+1}} \subset B_n \setminus \overline{S_{n+1}}$.

Bunday sharlar ketma ketligini tuzish mumkinligini ko‘rsatamiz. S_{n+1}, demak $\overline{S_{n+1}}$ to‘plam zich emasligidan $B_n \setminus \overline{S_{n+1}} \neq \varnothing$ bo‘ladi. U holda biror $x_{n+1} \in B_n \setminus \overline{S_{n+1}}$ nuqtani olamiz. $\overline{S_{n+1}}$ yopiq to‘plam bo‘lganligidan $dist(x_{n+1}, S_{n+1}) > 0$ bo‘lib, kerak bo‘lgan B_{n+1} sharni tanlash mumkin. $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental bo‘ladi, chunki barcha $n, m > N$ uchun

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_N) + \rho(x_N, x_m) < \frac{2}{N}$$

tengsizlik bajariladi. X fazo to‘la bo‘lganligi uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashadigan x nuqta mavjud. Ammo barcha n lar uchun $x_{n+1} \in \overline{B_{n+1}}$. Shu sababli

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset B_0 \cap (X \setminus S)$. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

3-teorema. Barcha ratsional sonlarda uzluksiz va irratsional nuqtalarda uzilishga ega bo‘lgan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiya mavjud emas.

Isbot. 1-natijaga asosan barcha irratsional sonlar to‘plami F_σ tipidagi to‘plam emasligini ko‘rsatish yetarli. Teskaridan faraz qilamiz: aytaylik $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, va barcha F_n yopiq to‘plam bo‘lsin. U holda har bir F_n to‘plam hech yerda zich emas. Aks holda F_n zich bo‘lgan biror interval topilgan bo‘lar edi. Bu esa mumkin emas, chunki yopiq to‘plam bo‘lgan F_n shu intervalni o‘zida saqlagan bo‘lar edi. Bu esa $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ning hech bir intervalni saqlamasligiga zid.

$\mathbb{Q}$ to‘plam F_σ tipidagi to‘plam, chunki u sanoqli sondagi nuqtalar birlashmasidan iborat, albatta har bir nuqta yopiqdir. Shunday qilib biz $\mathbb{R}$ to‘plamni (to‘la metrik fazo bo‘lgan) hech yerda zich bo‘lmagan to‘plamlarning sanoqli birlashmasi ko‘rinishda ifodaladik. Bu esa kategoriyalar haqidagi Ber teoremasiga zid. 10- mashqda shu tasdiqning $p-$ adik analogi berilgan

6. Aytaylik, X metrik fazo bo‘lsin. Isbotlang:

1) agar F yopiq bo‘lsa, u holda u G_δ tipidagi to‘plam;

2) agar G ochiq bo‘lsa, u holda u F_σ tipidagi to‘plam.

7. $F_\sigma \cap G_\delta$ ga tegishli, ammo ochiq ham bo‘lmagan, yopiq ham bo‘lmagan

to'plam tuzing.

8. Agar A to'plam F_σ tipidagi to'plam bo'lsa, u holda uning $X \setminus A$ to'ldiruvchisi G_δ tipidagi to'plam va aksincha bo'lishini isbotlang.

9. f funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun $\omega(x_0) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

10. $\mathbb{Q}$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz, lekin $\mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Q}$ to'plamning har bir nuqtasida uzilishga ega bo'lgan $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ funksiyaning mavjudmasligini isbotlang.

3. Differensiallanuvchi p-adik funksiyalar

11. Aytaylik, $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ funksiya quyidagi formula bilan aniqlansin:

$$f\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{n^2}.$$

$f' = 0$, ya'ni f psevdodoimiy ekanligini isbotlang.

12. Aytaylik, $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ funksiya quyidagi formula bilan aniqlansin:

$$f\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^{n!}.$$

f funksiyaning in'ektiv, $f' = 0$ va f funksiyaning α tartibli Gyolder shartini qanoatlantirishini isbotlang, bu yerda α ixtiyoriy musbat son.

13. Aytaylik, $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ funksiya quyidagi formula bilan aniqlansin:

$$f\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 p^n.$$ f funksiyaning uzluksizligini isbotlang.

14. Har bir $j \in \mathbb{N}$ uchun $1^j, 2^j, 3^j, \ldots$ $p-$adik ketma-ketlikni interpolyatsiyalash mumkin ekanligini isbotlang.

15. Har bir $j \in \mathbb{N}$ uchun $\left[\frac{1}{p^j}\right], \left[\frac{2}{p^j}\right], \left[\frac{3}{p^j}\right], \ldots$ $p-$adik ketma-ketlikni interpolyatsiyalash mumkin ekanligini isbotlang.

16. $n \to (-1)^n$ $p-$adik ketma-ketlikni interpolyatsiyalash mumkin faqat va faqat $p = 2$ bo'lganda. Isbotlang.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR VA EL.MANZILLAR RO'YXATI:

1. Turgunbayev R.M. Matematik analiz 1-qism. Darslik. T.:- "Innovatsiya-ziyo". 2019. 340 b.

2. Каток С.Б. p-адический анализ в сравнении с вещественным. М.: МЦНМО, 2004,-112с.
3. Коблиц Н. p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.-192 с.
4. Alain M. Robert. A Course in p-adic Analysis. 2000. Springer-Verlag. New York, 438 p.
5. Fernando Q. Gouvea. p-adic Numbers. Corrected 3rd printing. 2003. Springer-Verlag. 301 p.
6. Khrennikov A., Anashin V. Applied algebraic dynamics. Copyright 2009 by Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 10785 Berlin, Germany.
7. Ayupov Sh.A., Turgunbayev R.M. p-adik analizga kirish.(oquv qo'llanma). 80-b. (OO'MTV qoshidagi muvofiqlashtiruvhi kengashga topshirilgan)

7-AMALIY MASHG'ULOT: Gilbert aksiomalar sistemasi va undan kelib chiqadigan naijalar.

Reja:

1. Gilbert aksiomalar sistemasi
2. Gilbert aksiomalar sistemasi aksiomalaridan kelib chiqadigan natijalar
3. Aksiomalar yordamida isbotlashga doir masalalar

Ushbu amaliy mashg'ulotda Gilbert aksiomalari sistemasining zidsizligi o'rganilib aksiomalardan kelib chiqadigan natijalar-teoremalar isbotlanadi.

Gilbert aksiomalar sistemasi

Birinchi gurux quyidagi sakkizta aksiomalardan tashkil topgan:

I_1 aksioma. A va B nuqtalar qanday bo'lmasin, bu nuqtalarning xar biridan o'tuvchi c to'g'ri chiziq mavjud.

I_2 aksioma. Turli A va B nuqtalar qanday bo'lmasin, bu nuqtalardan o'tuvchi bittadan ortiq bo'lmagan to'g'ri chiziq mavjud.

Bu ikki aksiomani quyidagicha ifodalash mumkin: Istalgan ikkita turli nuqtalar bu nuqtalardan o'tuvchi bitta va faqat bitta to'g'ri chiziqni aniqlaydi.

I_3 aksioma. Xar bir to'g'ri chiziqda kamida ikkita nuqta yotadi. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan kamida uchta nuqta mavjud.

I_4 aksioma. A, B, C nuqtalar qanday bo'lmasin, bu nuqtalarning xar biridan o'tuvchi π tekislik mavjud. Xar bir tekislikda kamida bitta nuqta yotadi.

I_5 aksioma. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan A, B, C nuqtalar qanday bo'lmasin, bu nuqtalarning xar biridan o'tuvchi bittadan ortiq bo'lmagan tekislik mavjud.

I_6 aksioma. d to'g'ri chiziqning A va B nuqtalari (ya'ni, d to'g'ri chiziqqa tegishli) π tekislikda yotsa, d to'g'ri chiziq π tekislikda yotadi.

***I_7* aksioma.** α va β tekisliklar bitta umumiy C nuqtaga ega bo'lsa (tekisliklarning xar birida yotuvchi nuqta), ularning yana kamida bitta umumiy D nuqtasi mavjud.

***I_8* aksioma**. Bir tekislikda yotmaydigan kamida to'rtta nuqta mavjud.

Bu aksiomalardan foydalanib, quyidagi teoremalar isbotlanadi.

1. *Ikkita to'g'ri chiziq bittadan ortiq bo'lmagan umumiy nuqtaga ega emas.*

2. *Ikkita tekislik yoki umumiy nuqtaga ega emas yoki umumiy to'g'ri chiziqqa ega.*

3. *Xar qanday tekislik bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan kamida uchta nuqtani o'z ichiga oladi.*

Tartib aksiomalari va I, II guruh aksiomalaridan kelib chiqadigan natijalar.

Biz to'g'ri chiziqdagi nuqta shu to'g'ri chiziqdagi boshqa ikkita nuqtaga nisbatan tayin munosabatda «orasida yotadi» bo'la oladi deb faraz qilamiz. Bunda quyidagi aksiomalarning shartlari bajarilgan bo'lishi kerak.

***II_1* aksioma**. B nuqta A va C nuqtalar orasida yotsa, u xolda A, B, C bitta to'g'ri chiziqning turli nuqtalari bo'lib, B nuqta S va A nuqtalar orasida xam yotsin.

***II_2* aksioma**. A va C nuqtalar qanday bo'lmasin, AC to'g'ri chiziqda xech bo'lmaganda bitta B nuqta mavjud bo'lib, C nuqta A va B nuqtalar orasida yotsin.

***II_3* aksioma**. To'g'ri chiziqning ixtiyoriy uchta nuqtasi ichidan qolgan ikkitasining orasida yotuvchi bittadan ortiq bo'lmagan nuqtasi mavjud.

II_1 - II_3 aksiomalar tartibning chiziqli aksiomalari deyiladi.

Ta'rif. A va B nuqtalar juftligi kesma deb ataladi va AB yoki BA kabi belgilanadi. A va B nuqtalar orasida yotuvchi nuqtalarni AB kesmaning ichki nuqtalari yoki oddiy qilib AB kesmaning nuqtalari, A va B nuqtalarni esa kesmaning uchlari deyiladi.

Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan A, B, C nuqtalar berilgan bo'lsin. AB, BC, AC kesmalardan tashkil topgan figura uchburchak, A, B, C nuqtalar uchburchakning uchlari, AB, BC, AC kesmalar uchburchakning tomonlari deyiladi.

Ta'rif. *Berilgan to'g'ri chiziq kesmaning biror ichki nuqtasini o'z ichiga olsa, to'g'ri chiziq kesmani kesib o'tadi yoki to'g'ri chiziq bilan kesma kesishadi deyiladi.*

***II_4* aksioma**. *(Pash aksiomasi)* A, B, C – bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtalar va a ABC tekisligida yotib, A, B, C nuqtalarning birortasidan xam o'tmaydigan to'g'ri chiziq deb faraz qilaylik. Agar a to'g'ri chiziq AB kesmaning biror nuqtasidan o'tsa, u xolda a to'g'ri chiziq AC va BC kesmalardan faqat bittasining ichki nuqtasidan o'tadi.

2.1. *Xar qanday* AC *kesma kamida bitta* D *nuqtani o'z ichiga olishini* *isbotlang.*

2.2. *Bir to'g'ri chiziqda yotuvchi xar qanday* A, B, C *nuqtalardan xar doim qolgan ikkitasining orasida yotuvchi bitta nuqta mavjudligini isbotlang.*

Nur tushunchasi. Nuqtalarning o'zaro joylashishi.

Bizga a to'g'ri chiziq va unda O nuqta berilgan bo'lsin. Boshi O nuqtada bo'lgan nurlarning birini qaraylik. Bu nurda A nuqta OB kesmaga tegishli bo'lsa, A nuqta B nuqtani ergashtiradi deb olamiz. U xolda A nuqta B nuqtani ergashtirsa, B nuqta C nuqtani ergashtirsa, A nuqta C nuqta ergashtirishi kelib chiqadi. Bundan xar bir nur tartiblangan deb xulosa qilish mumkin.

Endi bu nurlardan bittasini birinchi, boshqasini ikkinchi deb olamiz va bu nurlarda kiritilgan tartib yordamida a to'g'ri chiziqda quyidagicha tartib kiritamiz:

1) Birinchi nurning A va B nuqtalarini olaylik.

Agar birinchi nurda B nuqta A nuqtani ergashtirsa, u xolda a to'g'ri chiziqda A nuqta B nuqtani ergashtiradi;

2) Birinchi nurning barcha nuqtalari a to'g'ri chiziqda O nuqtani ergashtiradi.

3) Birinchi nurning barcha nuqtalari a to'g'ri chiziqda ikkinchi nurning barcha nuqtalarini ergashtiradi.

4) O nuqta a to'g'ri chiziqda ikkinchi nurning barcha nuqtalarini ergashtiradi.

5) Ikkinchi nurning A va B nuqtalari uchun, ikkinchi nurda A nuqta B nuqtani ergashtirsa, a to'g'ri chiziqda A nuqta B nuqtani ergashtiradi.

1)-5) shartlar yordamida kiritilgan tartib a to'g'ri chiziqdagi tartibni aniqlaydi.

Biz yuqorida keltirgan jumlalar to'g'ri chiziqdagi nuqtalarning joylashishiga nisbatan edi. Xuddi shunga o'xshash tekislikdagi va fazodagi nuqtalarning joylashishiga ham keltirish mumkin. Bu jumlalarni talabalarga mustaqil masala sifatida beramiz.

Teorema 1. To'g'ri chiziqdagi tartib uchun tranzitivlik xossasi o'rinli.

Teorema 2. Tekislikdagi har qanday A va B nuqtalar uchun AB to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan C nuqta mavjudligini isbotlang.

Teorema 3. To'g'ri chiziq qanday bo'lmasin unga tegishli bo'lgan va tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjudligi isbotlansin.

Kongruentlik aksiomalari va I- III guruh aksiomalaridan kelib chiqadigan natijalar:

Berilgan kesma boshqa kesma bilan tayin munosabatda «kongruent» yoki «teng» deb faraz qilamiz. Kongruentlik munosabati quyidagi aksiomalarni qanoatlantirishi kerak;

III₁-aksioma. a to'g'ri chiziqda A va B nuqtalar shu to'g'ri chiziqda yoki boshqa a' to'g'ri chiziqda yotuvchi A' nuqta berilgan bo'lsin, u xolda berilgan A' nuqtaga ko'ra a' to'g'ri chiziq yo'nalishida $A'B'$ kesma AB kesmaga kongruent bo'ladigan xar doim bitta va faqat bitta B' nuqta topish mumkin.

Kesmalarning kongruentlik munosabati $AB = A'B'$ kabi belgilanadi. Xar bir AB kesma uchun $AB = BA$ kongruentligi talab qilinadi.

III₂-aksioma. Bitta kesmaga kongruent bo'lgan kesmalar o'zaro kongruent.

III₃-aksioma. a to'g'ri chiziqda umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan AB va BC kesmalar berilgan bo'lsin. $A'B'$ va $B'C'$ kesmalar shu to'g'ri chiziqda yoki boshqa a' to'g'ri chiziqda yotuvchi va umumiy ichki nuqtalarga ega bo'lmagan kesmalar bo'lsin. Agar bunda $AB = A'B'$ va $BC = B'C'$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, u xolda $AC = A'C'$ munosabat o'rinli.

Ta'rif. Bizga a to'g'ri chiziqda $A, B, C, ..., K, L$ va a' to'g'ri chiziqda $A', B', C', ..., K', L'$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Agar AB va $A'B'$, AC va $A'C'$, BC va $B'C', ..., KL$ va $K'L'$ kesmalar o'zaro kongruent bo'lsa, berilgan ikkala nuqtalar tizimi o'zaro kongruent deyiladi.

Ta'rif. Bizga M va M' to'plamlar berilgan va ularning nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsin. AB kesmaning aksini $A'B'$ deb belgilaylik. Bu moslik ixtiyoriy AB kesmani unga kongruent bo'lgan $A'B'$ kesmaga mos qo'ysa, M va M' to'plamlar kongruent, o'rnatilgan moslik esa harakat deyiladi.

Ta'rif. Bir nuqta (O nuqta)dan chiquvchi ikki h, k nur (bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan) dan iborat geometrik shakl burchak deyiladi. h, k nurlar burchak tomonlari, O nuqta burchak uchi deyiladi. Burchak $\angle(h, k)$ yoki $\angle(k, h)$ kabi belgilanadi. A va B nuqtalar mos ravishda h va k nurlarning nuqtalari bo'lsa, $\angle(h, k)$ burchak $\angle AOB$ yoki $\angle O$ kabi xam belgilanadi.

3.1. *Boshi burchak uchida bo'lib, o'zi burchak ichida joylashgan l nur, uchlari burchakning xar xil tomonlarida bo'lgan AB kesmani kesadi va aksincha, burchak uchini uchlari burchak tomonlarida bo'lgan kesmaning ichki nuqtasi bilan tutashtiruvchi nur burchakning ichida joylashishini isbotlang*.

III₄-aksioma. Bizga α tekislikda $\angle(h, k)$ burchak va shu tekislikda yoki boshqa α' tekislikda a' to'g'ri chiziq, xamda a' to'g'ri chiziq bilan aniqlangan tayin yarim tekislik berilgan bo'lsin.

a' to'g'ri chiziqda boshi O' nuqtada bo'lgan h' nur qaraymiz.

α' tekislikning berilgan yarim tekisligida $\angle(h, k)$ burchakka kongruent burchak xosil qiladigan yagona k' nur topish mumkin va $\angle(h', k')$ burchakning barcha ichki nuqtalari a' bilan aniqlangan berilgan yarim tekislikda yotadi. Burchaklarning kongruentligi $\angle(h, k) = \angle(h', k')$ kabi belgilanadi.

Xar bir burchak o'ziga kongruent, ya'ni $\angle(h, k) = \angle(h, k)$ va $\angle(h, k) = \angle(k, h)$. ***III₅-aksioma.*** Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan A, B, C va A', B', C' nuqtalar berilgan bo'lsin. Agar $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ va $\angle BAC = \angle B'A'C'$ munosabat o‘rinli ekanidan

$\angle ABC = \angle A'B'C'$ va $\angle ACB = \angle A'C'B'$ munosabatlar o‘rinliligi kelib chiqadi.

Ta’rif. ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar berilgan bo‘lsin. Agar $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar kongruent deyiladi va $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ kabi belgilanadi.

Teorema. (Uchburchaklar kongruentligining birinchi alomati). ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar uchun $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar kongruent áûëèøèíè èñáîòëàíã.

Teorema (Uchburchaklar kongruentligining ikkinchi alomati). ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar uchun $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar kongruent áûëèøèíè èñáîòëàíã.

Teorema (Uchburchaklar kongruentligining uchinchi alomati). ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar uchun $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, ABC va $A'B'C'$ uchburchaklar kongruent

Teorema. Kongruent burchaklarning qo‘shnilari xam kongruent.

Teorema. Barcha to‘g‘ri burchaklar teng.

Teorema. Uchburchakning tashqi burchagi o‘ziga qo‘shni bo‘lmagan istalgan ichki burchagidan katta.

Teorema. Har qanday uchburchakning kamida ikkita burchagi o‘tkir.

Teorema. Vertikal burchaklar kongruent.

Teorema . Bitta burchakka kongruent bo‘lgan ikkita burchak o‘zaro kongruent.

Teorema Har bir kesmaning yagona o‘rtasi mavjud.

Teorema Kesmaning o‘rtasi ichki nuqta.

Teorema Uchburchaklarning ikki tomoni va shu tomonlardan biriga o‘tkazilgan medianasi kongruent bo‘lsa bu uchburchaklar kongruent.

Teorema Uchburchaklarning ikki tomoni va uchinchi tomonining medianasi kongruent bo‘lsa bu uchburchaklar kongruent.

Teorema Uchburchaklarning bir tomoni, shu tomonga o‘tkazilgan medianasi va medianasining shu tomon bilan hosil bo‘lgan burchaklari kongruent bo‘lsa bu uchburchaklar kongruent.

Teorema Uchburchaklarning bitta burchagi, shu burchak bissektrisasi va burchakning bitta tomoni bo‘yicha kongruentligini isbotlang.

Teorema ABC uchburchakning AB tomonida D nuqta $A_1B_1C_1$ uchburchakning A_1B_1 tomonida esa D_1 nuqta olingan. ADC va $A_1D_1C_1$ uchburchaklar, xamda DB va D_1B_1 kesmalar teng ekani ma’lum. U holda ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar teng bo‘ladi.

Teorema Agar ABC uchburchakning BD medianasi $A_1B_1C_1$ uchburchakning A_1D_1 medianasiga teng bo‘lsa va $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$, $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$ bo‘lsa, bu uchburchaklarning tengligini isbotlang.

Teorema $AB < A'B'$ va $A'B' < A''B''$ munosabatlardan $AB' < A''B''$ munosabat kelib chiqishini ko‘rsating.

Teorema Agar CD kesma AB kesmaning qismi bo‘lsa, $CD < AB$ munosabat o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

Teorema Uchburchak katta burchak qarshisida katta tomon, katta tomoni qarshisida katta burchak yotishini isbotlang.

Teorema Xamma burchaklari teng uchburchak teng tomonli uchburchak bo‘lishini isbotlang.

Teorema Teng yonli uchburchak tomonlarining o‘rtalari yana teng yonli uchburchakning uchlari bo‘lishini isbotlang.

Teorema Teng tomonli uchburchak tomonlarining o‘rtalari yana teng tomonli uchburchakning uchlari bo‘lishini isbotlang.

Teorema Teng yonli uchburchakda: 1) asoslaridan o‘tkazilgan bissektrisalar tengligini; 2) shu uchlardan chiqarilgan medianalar xam tengligini isbotlang.

Teorema Teng tomonli uchburchakning xamma burchaklari o‘zaro teng.

Uzluksizlik aksiomasi va I- IV guruh aksiomalaridan kelib chiqadigan natijalar. Kesmalarni va burchaklarni o‘lchash. To‘g‘ri chiziq va aylananing kesishishi.

Aksiomalarning to‘rtinchi guruxi bitta Dedekind aksiomasidan iborat.

IV. Aksioma. To‘g‘ri chiziqdagi ikkita yo‘nalishdan birida birinchi sinfga tegishli xar bir nuqta ikkinchi sinf nuqtalarini ergashtiradigan qilib, to‘g‘ri chiziq nuqtalari ikkita bo‘sh bo‘lmagan sinflarga ajratilgan bo‘lsin. U xolda quyidagi ikki xoldan biri o‘rinli: g‘

1) birinchi sinfda shu sinfning qolgan barcha nuqtalariga ergashadigan nuqta mavjud;

2) ikkinchi sinfda shu sinfning qolgan barcha nuqtalarini ergashtiradigan nuqta mavjud.

Teorema *To‘g‘ri chiziqda ikki yo‘nalishdan biri uchun*

1. $A < A_1 < A_2 < \ldots$

2. $AA_1 = A_1A_2 = \ldots$ *shartlarni qanoatlantiruvchi* $A; A_1; A_2; \ldots$ *nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. U xolda, xar qanday* $B > A$ *shartni qanoatlantiruvchi nuqta uchun, shunday* n *soni mavjudki* $B < A_n$ *munosabat o‘rinli bo‘lishini isbotlang.*

Bu jumla ba’zi adabiyotlarda Arximed aksiomasi deb yuritiladi.

Teorema *To‘g‘ri chiziqda* $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \ldots$ *shartni qanoatlantiruvchi yopiq kesmalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin. Agar uzunligi ixtiyoriy* A_nB_n

kesmaning uzunligidan kichik bo'lgan kesma mavjud bo'lmasa, u xolda barcha A_nB_n *kesmalarga tegishli bo'lgan yagona* C *nuqta mavjud* bo'lishini isbotlang.

Bu jumla C nuqta yagonaligi talab qilinmagani xolda Kantor aksiomasi IV aksioma esa Dedekind teoremasi deyiladi.

Bizga α tekislik va unda yotuvchi O nuqta xamda r kesma berilgan bo'lsin.

Ta'rif. α tekislikdagi $OX = r$ munosabatni qanoatlantiruvchi barcha X nuqtalar to'plami markazi O nuqtada, radiusi r ga teng aylana deyiladi, α tekislikning $OX < r$ $(OX > r)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi X nuqtalari to'plami aylanaga nisbatan ichki (tashqi) nuqtalar deyiladi.

Aksiomalar yordamida isbotlashga doir masalalar

Teorema Markazi O nuqtada, radiusi r ga teng bo'lgan C aylanaga nisbatan ichki P nuqtadan o'tuvchi a to'g'ri chiziq aylanani ikkita nuqtada kesishishini isbotlang.

4.1. Barcha kesmalarda quyidagi:

1) Har qanday AB kesma uchun $\mu(AB) > 0$;

2) AB va CD kongruent kesmalar uchun $\mu(AB) = \mu(CD)$;

3) A va V nuqtalar orasida joylashgan S nuqta uchun $\mu(AC) + \mu(CB) = \mu(AB)$;

4) SHunday A_0 V_0 kesma mavjudki, $\mu(A_0B_0) = 1$, shartlarni qanoatlantiruvchi μ funksiya mavjud va yagonaligini isbotlang.

Bu μ funksiyaning kesmadagi qiymati kesmaning uzunligi, A_0V_0 kesma esa o'lcham birligi deyiladi.

4.2. Ixtiyoriy musbat α soni uchun, uzunligi α ga teng a kesma mavjud, ya'ni $\mu(a) = \alpha$ ligini isbotlang.

4.3. Barcha burchaklarda quyidagi:

1. Har qanday (h, k) burchak uchun $O(h, k) > 0$;
2. (h, k) va (l, m) kongruent burchaklar uchun $O(h, k) = O(l, m)$;
3. h va k nurlar orasidan o'tuvchi l nur uchun $O(h, l) + O(l, k) = O(h, k)$;
4. SHunday (h_0, k_0) burchak mavjudki, $O(h_0, k_0) = 1$, shartlarni qanoatlantiruvchi O funksiya mavjud va yagonaligini isbotlang.

Bu O funksiyaning burchakdagi qiymati burchak kattaligi o'lchovi, (h_0, k_0) burchak esa burchak kattaligining o'lchov birligi deyiladi.

4.4. Markazlari O_1 va O_2 nuqtalarda radiuslari mos ravishda r_1 va r_2 ga teng aylanalar berilgan bo'lib, ular uchun quyidagi munosabatlar

$$r_1 \le r_2, \qquad r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_1 + r_2$$

o'rinli bo'lsin. U xolda berilgan aylanalar faqat ikkita kesishish nuqtasiga ega bo'lishini isbotlang.

Parallellik aksiomasi va I- V guruh aksiomalaridan kelib chiqadigan natijalar.

Uchburchaklarning o‘xshashligi.

Aksiomalarning beshinchi guruxi bitta parallellik aksiomasidan iborat.

***V* aksioma.** Bizga a to‘g‘ri chiziq va undan tashqarida yotuvchi A nuqta berilgan bo‘lsin. U xolda A nuqta xamda a to‘g‘ri chiziq yotuvchi tekislikda A nuqtadan a to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan bittadan ortiq bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Bu to‘g‘ri chiziq berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel deyiladi.

5.1. Quyidagi jumlalar o‘zaro ekvivalientligini isbotlang:

a) (***V*** postulat) Ikki to‘g‘ri chiziqni kesuvchi to‘g‘ri chiziq ular bilan ichki bir tomonli burchaklar xosil qiladi, bu ikki to‘g‘ri chiziq ichki bir tomonli burchaklar yig‘indisi $2d$ dan kichik bo‘lgan tomonda kesishadi.

b) Berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan unga parallel faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

c) Ikki parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi natijasida o‘zaro teng mos burchaklar xosil bo‘ladi.

d) Uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi $2d$ ga teng.

e) Berilgan to‘g‘ri chiziqdan bir tarafda xamda bir xil masofada joylashgan nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziq xosil qiladi.

f) Ikki parallel to‘g‘ri chiziqdan birini kesuvchi to‘g‘ri chiziq ikkinsini xam kesib o‘tadi.

g) Burchak ichida yotuvchi xar qanday nuqtadan uning ikkala tomonini kesuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

h) Etarlicha katta yuzaga ega bo‘lgan uchburchaklar mavjud.

i) O‘xshash, lekin teng bo‘lmagan uchburchaklar mavjud.

j) O‘tkir burchakning bir tomoniga o‘tkazilgan perpendikulyarlar ikkinchi tomonini xam kesadi.

k) Ikki parallel to‘g‘ri chiziqni uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi natijasida xosil bo‘lgan ichki bir tomonli burchaklar yig‘indisi $2d$ ga teng.

l) Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa chekli.

m) Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan aylana o‘tkazish mumkin.

n) Uchburchak balandliklari kesishadi.

o) **(**Pifagor teoremasi). To‘g‘ri burchakli uchburchak katetlari uzunliklari kvadratlarining yig‘indisi gipotenuza uzunligining kvadratiga teng.

p) Aylanaga ichki chizilgan muntazam oltiburchakning tomoni aylana radiusiga teng.

8-AMALIY MASHG'ULOT: Tekislikda yasashga doir masalalarni yechish usullari. Uchburchaklardagi geometrik yasashlar

Reja:

1. Yasashga doir elementar masalalar
2. Yasashga doir masalalarni yechish usullari
3. Uchburchaklardagi geometrik yasashlar.

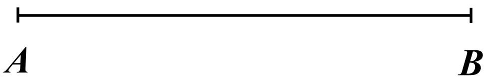
Ushbu amaliy mashg'ulotda tekislikda yasashga doyir masalalarning yechish bosqichlari, usullari o'rganilib ularga doyir konstruktiv masalalar yechiladi. Uchburchakdagi geometric yasashlarga doir masalalar tiplarga ajratilgan holda chizg'ich va tsirkul yordamida yasaladi.

1. Yasashga doir elementar masalalar,

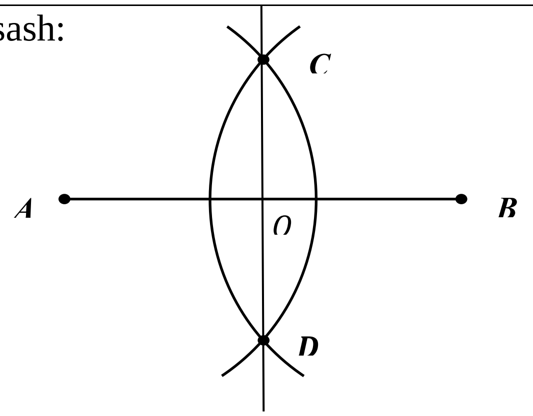
Kontruktiv masalalarni yechishda ularni ko'p uchrab turadigan eng sodda masalalarga keltirib yechiladi. Bunday masalalarni odatda elementar masalalar yoki asosiy geometrik yasashlar deb ataladi. Ularning quyidagi ro'yxati albatta shartlidir.

1.Berilgan kesmani o`rtasini topish.

Berilgan: AB kesma.

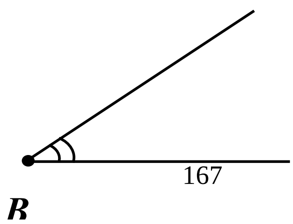


Topish kerak: O nuqta – AB kesma o`rtasi.

Reja:	Yasash:
1⁰. $\omega_1(A,r)$, bu yerda $r \succ \dfrac{AB}{2}$; 2⁰. $\omega_2(B,r)$. 3⁰. $\omega_1 \cap \omega_2 = \{C,D\}$ 4⁰. $CD \cap AB = \{O\}$ 5⁰. O - nuqta biz izlayotgan nuqta.	

2. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish (yoki burchak bissektrisasini topish).

Berilgan: $\angle$ABC.



C

Yasash kerak: $\angle$ABC burchakning BD – bissektrisani.

Reja:

1⁰. $\omega_1(B,r)$.

2⁰. $\omega_1 \cap BA=\{K\}$

3⁰. $\omega_1 \cap BC=\{L\}$

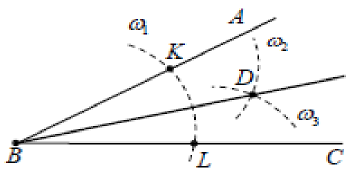
4⁰. $\omega_2(K,r_1)$.

5⁰. $\omega_3(L,r_1)$.

6⁰. $\omega_2 \cap \omega_3=\{D\}$

7⁰. B va D nuqtalarni tutashtiramiz, natijada biz izlayotgan BD – bissektrisa hosil bo`ladi.

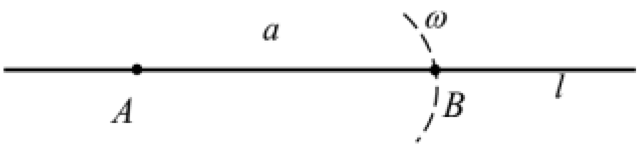
Yasash:



1. $A \in l$ - *ixtiyoriy*.
2. $\omega(A,a)$.
3. $\omega \cap l \equiv B$.
4. $AB-$ yasash talab etilgan kesmadir.

3.Berilgan kesmaga teng kesma yasash.

Berilgan: a kesma



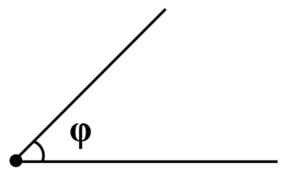
Yasash kerak: AB kesma a ga teng bo'lgan kesma.

Yasash:

4.Berilgan burchakka teng burchak yasash.

Berilgan: $\angle$AOB=φ.

Yasash kerak: $\angle AOB = \angle NMK$



Reja:

1⁰. $\forall$ $M \in l$ – to`g`ri chiziq

2⁰. $\omega_1(M,OC)$.

3⁰. $\omega_1 \cap l = K$.

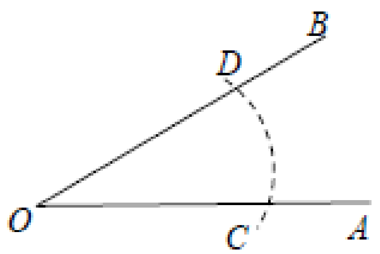
4⁰. $\omega_2(K,CD)$.

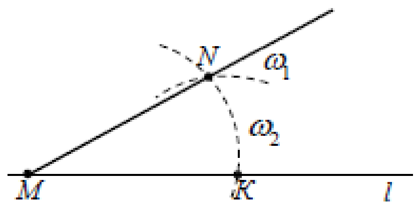
5⁰. $\omega_1 \cap \omega_2 = N$

6⁰. M va N larni tutashtiramiz.

7⁰. Izlangan burchak $\angle KMN$.

Yasash:





5.Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazish.

Berilgan: a – to`g`ri chiziq va $A \notin a$ nuqta.

Yasash kerak: A nuqtadan o`tuvchi va *a* ga parallel $c$ to`g`ri chiziq.

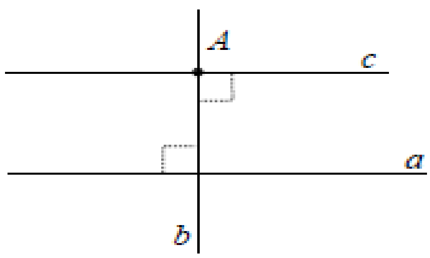
Reja:

1⁰. $A \in b, b \perp a$.

2⁰. $A \in c, c \perp b$.

3⁰. *c* – izlangan to`g`ri chiziq.

Yasash:



6.Berilgan to'g'ri chiziqqa berilgan nuqtadan perpendikulyar o'tkazish (2 hol).

1-hol.

Berilgan: *a* – to`g`ri chiziq va $A \in a$.

Reja:

$1^0.\ \omega_1(A,r).$ r>0

$2^0.\ \omega_1 \cap a = \{B,C\}.$

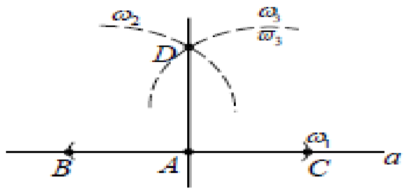
$3^0.\ \omega_2(B,r_1), r_1 \succ \frac{BC}{2};$

$4^0.\ \omega_3(C,r_1).$

$5^0.\ \omega_2 \cap \omega_3 = D.$

6^0. AD - biz izlayotgan to`g`ri chiziq.

Yasash:



2-hol.

Berilgan: *a* – to`g`ri chiziq va $A \notin a$.

Reja:

$1^0.\ \omega_1(A,r).$

$2^0.\ \omega_1 \cap a = \{B,C\}.$

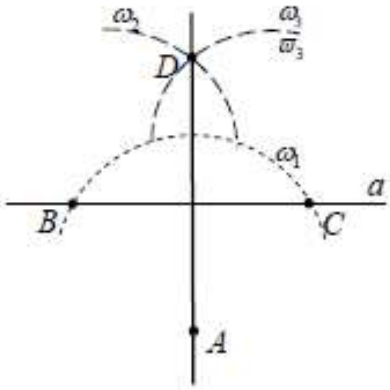
$3^0.\ \omega_2(B,r_1), r_1 \succ \frac{BC}{2};$

$4^0.\ \omega_3(C,r_1).$

$5^0.\ \omega_2 \cap \omega_3 = D.$

6^0. AD - biz izlayotgan to`g`ri chiziq.

Yasash:



7.Uchta tomoni berilgan uchburchak yasash.

Berilgan: *a*=BC, *b*=AC, *c*=AB – uchburchak tomonlari.

Yasash kerak: ΔABC.

Reja;

$1^0.\ \forall\ A \in l$ – to`g`ri chiziq.

$2^0.\ \omega_1(A,b).$

$3^0.\ \omega_1 \cap l = C.$

4⁰. $\omega_2(A,c)$.

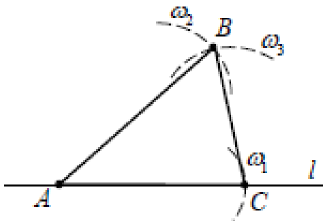
5⁰. $\omega_3(C,a)$.

6⁰. $\omega_2 \cap \omega_3 = \{B\}$.

7⁰. ΔABC - biz izlagan uchburchak.

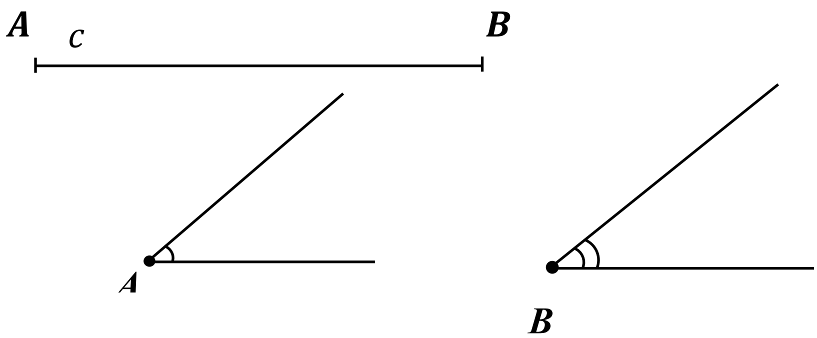
Izoh: a+b>c, a+c>b, b+c>a shartlarning birortasi o`rinli bo`lsa masala yechimga ega.

Yasash:



8.Bir tomoni va unga yopishgan 2 burchagi bo'yicha uchburchak yasash.

Berilgan: *c*=AB kesma va ∠A va ∠B.



Yasash kerak: ΔABC.

Reja:

1⁰. $\forall$ A$\in l$ – to`g`ri chiziq.

2⁰. $\omega(A,c)$.

3⁰. $\omega \cap l = \{B\}$.

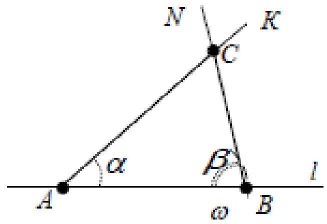
4⁰. ∠BAK=∠A.

5⁰. ∠ABN=∠B.

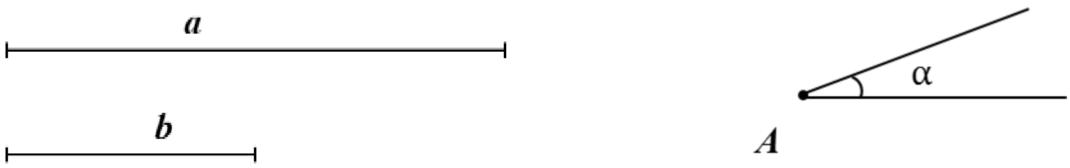
6⁰. AK∩BN=C.

7⁰. ΔABC - biz izlagan uchburchak.

Yasash:

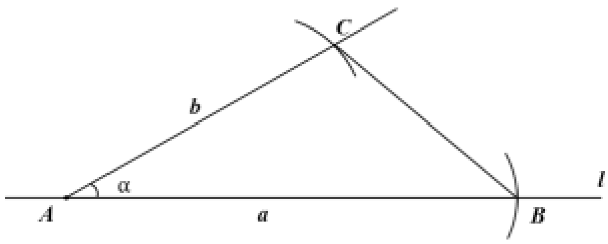


9.Ikki tomoni va ular orasidagi burchak berilgan uchburchak yasash.
Berilgan: b, a va $\angle$A.



Yasash kerak: ΔABC.
Reja:
1°. $\forall$ A$\in l$ – to`g`ri chiziq.
2°. A nuqtadan $\angle$A=$\angle$KAN ni qo`yamiz.
3°. $\omega_1(A,b)$.
4°. $\omega_2(A,c)$.
5°. $\omega_1 \cap AK = \{C\}$.
6°. $\omega_2 \cap AN = \{B\}$.
7°. B va C nuqtalarni tutashtirib, izlanayotgan ΔABC ni hosil qilamiz.

Yasash :



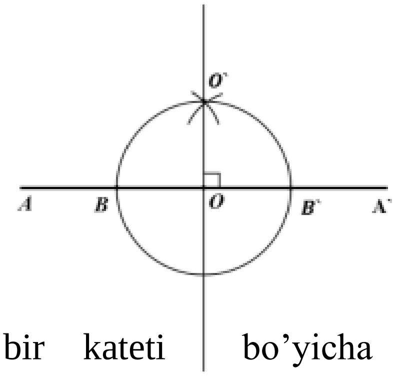
10.Berilgan nurni uchidan (boshidan) unga perpendikulyar chiqarish.
Reja:
1°.Berilgan: OA – nur . O – nurning uchi.
2°. $w(o,r)$.
3°.O nuqtada o`ng tomonga OA` nur chiqaramiz.
4°. $\omega \cap A`A = \{B`, B\}$.
5°. $\omega_1(B`, r_1)$.

$6^0. \omega_2(B, r_1).\ r_1 > \frac{r}{2}.$

$7^0. \omega_1 \cap \omega_2 = \{O_1\}.$

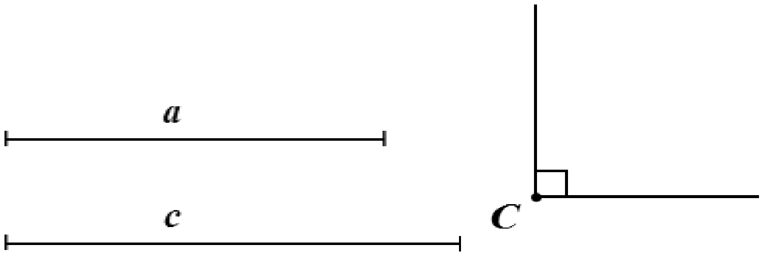
$8^0. OO_1 \perp OA$

Yasash:



11. Gipotenuzasi va bir kateti bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasash.

Berilgan: a va c, $\angle$C=90⁰.



Yasash kerak: To`g`ri burchakli - ΔABC.

Reja:

$1^0. \forall$ C$\in l$.

2^0. C dan l to`g`ri chiziqqa l_1 perpendikular chiqaramiz.

$3^0. \omega(C, a).$

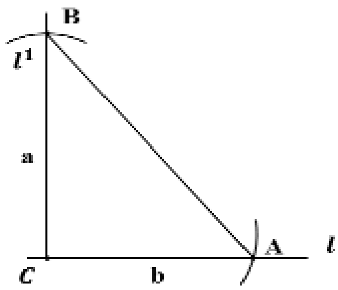
$4^0. \omega \cap l_1 = \{B\}$

$5^0. \omega_1(B, c).$

$6^0. \omega_1 \cap l = \{A\}.$

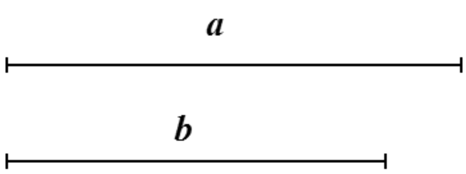
7^0. ΔABC - izlangan to`g`ri burchakli uchburchak

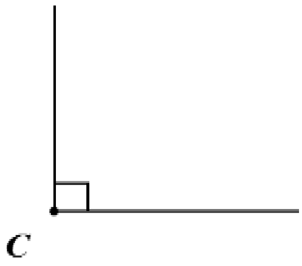
Yasash:



12. Ikki kateti bo'yicha to'g'ri burchakli uchburchak yasang va h.k.

Berilgan: a va b, $\angle$C=90⁰.



Yasash 

kerak: To`g`ri burchakli - ΔABC.

Reja:

1⁰. $\forall$ C$\in l$.

2⁰. C dan l to`g`ri chiziqqa l_1 perpendikular chiqaramiz (5-masala 2-hol).

3⁰. $\omega(C,a)$.

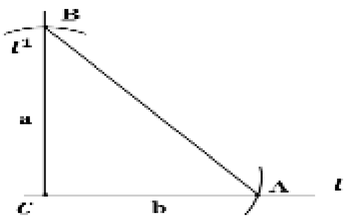
4⁰. $\omega \cap l_1 = \{B\}$

5⁰. $\omega_1(C,b)$.

6⁰. $\omega_1 \cap l = \{A\}$.

7⁰. ΔABC - izlangan to`g`ri burchakli uchburchak

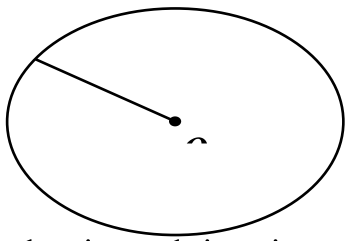
Yasash:



13. Berilgan nuqtadan aylanaga urinma o'tkazish.

1-xol

Berilgan: A nuqta va $\omega(O,r)$.



Reja :

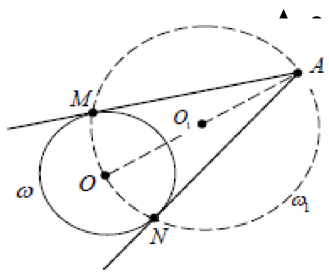
1⁰. O va A nuqtalarni tutashtiramiz.

2⁰.O_1 – OA kesmaning o`rtasini topamiz.

3⁰. $\omega_1(O_1, OO_1)$.

4⁰. $\omega \cap \omega_1 = \{M, N\}$

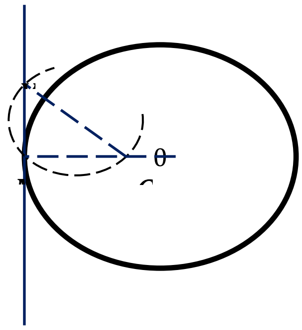
5⁰. AM va AN biz izlayotgan urinmalardir.



Yasash:

2-xol.

Berilgan nuqta aylana ustida yotadi. Berilgan M nuqtaning shu aylanada yotishi shu M nuqtani urinish nuqtasi ekanligini ko`rsatadi. Bu xolda izanuvchiurinma berilgan aylananing OM radiusiga M nuqtadan perpendikulyar bo`ladi. Demak berilgan M nuqtani O markaz bilan tutashtirib, bu radiusga uning M uchidan perpendikulyar o`tkazsak, izlanuvchiurinma hosil bo`ladi.



2. Yasashga doir masalalarni yechish usullari

To'g'irlash metodi.

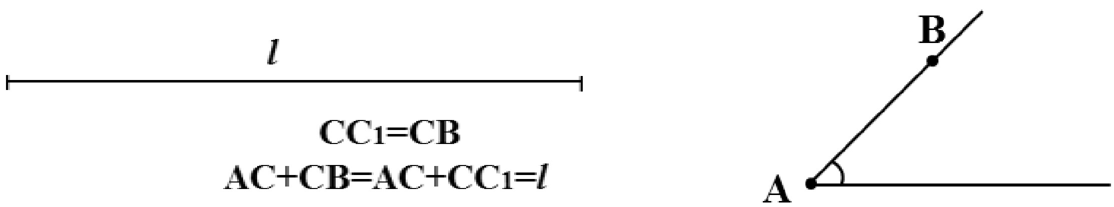
Bir to'g'ri chiziqda yotmagan kesmalarning, masalan siniq chiziq bo'g'inlarining algebraik yig'indisiga teng kesma yasash, kesmalarni to'g'rilash deb ataladi. To'g'rilashdan foydalanib masala yechish – yasashda to'g'rilash metodi deyiladi.

Yasashga doir masaladagi ma'lum elementlar qatorida izlanayotgan figura chiziqli noma'lum elementlarining yig'indisi yoki ayirmasi berilgan bo'lsa, bunday masala to'g'rilash metodi bilan oson yechiladi.

$CA=AD$, $CB=BF$ deb olsak, $DF=2p$, $CH=h_c$, $\angle CDA = \frac{\angle A}{2}$;

1-masala. A burchak va uning bir tomonida B berilgan; bu burchakning ikkinchi tomonida shunday C nuqta topingki, $|AC|+|CB|$ yig`indi berilgan $l$ kesmaga teng bo`lsin.

Berilgan: l – kesma, $\angle$A va uning bir tomonida B nuqta.



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz va quyidagi rejani tuzamiz.

Reja:

1⁰. $\forall A \in l_1$ nuqtadan $\angle$A ni qo`yamiz.

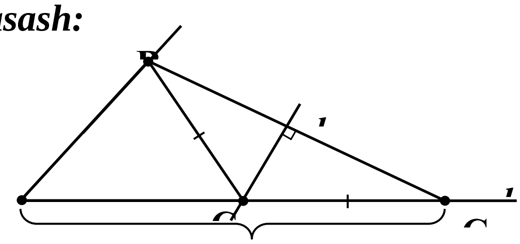
2⁰. $\angle$A burchakning B nuqta yotmagan tomoniga |AC|+|CB| kesmani qo`yib, C_1 nuqtani hosil qilamiz.

3⁰. B va C_1 nuqtalarni tutashtirib, BC_1 kesmaning o`rta perpendikulari $l_2$ ni o`tkazamiz.

4º. $l_1 \cap l_2 = \{C\}$ va B , C nuqtalarni tutashtiramiz.

5º. C nuqta biz izlayotgan nuqta.

Yasash:



Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle$BAC=$\angle$A, $\Delta BCC_1$ dan $BC_1$ ning o`rta perpendikulari ham balandlik, ham mediana ekanligidan bu uchburchak teng yonli va $BC=CC_1$. $AC+CC_1=AC+BC$.

Tekshirish: Masala har doim l yechimga ega.

Geometrik o`rinlar metodi va unga doir masalalar

Agar birorta to`plamning (figuraning) nuqtalari bitta $\alpha$ shartni qanoarlantirsa, bu nuqtalarga geometrik o`rin deyiladi. Bu nuqtalar to`plamini nuqtalarini yasash uslubi geometrik o`rin metodi deb yuritiladi.

Geometrik o'rinlar metodida masala quyidagi ikki shartni qanoatlantiruvchi nuqtani topishga keltiriladi: birinchi α_1 shartni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni F_1 figuradan; ikkinchi α_2 shartni bajaruvchi nuqtalarning geometrik o'rni F_2 figuradan iborat bo'lsin. Har ikki α_1 va α_2 shartni qanoatlantiradigan nuqtalar $F_1 \cap F_2$ kesishmaga tegishli bo'ladi.

Yuqoridagi α_i shartni qanoatlantiruvchi F_i figuralar to`g`ri chiziq, aylana yoki ularning birorta bo`lagidan iborat bo`lishi kerak. $P_1 - P_5$ shartlarni qanoatlantiruvchi figura nuqtalari yasalgan hisoblanadi.

Tekislikning ma'lum talablarga javob beruvchi biror yoki bir nechta nuqtasini topishga doir masalalar yoki shunday nuqtalarni topishga keltirib yechiladigan masalalar geometrik o'rinlar metodi bilan yechiladi. Shu sababli bu metodga kesishmalar metodi deb ham yuritiladi.

Bu metod bilan masala yechish uchun o'rta maktabda ma'lum bo'lgan quyidagi asosiy geometrik o'rinlarni puxta bilish zarur.

1. Tekislikning biror O nuqtasidan ma'lum r uzoqlikda yotgan nuqtalarning geometrik o'rni markazi shu O nuqtadan radiusi r bilan chizilgan aylana bo'ladi.

2. Berilgan to'g'ri chiziqdan ma'lum masofada yotgan naqtalarning geometrik o'rni shu to'g'ri chiziqdan ikki tarafda unga parallel va berilgan masofada joylashgan ikki to'g'ri chiziqdir.

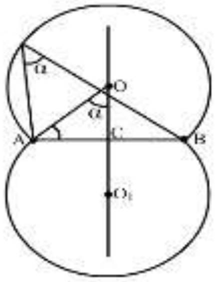
3. Kesma uchlaridan teng uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rni shu kesmaning o'rta perpendikulyari bo'ladi.

4. Burchak tekisligida burchak tomonlaridan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rni shu burchakning bissektrisasidir.

5. O'zaro parallel ikki to'g'ri chiziqdan teng uzoqlikdagi bir nuqtasidan ikinchisiga tushirilgan perpendikular hosil qilgan nuqtalarning geometrik o'rni bu to'g'ri chiziqlarning istalgan ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma o'rtasidan shu to'g'ri chiziqlarga parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziqdir. Boshqacha qilib aytganda bu to`g`ri chiziq berilgan to`g`ri chiziqning simmetriya o`qidir.

6. Berilgan *AB* kesma berilgan burchak (90^0) ostida ko'rinadigan nuqtalarning geometrik o'rni berilgan kesmani diametr qilib chizilgan aylanadan iboratdir (bu geometrik o'ringa *A*, *B* nuqtalar kirmaydi).

7. Tekislikning berilgan kesma [*AB*] berilgan α ($\alpha \neq 180°, \alpha \neq 90°$) burchak ostida ko'rinuvchi nuqtalarning geometrik o'rni - berilgan burchakni sig'diruvchi ikkita teng segmentning berilgan kesma bilan tortilib turuvchi yoylaridan iboratdir (geometrik o'ringa *A*,*B* nuqtalar kirmaydi).



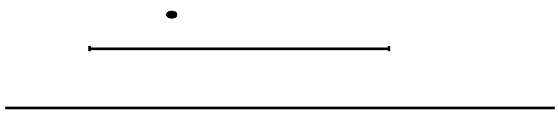
3-rasm

Bundan keyingi geometrik o'rinlar asosiy geometrik o'rinlardan biriga keltiriladi yoki ularning bir nechtasidan foydalanib topiladi.

Geometrik o'rinlar metodi bilan yechiladigan masalalarga misol tariqasida qiyidagi masalani ko'raylik.

<u>**Masala:**</u> Berilgan radius bo`yicha berilgan nuqtadan o'tib, berilgan to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylana chizing.

Berilgan: *l* – to`g`ri chiziq, *r* – radius, A – nuqta.



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz. Agar A nuqta *l* to`g`ri chiziqqa tegishli bo`lsa, u holda A bu oson. Ya`ni A nuqtadan $l_1 \perp l, A \in l_1$ to`g`ri chiziq o`tkazamiz va A nuqtadan r radiusli aylana chizamiz. $\omega(A,r) \cap l_1 = \{O, O_1\}$. $\omega_1(O,r), \omega_2(O_1,r)$ aylanalar biz izlagan aylanalardir.

Faraz qilaylik $A \notin l$ bo`lsin. Unda biz izlayotgan nuqtalarning geometrik o`rni *l* to`g`ri chiziqdan va A nuqtadan *r* masofada yotuvchi nuqtalar bo`ladi. (agar ular mavjud bo`lsa).

Reja:

1⁰. $\forall B \in l$ nuqtadan $l \perp l_1$ to`g`ri chiziq chiqaramiz.

2⁰. $\omega(B,r)$ aylana chizamiz. $\omega(B,r) \cap l_1 = \{O, O_1\}$.

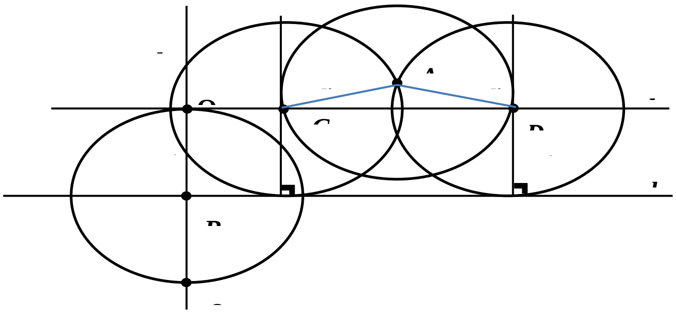
3⁰. O nuqtadan $l_2 \parallel l$ to`g`ri chiziq o`tkazamiz.

4⁰. $\omega_1(A,r)$ aylana chizamiz.

5⁰. $\omega_1 \cap l_2 = \{C, D\}$

6⁰. $\omega_3(C,r), \omega_4(D,r)$ aylanalar chizmiz. Bu biz izlayotgan figuralardir.

Yasash:



Isbotlash: Yasashga ko`ra $CA = r = DA$, C va D nuqtalardan $l$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan eng qisqa masofalar ham r ga teng.

Tekshirish: Agar A va l to`g`ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa 2r dan katta bo`lsa, masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega. Agar A va $l$ to`g`ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa $2r$ ga teng bo`lsa masala bitta yechimga ega. A va l to`g`ri chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa 2r dan kichik bo`lsa masala ikkita yechimga ega.

Geometrik almashtirishlar metodi.

Geometrik almashtirishlardan foydalanib, geometrik masalalarni yechish mumkin. Bu metod bilan masala yechishni analiz bosqichida, berilgan va izlangan figuralardan tashqari, berilgan figuraning yoki uning biror qismini u yoki bu geometrik almashtirishlar natijasida hosil qilingan figuralar ham qaraladi. Bu figura qaysi geometrik almashtirishni qo'llab hosil qilingan bo'lsa, yasashga doir masala o'sha metod bilan yechilgan deb ataladi. Jumladan, simmetriya metodi, parallel ko'chirish metodi, gomotetiya metodi, inversiya metodi va h.k. Masalan quyidagi ko'rinishdagi masalalar

1. *MN* to'g'ri chiziqning bir tarafida *A* va *B* nuqtalar joylashgan. *MN* to'g'ri chiziqda shunday X nuqta topingki, bu nuqtadan *A*,*B* nuqtalargacha bo'lgan masofalarning yig'indisi eng kichik bo'lsin (simmetriya metodi).

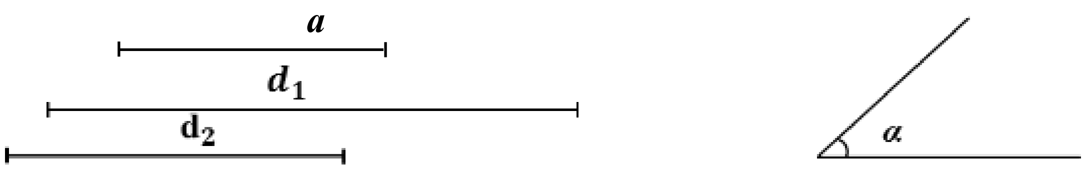
2. Asoslari va diognallari bo'yicha trapetsiya yasang (parallel ko'chirish metodi).

3. A va B burchaklari va C uchidan chiqqan bissektrisasi b_c bo'yicha uchburchak yasang (gomotetiya).

4. Berilgan M markazdan shunday aylana chizingki, uning berilgan to`g`ri chiziqlar bilan kesishuvidan hosil bo`lgan vatarlarning yig`indisi berilgan kesmaga teng bo`lsin.(burish)

1- Masala. Asosi, ikki diagonali va diagonallari orasidagi burchagi berilgan trapetsiya yasang.

Berilgan: a –asosi, d_1, d_2 -diognallari va ular orasidagi α burchagi.



Analiz: Izlanayotgan figura yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.

Reja :

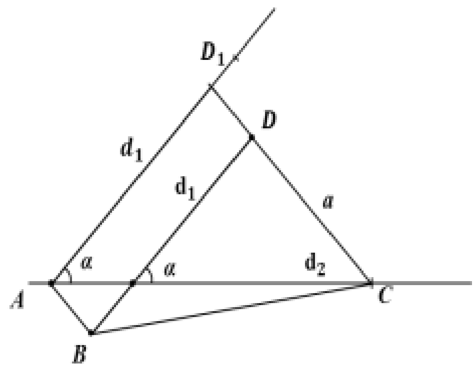
1^0. $\forall A \in l$ nutqadan α burchakni qo`yamiz.

2^0. α burchak nurlaridan mos ravishda d_1 va d_2 kesmalarni qo`yamiz. Hosil bo`ladi D_1 va C nuqtalar.

3^0. D_1 va C nuqtalarni tutashtirib, C nuqtadan *a* asosni qo`yamiz. Hosil bo`ladi D nuqta AD_1 kesmani DD_1 qadar parallel ko`chiramiz. Hosil bo`ladi B nuqta.

4^0. ABCD trapetsiya biz izlayotgan trapetsiyadir.

Yasash:



Isbotlash: Yasashga ko`ra BD=d_1, AC=d_2, DC=a

Tekshirish: Masala $0^0 < \alpha < 180^0$ da yagona yechimga ega.

2-masala. Ikki qo`shni tomoning nisbati, bir burchagi va bir dioganali berilgan parallelogramm yasang.

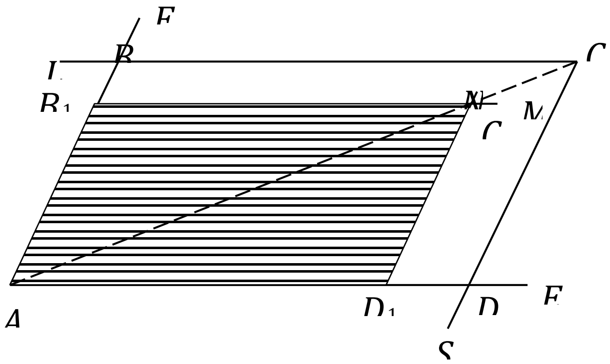
*AD:*AB=*m:n*; A burchak va AC=*l* dioganal berilgan.

Analiz. Berilgan masala quyidagi ikki yordamchi masalaga ajratib yechiladi.

1) ikki qo`shni tomonining nisbati va bir burchagi berilgan parallelogram yasash;

2) dioganali berilgan *l* kesmaga teng, topilgan parallelogrammga o`xshash parallelogamm yasash.

Yasash. Berilgan A burchakka teng qilib burchak EA_1F ni yasab, uning bir tomonida, masalan, A_1E tomonida A_1D_1=mq kesmani va A_1F tomonida esa $A_1B_1=nq$ kesmani ajratamiz (bundagi q ni ixtiyoriy uzulikdagi kesma deb va berilgan nisbatning hadlarini esa m va n sonlar bilan berilgan deb faraz qildik). So`ngra $B_1M//A_1E$ va $D_1N//A_1F$ to`g`ri chiziqlar o`tkazib, ularning kesishuvidan C_1 nuqtani hosil qilamiz. Yasalishiga ko`ra, $A_1B_1C_1D_1$ figura – parallelogramm va u izlangan parallelogrammga o`xshash bo`ladi. Shuning bilan izlangan parallelogrammning shakli aniqlangan deb hisoblanadi.



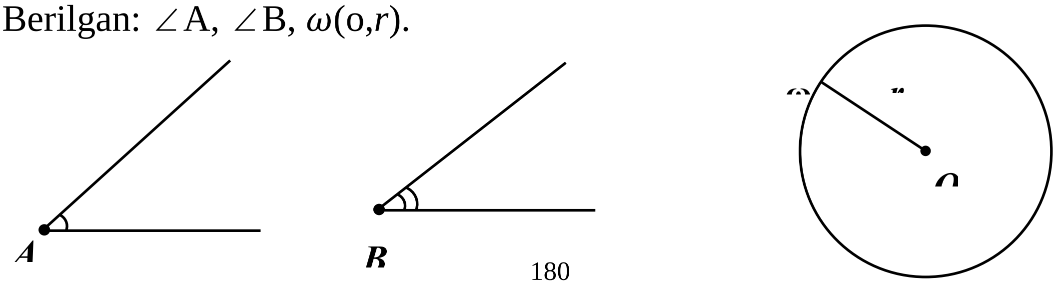
Yordamchi masalalardan ikkinchisini yechish uchun topilgan yordamchi $A_1B_1C_1D_1$ parallellogramning *l* diogonaliga mos bo`lgan $A_1C_1=l_1$ diogonalini belgilab, bu parallelogramni $k=l:l_1$ keoffisient bilan qulayroq markazga nisbatan almashtiramiz: $A_1C_1$ diogonalning $A_1$ uchni markazi deb olib, $A_1C_1$ ning ustiga $A_1C=l$ kesmani qo`yamiz. So`ngra $CL//A_1E$ va $CS//A_1F$ to`g`ri chiziqlarni o`tkazsak, ularning A_1E va A_1F to`g`ri chiziqlar bilan keshishuvidan mos ravishda D va B nuqtalar hosil bo`ladi.

ABCD – izlangan parallelogramm bo`ladi.

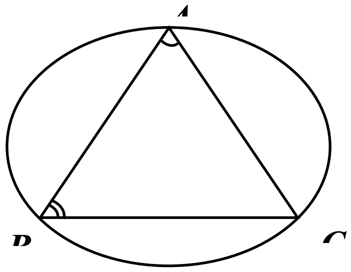
4. Uchburchaklardagi geometrik yasashlar.

1-masala. Berilgan aylanaga ichki chizilgan uchburchakni berilgan ikki burchagi bo`yicha yasang.

Berilgan: $\angle$A, $\angle$B, ω(o,*r*).



Analiz: Izlanayotgan uchburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Reja:

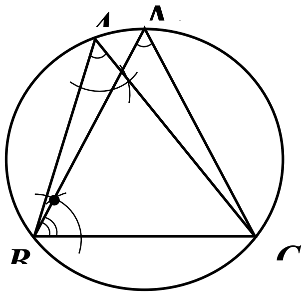
1⁰. $\forall A \in \omega(o,r)$ – bu nuqtadan $\angle A$ ni qo`yamiz va $\angle A \cap \omega(o,r)=\{B,C\}$.

2⁰. B va C nuqtalarni tutashtiramiz va B nuqtadan bitta nuri BC da yotgan $\angle B$ ni qo`yamiz.

3⁰. $\angle B \cap \omega(o,r)=\{A_1,C\}$ va A_1C kesma hosil qilamiz.

4⁰. Hosil bo`lgan ΔA_1BC biz izlayotgan figuradir.

Yasash:

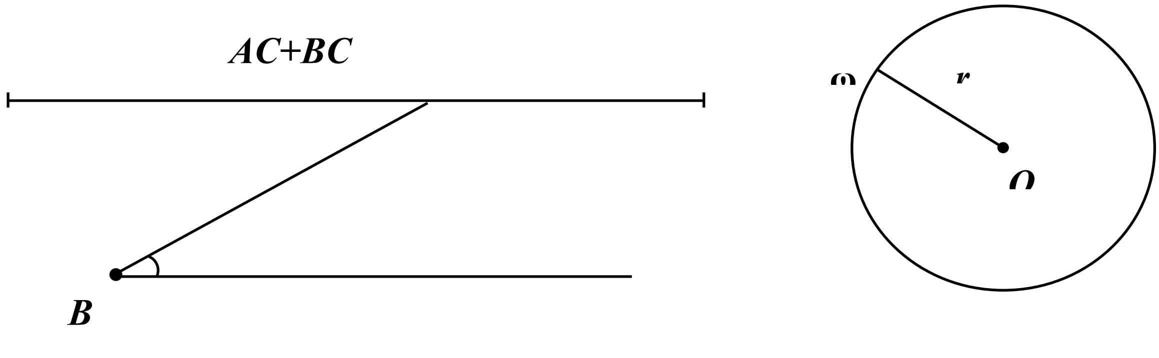


Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle A=\angle BAC$, aylananing bitta vatariga tiralgan bir tomondagi burchaklar tengligidan BC vatarga tiralgan $\angle A_1=\angle A=\angle BAC$. $\angle B=\angle A_1BC$.

Tekshirish: $\angle A, \angle B=0^0, 180^0$ da va $\angle A+\angle B \geq 180^0$ da masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda masala yechimga ega.

2-masala. Berilgan aylanaga ichki chizilgan uchburchakni, ikki tomonining yig`indisi va ulardan birining qarshisidagi burchagi bo`yisha yasang.

Berilgan: $\omega(o,r)$, AC+BC, $\angle B$.



Analiz: Izlanayotgan uchburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.

Reja:

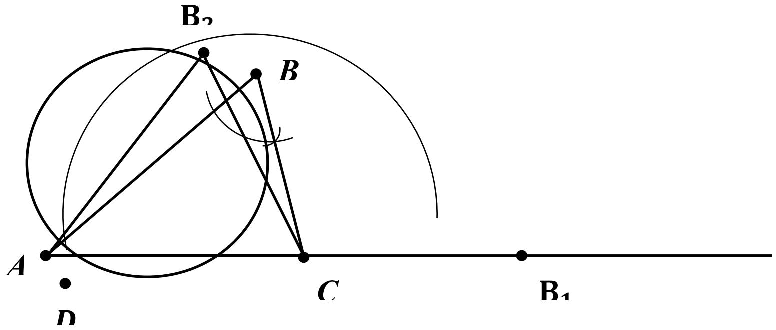
1°. $\forall B \in \omega$ (o,r) nuqtadan $\angle B$ ni qo\`yamiz va $\angle B \cap \omega$ (o,r)={A,C}. AC kesmani hosil qilamiz.

2°. A nuqtadan AC kesma orqali o\`tuvchi to\`g\`ri chiziqqa AC+BC kesmani qo\`yamiz va AB_1=AC+BC.

3°. C nuqtadan ω_2(C,C B_1) aylana chizamiz $\omega \cap \omega_2 = \{B_2, D\}$.

4°. $\angle AB_2C = \angle B$ va $\Delta\ AB_2C$ biz izlayotgan figura.

Yasash:

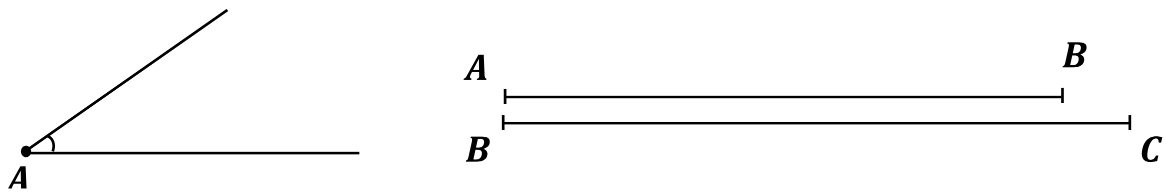


Isbotlash: Yasashga ko\`ra $\angle ABC = \angle B$. Aylananing bitta vatariga tiralgan bir tomondagi burchaklar tengligidan AC vatarga tiralgan $\angle AB_2C = \angle B$. $CB_1 = CB_2$, $AC + CB_2 = AC + BC$.

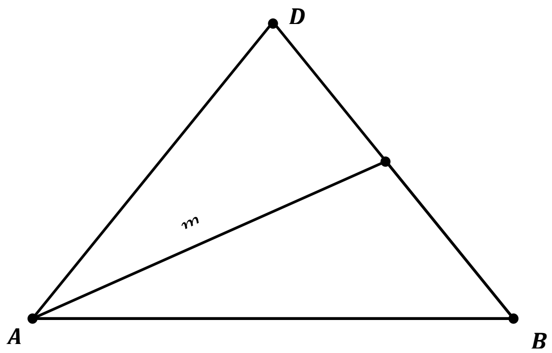
Tekshirish: $\angle B = 0^o$, 180^o da masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

<u>**3-masala**</u>. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu burchagi uchidan o\`tkazilgan medianasi berilgan uchburchak yasang.

Berilgan: $\angle A$, AB, m_a – BC=a tomonga o\`tkazilgan medianasi.



Analiz: Izlanayotgan uchburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Reja:

1º. $\forall A \in l$. *va* A nuqtadan *a* kesmani qo`yamiz, B nuqtani hosil qilamiz.

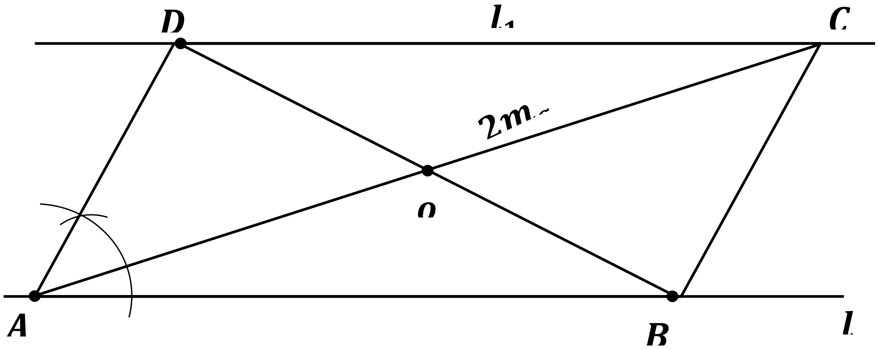
2º. A va B nuqtalardan $\angle$A burchakni qo`yamiz.

3º. $\omega(A, 2m_a)$ aylana chizamiz va $\omega \cap BC = \{C\}$.

4º. C nuqtadan AB ga parallel l_1 to`g`ri chiziq o`tkazamiz va $l_1 \cap AD = \{D\}$

5º. D va B nuqtalarni tutashtiramiz va biz izlanayotgan ΔABD ni hosil qilamiz.

Yasash:



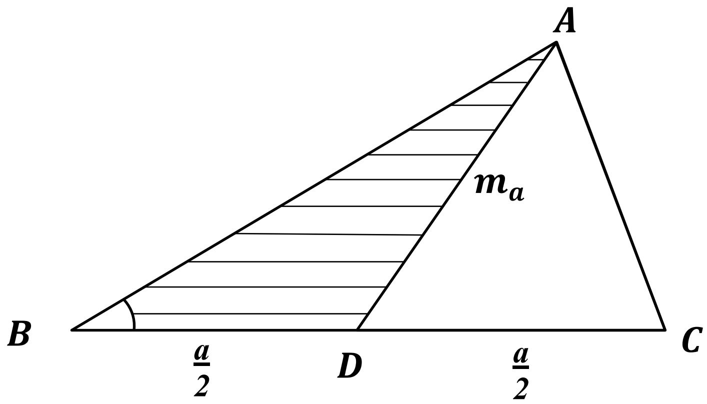
Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle$DAB=$\angle$A, AO=$m_a$, parallelogrammning diagonallari kesishigan nuqtada teng ikkiga bo`linishidan DO=OB.

Tekshirish: $\angle$A=0º, 180º da masala yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

MASALALAR

1. Berilgan balanligi bo`yicha teng tomonli uchburchak yasang.

2. Bir tomoni, shu tomoniga o`tkazilgan medianasi va shu tomon yonidagi bir burchagi bo`yicha uchburchak yasang. (37-rasm)



37-rasm

3. Bir kateti va ikkinchi katetiga o`tkazilgan medianasi berilgan to`g`ri burchakli uchburchak yasang.

4. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu tomonning uchidan chiqqan medianasi bo`yicha uchburchak yasang.

5. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va ikkinchi burchagining bissektrisasi bo`yicha uchburchak yasang.

6. Bir tomoni, unga yopishgan bir burchagi va shu burchagining bissektrisasi bo`yicha uchburchak yasang.

7. Bir burchagi, shu burchak uchidan chiqqan balandligi va bissektrisasi bo`yicha uchburchak yasang.

8. Bir tomoni, shu tomonga yopishgan burchagi uchidan o`tkazilgan balandligi bilan bissektrisasi bo`yicha uchburchak yasang.

9. Bir tomoni, unga o`tkazilgan medianasi va bu mediana bilan ikkinchi tomoni orasidagi burchagi bo`yicha uchburchak yasang.

10. Ikki tomoni, ulardan biri bilan shu tomonga o`tkazilgan medianasi orasidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

11. Ikki burchagi va ulardan birining bissektrisasi berilgan uchburchak yasang.

12. Ikki burchagi va uchinchi burchagi uchidan tushirilgan balandligi berilgan uchburchak yasang.

13. Asosi, unga yopishgan bir burchagi va asosiga tushirilgan balandligining asosda hosil qilgan kesmalaridan biri berilgan uchburchak yasang.

14. Balandlikning asosda hosil qilgan kesmalaridan biri, shu kesmaga mos tomoni va shu tomon qarshisidagi burchagi berilgan uchburchak yasang.

15. Asosiga tushirilgan balandlikning asosda hosil qilgan kesmalari va asosga tushirilgan medianasi bo`yicha uchburchak yasang.

9-AMALIY MASHG'ULOT: Yasashga doir masalalarda algebraik metod. Sirkul va chizg'ich yordamida yechilmaydigan yasashga doir ba`zi masalalar. To'rtburchaklardagi geometric yasashlar

Reja:

1.Yasashga doir masalalarda algebraik metod.

2.Sirkul va chizg'ich yordamida yechilmaydigan yasashga doir ba`zi masalalar.

3. To'rtburchaklardagi geometric yasashlar.

1. **Yasashga doir masalalarda algebraik metod.**

***1-masala*.** Berilgan ikki kesmaning yig`indisi va ayirmasini toping.

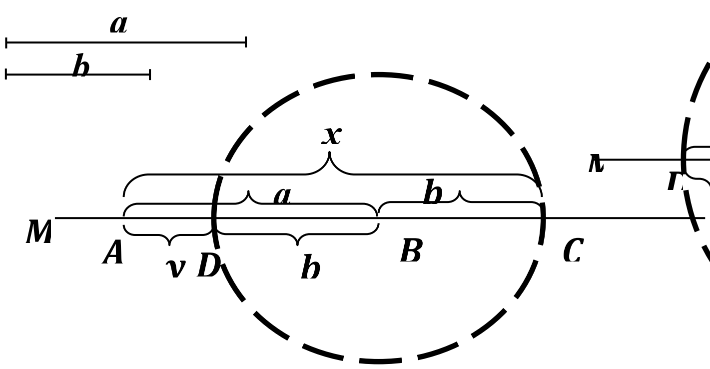
Berilgan a va b kesmalar bo`yicha $x=a+b$ va $y=a-b$ $(a>b)$ kesmalarni yasaymiz.

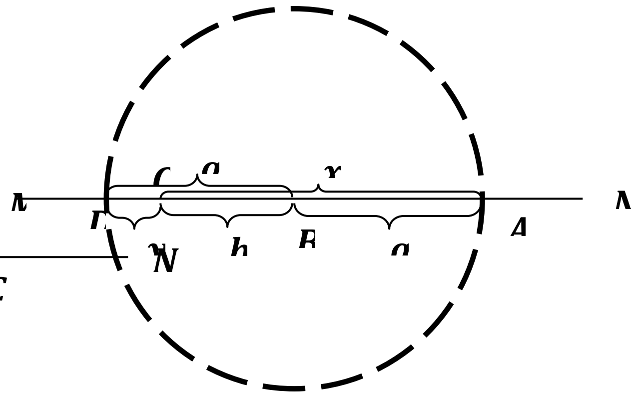
$x=a+b=|AB|+|BC|=|AC|$;

$y=a-b=|AB|-|BD|=|AD|$. (30-rasm)

$x=a+b=|AB|+|BC|=|AC|$;

$y=a-b=|BD|-|BC|=|CD|$. (31-rasm)





30-rasm 31-rasm

2-masala. Berilgan a va b kesmalarga o`rta proporsional bo`lgan uchinchi kesmani yasang ya`ni shunday x kesma topingki, u quyidagi uzliksiz proporsiyani qanoatlantirsin.

a:x=x:b

Reja:

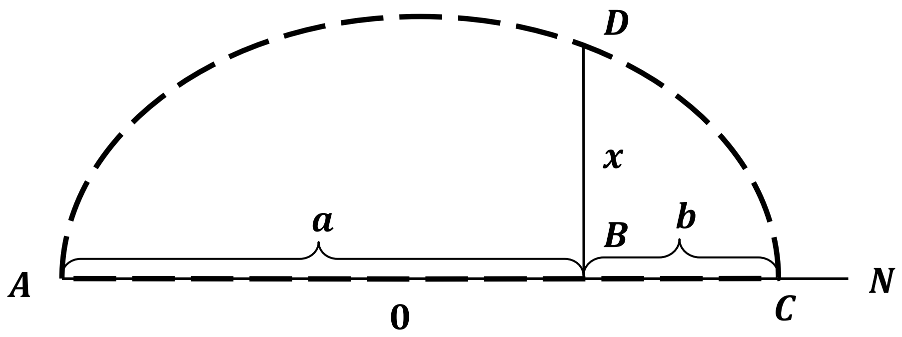
1⁰. $\forall A \in l$ nuqtadan a va b kesmalarni ketma-ket qo`yamiz, natijada C nuqta hosil bo`ladi.

2⁰. AC ni diametr qilib $\omega\left(\frac{AC}{2},\frac{AC}{2}\right)$ aylana chizamiz.

3⁰. a kesmaning oxiri va b kesmaning boshi bo`lgan B nuqtadan AC ga l_1 perpendikular chiqaramiz.

4⁰. $\omega \cap l_1 = \{D\}$

5⁰. BD kesma biz izlayotgan kesma.



32-rasm

***3-masala*.** Berilgan kesmani berilgan ichki va tashqi nisbatda bo`ling.

Berilgan AB kesmani $\frac{AX}{XB}=\frac{m}{n}$ tenglikni qanoatlantiruvchi X nuqtani topish AB kesmani m/n nisbatda ichki bo`lish deyiladi.

AB kesmaning davomida $\frac{AY}{YB}=\frac{m}{n}$ tenglikni qanoatlantiruvchi Y nuqtasini topish AB kesmani tashqi nisbatda bo`lish deyiladi.

Bu masalani quyidagi ikki yo`l bilan yechiladi. Quyidagi ikki holda ham m>n bo`lsin.

B i r i n c h i   y o ` l.

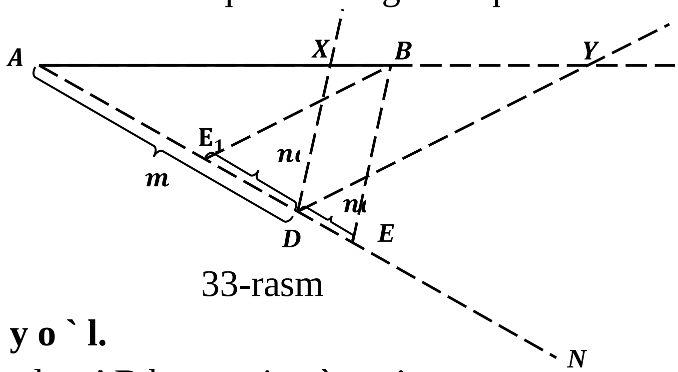
1⁰. $\forall A\in l$ nuqtadan AB kesmani qo`yamiz.

2⁰. A nuqtadan AB bilan ixtiyoriy α $(0^\circ<\alpha<180^\circ)$ burchak tashkil qiluvchi biror AN nur qo`yamiz.

3⁰. AN nurga AD=*mq (q* ixtiyoriy uzunlikdagi kesma) qo`yamiz.

4⁰. D nuqtaning ikki tomoniga AN nur bo`ylab DE=DE$_1$=mq kesmalarni qo`yamiz va B, E shuningdek B, E$_1$ nuqtalarni tutashtiramiz.

5⁰. D nuqtadan BE va BE$_1$ ga parallel to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz, natijada X va Y nuqtalar hosil bo`ladi. Bu nuqtalar izlangan nuqtalardir.



33-rasm

I k k i n c h i   y o ` l.

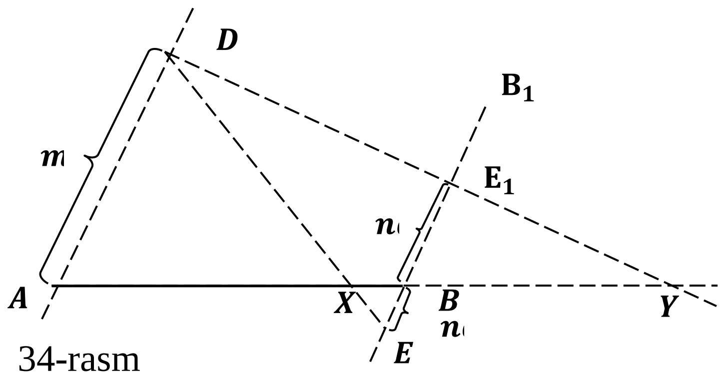
1⁰. $\forall A\in l$ nuqtadan AB kesmani qo`yamiz.

2⁰. A va B uchlaridan o`zaro parallel AA$_1$ va BB$_1$ to`g`ri chiziqlar o`tkazamiz.

3⁰. A nuqtadan AA$_1$ to`g`ri chiziqqa |AD|=mq, B nuqtadan BB$_1$ to`g`ri chiziqqa |BE|=|BE$_1$|=nq kesmalarni qo`yamiz.

4⁰. D nuqtani E va E$_1$ nuqtalar bilan tutashtiramiz.

5⁰. AB kesma bilan DE kesmaning kesishgan X nuqtasi va AB kesmaning davomi bilan DE$_1$ kesmaning davomi kesishgan Y nuqta izlangan nuqtalardir.



34-rasm

4-masala. $x=\sqrt{a^2+b^2}$ kesmani yasang.

1⁰. $\forall A\in l$ nuqtadan *a* kesmani qo`yib, B ni hosil qilamiz.

2°. A nuqtadan l to`g`ri chiziqqa l_1 perpendikular chiqaramiz.

3°. A nuqtadan l_1 ga b kesmani qo`yamiz va C nuqtani hosil qilamiz.

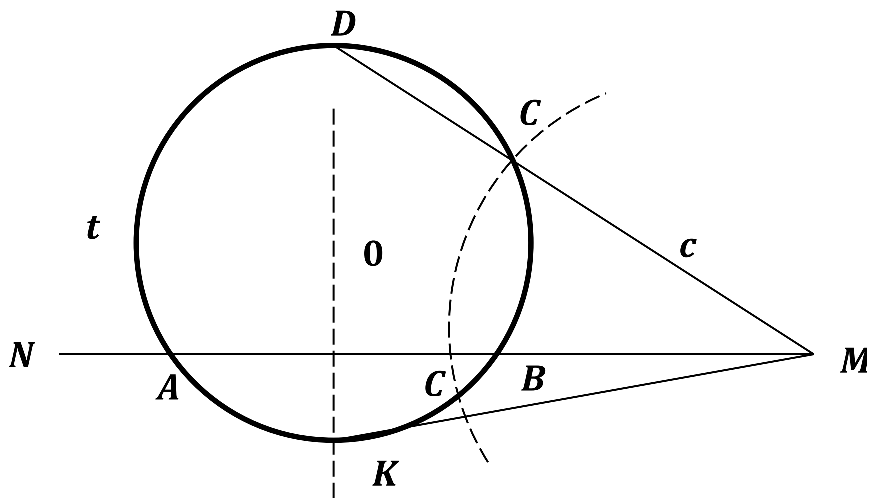
4°. B va C nuqtalarni tutashtiramiz. BC kesma izlanayotgan x kesmadir.

5-masala. Berilgan a, b, c kesmalarga proporsional to`rtinchi kesma yasang.

x:a=b:c

1°. Ixtiyoriy MN nurda MA=a, MB=b kesmalarni ajratib A va B nuqtalardan o`tuvchi $\omega(M,c)$ aylana bilan ixtiyoriy C (va C_1) nuqtada kesishuvchi biror t (5-chizma) aylanani chizamiz.

2°. MC to`g`ri chiziqning t aylanasi bilan ikkinchi marta kesishuvidan hosil bo`lgan nuqtasi D bo`lsa, MD izlangan kesma bo`ladi.



35-rasm

Bu masalalarga tayanib, qolgan masalalar yechiladi.

Algebraik metodga doir ba`zi masalarni ko`ramiz.

6-masala: $x = \sqrt[4]{abcd}$ kesmani yasang.

Yasash rejasi:

1°. $y = \sqrt{ab}$ kesmani yasaymiz.

2°. $z = \sqrt{cd}$ kesmani yasaymiz.

3°. $x = \sqrt{yz}$ kesma izlangan kesma bo`ladi.

Algebraik metodga doir masalalar.

1.Quyidagi ifodalarni yasang:

1) $x = \dfrac{3ab}{c}$;

2) $x = \dfrac{ab}{c+d}$;

3) $x = \dfrac{a^2}{b}$;

4) $x = \dfrac{a^2 - b^2}{c+d}$;

5) $x = \dfrac{abc}{dl}$;

6) $x = \dfrac{abcd}{lks}$;

7) $x = a\sqrt{3}(x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2}$ yoki $x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3a \cdot a}$ ko`rinishiga keltirib oinadi)

8) $x = a\sqrt{7}$;

Yasashga doir masalalarni boshqa yasash asboblari vositasida yechish.

Shu vaqtgacha yechilgan yasashga doir masalalarda keltirilgan ifodalarda berilgan kesmalarning ratsional funksiyalari, yo faqat ularning kvadrat ildizlarini o'z ichiga olgan ifodalar ekanligini ko'rdik. Bu hol tasodifiy emas. Masalaning sirkul va chizg'ich vositasida yechilish belgisi (alomati) quyida berilmoqda:

Teorema. Ma'lum *a,b,c,...*kesmalar orqali ifodalangan $x = f(a,b,c,...)$ kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasash mumkin bo'lishi uchun bu ifoda berilgan kesmalardan iborat argumentlarga nisbatan ratsional va birinchi darajali bir jinsli funksiya bo'lishi yoki ratsional amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallari) bilan birga faqat kvadrat ildizlarni o'z ichigi olgan funksiya bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teoremaning zururiy shartini isboti o'zidan-o'zi ko'rinib turibdi. Chunki, algebraik metod bilan yechiladigan barcha masalalar maktabda ko'rilgan 1-7 masalalarga keltirib yechiladi.

Yechimga ega bo'lmagan yasashga doir masalalarga ko'plab misollar keltirish mumkin. Masalan, kvadrat bo'lmagan to'g'ri to'rtburchakka ichki aylana chizish, aylana ichida yotgan nuqtadan shu aylanaga urinma o'tkazish mumkin emas va h.k.

Berilgan elementlari soni talabdan ko'p bo'lgan yasashga doir masalalarni yechimga ega bo'lgan masalalari kiradi. Masalan, birilgan ikki burchagi bo'yicha uchburchak yasash yoki berilgan 4 ta nuqtadan aylana o'tkazish va sh.k.

Amaliyotda yechimi mavjud, lekin tanlab olingan yoki berilgan yasash asboblari bilan yechib bo'lmaydigan masalalar katta ahamiyatga ega. Bu holda berilgan masalani berilgan yasash vositalari bilan yechish mumkin emasligi ko'rsatib bilishimiz lozim bo'ladi. Bu – qiyin masalalar qatoriga kiradi. Qadimdan juda ko'p olimlar sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmaydigan masalalar bilan shug'ullanishganliklari bizga ma'lum.

1. «Uzunligi $2\pi R$ ga teng bo'lgan kesmani yasang». Aylanani to'g'rilash. R=1 bo'lsa, $\overline{X}=2\pi$ yasashga keltiriladi. Bizga ma'lumki, taxminan $\pi\approx\frac{22}{7}$ ni yasash mumkin (Arximed). Lekin 1882 yilda π ni transendent son ekanligini F. Medemonn tomonidan isbot qilingan.

2. «Yuzi berilgan doiraning yuziga teng bo'lgan kvadrat yasang». Doira kvadraturasi. $X^2=\pi R^2=\left(\sqrt{2\pi R\cdot\frac{R}{2}}\right)^2$, $X=\sqrt{2\pi R\cdot\frac{R}{2}}$ dan $2\pi R$ kesmani sirkul va chizg'ich yordamida yasab bo'lmaydi. (1-masala).

3. «Xajmi berilgan kubni hajmidan 2 barobar katta bo'lgan kubning qirrasini yasang». Kubni ikkilantirish. $x^3=2a^3\Rightarrow x=a\sqrt[3]{2}$ agar a=1 bo'lsa, $x^3=2\Rightarrow x^3-2=0$ Algebradan ma'lumki, bu tenglama haqiqiy sonlardan iborat ildizga ega emas. Lekin ushbu masalani ikkinchi tartibli egri chiziqlardan foydalanib yechish mumkin. $y^2=x,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{1+b^2}{4}$

$$x^2-x+y^2-by=0 \qquad C(\frac{1}{2},\frac{b}{2}).$$

$$y^4-y^2+y^2-by=0$$

$$y(y^3-b)=0 \qquad y_1=0,\ x_1=0 \qquad O(0,0)$$

$y^3-b=0 \quad y=\sqrt[3]{b}$ b=2 bo'lsa $C(\frac{1}{2},1)$

$$r=OC \qquad AB=\sqrt[3]{2}=x$$

4. «Berilgan α burchakni teng 3 ga bo'ling»Burchakni teng 3 ga bo'lish Faraz qilaylik $\varphi=\frac{\alpha}{3}\Rightarrow\alpha=3\varphi$ $\cos\alpha=\cos3\varphi=4\cos^3\varphi-3\cos\varphi$. Agar $\cos\alpha=\frac{a}{2};\ \cos\varphi=\frac{x}{2}$ desak, $x^3-3x-a=0$ (5.1) tenglamaga ega bo'lamiz. Xususiy holda *a=0* bo'lsa, $(\alpha=90^0)$ $x^3-3x=0$ tenglama hosil bo'ladi. $x(x^2-3)=0,\ x_1=0,\ x_2=\sqrt{3}$. Masala yechimga ega. Ya'ni, sirkul va chizg'ich yordamida $\varphi=30^0$ ni yasay olamiz. Umuman, ixtiyoriy burchakni $\frac{\pi}{2^n}$ teng bo'lakka bo'lish mumkin ($n\in N$). Agar a=1 bo'lsa, $(\alpha=\frac{\pi}{3})$ bo'lib $x^3-3x-1=0$ tenglamagan ega bo'lamiz.

Algebradan ma'lumki bu tenglik keltirilmaydi. Ya'ni 60^0 ni sirkul va chizg'ich yordamida teng 3 ga bo'lib bo'lmaydi. R. Otajonov kitobida, ushbu masalani sirkul va ikkita nuqtasi belgilangan chizg'ich yordamida yechish mumkinligi ko'rsatilgan. (316-bet).

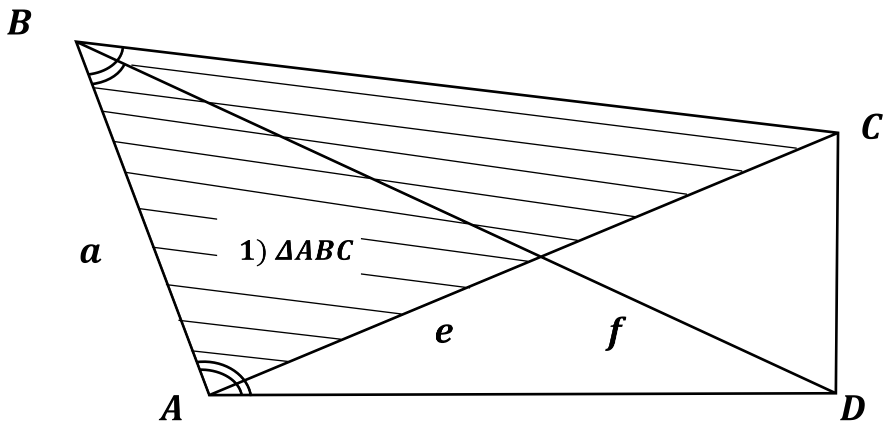
5.Muntazam ko'pburchaklarni yasash to'g'risida.

Ushbu muammo nemis matematigi K.Gauss tomonidan 1796 yilda hal qilingan. *n*-tomoni muntazam ko'pburchakning sirkul va chizg'ich yordamida yasashning zarur va yetarli sharti $n = 2^m \cdot P_1 P_2 \ldots P_S$ ko'rinishida yozish mumkin. ekanligidadir. Bu yerda $P_1, P_2, \ldots, P_S$ lar turli $2^{2^k} + 1$ ko'rinishidagi tub sonlardir. Agar *n* tub son bo'lsa, uning ko'rinishi $2^{2^k} + 1$ ko'rinishda bo'lishi zarur (Hozirgacha bunday sonlar chekli sonda yoki cheksiz ekanligi isbot qilimagan!). Misol tariqasida, aylanani 7 yoki 9 ta teng bo'lakka bo'lib bo'lmaydi, boshqacha qilib aytganda yirkul va chizg'ich yordamida muntazam 7 yoki 9 burchak yasab bo'lmaydi. Sababi $7 = 2^2 + 3,\ 9 = 3^2$. Xuddi shunday 1^0 burchakni yasab bo'lmaydi.

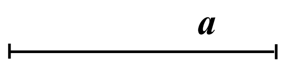
To`rtburchak yasashga doir masalalar

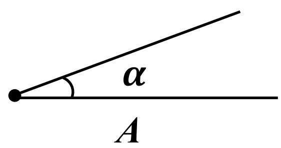
1-masala. a, $\angle$A, $\angle$B, $\angle(a \wedge e)$, $\angle(a \wedge f)$ elementlarga ko`ra to`rtburchak yasang.

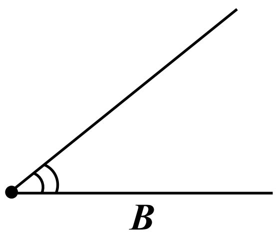
Analiz: Izlanayotgan to`rtburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Berilgan: a, $\angle$A, $\angle$B, $\angle(a \wedge e)$, $\angle(a \wedge f)$.







Reja:

1^0. $\forall$ A $\in l$ nuqtadan a kesmani qo`yamiz, natijada *B* nuqta hosil bo`ladi.

2^0. A nuqtadan $\angle$A ni va B nuqtadan $\angle$B ni qo`yamiz. $\angle$A=$\angle$BAD, $\angle$B=$\angle$ABC.

3^0. A nuqtadan $\angle(a \wedge e)$ ni qo`yamiz va bu yerda $\angle(a \wedge e)$= $\angle$BAC.

4^0. B nuqtadan $\angle(a \wedge f)$ ni qo`yamiz va bu yerda $\angle(a \wedge f)$= $\angle$ABD.

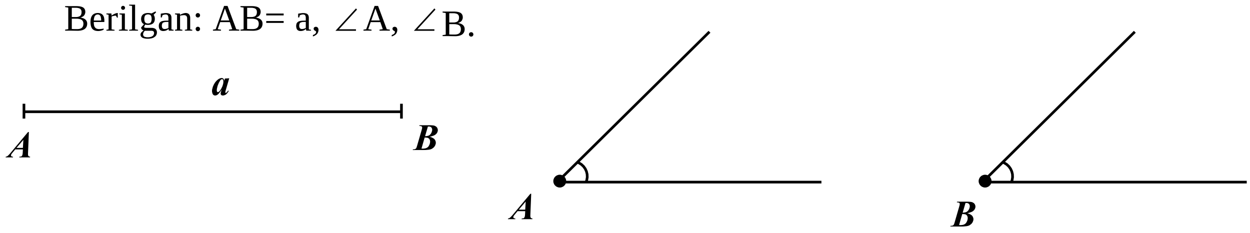
5^0. Hosil bo`lgan D va C nuqtalarni tutashtiramiz, natijada biz izlayotgan ABCD to`rburchak hosil bo`ladi.

Isbotlash: Yasashga ko`ra.

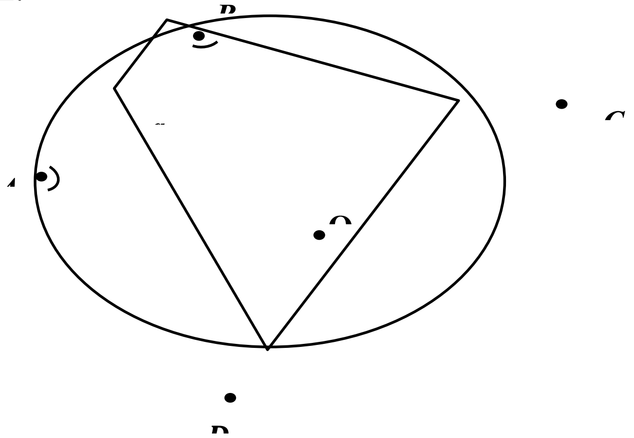
Tekshirish: $\angle A$, $\angle B$, $\angle(a\wedge e)$, $\angle(a\wedge f)=0^{0},180^{0}$ *da*, $\angle A+\angle(a\wedge f)\geq 180^{0}$ *da*, $\angle B+\angle(a\wedge e)\geq 180^{0}$ *da*, $\angle(a\wedge f)+\angle(a\wedge e)\geq 180^{0}$ *da* yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

<u>**2-masala.**</u> Ma`lum aylanaga bir tomoni va undagi ikki burchagi bo`yicha ichki chizilgan to`rtburchak yasang.

Berilgan: AB= a, $\angle A$, $\angle B$.



Analiz: Izlanayotgan to`rtburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Reja:

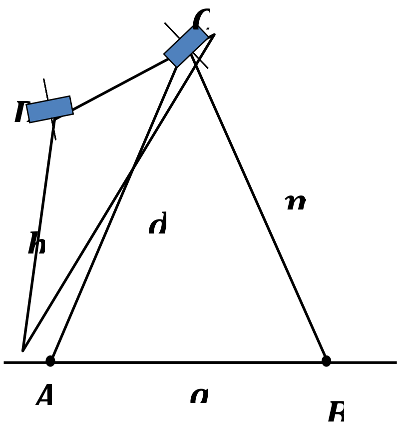
1°. $\forall A\in\omega(O,r)$ nuqtadan $\omega_1(A,a)$ aylana chizamiz, natijada $\omega_1\cap\omega=\{B\}$ hosil bo`ladi.

2°. A nuqtadan $\angle A$ ni va B nuqtadan $\angle B$ ni qo`yamiz.

3°. $\angle A\cap\omega(O,r)=\{B,D\},\angle B\cap\omega(O,r)=\{A,C\}$.

4°. Hosil bo`lgan D va C nuqtalarni tutashtiramiz, natijada biz izlayotgan ABCD to`rtburchak hosil bo`ladi.

Yasash:

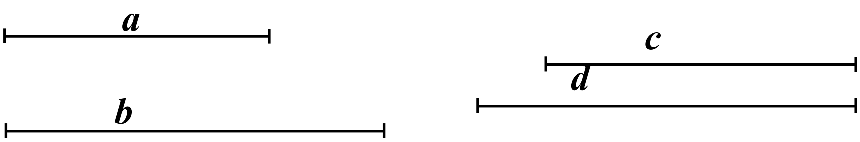


Isbotlash: Yasashga ko`ra $\angle BAD=\angle A$, $\angle ABC=\angle B$, AB=a.

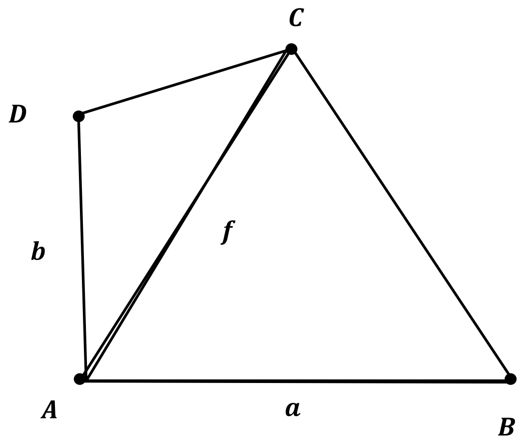
Tekshirish: $\angle A$, $\angle B=0^{0},180^{0}$ da yechimga ega emas. Qolgan barcha hollarda yechimga ega.

3-masala. Uchta tomoni va bir diagonali bo`yicha shunday to`rtburchak yasangki, unga ichki aylana chizish mumkin bo`lsin.

Berilgan: *a,b,c va d*-diagonal.



Analiz: Izlanayotgan to`rtburchak yasalgan deb faraz qilamiz va uni tahminan chizib olamiz.



Reja:

1⁰. $\forall$ A$\in l$ – nuqtadan *a* kesmani qo`yamiz natijada B nuqta hosil bo`ladi.

2⁰. B nuqtadan $\omega(B,m)$. (Bu yerda $m=a+c-b$)

3⁰. A nuqtadan $\omega_1(A,d)$ aylana chizamiz va $\omega_1\cap\omega=\{C\}$.

4⁰. C nuqtadan $\omega_2(C,c)$ aylana chizamiz.

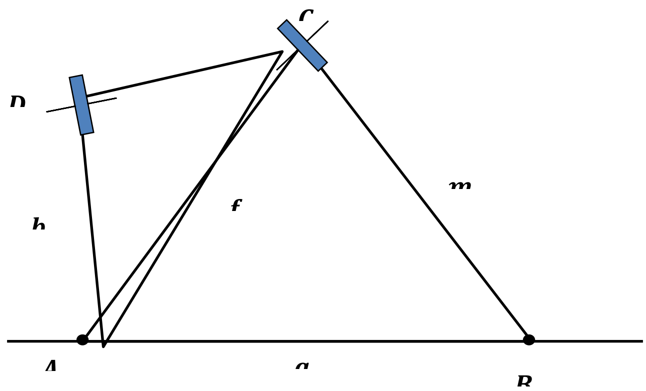
5⁰. A nuqtadan $\omega_3(A,b)$ aylana chizamiz.

6⁰. $\omega_2\cap\omega_3=\{D\}$

7⁰. Hosil bo`lgan A,B,C nuqtalarni ketma-ket tutashtiramiz.

Yasash:

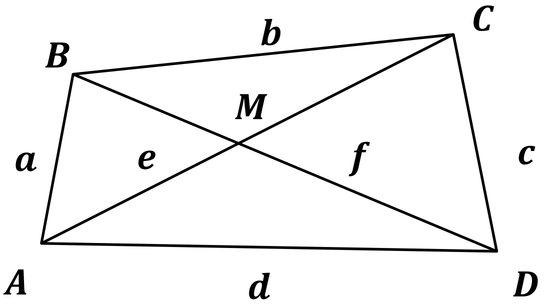
c

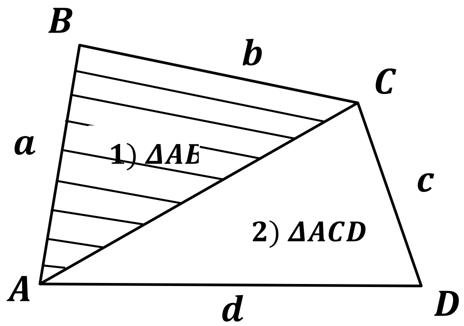


Isbotlash: Yasashga ko`ra AB=*a*, AD=*b*, DC=*c*, AC=*d*, $m=a+b-c$. Bundan $a+c=b+m$ ekamlogi kelib chiqadi va bu ABCD to`rtburchakka ichki aylana chizish mumkin.

Tekshirish: Masala har doim yechimga ega.

Qavariq to`rtburchaklarni yasash uchun kamida uning beshta elementi ma`lum bo`lishi va ulardan kamida ikkitasi chiziqli element bo`lishi shart. To`rtburchak elementlarini quyidagicha (38-rasm) belgilaymiz: |AB|=*a*, |BC|=*b*, |CD|=*c* va |DA|=*d*, uning diagonallarini |AC|=*e*, |BD|=*f*, burchaklarini ∠A, ∠B, ∠C, ∠D, diagonallari orasidagi burchakni - (*e*∧*f*). Analiz chizmasida yordamchi figurani shtrixlab ko`rsatamiz.





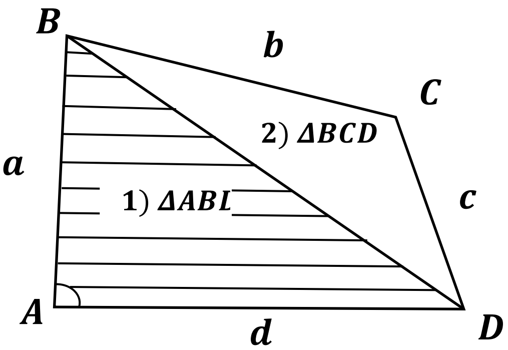
MASALALAR

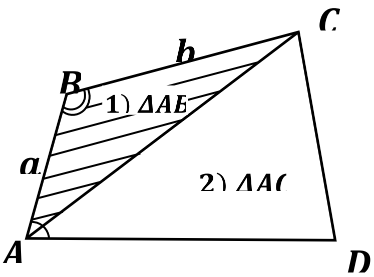
1. Quyidagi elementlardan foydalanib, to`rtburchak yasang.

1) *a*, *b*, *c*, *d* va *e*

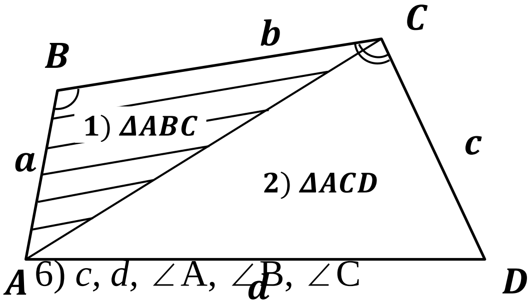
2) *a*, *b*, *c*, *d* va bir burchagi

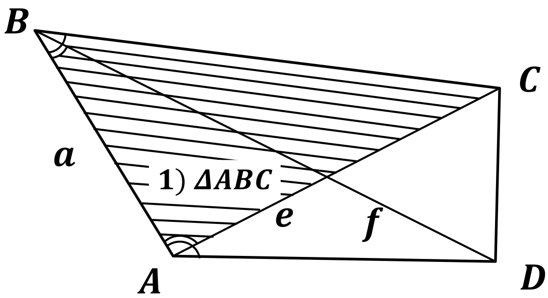
3) *a*, *b*, ∠A, ∠B, ∠C





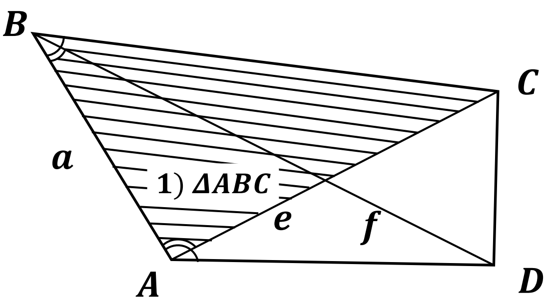
4) *a*, *b*, *c*, ∠B, ∠C 5) *a*, ∠A, ∠B, ∠(*a*∧*e*), ∠(*a*∧*f*)

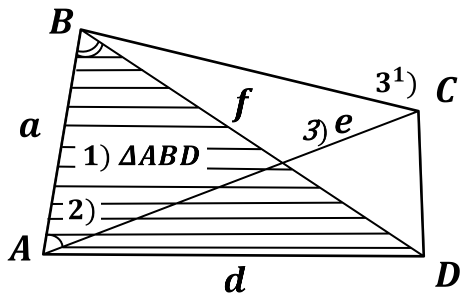




6) *c*, *d*, ∠A, ∠B, ∠C

7) *a*, *d*, *e*, ∠(*a*∧*e*), ∠(*a*∧*f*)

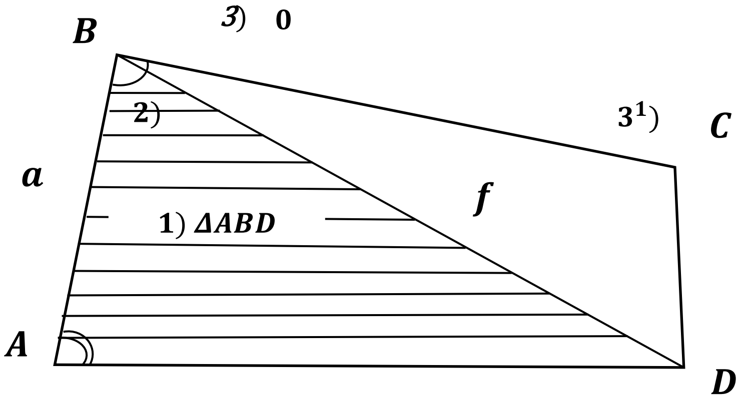




8) *a, b, c, e* va *f* (tomonlardan istalgan uchtasini olish mumkin)

9) *a, b, c* (yoki *d), f* va ∠B

10) *a, b, f* va ∠A, ∠B



11) *a, b, c,* ∠B (yoki ∠C), ∠A (yoki ∠D)

12) *a, e,* ∠A, ∠B, ∠C

13) *a, b, c, e,* ∠C

14) *a, b, c, e,* ∠D

15) *a, b, e, f,* ∠(*e*∧*f*)

10-AMALIY MASHG'ULOT: Ko'pyoqlarda kesimlar yasash.

Reja:

1. Prizmalarda kesimlar yasash.
2. Piramidalarda kesimlar yasash

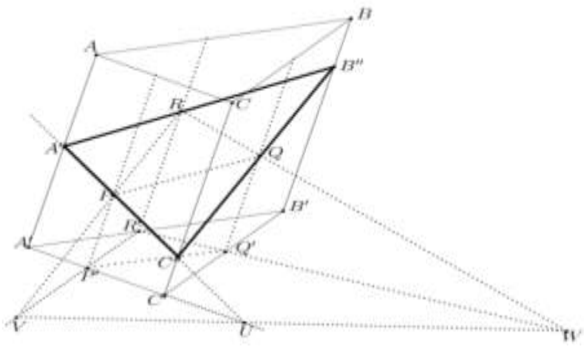
Ushbu amaliy mashg'ulotda ko'pyoqlarda kesimlar yasashga oid masalalar yechilib, kopyoqlarning turli elementlarida berilgan nuqtalarga mos ravishda kesimlarning o'zgarishi tahlil qilinadi.

Prizmalarda kesimlar yasash.

1. $ABCA'B'C'$ uchburchakli prizmaning yon yoqlarida yotuvchi P,Q,R nuqtalar berilgan. Piramidaning PQR tekislik bilan kesishish natijasida hosil bo'ladigan kesimini yasang.

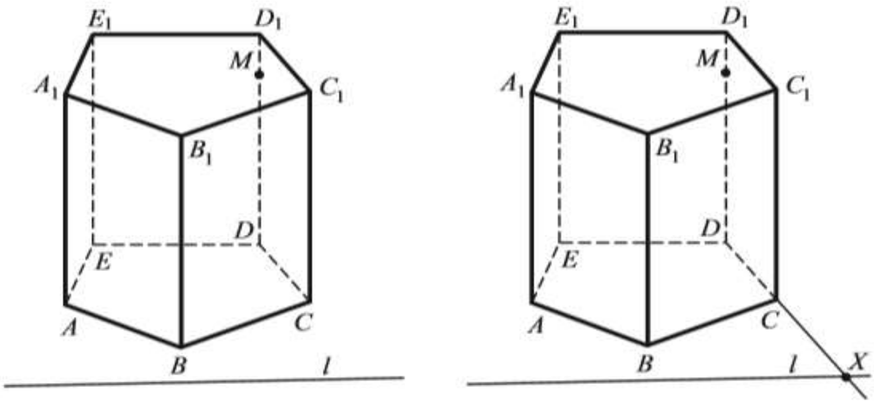
Yechim:

1. P, Q, R nuqtalarni belgilab olamiz;
2. P, Q, R nuqtalarning asos tekisligidagi P', Q', R' proyeksiyalarini topamiz;
3. $PR \cap P'R' = V$;
4. $QR \cap Q'R' = W$;
5. WV;
6. $WV \cap A'C' = U$;
7. UP;
8. $UP \cap AA' = A''$;
9. $UP \cap CC' = C''$;
10. $A'R$;
11. $A'R \cap BB' = B''$;
12. $B''C''$;
13. $A''B''C''$.

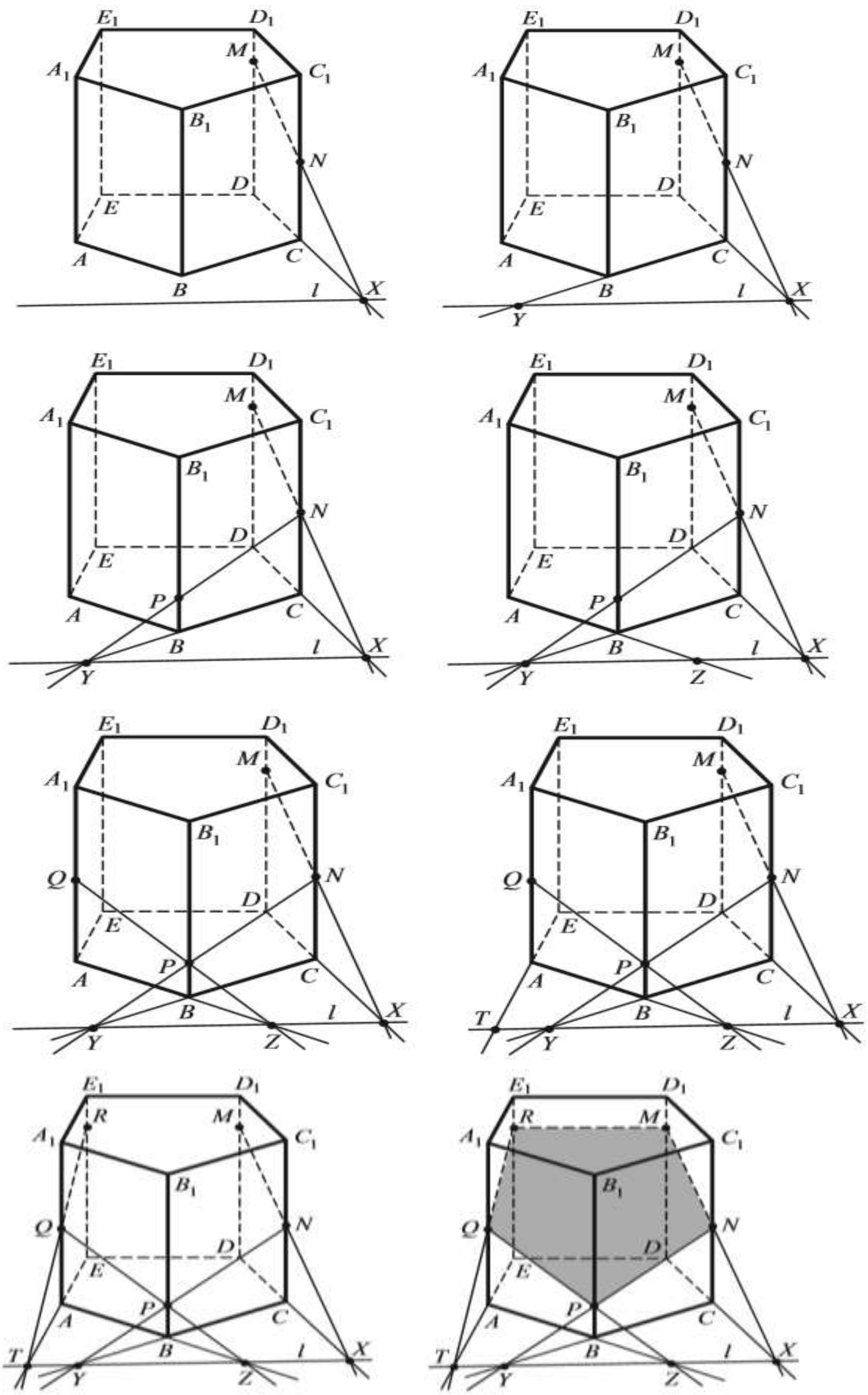


2. $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ beshburchakli prizmaning DD_1 qirrasida yotuvchi M nuqta hamda asos tekisligida yotuvchi l to'g'ri chiziqdan o'tuvchi kesimini yasang.

Yechim.

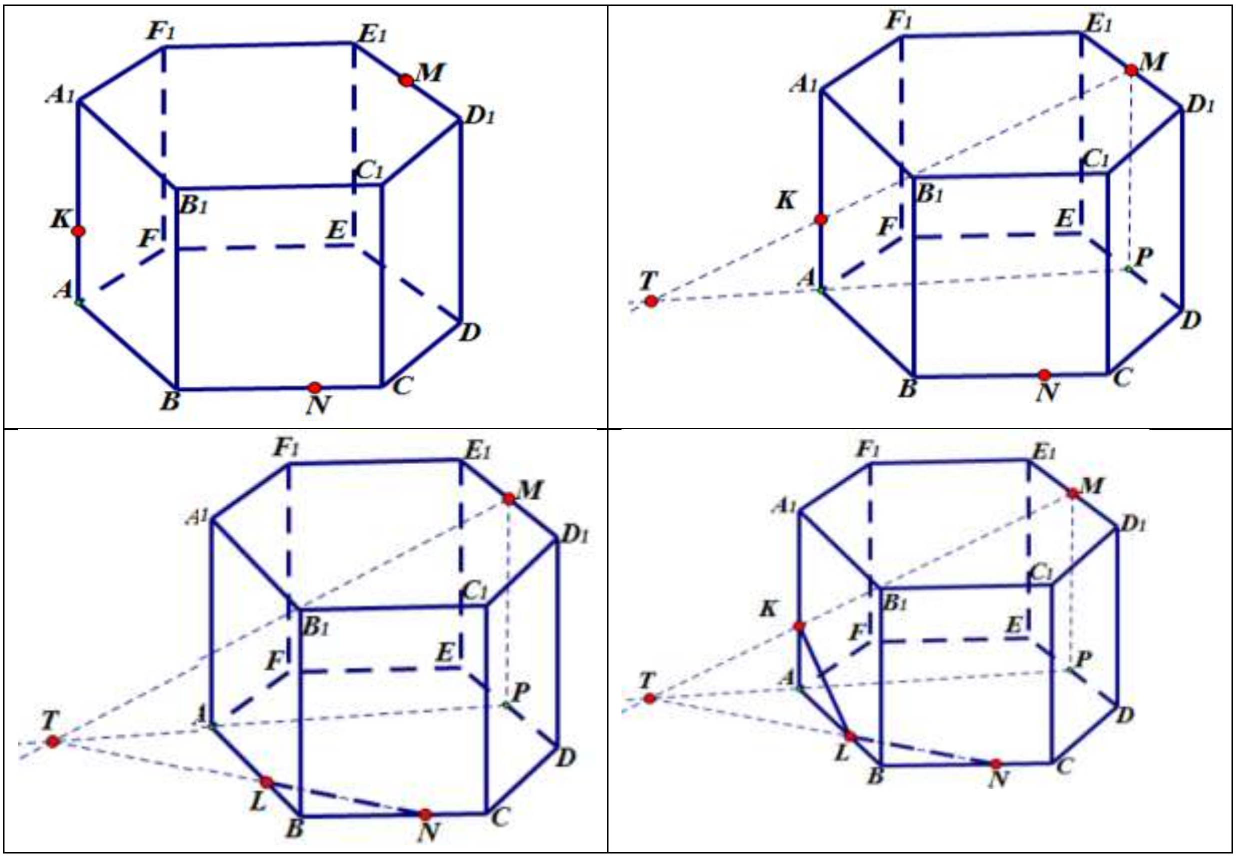


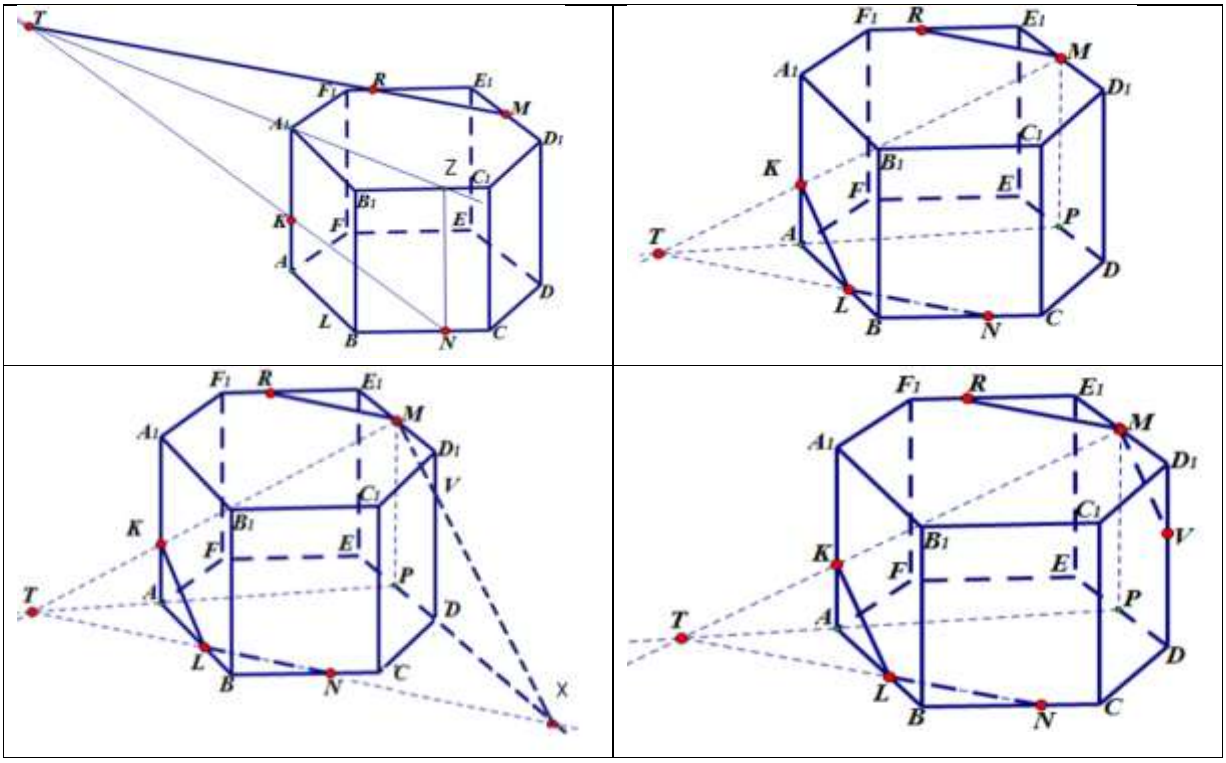
1. M nuqtaning asos tekislikdagi proyeksiyasi D nuqta;
2. DC;
3. $l \cap DC = X$;
4. XM;
5. $XM \cap CC_1 = N$;
6. CB;
7. $l \cap CB = Y$;
8. YN;
9. $YN \cap BB_1 = P$;
10. AB;
11. $l \cap AB = Z$;
12. ZP;
13. $ZP \cap AA_1 = Q$;
14. EA;
15. $l \cap EA = T$;
16. TQ;
17. $TQ \cap EE_1 = R$;
18. RM;
19. $MNPQR$.

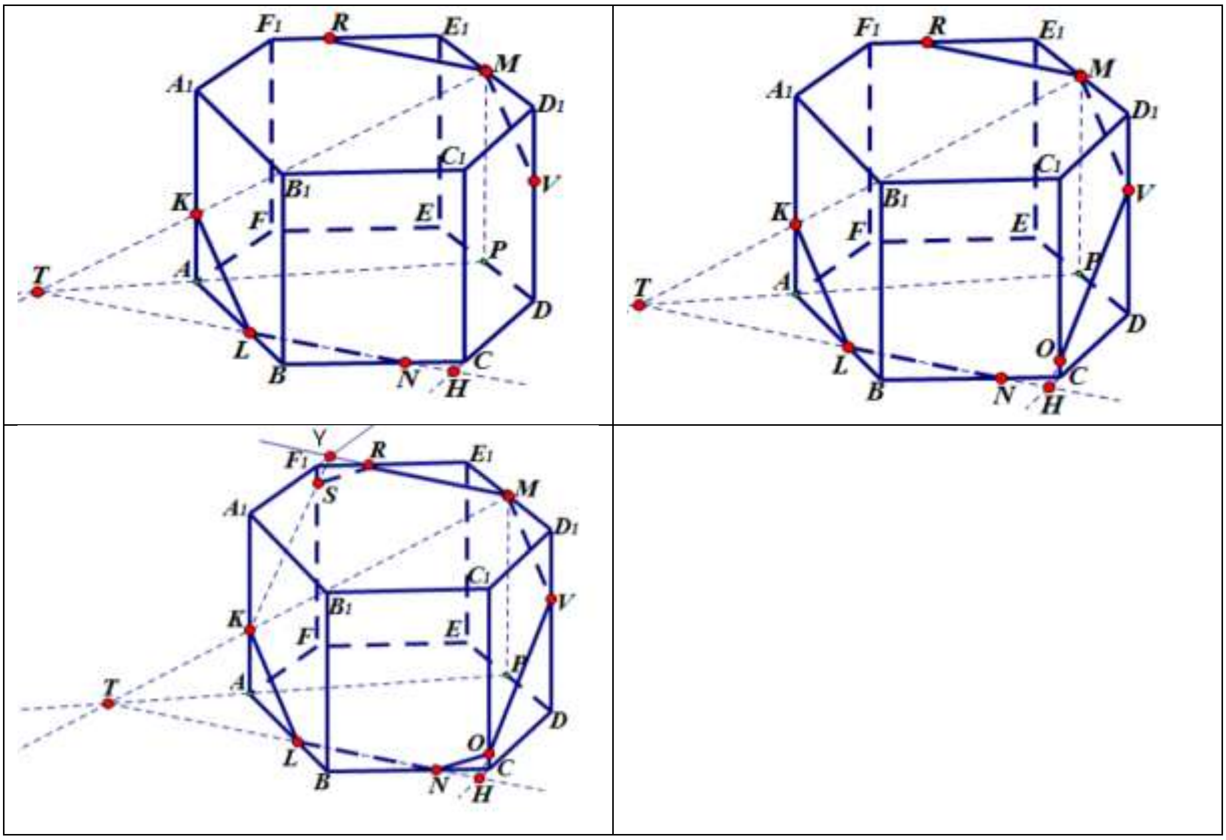


3. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ oltiburchakli to’g’ri prizma va uning qirralarida yotuvchi M, N, K nuqtalar berilgan. Prizmaning MNK tekislik bilan kesishishi natijasida hosil bo’ladigan kesimini yasang.

Yechim.

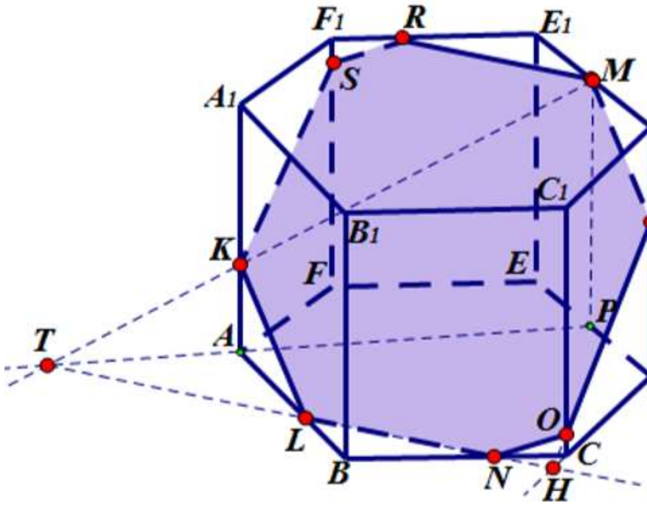

F1
E1
M
A1
D1
C1
B1
K
F
E
A
D
B
N
C
T
P
L


T
F1
R
E1
M
A1
D1
Z
C1
B1
K
F
E
A
P
D
L
B
N
C
V
X



1. M va K nuqtalarning asos tekisligidagi proyeksiyalari P va A nuqtalari;
2. $MK,\ PA$;
3. $MK \cap PA = T$;
4. TN;
5. $TN \cap AB = L$;
6. KL;
7. Z nuqta N nuqtaning yuqori asosdagi proyeksiyasi;
8. $NK,\ ZA_1$;
9. $NK \cap ZA_1 = T$;
10. TM;
11. $TM \cap E_1F_1 = R$;
12. RM;
13. $TN \cap ED = X$;
14. XM;
15. $XM \cap DD_1 = V$;
16. MV;
17. $TN \cap DC = H$;
18. HV;
19. $HV \cap CC_1 = O$;
20. $MR \cap A_1F_1 = Y$;
21. YK;

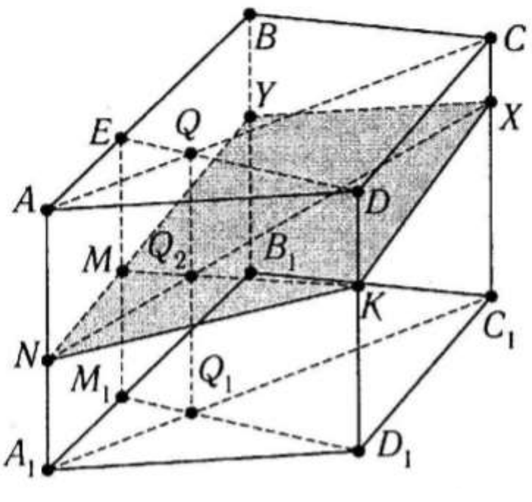
22. $YK \cap FF_1 = S$;
23. $MVCNLKSR$.



4. To'rtburchakli prizmaning yon qirrasida yotuvchi ikki nuqta va yon yog'ida yotuvchi bitta nuqta orqali o'tuvchi kesimini yasang.

Yechim. Kesimni ichki proyeksiyalash metodi yordamida hosil qilamiz. Prizmaning AA_1BB_1 yog'ida M nuqta, AA_1 qirrasida N nuqta va DD_1 qirrasida K nuqta joylashgan bo'lsin. N nuqtaning yuqori va quyi asos tekisliklaridagi proyeksiyalari mos ravishda A va A_1 nuqtalar, M nuqtaning proyeksiyalari E va M_1 nuqtalar, K nuqtaning proyeksiyalari D va D_1 nuqtalar. U holda kesim quyidagicha hosil qilinadi:

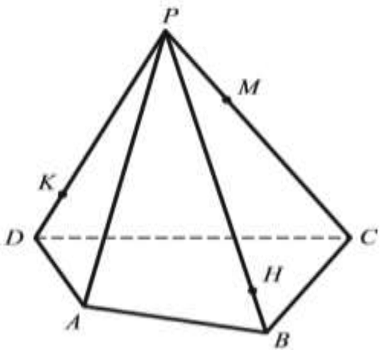
1. A_1C_1;
2. M_1D_1;
3. $A_1C_1 \cap M_1D_1 = Q_1$;
4. AC;
5. ED;
6. $AC \cap ED = Q$;
7. MK;
8. QQ_1;
9. $QQ_1 \cap MK = Q_2$;
10. NQ_2;
11. $NQ_2 \cap CC_1 = X$;
12. NM;
13. $NM \cap BB_1 = Y$;
14. $NKXY$.



Piramidalarda kesimlar yasash.

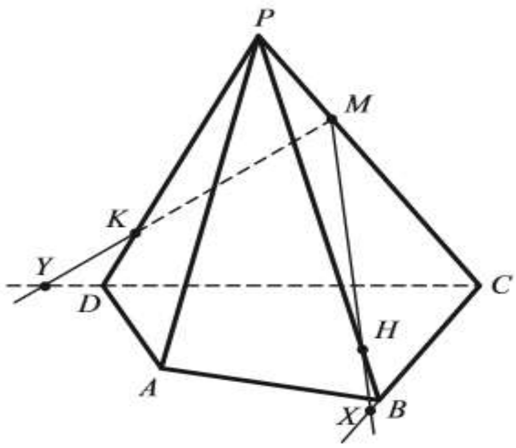
Piramidalarda kesimlar yasashni quyidagi masalalar yordamida ko'rib chiqamiz:

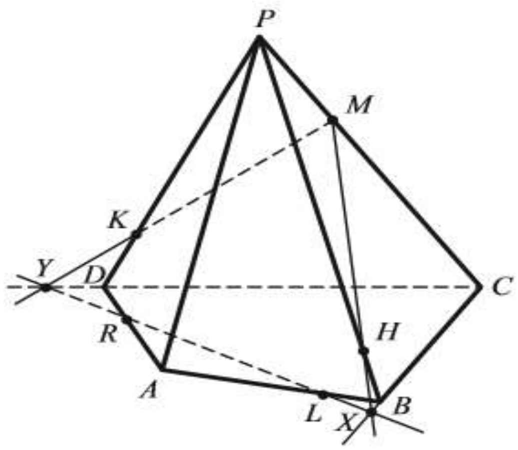
1. Uchi P nuqtada bo'lgan $PABCD$ to'rtburchakli piramidaning $M \in PC$, $H \in PB$, $K \in PD$ shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalardan o'tuvchi MHK kesimini yasang.

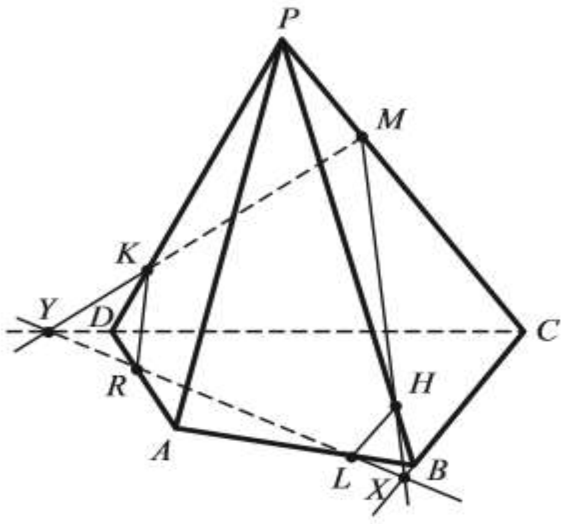


Yechim. Kesuvchi tekislikning asos tekisligidagi izidan foydalanib masalani yechamiz. Piramidaning PBC yog'ining asos tekisligidagi BC izi MH to'g'ri chiziq bilan X nuqtada kesishadi. Xuddi shunday PDC yog'ining asos tekisligidagi CD izi MK to'g'ri chiziq bilan Y nuqtada kesishadi. M, X, Y nuqtalar bitta tekislikka tegishli bo'lgan nuqtalardir. XY to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq piramidaning AD qirrasi bilan R nuqtada, AB qirrasi bilan L nuqtada kesishadi. Endi aniqlab oligan nuqtalarni ketma-ket tutashtirib chiqamiz. Natijada biz izlagan $MHLRK$ kesim hosil bo'ladi. Yuqorida bajargan ishlarimiz qisqacha quyidagicha ifodalanadi:

1. MK;
2. $MK \cap CD = Y$;
3. MH;
4. $MH \cap CB = X$;
5. XY;
6. $XY \cap AD = R$;
7. $XY \cap AB = L$;
8. $MHLRK$.

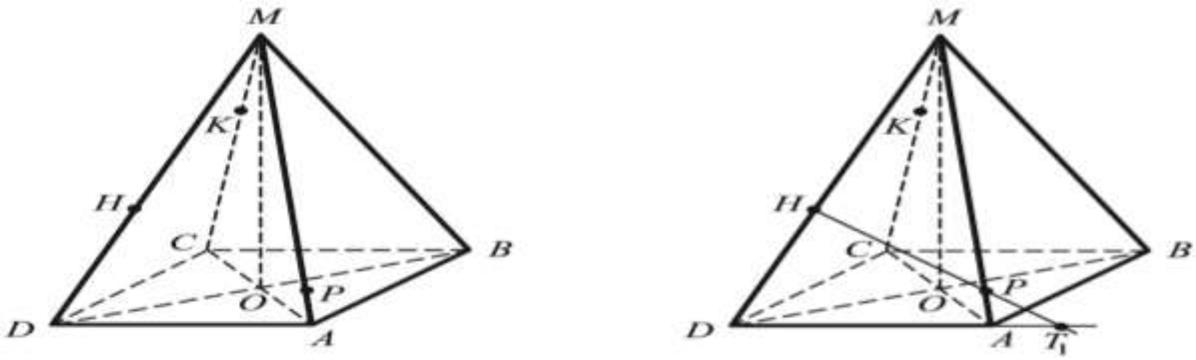




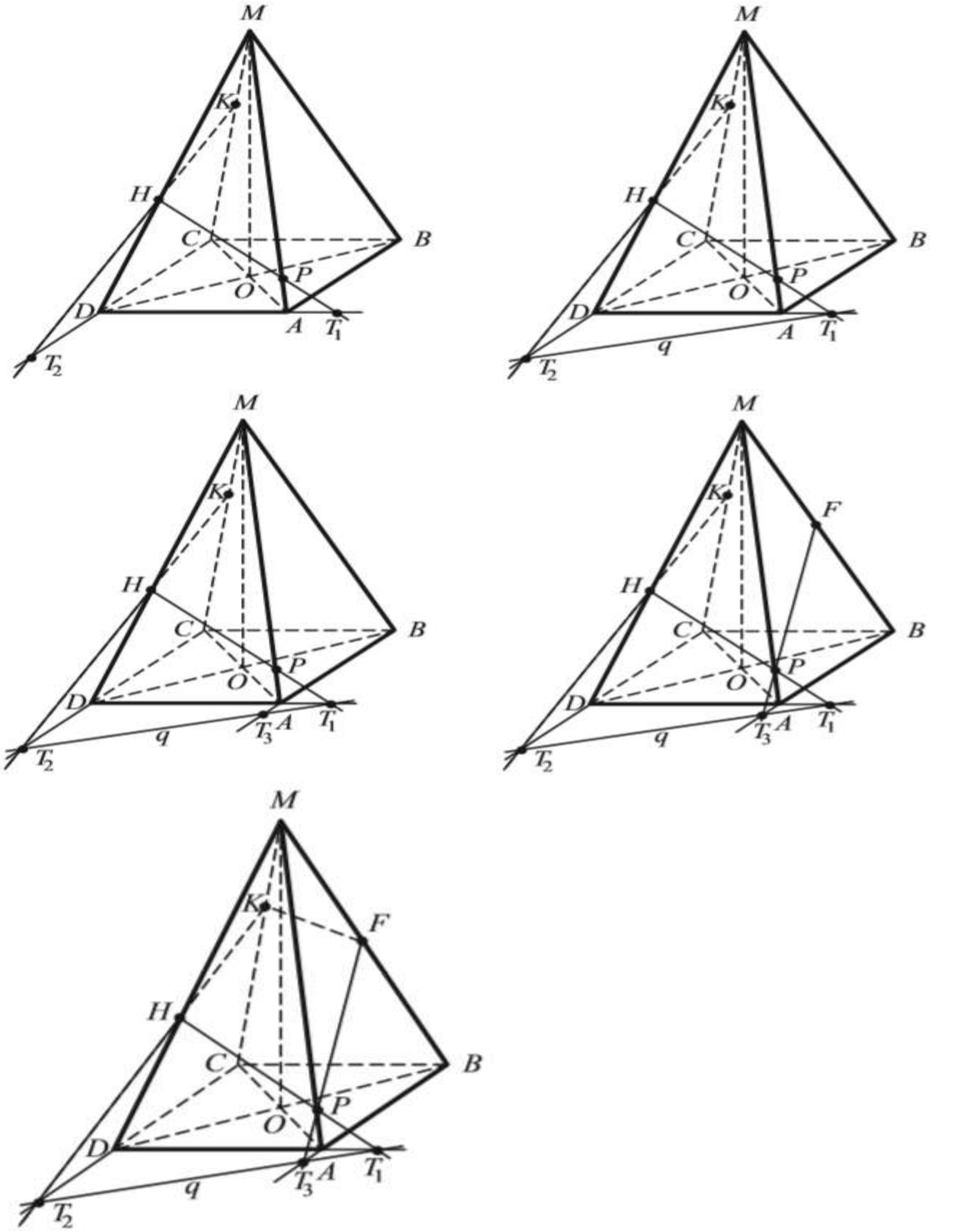


2. $MABCD$ piramidaning MA, MC, MD qirralarida yotuvchi P, K va H nuqtalari orqali o'tuvchi kesimini yasang.

Yechim:



1. HP;
2. $HP \cap DA = T_1$;
3. KH;
4. $KH \cap CD = T_2$;
5. T_1T_2;
6. BA;
7. $BA \cap T_1T_2 = T_3$;
8. T_3P;
9. $T_3P \cap MB = F$;
10. $KFPM$.



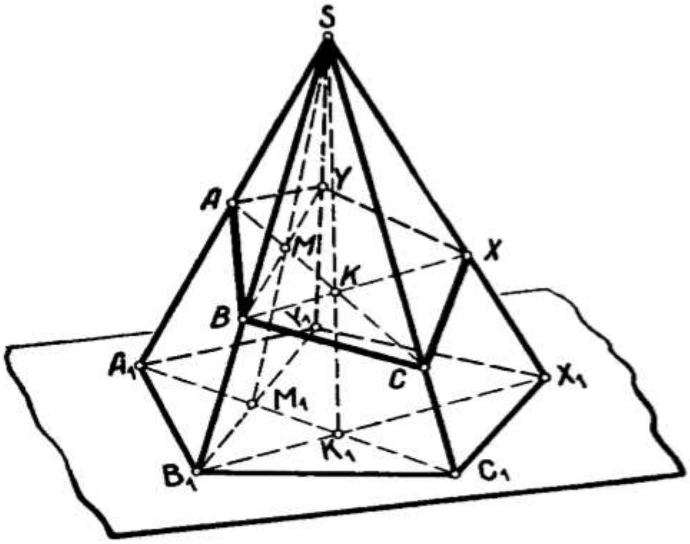
3. Beshburchakli piramidaning yon qirralaridan olingan A, B, C nuqtalar hosil qilgan kesimini yasang.

Yechim. Kesimni ichki proyeksiyalash usuli yordamida hosil qilamiz. A, B, C nuqtalarning asos tekisligidagi proyeksiyalari mos ravishda A_1, B_1, C_1 nuqtalaridir. S nuqta proyeksiyalash markazidir. U holda kesim quyidagicha hosil qilinadi;

1. A_1C_1;
2. B_1X_1;
3. B_1Y_1;

9. K_1S;
10. $K_1S \cap AC = K$;
11. BM;

4. $A_1C_1 \cap B_1Y_1 = M_1$;
5. $A_1C_1 \cap B_1X_1 = K_1$;
6. AC;
7. M_1S;
8. $M_1S \cap AC = M$;
12. $BM \cap SY_1 = Y$;
13. BK;
14. $BK \cap SX_1 = X$;
15. $ABCXY$.



Foydalanilgan adabiyotlar

1. С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский, А. В. Ушаков Геометрия (2-часть) Учебное пособие для вузов.- М.: "БИНОМ. Лаборатория знаний", 2015.

2. N.D.Dadajonov, R.Yunusmetov, T.Abdullaev, Geometriya 2-qism. Toshkent «O'qituvchi» 1996 y.

3. X.X.Nazarov, X.O.Ochilova, Ye.G.Podgornova. Geometriyadan masalalar to'plami. 2 qism. Toshkent «O'qituvchi» 1993, 1997y.

4. A.Y.Narmanov, A.S.SHaripov Geometriya asoslari. T.Universitet, 2004 y.

V. GLOSSARIY

Termin	O'zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Algebra	matematikaning miqdorlar ustida bajariladigan amallarining umumiy qonunlari haqidagi o'quv fani	the amount of mathematical technique, the study of the science of the general laws is fulfilled on the network about their activities
Alternativ	muqobil, muqobil o'quv materiali	alternative, alternative educational materials
Amaliy mashg'ulotlar	maxsus jihozlangan xona yoki alohida ajratilgan tajriba maydonida tashkil etilib, tahsil oluvchilarda ular tomonidan o'zlashtirilgan nazariy bilimlarni amaliyotda qo'llay olish ko'nikma va malakalarini hosil qilishga yo'naltirilgan ta'lim shakli	allocated a room specially equipped or established a particular experience in the area of scholarship utilized by the recipient to apply their theoretical knowledge in practice to get the skills and education to ensure focused skills form
Matematik model	matematik timsollar, belgilar va hodisalar sinfining taxminiy namunasi, bayoni	mathematical analogy, the approximate description of the characters and events of the class sample
Mashq	biror faoliyatni puxta o'zlashtirish yoki sifatini yaxshilash maqsadida uni ko'p marta takrorlash	thorough mastering of any activity or repeat it many times in order to improve the quality
Aksioma	Bu har qanday nazariyaning boshlang'ich tushunchasi bo'lib, ma'lum bir nazariya doirasida isboti talab qilmasdan haqiqat deb qabul qilinadi va so'ngra bu akisomalar mantiq qoidalariga asoslangan holda yangi jumlalar (teoremalar) isbotlashda foydalaniladi	This is the starting position of any theory, accepted within the framework of a given theory as true without requiring its proof and used as the basis for proving its other positions according to the rules of inference adopted in it.
Tekislik	Unda yotadigan barcha to'g'ri	Plane is one of the basic

(Evklid "Negizlar" asaridagi ta'rifi)	chiziqlarga nisbatan bir xil joylashgan sirt	concepts of geometry. In a systematic presentation of geometry, the concept of a plane is usually taken as one of the initial concepts, which is only indirectly determined by the axioms of geometry.
Parallel to'g'ri chiziqlar	Bir tekislikda yotuvchi, umumiy nuqtaga ega bo'lmagan to'g'ri chiziqlar	in planimetry, straight lines that do not intersect, no matter how many of them continue in both directions.
Aylana (Lobachevskiy tekisligida)	Lobachevskiy tekisligida markaziy dastada mos nuqtalar to`plami	which consists of all points on the plane, equidistant from a given point [1]: this point is called the center of the circle
Oritsikl	Lobachevskiy tekisligida parallel to`g`ri chiziqlar dastasining mos nuqtalari to`plami	a line in the Lobachevsky plane orthogonal to some family of parallel lines
Ekvidistanta	Lobachevskiy tekisligida uzoqlashuvchi to`g`ri chiziqlar dastasining mos nuqtalari to`plami	In Lobachevsky's geometry, an equidistant or hypercycle is called the locus of points located at a given distance from a given straight line
Proyektiv tekislikda Ikkilik prinsipi	Agar biror nuqta va to'g'ri chiziqlarning insidentligi terminida ifodalangan "A" tasdiq to'g'ri bo'lsa, u holda "nuqta" so'zini "to'g'ri chiziq" so'zi bilan va "to'g'ri chiziq" so'zini "nuqta" so'zi bilan almashtirishdan xosil bo'lgan "A*" tasdiq ham ham to'g'ri bo'ladi." jumalasi	expressed in the possibility of transition to equivalent statements, interchangeable union and intersection with complement of arguments

Aksiomatik metod	Asosiy tushunchalar va aksiomalarni tanlash ta'riflar kiritib, teoremalarni yuqoridagilarga asoslanib isbotlash	the result of a strict formalization of the theory, assuming a complete abstraction from the meaning of the words of the language used, and all the conditions governing the use of these words in theory are explicitly expressed by means of axioms and rules that allow one phrase to be derived from others
To'liq tasvir	Agar figuraning har bir nuqtasi rasm tekisligida berilgan bo'lsa, u holda bu figura tasvirini *to'liq tasvir* deb aytiladi	If each point of the figure is given in the plane of the image, then the image of this figure is called a complete image.
To`g`irlash metodi	Bir to`g`ri chiziqda yotmagan kesmalarning, masalan siniq chiziq bo`g`inlarining algebraik yig`indisiga teng kesma yasash, kesmalarni to`g`irlash deb ataladi.	the solution of any construction problem is reduced to the graphical solution of some algebraic equation, and the coefficients of this equation are related to the lengths of the given segments
Analiz bosqichi	Konstruktiv masalalarni yechishning dastlabki tayyorlov bosqichidir. Bu bosqichning asosiy vazifasi masalani yechilishi oldindan ma`lum bo`lgan masalalarga ajratish va ularning yechilishi tartibini aniqlashdan iborat	a research method characterized by the isolation and study of individual parts of the research objects.
Yasash bosqichi	Masalada so`ralgan figurani topish uchun kerak bo`lgan asosiy yasashlar ketma- ketligi analiz bosqichida tuzilgan plan asosida, chizg`ich va sirkul yordamida hosil qilinadi.	In the conditions of the problem, a set of objects is initially set (considered to be constructed). It is allowed to add (build) to the set of constructed objects

Isbot bosqichi	Bu bosqichda yasalgan figura masalada izlangan figura ekanligi isbot qilinadi, ya`ni uning masalada berilgan barcha shartlarga javob berishi isbotlanadi	use the properties of the areas of figures, the proof of which is more difficult than the proof of the theorem itself
Tekshirish bosqichi	Masala yechishning yakunlash bosqichi hisoblanib, unda masala shartida belgilanganlarga asosan figura yasash mumkinmi? agar mumkin bo`lmasa berilganlarni qanday tanlash lozim qanday hollarda yechim mavjud, berilganlarga asoslanib nechta yechimga ega ekanligi aniqlanadi.	It is the final stage of solving the problem, in which it is possible to make a figure based on the conditions of the problem?
To'liq tasvir	Agar figuraning har bir nuqtasi rasm tekisligida berilgan bo'lsa, u holda bu figura tasviri	If each point of the figure is given in the plane of the image, then it is an image of the figure
Pozitsion masala	fazodagi ikkita figuralarning kesishish nuqtasini tasvirlarini yasash masalasi	the problem of making images of the point of intersection of two figures in space

VI. FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. A.Yunusov. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari. O'quv qo'llanma. T., Yangi asr avlodi. 2006.
2. D.Yunusova, A.Yunusov. Algebra va sonlar nazariyasi. modul texnologiyasi asosida tayyorlangan misol va mashqlar to'plami. O'quv qo'llanma.
3. Kulikov L.Ya. Algebra i teoriya chisel. M., Visshaya shkola. 1979 g.
4. Zavalo S.T. i dr. Algebra i teoriya chisel.CH. I,II.Kiïv. Visha shkola.1983g.
5. Petrova V.T.Leksii po algebre i geometrii.Ch.1,2. Moskva,1999g
6. Kostrikin I.A. Vvedenie v algebru. M., Nauka.1977 g.
7. Xojiev J.X. Faynleyb A.S. Algebra va sonlar nazariyasi kursi, Toshkent, «O'zbekiston», 2001y.
8. Jim Hefferon. Lab Manual for Linear Algebra. Jim Hefferon Mathematics, Saint Michael's College Colchester, Vermont USA 2019-Dec-25.
9. Martyn R. Dixon, Leonid A. Kurdachenko, Igor Ya. Subbotin, "ALGEBRA AND NUMBER THEORY" 2013
10. Sadaddinova S.S., Abduraxmanova Yu.M., Raximova F.S. Diskret matematika. O'quv qo'llanma. Tashkent 2014
11. Turgunbayev R.M. Matematik analiz 1-qism. Darslik. T.:- "Innovatsiya-ziyo". 2019. 340 b.
12. Каток С.Б. p-адический анализ в сравнении с вещественным. М.: МЦНМО, 2004,-112с.
13. Коблиц Н. p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.-192 с.
14. Alain M. Robert. A Course in p-adic Analysis. 2000. Springer-Verlag. New York, 438 p.
15. Fernando Q. Gouvea. p-adic Numbers. Corrected 3rd printing. 2003. Springer-Verlag. 301 p.
16. Khrennikov A., Anashin V. Applied algebraic dynamics. Copyright 2009 by Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, 10785 Berlin, Germany.
17. Ayupov Sh.A., Turgunbayev R.M. p-adik analizga kirish.(oquv qo'llanma). 80-b. (OO'MTV qoshidagi muvofiqlashtiruvhi kengashga topshirilgan)
18. С. Л. Атанасян, В. Г. Покровский, А. В. Ушаков Геометрия (2-часть) Учебное пособие для вузов.- М.: "БИНОМ. Лаборатория знаний", 2015.
19. N.D.Dadajonov, R.Yunusmetov, T.Abdullaev, Geometriya 2-qism. Toshkent «O'qituvchi» 1996 y.
20. X.X.Nazarov, X.O.Ochilova, Ye.G.Podgornova. Geometriyadan masalalar to'plami. 2 qism. Toshkent «O'qituvchi» 1993, 1997y.
21. A.Y.Narmanov, A.S.SHaripov Geometriya asoslari. T.Universitet, 2004

у.
22. Jim Hefferon. Lab Manual for Linear Algebra. Jim Hefferon Mathematics, Saint Michael's College Colchester, Vermont USA 2019-Dec-25.
23. Lindsay Clandfield and Kate Pickering "Global", B2, Macmillan. 2013. 175.
24. Steve Taylor "Destination" Vocabulary and grammar", Macmillan 2010.

Интернет ресурслар

25. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги.
26. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
27. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази.
28. http://ziyonet.uz – Таълим портали ZiyoNET
29. http://natlib.uz – Алишер Навоий номидаги Ўзбекистон Миллий кутубхонаси.