O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISH BOSH ILMIY - METODIK MARKAZI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

« O’LCHOV NAZARIYASI VA UNING QO’LLANISHI »

MODULI BO‘YICHA

O‘ Q U V – U S L U B I Y M A J M U A

Toshkent 2022

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi: Toshkent davlat transport universiteti “Oliy matematika” kafedrasi professori, f.-m.f.d. A.Artikbayev

Taqrizchilar: Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti “Geometriya va topologiya” kafedrasi mudiri, f.-m.f.d. R.B.Beshimov

Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti “Geometriya va topologiya” kafedrasi professori, f.-m.f.d. A.S.Sharipov

O‘quv -uslubiy majmua O‘zbekiston milliy universiteti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan (2021 yil ---- dekabrdagi № -sonli baènnomasi)

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

Dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son, 2019 yil 9 iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-son, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019 yil
8 oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-son, 2020 yil 7 maydagi “matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiytadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4708-son li Farmonlari hamda O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni kredit modul tizimi va o‘quv jarayonini tashkil etish, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, pedagogning kasbiy professionalligini oshirish, ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish, maxsus maqsadlarga yo‘naltirilgan ingliz tili, mutaxassislik fanlar negizida ilmiy va amaliy tadqiqotlar, o‘quv jarayonini tashkil etishning zamonaviy uslublari bo‘yicha so‘nggi yutuqlar, pedagogning kreativ kompetentligini rivojlantirish, ta’lim jarayonlarini raqamli texnologiyalar asosida individuallashtirish, masofaviy ta’lim xizmatlarini rivojlantirish, vebinar, onlayn, «blended learning», «flipped classroom» texnologiyalarini amaliyotga keng qo‘llash bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishining o‘ziga xos xususiyatlari hamda dolzarb masalalaridan kelib chiqqan holda dasturda tinglovchilarning mutaxassislik fanlar doirasidagi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar takomillashtirilishi mumkin.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi: Affin fazosi va bichiziqli funksiya yordamida ixtiyoriy noyevklid fazolarni ta’riflash. Sirtlar nazariyasidagi ichki va tashqi geometriyalar tushunchalari bilan tanishish. Ko‘pxillik va uning boshqa turdosh sohalarda qo‘llanishi borasida oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining bilim, ko‘nikma va kompetensiyalarini oshirish. **Modulning vazifalari:**

- chiziqli fazo haqida umumiy tushunchalar, Affin fazo, bichiziqli forma va noyevklid fazosi haqidagi qo‘shimcha ma’lumotlar bilan tinglovchilarni tanishtirish va ularning amaliy bilimlarini shakllantirish;
- sirt differensial geometriyasiga kirish orqali sirtning ichki va tashqi geometriyasi bilan tanishish, ularning muhim xossalarini o‘rganish;
- Psevdoyevklid, sferik, giperbolik, yarim Yevklid, yarim giperbolik fazolar bilan tanishtirish va ularni amaliy masalalarda qo‘llashga doir ko‘nikmalarni hosil qilish;
- ko‘pxilliklar, ko‘pxillik turlari va ko‘pxillik geometriyasini o‘rganish orqali oliy ta’lim pedagog kadrlarini geometriyaning zamonaviy yutuqlari bilan tanishtirishdan iborat.

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

Modulni o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida**:**

Tinglovchi:

• geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanishni ***bilishi*** kerak.

• o‘lchov nazariyasidan matematika, fizika va biologiya masalalarida keng foydalanish;

• matematik fanlarni o‘qitishda innovatsion ta’lim metodlari va vositalarini amaliyotda qo‘llash;

• talabalarni o‘zlashtirish darajasini nazorat qilish va baholashning nazariy asoslari hamda innovatsion yondoshuv usullarini to‘g‘ri qo‘llay olish **ko‘nikmalariga** ega bo‘lishi lozim.

• O‘lchovlar nazariyasi va uning tabiqini turli fazolarda qo‘llay olish;

• geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanish ***malakasiga*** ega bo‘lishi kerak.

• matemanikaning xorij va respublika miqiyosidagi dolzarb yechimlari, tendensiyalari asosida o‘quv jarayonini tashkil etish;

• matematikani turli sohalarga tatbiq etish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikatsiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

- ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsion va elektron-didaktik texnologiyalardan;
- o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspressso‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“Zamonaviy geometriya” modulining mazmuni o‘quv rejadagi “O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi”, “Matematikaning sohalarga tatbiqlari” va “Matematikada informatsion texnologiyalar” o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan bo‘lib, pedagoglarning ta’lim jarayonida ushbu modullardagi mavzularni tushunishiga yordam beradi hamda ularning kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasi va ilmiy salohiyatini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida geometriya fanidan talabalarga darsni qiziqarli va mazmunli tarzda o‘tish, shuningdek, o‘z bilimlarini ilmiy faoliyatga yo‘naltirishga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

“Zamonaviy geometriya” moduli bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya o‘quv yuklamasi		
		Жами	jumladan	
			Назарий	Амаий машғулот
1.	Chiziqli va Affin fazo	6	2	4
2.	Yevklid va Psevdoyevklid fazo	6	2	4
3.	Sirt ichki va tashqi geometriyasi	4	2	2
4.	Ko‘pxilliklar geometriyasi	4	2	2
	Jami:	**20**	**8**	**12**

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. Chiziqli va Affin fazo (2 soat).

1.1. Chiziqli fazo. Chiziqli fazo o‘lchami.

1.2. Affin fazo. Affin koordinatalar sistemasi.

1.3. Affin almashtirishlar. Affin tekisliklari.

1.4. Biziqli forma.

1.5.

2-mavzu. Yevklid va Psevdoyevklid fazo (2 soat).

3.1. Yevklid fazosi. Yevklid fazosida chiziq va sirtlar 3.2. Psevdoyevklid fazo.

3.3. Sferik fazo.

3.4. Giperbolik fazo.

3.5. Yarim Yevklid fazolar.

3.6. Yarim giperbolik fazolar.

3.7. Ikkinchi tartibli sirtlar. Ikkinchi tartibli sirt invariantlari.

3-mavzu. Sirt ichki va tashqi geometriyasi (2 soat).

2.1. Sirt differensial geometriyasi.

2.2. Sirt ichki geometriyasi. Riman geometriyasi.

2.3 Sirt tashqi geometriyasi. **4-mavzu. Ko‘pxilliklar geometriyasi (2 soat).**

4.1. Ko‘pxilliklar. Ko‘pxillik turlari.

4.2. Ko‘pxillik geometriyasi.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

O‘tilgan mavzularni chuqur tahlil qilish va o‘zlashtirilgan bilimlarni mustahkamlash uchun tashkil etiladigan amaliy mashg‘ulotlar mavzu doirasida berilgan tushunchalarga misollar keltirish, ba’zi muhim natijalarni tinglovchilar bilan muhokama tarzida isbotlash, mavzu doirasidagi ilmiy yangiliklarni tinglovchilarga oson usulda yetkazishga mo‘ljallangan.

1-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli va Affin fazo (4 soat).

Chiziqli fazo o‘lchami, chiziqli almashtirishlar. Vektor fazo. Affin fazo, bazis. Affin almashtirishlar. Affin koordinatalar sistemasi. Bichiziqli funksiY. Affin fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklar.

2-amaliy mashg‘ulot. Yevklid va Psevdoyevklid fazo (4 soat).

Uch o‘lchovli psevdoyevklid fazo. Vektor normasi, masofa. Izotroplik. Galiley geometriyasi. Sfera va uning turlari. Sfera ustidagi geometriyalar.
Lobachevskiy tekisligi. Keli-Kleyn talqini.

3-amaliy mashg‘ulot. Sirt ichki va tashqi geometriyasi (2 soat).

Birinchi kvadratik forma va u bilan bog‘liq kattaliklar. Gauss teoremasi. Sirtlarni egish. Ikkinchi kvadratik forma. Normal egrilik. To‘la va o‘rta egrilik. Bonne teoremasi.

4-amaliy mashg‘ulot. Ko‘pxilliklar geometriyasi (2 soat).

Ko‘pxillik va noyevklid geometriyalari orasidagi bog‘lanish. Riman geometriyasi. Chekli geometriya haqida tushuncha. Tekislikdagi geometriyalar.

O‘QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan loyiha yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

“Keys-stadi” metodi

“Keys-stadi”— inglizcha so‘z bo‘lib, (“case” – aniq vaziyat, hodisa, “stadi” – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	**Faoliyat shakli va mazmuni**
1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Assisment” metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assisment”lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Har bir katakdagi to‘g‘ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.

Тест

Янгилик — бу:

А) Хабар

В) Маълумот

С) Далил

D) Об-ҳаво маълумоти

Қиёсий таҳлил

Ўзбекистон рақамли телевидениеси ва анъанавий телевидениени қиёсий таҳлил қилинг.

Тушунча таҳлили

Янгиликларни изоҳланг...

Амалий кўникма

“O’zbekiston” телеканали информацион дастурларида янгиликлар фоизини аниқланг

Venn Diagrammasi metodi

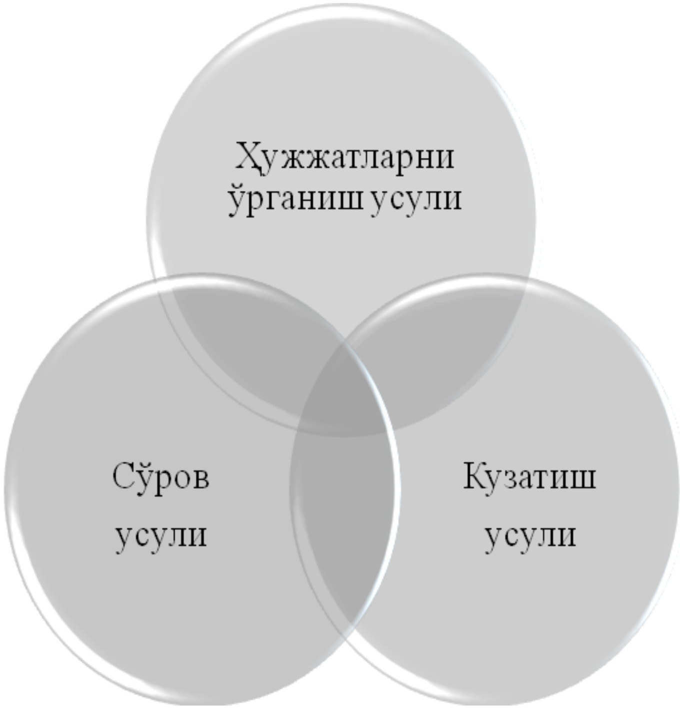
Metodning maqsadi: Bu metod grafik tasvir orqali o‘qitishni tashkil etish shakli bo‘lib, u ikkita o‘zaro kesishgan aylana tasviri orqali ifodalanadi. Mazkur metod turli tushunchalar, asoslar, tasavurlarning analiz va sintezini ikki aspekt orqali ko‘rib chiqish, ularning umumiy va farqlovchi jihatlarini aniqlash, taqqoslash imkonini beradi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

• ishtirokchilar ikki kishidan iborat juftliklarga birlashtiriladilar va ularga ko‘rib chiqilayotgan tushuncha yoki asosning o‘ziga xos, farqli jihatlarini (yoki aksi) doiralar ichiga yozib chiqish taklif etiladi;

• navbatdagi bosqichda ishtirokchilar to‘rt kishidan iborat kichik guruhlarga birlashtiriladi va har bir juftlik o‘z tahlili bilan guruh a’zolarini tanishtiradilar;

• juftliklarning tahlili eshitilgach, ular birgalashib, ko‘rib chiqilayotgan muammo yohud tushunchalarning umumiy jihatlarini (yoki farqli) izlab topadilar, umumlashtiradilar va doirachalarning kesishgan qismiga yozadilar.



III. NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI.

1-mavzu. Chiziqli va Affin fazo

1.1. Chiziqli fazo. Chiziqli fazo o‘lchami.

1.2. Affin fazo. Affin koordinatalar sistemasi.

1.3. Affin almashtirishlar. Affin tekisliklari.

1.4. Biziqli forma.

Bizga ixtiyoriy elementlardan tashkil topgan L to‘plam berilgan bo‘lsin. To‘plam elementlarini $a, b, \dots, x, y, \dots$ lar bilan belgilaymiz. Shuningdek, haqiqiy sonlar to‘plami $\mathbb{R}$ ning elementlarini grekcha $\alpha, \beta, \dots$ lar bilan belgilaylik.

Berilgan L to‘plamda qo‘shish va songa ko‘paytirish deb atalgan amallar kiritilgan bo‘lsin:

1. har qanday ikki $a, b \in L$ uchun shu L to‘plamga tegishli va bu elementlar *yig‘indisi* deb atalgan $a + b$ element mos qo‘yilsin;

2. haqiqiy sonlar to‘plamidan olingan $\alpha \in \mathbb{R}$ va $a \in L$ uchun ularning *ko‘paytmasi* deb atalgan $\alpha \cdot a = a \cdot \alpha \in L$ element mos qo‘yilgan bo‘lsin.

To‘plam elementlari uchun kiritilgan bu amallar sakkizta aksiomani qanoatlantirsin.

I. Ixtiyoriy $a, b \in L$ uchun

$$a + b = b + a$$

ya'ni qo'shish amali o'rin almashtirish (kommutativlik) xossasiga ega bo'lsin;

II. Ixtiyoriy $a, b, c \in L$ учун

$$(a + b) + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

bu xossasi assotsiativlik xossasi deb ataladi. Bundan yig'indi amalini qavslarsiz yozish mumkinligi kelib chiqadi;

III. To'plamda 0 – nol element deb atalgan va

$a + 0 = 0 + a = a$

tenglikni qanoatlantiruvchi element mavjud bo'lsin;

IV. Tenglikning har qanday x elementi uchun shunday y element mavjudki, $x + y = 0$ tenglik o'rinli bo'lsin. Bu y element x ga qaramaqarshi element deb ataladi va $y = -x$ shaklda yoziladi.

V. To'plamda 1 – birlik element deb atalgan va

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

tenglikni qanoatlantiruvchi element mavjud bo'lsin;

Quyidagi aksiomalar uchun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ va $a, b \in L$

VI. $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$ – distributivlik xossasi;

VII. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ – sonli ko'paytuvchi taqsimoti xossasi;

VIII. $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ – to'plam elementi taqsimoti xossasi.

Ta'rif. Elementlari uchun qo'shish va songa ko'paytirish amallari berilgan L to'plamda keltirilgan sakkizta aksioma o'rinli bo'lsa, bu to'plam ***chiziqli fazo*** deyiladi.

Keltirilgan I-VIII aksiomalar *chiziqli fazo aksiomalari* deyiladi.

Eslatamiz biz α, β – sonlarni haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ dan oldik, shuning uchun chiziqli fazo *haqiqiy chiziqli fazo* deb ham ataladi.

Shuningdek, α, β – sonlarni $\mathbb{C}$ – kompleks sonlar to'plamidan ham olish yoki ixtiyoriy biror boshqa U – maydon elementi bo'lishi mumkin. Bu hollarda chiziqli fazo mos ravishda *kompleks chiziqli fazo* yoki U*-maydonda aniqlangan chiziqli fazo* deb yuritiladi.

Ushbu adabiyotda biz asosan haqiqiy chiziqli fazoni ko'rish bilan chegaralamiz.

Chiziqli fazo aksiomalaridan kelib chiqadigan natijalar

Chiziqli fazo elementlari yuqorida keltirilgan sakkizta aksiomani qanoatlantirishidan ba’zi natijalar paydo bo‘ladi.

Quyida shu natijalarni bayon qilamiz.

1. Chiziqli fazoda 0 (nol) element bitta.

Isbot. Xaqiqatan ham, agar 0_1 va 0_2 ikkita nol element bo‘ladi deb hisoblasak, I va III aksiomalardan

$$0_2 = 0_2 + 0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$$

ekanligi, ya’ni bu elementlar bir xil bo‘lishi kelib chiqadi.

2. Har qanday $x \in L$ uchun qarama-qarshi element yagona.

Isbot. Faraz qilaylik $x + y_1 = 0$ va $x + y_2 = 0$ bo‘lsin, ya’ni y_1, y_2 – ikkita qarama-qarshi element mavjud bo‘lsin. U holda I-IV aksiomalardan

$$y_1 = y_2 + 0 = y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = (x + y_2) + y_1 = 0 + y_1 = y_1$$

demak, $y_1 = y_2$ tenglikni hosil qilamiz.

3. Har qanday $x + y_2 = 0$ ning 0 (nol) ga ko‘paytmasi 0 ga teng.

Isbot. Berilgan $x + y_1 = 0$ ning qarama-qarshi elementi y bo‘lsin. II, V va VII aksiomalarni qo‘llab, ushbu tenglikni hosil qilamiz

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + (x + y) = (0 + 1) \cdot x + y = x + y = 0.$$

4. Ҳар қандай $x + y_2 = 0$ нинг -1 га кўпайтмаси қарама-қарши элементни беради, яъни $(-1) \cdot x = -x$.

Isbot. Bu natijani isbot qilish uchun $x + (-1) \cdot x = 0$ ekanini ko‘rsatish kerak. Haqiqatan ham, 3-natija hamda V va VII aksiomalardan

$$x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

5. Chiziqli fazo 0 elementini ixtiyoriy $\alpha \in L$ soniga ko‘paytmasi 0 elementni beradi.

Isbot. Xaqiqatan ham,VI aksioma va 3-natijaga ko‘ra

$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 \cdot x) = (\alpha \cdot 0) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

Shuningdek, bu natijadan nolga teng bo‘lmagan elementning $\alpha \neq 0$ ga ko‘paytmasi nolga teng bo‘lmagan element bo‘lishni hosil qilamiz.

Chiziqli fazoda yig‘indidan foydalanib elementlar ayirmasini kiritish mumkin.

Ikki a va b element ayirmasi $a - b$ deb, a element bilan b elementga qarama-qarshi element yig‘indisiga aytiladi

$$a - b = a + (-b).$$

Elementlar ayirmasi mavjud va yagona bo‘lishini keltirilgan natijalardan foydalanib isbot qilish mumkin.

Chiziqli fazo aksiomalari va keltirilgan natijalardan foydalangan hollarimizda buni alohida ta’kidlab o‘tmaymiz. Shu bilan birga bu paragraflarga ko‘rsatma (havola) keltirmaymiz.

Chiziqli fazoga misollar

Chiziqli fazo ixtiyoriy to‘plamda kiritilgan qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari hamda bu amallar qanoatlantirishi zarur bo‘lgan sakkizta aksioma orqali aniqlanadi. Bunda to‘plam elementlari chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Biz bayon etilishi sodda bo‘lishi va keyinchalik geometrik obrazlar bilan bog‘liq ekanini hisobga olib, asosan cheksiz ko‘p elementli to‘plamlardan hosil bo‘lgan chiziqli fazolar bilan tanishamiz.

Misol 1. Faqat bitta elementdan tashkil topgan to‘plam. To‘plam elementi qanday bo‘lishidan qat’iy nazar uni θ – element deb hisoblaymiz. Bunda θ elementni o‘ziga qo‘shilgani ham nol va har qanday songa ko‘paytmasi ham nolga teng bo‘lishini hisobga olib, keltirilgan sakkiz aksiomaning bajarilishini ko‘rsatish mumkin.

Demak, bitta elementdan iborat bo‘lgan to‘plam ham chiziqli fazo bo‘lishi mumkin.

Misol 2. Qatorlari soni m ta, ustunlari soni n ta bo‘lgan matritsalar to‘plami $L(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix}$$

a_{ij} – haqiqiy sonlar.

Bu to‘plam chiziqli fazo tashkil etadi. Bunda barcha mos elementlari o‘zaro teng bo‘lgan matritsalar o‘zaro teng, ya’ni bir xil matritsa deb qaraladi. $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ matritsalar yig‘indisi $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ shaklda, $A = (a_{ij})$ matritsani α songa ko‘paytmasi $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$ шаклда aniqlanib, shu $(m \times n)$ o‘lchovli matritsalar to‘plamiga tegishli bo‘ladi. Shuningdek, aniqlangan yig‘indi va songa ko‘paytirish amallari yuqoridagi sakkizta aksiomani qanoatlantirishini ko‘rsatish mumkin.

Chiziqli matritsa fazolardan kvadrat matritsa, yo‘l matritsa va ustun matritsalar alohida ahamiyatga ega.

Misol 3. $[0;1]$ – kesmada aniqlangan uzluksiz $y = f(x)$ funksiyalar to‘plami.

Haqiqatan ham, bu to‘plam chiziqli fazo bo‘ladi. Chunki $[0;1]$ – kesmada aniqlangan uzluksiz funksiyalarning yig‘indisi va o‘zgarmas songa ko‘paytmasi ham shu to‘plamga tegishli bo‘ladi. Bu amallarning chiziqli fazo aksiomalarini qanoatlantirishini isbot qilishni o‘quvchi uchun mashq sifatida qoldiramiz.

Chiziqli kombinatsiya va chiziqli bog‘liqlik

Bizga chiziqli fazo berilgan bo‘lib, $a, b, c, \dots, g$ shu fazo elementlari va $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ – ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lsin. Agar berilgan elementlarni mos sonlarga ko‘paytmalari shu chiziqli fazoga tegishli bo‘lishi hamda ularning yig‘indisi ham shu chiziqli fazoga tegishli ekanini hisobga olsak,

$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \dots + \omega \cdot g \qquad (1.4.1)$$

element ham shu chiziqli fazoning elementi bo‘ladi.

Ta’rif. (1.4.1) formula bilan aniqlangan x element $a, b, c, \dots, g$ elementlarning ***chiziqli kombinatsiyasi*** deb ataladi.

Ba’zan x element $a, b, c, \dots, g$ elementlar orqali chiziqli ifodalangan deb ham ataladi.

Tabiiyki, (1.4.1) kombinatsiyada x noldan farqli element bo‘lsa, $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ lardan kamita bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak.

Ta’rif. (1.4.1) chiziqli kombinatsiyada $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ lardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lganda x nol element bo‘lsa, ya’ni

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \dots + \omega \cdot g = 0$$

va

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots + \omega^2 \neq 0$$

bo‘lsa, $a, b, c, \dots, g$ – elementlar ***chiziqli bog‘liq elementlar*** deb ataladi.

Shuningdek, aksincha (1.4.1) kombinatsiya $x = 0$ bo‘lgandagina $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \omega = 0$ bo‘lsa, $a, b, c, \dots, g$ – elementlar ***chiziqli erkli elementlar*** deyiladi.

Chiziqli erkli va chiziqli bog‘liq elementlarning ba’zi xossalari bilan tanishib chiqamiz.

Chiziqli fazodan olingan har qanday elementlar tizimi chiziqli bog‘liq yoki chiziqli erkli bo‘lishi shart. Agar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ elementlarni tanlab olsak, ular chiziqli erkli yoki chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

1-xossa. Agar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ elementlarning biror qismi chiziqli bog‘liq bo‘lsa, bu elementlar ham chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Haqiqatan ham, elementlardan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ $(k < m)$ lar chiziqli bog‘liq bo‘lsin. Demak, α_i $(i = \overline{1,k})$ lardan kamida bittasi noldan farqli son topiladiki

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_k \cdot a_k = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bunda $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \dots + 0 \cdot a_m = 0$ tenglik ham o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikda α_i lardan kamita bittasi noldan farqli. Bu esa $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ – elementlarning chiziqli bog‘liq ekanini ko‘rsatadi.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$

2-xossa. Agar elementlar chiziqli erkli bo‘lsa, bu to‘plamdan olingan ixtiyoriy qism to‘plam elementlari ham chiziqli erkli bo‘ladi.

Bu xossaning isboti avvalgi xossadan kelib chiqadi.

3-xossa. Agar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ elementlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi.

Haqiqatan ham elementlar $a_1, a_2, \dots, a_m$ chiziqli bog‘liq bo‘lsa, hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lgan sonlar mavjudki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_m \cdot a_m = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Chiziqli bog‘liqlikning ta’rifiga ko‘ra aytaylik $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsin, u holda

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} a_m$$

tenglikni hosil qilish mumkin. Bu esa a_1 – elementni boshqa elementlar orqali chiziqli ifoda etilishini ko‘rsatadi.

Keltirilgan 3-xossa o‘z o‘rnida quyidagi xossani keltirib chiqaradi.

4-xossa. Agar $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ elementlardan birortasi boshqalari orqali chiziqli ifodalansa, bu elementlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Bu xossa chiziqli kombinatsiyada elementlarni tenglikning bir tomoniga o‘tkazish yo‘li bilan isbotlanadi.

Haqiqatan ham, agar a_1 element qolgan elementlar orqali chiziqli ifodalangan bo‘lsa, ya’ni

$$a_1 = \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + \ldots + \alpha_m \cdot a_m$$

ifodada barcha elementlarni tenglikning bir tomoniga o‘tkazib

$$1 \cdot a_1 + (-\alpha_2) \cdot a_2 + (-\alpha_3) \cdot a_3 + \ldots + (-\alpha_m) \cdot a_m = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bunda a_1 element koeffitsiyenti $\alpha_1 = 1$. Chiziqli bog‘liqlik sharti bajarildi.

Chiziqli fazo o‘lchami. Bazis

Chiziqli fazoda ixtiyoriy olingan elementlarning chiziqli bog‘liq yoki chiziqli erkli bo‘lishi mumkinligi bilan 4-§ da tanishgan edik.

Ixtiyoriy ikki a va b elementlardan biri ikkinchisini o‘zgarmas songa ko‘paytirish natijasida hosil bo‘lsa, ya’ni $a = k \cdot b \ (k \neq 0)$ o‘rinli bo‘lsa, bu elementlar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash chiziqli bog‘liq bo‘lmagan ikki a va b elementlar va ularning algebraik yig‘indisi bo‘lgan $c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ element o‘zaro chiziqli bog‘liq bo‘lishini ko‘rishimiz mumkin.

Ta'rif. Agar L chiziqli fazoda n ta chiziqli erkli element mavjud bo'lib, ixtiyoriy $(n+1)$-element chiziqli bog'liq bo'lsa, chiziqli fazo n***-o'lchovli chiziqli fazo*** deb ataladi.

Bunda n – chiziqli fazoning o'lchami deb ataladi.

Umuman aytganda, fazo o'lchami n – chekli. Ammo o'lchami cheksiz bo'lgan chiziqli fazolar ham mavjud. Biz bu adabiyotda faqat chekli o'lchamli fazolarni o'rganamiz.

Agar L_n – n-o'lchovli chiziqli fazo bo'lsa, unda roppa-rosa n ta chiziqli erkli element mavjud bo'lar ekan.

Ta'rif. Agar L_n chiziqli fazoda $\{a_1,\ a_2, \dots,\ a_n\}$ – chiziqli erkli elementlar mavjud bo'lib, fazoning boshqa x elementlari $\{a_1,\ a_2, \dots,\ a_n\}$ yordamida chiziqli ifodalansa, ya'ni

$$x = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots \alpha_n \cdot a_n \qquad (1.6.1)$$

$\{a_1,\ a_2, \dots,\ a_n\}$ – элементлар тўплами L_n bo'lsa, chiziqli fazoning ***bazisi*** deb ataladi.

Keltirilgan $(1.6.1)$ ёйилмадаги $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ sonlar x elementning shu bazisdagi ***koordinatalari*** deyiladi.

Misol. Ikkinchi tartibli kvadrat matritsalardan iborat chiziqli fazoning bazis elementlarini toping.

Yechish. Ikkinchi tartibli kvadrat matritsani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Matritsalar to'plamining chiziqli fazo tashkil qilishi bilan 3-§ da tanishgan edik.

Endi shu fazoning o'lchami va bazis elementlari bilan tanishamiz. Ushbu

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsalar ikkinchi tartibli kvadrat matritsalar to'plamida bazis elementni tashkil etadi.

Haqiqatan ham, ixtiyoriy berilgan ikkinchi tartibli kvadrat matritsani

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

shaklda yozish mumkin.

Bazis elementlari soni to'rtta bo'lgani uchun ikkinchi tartibli matritsalar to'rt o'lchovli chiziqli fazo bo'lar ekan.

Affin fazosi

Bizga biror $\mathcal{A}$ to‘plam berilgan bo‘lsin, bu to‘plam elementlarini nuqtalar deb ataymiz va ularni lotin alifbosining bosh harflari $A, B, \dots, M, \dots$ bilan belgilaymiz. Shuningdek, bizga L – chiziqli fazo ham berilgan bo‘lsin.

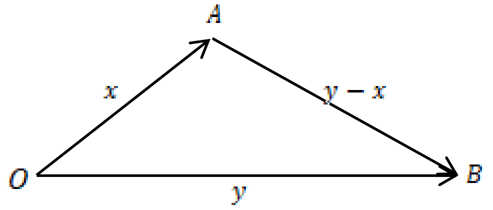
Berilgan $\mathcal{A}$ to‘plamdan olingan ikki A va B nuqtaga L – chiziqli fazodan x bitta elementni $x = \overline{AB}$ shaklda mos qo‘yamiz va bu moslikni *vektor* deb ataymiz. Bu yerda $\overline{AB}$ – L -chiziqli fazo elementining yangicha belgilanishi va vektor deb atalishidir. Nuqtalardan birinchisini *vektorning boshi*, ikkinchisini *vektorning oxiri* yoki *uchi* deb ataymiz.

Ta’rif. Agar B va L to‘plam elementlari o‘rtasida o‘rnatilgan moslik ushbu ikki aksiomani qanoatlantirsa

1. har qanday $A \in \mathcal{A}$ ва $x + y_2 = 0$ uchun yagona $B \in \mathcal{A}$ mavjud hamda $x = \overline{AB}$ bo‘ladi;
2. B to‘plamning ixtiyoriy uchta A, $A \in A$ va C elementlari uchun $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ bo‘lsa, $\overline{AC} = x + y$ yoki $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ bo‘ladi, u holda B – to‘plam ***affin vektor fazo*** deb ataladi.

Bundan buyon biz qisqalik uchun affin vektor fazoni *affin fazo* deb ataymiz.

Keltirilgan ta’rifdan har qanday L – chiziqli fazoni affin fazosi deb atash uchun fazoning elementlarini nuqtalar deb va ikki a, b elementga shu elementlar ayirmasi $b - a$ elementni mos quyib, uni vektor deb atash kifoya ekan. Bunda chiziqli fazo elementi x O (nol) va A nuqtaga mos keluvchi $x = \overline{OA}$ vektor bo‘ladi (1.6.1-chizma).



1.6.1-chizma.

O – nuqta affin fazosida *koordinatalar boshi* deb ataladi va chiziqli fazoning n elementiga mos keladi.

Demak, har qanday affin fazoni koordinatalar boshi O elementga mos kelgan chiziqli fazo sifatida qarash ham mumkin ekan. Bu holda chiziqli fazo elementi $x = \overline{OA}$ vektor bo‘ladi.

Shuning uchun ham adabiyotlarda chiziqli vektor fazo atamasi yoki chiziqli chiziqli fazo elementlarini vektor deb atashlar ham uchrab turadi.

Biz esa affin vektor fazosi tushunchasini kiritishdagina tartiblangan ikki nuqtani vektor deb atadik. Bunday usulni tanlashimizga sabab, chiziqli fazo kengroq tushuncha bo‘lib, uning elementlari bizga geometriyada odat bo‘lgan “*nuqta*”, “*kesma*” va “*vektor*” atamalaridan tubdan farq qilishi mumkin ekanligidadir.

Demak, biz ushbu adabiyot ko‘lamida affin fazosi chiziqli fazo elementlari yangi ikki aksiomani qanoatlantiruvchi fazo deb qaraymiz. Fazo elementlarini esa “*nuqta*” va “*vektor*” deb atab, ularni elementar geometriyadagi kabi tasavvur qilamiz,ya’ni vektorni yo‘naltirilgan kesma sifatida qabul qilamiz.

Endi affin fazosiga tegishli sodda xossalar bilan tanishib chiqamiz.

Teorema 1. Affin fazosining ustma-ust tushgan nuqtalariga $^{-1}$ (nol) vektor mos keladi.

Isbot. Affin fazosining ixtiyoriy $A \in \mathcal{A}$ nuqtasiga odatda $x = \overline{OA}$ vektor mos keladi. $\overline{AA} = z$ deb belgilab olsak, u holda affin fazosi ta’rifining ikkinchi aksiomasiga ko‘ra

$$\overline{OA} - \overline{OA} = \overline{AA} \text{ ёки } x - x = \overline{AA} = 0$$.

$\overline{AA} = z = 0.$

$\overline{AB} = x$ бўлса, $\overline{BA} = -x$ бўлади.

$\overline{BA} = y$ бўлсин. Аффин фазоси таърифининг иккинчи

Demak,

Teorema 2. Agar ***Isbot.***

aksiomasiga ko‘ra

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} \text{ ёки } x + y = 0$$.

$\overline{BA} = y = -x$ эканлиги келиб чиқади.

Bundan

Izoh. Ushbu qo‘llanmada o‘quvchini noyevklid fazolar geometriyasi bilan tanishtirish asosiy maqsad bo‘lgani uchun, affin fazosini aniqlashda kiritilgan aksiomalarning elementar geometriya fanidagi qanday aksiomalarga mazmunan mos kelishiga to‘xtalib o‘tmoqchimiz.

Birinchi aksioma har kanday A nuqta va $A \in \mathcal{A}$ vektor x uchun yagona $\overline{AB} = x$ vektor mavjudligi haqida bo‘lib, bunda nuqta ham shu affin fazosiga tegishli bo‘lishi talab etiladi. Bu elementar geometriyadagi, ya’ni Yevklid aksiomalaridagi nurda ixtiyoriy uzunlikda kesma qo‘yish mumkinligi haqidagi aksioma mazmunini beradi.

Ikkinchi aksioma esa ixtiyoriy uchta nuqtadan yagona tekislik o‘tkazish mumkin degan ma’nodagi aksiomaga mos keladi.

Affin fazo o‘lchami. Affin koordinatalar

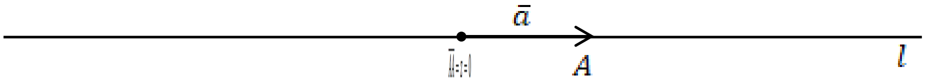
Ma’lumki, biz affin fazosini chiziqli fazo sifatida ko‘rdik. Chiziqli fazo uchun fazo o‘lchami degan tushuncha kiritilgan, ya’ni o‘lcham undagi chiziqli erkli elementlar soni bilan aniqlanar edi. Shuningdek, affin fazosida chiziqli fazo elementiga koordinatalar boshidan chiquvchi vektor mos kelar edi. Bundan chiziqli erkli elementga chiziqli erkli vektor mos keladi deb hisoblash mumkin.

Ta’rif. Affin fazoda chiziqli erkli n ta vektor mavjud bo‘lib, har qanday $(n+1)$ ta vektor chiziqli bog‘liq bo‘lsa, affin fazo n***-o‘lchovli affin fazo*** deyiladi va A_n bilan belgilanadi.

Endi ba’zi bir sodda affin fazolar bilan tanishib chiqaylik.

Teorema 1. To‘g‘ri chiziq – bir o‘lchovli affin fazo.

Isbot. Bizga biror l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Avvalo l to‘g‘ri chiziqning nuqtalari to‘plami bir o‘lchovli chiziqli fazo tashkil qilishini ko‘rsatamiz. Buning uchun to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy O – nuqtani koordinatalar boshi deb belgilab olamiz (1.7.1-chizma).



1.7.1-чизма.

Сўнгра ихтиёрий $A \in l$ нуқта олиб $\overline{OA} = \bar a$ вектор киритамиз. Энди эса тўғри чизиқда ётган ихтиёрий векторни L тўплам элементи деб атаймиз ва uni bir o‘lchamli chiziqli fazo ekanligini ko‘rsatamiz. Bu masalada elementlar chiziqli fazo tashkil etishi, ya’ni chiziqli fazoning 8 ta aksiomasini qanoatlantirishini ko‘rsatish uncha murakkab emas. Bu fazoning o‘lchami birga tengligi $\bar a$ vektor berilgan deb olganimizda, har qanday l to‘g‘ri chiziqqa tegishli $\bar b$ vektor uchun $\bar b = k \cdot \bar a\ (k \neq 0)$ tenglik o‘rinli ekanligidan kelib chiqadi. Bu tenglik $\bar a$ va $\bar b$ vektorlarning chiziqli bog‘liq ekanini bildiradi.

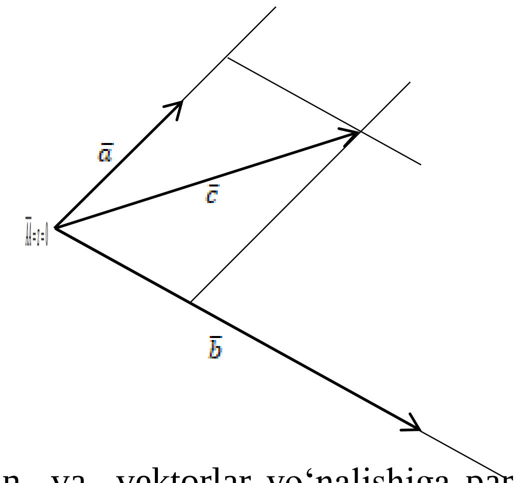
Demak, to‘g‘ri chiziqda bitta chiziqli erkli vektor (element) mavjud, ammo ixtiyoriy ikki vektor chiziqli bog‘liq.

To‘g‘ri chiziqda affin fazosi aksiomalari o‘rinli ekanligini ko‘rsatishni o‘quvchining o‘ziga qoldiramiz.

Teorema 2. Tekislik – ikki o‘lchovli affin fazodir.

Isbot. Bizga α tekislik berilgan bo‘lsin. Bu tekislikda ixtiyoriy ikki kollinear bo‘lmagan va $\bar{a}$ $\bar{b}$ vektorlarni olamiz, ya’ni . Bu shart $\bar{b} \neq k \cdot \bar{a}$ va vektorlarning $\bar{a}$ $\bar{b}$ chiziqli erkli ekanini bildiradi. Endi tekislikka tegishli ixtiyoriy α uchinchi , vektorlarning chiziqli bog‘liq ekanligini ko‘rsatamiz. $\bar{c}$ векторни оламиз ва $\bar{a}$, $\bar{b}$ $\bar{c}$

Buning uchun nuqtada bo‘lsin deb hisoblaymiz (1.7.2-chizma). $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторларнинг боши O



1.7.2-чизма.

Agar $\bar{c}$ vektor uchidan va vektorlar yo‘nalishiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazib, ularni vektorlar yo‘nalishidagi to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishmasini qarasak, $\bar{a}$ $\bar{b}$ tomonlari vektorlar yo‘nalishidagi parallelogrammni hosil qilamiz. $\bar{a}$, $\bar{b}$ Parallelogrammning tomonlaridagi $\bar{a}$, $\bar{b}$ vektorlar va $\bar{a}$ $\bar{b}$ vektorlarga kollinearligidan

$$\bar{c} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}$$

tenglikni hosil qilamiz.

Demak, tekislikda ikki chiziqli erkli vektor mavjud, ammo har qanday uchta vektor chiziqli bog‘liq ekan. Bu tekislik – ikki o‘lchovli affin fazo ekanini ko‘rsatadi.

Biz faqat tekislikni chiziqli fazo sifatida o‘lchami ikkiga tengliginigina ko‘rsatdik. Uning chiziqli fazo va affin fazosi aksiomalarini qanoatlantirishi bilan elementar geometriyada tanishgansiz.

Bizga n -o‘lchovli affin fazo A_n berilgan bo‘lib, $e_1 = \overline{OE_1}$, $e_2 = \overline{OE_2}$, …, $e_n = \overline{OE_n}$ vektorlar chiziqli erkli vektorlar bo‘lsin, ya’ni

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = 0$$

faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ holdagina o‘rinli bo‘lsin.

Ixtiyoriy $\bar{a} \in A_n$ vektorni qaraylik.

Affin fazo o‘lchami ta’rifiga ko‘ra, $\{\bar{a}, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektorlar chiziqli bog‘liq vektorlar to‘plami bo‘ladi.

Demak, hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli $\{k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ sonlar uchun

$$k_0 \cdot \bar{a} + k_1 \cdot e_1 + k_2 \cdot e_2 + \ldots + k_n \cdot e_n = 0 \qquad (1.7.1)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bu tenglikda $k_0 \neq 0$ bo'lishi shart. Aks holda, ya'ni $k_0 = 0$ bo'lishi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ larning chiziqli bog'liq bo'lishiga olib keladi.

Келтирилган (1.7.1) тенгликни $k_0 \neq 0$ ga bo'lib

$$\bar{a} = -\frac{k_1}{k_0} \cdot e_1 - \frac{k_2}{k_0} \cdot e_2 - \dots - \frac{k_n}{k_0} \cdot e_n$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $x_i = -\frac{k_i}{k_0}$ almashtirishni amalga oshirsak,

$$\bar{a} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$$

tenglik hosil bo'ladi. Bu tenglik $\bar{a}$ vektorning $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektorlar orqali chiziqli yoyish mumkin ekanligini ko'rsatadi.

Demak, A_n да $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – chiziqli erkli vektorlar bo'lsa, A_n ning ixtiyoriy vektorini bu vektorlar orqali chiziqli yoyish mumkin ekan.

Bunda $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – ***bazis vektorlar***, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – sonlar esa, $\bar{a}$ vektorning shu bazisdagi ***affin koordinatalari*** deb ataladi. Qisqalik uchun ko'pincha

$$\bar{a}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$$

belgilash ishlatiladi.

Teorema 3. Bazis vektorga tegishli e_i вектор $(0, 0, 0, \dots, 0, i, 0, \dots, 0)$ i o'rinda 1 va boshqa o'rinda 0 koordinataga ega.

Isbot. Haqiqatan ham e_i bazisga tegishli vektorning bazis orqali yoyilmasi

$$e_i = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_i \cdot e_i + \dots + x_n \cdot e_n$$

bo'lsin. Bundan

$$x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + (x_i - 1) \cdot e_i + \dots + x_n \cdot e_n = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdagi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektorlar bazis vektorlar bo'lgani uchun, bu tenglik faqat

$$x_1 = x_2 = \dots = x_i - 1 = \dots = x_n = 0$$

holdagina o'rinli bo'lishi mumkin. Bu esa

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n = 0$$

va $x_i = 1$ ekanini ko'rsatadi.

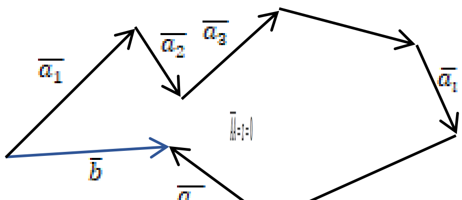
Demak, teoremaga ko'ra $e_1\{1, 0, \dots, 0\}$, $e_2\{0, 1, 0, \dots, 0\}$, ..., $e_i\{0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$, ..., $e_n\{0, 0, \dots, 1\}$ bazis vektorlarning koordinat ifodasi bo'ladi.

Eslatma. Bazis vektorlar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ fazoga tegishli ixtiyoriy chiziqli erkli vektorlar bo'lib, ular birlik va ortogonal bo'lish shart emas. Xususiy holda, bazis vektoralar birlik va ortogonal bo'lganda ham ularning ko'rinishi shu shakldа bo'ladi, ya'ni koordinatalari 1 va 0 lardan iborat bo'ladi. Odatda tekislikda o'zaro perpendikulyar bo'lmagan to'g'ri chiziqlar yordamida tuzilgan koordinatalar sistemasini affin koordinatalar sistemasi deb ataladi, perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar va bir xil birlik vektorlar yordamida hosil qilingan koordinatalar sistemasi Dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi. E’tibor qaratsangiz biz $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektorlarning o‘zaro ortogonal bo‘lishini yoki bir xil normaga ega bo‘lishini ham talab qilmadik. Faqat $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – chiziqli erkli vektorlar bo‘lishi zarur va yetarli shart shaklida qarayapmiz. Bunda vektorlar bir xil normaga ega va o‘zaro ortogonal bo‘lishi, ya’ni Dekart koordinatalari biz ko‘rayotgan tushunchalarning xususiy holi hisoblanadi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar

Elementar geometriya kursi orqali abstrakt vektorlar ustida bajarilgan amallar bilan tanishsiz. Vektorlarni qo‘shish, songa ko‘paytirish amallari aniq geometrik ma’noga ega. Biz qisqacha abstrakt berilgan, ya’ni yo‘naltirilgan kesma shaklida aniqlangan vektorlar ustida bajarilgan amallarning geometrik ma’nosini eslatib o‘tamiz.

Berilgan $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}$ ***vektorlar yig‘indisi*** deb, bu vektorlar ketmaket joylashtirilganda, ya’ni har bir vektor uchiga keyingi vektorning boshlanish nuqtasi qo‘yilganda, birinchi vektor boshidan chiqib oxirgi vektor uchiga yo‘nalgan vektorga aytilar edi (1.8.1-chizma).



$$b = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \dots + \overline{a_n}$$

1.8.1-чизма.

Ahamiyat bersak, vektorlar yig‘indisi vektorlar soniga va bu vektorlar qaralayotgan fazo o‘lchamiga bog‘liq emas. Shuningdek, yig‘indi assotsiativlik, ya’ni o‘rin almashtirish qoidasiga ega bo‘lib, yig‘indi qo‘shiluvchilar tartibiga bog‘liq emas.

Bizga A_n fazoda $\bar{X}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ va $\bar{Y}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ vektorlar berilgan bo‘lsin. Bu yerda x_i, y_i lar biror $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazis vektorlar yordamida aniqlangan koordinatalar va $O(0,0,\dots,0)$ – koordinatalar boshi. Koordinatalar boshi O dan $\bar{e}_i$ vektor yo‘nalishida o‘tgan to‘g‘ri chiziq $\overline{Ox_i}$ koordinatalar o‘qini beradi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallarni o‘rganish uchun avval $\{e_i\}$ bazis vektorlar ustida amallarni ko‘raylik. Masalan, $\alpha_i e_i$ va $\beta_i e_i$ vektorlar yig‘indisini.

Ma’lumki, vektor songa ko‘paytirilganda hosil bo‘lgan vektorni ifodalovchi kesmaning bazis vektor kesmasiga nisbati α_i soniga mos keladi, ammo vektor yo‘nalishi o‘zgarmaydi. Shundan,

$$\alpha_i e_i + \beta_i e_i = (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$$\bar{X} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n,$$
$$\bar{Y} = y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n$$

bundan

$$\bar{X} + \bar{Y} = y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n + y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n =$$
$$= (x_1 + y_1) \cdot e_1 + (x_2 + y_2) \cdot e_2 + \ldots + (x_n + y_n) \cdot e_n.$$

Xuddi shuningdek,

$$k \cdot \bar{X} = k \cdot (x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n) = kx_1 \cdot e_1 + kx_2 \cdot e_2 + \ldots + kx_n \cdot e_n.$$

Yuqoridagi tengliklardan foydalanib quyidagi xossalarni keltirib chiqarish mumkin.

1-xossa. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo‘shish uchun ularning mos koordinatalarini qo‘shish zarur.

2-xossa. Koordinatalari bilan berilgan vektorni songa ko‘paytirish uchun uning barcha koordinatalarini shu songa ko‘paytirish kerak.

Misol. $\bar{X}\{3, 2, 7, 5, 4\}$ va $\bar{Y}\{2, 5, -9, 6, 4\}$ bo‘lsa, $\bar{X} - 3\bar{Y}$ ning koordinatalarini toping. ***Yechish.***

$$-3\bar{Y} = -3 \cdot (2e_1 + 5e_2 - 9e_3 + 6e_4 + 4e_5) =$$
$$= -6e_1 - 15e_2 + 27e_3 - 18e_4 - 12e_5;$$
$$\bar{X} - 3\bar{Y} = 3e_1 + 2e_2 + 7e_3 + 5e_4 + 4e_5 - 6e_1 - 15e_2 + 27e_3 - 18e_4 - 12e_5 =$$
$$= -e_1 - 13e_2 + 34e_3 - 13e_4 - 8e_5,$$
$$\bar{X} - 3\bar{Y}\{-1, -13, 34, -13, -8\}.$$

Vektorlarni songa ko‘paytirish va qo‘shish ***vektorlar ustida chiziqli operatsiyalar*** deb ataladi. Ixtiyoriy sondagi vektorlarni mos ravishda ixtiyoriy sonlarga ko‘paytirish va qo‘shish, shu vektorlarning ***chiziqli kombinatsiyasi*** deb ataladi.

Affin koordinatalarni almashtirish

Fazoda affin koordinatalar sistemasini kiritish uchun koordinatalar boshi O nuqta tanlanadi va o‘zaro chiziqli erkli bo‘lgan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – bazis vektorlar olindi. Bunda har qanday $\bar{a}$ vektor uchun $\bar{a}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ uning affin koordinatalari deb atalgan sonlar to‘plami mos qo‘yildi. Agar $\bar{a} = \overline{OA}$ bo‘lsa, – vektor uchi bo‘lgan A nuqtaning koordinatalari deb ataladi. Demak, $e_2\{0, 1, 0, \ldots, 0\}$ $e_2\{0, 1, 0, \ldots, 0\}$ n A_n

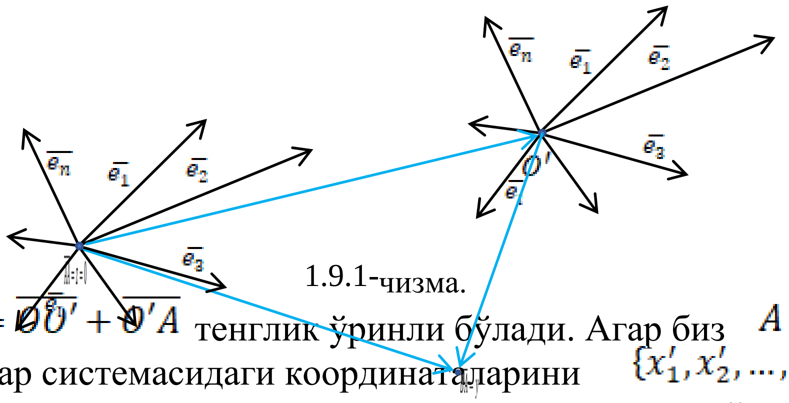
fazoning ixtiyoriy nuqtasi o‘zining ta koordinatalariga ega va aksincha ixtiyoriy n ta sondan

iborat to‘plamga fazoda bitta nuqta mos keladi.

O‘rnatilgan affin koordinatalar sistemasida koordinatalar boshi

o‘zgarishsiz qolsin (1.9.1-chizma).

ўзгартирилса, яъни O координаталар боши фазонинг $O'\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ кўчирилса, фазо нуқталарининг координаталари қандай ўзгаради? Шу саволга жавоб излаймиз. Ушбу ҳолатда $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар



1.9.1-чизма.

$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}$ тенглик ўринли бўлади. Агар биз A нуқтанинг янги координаталар системасидаги координаталарини $\{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$ билан белгиласак, нуқтанинг эски ва янги координаталари орасида қуйидаги

$$x_i = x_i^0 + x_i', \qquad i = \overline{1,n}. \tag{1.9.1}$$

Bunda

tenglikni hosil qilamiz

Faqat koordinatalar boshini o‘zgartirish, koordinatalar sistemasini $\bar{b} = \overline{OO'}$ vektorga ***parallel ko‘chirish*** deb ataladi. Hosil qilingan (1.9.1) tenglik A nuqtaning eski va yangi koordinatalari orasidagi bog‘liqlikni ifodalaydi.

Endi koordinatalar boshi o‘zgarishsiz qolib $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazis vektorlar boshqa $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ bazis vektorlar bilan almashtirilsa, fazosining ixtiyoriy $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtasining koordinatalari qanday A o‘zgarishi bilan tanishamiz.

Demak, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazis vektorlar boshqa chiziqli erkli n ta $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ vektorlar to‘plami bilan almashtirilib, yangi affin koordinatalar sistemasi barpo etilgan. Fazoning A nuqtasini bu yangi koordinatalar $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

x_i x_i'

sistemasidagi koordinatalarini bilan belgilaylik. Maqsadimiz va orasidagi bog‘lanishni topish.

Koordinatalar sistemasida o‘zgartirish qilishdan avval , , ..., e_1' e_2' e_n' vektorlar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazisda o‘zlarining aniq affin koordinatalariga ega bo‘lar edi, ya’ni

$$\begin{cases} e_1' = \alpha_{11} \cdot e_1 + \alpha_{12} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot e_n, \\ e_2' = \alpha_{21} \cdot e_1 + \alpha_{22} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot e_n, \\ \ldots \\ e_n' = \alpha_{n1} \cdot e_1 + \alpha_{n2} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot e_n \end{cases} \qquad (1.9.2)$$

bog‘liqlik mavjud edi.

Demak, eski $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazis bilan yangi $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ bazis vektorlar orasida (1.9.2) bog‘liqlik mavjud bo‘lib, bu chiziqli bog‘liqlik yagona usulda bo‘ladi.

Agar biz (1.9.2) chiziqli sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan – kvadrat $A = \{\alpha_{ij}\}$ matritsa determinantini hisoblasak

$\Delta = \det A \neq 0$

bo‘ladi, ya’ni sistemaning yagona yechimga ega bo‘lishi sharti bajariladi.

Hosil qilingan (1.9.2) sistemada larni noma’lum va $\overline{e_1}$ larni ma’lum deb hisoblab, quyidagi tengliklarni hosil qilishimiz mumkin

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{A_{11}}{\Delta} \cdot e_1' + \dfrac{A_{12}}{\Delta} \cdot e_2' + \ldots + \dfrac{A_{1n}}{\Delta} \cdot e_n', \\ e_2 = \dfrac{A_{21}}{\Delta} \cdot e_1' + \dfrac{A_{22}}{\Delta} \cdot e_2' + \ldots + \dfrac{A_{2n}}{\Delta} \cdot e_n', \\ \ldots \\ e_n = \dfrac{A_{n1}}{\Delta} \cdot e_1' + \dfrac{A_{n2}}{\Delta} \cdot e_2' + \ldots + \dfrac{A_{nn}}{\Delta} \cdot e_n'. \end{cases} \qquad (1.9.3)$$

Бу тенгликлар – эски базис векторларнинг $\overline{e_i'}$

– yangi bazis vektorlari orqali ifodasini beradi. Chunki yangi bazislarda avvalgi bazis vektorlar oddiy chiziqli bog‘liq vektor hisoblanadi.

Биз аввалги (1.9.2) боғланиш матрицасини $A = \{\alpha_{ij}\}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \det A \neq 0$$

, ya’ni

shaklda belgilagan edik.

Yangi (1.9.3) bog‘lanish matritsasi esa, A matritsaga teskari matritsa bo‘lib,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \frac{A_{1n}}{\Lambda} & \frac{A_{2n}}{\Lambda} \dots & \frac{A_{nn}}{\Lambda} \end{pmatrix}$$

A_{ij} элемент α_{ij}

Тескари A^{-1} матрица элементлари

bunda elementning algebraik to‘ldiruvchisi bo‘ladi.

A matritsa elementlari algebraik to‘ldiruvchilari va yo‘l-ustun elementlari o‘rni almashtirilgan holda yozilganiga e’tibor qarating.

Chiziqli almashtirishlar xossasiga ko‘ra, almashtirishning matritsasi xosmas matritsa bo‘lganida, ya’ni matritsadan tuzilgan determinant noldan farqli bo‘lgan holda bu sistemaga teskari yagona sistema mavjud bo‘ladi. Demak, eski va yangi bazislar bir-biri orqali yagona tarzda chiziqli ifodalanishi mumkin.

Biz eski va yangi bazis vektorlari bir-biri bailan qanday bog‘liq ekanini o‘rganib chiqdik.

Endi esa yangi bazisga o‘tganimizda fazodagi nuqtaning affin koordinatalari orasidagi bog‘lanish qanday bo‘lishini aniqlaymiz. Eslatib

ўтсак, A нуқтанинг эски координаталар системасидаги аффин координаталари $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва янги аффин координаталарини $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ билан белгилаган эдик.

Агар $OA = x'_1 \cdot e'_1 + x'_2 \cdot e'_2 + \ldots + x'_n \cdot e'_n$ тенгликда (1.9.2) дан фойдаланиб e'_i ларни билан алмаштирсак, у ҳолда

$$OA = x'_1 \cdot e'_1 + x'_2 \cdot e'_2 + \cdots + x'_n \cdot e'_n =$$

$$= x'_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot e_1 + \alpha_{12} \cdot e_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot e_n) + x'_2 \cdot (\alpha_{21} \cdot e_1 +$$

$$+ \alpha_{22} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot e_n) + \ldots + x'_n \cdot (\alpha_{n1} \cdot e_1 + \alpha_{n2} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot e_n) =$$

$$= (\alpha_{11} \cdot x'_1 + \alpha_{21} \cdot x'_2 + \ldots + \alpha_{n1} \cdot x'_n) e_1 + (\alpha_{12} \cdot x'_1 + \alpha_{22} \cdot x'_2 + \ldots + \alpha_{n2} \cdot x'_n) e_2 +$$

$$+ \ldots + (\alpha_{1n} \cdot x'_1 + \alpha_{2n} \cdot x'_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot x'_n) \cdot e_n = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n.$$

Bazis vektorlar chiziqli erkli ekanligidan

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} \cdot x'_1 + \alpha_{12} \cdot x'_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot x'_n, \\ x_2 = \alpha_{21} \cdot x'_1 + \alpha_{22} \cdot x'_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot x'_n, \\ \dots \\ x_n = \alpha_{n1} \cdot x'_1 + \alpha_{n2} \cdot x'_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot x'_n \end{cases}$$

tengliklar sistemasini hosil qilamiz.

Agar sistemada qatnashgan vektorlarning matritsa shaklidan foydalansak

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad X' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

va $A = \{\alpha_{ij}\}$ dan

$$X = A \cdot X'$$

tenglikni hosil qilamiz.

Bu yerdan vektorlar yoki fazo nuqtasining koordinatalri bir-biri bilan xuddi bazis vektorlar singari chiziqli bog‘liqlikka ega ekan.

Yuqorida keltirilgan belgilashlardan foydalansak, koordinatalar boshini biror $\bar{B}\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ vektorga ko‘chirganda eski va yangi koordinatalar sistemasidagi vektorlar orasidagi bog‘lanish

$$X = X' + \bar{B}$$

shaklda bo‘ladi.

Koordinatalar boshi $\bar{B}$ vektorga ko‘chirilib, koordinatalr sistemasining bazisi ham almashtirlsa

$$X = A \cdot X' + \bar{B} \tag{1.9.4}$$

tenglikni hosil qilamiz va bu tenglik eski koordinatalar sistemasida nuqtani ifodalovchi vektorni, yangi koordinatalar sistemasidagi shu nuqtani ifodalovchi vektor orqali ifodasidir.

Bu hosil qilingan (1.9.4) tenglik umuman A_n fazosida koordinatalar almashtirilishini ko‘rsatuvchi tenglik bo‘lib, ***affin koordinatalar almashtirilishi*** deb yuritiladi.

Xususan, $A = \{\alpha_{ij}\}$ матрица E бирлик матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}$$

bo‘lgan holda almashtirish ***ayniy almashtirish*** deb ataladi. Ayniy almashtirishda matritsa diagonali elementlari musbat birlardan iborat. Matritsa diagonal elementlaridan ba’zilari manfiy bo‘lgan hollarga biz keyinroq geometrik izoh beramiz.

Shuningdek, $\overline{AB}$ matritsaning maxsus hollarini o‘rganishga alohida qaytamiz. Ta’kidlanmagan alohida hollardan boshqa qrinda $\overline{AB}$ matritsa – xosmas matritsa bo‘lishi yetarlidir.

Affin fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik

Bizni qiziqtirgan narsalar affin fazoga oid geometrik obrazlar va ularning xossalaridir.

Yuqorida aytib o‘tilgandek, to‘g‘ri chiziq – bir o‘lchovli affin fazosiga, tekislik – ikki o‘lchovli affin fazosiga misol bo‘lar edi. Shuningdek, uch o‘lchovli yevklid fazosi uch o‘lchovli affin fazoga misol bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

Demak, affin fazosini o‘rganishda $n > 3$ holi muhim ahamiyat kasb etadi, ya’ni A_n da $n > 3$ bo‘lgan hol.

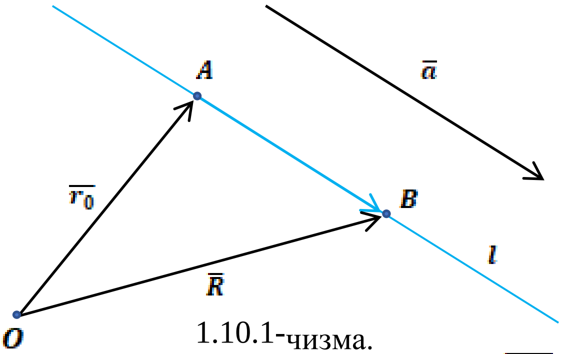
O‘rganilayotgan A_n fazoda koordinatalar boshi O belgilangan va bazis vektorlar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ berilgan bo‘lsin. Koordinatalar boshi O

nuqtadan o‘tuvchi va bazisga parallel to‘g‘ri chiziqni Ox_i koordinatalar o‘qi deb ataymiz. Bu to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$$

tenglik bilan aniqlanadi. Chunki bu koordinatalar to‘g‘ri chizig‘ida yotuvchi har qanday nuqtaning koordinatalari $(0,0,0,x_i,0,0,0)$ bo‘lib, $x_i \neq 0$ shaklda bo‘ladi.

Endi A_n fazoda l nuqtadan $A(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ $\bar{a}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vektor yo‘nalishida o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz (1.10.1-chizma).



1.10.1-чизма.

Берилган $\overline{AB}$ нуқтанинг радиус векторини $\bar{r_0} = \overline{OA}$ деб белгилайлик. Тўғри чизиққа тегишли $\overline{AB}$ дан фарқли $B\epsilon l$ нуқта радиус векторини $\bar{R}$ билан белгилаймиз. У ҳолда тўғри чизиқ нуқталари учун $\bar{R} = \bar{r_0} + \overline{AB}$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $\bar{C}$ вектор $\bar{a}$ векторга коллинеар, яъни $\overline{AB} = t \cdot \bar{a}$ тенглик ўринли бўлади, $t\epsilon\mathbb{R}$ – параметр деб аталади.

Натижада A_n аффин фазосид а берилган $\overline{AB}$ нуқтадан $\bar{a}$ йўналишида ўтувчи тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$\bar{R} = \bar{r_0} + t \cdot \bar{a}. \qquad (1.10.1)$$

Bu (1.10.1) tenglik ***to‘g‘ri chiziqning vektor tenglasmasi***. Vektor tenglamadan bazis vektorlarning chiziqli erkli ekanligidan foydalanib, ***to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi***ni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t \cdot a_1, \\ x_2 = x_2^0 + t \cdot a_2, \\ \ldots \\ x_n = x_n^0 + t \cdot a_n. \end{cases}$$

x_i^0 – to‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqta koordinatalri, a_i – to‘g‘ri chiziqqa parallel $\bar{a}$ vektor koordinatalari.

Ma’lumki, har qanday ikki nuqtadan yagona to‘g‘ri chiziq o‘tadi. Bizga $A(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ va $B(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Shu

nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Buning uchun $\bar{C}$ vektor izlanayotgan to‘g‘ri chiziqqa parallel vektor bo‘lishini bilish yetarlidir. To‘g‘ri chiziqqa parallel $\bar{a}$ vektor koordinatalari $(x_i^2 - x_i^1)$ lardan iborat bo‘ladi. Agar to‘g‘ri chiziqni $\overline{AB}$ nuqtadan o‘tishini hisobga olsak,

$$\begin{cases} x_1 = x_1^1 + t \cdot (x_1^2 - x_1^1), \\ x_2 = x_2^1 + t \cdot (x_2^2 - x_2^1), \\ \dots \\ x_n = x_n^1 + t \cdot (x_n^2 - x_n^1) \end{cases} \qquad (1.10.2)$$

to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini hosil qilamiz.

Agar (1.10.2) tenglikdan t parametrni topsak, u holda

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1} = \ldots = \frac{x_n - x_n^1}{x_n^2 - x_n^1}$$

ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini hosil qilamiz.

Demak, affin fazosidagi har qanday to‘g‘ri chiziq tenglamasini hosil qilish mumkin ekan.

Ma’lumki, to‘g‘ri chiziqning o‘zi bir o‘lchovli affin fazosi bo‘lar edi. Shu tushunchadan foydalanib, affin fazosining $1 \le m \le n-1$ o‘lchovli qism fazolarini m-o‘lchovli tekisliklar deb qaraymiz.

Ta’rif. affin fazosining m-o‘lchovli $(1 \le m \le n-1)$ fazo ostilari shu fazoning m ***tekisligi*** deb ataladi.

Endi fazoda m-o‘lchovli qism fazo tenglamalarini shu fazodagi affin koordinatalari orqali ifodasini keltirib chiqaramiz.

Biz fazoning m-o‘lchovli qism fazosi A_m ni aniqlashimiz kerak. A_m qism fazo m-o‘lchovli fazo bo‘lgani uchun, bu fazoda m ta chiziqli erkli vektorlar mavjud bo‘ladi. Bu A_m fazoning chiziqli erkli vektorlari sifatida $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$ bazis vektorlariga tegishli biror m ta vektorni olish mumkin. Aniqrog‘i, har qanday m-qism fazoga tegishli m ta bazis vektor mavjud bo‘ladi.

Soddalik uchun koordinatalar boshi izlanayotgan m tekislikda bo‘lgan holni ko‘raylik.

Faraz qilaylik, $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_m}\}$ vektorlar m tekislikning bazis vektorlari bo‘lsin. Bunda tekislikka tegishli har qanday nuqtaning radius vektori $\bar{r}$ bazis $\{\overline{b_i}\}$ vektorlar orqali chiziqli ifodalanadi

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{b_i}. \qquad (1.10.3)$$

Shuningdek, $\bar{r}$ va $\overline{b_i}$ лар fazo bazis vektorlari orqali ham chiziqli ifodalanadi, ya’ni

$$\bar{r} = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_me_m, \qquad \bar{b_i} = \beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2 + \ldots + \beta_{im}x_m.$$

Bu ifodalarni (1.10.3) tenglikka qo‘yib, $\{e_i\}$ vektorlarning chiziqli erkli ekanligi shartidan quyidagi bir jinsli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{(n-m)1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Бунда $a_{ij} = \alpha_i b_{ij}$

нуқталар координаталар бошидан ўтувчи m

bo‘lib, tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi

-o‘lchovli tekislikka tegishli

nuqtalar bo‘ladi. $m = n - 1$ bo‘lgan holda, $(n-1)$ tekislik – ***gipertekislik.***

Koordinatalar boshidan o‘tmaydigan m tekislik tenglamasining ***vektor ifodasi***

$$\bar{R} = \bar{r_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{b_i}$$

shaklda bo‘lib, uning ***koordinatalarga nisbatan tenglamasi***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots \\ a_{(n-m)1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_{n-m} \end{cases}$$

$(n-m)$ та чизиқли тенгламалар билан ифодаланади.

Хусусий ҳолда, $m = n - 1$

kabi ***gipertekislik tenglamasi*** n-o‘zgaruvchiga bog‘liq chiziqli tenglama bo‘ladi, ya’ni

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d.$$

YEVKLID VA PSEVDOYEVKLID FAZOSI

Bizga n-o‘lchovli affin fazosi berilgan bo‘lib, $\{e\ e_1,\ _2,\ldots,e_n\}$ vektorlar fazosining bazis vektorlari va $O(0,...,0)$ nukta koordinatalar r boshi bo‘lsin. U xolda, fazodagi ixtiyoriy vektor $X\ x\ x\{\ _1,\ _2,...,x_n\}$ affin koordinatalariga ega bo‘ladi. r ur

Bizga ikkita $X\ x\ x\{\ _1,\ _2,...,x_n\}$ va $Y\ y\ y\{\ _1,\ _2,...,y_n\}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, bu vektorlar yordamida ushbu bichizikli formani aniklaymiz

r r $\quad n \quad n$

$$w\left(X\ Y\text{CH}\right) = \text{ye ye}\ a_{ij}\, x y_i \qquad _j \qquad\qquad (2.1)$$

$i=1\ j=1$

Bu forma ikkala argumentga nisbatan chizikli bo‘lgani uchun bichizikli forma deb ataladi.

Qaralayotgan (2.1) bichiziqli formalarga $a_{ij} = \left(ee_{i\,j}\right)$ bazis vektorlarning o‘zaro

ko‘paytmasi.

Agar bu ko‘paytmadagi $\left(ee_i \quad _j\right)$ larning aniq qiymatlari berilgan bo‘lsa, (2.1) bichiziqli forma to‘lik aniklangan bo‘ladi.

Bu (2.1) bichizikli forma ushbu xossalarga ega

$$\text{r r r r } w\left(X\ Y\text{CH}\right) = w\left(Y\ X\text{CH}\right).$$

Bu xossa bichizikli formaning simmetriklik sharti (xossasi) deb ataladi.

Odatda $\left(ee_{i\,j}\right)$ bazis vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb ataladi r r hamda (1) forma ikki $X\ Y$, vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb nomlanadi r r va $\left(X\ Y\text{CH}\right)$ shaklida yoziladi.

Umuman aytganda, (1) biziqli forma musbat aniklangan yoki turli ishorali bo‘lishi mumkin, bu albatda a_{ij} kattaliklarni qanday ekaniga bog‘lik.

Ta'rif. Berilgan A_n affin fazoda vektorlarning skalyar ko'paytmasi musbat aniqlangan bichiziqli forma bo'lsa, bu affin fazo *n-o'lchovli Yevklid fazo* deb ataladi va R_n shaklida belgilanadi.

Xaqiqatdan xam, $n = 3$ xolda $\vec{X}\{x_1, x_2, x_3\}$ va $\vec{Y}\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasida $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ bo'lsa, vektorlarning (2.1) skalyar qo'paytmasi

$$(\vec{X}\vec{Y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

bu uch o'lchovli Yevklid fazo vektorlarning skalyar ko'paytmasidir.

Ta'rif. *Vektorlarning normasi* deb, vektorning o'zini-o'ziga skalyar ko'paytmasidan olingan kvadrat ildizga aytiladi

$$|\vec{X}| = \sqrt{(\vec{X}\vec{X})}.$$

Bundan Yevklid fazosida vektorlarning normasi

$$|\vec{X}| = \sqrt{(\vec{X}\vec{X})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

ga teng.

Ikki nukta orasidagi masofa shu nuktalarni tutashtiruvchi vektorning normasiga teng deb olinadi.

Agar $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $B(y_1, y_2, ..., y_n)$ nuktalar berilgan bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari

$$\overrightarrow{AB} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n\}$$

uning normasi

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$$

yoki

$$d^2 = AB^2 = (y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2$$

ga teng bo'ladi.

Xaqikatdan xam, bu *n*-o'lchovli Yevklid fazoda ikki nukta orasidagi masofani xisoblash formulasi. Bu formulani cheksiz kichik miqdorlar yordamida yozsak

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2$$

shaklida bo'ladi.

Agar (2.1) bikvadratik forma musbat aniqlanmagan bo‘lsa, qaralayotgan A_n affin fazo *psevdoyevklid fazo* deb nomlanadi.

Algebra kursidan ma’lumki [ ], xar qanday bichizikli formani chizikli almashtirishlar yo‘li bilan kanonik kvadratik forma shakliga keltirish mumkin.

Bunda xosil bo‘ladigan bichizikli formaning shakli (a_{ij}) -matritsa xosmas matritsa bo‘lgan holda hadlari musbat va manfiy ishoraga ega bo‘lgan bichiziqli forma shakliga keltiriladi.

Affin almashtirishlar yordamida matritsa birlik dioganal shakliga keltirilishi mumkin.

Natijada skalyar ko‘paytma ushbu shaklga keltirilsin

$$(\vec{X}\vec{Y}) = -x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ly_l + x_{l+1}y_{l+1} + \ldots + x_ny_n \qquad (2.2)$$

ya’ni l -ta manfiy va $(n-l)$ ta musbat.

Ta’rif. Ikki $\vec{X}\{x_1, x_2, x_3\}$ va $\vec{Y}\{y_1, y_2, y_3\}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi (2.2) shaklida aniqlangan A_n affin fazo, ${}^lR_n$ *psevdoyevklid fazo* deb ataladi.

Agar $l=1$ bo‘lsa, ${}^lR_n$ fazo Minkovskiy fazosi deb nomlanadi. Psevdoyevklid ${}^lR_n$ fazoda ikki nukta orasidagi masofa

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (\vec{X}\vec{Y})^2 = -(y_1-x_1)^2 - (y_2-x_2)^2 - \ldots - (y_l-x_l)^2 + (y_{l+1}-x_{l+1})^2 + \ldots + (y_n-x_n)^2$$

formula bilan xisoblanadi.

Vektor normasi esa

$$|\vec{X}| = \sqrt{-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (2.3)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Vektor normasi $|\vec{X}|$ xaqiqiy, mavhum va nolga teng qiymatlar qabul qilishi mumkin ekani (2.3) tenglikdan qelib chikadi.

Agar vektor noldan farkli bo‘lib, uning normasi nolga teng bo‘lsa, izotrop vektor deb ataladi. Izotrop vektorlar ushbu

$$-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

tenglikni qanoatlantiradi va bu tenglik ${}^{l}R_n$ fazoning *izotrop konusi* deb ataladi. Chunki bu tenglikni qanoatlantiruvchi vektorlar to‘plami A_n fazoda konusni tashkil etadi.

Izotrop konus ${}^{l}R_n$ fazoda xaqiqiy va mavhum normaga ega bo‘lgan vektorlarni ajratib turadi.

Umuman aytganda, Yevklid fazosini psevdoyevklid fazosining l □0 bo‘lgan xususiy holi deb atash mumkin. Shu sabab bilan biz psevdoyevklid fazo sferasi va ular yordamida aniklanadigan geometriyalar haqida so‘z yuritamiz. Bunda l □0 deb xisoblansa, Yevklid sferasiga doir tushunchalar paydo bo‘ladi.

Psevdoyevklid fazoda ikki nukta orasidagi masofa uch xil usul bilan aniqlanganligi sababli, bu fazoda sfera xam uch xilda bo‘ladi.

Bunda, Psevdoyevklid fazoda sferani berilgan nuktadan teng masofada yotuvchi nuktalarning geometrik o‘rni sifatida aniqlaymiz.

Agar sfera markazi koordinalar boshida deb olinsa, uning tenglamasi

$$-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \ldots + x_n^2 = a^2 \qquad (2.4)$$

shaklda bo‘ladi.

Ammo a^2 uch xil bo‘lishi mumkin. Agar

1) a^2 □ 0 □ haqiqiy radiusli sfera;

2) a^2 □ 0 □ izotrop konus yoki nol radiusli sfera; 3) a^2 □ 0 □ mavhum radiusli sfera.

Umuman aytganda, psevdoyevklid fazosidagi sferaning nuqtalari o‘zining radius vektori bilan aniqlanadi va bu radius vektor koordinatalari (2.4) tenglikni qanoatlantirishi kerak.

Agar sfera ustida ikki A va V nuqtalar berilgan bo‘lsa, koordinatalar boshi xamda A V, nuktalardan yagona ikki o‘lchamli tekislik o‘tkazish mumkin. Bu tekislik sferani A va V nuqtalardan o‘tuvchi aylana yoyi bo‘yicha kesib o‘tadi. Biz bu yoyni uchlari A V, nuktalarda bo‘lgan kesma sifatida qabul qilamiz. U xolda A V, nuktalar orasidagi masofa

$$\square\ ch\,\frac{\square}{a} \square \frac{\square\left(\overline{OA}\,\overline{OB}\right)\square}{\left|OA\right|\left|OB\right|}$$

tenglik bilan hisoblash mumkin. Bunda □ □ kesma uzunligi. Giperbolik kosinus shaklida olinishiga sabab, umuman aytganda tenglikni o‘ng tomoni birdan kichik bo‘lmasligi mumkin. Ammo bu tenglik faqat yarim sfera uchun bajariladi. Shu sababdan, sfera diametrining qarama-qarshi nuktalari bitta nukta deb hisoblanadi.

Ta'rif. *Giperbolik fazo* deb, Psevdoyevklid fazo sferasining diametral qarama-qarshi nuqtalari bitta nuqta deb olingan nuqtalar to'plamiga izometrik nuqtalar to'plamiga aytiladi va quyidagicha belgilanadi ${}^{l}S_{n\square 1}$.

Xususan, uch o'lchovli Minkoviskiy ${}^{1}R_{3}$ fazosidagi sferaning yarmi ${}^{1}S_{2}$ Lobachevskiy geometriyasi bo'ladi.

SIRT ICHKI VA TASHQI GEOMETRIYASI

Differensial geometriyaning asosiy tushunchalari Avval boshdan xayotiy zaruratlar tufayli paydo bo‘lgan geometriya fani, umuman matematika rivoji bilan hamqadam rivojlanib kelgan va xozirgi vaktda xam o‘zining yangi kirralarini namoyon etib kelmoqda. Dekart koordinatalar sistemasining paydo bo‘lishi (XVII asr) – analitik geometriya fani rivojlanishiga sabab bo‘lgan bo‘lsa, “cheksiz kichik miqdorlar” nazariyasi yoki xozirgi “matematik analiz” usullari “Differensial geometriya” fani asosida yotadi.

O‘z mohiyatiga ko‘ra “Differensial geometriya” – geomertik shakllarni biror nuqtasining kichik atrofida o‘rganadi. Bu fanning asosiy maqsadi – chiziq va sirtlar xossalarini funksiyalar yordamida, analiz usullarini qo‘llab o‘rganishdir.

Chiziklar xossalarini o‘rganishda eng muxim tushunchalardan biri chizikning urinma vektori, bosh normali va binormali yordamida, uning ikkinchi tartibli hosila vektorlarining chiziqli yoyilmasini ifoda etuvchi Frene formulasidir:

□□ □□ k

□

□

□□ □ □□□ □k □

□

□□ □□□

□

Bu formuladagi k va □ □ lar chiziqning egriligi va buralishidir. Agar $k(s)$ va □(s) □ funksiyalar berilgan bo‘lsa, fazoda egriligi $k(s)$ ga va buralishi □(s) funksiyaga teng bo‘lgan chiziq har doim mavjud bo‘ladi. Differensial geometriyaning asosiy usullari chizik va sirt nazariyasini vektor funksiya yordamida o‘rganishdir. Albatta o‘rganish jarayonida vektor funksiyadan yetarli darajada regulyar bo‘lishi talab etiladi.

Sirtlar nazariyasining fundamental asosini tashkil qiladigan tushunchalar $ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$

birinchi kvadratik forma va

$$(d\vec{r}\,\vec{n})^2 = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2$$

ikkinchi kvadratik formulalardir.

Bunda ds^2 □ sirt ustidagi chizik yoy differensiyali bo‘lgani uchun, bu kvadratik formula yordamida, sirt ustidagi chiziq yoyi uzunligini, chiziqlar orasidagi burchakni, sirt ustidagi sohani va shunga o‘xshash ko‘plab sirt bilan bog‘liq kattaliklarni hisoblash va o‘rganish mumkin.

Sirtning ikkinchi kvadratik formasi esa qaralayotgan nukta atrofida sirt o‘zining urinma tekisligidan qanchalik chetlangan ekanligini bildiruvchi kattalikdir. Shuningdek, sirt ustidagi chiziqning normal egriligi, bosh egriliklar, to‘la egrilik va o‘rta egriliklarni aniqlashda ikkinchi kvadratik formadan foydalaniladi.

Differensial geometriyaning fundamental asosini yaratgan olimlardan biri XX asrning buyuk matematigi Fridrix Gaussdir.

Shu o‘rinda ba’zan ko‘pchilik tomonidan bir xil ma’noda tushuniladigan ammo mazmunan har xil bo‘lgan va Gauss nomi bilan bog‘lik sirtlar nazariyasining ikki kattaligiga to‘xtalib o‘tamiz.

Ulardan biri sirtning to‘la egriligi.

Ta’rif. Sirtning bosh egriliklari ko‘paytmasi uning *to‘la egriligi* deb ataladi

$$K = k_1 \cdot k_2.$$

Ikkinchisi esa Gauss tomonidan kiritilgan va keyinchalik uning nomi bilan ataladigan sirtga bog‘liq kattalik.

Ta’rif. Sirtning *Gauss egriligi* deb, uning biror sohasini sferik tasviri yuzini shu soha yuziga nisbatining soha bir nuqtaga intilgandagi limitiga aytiladi

$$K = \lim_{S \to M} \frac{\Delta S^*}{\Delta S}$$

ΔS^* – sferik tasvir, ΔS – soha yuzi.

Ta’rifdan ko‘rinib turibdiki, to‘la va Gauss egriliklari sirtning ikki xil geometrik xarakteristikalaridir.

Bu tushunchalarni bir xil deb qabul qilishgani sabab xam, Gauss nomi bilan bog‘liqdir.

Teorema (Gauss teoremasi). Regulyar sirtlarning to‘la egriligi ularning Gauss egriligiga tengdir.

Har qanday $C^2(D)$ sinfga tegishli sirtlar uchun Yevklid fazosida, bu ikki kattalikning qiymatlari tengdir. Ammo regulyarlik bundan kam bo‘lganda, yani ko‘pyoqliklar uchun to‘la egrilik tushunchasi yo‘q, Gauss egrilik bor. Shunindek, Gauss teoremasi Yevklid fazosida o‘rinli, noyevklid fazolarda o‘rinli emas.

Gaussning yana bir buyuk teoremasini eslab o‘tamiz. Bu teorema Riman geometriyasining asosi bo‘lib, differensial geometriyani mexanika, fizika va kvant mexanikasi kabi yo‘nalishlariga qo‘llanilishiga sabab bo‘lgan. ***Teorema (Gauss teoremasi).*** Regulyar sirtning Gauss egriligi uning birinchi kvadratik formasi koeffitsiyentlari va ularning hosilalari bilan to‘la aniklanadi.

Bu bog‘lanishning analitik ifodasi ham Gauss tomonidan keltirilgan.

Sirt ichki geometriyasi. Riman geometriyasi

Geometriyaning asosiy obyekti sifatida sirtlar qaraladi. Bunda chiziq bir o‘lchamli yoki bir o‘zgaruvchining “sirti” sifatida o‘rganiladi.

Geometriyaning eng murakkab tushunchalaridan biri aslida shu sirtlardir. Sirtning zamonaviy matematik jihatdan aniq ta’rifini berish anchagina qiyin. O‘ch o‘lovli fazolarda sirt deganda tekislikdagi sohaning fazodagi uzluksiz aksi tushunildi.

Agar $D \subset \mathbb{R}^2$ tekislikdagi soha bo‘lsa,

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \qquad (4.1)$$

bu shu $(u,v) \in D$ nuqtaning $R^3(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ bazisli fazodagi aksi bo‘lib, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v) \in C^2(D)$ bo‘lganda, (4.1) tenglama *sirtning vektor tenglamasi* deb ataladi.

Bu vektor tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni sirt bo‘ladi.

Ma’lumki, sirtning tenglamasi (4.1) shaklda bo‘lsa, uning birinchi kvadratik formasi deb atalgan, sirt ustidagi chiziq yoki uzunligini hisoblash imkonini beruvchi

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

tenglikni hosil qilish mumkin.

Avvalgi bo‘limda eslatib o‘tilgandek, sirtning birinchi kvadratik formasi ma’lum bo‘lsa, sirt ustidagi chiziqlar orasidagi burchak, soha yuzi, to‘la egrilik, geodezik egrilik, geodezik chiziq va shularga o‘xshash sirt bilan bog‘liq kattaliklarni hisoblash imkoni paydo bo‘lar ekan.

Sirtlar nazariyasida egish (izgibaniye) degan bir tushuncha borki, u ham sirtning birinchi kvadratik formasi bilan bog‘liqdir.

Egish – sirtni bukmasdan, yertmasdan va sirt ustidagi ikki nuqta orasidagi masofani saqlagan holda sirt shaklini o‘zgartirishdir.

Egishga doir eng sodda misol sifatida bir varoq qog‘ozni yuqoridagi shartlar asosida shaklini o‘zgartirishni ko‘rish mumkin.

E’tiborlisi shundaki, sirtni egish jarayonida birinchi kvadratik forma va unga bog‘liq bo‘lgan kattaliklar saqlanib qolar ekan.

Shuning uchun sirtning birinchi kvadratik formasi va unga bog‘liq kattaliklar *sirtning ichki geometriyasi* deb ataladi.

Ichki geometriyaga doir kattaliklarni o‘rganishda sirtning qanday fazoda va qaysi shaklda berilganining ahamiyati bo‘lmaydi. Faqat birinchi kvadratik forma koeffitsiyentlarini bilishning o‘zi yetarli bo‘ladi.

Sirt ichki geometriyasi, sirtlarni egish masalalari XIX asrda Gauss tomonidan o‘rganilgan, asosan regulyar tenglama bilan berilgan sirtlar uchun. XX asrning o‘rtalarida rus akademigi A.D. Aleksandrov bu tushunchalarni ko‘pyoqliklar uchun umumlashtirgan. Bu tadqiqotlarni A.D. Aleksandrovning “Vnutrennyaya geometriya vipuklix poverxnostey” monografiyasida tanishish mumkin [1] (bu adabiyot 2006 yilda ingliz tiliga tarjima qilindi va hozirda chet el matematiklari bu sohada juda ko‘plab izlanishlar olib bormoqda).

Sirt ichki geometriyasining eng ravnaq topgan qo‘llanishlaridan biri “Riman geometriyasi” deb nomlangan sohaning fizika, mexanika, kvant mexanikasi va zamonaviy yo‘nalishdagi ko‘plab aniq fanlarga qo‘llanilishidir.

Riman geometriyasi bo‘limi n-o‘lchovli fazoda sirtning birinchi kvadratik formasi

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\, du_i\, du_j$$

shaklda berilgan deb hisoblanadi va sirtning fazoda qanday joylashishi uning shaklini hisobga olmagan holda, uning ichki geometriyasiga doir kattaliklarni o‘rganadi.

Bu usul mexanika, ayniqsa, fizika masalalarini hal qilishda samarali qo‘llaniladi.

Bu usulning qulayliklari juda ko‘p, ammo bir kamchiligi bor, bu kvadratik forma koeffitsiyentlari g_{ij} ga qo‘yiladigan regulyarlik talabi, ya’ni ularni kerakli tartibda uzluksiz hosilaga ega bo‘lishini talab etilishidir.

Oxirgi 30-40 yillarda A.D. Aleksandrov nazariyasiga e’tibor kuchayganligining asosiy sababi esa bu funksiyalardan faqat uzluksizlikning talab qilinishining o‘zi yetarli eanidir.

Sirt tashqi geometriyasi

Demak, sirtning ichki geometriyasi deganda uning ichki metrikasi bilan bog‘liq kattaliklar, ya’ni birinchi kvadratik formasi bilan bog‘liq xossalar tushunilar ekan.

Bundan tashqari sirtning ikkinchi kvadratik formasi deb nomlanadigan

$$II = (d^2\vec{r}, \vec{n}) = L(u,v)\,du^2 + 2M(u,v)\,du\,dv + N(u,v)\,dv^2$$

kvadratik forma mavjud bo‘lib, u sirtni qaralayotgan nuqtada o‘zining urinma tekisligidan qanchalik uzoqlashganini bidiruvchi geometrik xarakteristikasidir.

Shu bilan birga sirtdagi chiziqning normal egriligi, bosh egriliklar, assimptotik yo‘nalish, egrilik chiziqlari, o‘rta egrilik kabi tushunchalar mavjud-ki, ular ikkinchi kvadratik formaning qanday ekani bilan bog‘liqdir.

Sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalarini bog‘lovchi Bonne teoremasi mavjud.

Teorema (Bonne teoremasi). Bizga

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2, \quad (u,v) \in D \subset R^2 \qquad (4.1)$$

$$II = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2, \quad (u,v) \in D \subset R^2 \qquad (4.2)$$

ikki kvadratik forma berilgan bo‘lib, ulardan birinchisi musbat aniqlangan va ularning koeffitsiyentlari Peterson-Kadatsi va Gauss tenglamalarini qanoatlantirsa, fazoda birinchi kvadratik formasi (4.1) tenglik bilan va ikkinchi kvadratik formasi (4.2) tenglik bilan hisoblanadigan yagona sirt mavjuddir.

Teorema mazmuni shundayki, teorema sharti bajarilganda, sirtning vektor tenglamasidagi $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v) \in C^2(D)$ funksiyalarni yagona usulda topish mumkin ekan.

Bu esa sirtni to‘liq aniqlash, uning shakli va xossalari haqida to‘la ma’lumotga ega bo‘lish demakdir.

Sirtning shakli va fazodagi holati uning ichki geometriyasiga ta’sir qilmaydi. Shu sababdan geometriyada “Sirtning tashqi geometriyasi” deb nomlangan bo‘lim mavjud bo‘lib, u sirtning ichki geometriyasiga tegishli bo‘lmagan xossalarini o‘rganadi.

Sirtning tashqi geometriyasiga doir asosiy masalalar A.V. Pogorelovning “Vneshnyaya geometriya vipuklix poverxnostey” [4] deb nomlangan asarida keltirilgan. Bu asarda sirt tashqi geometriyasiga doir ko‘plab yechilgan masalalar berilgan. Shuningdek, bu masalalarni elliptik va giperbolik fazolardagi yechimlari ham keltirilgan. Qator yechilmagan masalalar va muammolar berilgan.

Ahamiyatliligi shunda-ki, bu monografiyada Koshi tomonidan XIX asr boshida qo‘yilgan muammo to‘liq hal qilingan.

Koshi masalasi quyidagicha: *Teng ko‘pburchaklardan tashkil topgan ko‘pyoqliklar o‘zaro tengmi?*

Bu masaladan ko‘plab geometrik muammolar kelib chiqqan. Shulardan biri G.Veyl tomonidan qo‘yilgan regulyar sirtlar uchun qo‘yilgan ushbu masaladir: *berilgan birinchi kvadratik formaga ega bo‘lgan necha xil sirt mavjud?*

G.Veylning o‘zi bu masalani birinchi kvadratik forma sferada aniqlangan bo‘lsa, ya’ni (u, v) – sferik koordinatalar bo‘lib, funksiyalar C^3 sinfga tegishli va Gauss egriligi musbat bo‘lgan holda uni qanoatlantiruvchi yagona ovaloid mavjud ekanini isbot qilgan.

A.V. Pogorelov sirtning birinchi kvadratik formasi bilan bog‘liq masalalarni yechishda sirtning shartli egriligi tushunchasidan foydalangan. Sirt shartli egriligi sirtning sferik tasviri bilan bog‘liq bo‘lib, u sirt urinma tekisligi birlik normalini birlik radiusli sferaga yig‘ish yo‘li bilan hosil qilinadi.

Tashqi geometriya masalalari ko‘pincha differensial tenglamalar yoki differensial tenglamalar sistemasi yechimi bilan bog‘liq.

Shuningdek, ba’zi hollarda masalaning geometrik yechimi differensial tenglama yechimining mavjudlik yoki yagonalik masalalari bilan bog‘liq bo‘ladi.

Sirtning qavariq yoki egarsimon sirt bo‘lishi uning Gauss egriligining musbat yoki manfiy aniqlanganligi bilan bog‘liqdir. Tashqi geometriyaga bog‘liq masalalar ko‘pincha Gauss egriligi musbat bo‘lgan hollarda aniq hal qilingan. Ammo Gauss egriligi manfiy bo‘lgan hollarda masala yechimi mavjud bo‘lmasligi yoki mavjud bo‘lsa ham yagona bo‘lmasligi mumkin.

Xususan, Gauss egriligi manfiy bo‘lgan birinchi kvadratik formaga ega sirtning mavjud bo‘lishi sharti ba’zi xususiy hollardagina hal qilingan. Bu murakkablikka sabab , Gauss egriliklari manfiy bo‘lgan sirtlar giperbolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan bog‘liqdir.

KO‘PXILLIKLAR GEOMETRIYASI

F.Kleyn XIX asrda geometrik shakllarning gomeomorf akslantirishda saqlanadigan xossalarini o‘rgandi va buni geometriyaning yangi bo‘limi deb e’tirof etdi. Xususan, harakatda, proyektiv yoki affin almashtirishlarda saqlanadigan xossalar ham topologik xossalar deb yuritilgan.

Keyinchalik esa geometriyaning bu bo‘limi to‘laqonli topologiya deb nomlanadigan bo‘ldi.

Bizga ixtiyoriy X to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar X to‘plam to‘plamostilari bo‘lgan □ lar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

a) □ ga tegishli to‘plamostilarning chekli sonining yig‘indisi □ ga tegishli;

b) □ ga tegishli to‘plamostilarning kesishmasi ham □ ga tegishli;

c) □ va X to‘plam ham □ ga tegishli bo‘lsa, X to‘plamda *topologik struktura kiritilgan* yoki *topologiya aniqlangan* deb ataladi.

Bunda X to‘plam kiritilgan □ struktura bilan □X,□□ – *topologik fazo* deb ataladi, □ – to‘plamostilar *ochiq to‘plam* deyiladi.

Masalan, Yevklid tekisligi topologik fazoga misol bo‘ladi. Bunda ochiq to‘plam sifatida nuqta va markazi nuqtalarda bo‘lgan ochiq aylanalarni olish mumkin.

Agar topologik fazoni ikkita bo‘sh bo‘lmagan ochiq to‘plamlarga ajratib bo‘lmasa, u *bog‘lamli fazo* deb ataladi.

Topologik fazoda *chiziq* deb $s: [0,1] \to X$ gomeomorf akslantirishga aytiladi.

Agar topologik fazoning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi chiziq mavjud bo‘lsa, fazo *chiziqli bog‘liq fazo* deyiladi.

Topologik fazo ta’rifining soddaligi, ya’ni (a), (b), (c) – talablardan tashkil etilgani bu talablarni qanoatlantiruvchi obyektlarning ko‘pligini ta’minlaydi.

Umuman, topologik fazolarda metrik topologik fazolar alohida o‘rin tutadi.

Topologik fazolar uchun qo‘shimcha shartlar kiritish yo‘li bilan ularning soni kamaytiriladi. Shunday shartlardan biri Xausdorflikdir.

Agar topologik fazoning bir-biridan farqli ikki elementining o‘zaro kesishmaydigan atrofi mavjud bo‘lsa, bu fazo *Xausdorf topologik fazo* deb ataladi.

Endi topologik fazolarning ko‘p qo‘llaniladigan muhim hollaridan biri bo‘lgan ko‘pxillik tushunchasi bilan tanishamiz.

Ko‘pxillik tushunchasining paydo bo‘lishiga sabab bo‘lgan asosiy geometrik shakllar bilan tanishamiz. Chiziq, sirt – eng sodda ko‘pxilliklarga misol bo‘la oladi.

Masalan, bizga biror chiziq berilgan bo‘lsa, uning ixtiyoriy nuqtasi uchun urinma to‘g‘ri chiziqni o‘tkazsak, urinish nuqtasi va uning kichik atrofida chiziqni shu to‘g‘ri chiziqqa o‘xshash deb qarashimiz mumkin.

Shuningdek, sirtning nuqtasi uchun urinma tekislikni qarasak, urinish nuqtasi atrofida sirtni tekislik bo‘lagi sifatida deb qarashimiz mumkin. Bunda kichik atrof uchun sirt nuqtalari va urinma tekislik nuqtalari orasida o‘zaro bir qiymatli akslantirish o‘rnatish mumkin.

Agar to‘g‘ri chiziq va tekislikni mos ravishda bir va ikki o‘lchovli Yevklid fazosi ekanini hisobga olsak, o‘zaro bir qiymatli moslikdan chiziq va sirt nuqtalari bilan mos ravishda bir va ikki o‘lchovli Yevklid fazolari o‘rtasida gomeomorfizm o‘rnatilishi mumkin bo‘ladi.

Shu o‘rinda aytib o‘tish kerak-ki, bu moslik har doim urinish nuqtasining to‘la atrofi bilan bo‘lmay, uning yarim atrofi bilan ham bo‘lishi mumkin.

Ta’rif (ko‘pxillikning ta’rifi). Agar topologik fazo a) Xausdorf fazo;

b) sanoqli sondagi Yevklid fazosi ochiq to‘plamlari bilan qoplangan bo‘lsa;

c) ixtiyoriy nuqtasi atrofi n-o‘lchovli Yevklid fazosiga gomeomorf bo‘lsa, u n-o‘lchovli topologik ko‘pxillik deb ataladi. ***Misollar.***

1. Har qanday sanoqli diskret fazoni 0-o‘lchovli topologik ko‘pxillik desa bo‘ladi.

2. R_n – Yevklid fazo n-o‘lchovli topologik ko‘pxillik bo‘ladi.

3. R_{n+1} – Yevklid fazosi sferasi S_n n-o‘lchovli ko‘pxillikka misol bo‘ladi.

Ko‘pxilliklarning ba’zi xossalari

Biz quyida ko‘pxilliklar bilan bog‘liq ba’zi xossalarni isbotsiz keltiramiz.

Ko‘pxillikning muhim xossalaridan biri uning o‘lchamining saqlanishidir. Ko‘pxillikning bir vaqtning o‘zida n-o‘lchovli va m-o‘lchovli bo‘la olmaydi ($n \neq m$).

Agar n-o‘lchovli ko‘pxillikning x_0 nuqtasi atrofi R_n fazoga gomeomorf bo‘lsa, bu nuqta *ko‘pxillikning ichki nuqtasi* deyiladi.

Agar x_0 nuqta atrofi R_n^+ fazoga gomeomorf bo‘lsa, x_0 – nuqta *chetki nuqta* deyiladi va x_0 nuqtaga R_n^+ ko‘pxillikning chetki nuqtasi mos keladi.

Ko‘pxillikning chetki nuqtalari to‘plami ko‘pxillikning *chegarasini* tashkil etadi.

Hamma nuqtalari ichki nuqtalardan tashkil topgan ko‘pxillik *chegarasiz ko‘pxillik* deb ataladi.

Masalan, fazodagi sirt va sirt bo‘laklari chegarali ko‘pxillikka misol bo‘ladi.

Sfera, tor, krendel kabi sirtlar chegarasi yo‘q ikki o‘lchovli ko‘pxillikka misol bo‘ladi.

Chegaraga ega bo‘lgan ikki o‘lchovli ko‘pxillikka Myobius listi misol bo‘ladi.

Bu to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi sohani qarama-qarshi chegaralarini yopishtirish yo‘li bilan hosil bo‘ladigan bir tomonli sirtdir.

Ko‘pxillikni ta’rifi bilan tanishayotganda chiziq va sirtlardan foydalandik. Bu tasodif emas, har qanday n-o‘lchovli Yevklid fazosidagi sirtlar $(n-1)$-o‘lchovli ko‘pxillikni tashkil etadi, ya’ni, $(n-1)$-o‘lchovli ko‘pxillik bo‘ladi. Shuningdek, R_n fazoda chiziq bir o‘lchovli ko‘pxillik bo‘lsa, shunga o‘xshash $2 \le m \le n-1$-o‘lchovli ko‘pxillik bo‘luvchi m-o‘lchovli sirtlar mavjud.

Xuddi shuningdek, teskari masala ham o‘rganilgan. Agar M_n -o‘lchovli ko‘pxillik bo‘lsa, uni biror R_N Yevklid fazosida sirt deb qarash mumkinmi?

Bu masala Nesh tomonidan hal qilingan va ko‘pxilliklardan ba’zi shartlar talab qilinganda R_N fazoda sirt bo‘lishi shartlari berilgan. Bunda N – n ga bog‘liq ifoda.

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

Chiziqli va Affin fazo Chiziqli fazo ta’rifi va xossalari

Chizqli fazolarga doir ba’zi misollar bilan tanishamiz.

1. Chiziqli fazoga doir eng sodda misol bu, haqiqiy sonlar to‘plamining o‘zidir, ya’ni $V = R = \Lambda$.

2. Ixtiyoriy n-tartibli kvadrat matritsalar to‘plami chiziqli fazo tashkil qiladi.

3. Biror $[a,b]$ da aniqlangan, uzluksiz funksiyalar $\{f(x)\}$ – to‘plami chiziqli fazo tashkil qiladi.

4. Kvadrat uchhadlar to‘plami chiziqli fazo tashkil qiladi.

5. Vektor fazo chiziqli fazo tashkil qiladi.

Keltirilgan 1-5 chiziqli fazoga oid misollar chiziqli fazoning eng ko‘p ishlatiladigan, sodda va tasavvur qilish oson bo‘lgan namunalaridir. Shuning uchun bu to‘plamlarning haqiqatan ham chiziqli fazoning barcha shartlarini bajarilishini ko‘rsatishni tinglovchichining o‘ziga havola qilamiz.

Mustahkamlash uchun savol va masalalar

1. Ushbu $ax^2 + bx + c \in W,\ a,b,c \in \mathbb{R}$ to‘plam chiziqli fazo bo‘lishini ko‘rsating.

2. $V = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

3. $W = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ – to‘plam chiziqli fazo bo‘ladimi?

4. Қатор $(a_1\ \ a_2\ \ a_3 \ldots . a_n)$ ва устун $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$ matritsalar to‘plami chiziqli fazo bo‘ladimi?

5. Kompleks sonlar to‘plami chiziqli fazo bo‘ladimi?

6. Ushbu $H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ matritsalar to‘plami chiziqli fazo bo‘lishini ko‘rsating.

7. Nol element bitta elementli chiziqli fazo bo‘lishini ko‘rsating.

8. Integrallanuvchi funksiyalar to‘plami chiziqli fazo bo‘lishini isbotlang.

9. Ushbu $W = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\}$ fazoda nol element qanday bo‘ladi?

10. Kompleks sonlar to‘plamida nol element va qarama-qarshi elementlar qanday bo‘ladi?

11. $V = \{(a_1,\ a_2,\ a_3, \dots, a_n)\}$ – chiziqli fazoda nol, bir va qaramaqarshi elementlarni ko‘rsating.

12. Berilgan $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – ko‘phadlar to‘plami chiziqli fazo bo‘ladimi?

13. Tekislikda berilgan $\vec{a}\{x_1, y_1\} \in W,\ x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ – vektorlar to‘plami chiziqli fazo tashkil etishini ko‘rsating. Yig‘indi va songa ko‘paytmaning koordinat ifodasini toping, koordinatalar sistemasida ko‘rsating.

Chiziqli fazo o‘lchami. Chiziqli fazoga misollar

2.1. Chiziqli fazo o‘lchami. Umuman aytganda, chiziqli fazo o‘lchami chekli va cheksiz bo‘lishi mumkin. Biz geometriya fanida asosan chekli chiziqli fazolar bilan shug‘ullanamiz.

Quyida biz ba’zi chiziqli fazolarning bazisi va o‘lchamlari bilan tanishamiz:

1. Ikki o‘lchovli kvadrat matritsalar $A_2 = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\}$. Bu matritsalar chiziqli fazo tashkil qilishi bilan ma’ruzada tanishgan edik. Endi biz A_2 ning bazisi va o‘lchami haqida fikr yuritamiz. Bu chiziqli fazoda

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsalar fazoning bazisini tashkil qiladi. Bularni chiziqli erkli ekanligi

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 = 0$$

tenglik faqat $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ hol uchungina o‘rinli bo‘lishidan kelib chiqadi. Shuningdek, A_2 tegishli ixtiyoriy matritsa uchun

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{21} e_3 + a_{22} e_4$$

tenglik o‘rinliligi, har qanday beshinchi elementning bular bilan chiziqli bog‘liqligini ko‘rsatadi. Demak, A_2 da to‘rtta chiziqli erkli element mavjud va har qanday beshta element o‘zaro chiziqli bog‘liqdir. Bu yesa ikkinchi tartibli matritsalar to‘plami $A_2 \cong \mathbb{R}_5$ besh o‘lchovli chiziqli fazo ekanligini ko‘rsatadi.

2. Berilgan $[a,\ a,\ ]$ – oraliqda aniqlangan uzluksiz va ixtiyoriy tartibli uzluksiz hosilaga ega funksiyalar to‘plami. Bu to‘plam chiziqli fazo bo‘lishi bilan tanishgan edik. Endi bu to‘plam uchun bazis va uning o‘lchamini aniqlaymiz.

Qaralayotgan to‘plamda $1, x, x^2, \ldots, x^n$ darajali funksiyalar chiziqli erkli elementlarga misol bo‘ladi. Shuningdek, har qanday $[-a, a]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz va ixtiyoriy tartibli hosilaga ega funksiyani Makloren qatoriga yoyish mumkinligi, darajali funksiyalar ixtiyoriy tartibli bo‘lishi, chiziqli fazoning o‘lchami chegaralanmagan ekanini ko‘rsatadi.

2.2. Chiziqli fazoga misollar. Bu bo‘limda chiziqli fazo elementlari ixtiyoriy narsalar bo‘lishi mumkin ekanligini, faqat ulardan chiziqli fazo aksiomalarini bajarilishinigina talab etilishini ko‘rsatuvchi misollar keltiramiz.

1. Ranglar fazosi. Bu yerda rang – bo‘yoq rangi ma’nosida tushuniladi. Hayotiy ranglar haqidagi mulohazalarni matematik usulda bayon etishga harakat qilamiz. Tabiatda asosiy bo‘lgan ranglar mavjud. Masalan: oq, qizil, qora, ... singari. Ko‘pgina boshqa ranglar bu ranglarning aralashmasidan iborat bo‘ladi. Umuman aytganda, har qanday rangni ham bir yoki bir nechta ranglarning aralashmasi sifatida hosil qilish mumkin. Ammo shunday ranglar borki, ular o‘zining aniq nomiga ega va ularning birini faqat boshqa biridan hosil qilish mumkin emas.

Yuqorida keltirilgan A – oq, B – qora, C – qizil ranglarni standart ranglar deb hisoblasak, mana shu uchta rangni asos qilib olib va ulardan qandaydir hissa qo‘shish yo‘li bilan turli xil ranglarni hosil qilish mumkin. Tabiiyki, bunday uch xil ranglarning o‘zi ham har xil bo‘ladi, ya’ni asosiy deb olishimiz mumkin bo‘lgan uch xil ranglar ham turlicha bo‘ladi.
Boshqa uchlik esa yangicha ranglarni berishi aniq.

Demak, biz A, B, C – ranglarni asosiy deb oldik. Unda A rangdan a hissa, B rangdan b hissa va C rangdan c hissa qo‘shganimizda biror G rang hosil bo‘lsin. Shu aytilgan jarayonni ushbu tenglik bilan yozishimiz mumkin:

$$G = aA + bB + cC.$$

Endi biz $\{A, B, C\}$ – ranglarni asosiy ranglar, ya’ni bazis ranglar deb qarasak, tenglikning o‘ng tomoni bu bazis ranglarning chiziqli kombinatsiyasi bo‘ladi. Chiziqli kombinatsiya koeffitsiyentlari (a, b, c) – larni G – rangning koordinatalari deb, hosil bo‘ladigan G ranglarni RF– ranglar fazosi deb ataymiz.

Demak, RF ranglar fazosida elementlar ranglardan iborat va bu ranglar bazis $\{A, B, C\}$ ranglarning aralashmasi. Qaysi rangdan qancha qo‘shilishini ifodalovchi (a, b, c) – sonlar shu rangning koordinatalari. Shu yo‘l bilan biz uch o‘lchovli fazo nuqtalari va ranglar to‘plami orasida moslik o‘rnatdik. Bu ranglar fazosining ajoyib bir matematik modeli bo‘ladi.

Bu modeldan ranglarni o‘rganuvchi fan bo‘lgan “kolorimetriya” sohasida unumli foydalaniladi.

Ranglar fazosida asosiy ranglarning koordinatalarini ko‘rsak,

$$A = 1 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$$

ko‘rinishida yozish mumkin ekanligidan, $A(1,0,0)$ ekanligini va shunga o‘xshash $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ koordinatalarga ega ekanligini ko‘rishimiz mumkin.

Ba’zan asos bo‘lgan rangdan ba’zilari qo‘shilmay qolishi mumkin $D = aA + bB + 0 \cdot C$.

Bunda D – rang uchun C – rang qo‘shilmayapti, u faqat A va B ranglar aralashmasidan iborat.

Biz *RF* ranglar fazosi haqida boshlang‘ich tushunchalarni keltirdik, qiziqqan tinglovchilar manbalardan bu haqida to‘laroq tanishishi mumkin.

Bizning asosiy maqsadimiz hozirgina tanishgan *RF* ranglar fazosi ham uch o‘lchovli chiziqli fazoga misol bo‘lishini ko‘rsatish edi.

2. Kimyoviy elementlar chiziqli fazosi. Kimyo fanidan bizga ma’lumki, tabiatdagi har qanday modda Mendeleyev davriy jadvalidagi elementlardan biri yoki ularning bir nechtasining yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Har bir element atom, molekula yoki boshqa tashkil etuvchilardan iborat ekanligini hisobga olsak va asosiy tashkil etuvchilarni $B_i(0,...,0,1,0,...,0)$ shaklida bazis element sifatida n tasini tanlab olsak, har qanday A_j elementni

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} B_i$$

shaklda ifoda etish mumkin. Bu yerda $B_{ij} \ge 0$ bo‘lib, A_j dagi B_i atomlari sonini bildiradi. Bunda B_i – chiziqli fazoning bazisi deb qaraladi. A_j – element ularning chiziqli kombinatsiyasi bo‘ladi. Yig‘indi va songa ko‘paytirish amallari bu elementlar chiziqli fazo tashkil etishini ko‘rsatadi. Bunda ko‘paytiriluvchi son butun sonlar to‘plamidan olingan bo‘ladi.

Keltirilgan fazoni quyidagi soddaroq holda ko‘raylik.

Misol. Ushbu CO_2, H_2O, H_2CO_3 moddalar asosan H – vodorod, C – uglerod, O – kisloroddan tashkil topgan. Bu elementlar orasidagi bog‘lanishni quyidagi matritsa shaklida yozish mumkin:

$$\begin{pmatrix} CO_2 \\ H_2O \\ H_2CO_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ C \\ O \end{pmatrix}.$$

Agar bu tenglikda qatnashgan ustun matritsalarni chiziqli fazo elementi deb hisoblasak, bu chiziqli fazo chiziqli almashtirish yordamida bir elementlardan iborat uchlikni boshqa elementlar bilan almashtirishni beradi.

Bu masalaga to‘la algebraik usulda yondashsak, tenglikda qatnashayotgan matritsaning rangi ikkiga teng yekanini ko‘rish mumkin.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2.$$

Demak, chap tomondagi 3 ta element hosil qilingan chiziqli fazoning ikki o‘lchovli fazo ostiga tegishli ekanini bildiradi. Bu ikki o‘lchovli fazo osti esa o‘zining bazis elementlariga ega bo‘ladi. Bu bazisda qaralayotgan uchta element yangicha ifodalanadi:

$$\begin{pmatrix} CO_2 \\ H_2O \\ H_2CO_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2O \\ CO_2 \end{pmatrix}.$$

Bu tengliklar chiziqli fazo elementlari orasidagi chiziqli almashtirishlarni ifoda etadi. Tabiiyki, bu tengliklar aniq bir kimyoviy reaksiyadagi qonuniyatni beradi. Masalaning kimyo fanidagi o‘rnini o‘rganish qiziquvchilar uchun yaxshi mashq bo‘ladi.

Bizni esa masalaning matematik tomoni qiziqtiradi. Demak, chiziqli fazoda har qanday elementni bazis elementlar yordamida, ya’ni, fazo o‘lchoviga teng sondagi chiziqli erkli elementlar yordamida chiziqli ifodalash mumkin ekan.

Agar biror $e(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ bazisdan boshqa $e'(e'_1, e'_2, e'_3, ..., e'_n)$ bazisga o‘tilsa, ular orasida $e' = Ae$ shaklda chiziqli bog‘lanish mavjud bo‘lar ekan. Bunda A – matritsa, e va e' birlik matritsalar. Bu bog‘lanish chiziqli fazoda chiziqli almashtirish deb ataladi.

Chiziqli almashtirishning xossalari bilan ixtiyoriy “chiziqli algebra” ga tegishli adabiyotlardan tanishish mumkin.

Affin fazo Mustahkamlash uchun savol va masalalar

1. Affin fazosining birinchi aksiomasi va Yevklid fazosi aksiomalari orasida qanday bog‘liqlik yoki o‘xshashlik bor?

2. Affin fazosining ikkinchi aksiomasi va Yevklid aksiomalari orasida qanday bog‘liqlik yoki o‘xshashlik bor?

3. Ikkinchi tartibli matritsalar chiziqli fazo tashkil etadi, u affin fazosi bo‘ladimi?

4. Tekislik ikki o‘lchovli affin tekisligi bilan ekvivalent ekanini ko‘rsating.

5. Ixtiyoriy Λ_n n – -o‘lchovli chiziqli fazo – affin fazosi bo‘lishi mumkinmi?

6. Affin fazosida parallellik tushunchasi mavjud ekanligi isbotlansin.

7. Bir o‘lchovli affin fazoda vektorlar kombinatsiyasi qanday geometrik ma’noga ega?

8. Уч ўлчовли аффин фазосида $\{e_1, e_2, e_3\}$ – bazis vektorlar. $\vec{a} = 2e_1 + e_2 - e_3,\ \vec{b} = e_1 + 2e_2 + e_3,\ \vec{c} = e_1 + e_2 - 2e_3$ Agar bo‘lsa, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ni bazis deb olsa bo‘ladimi?

9. Affin tekisligida uchlari $A(7,2),\ B(-3,4)$ – nuqtalarda bo‘lgan vektorning koordinatalarini toping.

10. Tekislikda $\vec{a}(2,4),\ \vec{b}(3,7),\ \vec{c}(5,4)$ – vektorlar berilgan. Agar $(\vec{a}, \vec{b})$ vektorlarni bazis деб олинса, $\vec{c}$ – vektorning bu bazisdagi koordinatalarini toping.

11. Affin fazosida berilgan $\vec{a}(x_1, y_1, z_1),\ \vec{b}(x_2, y_2, z_2),\ \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ – vektorlarning bir tekislikda yotish shartini toping.

12. Tekislikda bir uchi umumiy bo‘lgan $ABCD$ – parallelogramm va $AKLN$ – kvadrat berilgan. Agar parallelogrammning uchidan chiqqan tomonlarida yotgan vektorlarni bazis deb olinsa, kvadrat tomonlarida yotgan vektorlar koordinatalarini toping. $\overline{AB}$

13. Tekislikda $\vec{a}(3,4),\ \vec{b}(2,4),\ \vec{c}(1,9)$ – vektorlar berilgan. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ – vektorlarni bazis deb olinsa, $\vec{c}$ vektorning koordinatalari qanday bo‘ladi?

14. Tekislikda $\vec{a}(2,5),\ \vec{b}(6,15)$ vektorlar bazis tashkil qila oladimi?

15. Affin koordinatalar sistemasida $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

16. Affin koordinatalar sistemasida “dasta” tenglamasi ya’ni, $A(x_0, y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar tenglamasini yozing.

17. Umumiy tenglamasidagi koeffitsiyentlari qanday shartni bajarganda, ikki to‘g‘ri chiziq parallel bo‘ladi?

18. Ushbu $\begin{cases} x' = 7x + 5y + 4 \\ y' = 4x + 3y - 2 \end{cases}$ аффин almashtirishida 1) $A(1,-2),\ B(5,-9)$ – нуқталар аксини; 2) $3x + 2y - 5 = 0$ – to‘g‘ri chiziq aksini toping.

19. Berilgan $\vec{a}(3,4)$ vektor koordinatalarini parallel ko‘chirganda $\vec{b}(7,5)$ vektorga o‘tgan. Bunda koordinatalar boshi qaysi nuqtaga parallel ko‘chirilgan?

Yevklid va Psevdoyevklid fazo

Soddalik uchun ikki o‘lchovli psevdoyevklid fazosi bilan, ya’ni, Minkovskiy tekisligi geometriyasi bilan tanishamiz.

Agar tekislikda biror dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsa, tekislikdagi har bir nuqta o‘zining bir juft sondan iborat koordinatalariga ega bo‘ladi. Bu tushuncha sizga maktabdan ma’lum. Aytaylik, π tekislikda Oxy dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lib, $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo‘lsin. Endi $\bar{e}_1$ bilan Ox o‘qi bo‘yicha yo‘nalgan, $\bar{e}_2$ bilan Oy o‘qi bo‘yicha yo‘nalgan vektorlarni olamiz. Bu vektorlar kollinear emas, shuning uchun ularni tekislikda bazis vektorlar sifatida qabul qilish mumkin.

Endi bu bazis $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – vektorlardan ushbu shartlarni qanoatlantirishini talab etamiz:

$$\bar{e}_1^{\,2} = 1,\ \bar{e}_2^{\,2} = -1,\ \ \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 \quad (4.1)$$

Ma’lumki, tekislikdagi har qanday vektor $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – bazislar yordamida chiziqli ifodalanadi va $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ vektorlarning chiziqli ifodasi ushbu shaklda bo‘ladi:

$$\overline{OA} = x_1 e_1 + y_1 e_2,\ \ \overline{OB} = x_2 e_1 + y_2 e_2 .$$

Agar $\overline{OA}$ vektorning $\overline{OB}$ vektorga ko‘paytmasini algebraik usullarda hisoblab chiqsak,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = (x_1 e_1 + y_1 e_2) \cdot (x_2 e_1 + y_2 e_2)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bazis vektorlar uchun qo‘yilgan (4.1) talabni e’tiborga olsak,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad (4.2)$$

tenglikni hosil qilamiz. Hosil qilingan bu (4.2) tenglikni $\overline{OA}$ va $\overline{OB}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb ataymiz va $(\overline{OA}, \overline{OB})$ shaklda belgilaymiz. Endi bu skalyar ko‘paytma yordamida ba’zi geometrik kattaliklarni aniqlaymiz.

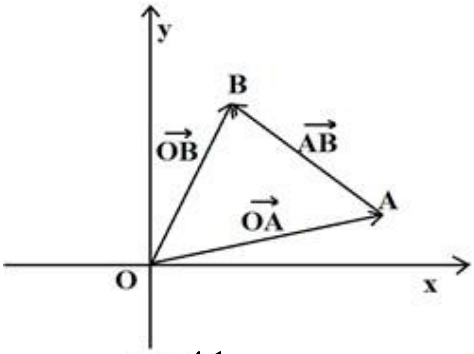
Odatda, ya’ni Yevklid geometriyasida vektorning uzunligi (normasi) vektorning o‘zini-o‘ziga skalyar ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan kattalikdan olingan kvadrat ildiz shaklida aniqlanar edi, ya’ni,

$$|\bar{X}| = \sqrt{(X \cdot Y)}$$

tenglik bilan.

Tekislikda ikki $\overline{e_1}^2 = 1$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani, uchlari shu nuqtalarda vektorning normasiga hisoblaymiz. Tekislikdagi ustidagi amallarga ko‘ra C $\overline{OA}$ vektorlar ayirmasiga teng, $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ ya’ni,

бўлган C тенг деб векторлар вектор $\overline{OB}$ ва векторнинг



4.1-расм.
5.1.1-rasm

(4.1-rasm)

koordinatalardagi ifodasi

$$\overline{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} = (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2.$$

Бундан $|\overline{AB}|$ ни ҳисоблаш унча мураккаб эмас:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}.$$

Demak, geometriyaga zamonaviy ta’rif berishda kiritilgan (4.2) tenglik (4.1) shartni qanoatlantiruvchi bazislar uchun berilgan ikki nuqtani tutashtiruvchi vektor normasi, ya’ni, shu vektorni ifoda etuvchi kesma uzunligi sifatida aniqlanar ekan.

Biz Minkovskiy tekisligidagi masofani vektorlar algebrasi yordamida, geometrik yo‘l bilan aniqlash usuli bilan tanishdik. Bu tekislikdagi geometrik kattaliklar orasida hosil bo‘ladigan munosabatlarni Minkovskiy geometriyasi deb ataymiz.

Minkovskiy geometriyasida aylana va burchak. Demak, Minkovskiy geometriyasidagi asosiy tushunchalar, tekislikdagi vektorlar va ular orasidagi munosabatlar Yevklid geometriyasidagi holatidan farq qilmaydi. Asosiy farq bazis vektorlarning o‘zaro ko‘paytmasi talablari asosida hosil qilingan ikki nuqta orasidagi masofa aniqlanishidadir. Ammo bu o‘zgarish masofa yordamida aniqlanadigan geometrik tushunchalarning tubdan o‘zgarishiga sabab bo‘ladi.

Avvalo masofa tushunchasida paydo bo‘ladigan o‘zgarishlar bilan tanishib chiqaylik.

Vektor normasining qanday kattalik bo‘lishini aniqlaymiz. Ma’lumki, vektor normasi ushbu tenglik bilan aniqlanadi:

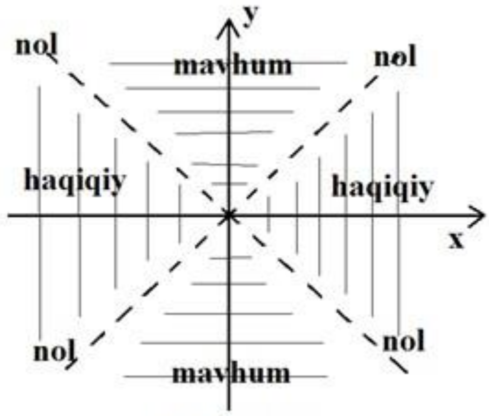
$$|\overline{OA}| = \sqrt{x_1^2 - y_1^2}.$$

Bundan,

$$|\overline{OA}| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 - y_1^2} - \text{ҳақиқий}, |x_1| > |y_1| \text{ бўлса}, \\ 0, \quad |x_1| = |y_1| \text{ бўлса}, \\ \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \cdot i - \text{мавҳум}, |x_1| < |y_1| \text{ бўлса}. \end{cases}$$

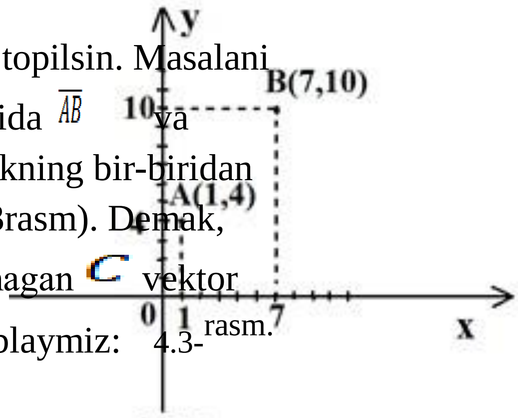
Bu tenglikdan, koordinatalar boshidan tekislikka yo‘nalgan vektorlar, tekislikni uch xil uzunlikka (normaga) ega vektorlardan iborat bo‘laklarga ajratilishini ko‘rish mumkin (4.2-rasm).

Odatda, vektorlar normasining kattaligiga bog‘liq ravishda haqiqiy, mavhum va nol uzunlikdagi vektorlar deb ataladi. Fizika fanida esa bu vektorlarni mos ravishda fazoviy, vaqtga o‘xshash va izotrop vektorlar deb atashadi. Shuning uchun biz ham nol vektorlarni izotrop vektorlar deb ataymiz. Odatda, nol vektor deganda nuqta tushuniladi, ammo Minkovskiy geometriyasida nol vektor faqat nuqtani ifoda etmaydi. Shu sababli, uzunligi nolga teng vektorni izotrop vektor deb atash qulay bo‘ladi. Bu holni ushbu misolda aniq tasavvur qilish mumkin.



5.2.1-rasm 4.2-расм.

Masalan, uchlari $A(1,4)$ va $B(7,10)$ nuqtalarda bo‘lgan vektor uzunligi topilsin. Masalani hal qilishdan avval koordinatalar sistemasida $\overline{AB}$ va nuqtalarni topamiz. Bu nuqtalar tekislikning bir-biridan farqli ikki nuqtasi ekanini ko‘rish mumkin (4.3rasm). Demak, uchlari bu nuqtalarda bo‘lgan nol vektor bo‘lmagan C vektor mavjud. Endi C vektorning uzunligini hisoblaymiz:



4.3-rasm.

5.2.2-rasm

$$\overline{AB} = \sqrt{(7-1)^2 - (10-4)^2} = \sqrt{36-36} = 0.$$

Demak, C – vektor izotrop vektor.

Vektor izotrop bo‘lishi uchun $|x_1| = |y_1|$ ekanini hisobga olsak va bu tenglik $y = \pm x$ tenglikka teng kuchli ekanligidan, izotrop vektorlar koordinatalar sistemasi bissektrisasiga kollinear vektor ekanligini hosil qilamiz.

Shuning uchun koordinata o‘qlari bissektrisasi tekislikda izotrop konus deb ataladi va uning tenglamasi,

$x^2 - y^2 = 0$
shaklda yoziladi.

Izotrop konus tekislikdagi haqiqiy va mavhum uzunlikdagi vektorlar to‘plamini ajratib turishini rasmdan aniqlash mumkin.

Tekislikda normalari (uzunliklari) uch xil vektor mavjudligi, tekislikdagi nuqtalar orasidagi masofaning ham uch turga bo‘linishiga sabab bo‘ladi.

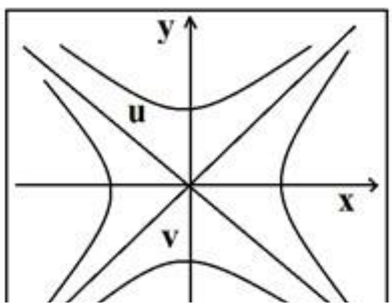
Xuddi Yevklid geometriyasida bo‘lgani singari Minkovskiy geometriyasida aylana bilan tanishamiz.

Ta’rif. Tekislikda aylana deb, berilgan nuqtadan teng masofada yotgan nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.

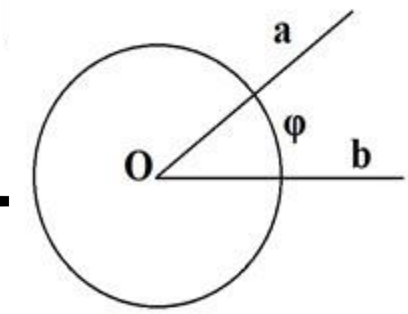
Minkovskiy geometriyasida ushbu ta’rifni qanoatlantiruvchi nuqtalarni aniqlashda masofaning qiymati uch xil bo‘lishiga ahamiyat berish zarur bo‘ladi. Bu hollar quyidagicha: agar aylana markazi koordinatalar boshi $O(0,0)$ nuqta va radiusi r ga teng bo‘lsa, $x^2 - y^2 = r^2$ – haqiqiy radiusli aylana, $x^2 - y^2 = 0$ – nol radiusli aylana, $x^2 - y^2 = -r^2$ – mavhum radiusli aylana. Bu tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni (4.4-rasm) da keltirilgan.

Haqiqiy va mavhum radiusli aylanalar umumiy asimptotaga ega qo‘shma giperbola bo‘lsa, nol radiusli aylana ularning asimptotalari yoki izotrop konusdan iboratdir.

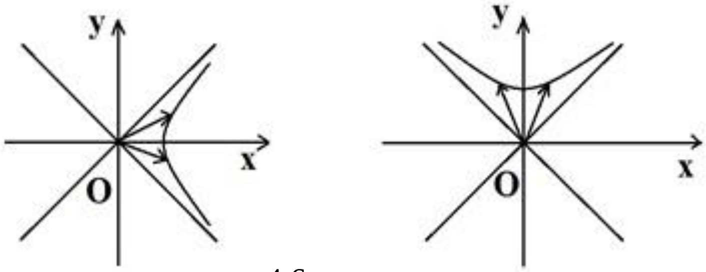
Yevklid geometriyasida burchak kattaligi markazi burchak uchida bo‘lgan birlik aylana yoyi uzunligiga teng bo‘lgan kattalik yordamida aniqlanar edi (4.5-rasm). Minkovskiy geometriyasida ham burchak kattaligi xuddi Yevklid geometriyasidagi kabi aniqlanadi. Ammo Minkovskiy geometriyasida burchak faqat bir xil uzunlikka ega vektorlar orasida aniqlanishi mumkin. Chunki har xil uzunlikka ega vektorlarni aniqlaydigan bitta aylana mavjud emas.



Ta’rif. Minkovskiy geometriyasida ikkita uzunliklari bir xil kattalikda aniqlanadigan vektorlar orasidagi burchak, shu xil uzunlikdagi birlik radiusli aylana yoyi uzunligiga teng (4.6-rasm).



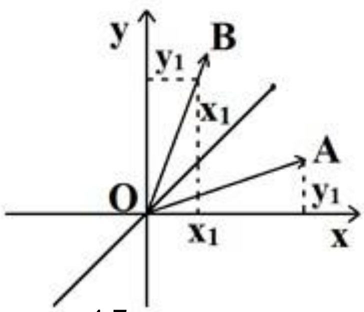
5.2.4-расм.
4.5-rasm



4.6-расм
5.2.5-rasm

Giperbola yoyining uzunligi chegaralanmaganligi Minkovskiy geometriyasida ikki vektor orasidagi ψ бурчак $(-\infty, +\infty)$ intervalda bo‘lishi mumkin ekanligini bildiradi. Burchakning bu usulda aniqlanishi *giperbolik burchak* deb kiritiladi.

Ma’lumki, elliptik burchak $[0,2\pi]$ oraliqqa tegishli bo‘lib, o‘zaro ortoganal yo‘nalishlarga $\frac{\pi}{2}$ qiymat va yopiq burchakka yoki π qiymat mos kelar edi. Minkovskiy geometriyasida ham ortoganal yo‘nalishlar skalyar ko‘paytma yordamida aniqlanadi.



4.7-расм.
5.2.6-rasm

Ta’rif. Skalyar ko‘paytmalari nolga teng, izotrop bo‘lmagan vektorlar *ortoganal vektorlar* deb ataladi.

Ortoganal vektorlarning geometrik shakli qanday bo‘lishi bilan tanishamiz. $\overline{OA}\{x_1, y_1\}$ ва $\overline{OB}\{x_2, y_2\}$ vektorlar ortoganal
vektorlar bo‘lsin, ya’ni,

$$(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) = x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0.$$

Бундан $\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_2}{x_2}$ ekanligini hosil qilamiz. Bu tenglik $\overline{OA}\{x_1, y_1\}$ va $\overline{OB}\{x_2, y_2\}$ vektorlar izotrop yo‘nalishga nisbatan simmetrik bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. (4.7-rasm).

Demak, Minkovskiy geometriyasida vektorlarning ortoganalligi ularni izotrop yo‘nalishiga nisbatan simmetrik yo‘nalganini bildirar ekan. Xususan, va Oy o‘qlari ham o‘zaro ortoganal ekan.

Kiritilgan asosiy tushunchalar yordamida Minkovskiy geometriyasida elementar geometriyaning asosiy qonuniyatlarini o‘rganish mumkin. Bu ilmiy jihatdan qiziq va ko‘pgina amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan mashg‘ulotni o‘rganishni tinglovchiga qoldiramiz. Shuningdek, bu ma’lumotlarni [8], [11] adabiyotlardan topish mumkin ekanligini va bu geometriya Eynshteyn nisbiylik nazariyasining geometrik talqini ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

Mustahkamlash uchun savol va masalalar

1. Minkovskiy geometriyasida ikki nuqta orasidagi masofa qanday aniqlanadi?

2. Giperbolik sinus va kosinus funksiyalarining xossalarini ayting.

3. Ortoganallik nima?

4. Bazis nima? Tekislikda nechta chiziqli erkli vektor bor?

5. Vektorning chiziqli yoyilmasi nima?

6. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?

7. Nol va izotrop vektorlarning farqi nimada?

8. Minkovskiy tekisligida bazis vektorlarga qanday shartlar qo‘yiladi?

9. Minkovskiy tekisligida ikki vektorning normasi qanday aniqlanadi?

10. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi qanday ifodalanadi?

11. Geometriya faniga ta’rif berishda qaysi tenglikdan foydalaniladi?

12. Yevklid va Minkovskiy geometriyalarida ikki nuqta orasidagi masofa formulalarida qanday farq bor?

13. Uchburchak tomonlari bir xil o‘lchovli bo‘lishi mumkinmi?

14. Ixtiyoriy ikki nuqtani nol uzunlikka ega siniq chiziq bilan birlashtirish mumkinmi?

15. $A(1,5)$ nuqtadan $y = 2x + 3$ to‘g‘ri chiziqqa ortoganal to‘g‘ri chiziq o‘tkazing.

16. Ortoganal yo‘nalishlar izotrop konusga nisbatan simmetrik bo‘lishini ko‘rsating.

17. Minkovskiy tekisligida $X\{x_1, y_1\}$ va $Y\{x_2, y_2\}$ vektorlar skalyar ko‘paytmasi $(X \cdot Y) = x_1 x_2 - y_1 y_2$ ekanligini ko‘rsating.

18. Minkovskiy tekisligida skalyar ko‘paytmaning geometrik ma’nosini tushuntiring.

19. $\bar{a}\{3,7\}$ vektorga ortoganal bo‘lgan vektor toping va chizmada ko‘rsating.

20. Minkovskiy geometriyasida vektorlar uzunliklari necha turga bo‘linadi?

21. Uzunligi nolga teng vektor qanday nomlanadi?

22. Izotrop konus nima?

23. Aylana ta’rifini keltiring.

24. Minkovskiy geometriyasida necha xil aylana mavjud?

25. Minkovskiy geometriyasida burchak kattaligi qanday aniqlanadi?

26. Qanday vektorlar ortoganal vektorlar deb ataladi?

27. Haqiqiy radiusli aylanani chizing.

28. Ikkita ortogonal vektorlarni chizing.

29. Giperbolik burchak deganda nimani tushundingiz?

30. Markazi $A(x_0, y_0)$ nuqtada bo‘lgan holda aylana tenglamalari qanday bo‘ladi?

31. Minkovskiy tekisligida aylana urinmasining izotrop konus ichidagi bo‘lagi urinish nuqtasida teng ikkiga bo‘linishini isbotlang.

32. Minkovskiy tekisligida ellipsning Yevklid tekisligidagi ta’rifini qanoanlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

33. Ixtiyoriy nuqtasidan berilgan $F(x_0, 0)$ nuqta va $x = d$ to‘g‘ri chiziqqacha masofalar nisbati o‘zgarmas bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni topilsin.

34. Shunday $y = f(x)$ chiziq topilsinki, uning urinma vektori har doim haqiqiy qiymat qabul qilsin.

35. Minkovskiy tekisligida ikki vektor orasidagi burchak formulasini toping, xossaclarini ayting.

36. Haqiqiy va mavhum radiusli aylana nuqtalari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatsa bo‘ladimi?

37. Minkovskiy tekisligida koordinatalar boshidan chiquvchi bir nurda yotadigan M ва M^* nuqtalar uchun $OM \cdot OM^* = r^2$ bo‘lsa, ular $\overline{OB}\{x_2, y_2\}$ – radiusli aylanaga nisbatan qanday joylashadi?

Lobachevskiy tekisligi

Ma’lumki 1826 yilda N.I. Lobachevskiy o‘zining “Tasavvurdagi geometriya” asarida birinchi noyevklid, ya’ni Yevklid geometriyasidan farqli geometriya haqida ma’ruza qilgan. Bu sana noyevklid geometriyasi vujudga kelish sanasi hisoblanadi. Lobachevskiy geometriyasining vujudga kelish tarixi [11], [13] manbalarda bayon etilgan. Bu geometriyaning bir necha talqini paydo bo‘lgandan so‘ng fanda o‘z o‘rniga va usullariga ega bo‘ldi [14].

Biz ushbu amaliy mashg‘ulotda Lobachevskiy tekisligidagi asosiy tushunchalar haqida Yevklid fazosidagi sirt yordamida tasavvur hosil qilishiga xarakat qilamiz.

5.1. Lobachevskiy tekisligidagi parallellik. Ma’lumki, tekislikda “nuqta” va “to‘g‘ri chiziq” asosiy tushunchalar bo‘ladi. Tekislikdagi geometriyani o‘rganish uchun asosiy tushunchalar ma’lum bir nechta aksiomalarni qanoatlantirishi zarur.

1^0. Xar qanday ikki nuqtadan bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tadi.

2^0. To‘g‘ri chiziq tekislikni ikki yarim tekislikka ajratadi (bo‘ladi).

3^0. Tekislikda berilgan radiusli aylana chizish mumkin.

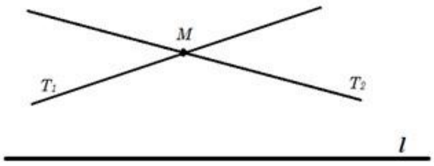
4^0. To‘g‘ri burchaklar o‘zaro teng.

Vanihoyat beshinchi parallellik aksiomasi yoki V postulat. Bu aksioma tarixda juda ko‘p munozara va tortishuvga sabab bo‘lgan.

N.I. Lobachevskiy V postulatni quyidagi shaklda olishni taklif qilgan.

Aksioma. To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta berilgan bo‘lsin. Bu nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin (5.1-rasm).

Bunda $T_1 va T_2$ to‘g‘ri chiziqlar l to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar.



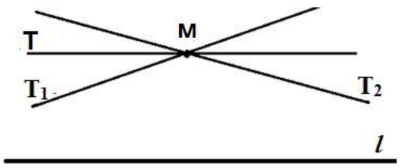
5.1-расм.

Tabiiyki Yevklid (maktab) geometriyasi doirasida bunday parallellikni tasavvur qilish qiyin.

Ushbu amaliy mashg‘ulotning asosiy maqsadi – Lobachevskiy aksiomasini Yevklid geometriyasi doirasida, ya’ni Yevklid geometriyasi elementlari yordamida tasavvur qila olish imkonini yaratish.

Avvalo biz shu aksiomadan kelib chiqishi mumkin bo‘lgan tasdiqlar bilan tanishamiz.

1-tasdiq. Berilgan nuqtadan to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin (5.2-rasm).

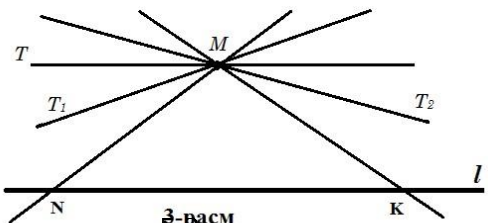


5.2-расм.

Bu tasdiq isbotini ushbu chizma orqali tushuntiramiz.

Aksiomaga ko‘ra $T_1 va T_2$ – kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan vertikal burchaklardan M nuqtadan o‘tuvchi va l bilan kesishmaydigan MT to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq l to‘g‘ri chiziq bilan kesisha olmaydi. Chunki T to‘g‘ri chiziq l bilan kesishishi uchun $T_1 yoki T_2$ bilan kesishishi kerak bo‘ladi. Bunday bo‘lishi mumkin emas, chunki uning kesishishi, aslida ustma-ust tushishini ko‘rsatadi. Bunday MT to‘g‘ri chiziqni cheksiz ko‘p holda o‘tkazish mumkin.

To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali to‘g‘ri chiziq bilan kesishadigan to‘g‘ri chiziqlar ham o‘tadi.



5.3-расм.

Masalan, 5.3-rasmda MN va MK to‘g‘ri chiziqlar l to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlardir.

Demak, M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasida l to‘g‘ri chiziqni kesuvchi MN, MK va l bilan kesishmaydigan (MT) to‘g‘ri chiziqlar mavjud ekan.

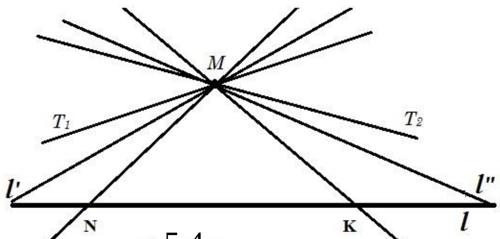
Ta’rif. Berilgan l to‘g‘ri chiziqda yotmagan M nuqtadan o‘tuvchi , to‘g‘ri chiziqlar dastasida l to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi va l to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar to‘plamini chegaralovchi l' to‘g‘ri chiziq l to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq deb ataladi.

Bu Lobachevskiy tekisligidagi to‘g‘ri chiziqlarning parallelligi ta’rifi, Yevklid tekisligidagi parallellik tushunchasidan tubdan farq qiladi. Lobachevskiy tekisligida kesishmaslik tushunchasi va parallellik tushunchasi har xil tushunchalardir.

Keltirilgan ta’rifni qanoatlantiruvchi to‘g‘ri chiziq yagona bo‘lmaydi.

2-tasdiq. To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta berilgan bo‘lsin. Bu nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa ikkita parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Tasdiqni to‘g‘ri ekaniga N nuqtani chapga, K nuqtani o‘ngga qo‘zg‘atish yo‘li bilan ko‘rsatish mumkin. Bunda to‘g‘ri chiziq M nuqta atrofida buriladi va burilish jarayonida kesishuvchi to‘g‘ri chiziq kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar to‘plamiga o‘tadi. Chegaraviy holat parallellikni beradi (5.4-rasm).



5.4-расм.

Bu tekislikning Keli-Kleyn, ya’ni doira ichidagi talqini bilan [15] da tanishish mumkin.

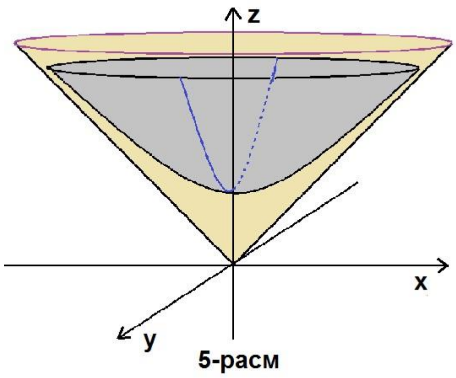
5.2. Lobachevskiy tekisligining Yevklid fazosidagi talqini. Ma’lumki, giperbolani simmetriya o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan shakl ikki pallali giperboloid deb ataladi. Bunda giperbolaning assimptotalaridan aylanma konus sirt hosil bo‘ladi. Bu aylanma konus giperboloidning assimptotik konusi deb ataladi.

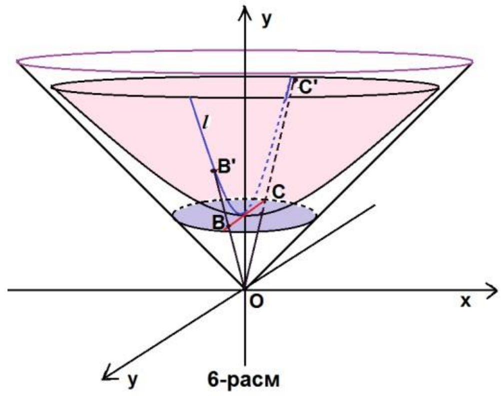
Biz Lobachevskiy tekisligi talqinini hosil qilish uchun ikki pallali giperboloidning bir pallasidan foydalanamiz. Bundan so‘ng giperboloid deganda ikki pallali giperboloidning bir pallasini tushunamiz. Tasavvur qilish oson bo‘lishi uchun, assimptotik konus va giperboloid biror koordinatalar sistemasida berilgan bo‘lsin deb hisoblaymiz. Bunda koordinatalar boshi konus uchida, Oz o‘qi esa konusning simmetriya markazida bo‘lsin (5.5-rasm).

Giperboloidga tegishli bo‘lgan nuqtalarni Lobachevsriy tekisligi “nuqta”lari deb qabul qilamiz.

Konus uchidan va giperboloidni kesuvchi tekisliklarni o‘tkazamiz. Kesimda giperbola hosil bo‘ladi. Shuningdek, bu tekislik assimptotik konusni ikki yasovchisi bo‘yicha kesib o‘tadi. Bu yasovchilar kesimda hosil bo‘lgan giperbola uchun assimptota bo‘ladi.

Lobachevskiy tekisligining “to‘g‘ri chizig‘i” – deb giperboloidni konus uchidan o‘tuvchi tekislik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi. Bu chiziq giperboloid ustida yotuvchi giperbola bo‘ladi.





5.5-rasm.   5.6-rasm.

Ma’lumki, fazoda berilgan ikki tekislik har doim biror to‘g‘ri chiziq (Yevklid ma’nosida) bo‘ylab kesishadi.

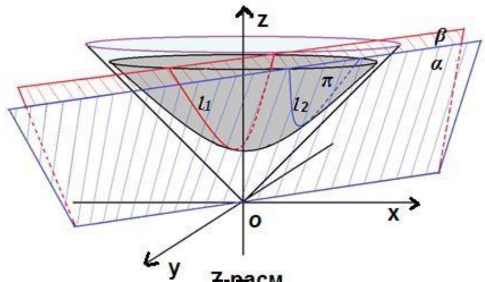
Koordinatalar sistemasida □ giperboloid va □ va □ assimptotik konus uchidan o‘tuvchi tekisliklar berilgan bo‘lsin. Har ikkala tekislik assimptotik konus uchidan o‘tganligi uchun, ular albatta biror *l* to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Bu kesishuvchi to‘g‘ri chiziq konusga nisbatan 3 hil joylashishi mumkin:

1. Konusdan tashqarida;

2. Konus ichida; **3.** Konus ustida.

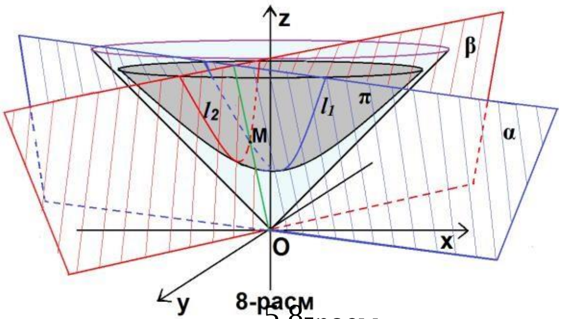
Berilgan giperboloid va berilgan tekisliklar kesishishidan kesimida Lobachevskiy to‘g‘ri chiziqlari (ya’ni giperbolalar) hosil bo‘ladi.

Berilgan ikki tekislik giperbiloiddan tashqarida va assimptotik konusning uchi orqali o‘tuvchi *m* to‘g‘ri chiziq (Yevklid ma’nosida) bo‘ylab kesishsin. Bu tekisliklar giperboloiddan tashqarida kesishganligi uchun bu ikki tekislik giperboloid ustida umumiy nuqtaga ega emas. Shuning uchun tekisliklar va giperboloid kesishishidan kesimida hosil bo‘lgan Lobachevskiy to‘g‘ri chiziqlari umumiy nuqtaga ega bo‘lmaydi. Umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlar kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar deb ataladi. (5.7-rasm).



5.7-расм.

Berilgan ikki tekislik giperboloidning ichidan va assimptotik konus uchi orqali o‘tuvchi *m* to‘g‘ri chiziq (Yevklid ma’nosida) bo‘ylab kesishsin. U holda, bu ikki tekislik giperboloid ustida umumiy nuqtaga ega bo‘ladi. Giperboloid va tekisliklar kesishishidan kesimida hosil bo‘lgan Lobachevskiy to‘g‘ri chiziqlari ham umumiy nuqtaga ega bo‘ladi. Umumiy nuqtaga ega bo‘lgan Lobachevskiy to‘g‘ri chiziqlari kesishadigan to‘g‘ri chiziqlar deb ataladi (5.8-rasm).

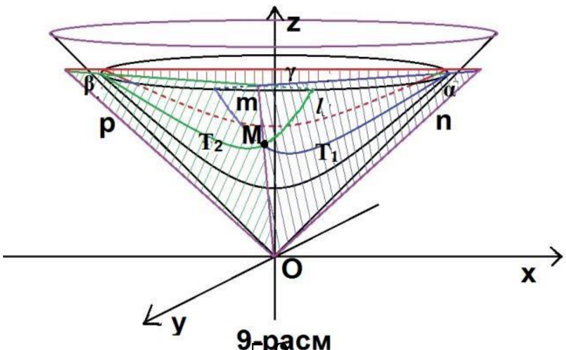


5.8-расм.

Endi giperboloid ustida kiritilgan “nuqta” va “to‘g‘ri chiziq” tushunchalari uchun Lobachevskiy aksiomasining bajarilishini ko‘rsatamiz.

Bizga yuqoridagi giperboloid va □, □, □ uchta assimptotik konus uchidan o‘tuvchi tekisliklar berilgan bo‘lsin. Bu uchta tekislik o‘zaro kesishishidan uchyoq hosil bo‘ladi. Tekisliklar kesishishidan hosil bo‘lgan □□□□*m*, □□□□ *n* va □□□□ *p* to‘g‘ri chiziqlar (Yevklid ma’nosida) uchyoqning qirraladi bo‘lsin. Har uchchala tekislik ham assimptotik konusning uchi orqali o‘tganligi uchun uchyoqning uchi ham assimptotik konusning uchida yotadi.

Bu uchyoqning *m* qirrasi giperboloid ichida, qolgan *n* va *p* qirralari assimptotik konusdan tashqarida yotsin. U holda, uchyoqning *m* qirrasi giperboloid ustida *M* nuqtani chizadi. *n* va *p* qirralari orqali o‘tuvchi □ tekislik giperboloid bilan kesishishi natijasida kesimida *l* to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. *m* va *n* qirralari orqali o‘tuvchi □ tekislik va *m* va *p* qirralari orqali o‘tuvchi □ tekisliklar giperboloid bilan kesishishi natijasida kesimida mos ravishda T_1 va T_2 to‘g‘ri chiziqlar hosil bo‘ladi. Bu ikki to‘g‘ri chiziq *M* nuqtada kesishadi va *l* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi (5.9-rasm).

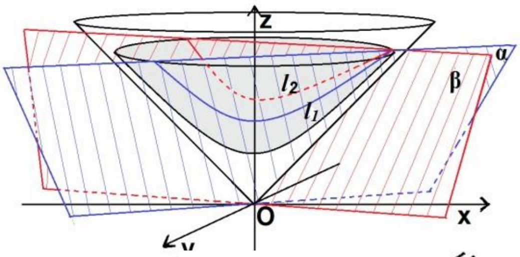


5.9-расм.

Demak, *M* nuqtadan o‘tuvchi va *l* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydigan ikkita T_1 va T_2 to‘g‘ri chiziqlar bor ekan. Bu tekislik uchun Lobachevskiy aksiomasi bajariladi.

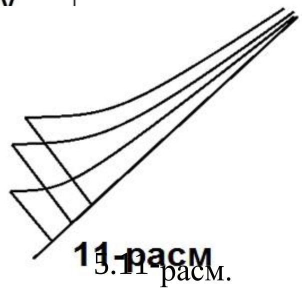
Endi giperboloid ustidagi parallel to‘g‘ri chiziqlarni ko‘rsatamiz.

Bizga yuqoridagi giperboloid hamda □ va □ assimptotik konus uchi orqali o‘tuvchi tekisliklar berilgan bo‘lsin. Bu tekisliklar kesishishidan hosil bo‘lgan *m* to‘g‘ri chiziq (Yevklid ma’nosida) giperboloidning assimptotik konusi yasovchisida yotsin. YA’ni, ikki tekislik assimptotik konusning yasovchisi bo‘ylab kesishsin. U holda, *m* to‘g‘ri chiziq (Yevklid ma’nosida) tekisliklar va giperboloid kesishishidan kesimida hosil bo‘lgan ikki l_1 va l_2 Lobachevskiy to‘g‘ri chiziqlari umumiy assimptotaga ega bo‘lgan giperbolalar shaklida bo‘ladi. Bu ikki to‘g‘ri chiziq kesishadigan ham kesishmaydigan ham to‘g‘ri chiziqlar sinfiga kirmaydi. Shuning uchun bu ikki to‘g‘ri chiziq parallel to‘g‘ri chiziqlar deb ataladi (5.10-rasm).



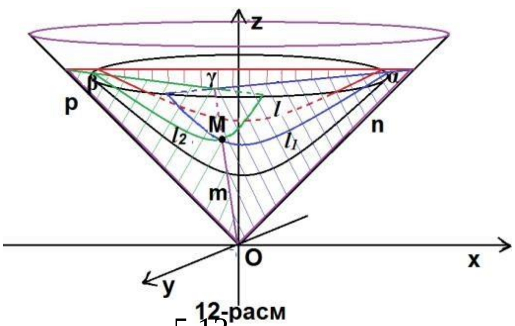
Assimptotik konusda biror yasovchini tanlab olaylik. Shu yasovchi orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamidan giperboloid bilan kesishuvchi qaraylik. Bu tekisliklarning har giperboloidni bir Lobachevskiy to‘g‘ri chizig‘i bo‘ylab kesadi. Bu to‘g‘ri chiziqlar Lobachevskiy tekisligining o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlarini tashkil etadi (5.11-rasm).

текисликларни бири



5.11-расм.

Bizga yuqoridagi uchta tekisliklar o‘zaro kesishishidan hosil bo‘lgan uchyoq berilgan bo‘lsin. Bu uchyoqning *m* qirrasi giperboloid ichida yotsin. U holda, bu *m* qirra giperboloid ustida *M* nuqtani yasaydi. Qolgan ikki *n* va *p* qirralari esa giperboloidning assimptotik konusining yasovchisida yotsin. U holda, *n* va *p* qirralari orqali o‘tuvchi □ tekislik giperboloid bilan kesishishidan kesimida *l* to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. Shuningdek, *m* va *n* qirralari orqali o‘tuvchi □ tekislik va *m* va *p* qirralari orqali o‘tuvchi □ tekisliklar giperboloid bilan kesishishi natijasida kesimda mos ravishda l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlar hosil bo‘ladi. Bu ikki to‘g‘ri chiziq *M* nuqtada o‘zaro kesishadi va *l* to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi (5.12-rasm).



5.12-расм.

Keltirilgan 5.12-rasm to‘g‘ri chiziqdan tashqarida yotgan *M* nuqtadan unga parallel ikki to‘g‘ri chiziq o‘tishini ko‘rsatadi. Bu esa Lobachevskiy aksiomasining bajarilishini, ya’ni, bu tekislikning giperboloid ustidagi talqinini ko‘rsatadi.

Sirt ichki va tashqi geometriyasi

Ushbu amaliy mashg‘ulot materialida sirtning ichki va tashqi geometriyasiga doir nazariy bilimlarni mustahkamlash uchun ba’zi bir masalalarning yechilishi va mustaqil yechish uchun masalalar berilgan.

Misol 1. Sferaning urinma tenglamasini tuzing.

Yechish. Sferaning sferik koordinatalardagi tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\vec{r} = R(\cos\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ \sin\theta).$$

Xususiy hosilalarini hisoblaymiz

$\vec{r}_\varphi = R(-\sin\varphi\cos\theta,\ \cos\varphi\cos\theta, 0);$

$\vec{r}_\theta = R(-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta).$

Сферанинг ихтиёрий M_0 нуқтасидаги нормал векторини аниқлаймиз:

$$\overrightarrow{N_0} = [\overrightarrow{r_\varphi}\,\overrightarrow{r_\theta}] = \vec{R}r_0 \Rightarrow \vec{N} = \overrightarrow{r_0}$$

– bunda sferaning normal vektori uning radius vektori bilan ustma-ust tushadi. Sferaning M_0 nuqtadagi urinma tekisligi $(\overrightarrow{N_0}, \vec{r} - \overrightarrow{r_0}) = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{r_0},\ \vec{r} - \overrightarrow{r_0}) = 0$ quyidagi tenglamaga тенгламаси $(\overrightarrow{r_0}^2 = R^2)$ ни эътиборга ega bo‘ladi:

Sfera olsak, urinma tekisligining tenglamasini hosil qilamiz:

$(\vec{r}, \overrightarrow{r_0}) = R^2.$

Misol 2. Konik sirtning birinchi kvadratik formasini toping

$$x = av\cos u;\ y = bv\sin u;\ z = v.$$

Yechish.

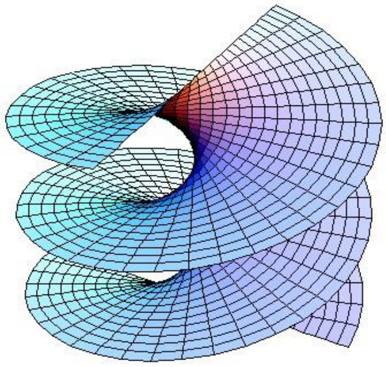
$$x_u = -av\sin u;\ y_u = bv\cos u;\ z_u = 0;\ x_v = a\cos u;$$
$$y_v = b\sin u;\ z_v = 1;$$

$$E = a^2v^2\sin^2 u + b^2v^2\cos^2 u;\ F = -a^2v\sin u\cos u + b^2v\sin u\cos u;$$
$$G = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1,$$

$$ds^2 = (a^2v^2\sin^2 u + b^2v^2\cos^2 u)du^2 + 2(-a^2v\sin u\cos u +$$
$$+b^2v\sin u\cos u)dudv + (a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1)dv^2.$$

Mustahkamlash uchun savol va masalalar 1. Gelikoidning birinchi kvadratik formasini tuzing (5.1-rasm)

$$\vec{r} = \vec{e}(\varphi)t + a\vec{\varphi}k.$$

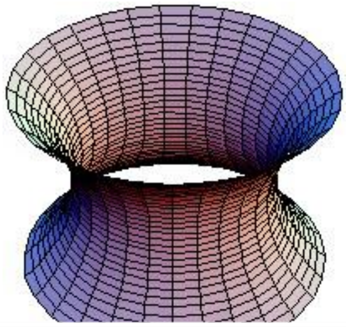


5.1-rasm

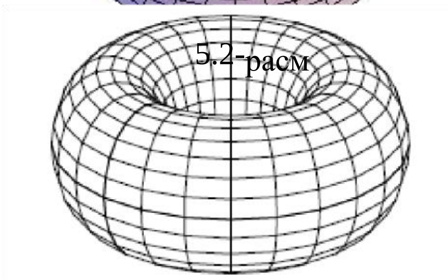
2. Katenoidning birinchi kvadratik formasini tuzing (5.2-rasm)

$$\vec{r} = a\vec{e}(\varphi)\operatorname{ch}\frac{t}{a} + kt.$$

3. Teoremani isbotlang: Yevklid tekisligining geodezik chiziqlari



5.2-расм



5.3-rasm

faqat va faqat to‘g‘ri chiziqlar bo‘ladi.

4. Teoremani isbotlang: Aylanma silindrning geodezik chiziqlari faqat va faqat vint chiziqlari bo‘ladi.

5. Parametrik tenglamalari bilan berilgan tor sirtining yuzasini hisoblang (5.3-rasm)

$$\vec{r} = \big((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v\big), 0 \le u, v \le 2\pi.$$

6. Gelikoidning ikkinchi kvadratik formasini, bosh egriliklarini, o‘rta va Gauss egriliklarini hisoblang

$$\vec{r} = (t\cos\varphi, t\sin\varphi, a\varphi).$$

7. Bir pallali aylanma giperboloidining Gauss egriligi manfiy ekanligini isbotlang.

8. Sfera o‘zgarmas musbat Gauss egriligi ega sirtga misol bo‘lishini isbotlang.

9. Psevdosferaning Gauss egriligi manfiy va o‘zgarmas ekanligini isbotlang.

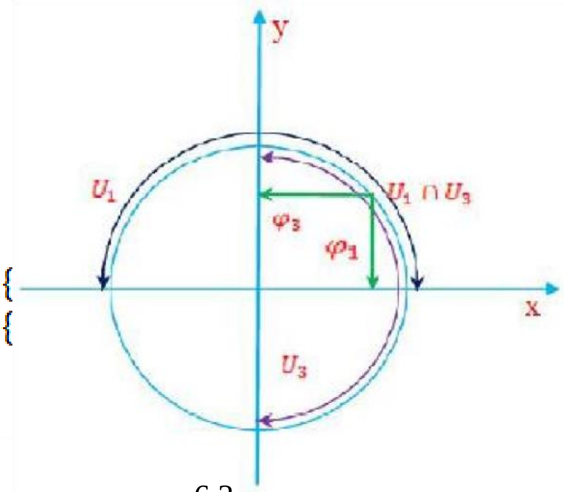
Кўпхилликлар геометрияси

Мисол 1. Бизга R^2 да $S^1 = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$ тўплам берилган бўлсин. S^1 ни ушбу

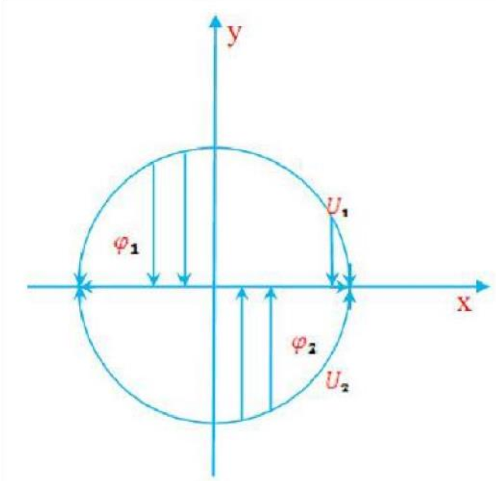
$U_1 = \{(x,y) \in S^1 : y > 0\}$, $U_2 = \{$

$U_3 = \{(x,y) \in S^1 : x > 0\}$, $U_4 = \{$

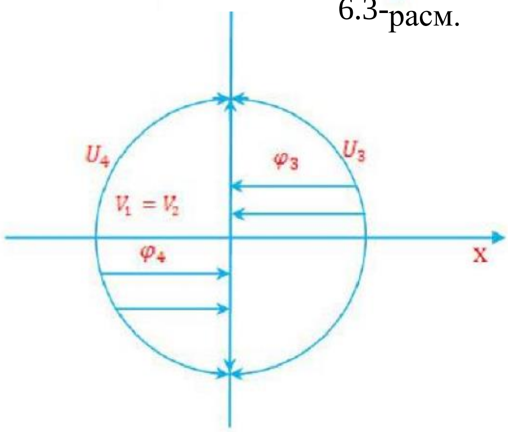
4 та харитадан иборат атлас билан коплаймиз (6.1, 6.2-расмлар).



6.3-расм.



6.1-расм.



6.2-расм.

Ko‘rinib turibdiki, haqiqiy R^1 to‘g‘ri chiziqda ularga mos keluvchi V_1, V_2, V_3, V_4 sohalar ustma-ust tushadi va $(-1,1)$ ochiq oraliqqa teng bo‘ladi. Endi φ_1 va φ_2 gomeomorfizmlarni aylananing absissalar o‘qiga proyeksiyalovchi akslantirish sifatida, ya’ni, $\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y) = x$ tenglik bilan aniqlaymiz, φ_3, φ_4 gomeomorfizmlarni esa aylanani ordinatalar o‘qiga proyeksiyalar sifatida aniqlaymiz $\varphi_3(x,y) = \varphi_4(x,y) = y$. Bu φ_k $(k = \overline{1,4})$ akslantirishlarni gomeomorfizm ekanligini ko‘rsatish uchun, ularning teskari akslantirishlarini oshkor ko‘rinishda tasvirlab, ularni uzluksiz ekanligini ko‘rsatish yetarli. Bizga ma’limki, φ_k $(k = \overline{1,4})$ larning aniqlanishiga ko‘ra bu akslantirishlar mos ravishda U_k $(k = \overline{1,4})$ to‘plamlarni $V_k = (-1;\ 1)(k = \overline{1,4})$ to‘plamlarga uzliksiz va bir qiymatli akslantiradi. Shuning uchun, quyidagicha φ_k^{-1} $(k = \overline{1,4})$ uzliksiz akslantirishlar mavjud

$$\begin{cases} \varphi_1^{-1}(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \in S^1; \\ \varphi_2^{-1}(x) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) \in S^1; \\ \varphi_3^{-1}(y) = \left(\sqrt{1-y^2}, y\right) \in S^1; \\ \varphi_4^{-1}(y) = \left(-\sqrt{1-y^2}, y\right) \in S^1 \end{cases}$$

Shunday qilib, bu aylanada har biri bitta koordinatalardan iborat

$$x_1 = \varphi_1(x,y) = x, \qquad x_2 = \varphi_2(x,y) = x,$$
$$x_3 = \varphi_3(x,y) = y, \qquad x_4 = \varphi_4(x,y) = y$$

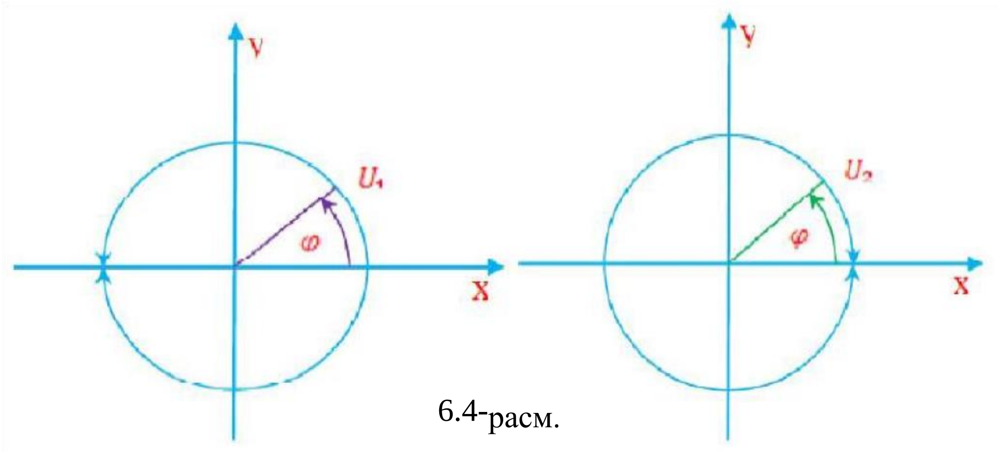
to‘rtta lokal koordinatalar sistemasi hosil bo‘ladi. Ba’zi nuqtalar birdaniga ikkita lokal koordinatalar sistemasi bilan ta’minlanadi.

Masalan, $U_1 \cap U_3$ kesishmadagi P nuqtalar uchun ikkita $x_1(P)$ va $x_2(P)$ koordinatalar aniqlangan (6.3-rasm). Aylanada xaritalar atlasini kiritishning boshqa usullari ham mavjud [8].

Bizga ma’lumki, (r,φ) qutb koordinatalar sistemasida aylana tenglamasi $r = 1$ tenglik bilan aniqlanadi. Shuni aytish mumkinki, tenglikdagi qutb koordinatalar, koordinatalar sistemasi bo‘la olmaydi.

Shuning uchun, S^1 aylanada quyidagicha ikkita
$U_1 = \{(x,y) \in S^1 : x \neq 1\}$ va $U_2 = \{(x,y) \in S^1 : x = 1\}$

xaritalarni kiritamiz (6.4-rasm).



6.4-расм.

Фараз қилайлик, $\varphi_1(P) = \varphi_1(x,P)$ ни $(-\pi,\pi)$ оралиқда ётувчи φ бурчак қийматига тенг $\varphi_2(P) = \varphi_2(x,P)$ ни $(0,2\pi)$ оралиқда ётувчи φ қийматига деб оламиз, яъни, $V_1 = (-\pi,\pi)$, $V_2 = (0,2\pi)$. Кўриниб турибдики, $\varphi_1 = \varphi_1(P)$

$\varphi_2 = \varphi_2(P)$

burchak

aylananing yuqori yarim qismidagi nuqtalari uchun va lokal koordinatalar ustma-ust tushadi, ammo aylananing quyi yarim qismidagi nuqtalari uchun ustma-ust tushmaydi, ya’ni,

$y > 0$ да $\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y)$,

$y < 0$ да $\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y) - 2\pi$,

bo‘ladi (rasmga qarang).

Misol 2. R^k $(k = 1,2)$ son fazosi ajraluvchan va sanoqli bazaga ega bo‘ladi. (U,φ) k-o‘lchovli kartani qarash mumkin, bu yerda $U = R^k$. φ R^k – fazoni aynan almashtirish bo‘lsin. U holda, R^k k-o‘lchovli ko‘pxillikdan iborat bo‘ladi.

Xuddi shunday, A^k affin fazo va E^k yevklid fazolar k-o‘lchovli ko‘pxilliklar bo‘lishiga ishonch hosil qilamiz. P_k proyektiv fazo ham k o‘lchovli ko‘pxillilik bo‘lishini isbotlash mumkin.

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

O‘tilgan mavzularni chuqur tahlil qilish va o‘zlashtirilgan bilimlarni mustahkamlash uchun tashkil etiladigan amaliy mashg‘ulotlar mavzu doirasida berilgan tushunchalarga misollar keltirish, ba’zi muhim natijalarni tinglovchilar bilan muhokama tarzida isbotlash, mavzu doirasidagi ilmiy yangiliklarni tinglovchilarga oson usulda yetkazishga mo‘ljallangan.

1-amaliy mashg‘ulot. Chiziqli va Affin fazo (4 soat).

Chiziqli fazo o‘lchami, chiziqli almashtirishlar. Vektor fazo. Affin fazo, bazis. Affin almashtirishlar. Affin koordinatalar sistemasi. Bichiziqli funksiY. Affin fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklar.

2-amaliy mashg‘ulot. Yevklid va Psevdoyevklid fazo (4 soat).

Uch o‘lchovli psevdoyevklid fazo. Vektor normasi, masofa. Izotroplik. Galiley geometriyasi. Sfera va uning turlari. Sfera ustidagi geometriyalar.
Lobachevskiy tekisligi. Keli-Kleyn talqini.

3-amaliy mashg‘ulot. Sirt ichki va tashqi geometriyasi (2 soat).

Birinchi kvadratik forma va u bilan bog‘liq kattaliklar. Gauss teoremasi. Sirtlarni egish. Ikkinchi kvadratik forma. Normal egrilik. To‘la va o‘rta egrilik. Bonne teoremasi.

4-amaliy mashg‘ulot. Ko‘pxilliklar geometriyasi (2 soat).

Ko‘pxillik va noyevklid geometriyalari orasidagi bog‘lanish. Riman geometriyasi. Chekli geometriya haqida tushuncha. Tekislikdagi geometriyalar.

V. KEYSLAR BANKI

“Keys-stadi” metodi

“Keys-stadi”— inglizcha so‘z bo‘lib, (“case” – aniq vaziyat, hodisa, “stadi” – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	**Faoliyat shakli va mazmuni**
1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich:Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

VI. GLOSSARIY

O`lchovlarning ko`paytmasi	To`g`ri to`rtburchakning yuzi uning bo`yi va eni uzunliklarining ko`paytmasi ekanligini yaxshi bilamiz. Shuningdek, to`g`ri to`rtburchakning eni ham bo`yi ham kesma va ularning uzunliklari esa chiziqli o`lchov ekanligi yaxshi ma'lum. Ikkita kesmaning ko`paytmasidan hosil qilingan shaklning yuzi shu kesmalar uzunliklarining ko`paytmasiga teng bo`lmoqda. Demak, bob avvalida aytilganidek o`lchov uzunlik, yuza va hajmning umumlashmasi bo`lsa, hozircha biz umumlashtirmagan jihat aynan to`plamlar to`g`ri ko`paytmasining o`lchovini har bir to`plamdagi o`lchov orqali ifodalanishidir.
Luzin teoremasi.	[a; b] kesmada berilgan f funksiya o`lchovli bo`lishi uchun har qanday $\varepsilon > 0$ son olinganda ham [a; b] kesmada uzluksiz bo`lgan shunday $\phi$ funksiya topilib, $\mu(\{x : f(x) \neq \phi(x)\}) < \varepsilon$ tengsizlikning o`rinli bo`lishi zarur va yetarli.
Gibbs o`lchovi	Statistik zikada keng qo`llanuvchi ehtimollik o`lchovlaridan biri bu Gibbs o`lchovidir. Atrofmuhit bilan issiqlik muvozanatida bo`lgan sistema uchun taqsimot qonunini birinchi bo`lib amerikalik olim J.Gibbs kiritdi. Bunday taqsimotlar Gibbs o`lchovlari nomini oldi va turli sistemalar uchun uning holatini tasvirlab berishga xizmat qiladigan Gibbs o`lchovlari nazariyasining yaratilishiga sabab bo`ldi. Bunda berilgan zik sistemaning energiyasi deb ataluvchi funksiya | Hamiltoninanga mos taqsimotni, ya'ni Gibbs o`lchovini aniqlash masalasi tushuniladi. Gibbs o`lchovlari nazariyasining asosiy masalalari berilgan sistema uchun haroratning o`zgarishi va uning taqsimoti orasidagi bog`liqlikni topishdan iborat.

Populyatsiya	Populyatsiya deb ko`payishga nisbatan yopiq bo`lgan organizmlarning jamlanmasiga aytiladi. Populyatsion genetikaning sodda masalalaridan biri bu m ta turdan iborat biologik sistemaning evolutsiya davrida qaysi xususiyatlari dominant, qaysilari esa yo`qolib ketishini bashorat qilishdan iborat.
Nisbiy chastota	Nisbiy chastota bu ratsional son. Ratsional sonlar ketmaketligining limiti odatdagi absolyut qiymatga nisbatan mavjud bo`lmasa, boshqa norma aniqlash
	kerakki, bu normada kuzatuv nati- jalariga ma'no berish mumkin bo`lsin.
Ergodiklik o`zgaruvchi	Ergodiklik o`zgaruvchi dinamik sistemaning shunday xossasiki, sistema evolyutsiyasi jarayonida sistemaning deyarli har bir nuqtasi ma'lum aniqlik bilan sistemaning boshqa ixtiyoriy nuqtasiga yaqin bo`ladi. Boshqacha aytganda sistema o`zining dastlabki holatini \unutib", tartibsiz harakat qiladi. Ergodiklik xossasiga ega dinamik sistemalarning afzalligi shundaki, kuzatuvning yetarli vaqti davomida bunday sistemalarni statistik usulda tavsiash mumkin.
sodda funksiya	X to`plamda _ o`lchov aniqlangan bo`lsin. Bu to`plamda berilgan f funksiya o`lchovli va ko`pi bilan sanoqlita qiymatga ega bo`lsa, sodda funksiya deyiladi
sanash o`lchovi	S to`plam uchun uning quvvatini mos qo`yuvchi $\mu(S)$ o`lchov. Bu o`lchov sanash o`lchovi deyiladi.

VII. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev SH.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev SH.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoyev SH.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoyev SH.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoyev SH.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitusiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.
7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.
8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.
10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.
11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini innovatsion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillarda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida talab yuqori bo‘lgan malakali kadrlar tayyorlash tizimini tubdan takomillashtirish va ilmiy salohiyatini rivojlantiri choratadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4358-sonli Qarori.

14. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish toʻgʻrisida”gi PF-5789sonliFarmoni.

15. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr “Oʻzbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida”gi PF-5847sonliFarmoni.

16. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidenti Shavkat Mirziyoyevning 2020 yil 25 yanvardagi Oliy Majlisga Murojaatnomasi.

17. Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabr “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish boʻyicha qoʻshimcha chora-tadbirlar toʻgʻrisida”gi 797-sonli Qarori.

18. Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 30sentabrdagi “2030 yilgacha boʻlgan davrda Oʻzbekiston Respublikasining Atrof muhitni muhofaza qilish konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida”gi PF-5863-sonli Farmoni.

19. Oʻzbekiston Respublikasining “Davlat kadastrlari toʻgʻrisida”gi qonuni. // Oʻzbekiston Respublikasi Oliy Majlis Axborotnomasi. – 2001. – № 1–2. – 18-modda.

20. Oʻzbekiston Respublikasining “Hayvonot dunyosini muhofaza qilish va undan foydalanish toʻgʻrisida”gi qonuni. // Oʻzbekiston Respublikasi Oliy Majlis Axborotnomasi. -1998. -№1. -14-modda.

21. Oʻzbekiston Respublikasining “Sugʻurta faoliyati toʻgʻrisida”gi qonuni. // Oʻzbekiston Respublikasi Oliy Majlis Axborotnomasi. - 2002. № 4-5. - 68-modda.

22. Oʻzbekiston Respublikasining “Ekologik nazorat toʻgʻrisida»gi qonuni// Oʻzbekiston Respublikasi qonun hujjatlari toʻplami, 2013 y., 52son, 688-modda.

SH. Maxsus adabiyotlar

23. By Roland W. Scholz. Environmental Literacy in Science and Society: From Knowledge to Decisions. Cambridge University. Press: New York, USA, 2011; Hardback, 631 pp; ISBN 978-0-521-19271-2; Paperback, ISBN 978-0-52118333-8.

24. Calado, F.M.; Scharfenberg, F.-J.; Bogner, F.X. To What Extent do Biology Textbooks Contribute to Scientific Literacy? Criteria for Analysing Science-Technology-Society-Environment Issues. Educ. Sci. Press: New York, USA, 2015.

25. Dafius M. Dziuda/ Data mining for genomics and proteomics. Canada, 2010. ps-306.

26. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.

27. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010, 204.

28. H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

29. H.Q. Mitchell, MarileniMalkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

30. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

31. Martin Kranert, Klaus Cord-Landwehr (Hrsg.) Einführung in die Abfallwirtschaft. 4., vollständig aktualisierte und erweiterte Auflage Mit 297 Abbildungen und 131 Tabellen. Germany, 2010.

32. Rediscovering Biology Online Textbook. Unit 2 Proteins and Proteomics. 1997-2006.

33. Sattorov Z.M. EcologiY. – T.: Sano-standart, 2018. – 362 b.

34. Sattorov Z.M. Qurilishecologiyasi. – T.: Sano-standart, 2017. – 364 b.

35. Stevanovic, M. Digital media in education system-review of international practice. Models of creative teaching. R&S, Tuzla. Available from http://infoz.ffzg.hrINFuture. New York, USA, 2011.

36. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.

37. Systems Thinking: Managing Chaos and Complexity, Jamshid Gharajedaghi, Butterworth Heinemann, Oxford, 1999.

38. Twyman RM (2004). Principles of Proteomics (Advanced Text Series). Oxford, UK: BIOS Scientific Publishers. ISBN 1-85996-273-4.

39. W. Dubitzky, M. Granzow, D/ Berrar/Fundamentals of data mining in genomics and proteomics. New York, USA, 2007, ph -275.

40. Yormatova D. Sanoat ekologiyasi. – T.: 2007. – 256 b.

41. A.E.Ergashev. Hozirgi zamonning ekologik muammolari va tabiat muhofazasi. Toshkent 2012 y. 403 b.

42. Belogurov A.Y. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obshestva: MonografiY. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0. 43. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An’anaviy va noan’anaviy ta’lim. – Samarqand: “Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi” nashriyoti, 2019. 312 b.

44. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. metodik qo‘llanma/ tuzuvchi. A.YE.Ibraymov. – Toshkent: “Lesson press”, 2020. 112 bet.

45. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.

46. Muslimov N.Ava boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.

47. Obrazovaniye v sifrovuyu epoxu: monografiya / N. Y. Ignatova; Mvo obrazovaniya i nauki RF; FGAOU VO «UrFU im. pervogo Prezidenta Rossii B.N.Yelsina», Nijnetagil. texnol. in-t (fil.). – Nijniy Tagil:
NTI (filial) UrFU, 2017. – 128 s.

48. Oliyta’limtiziminiraqamliavlodgamoslashtirishkonsepsiyasi. Yevropa IttifoqiErasmus+ dasturiningko‘magida. https://hiedtec.ecs.uniruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

49. Pachauri R.K., Meyer L.A. Iqlim o‘zgarishi, 2014 yil. Iqlim o‘zgarishi bo‘yicha Hukumatlararo ekspertlar guruhining umumlashtirilgan ma’ruzasi. Jeneva, Shveysariya, 2015 yil, 163 b.

50. Smolyar, I. M. Ekologicheskiye osnovi arxitekturnogo proyektirovaniya: uchebnoye posobiye / I. M. Smolyar, YE. M. Mikulina, N. G. Blagovidova. – Moskva : Akademiya, 2010. – 157 s.

51. Sovremenniye obrazovatelniye texnologii: pedagogika i psixologiya: monografiY. Kniga 16 / O.K. Asekretov, B.A. Borisov, N.Y. Bugakova i dr. – Novosibirsk: Izdatelstvo SRNS, 2015. – 318 s.

52. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish.–T.: “TKTI” nashriyoti, 2019.

53. Shadimetov Y. SH. EkologiY. Uchebnik dlya vuzov. 2016 y. 416 s.

54. Shodimetov Y.SH. Ijtimoiy ekologiY. Darslik. Oliy o‘quv yurtlari uchun. (To‘ldirilgan va qayta ishlangan.) 2016 y. 556 b.

55. Egamberdiyev R., Raximova T., Allaberdiyev R. EkologiY. Toshkent. Universitet nashriyoti. 2019 y. 254 b.

IV. Internet saytlar

56. http://edu.uz – O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi

57. http://lex.uz – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi

58. http://bimm.uz – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi

59. http://ziyonet.uz – Ta’lim portali ZiyonET

60. http://natlib.uz–Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi

61. www.uznature.uz

62. www.uzgeolcom.uz

63. www.ygk.uz

64. www.ecovestnik.ru

O'zbekiston milliy universiteti huzuridagi pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish tarmoq (mintaqaviy) markazi "MATEMATIKA" yo'nalishidagi mutaxassislik fanlaridan tayyorlangan "ZAMONAVIY GEOMETRIYA" moduli bo'yicha qayta tayyorlash va malaka oshirish masofaviy kurslari uchun tayyorlangan materiallar talablarga javob berishi bo'yicha

EKSPERT XULOSASI

"MATEMATIKA" yo'nalishi qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi mutaxassilik fanlaridan fanlaridan tayyorlangan **"ZAMONAVIY GEOMETRIYA"** moduli bo'yicha test savollari, o'quv-uslubiy majmua, bitiruv ishi mavzulari hamda masofaviy materiallar mazkur modul bo'yicha tasdiqlangan namunaviy **dastur doirasida tayyorlangan va unga qo'yilgan talablarga javob beradi** hamda BIMM internet portaliga qo'yishga tavsiya etiladi.

Tarmoq (mintaqaviy) markazi direktori **O'.Tilavov**

Bo'lim boshlig'i **O'.Muxamadiyev**

"Geometriya va tapologiya" kafedrasi mudiri **R.Beshimov**

Tuzuvchi: **A.Artikbayev**