

**БОШ ИЛМИЙ-МЕТОДИК МАРКАЗ**

**САМДУ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ  
КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА  
УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ  
МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ**



**МАТЕМАТИКАНИНГ СОҲАЛАРГА  
ТАДБИҚЛАРИ МОДУЛИДАН ЎҚУВ-  
УСЛУБИЙ МАЖМУА**

Самарқанд - 2021

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМИ  
ВАЗИРЛИГИ**

**ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАХБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА  
ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ  
ИЛМИЙ-МЕТОДИК МАРКАЗИ**

**САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ  
КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ  
МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ**

**“МАТЕМАТИКАНИНГ СОҲАЛАРГА  
ТАДБИҚЛАРИ”**

**МОДУЛИ БЎЙИЧА**

**ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА**

**Қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси йўналиши: Математика**

**Самарқанд -2021**

**Модулнинг ўқув-услубий мажмуаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил “7”-декабрдаги 648-сонли баённомаси билан маъқулланган ўқув дастури ва ўқув режасига мувофиқ ишлаб чиқилган.**

**Тузувчилар:**

Самарқанд давлат университети Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика кафедраси профессори Ж.Абдуллаев

**Такризчилар:**

Самарқанд давлат университети Математик физика ва функционал анализ кафедраси мудири, академик С.Лақаев

Ўқув-услубий мажмуа Самарқанд давлат университети илмий-методик кенгаши (2020 йил “28”-декабрдаги 4- сонли баённомаси).

## МУНДАРИЖА

I.	МОДУЛНИНГ ИШЧИ ДАСТУРИ.....	5
II.	ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ.....	10
III.	НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР.....	16
IV.	АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ.....	40
V.	ГЛОССАРИЙ.....	68
VI.	АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ .....	71

# I. МОДУЛНИНГ ИШЧИ ДАСТУРИ

## Кириш

Олий таълим муассасалари педагог кадрларининг малакасини ошириш ва уларни қайта тайёрлаш бугунги куннинг энг долзарб масалаларидан бири бўлиб келмоқда. Мамлакатимиз таълим тизимида босқичма-босқич амалга оширилаётган ислохотлар бу масалага янада масъулият билан ёндошишни талаб қилмоқда.

Мазкур дастур замонавий талаблар ва ривожланган хорижий давлатларнинг олий таълим соҳасида эришган ютуқлар ҳамда орттирилган тажрибалар асосида «Математика» қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналиши учун тайёрланган намунавий ўқув режа ҳамда дастур мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришда хизмат қилади.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир. «Математика фанларини ўқитишнинг замонавий усуллари» модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

Масалаларни ечишда математик усулларни амалиётда қўллаш ҳозирги пайтда кенг тарқалган компьютерли математик тизимлар (MathCad, Maple, MatLab, Matematica, Derive) нинг функционал имкониятларига таянади. Кўп функционалли математик дастурий таъминотлардан фойдаланиш математик таълимотнинг амалий аспектларини жорий этишни кучайтириб қолмасдан, балки мутахассисларнинг касбий тайёргарлигини кўтаради. Мутахассиснинг математик компетентлик нуқтаи-назаридан математик масалаларни ечишда турли усулларни қўллаш (аниқ ва тақрибий ечиш усуллари, натижаларни символли (аналитик), сонли ҳамда график кўринишда олиш) ва ечимни турли шаклда олиш ҳар хил турдаги инструментларнинг уникал вариатив имкониятларини тушинишга имконият беради. Буларнинг барчаси, яъни касбий таълим мақсади учун масала моҳиятини тушуниш услубий муаммо долзарблигини оширади.

## Модулнинг мақсади ва вазифалари

Олий таълим муассасалари педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш Модулининг **мақсади** педагог кадрларни инновацион ёндошувлар асосида ўқув-тарбиявий жараёнларни юксак илмий-методик даражада лойиҳалаштириш, соҳадаги илғор тажрибалар, замонавий билим ва малакаларни ўзлаштириш ва амалиётга жорий этишлари учун зарур бўладиган касбий билим, кўникма ва малакаларини такомиллаштириш, шунингдек уларнинг ижодий фаоллигини ривожлантиришдан иборат.

Модулнинг **вазифаларига** қуйидагилар киради:

- “Математика” йўналишида педагог кадрларнинг касбий билим, кўникма, малакаларини такомиллаштириш ва ривожлантириш;

- педагогларнинг ижодий-инновацион фаоллик даражасини ошириш;

- мутахассислик фанларини ўқитиш жараёнига замонавий ахборот-коммуникация технологиялари ва хорижий тилларни самарали татбиқ этилишини таъминлаш;

- мутахассислик фанлари соҳасидаги ўқитишнинг инновацион технологиялари ва илғор хорижий тажрибаларини ўзлаштириш;

“Математика” йўналишида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларини фан ва ишлаб чиқаришдаги инновациялар билан ўзаро интеграциясини таъминлаш.

### **Модул якунида тингловчиларнинг билим, кўникма ва малакалари ҳамда компетенцияларига қўйиладиган талаблар:**

“Кредит модул тизими ва ўқув жараёнини ташкил этиш”, “Илмий ва инновацион фаолиятни ривожлантириш”, “Педагогнинг касбий профессионаллигини ошириш”, “Таълим жараёнига рақамли технологияларни жорий этиш”, “Махсус мақсадларга йўналтирилган инглиз тили” модуллари бўйича тингловчиларнинг билим, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар тегишли таълим соҳаси бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш мазмуни, сифати ва уларнинг тайёргарлиги ҳамда компетентлигига қўйиладиган умумий малака талаблари билан белгиланади.

Мутахассислик фанлари бўйича тингловчилар қуйидаги янги билим, кўникма, малака ҳамда компетенцияларга эга бўлишлари талаб этилади:

#### **Тингловчи:**

- интеграл ва ўлчов тушунчаларини;

- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланишни;

- математик масалаларни математик тизимларда ечишни ва стандарт функциялардан фойдаланишни;

- математикани ўқитишда унинг татбиқлари билан тушунтиришни, ҳаётий ва соҳага оид мисолларни;

- математик фанларни ўқитишнинг замонавий усулларини *билиши* керак.

#### **Тингловчи:**

- ўлчовлар назариясидан математика, физика ва биология масалаларида кенг фойдаланиш;

- математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, иқтисодий соҳалар ва бошқа соҳаларда кенг қўллаш;

- математик фанларни ўқитишда инновацион таълим методлари ва воситаларини амалиётда қўллаш;

- талабанинг ўзлаштириш даражасини назорат қилиш ва баҳолашнинг назарий асослари ҳамда инновацион ёндашув услубларини тўғри қўллаш олиш *кўникмаларига* эга бўлиши лозим.

#### **Тингловчи:**

- ўлчовлар назарияси ва унинг татбиқини турли фазоларда қўллаш олиш;

- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланиш;

- математикани ўқитиш инновацион жараёнини лойиҳалаштириш ва ташкиллаштиришнинг замонавий усуллари қўллаш *малакаларига* эга бўлиши лозим.

**Тингловчи:**

- математикани ўқитишда фойдаланиладиган замонавий (matlab, mathcad, maple, GeoGebra ва бошқалар) математик пакетларини ўқув жараёнига татбиқ этиш;

- математиканинг хориж ва республика миқёсидаги долзарб муаммолари, ечимлари, тенденциялари асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;

- математикани турли соҳаларга татбиқ этиш;

- олий таълим тизимида математик фанлар мазмунининг узвийлиги ва узлуксизлигини таҳлил қила олиш *компетенцияларига* эга бўлиши лозим.

**Модулнинг олий таълимдаги ўрни**

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар илғор хорижий мамлакатларда биология ўқитишни ташкил қилишнинг хорижий тажрибаларни ўрганиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар. Сўнгги йилларда Миллий ғоя, маънавият асослари, диншунослик соҳасидаги ютуқлар ва истиқболлар олий ўқув юртларидаги таълим жараёнининг мазмунини бойитишга хизмат қилади.

**“Математиканинг соҳаларга тадбиқлари” модулининг соатлар бўйича тақсимоти**

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат				
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси			Қўчма машғулот
			Жами	жумладан		
				Назарий	Амалий машғулот	
1.	Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.	4	4	2	2	
2.	Матрицалар ва уларнинг татбиқлари. Векторлар ва уларнинг татбиқлари.	4	4	2	2	
3.	Ҳосила ва унинг татбиқлари. Интеграл ва унинг татбиқлари.	4	4	2	2	
4.	Қаторлар ва уларнинг татбиқлари. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.	4	4	2	2	
5.	Математика ва саънат.	2	2		2	
6.	Математика ва муҳандислик.	2	2		2	
<b>Жами:</b>		<b>20</b>	<b>20</b>	<b>8</b>	<b>12</b>	<b>0</b>

**НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ**

**1-Мавзу: Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.**

Тенгламаларнинг иқтисодийнинг турли тармоқларига тадбиқларининг ўзига хос хусусиятлари ва унинг муаммолари.

**2-Мавзу: Матрицалар ва уларнинг татбиқлари. Векторлар ва уларнинг татбиқлари.**

Матрицаларнинг табиий фанларга тадбиқлари. Кўп омилилик. Векторларнинг траекторияли силжишларга тадбиғи.

**3-Мавзу: Ҳосила ва унинг татбиқлари. Интеграл ва унинг татбиқлари.**

Табиий ва иқтисодий моделларни яратиш, уларни прогнозлашда интегралнинг тадбиғи. Ишлаб чиқариш билан боғлиқ жараёнларни моделлаштириш.

**4-Мавзу: Қаторлар ва уларнинг татбиқлари. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.**

Фан тармоқлари, ижтимоий иқтисодий масалаларни ҳал этишда қаторларни аҳамияти. Биологик, физик, кимёвий жараёнларни тадқиқ этишда дифференциал тенгламалар.



## АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

**1-Амалий машғулот.** Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.

**2-Амалий машғулот.** Матрицалар ва уларнинг татбиқлари. Векторлар ва уларнинг татбиқлари.

**3-Амалий машғулот.** Ҳосила ва унинг татбиқлари. Интеграл ва унинг татбиқлари.

**4-Амалий машғулот.** Қаторлар ва уларнинг татбиқлари. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.

**5-Амалий машғулот.** Математика ва саънат.

**6-Амалий машғулот.** Математика ва муҳандислик.

## II. ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

### “SWOT-таҳлил” методидан фойдаланиш

**Методнинг мақсади:** мавжуд назарий билимлар ва амалий тажрибаларни таҳлил қилиш, таққослаш орқали муаммони ҳал этиш йўлларни топишга, билимларни мустаҳкамлаш, такрорлаш, баҳолашга, мустақил, танқидий фикрлашни, ностандарт тафаккурни шакллантиришга хизмат қилади.

<b>S – (strength)</b>	• кучли томонлари
<b>W – (weakness)</b>	• заиф, кучсиз томонлари
<b>O – (opportunity)</b>	• имкониятлари
<b>T – (threat)</b>	• тўсиқлар

**Намуна:** Анаънавий ва замонавий таълим шакллари “SWOT-таҳлил” методидан таҳлил қилинг.

Оддий маърузада маърузачи талабалар, тингловчиларга кўп маълумот бера олади	Муаммоли маърузада камроқ маълумот берилди, бироқ улар талабалар онгига сингдириб берилди
Ўқитувчи асосан ўзи ва аълочи, қизиқувчи талабалар билан гаплашади, яъни дарсда оз сонли талабалар қамраб олинади	Муаммоли маърузада кўп сонли талабалар, тингловчилар қамраб олинади
Оддий маърузада фақат ўқитувчи режа асосида ва тайёрлаб келган маълумотлари атрофида гаплашилади	Муаммоли маърузада муҳокама жараёнида янги-янги масалалар, муаммолар юзага чиқиши, ғоялар туҳилиши мумкин.
Ўқитувчи учун асосий тўсиқ – дастурдан чиқиб кета олмаслик, талаба учун қизиқмаса ҳам ўқитувчини эшитиб ўтириш мажбурияти	Кенг муҳокама учун вақтнинг чегараланганлиги, талабаларни мавзудан четга буришга интилишлари

## Резюме, Веер методидан фойдаланиш

**Методнинг мақсади:** Бу метод мураккаб, кўптармоқли, мумкин қадар, муаммоли характеридаги мавзуларни ўрганишга қаратилган. Методнинг моҳияти шундан иборатки, бунда мавзунинг турли тармоқлари бўйича бир хил ахборот берилади ва айтилган пайтда, уларнинг ҳар бири алоҳида аспектларда муҳокама этилади. Масалан, муаммо ижобий ва салбий томонлари, афзаллик, фазилат ва камчиликлари, фойда ва зарарлари бўйича ўрганилади. Бу интерфаол метод танқидий, таҳлилий, аниқ мантиқий фикрлашга ҳамда ўқувчиларнинг мустақил ғоялари, фикрларини ёзма ва оғзаки шаклда тизимли баён этиш, ҳимоя қилишга имконият яратади. “Хулосалаш” методидан маъруза машғулотларида индивидуал ва жуфтликлардаги иш шаклида, амалий ва семинар машғулотларида кичик гуруҳлардаги иш шаклида фойдаланиш мумкин.

### Методни амалга ошириш тартиби:



тренер-ўқитувчи иштирокчиларни 5-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратади;



тренинг мақсади, шартлари ва тартиби билан иштирокчиларни таништиргач, ҳар бир гуруҳга умумий муаммони таҳлил қилиниши зарур бўлган қисмлари туширилган тарқатма



ҳар бир гуруҳ ўзига берилган муаммони атрафлича таҳлил қилиб, ўз мулоҳазаларини тавсия этилаётган схема бўйича тарқатмага ёзма баён қилади;



навбатдаги босқичда барча гуруҳлар ўз тақдимотларини ўтказдилар. Шундан сўнг, тренер томонидан таҳлиллار умумлаштирилади, зарурий ахборотлар билан тўлдирилади ва

**Намуна:**

Математикадан малака талаблари					
Собиқ стандартлар		Амалдаги стандартлар		Такимллаштирилган стандартлар	
афзаллиги	камчилиги	афзаллиги	камчилиги	афзаллиги	камчилиги
<b>Хулоса:</b>					

## “ФСМУ” методидан фойдаланиш

**Технологиянинг мақсади:** Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустақамлашда, ўтилган мавзунини сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

### Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:



ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

### Намуна.

**Фикр:** “Математикадан малака талабларини халқаро андозалар асосида такомиллаштириш ва сертификатлаштириш таълим самарадорлигининг энг муҳим омилларидан биридир”.

**Топшириқ:** Мазкур фикрга нисбатан муносабатингизни ФСМУ орқали таҳлил қилинг.

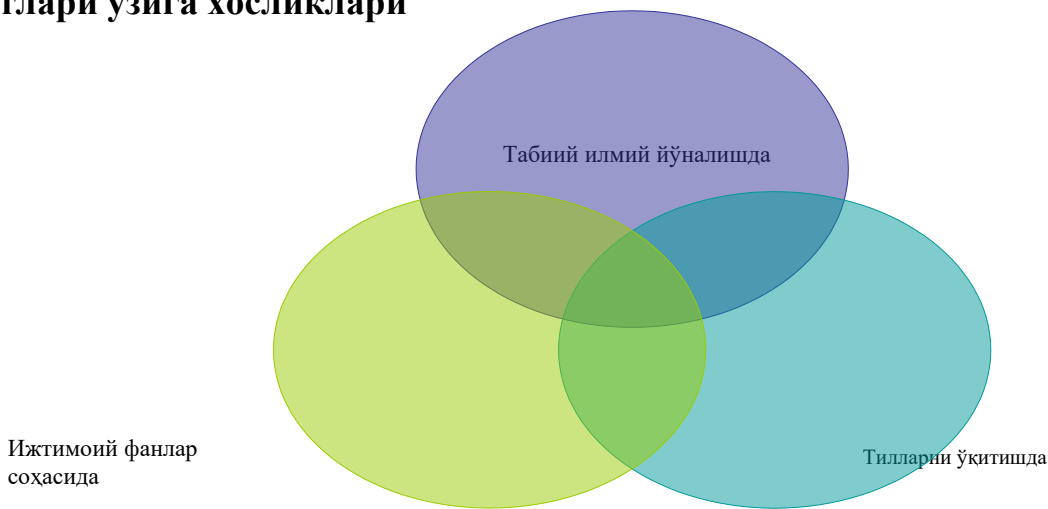
## Венн Диаграммаси методидан фойдаланиш

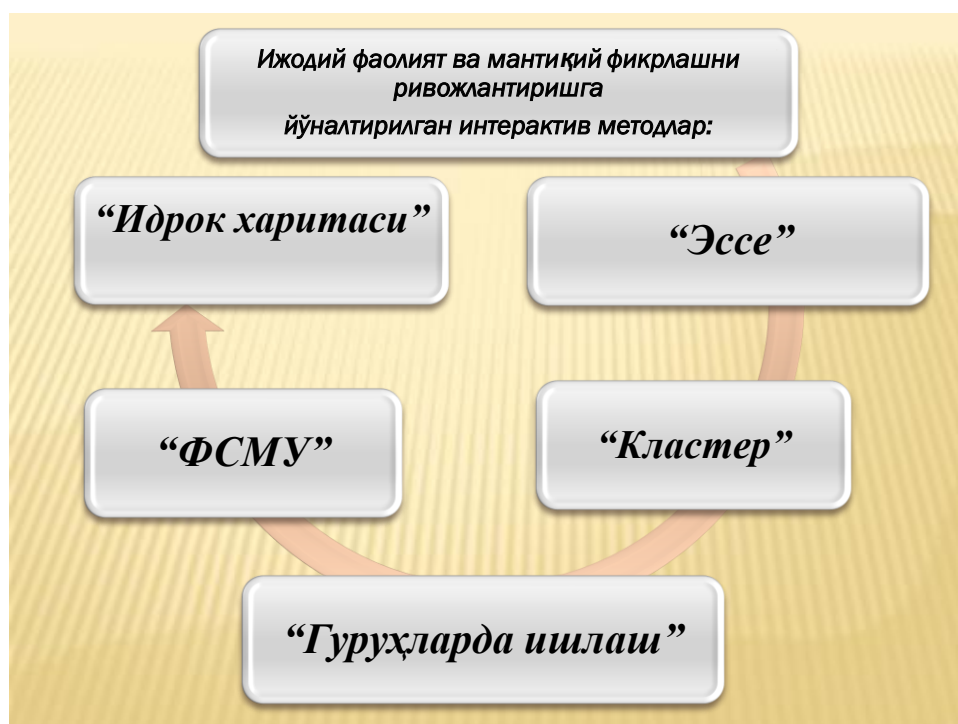
**Методнинг мақсади:** Бу метод график тасвир орқали ўқитишни ташкил этиш шакли бўлиб, у иккита ўзаро кесишган айлана тасвири орқали ифодаланади. Мазкур метод турли тушунчалар, асослар, тасавурларнинг анализ ва синтезини икки аспект орқали кўриб чиқиш, уларнинг умумий ва фарқловчи жиҳатларини аниқлаш, таққослаш имконини беради.

### Методни амалга ошириш тартиби:

- иштирокчилар икки кишидан иборат жуфтликларга бирлаштириладилар ва уларга кўриб чиқиладиган тушунча ёки асоснинг ўзига хос, фарқли жиҳатларини (ёки акси) доиралар ичига ёзиб чиқиш таклиф этилади;
- навбатдаги босқичда иштирокчилар тўрт кишидан иборат кичик гуруҳларга бирлаштирилади ва ҳар бир жуфтлик ўз таҳлили билан гуруҳ аъзоларини таништириладилар;
- жуфтликларнинг таҳлили эшитилгач, улар биргалашиб, кўриб чиқиладиган муаммо ёхуд тушунчаларнинг умумий жиҳатларини (ёки фарқли) излаб топадилар, умумлаштириладилар ва доирачаларнинг кесишган қисмига ёзадилар.

**Намуна: Математикани турли йўналишларда ўқитишнинг фарқли жиҳатлари ўзига хосликлари**





Ўқув жараёнида муаммолар ва муаммоли вазиятларни ечишга йўналтирилган интерфаол методлар

*“SWOT-универсал таҳлил”*

*“Дебат”,*

*Муаммоли вазият яратиш*

*“Резюме”,*

*“Т-чизмаси”,*

*“Венн диаграммаси”,*

*“Органайзер”,*

Ҳар хил чизмалар, жадваллар ёрдамида амалга ошириладиган интерфаол методлар:

### III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР

#### 1-MAVZU: TENGLAMALAR SISTEMASI VA ULARNING TATBIQLARI.

1. Tenglamalar sistemasining iqtisodiyotning turli tarmoqlariga tadbiqlarining o'ziga xos xususiyatlari.
2. Tenglamalar sistemasining iqtisodiyotning turli tarmoqlaridagi muammolari.

**Tayanch iboralar:** Iqtisodiy prognoz, xarajat matritsasi, matritsani transponirlash, chiziqli model, chiziqlilik gipotezasi, balansli (defitsitsiz) savdo

#### Tenglamalar sistemasining iqtisodiyotning turli tarmoqlariga tadbiqlarining o'ziga xos xususiyatlari.

**Ishlab chiqarish prognozi.**  $C = (c_{ij}); i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  - n turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun m turdagi xom ashyo xarajatlari matritsasi bo'lsin. Quyidagi vektorni tashkil etadigan har bir turdagi xom ashyoning ma'lum miqdordagi zaxiralari:

$$\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$$

Ishlab chiqarish rejasi bo'yich olingan  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektorga ko'paytmasi n noma'lum bo'lgan m tenglamalar sistemasini yechish bilan aniqlanadi:

$$C\bar{x}^T = \bar{q}^T,$$

bu yerda "T" vektorining satr va ustun transponirlanishini bildiradi.

**1-misol.** Korxonada uch turdagi xom ashyodan uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Kerakli ishlab chiqarish xarakteristikalarini quyidagi ma'lumotlar bilan ifodalangan:

Xom ashyoning turi	Mahsulotlarning barcha turlari uchun xom ashyo iste'moli G' vazn birligida			Xom ashyo zaxirasi G' vazn birligida
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Xom ashyoning ma'lum bir zaxirasi uchun har bir turdagi mahsulotning ishlab chiqarish hajmini aniqlash talab qilinsin.

Ushbu turdagi masalalar korxonalarini faoliyatini prognozlash va baholashda, foydali qazilma konlarini o'zlashtirish loyihalarini ekspert baholashda, shuningdek mikroiqtisodiyotini rejalashtirishda xarakterlidir.

$x_1, x_2$  va  $x_3$  orqali noma'lum ishlab chiqarish hajmlarini belgilaylik. Har bir turdagi xom ashyo zaxiralarini to'liq iste'mol qilish sharoitida uch noma'lumli uchta tenglama



sistemasini tashkil etuvchi balans tenglamasini tuzish mumkin:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar sistemasini biror usul bilan yechsak, bizga ma'lum bo'lgan xom ashyo zaxiralari uchun har bir turdagi ishlab chiqarish hajmi mos ravishda (birliklar bo'yicha) kelib chiqadi:

$$x_1 = 150, \quad x_2 = 250, \quad x_3 = 100.$$

### **Tenglamalar sistemasining iqtisodiyotning turli tarmoqlaridagi muammolari.**

**Ko'p tarmoqli iqtisodiyotning chiziqli modeli.** Faraz qilaylik iqtisodiyotning ishlab chiqarish sohasi har biri o'ziga xos bir xil mahsulot ishlab chiqaradigan  $n$  ta tarmoqdan iborat bo'lsin. Ishlab chiqarishni ta'minlash uchun har bir soha boshqa tarmoqlarning mahsulotlariga muhtoj (ishlab chiqarish iste'moli). Odatda ishlab chiqarish jarayoni ma'lum vaqt davomida (ba'zi hollarda bu birlik yil) ko'rib chiqiladi yani,

$x_i$  -  $i$ -sanoatning umumiy mahsuloti;

$x_{ij}$  -  $j$ -chi sanoat tomonidan  $x_i$  hajm mahsulot ishlab chiqarishda iste'mol qiladigan  $i$ -chi sanoat mahsuloti;

$y_i$  - ishlab chiqarish sohasida sotish uchun mo'ljallangan  $i$ -chi sanoat mahsulotlarining hajmi yoki yakuniy iste'mol mahsuloti deb ataladi. Turli tarmoqlar o'rtasidagi aloqaning muvozanat printsipi shundan iboratki,  $i$ -chi sanoatning yalpi mahsuloti ishlab chiqarish va noishlab chiqarish sohalaridagi iste'mol yig'indisiga teng bo'lishi kerak. Chiziqli gipoteza yoki oddiy qo'shilish balans koeffitsientlari quyidagi shaklda tasvirlanadi:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ushbu tenglamalar balans nisbati deb ataladi. Turli sanoat tarmoqlari mahsulotlarining o'lchamlari har xil bo'lgani uchun, bundan keyin biz qiymat balansini yodda tutamiz.

Leontiev ikkinchi jahon urushidan avval AQSh iqtisodiyotini tahlil qilish asosida muhim bir fakt aniqladi: uzoq vaqt davomida  $a_{ij} = x_{ij} / x_j$  qiymatlar juda oz farq qiladi va ularni o'zgarmas sonlar deb hisoblash mumkin. Ushbu hodisa ishlab chiqarish texnologiyasi ancha uzoq vaqt davomida bir xil darajada qolishi va shu sababli  $x_i$  hajmidagi mahsulotlarni ishlab chiqarishda  $i$ -chi sanoat mahsulotlarini  $j$ -chi sanoat tomonidan iste'mol qilish hajmi texnologik konstantadir.

Ushbu fakt asosida quyidagi taxminni kiritish mumkin:  $j$ -chi sanoat mahsulotlarini ishlab chiqarish uchun  $x_j$  hajmdagi  $i$ -chi sanoat mahsulotlaridan foydalanish kerak. Demak

$a_{ij}x_{iye}$ , bu yerda  $a_{ij}$  – o'zgarmas son. Ushbu taxmin bilan ishlab chiqarish texnologiyasi chiziqli deb qabul qilinadi va aynan shu taxmin chiziqlilik gipotezasi deb ataladi. Bundan tashqari,  $a_{ij}$  o'zgarmas son to'g'ridan-to'g'ri xarajatlar koeffitsientlari deyiladi. Chiziqli gipotezasiga ko'ra, bizga

$$x_{ij} = a_{ij} / x_j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

malum. Balans nisbatlarini tenglamalar sistemasi sifatida qayta yozish mumkin

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \dots \\ a_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases}$$

Ishlab chiqariladigan mahsulotlari (yalpi mahsulot vektori), yakuniy iste'mol mahsulotlari (yakuniy iste'mol vektori) va to'g'ridan-to'g'ri xarajatlar koeffitsientlari matritsasini hisobga olsak:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Quyidagi tenglama hosil bo'ladi

$$\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$$

Odatda bu munosabat chiziqli kirish-chiqish balansi tenglamasi deb ataladi. Matritsani tasvirlash bilan birgalikda ushbu tenglama Leontief modeli ham deb ataladi.

Kirish-chiqarish balansi tenglamasi ikki maqsadda ishlatilishi mumkin. Birinchi (eng sodda) holatda,  $\vec{x}$  yalpi mahsulotning vektori ma'lum bo'lganda,  $\vec{y}$  yakuniy iste'mol vektorini hisoblash talab qilinadi. Ikkinchi holda, kirish-chiqarish balansi tenglamasi rejalashtirish maqsadlari uchun quyidagi masalani shakllantirish bilan foydalaniladi:  $T$  vaqt davrida (masalan, birlik yil)  $\vec{y}$  yakuniy iste'mol vektori ma'lum va  $\vec{x}$  yalpi mahsulot vektorni aniqlash talab qilinadi.

**Savdoning chiziqli modeli.** Tovarlarini o'zaro sotib olish jarayoni biror qiymat va matritsaning o'ziga xos vektori tushunchalari yordamida tahlil qilinadi. Faraz qilaylik  $n$  ta mamlakat byudjetlarini  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tovarlarini sotib olishga sarflangan. Lineer almashinuv modeli yoki xalqaro savdo modelini ko'rib chiqing.

Bo'lsin  $a_{ij}$  –  $j$ - mamlakat byudjetning  $x_j$  ulushini  $i$ -mamlakatdan tovar sotib olishga sarflaydigan ulushi bo'lsin.  $a_{ij}$  elementlardan iborat matritsasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Agar butun byudjet faqat mamlakat ichkarisida va tashqarisidagi xaridlarga sarflansa quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ushbu xususiyatga ega bo'lgan  $A$  matritsaning istalgan ustun elementlari yig'indisi biriga teng bo'lib, savdo-sotiqning matritsasi deyiladi.  $I$ -chi mamlakat uchun ichki va tashqi savdo tushumlarining umumiy hajmi quyidagi formuladan topiladi:

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

Balansli (defitsitsiz) savdoning holati tabiiy shaklda shakllantiriladi: har bir mamlakat uchun uning byudjeti savdo tushumidan ko'p bo'lmasligi kerak, ya'ni.

$$P_i \geq x_i, \text{ yoki}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ushbu shartlar bo'yicha tengsizlik belgisi bo'lishi mumkin emasligini isbotlaylik. Ushbu tengsizlikning barchasini qo'shaylik ( $i$  1 dan 1  $n$  gacha qiymatlar). Qiymatlar guruhlaymiz:

$$\begin{aligned} & x_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2}) + \dots + \\ & + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n \end{aligned}$$

Qavslar ichidagi qiymatlar  $A$  matritsa elementlari va ular uchun yuqoridagi shartlar bo'yicha biriga teng. Shunday qilib uchbu tengsizlik kelib chiqadi:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Bu yerda faqat tenglik belgisi bo'lishi mumkin.

Shunday qilib shartlar tenglik shaklini oladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = x_n. \end{cases}$$

$\bar{x}$  Budjetlar vektori har bir tarkibiy qismi tegishli mamlakat byudjetini tavsiflaydi. Tenglamalar sistemasini matritsa shaklida yozish mumkin:

$$A\bar{x} = \bar{x}.$$

Ushbu tenglama  $A$  matritsasining o'ziga xos vektori uning o'ziga xos qiymatiga mos kelishini anglatadi, yani  $\lambda qI$ , kamomadga ega bo'lmagan xalqaro savdo byudjetlaridan iborat.  $\bar{x}$  tenglamani aniqlashga imkon beradigan shaklda yozaylik:

$$(A - E)\bar{x} = \bar{0}.$$

**1-misol.** To'rt mamlakat savdosining tarkibiy matritsasi quyidagicha

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Byudjetlar summasi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$$

berilganda, muvozanatli defitsitsiz savdoni qondiradigan 1,2,3,4 mamlakatlarning byudjetlarini toping:

**Yechish.** Quyidagi  $(A - E)\bar{x} = \bar{0}$  tenglamaga ko'ra

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matrisaning rangi uchga teng bo'lganligi sababli, noma'lumlardan biri erkli o'zgaruvchidir, qolganlari u orqali ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan hal yechsak,  $\bar{x}$  vektorning tarkibiy qismlarini topamiz:

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Topilgan qiymatlarni belgilangan miqdordagi byudjetga almashtirish ( $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ ) bilan biz qiymatni aniqlaymiz s:

$$c = 1210$$

Defitsitsiz savdo holatida biz mamlakatlar byudjetlarining kerakli qiymatlarini olamiz:

$$x_1 = 1400, \quad x_2 = 1460, \quad x_3 = 2200, \quad x_4 = 1210$$

## Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Mavzu
1.	Quyidagi tengsizlik uchun nima uchun tengsizlik munosabati o'rinli emas $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n$	Matrisa satr elementlari 1 ga teng bo'lgani uchun	Matrisa satr elementlari 0 ga teng bo'lgani uchun	Matrisa satr elementlari 2 ga teng bo'lgani uchun	Matrisa satr elementlari -1 ga teng bo'lgani uchun	2-mavzu
2.	$C\bar{x}^T = \bar{q}^T$ matrisaviy tenglama qanday yechiladi.	Savdoning chiziqli modeli orqali	Savdoning chiziqsiz modeli orqali	Matrisa usulida	Gauss	2-mavzu
3.	Defitsitsiz savdo holatidaga olib keladigan matrisali tehlama qanday hususiyatga ega	Ko'p tarmoqli iqtisodiyotning chiziqli modeliga bo'g'liq	1 jadvalga bo'g'liq	2 jadvalga bo'g'liq	3 jadvalga bo'g'liq	2-mavzu
4.	Kirish-chiqarish balans tenglamasi qanday maqsadda ishlatilishi mumkin.	Savdoning chiziqli modeli	Ko'paytirish	ayirish	0	2-mavzu
5.	Leontiev modelida matrisaga qanday shartlar qoyiladi.	$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$	$n$ ta vektorlar $i$	XQY	0	2-mavzu
6.	Ishlab chiqarish prognozi tenglamasi matrisaga bo'g'liqligi.....	Leontiev model	Savdoning chiziqli modeli	Ko'paytirish	ayirish	2-mavzu

7.	A matritsa samaradorligi uchun qanday mezonlar bajarishi kerak	$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$	$n$ ta vektorlar $i$	XQY	0	2-mavzu
8.	Balansli (defitsitsiz) savdoning holati tabiiy shaklda shakllantiriladi	$(A - E)\bar{x} = \bar{0}$	2xQ3y	4x-z	0	2-mavzu
9.	$n$ turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun $m$ turdagi xom ashyo xarajatlari matritsasi	$C = (c_{ij}); i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$		3x-y		2-mavzu
10	Korxonalar uchun xom ashyoning umumiy yillik zaxirasining qiymati danday formuladan topiladi.	$P = p \cdot BA_{yil}$	6x-y	3	1	2-mavzu

**Shaklan bir biriga yaqin savol-javoblar:**

Savol	Javob
Ishlab chiqarish prognozi qiymati	$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$
ichki va tashqi savdo tushumlarining umumiy hajmi	$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i, i = 1, 2, \dots, n$
Chiziqli gipoteza yoki oddiy qo'shilish balans koeffitsientlari	$C\bar{x}^T = \bar{q}^T$

Savol	Javob
Savdoning chiziqli modeli	$C = (c_{ij}); i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$
$n$ turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun $m$ turdagi xom ashyo xarajatlari matritsasi	$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = x_i, i = 1, 2, \dots, n$
Balansli (defitsitsiz) savdoning holati tabiiy shaklda shakllantiriladi.	$(A - E)\bar{x} = \bar{0}$

--	--

### Yopiq testlar

Savol	Javob
Ko'p tarmoqli iqtisodiyotning chiziqli modeli qanday.....	

### Nazorat savollari

1. Tenglamalar sistemasining iqtisodiyotning turli tarmoqlariga tadbiqlarining o'ziga xos xususiyatlari qanday
2. Tenglamalar sistemasining iqtisodiyotning turli tarmoqlaridagi muammolari va tadbiqlari qanday.
3. Savdoning chiziqli modelida matrisa ahamiyati qanday.

### Adabiyotlar

1. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts G'G'2013, ISBN-13: 978-0313319983
2. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.
3. H.Q. Mitchell "Traveller" B1, B2, MM Publications. 2015. 183.
4. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni "PIONEER", B1, B2, MM Publications. 2015. 191.
5. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

## 2-MAVZU: MATRITSALAR VA ULARNING TATBIQLARI. VEKTORLAR VA ULARNING TATBIQLARI.

### Reja

1. Matritsalarining tabiiy, gumanitar fanlarga tadbiqlari.
2. Ko'p omillilik. Mahsulotni ishlab chiqarish uchun xom ashyo sarfi masalasiga matritsa va vektorlar tushunchasini tadbiqlari.
3. Vektorlarning traektoriyali siljishlarga tadbig'i. Mahsuldor Leontiev modeli.

**Tayanch iboralar:** matritsa, vektor, Leontiev modeli, traektoriyali siljish, matritsalar tadbiqi, vektorlarning tadbiqi

## Matritsalar va vektorlarning tabiiy, gumanitar fanlarga tadbiqlari.

Algebra elementlari xususan matritsa tushunchasidan foydalanish ko'plab iqtisodiy masalalarni hal qilishning asosiy yondashuvlaridan biridir. Ushbu yondashuv ma'lumotlar bazasini ishlab chiqish va ulardan foydalanish, iqtisodiy jarayonlarni prognozlash va ko'rsatgichlarni tahlil qilishda ayniqsa dolzarb ahamiyatga ega. Iqtisodiy ko'rsatgichlar deyarli barcha ma'lumotlar matritsa shaklida tasvirlanadi va qayta ishlanadi.

Masalan vector va matritsa tushunchasi yordamida iqtisodiy ko'rsatgichlarni shaklantirish bo'yicha bazi misollarni ko'rib chiqaylik.

**1-misol.** Korxonada har kuni to'rtta turdagi mahsulot ishlab chiqaradi va ularning asosiy ishlab chiqarish iqtisodiy ko'rsatkichlari 1-jadvalda keltirilgan.

1-jadval

Mahsulot turi	Mahsulotlar soni	Mahsulotni ishlab chiqarish uchun xom ashyo sarfi (kg)	Ishlab chiqarish uchun ajratilgan vaqt (soat)	Mahsulot tannarxi (pul birligida)
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Quyidagi kundalik ko'rsatkichlarni aniqlash talab qilinsin: xom ashyo sarfi- $S$ , ishlab chiqarishga sarflangan vaqt- $T$  va korxonada ishlab chiqargan mahsulotlarning tannarxi- $P$ .

1-jadvalga ko'ra biz butun ishlab chiqarish stiklini tavsiflovchi to'rtta vektorni tuzalik:

$\vec{q} = (20, 50, 30, 40)$  - assortiment (mahsulotlar soni) vektori;

$\vec{s} = (5, 2, 7, 4)$  - mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf-harajatlar vektori;

$\vec{t} = (10, 5, 15, 8)$  - ishlab chiqarish uchun ajratilgan vaqt vektori;

$\vec{p} = (30, 15, 45, 20)$  - tannarx vektori.

Izlanayotgan xom ashyo sarfi- $S$ , ish vaqti uchun harajatlar- $T$  va korxonaning ishlab chiqargan mahsulotlari narxi- $P$  hosil qilingan vektorlarning skalyar ko'paytmasiga teng:

$$S = \vec{q} \cdot \vec{s} = 100 + 100 + 210 + 160 = 570 \text{ kg.}$$

$$T = \vec{q} \cdot \vec{t} = 1220 \text{ soat.}$$



$$P = \vec{q} \cdot \vec{p} = 3500 \text{ so'm}$$

### Xom ashyo sarfi

Korxonada to'rt turdagi xom ashyolardan foydalanib to'rt turdagi mahsulot ishlab chiqarsin. Har bir mahsulot uchun xom ashyoni iste'mol qilish stavkalari 2-jadvalda keltirilgan.

x.a.turi mah.turi	Xom ashyo turi			
	1-nav	2-nav	3-nav	4-nav
№1	2	3	4	5
№2	1	2	5	6
№3	7	2	3	2
№4	4	5	6	8

Bu ma'lumotlarni A matritsa elementlari sifatida tasvirlaymiz.

$$\begin{array}{c}
 \textit{xom ashyo turi} \\
 \cdot 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\
 A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \textit{mahsulot turi}
 \end{array}$$

Har bir turdagi mahsulot uchun ma'lum bir ishlab chiqarish rejasi bo'yicha har bir turdagi xom ashyo xarajatlarini topish talab qilinadi: masalan 60,50, 35 va 40 birlikda (bu birlik mahsulot turi) bo'lishi mumkin.

Bu birlik uchun ishlab chiqarishga oid  $B$  matritsa (reja) tuzamiz:

$$B = (60, 50, 35, 40).$$

Har bir turdagi mahsulotni 60,50, 35 va 40 birlikda ishlab chiqarish uchun har bir turdagi xom ashyo xarajatlari  $B$  matritsa elementlarini  $A$  matritsa elementlariga ko'paytmasiga tengligi malum bo'ladi:

$$B \cdot A = (60, 50, 35, 40) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 + 50 + 245 + 160 \\ 180 + 100 + 70 + 200 \\ 240 + 250 + 105 + 240 \\ 300 + 300 + 70 + 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 575 \\ 550 \\ 835 \\ 990 \end{pmatrix}$$

**Ko'p omillilik. Mahsulotni ishlab chiqarish uchun xom ashyo sarfi masalasiga matritsa va vektorlar tushunchasini tadbiqlari.**

Ishlab chiqarishda yakuniy mahsulot deganda o'z ichki ehtiyojlaridan ortib qolgan sotish uchun moljallangan mahsulotlar majmuasi tushiniladi. Sanoatda har biri bitta turdagi mahsulot ishlab chiqaradigan  $n$  ta korxonadan iborat bo'lsin.  $x_i$ -hajmidagi mahsulotni  $i$ -korxonada ishlab chiqaradi deb olaylik. Sanoat korxonalarining har biri ishlab chiqarishni ta'minlash uchun o'zlari va boshqa korxonalar tomonidan ishlab chiqarilgan mahsulotlarning bir qismini iste'mol qiladilar.  $a_{ij}$  –  $i$ -korxonada ishlab chiqargan  $x_j$  -hajmidagi mahsulotni ishlab chiqarishni ta'minlash uchun iste'mol qilagan  $j$ -korxonaning ulushi bo'lsin. Biror  $i$  –korxonani istemoldan tashqari sotish uchun mo'ljallangan  $y_i$  – mahsulotlarining sonini topaylik. Ushbu qiymatni osongina ushbu formula bo'yicha hisoblanish mumkin:

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Sanoatning ichki iste'molini tavsiflovchi qiymatlarni  $n$  tartibli kvadrat  $A$  matritsa ko'rinishida tasvirlash mumkin:

$$A = (a_{ij}); \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Natijada korxonalarining istemoldan tashqari sotish uchun mo'ljallangan yakuniy mahsulotlari miqdori quyidagi matrisali tenglamaning yechimlari hisoblanadi:

$$y = x - Ax \quad \text{bu yerda} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$E$  birlik matritsadan foydalanib  $y = (E - A)x$  tenglamaning ildizlarini topamiz.

Masalan sanoatda uchta korxonaning mahsulot ishlab chiqarish va ichki istemoli berilgan hamda uni quyidagi matrisalar ko'rinishida tashlash mumkin bo'lsin:

$$x = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Bu uchta korxonaning istemoldan tashqari sotish uchun mo'ljallangan yakuniy mahsulotlari miqdori uchun quyidagi matrisali tenglama tuziladi:

$$y = (E - A)x = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

**1-misol.** 4-jadval uchta turdagi xom ashyoni iste'mol qilish bilan 4 turdagi mahsulot ishlab chiqaradigan 5 ta korxonaning kunlik unumdorligi ma'lumotlari, shuningdek har bir korxonaning yiliga ishlash davomiyligi va har bir turdagi xom ashyoning narxi to'g'risidagi ma'lumotlar ko'rsatilgan.

4-jadval

Mahsulot turi, №	Korxonalarning samaradorligi G' kun					Xom ashyoning qiymati G' vazn		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	4	5	3	6	7	2	3	4
2	0	2	4	3	0	3	5	6
3	8	15	0	4	6	4	4	5
4	3	10	7	5	4	5	8	6
	Yiliga ish kunlari soni					Xom ashyoning narxi G' pulbirlik		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	200	150	170	120	140	40	50	60

Quyidagilarni aniqlash kerak:

- 1) har bir mahsulot turi bo'yicha har bir korxonaning yillik samaradorligi;
- 2) har bir korxonaning har bir xom ashyo turiga yillik ehtiyoji;
- 3) ko'rsatilgan turlar va miqdordagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan xom ashyo sotib olishda har bir korxonani moliyalashtirishning yillik miqdori.

**Yechish.** Har bir mahsulot turi bo'yicha har bir korxonaning yillik samaradorligini topiylik. Bizni qiziqtiradigan ishlab chiqarishning butun iqtisodiy spektrini tavsiflovchi matritsalarini tuzish kerak, so'ngra ularga tegishli amallar yordamida muammoning yechimini topish kerak. Avvalo biz barcha turdagi mahsulotlar uchun korxonalar samaradorligi matritsasini tuzamiz:

Ishlab chiqarish

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 15 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 10 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{mahsulot} \\ \text{turi} \\ \downarrow \end{matrix}$$

Ushbu matritsaning har bir ustuni har bir mahsulot turi uchun alohida korxonaning kunlik samaradorligiga mos keladi. Shuning uchun yillik unumdorlik  $j$ - mahsulotning har bir turi bo'yicha  $A$  matritsasining  $j$ -ustuni ushbu korxonalar uchun yiliga ish kunlari soniga ko'paytirish yo'li bilan olinadi. ( $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Shunday qilib, har bir mahsulot uchun har bir korxonaning yillik unumdorligi matritsa bilan tavsiflanadi

$$A_{yil} = \begin{pmatrix} 800 & 750 & 510 & 720 & 980 \\ 0 & 300 & 680 & 360 & 0 \\ 1600 & 2250 & 0 & 480 & 840 \\ 600 & 1500 & 1190 & 600 & 560 \end{pmatrix}.$$

Mahsulot birligi uchun xom ashyo xarajatlari matritsasi (ushbu ko'rsatkichlar barcha korxonalar uchun shartli ravishda bir xil) shaklga ega

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{Mahsulot turi} \\ \text{xom ashyo turlari} \downarrow \end{matrix}$$

Korxonalarda xom ashyo turlari bo'yicha kunlik iste'mol  $A$  va  $B$  matritsalar ko'paytmasi bilan tavsiflanadi:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 55 & 126 & 53 & 62 & 58 \\ 68 & 165 & 85 & 89 & 77 \\ 74 & 167 & 78 & 92 & 82 \end{pmatrix},$$

bu erda  $i$ -chi qator xomashyo turi soniga,  $j$ -ustun esa korxonalar raqamiga 4-jadvalga muvofiq keladi. ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ).

Har bir korxonaning har bir xom ashyo turiga yillik ehtiyoji - bu  $A_{yil}$  matritsasi bilan taqqoslaganda,  $VA$  matritsa ustunlarini korxonalar uchun yiliga tegishli ish kunlari soniga ko'paytirish orqali olinadi - bu har bir korxonaning har bir xom ashyo turiga yillik ehtiyoji

quyidagicha:

$$BA_{yil} = \begin{pmatrix} 11000 & 18900 & 9019 & 7440 & 8120 \\ 13600 & 24750 & 14450 & 10680 & 10780 \\ 14800 & 25050 & 13260 & 11040 & 11480 \end{pmatrix}.$$

Biz xomashyo tannarxi matrisasini tuzaylik

$$p = (40, 50, 60).$$

Keyin har bir korxonaga uchun xom ashyoning umumiy yillik zaxirasining qiymati ushbu matrisani  $BA_{yil}$  matrisaga ko'paytirish yo'li bilan olinadi:

$$P = p \cdot BA_{yil} = (2\,008\,000, 3\,496\,500, 1\,494\,000, 1\,552\,600).$$

Demak xomashyo sotib olish uchun korxonalarni moliyalashtirish miqdori  $P$  ning tegishli tarkibiy qismlari bilan belgilanadi.

### Vektorlarning traektoriyali siljishlarga tadbig'i. Mahsuldor Leontiev modeli

Barcha elementlari manfiy bo'lmagan  $A$  matritsa har qanday tuzilgan matrisa uchun samaralidir. Malumki  $y = (E - A)x$  tenglamaning ildizlari manfiy bo'lmagan komponentlardan iborat yechimgi, chunki  $x$  ning barcha elementlari manfiy emas. Bunday holat iqtisodiyotda Leontiev modelini samarali ekanligini ko'satadi.  $y = (E - A)x$  tenglamani yechishda ba'zi asosiy fikrlariga e'tibor qarataylik. Birlik matritsa  $E$  dan foydalanib  $(E - A)x = y$  hosil bo'ladi. Agar  $(E - A)^{-1}$  teskari matritsa bo'lsa, unda  $(E - A)x = y$  tenglamaning yagona yechimi mavjud:

$$x = (E - A)^{-1} y.$$

Bu yerda  $(E - A)^{-1}$  matritsa umumiy xarajatlar matritsasi deb nomlangan.

$A$  matritsa samaradorligi uchun bir nechta mezon mavjud, ulardan ikkitasini keltiramiz.

1.  $A$  matritsasi faqat mahsuldor matritsa bo'lsa  $(E - A)^{-1}$  mavjud va uning elementlari manfiy emas.

2. Manfiy bo'lmagan elementlarga ega bo'lgan  $A$  matritsa uning har qanday ustunlaridagi (satrlaridagi) elementlarning yig'indisi birdan oshmasa u samarali bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$$

Bundan tashqari, kamida bitta ustun (satr) uchun bu miqdor qat'iy ravishda birdan kam.

Leontiev modelini qo'llashga quyidagi misolni ko'rib chiqalik.

**1-misol** 1. 5-jadvalda ma'lum bir vaqt oralig'ida beshta sanoat tarmoqlari o'rtasidagi balans ma'lumotlari keltirilgan. Yakuniy iste'mol (ichki ehtiyojlardan qolgan) va yalpi

mahsulotning matrisalari, shuningdek to'g'ridan-to'g'ri xarajatlar koeffitsientlari matritsasini toping va yuqoridagi mezonlarga muvofiq unumdorligini aniqlang.

5-jadval.

№	Korxonalar	Iste'mol					Yakuniy mahsulot	Yalpi mahsuloti
		1	2	3	4	5		
1	Mashina asboblari	15	12	24	23	16	10	100
2	Energetika	10	3	34	15	7	30	100
3	Mashinasozlik	10	5	10	10	10	5	50
4	Avtomobil sanoati	10	5	10	5	5	15	15
5	Uglevodorodlarni qazib olish va qayta ishlash	7	15	15	3	3	50	100

**Yechish.** 5-jadvalda  $A = (a_{ij})$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$  va  $x_{ij}$ ,  $y_{ij}$  munosabatlarga muvofiq balans tarkibiy qismlari ko'rsatilgan:  $x_{ij}$  – birinchi beshta ustun,  $y_i$  – oltinchi ustun,  $x_i$  – oxirgi ustun ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ). Demak yuqoridagi formulalarga ko'ra:

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 0,48 & 0,46 & 0,16 \\ 0,10 & 0,03 & 0,70 & 0,30 & 0,07 \\ 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,05 \\ 0,07 & 0,15 & 0,30 & 0,20 & 0,03 \end{pmatrix}$$

A matritsaning barcha elementlari musbar, ammo ularning uchinchi va to'rtinchi ustunlaridagi yig'indilari birdan kattaroq ekanligini ko'rish oson. Binobarin, mahsuldorlikning ikkinchi mezonining shartlari bajarilmaydi va A matritsasi mahsuldor emas. Ushbu samarasizlikning iqtisodiy sababi shundaki, 3 va 4-sektorlarning ichki iste'moli ularning yalpi mahsulotiga nisbatan juda yuqori.

**2-misol.** 6-jadvalda ma'lum bir vaqtda uchta korxonaning balans ma'lumotlarini o'z ichiga oladi. Har bir turdagi mahsulotni yalpi ishlab chiqarish hajmini barcha korxonalar bo'yicha ko'rsatilgan qiymatlar (60, 70 va 30) bo'yicha pul birligida topilsin.

6-jadval

№	Korxonalar	Iste'mol			Yakuniy mahsulot	Pul birliklarining yalpi mahsuloti
		1	2	3		
1	Uglevodorodlarni	5	35	20	40	100

	qazib olish va qayta ishlash					
2	Energetika	10	10	20	60	100
3	Mashinasozlik	20	10	10	10	50

**Yechish.** Yalpi mahsulot va yakuniy iste'mol martisalari va to'g'ridan-to'g'ri xarajatlar koeffitsientlari matritsasini tuzamiz . Demak:

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$$

A matritsa har ikkala mahsulodorlik mezoniga javob beradi. Yakuniy iste'mol ma'lum darajada oshgan taqdirda, yakuniy mahsulotning yangi matrisasi kelib chiqadi masala shartiga ko'ra:

$$y = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \text{Yalpi}$$

mahsulotning yangi matrisasini topish talab etiladi. A matritsasi o'zgarmaydi degan taxmin ostida muvozanat munosabatlarini qondirish uchun. tarkibiy qismlar  $x_1, x_2, x_3$  noma'lumli matrisani topish,  $(E - A)x = y$  va  $x = (E - A)^{-1}y$  shaklidagi tenglamadan  $x$  matrisani toppish talab etiladi. Ushbu sistemaning matritsasi

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,40 \\ -0,10 & 0,90 & -0,40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

teng. U holda sistemaning ildizi

$$x = \begin{pmatrix} 152,6 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Shunday qilib, yakuniy mahsulot matrisasi tarkibiy qismlarining ma'lum bir o'sishini ta'minlash uchun tegishli yalpi chiqimlarni oshirish kerak: 6-jadvalda ko'rsatilgan qiymatlarni yani uglevodorodlarni ishlab chiqarish va qayta ishlash 52,6% ga, energiya darajasi - 35,8% ga, mashinasozlik mahsuloti esa 85% ga dastlabki ko'rsatkichlarga nisbatan oshirish kerak.

### Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Mavzu
1.	Leontiev modelida matrisaga qo'yiladigan shrtlar	$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$	$n$ ta vektorlari	X+Y	0	1-mavzu
2.	Korxonalarining istemoldan tashqari sotish uchun mo'ljallangan yakuniy mahsulotlari miqdori qanday tenglamadan topiladi	$x = (E - A)^{-1} y$	3xy	7y+x	7z+x	1-mavzu
3.	Korxonalar uchun xom ashyoning umumiy yillik zaxirasining qiymati danday formuladan topiladi.	$P = p \cdot BA_{yil}$	6x-y	3	1	1-mavzu
4.	1-jadvalga muvofiq yangi ishlab chiqarish jadvalini barcha turdagi mahsulotlar narxi 10 foizga pasaytirilgan sharti uchun iqtisodiy ko'rsatkichlar boyicha tuzing	1-jadvalga muvofiq amallar bajariladi	2-jadvalga muvofiq amallar bajariladi	3-jadvalga muvofiq amallar bajariladi	4-jadvalga muvofiq amallar bajariladi	1-mavzu
5.	Sanoat to'rtta korxonadan iborat. Ishlab chiqarish va to'g'ridan-to'g'ri xarajatlar koeffitsientlari matrisasi quyidagi shaklga ega: $x = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,10 & 0,24 & 0,25 \\ 0,20 & 0,15 & 0,36 & 0,17 \\ 0,15 & 0,20 & 0,20 & 0,15 \\ 0,30 & 0,15 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}$ Mo'ljallangan yakuniy mahsulot hajmlari matrisasini toping.	4-jadvalga muvofiq amallar bajariladi	1-jadvalga muvofiq amallar bajariladi	3-jadvalga muvofiq amallar bajariladi	2-jadvalga muvofiq amallar bajariladi	1-mavzu
6.	1-jadvalga muvofiq yangi ishlab chiqarish jadvalini barcha turdagi mahsulotlar soni 20 foizga k'o'payadi sharti uchun iqtisodiy ko'rsatkichlar boyicha tuzing	$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$	$n$ ta vektorlari	XQY	0	1-mavzu
7.	1-jadvalga muvofiq yangi ishlab chiqarish jadvalini barcha mahsulotlar uchun ishlab chiqarish vaqtining stavkasi 20% ga kamayadi sharti uchun iqtisodiy ko'rsatkichlar boyicha tuzing	Leontiev modelidan foydalaniladi	Leontiev modelidan foydalanmaydi	0	Mavjid emas	1-mavzu



8.	A matritsa samaradorligi uchun qanday mezonlar bajarishi kerak	$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$	$n$ ta vektorlari	XQY	0	1-mavzu
9.	Izlanayotgan xom ashyo sarfi-S ifodani matritsa va vector orqali qanday ifodalanadi	$S = \vec{q} \cdot \vec{s}$	$S = \vec{q} \cdot sr$	1	0	1-mavzu
10.	Leontiev modelida matrisaga qo'yiladigan shrtlar	$(E - A)^{-1}$ mavjud	$(E - A)^{-1}$ mavjud emas	0	1	1-mavzu

**Shaklan bir biriga yaqin savol-javoblar:**

Savol	Javob
Izlanayotgan xom ashyo sarfi-S	$S = \vec{q} \cdot \vec{s}$
Ish vaqti uchun harajatlar-T	$T = \vec{q} \cdot \vec{t}$
Korxonaning ishlab chiqargan mahsulotlari tannarxi-P	$P = \vec{q} \cdot \vec{p}$

**Yopiq testlar**

Savol	Javob
Leontiev modeli qanday shaklda tasvirlanadi.	$x = (E - A)^{-1} y$
A matritsa samaradorligi uchun bir nechta mezon	$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1$

**Nazorat savolari.**

1. Ko'p omillilikni amaliyotga tatbqi qanday.
2. Mahsulotni ishlab chiqarish uchun xom ashyo sarfi masalasiga matritsa va vektorlar tushunchasini tadbiqlari qanday.
3. Vektorlarning traektoriyali siljishlarga tadbig'i. Mahsuldor Leontiev modellini tushuntiring

**Adabiyotlar**

1. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.
2. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry G'G' 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

3. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts G'G'2013, ISBN-13: 978-0313319983
4. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin: de Gruyter, 657 p., 2011.
5. H.Q. Mitchell "Traveller" B1, B2, MM Publications. 2015. 183.
6. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni "PIONEER", B1, B2, MM Publications. 2015. 191.

### **3-MAVZU: HOSILA VA UNING TATBIQLARI. INTEGRAL VA UNING TATBIQLARI.**

1. Tabiiy va iqtisodiy modellarni yaratish, ularni prognozlashda integralning tadbig'i.
2. Ishlab chiqarish bilan bog'liq jarayonlarni modellashtirish.

**Tayanch iboralar:** hosila, integral, iqtisodiy model, cheklangan harajatlar, Talabning elastikligi, modellashtirish

#### **Tabiiy va iqtisodiy modellarni yaratish, ularni prognozlashda integralning tadbig'i.**

Hosila tushunchasini iqtisodiyot sohasida qo'llanilishi. Cheklangan xarajatlar.

$C = f(Q)$  formuladan  $Q$  hajmda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni  $C$  xarajatga bog'liqligini ko'rish mumkin. Cheklangan xarajatni o'zgarishi  $\Delta S$ -ishlab chiqarishni ko'payishini  $\Delta Q$  - ishlab chiqarish hajmining ozgina o'zgarishi nisbati tavsiflaydi:

$$MC = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = f'(Q)$$

Talabning elastikligi.  $D = D(P)$  -  $P$  narxdagi tovarlar talabi funktsiyasi bo'lsin. Talabning egiluvchanligi deganda tovarlar narxi 1% ga o'zgarganda talabning nisbiy o'zgarishi tushuniladi:

$$E = \frac{\Delta D / D \cdot 100\%}{\Delta P / P \cdot 100\%}$$

$\Delta D$  miqdor  $\Delta P$  bog'liq bo'lgani uchun uchbu limit vaziyat o'rinli,  $\Delta P \rightarrow 0$ :

$$E(D) = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta D(P) \cdot P}{\Delta P(P) \cdot D(P)} = \frac{P}{D(P)} \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta D(P)}{\Delta P} = P \frac{D'(P)}{D(P)} \quad (1)$$

Bundan talabning egiluvchanligi quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$E(D) = P(\ln D(P))'$$

Ushbu tenglikdan kelib chiqadiki, talabning egiluvchanligi logaritm xususiyatlariga ega:

$$E(D_1 D_2) = E(D_1) + E(D_2), \quad E(D_1 / D_2) = E(D_1) - E(D_2)$$

$D(P)$  kamayuvchi funksiya ekan, u holda  $D'(P) < 0$ . (1) formuladan  $E(D) < 0$  kelib chiqadiki.

$|E(D)|$  qiymat talabning qiymatiga qarab uch turga bo'linadi:

- 1)  $|ED| > 1 (E(D) < -1)$  — talab elastik;
- 2)  $|ED| = 1 (E(D) = -1)$  — talab neytral;
- 3)  $|ED| < 1 (E(D) > -1)$  — talab egiluvchan emas.

Keling, talabning egiluvchanligining turli xil variantlari uchun mahsulot narxining oshishi bilan daromadning o'zgarishini topaylik. Bu qiymat:

$$I(P) \text{ q } D(R) \text{ R.}$$

Ushbu funktsiyaning hosilasini topaylik:

$$I'(R) \text{ q } D(P) \text{ QPD}'(P).$$

$D'(P)$  ifoda (1) formulaga ko'ra:

$$D'(P) = \frac{E(D)D(P)}{P}$$

U holda

$$I'(P) = D(P) + E(D)D(P) = D(P)(1 + E(D))$$

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

- 1) agar  $E(D) < -1$  bo'lsa, u holda  $I'(R) < 0$  — elastik talab bilan tovarlar narxining o'sishi daromadning pasayishiga olib keladi;
- 2) agar  $E(D) = -1$  bo'lsa, u holda  $I'(P) = 0$  — neytral talab bo'lsa, narxning o'zgarishi daromadga ta'sir qilmaydi;
- 3) agar  $E(D) > -1$  bo'lsa, u holda  $I'(R) > 0$  — noelastik talab bilan mahsulot narxining oshishi daromadning oshishiga olib keladi.

Foydani maksimallashtirish.  $Q$  - sotilgan tovarlar miqdori,  $R(Q)$  daromad funksiyasi,  $C(Q)$  tovarlarni ishlab chiqarish xarajatlari funksiyasi bo'lsin. Tovarlarni sotishdan olingan foyda quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q)$$

Foydaning ma'lum bir  $Q$  qiymatida maksimal bo'lishi uchun zarur ekstremum printsiplari (kritik nuqta) bajarilishi kerak  $P'(Q) = 0$ . Binobarin,

$$R'(Q) - C'(Q) = 0, \quad R'(Q) = C'(Q)$$

Bunda  $R'(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta R(Q)}{\Delta Q}$  - cheklangan daromat (rentabellik);

$$C'(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q} - \text{cheklangan xarajat.}$$

Taniqli iqtisodchular fikricha: foyda maksimal bo'lishi uchun cheklangan rentabellik va cheklangan xarajatlar teng bo'lishi kerak.

### Ishlab chiqarish bilan bog'liq jarayonlarni modellashtirish.

Iqtisodiyotga aniq integralning ba'zi ba'zi tadbiqlari. Uskunalar ishlab chiqarish hajmining o'sishi. Biron bir turdagi uskunalarni ishlab chiqarish uning ishlab chiqarish hajmining o'sish sur'ati bilan tavsiflanadi;

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{y},$$

bu yerda,  $\Delta y$  – ma'lum bir  $\Delta t$  vaqt ichida uskunalar ishlab chiqarish hajmining o'shishi,  $u$  –  $t$  vaqt momentida ishlab chiqarish darajasi.

Faraz qilaylik  $K$  ma'lum, dastlab  $t$  q  $0$  vaqtda esa uskunalarning yillik ishlab chiqarish darajasi  $y_0$  bo'lgan olib,  $t$  vaqt momentida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdorini topaylik.

$y$   $t$  ning uzluksiz funksiyasi deb faraz qilamiz va  $\Delta t \rightarrow 0$  ni topamiz.

$$K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{y} = \frac{y'}{y} = (\ln y)'.$$

Ushbu tenglikni  $0$  dan  $t$  gacha intervallaymiz:

$$\int_0^t K dt = \int_{y_0}^y (\ln y)' dy$$

$$Kt \Big|_{y_0}^y = \ln \Big|_{y_0}^y, \quad Kt = \ln \frac{y}{y_0}, \quad y = y_0 e^{Kt}$$

$t$  vaqt ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori aniq integral bilan topiladi:

$$Y(t) = \int_0^t y(t) dt = \int_0^t y_0 e^{Kt} = \frac{y_0}{K} e^{Kt} \Big|_0^t = \frac{y_0}{K} (e^{Kt} - 1)$$

**1-misol.** Yillik o'sish sur'ati 5% ( $K$  q  $0,05$ ) bo'lsa, 10 yil ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori quyidagi qiymatga teng bo'ldi:

$$Y(10) = 20y_0 (e^{0.5} - 1) \approx 13y_0$$

### Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Mavzu
1.	Agar $E(D) > -1$ bo'lsa,	u holda $I'(P)$ q0 — neytral talab, narxning o'zgarishi daromadga ta'sir qilmaydi;	u holda $I'(P)$ q1 — neytral talab, narxning o'zgarishi daromadga ta'sir qilmaydi;	u holda $I'(P)$ q2 — neytral talab, narxning o'zgarishi daromadga ta'sir qilmaydi;	u holda $I'(P)$ q3 — neytral talab, narxning o'zgarishi daromadga ta'sir qilmaydi;	3-mavzu
2.	$t$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori qanday topiladi	$t$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori aniq integral bilan topiladi	$t$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori aniq hosila bilan topiladi	$t$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori aniq logarifmlas h bilan topiladi	$t$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori aniq darajaga oshirish bilan topiladi	3-mavzu
3.	Biron bir turdagi uskunalarni ishlab chiqarish uning ishlab chiqarish hajmining o'sish sur'atiga bog'liqligi tenglamasi	$C = f(Q)$	$C = f(T)$	C	A	3-mavzu
4.	Talabning egiluvchanligi deganda tovarlar narxi.....	$E = \frac{\Delta D / D \cdot 100\%}{\Delta P / P \cdot 100\%}$	$E = \frac{D / D \cdot 100\%}{\Delta P / P \cdot 100\%}$	$E = \frac{\Delta D / D \cdot 100\%}{P / P \cdot 100\%}$	1	3-mavzu
5.	Biror hajmda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni qandaydir xarajatga bog'liqligi tenglamasi	$Y(t) = \int_0^t y(t) dt$	$Y(t) = -\int_0^t y(t) dt$	0	1	3-mavzu
6.	$t$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori	$K = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{y}$	$K = -\frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{y}$	$\frac{1}{y}$ A	4zQy	3-mavzu
7.	Cheklangan xarajatni o'zgarishi formulasi	1% ga o'zarganda talabning nisbiy o'zgarishi tushuniladi	2% ga o'zarganda talabning nisbiy o'zgarishi tushuniladi	3% ga o'zarganda talabning nisbiy o'zgarishi tushuniladi	4% ga o'zarganda talabning nisbiy o'zgarishi tushuniladi	3-mavzu
8.	Talabning egiluvchanligi deganda tovarlar narxi.....	$E = \frac{\Delta D / D \cdot 100\% Qy}{\Delta P / P \cdot 100\%}$		1	3x	3-mavzu
9.	Talabning egiluvchanligi qanday formuladan topiladi	$MC = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} K = f'(Q) \frac{\Delta y}{\Delta t}$	$K = -\frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{1}{y}$	$\frac{1}{y}$ -2		3-mavzu

10.	Agar $E(D) < -1$ bo'lsa,	u holda $I'(R) > 0$ — noelastik talab bilan mahsulot narxining oshishi daromadning oshishiga olib keladi.	u holda $I'(R) > 1$ — noelastik talab bilan mahsulot narxining oshishi daromadning oshishiga olib keladi.	u holda $I'(R) > 2$ — noelastik talab bilan mahsulot narxining oshishi daromadning oshishiga olib keladi.	u holda $I'(R) > 3$ — noelastik talab bilan mahsulot narxining oshishi daromadning oshishiga olib keladi.	3-mavzu
-----	--------------------------	---	---	---	---	---------

**Shaklan bir biriga yaqin savol-javoblar:**

Savol	Javob
Biror hajmda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni qandaydir xarajatga bog'liqligi tenglamasi	$Y(t) = \int_0^t y(t)dt$
$t$ vaqt ichida ishlab chiqarilgan uskunalarning umumiy miqdori	$K = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{1}{y}$
Biron bir turdagi uskunalarni ishlab chiqarish uning ishlab chiqarish hajmining o'sish sur'atiga bog'liqligi tenglamasi	$C = f(Q)$
Cheklangan xarajadni o'zgarishi formulasi	1% ga o'zgarganda talabning nisbiy o'zgarishi tushuniladi
Talabning egiluvchanligi deganda tovarlar narxi.....	$E = \frac{\Delta D / D \cdot 100\%}{\Delta P / P \cdot 100\%}$
Talabning egiluvchanligi qanday formuladan topiladi	$MC = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = f'(Q)$

**Yopiq testlar**

Savol	Javob
Agar $E(D) < -1$ bo'lsa,	u holda $I'(R) > 0$ — noelastik talab bilan mahsulot narxining oshishi daromadning oshishiga olib keladi.
Agar $E(R) < -1$ bo'lsa,	u holda $I'(R) < 0$ — elastik talab bilan tovarlar narxining o'sishi daromadning pasayishiga olib keladi;

### **Nazorat savollari**

1. Tabiiy va iqtisodiy modellarni yaratish, ularni prognozlashda integralning tadbig'I qanday.
2. Ishlab chiqarish bilan bog'liq jarayonlarni modellashtirishni tushuntiring
3. Tabiiy va iqtisodiy modellarni yaratish, ularni prognozlashda integralning tadbig'I qanday.

### **Adabiyotlar**

1. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry G'G' 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492
2. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020
3. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.
4. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface G'G' Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 rr.
5. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.
6. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonb 2018.
7. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

#### IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАТЕРИАЛЛАРИ

##### 2-MAVZU: TENGLAMALAR SISTEMASI VA ULARNING TATBIQLARI

**1-misol.** Ba'zi bir materiallaridan 360 turdagi A, 300 turdagi B va 675 C turdagi bo'laklarni kesib olish kerak, bu holda uchta kesish usulidan foydalanish mumkin. Har bir o'ramdan har bir kesish usuli bilan olingan bo'laklar soni 1-jadvalda ko'rsatilgan:

Bo'laklar turi	Kesish usuli		
	1	2	3
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Ushbu keltirilgan shartlarni matematik (analitik) ko'rinishda tasvirlang.

**Yechish:**  $x, y, z$  mos ravishda birinchi, ikkinchi va uchinchi usullar bilan kesiladigan materiallar sonini belgilaymiz. Demak, kesishning birinchi usuli bilan  $3x$  ta, ikkinchi usul bilan  $2y$  ta, uchinchi usul bilan  $z$  ta A tipdagi bo'laklar olinadi. Masala shartiga ko'ra A tupdagi buyumlar soni  $360$  ga teng bo'lishi kerak. Shunga o'xshash B va C turdagi bo'laklar sonini topish mumkin:  $x + 6y + 2z = 300$  va  $4x + y + 5z = 675$ . B va C ishlov beriladigan Natijada quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360 \\ x + 6y + 2z = 300 \\ 4x + y + 5z = 675 \end{cases}$$

Sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va elementar almashtirishlar orqali uning elementlarini uchburchak shaklga keltiramiz.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & 5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 14 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \square \\ & \square \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demak, tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:



$$x = 90 \begin{cases} x + 6y + 2z = 300 \\ 2y + 9z = 570 \\ -67z = -4020 \end{cases} .$$

Oxirgi tenglamadan  $z = 60$  ni topamiz,  $z$  ning topilgan qiymatini ikkinchi tenglamaga qo'yib,  $y = 15$  ni, birinchisidan  $x = 90$  topiladi.

Demak,  $\vec{C} = (90; 15; 60)$  vector tenglamalar sistemasi uchun yechim bo'ladi.

**2-misol.** Uchta kema portga 6000 tonna cho'yan, 4000 tonna temir rudasi va 3000 tonna mis etkazib berdi. Yuklarni tushirish to'g'ridan-to'g'ri temir yo'l vagonlariga yoki iste'molchilarga etkazib berish uchun port omborlarida tushirilishi mumkin. 8000 tonna yukni vagonlarga tushirish mumkin, qolgan yuk esa omborlarga yuborilishi kerak. Portga etkazilgan vagonlar misni tashish uchun moslashtirilmagan. 1 tonna yukni vagonlarga tushirish qiymati 4,30; 5,25 va 2,20 (pul birliklarida). 1 tonna yukni omborlarga tushirish qiymati 7,8; 6,4 va 3,25 (pul birliklarida). Agar jami xarajatlar 58850 (pul birligida) bo'lishi kerak bo'lsa, kemalardagi yuklarni to'liq tushirish shartlarini matematik (analitik) ko'rinishda tasvirlang.

**Yechish:** Masala shartiga ko'ra portga etkazib beriladigan cho'yan, temir rudasi va misni ikki yo'l bilan tushirish mumkin: yo temir yo'l vagonlariga yoki port omborlariga. Yukni tonnada  $x_{ij}$  bilan belgilaymiz,  $i = 1, 2, 3$ -yuklar,  $j = 1, 2$  yukni tushirish usul bo'lsin. Shunday qilib, masala oltita noma'lumni o'z ichiga oladi. Cho'yanni to'liq tushirish sharti quyidagicha yozilishi mumkin:  $x_{11} + x_{12} = 6000$ . Bu yerda  $x_{11}$  va  $x_{12}$  - cho'yanni vagonlar va omborlarga tushiriladigan tonna miqdori. Xuddi shunday shartlar temir rudasi uchun ham bajarilishi kerak:  $x_{21} + x_{22} = 4000$ . Misga kelsak ular faqat omborlarga tushirilishi mumkin, shuning uchun  $x_{31} = 0$  va misni to'liq tushirish sharti quyidagi shaklga ega:  $x_{32} = 3000$ . Portga etkazib berilgan yuklarni vagonlarga to'liq yuklash sharti quyidagicha:  $x_{11} + x_{21} = 8000$ . Yuklarni tushirish xarajatlari masala shartiga ko'ra 58850 (pul birligida) bo'lgani uchun umumiy xarajatlar miqdori bu qiymatga teng bo'lishi kerak:

$$4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} + 3,25x_{32} = 58850.$$

Misga faqat omborlarga tushirilishi mumkin bo'lgani uchun yani  $x_{31} = 0$  va misni to'liq tushirish sharti  $x_{32} = 3000$  ga ko'ra:

$$4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} = 49100.$$

Natijada quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 6000 \\ x_{21} + x_{22} = 4000 \\ x_{11} + x_{21} = 8000 \\ 4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} = 49100 \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasini yechib  $x_{22} = 2000$ ,  $x_{21} = 2000$ ,  $x_{12} = 0$ ,  $x_{11} = 6000$  qiymatlarni topamiz.

### Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Mavzu
1.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$ <p>sistema quyidagi sistemalardan qaysi biriga teng kuchli emas?</p>	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	<p>mavzu</p>
2.	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ <p>tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching</p>	$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{5}{2}; x_3 = \frac{1}{2}$	$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{5}{2}; x_3 = \frac{1}{2}$	$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{5}{2}; x_3 = \frac{1}{2}$	$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{5}{2}; x_3 = \frac{1}{2}$	<p>mavzu</p>
3.	<p>Ushbu (1,2,3) qaysi bir sistemaning yechimi bo'ladi</p>	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	<p>mavzu</p>
4.	<p>Ushbu o'rniga qo'yishga teskari o'rinalmashtirishni to'ping?</p> $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta\alpha & \mu \\ a & b & c & da & \phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta\alpha & \mu \\ a & b & c & da & \phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta\alpha & \mu \\ a & b & c & da & \phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & \beta & \delta\alpha & \mu \\ a & b & c & da & \phi \end{pmatrix}$	<p>mavzu</p>

5.	<p style="text-align: center;">Agar</p> $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ <p>tenglamalar sistemasinin ga sotsiy matritsasi <math>A</math> va dacha matritsasi <math>\bar{A}</math> bo'lsa, u holda berilgan sistemani yechishga yechimni topish uchun quyidagilarni qayd qilish kerak.</p>	<p style="text-align: center;">rang A=rang <math>\bar{A}=n</math></p>	<p style="text-align: center;">rang A=rang <math>\bar{A}=n</math></p>	<p style="text-align: center;">rang A=rang <math>\bar{A}=n</math></p>	<p style="text-align: center;">rang A=rang <math>\bar{A}=n</math></p>	<p style="text-align: center;">2- mavzu</p>
6.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$	<p style="text-align: center;">(1; 5; 2),</p>	<p style="text-align: center;">(2; 5; 9)</p>	<p style="text-align: center;">(0, 0, 0, 0)</p>	<p style="text-align: center;">Mavjud emas</p>	<p style="text-align: center;">2- mavzu</p>
7.	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$	<p style="text-align: center;">(1; 2; 3; - 4)</p>	<p style="text-align: center;">(1; 2; 3; 4)</p>	<p style="text-align: center;">(-1; 2; 3; -4)</p>	<p style="text-align: center;">(1; -2; 3; -4)</p>	<p style="text-align: center;">2- mavzu</p>
8.	<p style="text-align: center;">Tenglamalar sistemasini yechishga</p> $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$	<p style="text-align: center;">3</p>	<p style="text-align: center;">2</p>	<p style="text-align: center;">1</p>	<p style="text-align: center;">0</p>	<p style="text-align: center;">2- mavzu</p>

9.	Tenglamalar sistemasi nechta yechimga ega	4	3	2	1	2-mavzu
	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$					
10.	Tenglamalar sistemasi nechta yechimga ega	3	2	1	0	2-mavzu
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$					

**Shaklan bir biriga yaqin savol-javoblar:**

Savol	Javob
Agar sistema o'ng tomonidagi barcha ozod hadlar nolga teng, ya'ni $C=0$ (nol matritsa) bo'lsa, (4.2.1) sistema .....	<i>bir jinsli deb yuritiladi.</i>
Chiziqli algebraik tenglamalarning (4.2.1) sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning matritsasi $A$ ning rangi kengaytirilgan matritsasi $B$ ning.....	rangiga teng bo'lishi ( $r(A)=r(B)$ ) zarur va yetarlidir.
<i>Yagona yechimga ega bo'lgan sistema aniqlangan.....</i>	<i>bittadan ortiq yechimga ega bo'lganda esa aniqlanmagan deb yuritiladi.</i>

**Yopiq testlar**

Savol	Javob
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ sistema yechilsin.	$x_1=1, x_2=2, x_3=3$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$	$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1.$
--	------------------------------

### Nazorat savollari

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida yozishni ko'rsating.
2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida qanday yechiladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini haqidagi Kroneker-Kapelli teoremasini ayting.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Jordan-Gauss usulini tushuntirib bering.
5. Pog'onali va uchburchak sistemalar haqida tushuncha bering.
6. Matritsaning xos soni va xos vektori haqida tushuncha bering.

### Adabiyotlar

6. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts G'G'2013, ISBN-13: 978-0313319983
7. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin: de Gruyter, 657 p., 2011.
8. H.Q. Mitchell "Traveller" B1, B2, MM Publications. 2015. 183.
9. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni "PIONEER", B1, B2, MM Publications. 2015. 191.
10. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

## 2-АМАЛИЙ МАШ-УЛОТ: Matritsalar va ularning tatbiqlari. Vektorlar va ularning tatbiqlari

Matritsalarining iqtisodiyotda tatbiqlarini ko'rib chiqamiz. Buning uchun biz iqtisodiy muammoning yechimlarini tahlil qilishimiz va ma'lum xulosalar chiqarishimiz kerak bo'ladi. Matritsa - bu halqalar yoki maydon elementlarining to'rtburchaklar jadvali shaklida yozilgan matematik ob'ekt, bu uning elementlari joylashgan kesishgan satrlar va ustunlar to'plamidir. Matritsaning qatorlari va ustunlari soni matritsaning o'lchamini aniqlaydi.

Matritsalar matematikada chiziqli algebraik yoki differentsial tenglamalarning ixcham sistemalarini yozishda keng qo'llaniladi. Bunday holda, matritsa qatorlari soni tenglamalar soniga, ustunlar soni esa noma'lumlar soniga to'g'ri keladi. Natijada, chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi matritsalar ustidahi amallarga bo'liq bo'ladi.

Matritsa tushunchasi va unga asoslangan matematikaning bo'limi - iqtisodchilar uchun juda muhimdir. Bu iqtisodiy ob'ektlar va jarayonlarning matematik modellarining muhim qismi va juda sodda, eng muhimi ixcham matritsa shaklida yozilganligi bilan

izohlanadi.

Ba'zi bir iqtisodiy bog'liqliklarni yozish uchun matritsalaridan foydalanish qulay.

**1-misol.** Iqtisodiyotning alohida tarmoqlari uchun resurslarni taqsimlash jadvali quyidagicha: 1-jadval.

Resurslar	Iqtisodiyot tarmoqlari	
	Sanoat	Qishloq xo'jaligi
Elektr energiya	5,3	4,1
Mehnat resursi	2,8	2,1
Suv resurslari	4,8	5,1

Uni tarmoqlar bo'yicha resurslarni taqsimlashni matritsa sifatida ixcham shaklda yozish mumkin:

$$A = \begin{pmatrix} 5,3 & 4,1 \\ 2,8 & 2,1 \\ 4,8 & 5,1 \end{pmatrix}$$

Masalan, ushbu yozuvda  $a_{11} = 5,3$  matritsa elementi sanoat tomonidan qancha elektr energiyasi iste'mol qilinishini va  $a_{22} = 2,1$  elementi qishloq xo'jaligi tomonidan qancha mehnat resurslari iste'mol qilinishini ko'rsatadi.

Quyidagi masalanini ko'rib chiqaylik: kompaniyaga uchta turdagi  $P_1, P_2, P_3$  mahsulotlarni ishlab chiqarishga ruxsat berilgan va ikki turdagi  $C_1$  va  $C_2$  xom ashyolardan foydalaniladi. Kompaniyalarni xomashyo iste'mol qilish stavkalari matritsa bilan tavsiflansin:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

bu yerda har bir  $a_{ij}$  element ( $i = 1,2,3; j = 1,2$ )  $j$ -turdagi xom ashyoning qancha birligi  $i$ -turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflanganligini ko'rsatadi. Ishlab chiqarish rejasi  $P_1, P_2, P_3$  mahsulotlar uchun  $C = (100 \ 80 \ 130)$  qator matritsa, har bir turdagi xom ashyoning birlik qiymati (pul birliklari) - matritsa ustuni bilan belgilansin:

$$B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

$A$  va  $C$  matrisalarning ko'paytmasi  $C_1$  va  $C_2$  xom ashyolarning narxini aniqlaydi:

birinchi xom ashyoning narxi  $C_1 = 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$  birlik. ikkinchisi  $C_2 = 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$  birlik, shuning uchun  $S$  matrisani xomashyo xarajatlarining qator matritsasi sifatida yozish mumkin:

$$S = C \cdot A = (100 \quad 80 \quad 130) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \quad 980).$$

Endi xom ashyoning umumiy qiymati  $Q = 730 \cdot 30 + 980 \cdot 50 = 70,900$  birlik qiymatga teng. Uni quyidagi matrisalar ko'paytmasi shaklida yozish mumkin:  $Q = S \cdot B = (CA)B = (70900)$ .

Xom ashyoning umumiy qiymatini boshqacha tartibda hisoblash ham mumkin: birinchi navbatda, mahsulot birligi uchun xom ashyo tannarxi matritsasini hisoblaymiz, ya'ni:

$$R = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} (30 \quad 50) = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}.$$

Keyin esa xom ashyoning umumiy qiymati topiladi:

$$Q = C \cdot R = (100 \quad 80 \quad 130) \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900).$$

Ushbu misol orgali biz matritsalar ko'paytmasining assotsiativlik qonuni bajarilishiga amin bo'ldik:  $(CA)B = C(AB)$ .

Matritsalarining iqtisodiyotda ishlatilishini tahlil qilib, shunday xulosaga kelish mumkinki, matritsalarining afzalliklari shundaki, ular strategik ahamiyatga ega o'zgaruvchilarning keng doirasidan foydalanadi; resurslarning harakat yo'nalishini ko'rsatadi. Shuningdek, matritsalar juda kam mehnat va vaqt sarflab ulkan va juda xilma-xil statistik materiallarni, ijtimoiy-iqtisodiy kompleksning darajasi, tuzilishi va xususiyatlarini tavsiflovchi har xil dastlabki ma'lumotlarni qayta ishlashga imkon beradi.

### Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Mavzu
1.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisani rangini toping	3	2	4	1	1- mavzu
2.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ matrisani rangini toping	2	3	1	0	1- mavzu
3.	Teskari matritsani toping: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{9}{13} \end{pmatrix}$	2	3	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}^{-1}$	1- mavzu
4.	Teskari matritsani toping: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}^{-1}$	2	2	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{2}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} & -\frac{9}{13} \end{pmatrix}$	1- mavzu
5.	$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa berilgan $a_{31}$ elementning minori nechaga teng?	7	6	2	3	1- mavzu
6.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani ko'rsating	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 1$	3	3	1- mavzu



7.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari $A^{-1}$ matritsani ko'rsating	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A^{11} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{36}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	2	1- mavzu	
8.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matritsani rangini toping	2	3	1	0	1- mavzu
9.	$\vec{a} = (11, 10, 9), \vec{b} = (-10, -10, 1),$ $\vec{c} = (0, 9, 8) \quad 7\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c}$ ni toping	(127, 129, 66)	(127, 129, 66)	(127, 129, 66)	(127, 129, 66)	1- mavzu
10.	Ushbu A matritsa berilgan $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $a_{32}$ element minori nimaga teng?	37	21	30	15	1- mavzu

**Shaklan bir biriga yaqin savol-javoblar:**

Savol	Javob
Ushbu matritsaning rangi nechaga teng? $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	<b>4</b>
Ushbu matritsaning rangi nechaga teng? $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	<b>2</b>

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning rangini toping.	<b>4</b>
---	----------

### Yopiq testlar

Savol	Javob
$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ o'rin almashtirishlar uchun $P \circ Q$ ni qisoblang.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$m$ ta satr $n$ ta ustundan iborat bo'lgan $A$ matritsaning satr rangi deb, ....ga aytiladi	satrlar bo'yicha hosil, qilingan vektorlar sistemasini rangi

### Nazorat savollari

1. Matritsaga ta'rif bering. Matritsaning tuzilishi nimadan iborat? Iqtisodiyotga tatbiqi qanday.
2. Diagonal matritsaning ko'rinishini yozing.
3. Birlik matritsaning ko'rinishini yozing. Birlik matritsa iqtisodiy sohada qanday ishlatiladi.
4. Matritsalarining tengligiga va teng emasligiga ta'rif bering. Bu iqtisodiyotda qanday tushiniladi.
5. Maxsus va maxsusmas matritsalariga ta'rif bering.

### Adabiyotlar

1. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
2. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.
3. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra G'G' 2013. Izdanie: 1-e izd. 421 s.
4. Aleksandrov A.D., Netsvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
5. Belogurov A.Yu. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obhestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.

### 3-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ: HOSILA VA UNING TATBIQLARI. INTEGRAL VA UNING TATBIQLARI.

**1-misol.** Radiusi  $r$  ga teng aylananing chorak qismidan iborat bo'lgan birjinsli yoyining og'irlik markazini toping (1- rasm).

**Yechish.** 12.7.22- rasmda  $AB$  aylana choragidan iborat yoy tasvirlangandir. Uning tenglamasi  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq r$ .

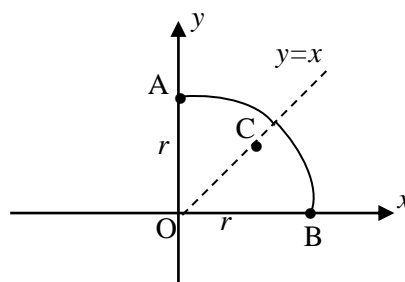
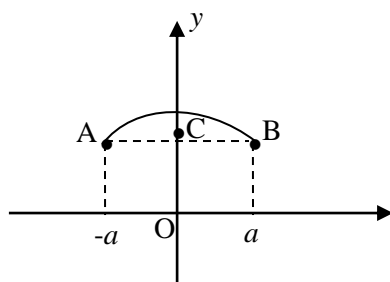
$$\text{Bundan } y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{r}{y}.$$

Aylana chorak qismining uzunligi  $S = \frac{1}{2}\pi r$  bo'lishi ma'lum.

$$Y = \frac{1}{S} \int_0^r y \cdot \frac{r}{y} dx = \frac{2}{\pi r} \cdot r \cdot x \Big|_0^r = \frac{2r}{\pi}.$$

12.7.22-rasmdan ko'rinadiki,  $AB$  yoy birinchi chorak bissektrisasiga nisbatan simmetrikdir, demak, uning og'irlik markazi shu bissektrisada yotadi, ya'ni

$$X = Y = \frac{2r}{\pi}.$$



1-rasm.

$$2\pi YS = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

tenglikni olish qiyin emas. Agar  $y=f(x)$  funksiya  $[a;b]$  kesmada uzluksiz differensiallanuvchi hamda manfiy emas deb faraz qilib, uning grafigi bo'lgan  $AB$  yoyni  $Ox$  o'qi atrofida aylantirishdan sirt hosil qilsak, bu tenglikning o'ng tomoni shu aylanish sirtining yuzi ekanligi ma'lum chap tomoni esa birjinsli  $AB$  yoy og'irlik markazining  $Ox$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylana uzunligini yoy uzunligiga ko'paytmasiga tengdir. Bu quyidagi teoremaning isbotidan iboratdir.

**1-teorema (Guldning birinchi teoremasi).** *Birjinsli tekis egri chiziqni u yotgan tekislikda olingan va uni kesmaydigan, biror o'q atrofida aylantirish natijasida hosil qilingan aylanish sirtining yuzi shu egri chiziq yoyning uzunligi bilan uning og'irlik markazi aylanishidan hosil bo'lgan aylana uzunligining ko'paytmasiga teng.*

**2-misol.** Radiusi  $r$  ga teng bo'lgan birjinsli yarim aylananing og'irlik markazi topilsin.

**Yechish.** Yarim aylanani 12.7.23-rasmdagidek joylashtirsak,  $Oy$  uning simmetriya o'qidan iborat bo'lib, og'irlik markazining absissasi  $X=0$  bo'ladi. Ordinatasini topish uchun yuqoridagi teoremani qo'llaymiz. Yarim aylana o'z diametri atrofida aylanishidan sfera hosil bo'lgani uchun va yuqoridagi teorema bo'yicha

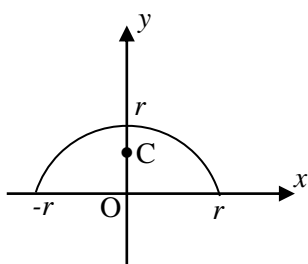
$$4\pi r^2 = 2\pi Y \cdot S, \quad S = \pi r^2 \Rightarrow 4\pi r^2 = 2\pi^2 r Y.$$

Bundan

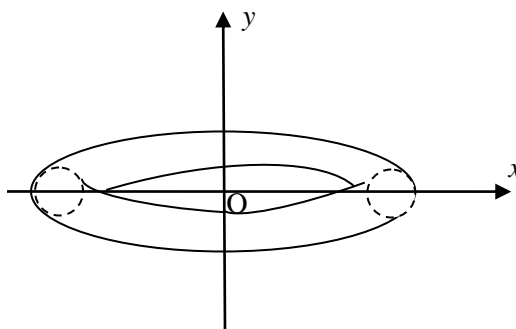
$$Y = \frac{2r}{\pi}.$$

Demak, 2-rasmdagi yarim aylana og'irlik markazi  $C\left(0; \frac{2r}{\pi}\right)$  nuqtadadir.

**3-misol.** Radiusi  $r$  ga teng bo'lgan aylanani, uning tekisligida yotgan va uni kesmaydigan hamda aylana markazidan  $d$  masofada yotgan o'q atrofida aylantirish natijasida hosil qilingan *tor* sirtining yuzi topilsin (3-rasm)



2-rasm.



3-rasm.

**Yechish.** Masala shartiga ko'ra  $d \geq r$ . Aylananing uzunligi  $2\pi r$  va u birjinsli ekanligidan uning og'irlik markazi o'zining markazidan iborat bo'lib, og'irlik markazini  $Oy$  o'qi atrofida aylanishidan uzunligi  $2\pi d$  ga teng bo'lgan aylana hosil bo'ladi. Demak, Guldingning birinchi teoremasiga ko'ra tor sirtining  $Q$  yuzi

$$Q = (2\pi r) \cdot (2\pi d) = 4\pi^2 rd$$

bo'ladi.

**b) Tekis shaklning og'irlik markazi.** Bu yerda  $x=a$ ,  $x=b$  ( $a < b$ ) to'g'ri chiziklar va  $y=f_1(x)$ ,  $y=f_2(x)$  egri chiziqlar bilan chegaralangan zichligi  $\mu(x)$  bo'lgan tekis moddiy shaklni qaraymiz. Shu bilan birga  $f_1(x) \geq f_2(x)$  va ular  $[a; b]$  da uzluksiz deb faraz qilamiz.  $[a; b]$  ni ixtiyoriyicha qilib  $n$  ta bo'laklarga bo'lamiz va bo'linish (tugun) nuqtalarini  $a=x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$  orqali belgilaymiz. Bu tugun nuqtalaridan  $Oy$  o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, tekis shaklni  $n$  ta bo'laklarga ajratamiz,  $i$  - bo'lakdan

$\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$  nuqta tanlab bu bo‘lakchani shakldagidek qilib, zichligi  $\mu(\xi_i)$  gat eng bo‘lgan birjinsli to‘g‘ri to‘rt burchak bilan almashtiramiz. Agar  $\xi_i$  ni  $[x_{i-1}; x_i]$  ning o‘rtasi deb tanlasak, aytilgan to‘g‘ri to‘rtburchakning og‘irlik markazining koordinatalari

$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad h_i = \frac{f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)}{2};$$

uning yuzi esa  $\Delta S_i = [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i$  dan iborat bo‘ladi ( $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ). Agar bu to‘rtburchakni o‘zining og‘irlik markazidagi moddiy nuqta bilan almashtirsak, olingan bunday moddiy nuqtalar sistemasining og‘irlik markazi uchun

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i) [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i) [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i},$$

$$\bar{Y} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mu(\xi_i) [f_2^2(\xi_i) - f_1^2(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \mu(\xi_i) [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}$$

larni olamiz. Oxirgilarda  $\max_i \Delta x_i \rightarrow 0$  limitga o‘tib, tekis shakl og‘irlik markazi  $(X, Y)$  uchun

$$X = \frac{\int_a^b \mu(x) [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b \mu(x) [f_2(x) - f_1(x)] dx},$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \mu(x) [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx}{\int_a^b \mu(x) [f_2(x) - f_1(x)] dx}$$

larni olamiz va, nihoyat, birjinsli tekis shakl uchun

$$X = \frac{1}{S} \int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx, \quad Y = \frac{1}{2S} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$$

formulalar kelib chiqadi, bu yerda  $S$  tekis shaklning yuzi bo‘lib,

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Bu o‘rinda

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$$

va

$$M_y = \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx$$

larni berilgan birjinsli tekis shaklning mos ravishda  $Ox$  va  $Oy$  o'qlarga nisbatan statik momentlari deb yuritilishini ham aytamiz.

**4-misol.** Absissalar o'qi va  $y=2x-x^2$  parabola bilan chegaralangan birjinsli shaklning og'irlik markazi topilsin (12.7.26- rasmga qarang).

**Yechish.**

$$2x - x^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 2.$$

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3};$$

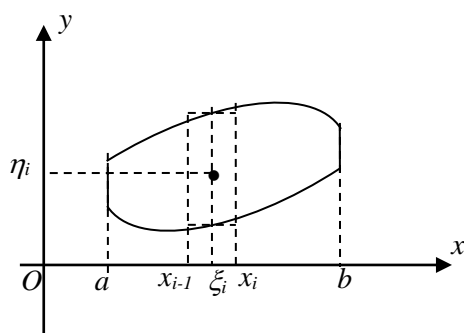
(12.7.33) ga ko'ra:

$$X = \frac{1}{S} \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{3}{4} \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \frac{3}{4} \left( \frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{4} \left( \frac{16}{3} - \frac{16}{4} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{12} = 1$$

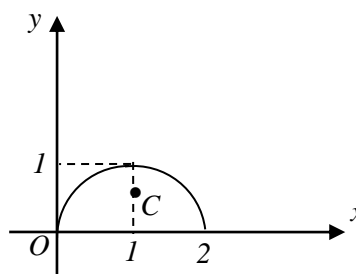
$$Y = \frac{1}{2S} \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{3}{2} \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \frac{3}{8} \left( \frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{8} \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) =$$

$$= \frac{3}{8} \left( 10\frac{2}{3} - 16 + 6\frac{2}{5} \right) = \frac{3}{8} \cdot \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Og'irlik markazi  $C(1;0,4)$  nuqtada. Bu misoldan ko'rinadiki, og'irlik markazi bu shaklning simmetriya o'qidadir.



12.7.25-rasm.



12.7.26-rasm.

Bu umumiy xossa bo'lib, agar birjinsli shakl biror o'qqa nisbatan simmetrik bo'lsa, uning og'irlik markazi shu simmetriya o'qida yotadi.

(12.7.33) formulalarning ikkinchisini

$$2\pi YS = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$$

ko'rinishga keltirish qiyin emas. Bundan ko'rinadiki, tenglikning o'ng tomoni  $\forall x \in [a; b]$   $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$  faraz asosida tekis shaklni  $Ox$  o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmidan iborat bo'lsa, chap tomoni esa birjinsli tekis shakl yuzini uning og'irlik markazi  $Ox$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylananing uzunligiga ko'paytmasidir.

Ya'ni quyidagi o'rinli ekanligini oldik.

### Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Mavzu
1.	Birjinsli tekis shaklni uning tekisligida yotgan va uni kesmaydigan o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanish jismining hajmi danday formuladan topiladi	$V=2\pi YS$	$V=2\pi S$	$V=2\pi YS$ $T$	$V=\pi YS$	3- mavzu
2.	Radiusi $r$ ga teng bo'lgan birjinsli yarim doiraning og'irlik markazini toping	$\left(0; \frac{4}{3\pi}r\right)$	$\left(1; \frac{4}{3\pi}r\right)$	$\left(0; \frac{4}{3\pi}\right)$	$\left(0; \frac{2}{3\pi}\right)$	3- mavzu
3.	Birjinsli radiusi $r$ ga teng bo'lgan yarim aylananing o'z diametriga nisbatan inersiya momenti topilsin.	$\frac{\pi}{2}r^3$	$\frac{\pi}{4}r^3$	1	$\frac{\pi}{2}r^2$	3- mavzu
4.	Berilgan birjinsli tekis shaklning mos ravishda $Ox$ o'qlarga nisbatan statik momentlari	$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - \frac{\pi}{2}r^2] dx$		1	2	3- mavzu
5.	Berilgan birjinsli tekis shaklning mos ravishda $Oy$ o'qlarga nisbatan statik momentlari	$M_y = \int_a^b x[f_2(x) - \frac{\pi}{2}r^2] dx$		3	1	3- mavzu
6.	Hisoblang $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	1	0	3- mavzu
7.	Hisoblang $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{3}$	3	2	3- mavzu

8.	Hisoblang $\int_0^{\infty} e^{-5x} dx$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	2	1	3- mavzu
9.	Hisoblang $\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x^3\sqrt{x}} dx$	bu integral uzoqlash uvchidir	$\frac{1}{5}$	0	1	3- mavzu
10.	Hisoblang $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{\pi}{2}$	bu integral uzoqlash uvchidir	1	2	3- mavzu

**Shaklan bir biriga yaqin savol-javoblar:**

Savol	Javob
$y=0,25x^2+2$ parabola va $5x-8y+14=0$ to'g'ri chiziq kesishishidan hosil bo'lgan shaklning $Ox$ o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jismning hajmi topilsin.	$V = \frac{891}{1280}$
$y=\ln x$ egri chiziq yoyining $x=\sqrt{3}$ dan $x=\sqrt{8}$ gacha bo'lgan qismining uzunligini toping	$1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$
$y=2x$ to'g'ri chiziqning $x=0$ dan $x=2$ gacha oraliqdagi kesmasining $Ox$ o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan konus sirtining yuzini hisoblang.	$8\pi\sqrt{5}$

**Yopiq testlar**

Savol	Javob
$\int_1^y x^2 \ln x dx$ hisoblang	$\frac{2e^3 + 1}{9}$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ hisoblang	$\pi - 2$

**Nazorat savollari**

1. Aniq integral yordamida hajmni topish formulasini yozing.
2. Aniq integral yordamida yoy uzunligini topish formulasini yozing.
3. Aniq integral yordamida aylanma jismning sirtini topish formulasini yozing.
4. Aniq integral yordamida kuchning bajargan ishining formulasini yozing.
5. Cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integralarni ta'riflang.



## Adabiyotlar

11. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts G'G'2013, ISBN-13: 978-0313319983
12. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin: de Gruyter, 657 p., 2011.
13. H.Q. Mitchell "Traveller" B1, B2, MM Publications. 2015. 183.
14. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni "PIONEER", B1, B2, MM Publications. 2015. 191.
15. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

### 4-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ: QATORLAR VA ULARNING TATBIQLARI. DIFFERENTIAL TENGLAMALAR VA ULARNING TATBIQLARI.

Mexanik tebranishlarning bitta turini misol tariqasida ko'rib o'tishni lozim topdik. Ko'plab tebranish jarayonlari chiziqli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar bilan tavsiflanadi. Tenglamalarning tatbiqida erkli o'zgaruvchi vaqtni anglatgani uchun uni  $t$  orqali, uning funksiyasini esa  $x$  orqali belgilanadi.

**Masala** (garmonik tebranishlar haqidagi). Og'irligi  $p$  bo'lgan yuk tinch turgan holatidagi uzunligi  $l$  bo'lgan vertikal prujinaga osilgan. Yukni bir oz pastga tortib, keyin qo'yib yuboriladi. Prujina massasini va havo qarshiligini hisobga olmay, yukning harakat qonunini toping.

**Yechish.**  $Ox$  o'qni yuk osilgan nuqta orqali pastga vertikal yo'naltiramiz. Koordinatalar boshi  $O$  ni yuk muvozanatda bo'lgan holatda, ya'ni yukning og'irligi prujinaning reaksiya kuchi bilan muvozanatlashgan nuqtada olamiz (1-rasm)  $h$ -prujinaning ayni paytdagi uzayishi,  $h_{st}$  esa statik uzayishi, ya'ni cho'zilmagan prujina oxiridagi muvozanat holatgacha bo'lgan masofa. U holda, agar yukning muvozanat holatdan chetlanishini  $x$  bilan belgilasak,

$$h = h_{st} + x$$

bo'ladi.

Harakatning differensial tenglamasini Nyutonning ikkinchi qonuni  $\vec{F} = m\vec{a}$  dan topamiz, bu yerda

$$m = \frac{p}{q}$$

yuk massasi,  $\vec{a}$  harakat tezlanishi,  $\vec{F}$  - yukka qo'yilgan kuchlarning teng ta'sir etuvchisi. Mazkur holda teng ta'sir etuvchi kuch prujinaning taranglik kuchi va og'irlik kuchi  $P$  ning yig'indisidan iborat. Guk qonuniga ko'ra prujinaning taranglik kuchi uning uzayishiga proporsional, ya'ni

$$-ch$$

ga teng, bu yerda  $c$  o'zgarmas proporsionallik koeffitsienti, u prujinaning *birligi* deyiladi.

Shuning uchun harakatning differensial tenglamasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$m \frac{dx}{dt^2} = ch + p$$

muvozanat holatida prujaning taranglik kuchi og‘irlik kuchi bilan muvozanatlashgani uchun

$$p = ch_{ct}$$

bo‘ladi. Differensial tenglamaga  $p$  ning ifodasini qo‘yib va  $h - h_{ct} = x$  ekanligidan tenglamani

$$m \frac{dx}{dt^2} = -cx$$

ko‘rinishga yoki  $\frac{c}{m} = k^2$  deb,

$$\frac{dx}{dt^2} + k^2 x = 0 \quad (1)$$

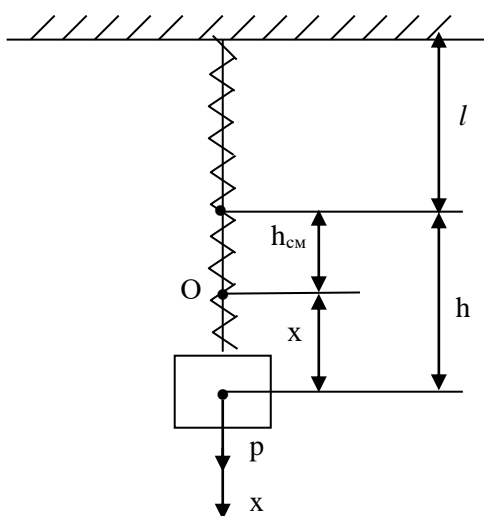
ko‘rinishga keltiramiz.

Bu prujining erkin tebranishlari tenglamasi deb ataladi. U *garmonik ossillyatorning tenglamasi* deb ham yuritiladi. Bu koeffitsientlari o‘zgarmas bo‘lgan ikkinchi tartibli chiziqli birjinsli differensial tenglamadir. (1)ning xarakteristik tenglamasi

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

mavhum  $\lambda_{1,2} = \pm ik$  ildizlarga ega, bunga tegishli umumiy yechim

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$$



1-rasm

Yechimning fizik ma‘nosini aniqlash uchun yangi ixtiyoriy o‘zgarmaslar kiritib, uni

$$x = A \sin(kt + \alpha) \quad (2)$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. Shunday qilib, yuk muvozanat holati atrofida garmonik tebranadi.

A kattalik tebranishning amplitudasi,  $kt + \alpha$  argument esa *tebranish fazasi* deyiladi. Fazaning  $t=0$  dagi qiymati, ya‘ni  $\alpha$  kattalik tebranishning *boshlang‘ich fazasi* deyiladi

$k = \sqrt{cm}$  kattalik tebranish chastotasidir. Tebranishning

$$T = 2\pi k = 2\pi\sqrt{mc}$$

davri  $k$  chastota faqat prujinaning bikrligi va sistema massasiga bog'liq.

$$C = p/h_{ct} = mg/h_{ct}$$

Bo'lgani sababli, davr uchun

$$T = 2\pi\sqrt{h_{ct}/g}$$

formulani ham hosil qilish mumkin. Yukning harakati tezligini yechimni differensiallash orqali topamiz:

$$g = \frac{dx}{dt} = Ak \cos(kt + \alpha)$$

Amplituda va boshlang'ich fazani aniqlash uchun boshlang'ich shartlar berilgan bo'lishi kerak. Aytaylik, boshlang'ich  $t=0$  paytda yukning holati  $x=x_0$  va tezligi  $g=g_0$  bo'lsin. U holda

$$x_0 = A \sin \alpha, \quad g_0 = Ak \cos \alpha.$$

Bundan

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{g_0}{k}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{g_0} \left( \alpha = \operatorname{arctg} \frac{kx_0}{g_0} \right), \quad (g_0 \neq 0)$$

Amplituda va boshlang'ich faza formulalaridan ko'rinishicha, ular xususiy tebranishlar chastotasi va davridan farqli o'laroq sistemaning boshlang'ich holatiga bog'liq. Boshlang'ich holatda ( $g_0=0$ ) bo'lsa, amplituda  $A=|x_0|$ , boshlang'ich fazasi  $\alpha=\pi/2$  bo'lib, (14.10.2) dan

$$x = x_0 \sin\left(kt + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = x_0 \cos kt \quad (3)$$

ni olamiz.

Agar sonli ma'lumotlar berilgan bo'lsa, masalan,  $p=2N$   $l=40$  sm,  $h_{st}=4$  sm shu bilan birga yuk  $x_0=2$  sm ga tortilib, boshlang'ich tezliksiz ( $g_0=0$ ) qo'yib yuborilgan bo'lsin, u vaqtda berilganlar asosida quyidagilarni hisoblaymiz:

$k = \sqrt{cg/p}$  chastota,  $p=ch_{ct}$  munosabatdan

$$\frac{c}{p} = \frac{1}{h_{ct}} = \frac{1}{4},$$

demak,

$$k = \sqrt{g/2} \frac{1}{cek}, \quad A = \sqrt{x_0^2 + g_0^2/k^2} = 2cm, \quad c = \frac{p}{h_{ct}} = \frac{2N}{4cm} = \frac{1}{2} \frac{N}{cm}$$

va

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Bularni (14.10.3) ga qo'yib,

$$x = \cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{g}\right)$$

ni olamiz.

Yukning tebranish davri

$$T = 2\pi/k = 4\pi/\sqrt{g} \approx 0,4 \text{ sek}$$

eng katta cho'zilish

$$h_{\max} = h_{sm} + A = 6 \text{ cm}$$

Prujining eng katta taranglik kuchi

$$\vec{F}_{\max} = ch_{\max} = 3N$$

### Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Mavzu
1.	Sistemani yeching 3) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - 3y + te^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y + e^{3t} \end{cases}$	$\begin{cases} x = c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - 3e^{2t} \\ y = \left(c_1 - \frac{c_2}{3}\right) - c_2 t + \left(\frac{t^2}{2} - 2e^{2t}\right) e^{2t} \end{cases}$	$\begin{cases} x = c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - 3e^{2t} \\ y = \left(c_1 - \frac{c_2}{3}\right) + c_2 t + \frac{t^2}{2} - e^{2t} \end{cases}$	$\begin{cases} x = c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - 3e^{2t} \\ y = \left(c_1 - \frac{c_2}{3}\right) + c_2 t + \frac{t^2}{2} - e^{2t} \end{cases}$	$\begin{cases} x = c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} - 3e^{2t} \\ y = \left(c_1 - \frac{c_2}{3}\right) + c_2 t + \frac{t^2}{2} - e^{2t} \end{cases}$	4- mavzu
2.	Tenglamani yeching $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$	$y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{y^2}\right) \ln x + \frac{3}{4} y^2$	$\left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{y^2}\right) \ln x + \frac{3}{4} y^2$	$\left(\frac{1}{2} x^2 + \ln x + \frac{3}{4} x^2\right) \ln x + \frac{3}{4} x^2$	$\left(\frac{1}{2} x^2 + \ln x + \frac{3}{4} x^2\right) \ln x + \frac{3}{4} x^2$	4- mavzu
3.	Ushbu masala nechta echimga ega $y''' + 3y' = x$ , $y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = 2$	echimga ega emas	ikkita	yagona echimga ega	cheksiz ko'p echimga ega	4- mavzu
4.	Ushbu $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ tenglamani echimini toping.	$y = cx^3 + x^2$	$y = 3x^3 + cx^2$	$x = cy^3 + y^2$	$y = cx + x^2$	4- mavzu
5.	Quyidagi $y = xy' - 2y^3$ tenglamani maxsus echimini toping	$6y^2 = x^3$	$y^2 = 9x^3$	$27y^2 = 2x^3$	$3y^3 = x^2$	4- mavzu
6.	$ydx + (x + 3y^2)dy = 0$ tenglamani umumiy echimini toping	$y = cx^2 - 1$	$y^3 = cx + x^2$	$xy + y^3 = c$	$y = 0$	4- mavzu
7.	Ushbu $y = -xy' + \cos y'$ tenglama . . . tenglamasi deb ataladi.	Bernulli	Lagranj	Klero	Rikkati	4- mavzu
8.	Qanday almashtirish bajarilsa, ushbu $y' - xy = 4\sqrt{y}$ tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keladi?	$z = \frac{1}{\sqrt{y}}$	$y = zx$	$z = \sqrt{y}$	$y = zx^2$	4- mavzu

9.	Tenglama nechta echimga ega $y' = xy - y^3, y(0) = 0$	echimga ega emas	1	*2	3	4- mavzu
10	$y'' + 16y = 0$ tenglamaning umumiy echimini toping	$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}$ $y = ce^{-16x}$		$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$	$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}$	4- mavzu

### Shaklan bir biriga yaqin savol-javoblar:

Savol	Javob
Ushbu $\arctg x$ , $1$ , $\arccos x$ funktsiyalar chiziqli bog'liqmi?	yo'q
Tenglamaning tipini aniqlang $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$	chiziqli
Berilgan $\varphi_1(x) = \sin^2 x$ , $\varphi_2(x) = \cos^2 x$ , $\varphi_3(x) = a$ funktsiyalar sistemasi chiziqli erkli bo'ladimi?	yo'q

### Yopiq testlar

Savol	Javob
Ushbu $y = cx^2$ chiziqlar sinfnining differensial tenglamasini toping	$y'x = 3y$
Qanday almashtirish yordamida $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin?	$z = y^2$

### Nazorat savollari

1. Yuqori tartibli chiziqli birjinslimas o'zgarmas koeffitsientli oddiy differensial tenglamaning umumiy ko'rinishini yozing.
2. Mexanik tebranishlarning differensial tenglamasini yozing.
3. Chiziqli birjinsli o'zgarmas koeffitsientli oddiy differensial tenglamasining normal sistemasini yechishda Eyler usulini tushuntiring.

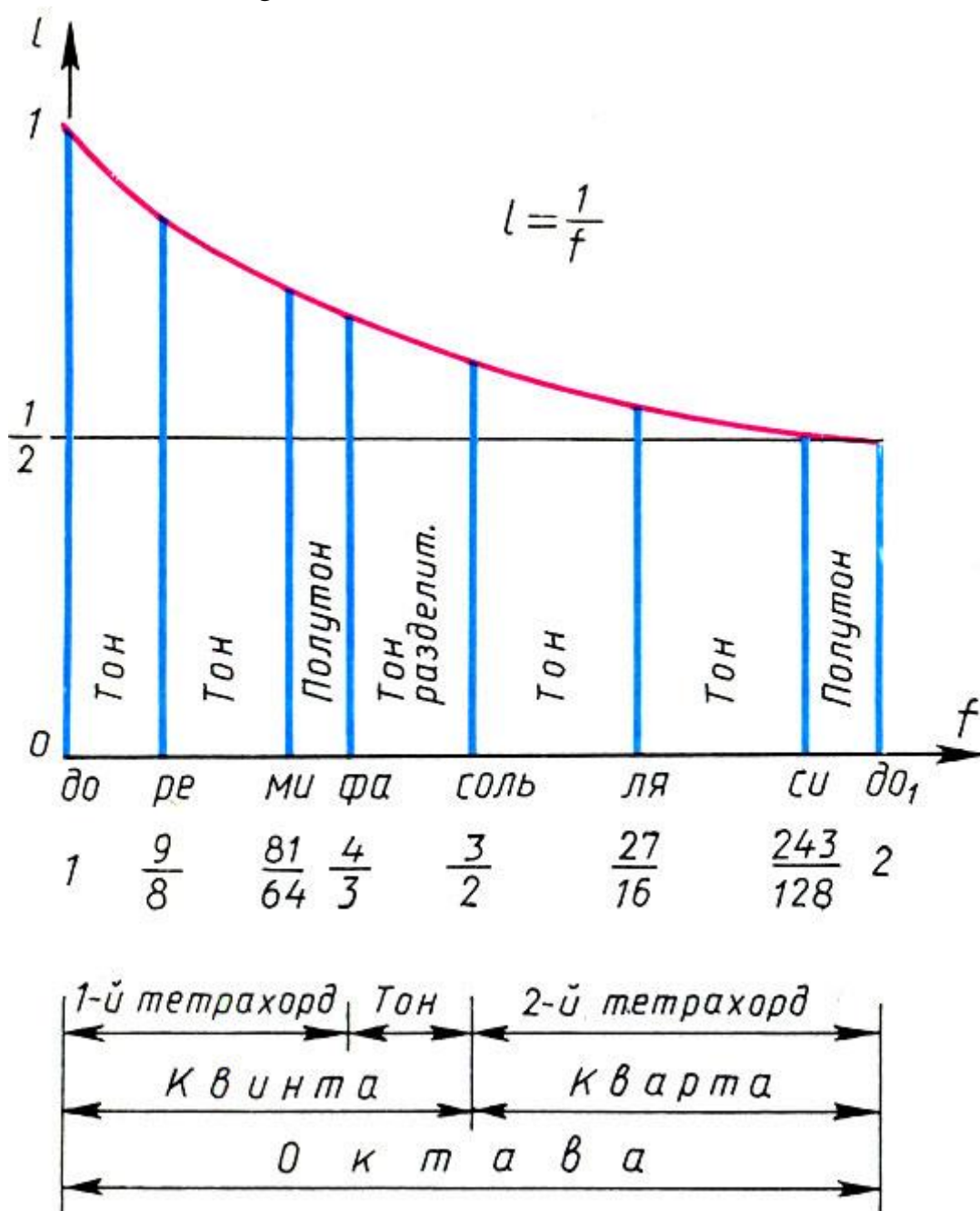
### Adabiyotlar

1. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
2. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.
3. Avilova L.V., Bolotyuk V.A., Bolotyuk L.A. Analiticheskaya geometriya i lineynaya algebra G'G' 2013. Izdanie: 1-e izd. 421 s.
4. Aleksandrov A.D., Netsvetaev N.Yu. Geometriya, M.: Nauka, 1990. – 672 s.
5. Belogurov A.Yu. Modernizatsiya protsessa podgotovki pedagoga v kontekste innovatsionnogo razvitiya obhestva: Monografiya. — M.: MAKS Press, 2016. — 116 s. ISBN 978-5-317-05412-0.

## 5-MAVZU: MATEMATIKA VA SA'NAT

Musiqqa yozish uchun ehtimollik usullaridan foydalanishni Yanis Xenakis taklif qilgan. Uning ishi, yutuqlari va sevimli mashg'ulotlarini birlashtirgan narsa shundaki, u hamma joyda matematik usullarni qo'llash imkoniyatlarini izlagan.

Masalan, to'g'ri chiziqlardan foydalanish g'oyasi va tanlangan matematik model bo'yicha musiqiy kompozitsiyani dinamik ravishda rivojlantirish g'oyasi u tomonidan ko'p yillar davomida ishlab chiqilgan. Model tasodifiy jarayon bilan aniqlanadi, shunda tanlangan vaqt ichida muallif tomonidan ko'rsatilgan signal spektri, balandlikning fazoviy taqsimoti va hk tavsiflangan.



Matematikani sa'nat sohasiga taqbiqi ko'p jihatdan taqribiy hisoblashlarga

asoslanadi. Tajriba asosida  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi jadval ko'rinishida aniqlangan bo'lsin:

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	...	$y_n$

Amaliy masalalarni hal qilishda, aksariyat hollarda funksional bog'lanishni qandaydir ko'phad ko'rinishida qidiriladi, ya'ni

$$f(x, B_0, B_1, \dots, B_m) = \sum_{j=0}^m B_j x^j$$

deb olinadi (bu yerda  $m \leq n-1$ ). U holda,  $B_j (j=0, 1, \dots, m)$  larni aniqlash uchun eng kichik kvadratlar usuli asosida

$$\sum_{j=0}^m \left( \sum_{i=1}^n x_i^{j+k} \right) B_j = \sum_{i=1}^n y_i x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (1)$$

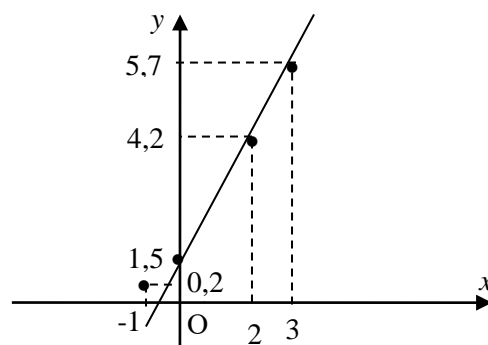
sistemaga kelish qiyin emas. Endi misollar keltiraylik.

**1-misol.** Tajriba asosida  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi jadval ko'rinishida aniqlangan bo'lsin:

$x$	-1	0	2	3
$y$	0,2	1,5	4,2	5,7

Bu o'zgaruvchilar orasidagi taxminiy bog'lanish topilsin.

**Yechish:** koordinatalar tekisligida nuqtalarni quramiz.



1 –rasm.

1-rasmdan ko'rinadiki, nuqtalar qandaydir to'g'ri chiziq atrofida guruhlashgandir. Demak, chiziqli bog'lanishni tanlaymiz:

$$y = B_1 x + B_0$$

Noma'lum  $B_0$  va  $B_1$  parametrlarni hisoblash mumkin. Hisoblarni osonlashtirish maqsadida quyidagi jadvaldan foydalanamiz:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$
1	-1	0,2	-0,2	1
2	0	1,5	0	0
3	2	4,2	8,4	4
4	3	5,7	17,1	9
$\Sigma$	4	11,6	25,3	14

$$B_0 = \frac{14 \cdot 11,6 - 4 \cdot 25,3}{4 \cdot 14 - 4^2} = \frac{162,4 - 101,2}{56 - 16} = \frac{61,2}{40} = 1,53;$$

$$B_1 = \frac{4 \cdot 25,3 - 4 \cdot 11,6}{40} = \frac{101,2 - 46,4}{40} = \frac{54,8}{40} = 1,37$$

Demak,

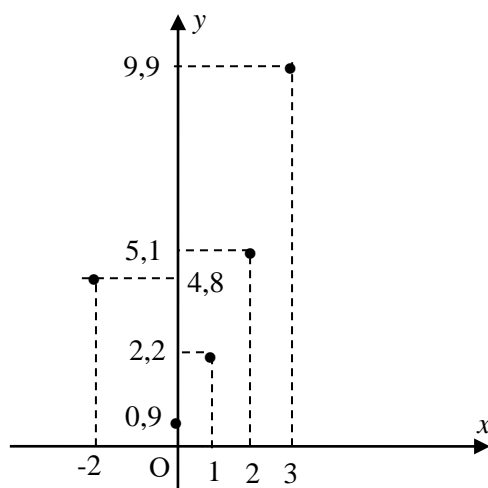
$$y = 1,37x + 1,53$$

**2-misol.** Tajribada olingan

$x$	-2	0	1	2	3
$y$	4,8	0,9	2,2	5,1	9,9

jadval bo'yicha  $x$  va  $y$  lar orasidagi bog'lanishni aniqlang.

**Yechish.** Koordinatalar tekisligida nuqtalarni quramiz.



2 –rasm.

2-rasmdan ko'rinadiki, qurilgan nuqtalar qandaydir parabola atrofida guruhlashgandir. Shuning uchun bog'lanishni

$$y = B_0 + B_1x + B_2x^2$$

ko'rinishda tanlaymiz. U holda (1) sistema



$$\sum_{j=0}^2 \left( \sum_{i=1}^5 x_i^{j+k} \right) B_j = \sum_{i=1}^5 y_i x_i^k, k = 0, 1, 2$$

ko‘rinishni oladi. Bu sistemaning yoyilgan ko‘rinishi

$$\begin{cases} 5B_0 + \left( \sum_{i=1}^5 x_i \right) B_1 + \left( \sum_{i=1}^5 x_i^2 \right) B_2 = \sum_{i=1}^5 y_i, \\ \left( \sum_{i=1}^5 x_i \right) B_0 + \left( \sum_{i=1}^5 x_i^2 \right) B_1 + \left( \sum_{i=1}^5 x_i^3 \right) B_2 = \sum_{i=1}^5 y_i x_i, \\ \left( \sum_{i=1}^5 x_i^2 \right) B_0 + \left( \sum_{i=1}^5 x_i^3 \right) B_1 + \left( \sum_{i=1}^5 x_i^4 \right) B_2 = \sum_{i=1}^5 y_i x_i^2 \end{cases}$$

bo‘ladi.

Oxirgi sistemaning koeffitsientlarini hisoblashni osonlashtirish maqsadida quyidagi jadvalni tuzamiz:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$	$y_i x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$
1	-2	4,8	-9,6	4	19,2	-8	16
2	0	0,9	0	0	0	0	0
3	1	2,2	2,2	1	2,2	1	1
4	2	5,1	10,2	4	20,4	8	16
5	3	9,9	29,7	9	89,1	27	81
$\Sigma$	4	22,9	32,5	18	130,9	28	114

Demak,

$$\begin{cases} 5B_0 + 4B_1 + 18B_2 = 22,9; \\ 4B_0 + 18B_1 + 28B_2 = 32,5; \\ 18B_0 + 28B_1 + 114B_2 = 130,9 \end{cases}$$

sistemaga egamiz. Bu sistemani Jordan-Gaus usuli yordamida echaylik.

$$\begin{cases} B_0 + 0,8B_1 + 3,6B_2 = 4,58; \\ 14,8B_1 + 13,6B_2 = 14,18; \Leftrightarrow \\ 13,6B_1 + 49,2B_2 = 48,46; \\ B_0 + 2,8649B_2 = 3,8135; \\ B_1 + 0,9189B_2 = 0,9581; \Leftrightarrow \\ 36,7030B_2 = 35,4298; \\ B_0 \approx 1,0480; \\ B_1 \approx 0,0711; \\ B_2 \approx 0,9653. \end{cases}$$

Demak,  $y = 1,0480 + 0,0711x + 0,9653x^2$

### Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Mavzu
1.	<p>Кўрсатилган <math>L</math> чизик бўйича биринчи тур эгри чизикли интегрални ҳисобланг</p> $L = \{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t \quad z = t, 0 \leq t \leq 2\pi.\}$ $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds.$	$\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}(3+4\pi^2)$	$\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}(1+\pi^2)$	$\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	5-mavzu
2.	<p>Иккинчи тур эгри чизикли интегрални ҳисобланг</p> $\int_L (2-y)dx + xdy,$ $L = \{(x, y) : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ <p>чизик параметрини ўсиш тартибда олинади.</p>	$-2\pi$	$2\pi$	$\pi$	$-\pi$	5-mavzu
3.	<p>Иккинчи тур эгри чизикли интегрални ҳисобланг</p> $\int_L \frac{ydx + xdy}{1+x^2y^2}, \quad L = AB$ <p>кесма, <math>A = (0,0), \quad B = (1,1).</math></p>	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	5-mavzu
4.	<p>Кўрсатилган <math>L</math> чизик бўйича биринчи тур эгри чизикли интегрални ҳисобланг</p> $L = \{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t \quad z = t, 0 \leq t \leq 2\pi.\}$ $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds.$	$\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}(3+4\pi^2)$	$\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}(1+\pi^2)$	$\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	5-mavzu
5.	<p>Куйидаги чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг</p> $xy = a^2, x + y = \frac{5}{2}a$ <p><math>(a &gt; 0)</math></p>	$(\frac{15}{8} - 2 \ln 2)a$	$(\frac{15}{8} - 2 \ln 2)a$	$(\frac{15}{8} - \ln 2)a$	$(\frac{15}{8} - \ln 4)a$	5-mavzu

6.	Куйидаги чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг $xy = 1, \quad x + y = \frac{5}{2}$	$(\frac{15}{8} - 2 \ln 2)(\frac{15}{8} - \ln 2)$	$\frac{15}{8}$	12	15	5- mavzu
7.	Куйидаги чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг $xy = 4, \quad x + y = 5 \quad (a > 0)$	$(\frac{15}{2} - 8 \ln 2)$	$8(2 - \ln 2)$	7,5- $\ln 2$	$\ln 2$	5- mavzu
8.	Куйидаги функцияни экстремумга текширинг: $Z = x^3 + y^3 - 3xy.$	$\min Z = -1$ (1,1)	$\max Z = -1$ (1,1)	экстремум нукта йўқ	$\max Z = 1$ (1,0)	5- mavzu
9.	Куйидаги функцияни экстремумга текширинг: $Z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$	$\min Z = -2$ (-1,-1) ва $\min Z = -2$ (1,1) ; (0;0) нуктада экстремум йўқ	$2\min Z = -2$ (-1,-1)	$\min Z = -2$ (1,1)	(0;0) нуктада экстремум йўқ	5- mavzu
10	Агар $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$ бўлса, $d^3u$ ни ҳисобланг.	$6(dx^3 - 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3) + 3dxdy^2 + 3dxdy^2 + dy^3$	$6(dx^3 + 3dx^2dy - 3dx + dy^3)$	$6(dx^3 - 3dx^2dy + 3dxdy^2 - dy^3)$	$6(dx^3 - 3dx^2dy + 3dxdy^2 - dy^3)$	5- mavzu

### Shaklan bir biriga yaqin savol-javoblar:

Savol	Javob
$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$ қатор йиғиндисини топинг.	$\frac{3}{2}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ қатор йиғиндисини топинг.	3
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ қатор йиғиндисини топинг.	1

### Yopiq testlar

Savol	Javob
Нукталар ўрнига мосини қўйинг. Мусбат ҳадли қатор яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги ... бўлиши зарур ва етарли.	юқоридан чегараланган
Нукталар ўрнига мосини қўйинг. Қатор яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилар кетма-кетлиги ... бўлиши зарур ва	фундаментал

старли.	
---------	--

## V. ГЛОССАРИЙ

Termin	O'zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
chiziqli tenglamalar sistemasi	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ <p>ko'rinishdagi yozuvga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.</p>	A system of linear equations
chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi	$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ <p>sistemadagi barcha tenglamalarni qanoatlantiruvchi <math>(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)</math> tartiblangan juftlikka aytiladi</p>	Solution of systems of linear equations
Matritsa	<p><math>a_{ik}</math> haqiqiy sonlar <math>m</math> ta satr va <math>n</math> ta ustunda joylashgan quyidagi to'g'ri to'rtburchak</p> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$ <p>shaklidagi jadvalga <math>m \times n</math> o'lchamli matritsa deyiladi.</p>	A matrix
Satr	matritsa qatori	A row
Ustun	matritsa qatori	A column
Matritsalar ustida amallar	Qo'shish ayirish, ko'paytirish	Operations on matrices

yuqori uchburchakli matritsa	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ <p>ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.</p>	Upper triangle Matrix
Quyi uchburchakli matritsa	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ <p>ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.</p>	Bellow triangle Matrix
diagonal matritsa;	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ <p>ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.</p>	Diagonal Matrix
birlik matritsa.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$ <p>ko'rinishdagi matritsaga aytiladi.</p>	Unitary Matrix
Determinant	Kvadrat matritsaning har bir satr va har bir ustunidan	Determinant

	bittadan elementlar olib tuzilgan ko'paytmalarning algebraik yig'indisiga berilgan kvadrat matritsaning determinanti deyiladi.	
Determinantning xossalari	Determinantga oid mazmu	The properties of the Determinants
Sonni Determinantga ko'paytirish	A kvadrat matritsaning biror bir satr (ustun) elementlarini noldan farqli $\lambda$ skalyarga ko'paytirilsa, u holda A matritsaning determinanti $\lambda$ skalyarga ko'paytiriladi.	Multiply by a scalar to the determinant
Nol matrissaning Determinanti	Nolga teng bo'lgan qiymat	The Determinant of the null matrix

## VI. ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

### I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

8. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 592 б.

9. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.

10. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 592 б.

11. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.

12. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.

### II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

13. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.

14. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.

17. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.

18. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.

19. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.

20. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

21. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий



таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

22. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.

### Ш. Махсус адабиётлар

23. Andrea Prosperetti, *Advanced Mathematics for Applications*, Cambridge University Press, 2011.

24. Bauer, H. *Measure and Integration Theory*, Berlin: de Gruyter, ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

25. Bear, H.S. *A Primer of Lebesgue Integration*, San Diego: Academic Press, 2<sup>nd</sup> Edition, 2001.

26. Bobenko A.I. (Ed.) *Advances in Discrete Differential Geometry*// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464

27. Bogachev, V. I. *Measure theory*, Berlin: Springer, 2006.

28. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.

29. *English for Specific Purposes*. All Oxford editions. 2010. 204.

30. Evan M. Glazer, John W. McConnell *Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts*//2013, ISBN-13: 978-0313319983

31. Georgii H.O. *Gibbs measures and phase transitions*. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

32. H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

33. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

34. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, *Engineering Mathematics 2*, Malaysia, 2019.

35. Jim Libby, *Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry*// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

36. Karl Berry, *The TEX Live Guide*—2020

37. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

38. Manfredo P. Do Carmo. *Differential geometry of Curves and surface* // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.

39. *Maple 15 user manual*, Maplesoft, 2016, 462 p.

40. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, *Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences* (11th Edition), Pearson 2018.
41. Rao, M. M. *Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis*, 9, World Scientific, 2012.
42. Steve Taylor “Destination” *Vocabulary and grammar*”, Macmillan 2010.
43. Tao, Terence. *An Introduction to Measure Theory*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
44. Weaver, Nik *Measure Theory and Functional Analysis*. World Scientific, 2013, 423 p.
45. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. *Аналитическая геометрия и линейная алгебра*// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.
46. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. *Геометрия*, М.: Наука, 1990. – 672 с.
47. Белогуров А.Ю. *Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография*. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.
48. Гулобод Қудратуллоҳ кизи, Р.Ишмухамедов, М.Нормухаммедова. *Анъанавий ва ноанъанавий таълим*. – Самарқанд: “Имом Бухорий халқаро илмий-тадқиқот маркази” нашриёти, 2019. 312 б.
49. Ибраймов А.Е. *Масофавий ўқитишнинг дидактик тизими. методик қўлланма/ тузувчи. А.Е. Ибраймов*. – Тошкент: “Lesson press”, 2020. 112 бет.
50. Ишмухамедов Р.Ж., М.Мирсолиева. *Ўқув жараёнида инновацион таълим технологиялари*. – Т.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 б.
51. Кирянов Д. *Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0*. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.
52. Муслимов Н.А ва бошқалар. *Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма*. – Т.: “Sano-standart”, 2015. – 208 б.
53. *Образование в цифровую эпоху: монография / Н. Ю. Игнатова; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина»*, Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. [http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0\\_2017.pdf](http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf)
54. Олий таълим тизимини рақамли авлодга мослаштириш концепцияси. Европа Иттифоқи Эрасмус+ дастурининг кўмагида. [https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3\\_UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf](https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3_UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf)
55. *Современные образовательные технологии: педагогика и психология: монография. Книга 16 / О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бу-гакова и др.* – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с. <http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf>

56. Усмонов Б.Ш., Ҳабибуллаев Р.А. Олий ўқув юртларида ўқув жараёнини кредит-модуль тизимида ташкил қилиш.–Т.: “ТКТИ” нашриёти, 2019.

#### IV. Интернет сайтлар

57. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги: [www.edu.uz](http://www.edu.uz).

58. Бош илмий-методик марказ: [www.bimm.uz](http://www.bimm.uz)

59. [www.Ziyonet.Uz](http://www.Ziyonet.Uz)

60. Открытое образование. <https://openedu.ru/>

61. <https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma>

62. <https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/>

63. <https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search>

64. <https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html>

65. <https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics>.