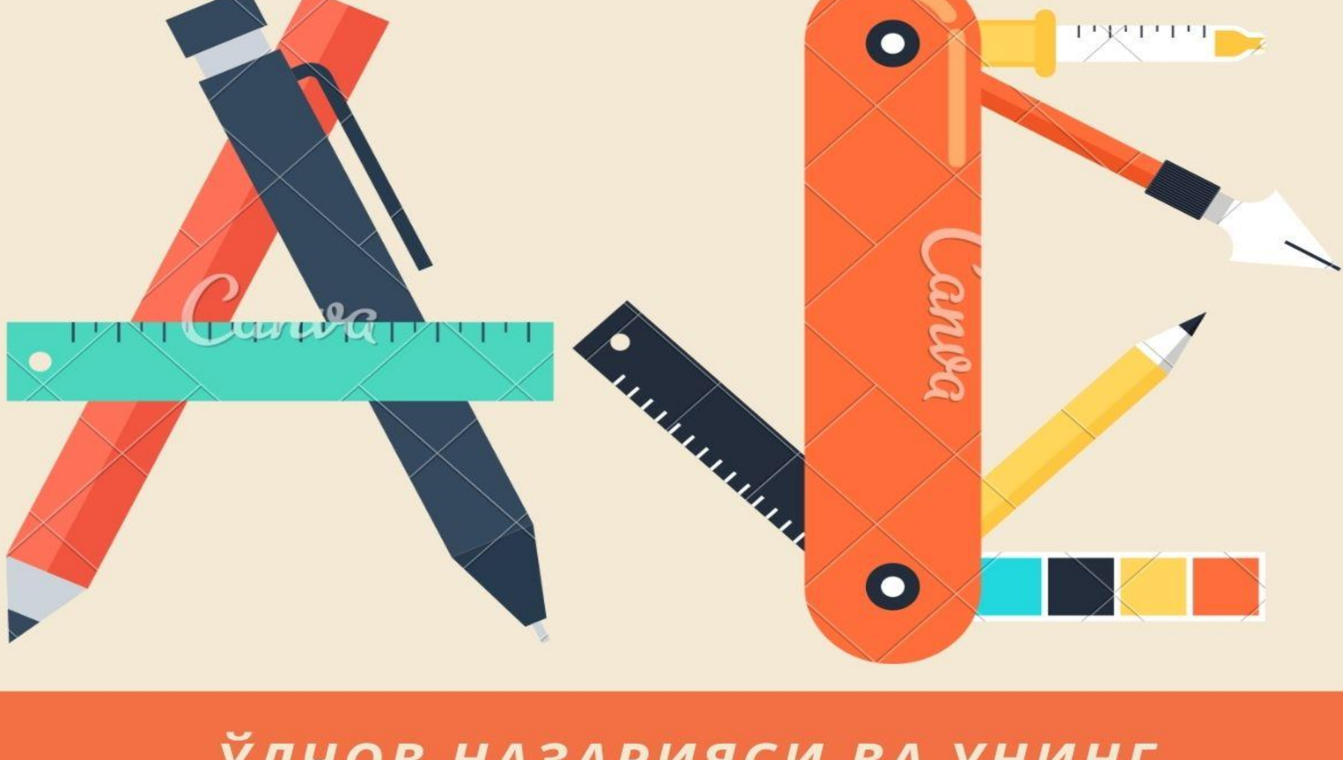
БОШ ИЛМИЙ-МЕТОДИК МАРКАЗ

САМДУ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ



ЎЛЧОВ НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ҚЎЛЛАНИШИ МОДУЛИДАН ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Самарқанд - 2021

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМИ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ-МЕТОДИК МАРКАЗИ

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

“ЎЛЧОВ НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ҚЎЛЛАНИШИ”

МОДУЛИ БЎЙИЧА

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси йўналиши: Математика

Самарқанд -2021

Модулнинг ўқув-услубий мажмуаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил “7”-декабрдаги 648-сонли баённомаси билан маъқулланган ўқув дастури ва ўқув режасига мувофиқ ишлаб чиқилган.

Тузувчилар:
Самарқанд давлат университети Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика кафедраси профессори Ж.Абдуллаев

Тақризчилар:
Самарқанд давлат университети Математик физика ва функционал анализ кафедраси мудири, академик С.Лақаев

Ўқув-услубий мажмуа Самарқанд давлат университети илмий-методик кенгаши (2020 йил “28”-декабрдаги 4- сонли баённомаси).

МУНДАРИЖА

I. МОДУЛНИНГ ИШЧИ ДАСТУРИ

Кириш

Олий таълим муассасалари педагог кадрларининг малакасини ошириш ва уларни қайта тайёрлаш бугунги куннинг энг долзарб масалаларидан бири бўлиб келмоқда. Мамлакатимиз таълим тизимида босқичма-босқич амалга оширилаётган ислоҳотлар бу масалага янада масъулият билан ёндошишни талаб қилмоқда.

Мазкур дастур замонавий талаблар ва ривожланган хорижий давлатларнинг олий таълим соҳасида эришган ютуқлар ҳамда орттирилган тажрибалар асосида «Математика» қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналиши учун тайёрланган намунавий ўқув режа ҳамда дастур мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришда хизмат қилади.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир. «Математика фанларини ўқитишнинг замонавий усуллари» модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

Масалаларни ечишда математик усулларни амалиётда қўллаш ҳозирги пайтда кенг тарқалган компьютерли математик тизимлар (MathCad, Maple, MatLab, Matematica, Derive) нинг функционал имкониятларига таянади. Кўп функционалли математик дастурий таъминотлардан фойдаланиш математик таълимотнинг амалий аспектларини жорий этишни кучайтириб қолмасдан, балки мутахассисларнинг касбий тайёргарлигини кўтаради. Мутахассиснинг математик компетентлик нуқтаи-назаридан математик масалаларни ечишда турли усулларни қўллаш (аниқ ва тақрибий ечиш усуллари, натижаларни символли (аналитик), сонли ҳамда график кўринишда олиш) ва ечимни турли шаклда олиш ҳар хил турдаги инструментларнинг уникал вариатив имкониятларини тушинишга имконият беради. Буларнинг барчаси, яъни касбий таълим мақсади учун масала моҳиятини тушуниш услубий муаммо долзарблигини оширади.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

Олий таълим муассасалари педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш Модулининг **мақсади** педагог кадрларни инновацион ёндошувлар асосида ўқув-тарбиявий жараёнларни юксак илмий-методик даражада лойиҳалаштириш, соҳадаги илғор тажрибалар, замонавий билим ва малакаларни ўзлаштириш ва амалиётга жорий этишлари учун зарур бўладиган касбий билим, кўникма ва малакаларини такомиллаштириш, шунингдек уларнинг ижодий фаоллигини ривожлантиришдан иборат.

Модулнинг **вазифаларига** қуйидагилар киради:

- “Математика” йўналишида педагог кадрларнинг касбий билим, кўникма, малакаларини такомиллаштириш ва ривожлантириш;

-педагогларнинг ижодий-инновацион фаоллик даражасини ошириш;

-мутахассислик фанларини ўқитиш жараёнига замонавий ахборот-коммуникация технологиялари ва хорижий тилларни самарали татбиқ этилишини таъминлаш;

- мутахассислик фанлари соҳасидаги ўқитишнинг инновацион технологиялари ва илғор хорижий тажрибаларини ўзлаштириш;

“Математика” йўналишида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларини фан ва ишлаб чиқаришдаги инновациялар билан ўзаро интеграциясини таъминлаш.

Модул якунида тингловчиларнинг билим, кўникма ва малакалари ҳамда компетенцияларига қўйиладиган талаблар:

“Кредит модул тизими ва ўқув жараёнини ташкил этиш”, “Илмий ва инновацион фаолиятни ривожлантириш”, “Педагогнинг касбий профессионаллигини ошириш”, “Таълим жараёнига рақамли технологияларни жорий этиш”, “Махсус мақсадларга йўналтирилган инглиз тили” модуллари бўйича тингловчиларнинг билим, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар тегишли таълим соҳаси бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш мазмуни, сифати ва уларнинг тайёргарлиги ҳамда компетентлигига қўйиладиган умумий малака талаблари билан белгиланади.

Мутахассислик фанлари бўйича тингловчилар қуйидаги янги билим, кўникма, малака ҳамда компетенцияларга эга бўлишлари талаб этилади:

Тингловчи:

- интеграл ва ўлчов тушунчаларини;
- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланишни;
- математик масалаларни математик тизимларда ечишни ва стандарт функциялардан фойдаланишни;
- математикани ўқитишда унинг татбиқлари билан тушунтиришни, ҳаётий ва соҳага оид мисолларни;
- математик фанларни ўқитишнинг замонавий усулларини ***билиши*** керак.

Тингловчи:

- ўлчовлар назариясидан математика, физика ва биология масалаларида кенг фойдаланиш;
- математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, иқтисодий соҳалар ва бошқа соҳаларда кенг қўллаш;
- математик фанларни ўқитишда инновацион таълим методлари ва воситаларини амалиётда қўллаш;
- талабанинг ўзлаштириш даражасини назорат қилиш ва баҳолашнинг назарий асослари ҳамда инновацион ёндашув услубларини тўғри қўллай олиш ***кўникмаларига*** эга бўлиши лозим.

Тингловчи:

- ўлчовлар назарияси ва унинг татбиқини турли фазоларда қўллай олиш;

- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланиш;

- математикани ўқитиш инновацион жараёнини лойиҳалаштириш ва ташкиллаштиришнинг замонавий усулларини қўллаш ***малакаларига*** эга бўлиши лозим.

Тингловчи:

- математикани ўқитишда фойдаланиладиган замонавий (matlab, mathcad, maple, GeoGebra ва бошқалар) математик пакетларини ўқув жараёнига татбиқ этиш;
- математиканинг хориж ва республика миқёсидаги долзарб муаммолари, ечимлари, тенденциялари асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;
- математикани турли соҳаларга татбиқ этиш;
- олий таълим тизимида математик фанлар мазмунининг узвийлиги ва узлуксизлигини таҳлил қила олиш ***компетенцияларига*** эга бўлиши лозим.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар илғор хорижий мамлакатларда биология ўқитишни ташкил қилишнинг хорижий тажрибаларни ўрганиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар. Сўнгги йилларда Миллий ғоя, маънавият асослари, диншунослик соҳасидаги ютуқлар ва истиқболлар олий ўқув юртларидаги таълим жараёнининг мазмунини бойитишга хизмат қилади.

“Ўлчов назарияси ва унинг қўлланилиши” модулининг соатлар бўйича тақсимоти

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат				
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси			Кўчма машғулот
			Жами	жумладан		
				Назарий	Амалий машғулот	
1.	Ўлчов тушунчаси ва хоссалари. σ – аддитивлик.	4	4	2	2	
2.	Лебег ўлчовлари.	4	4	2	2	
3.	Ўлчовли функциялар.	4	4	2	2	
4.	Инвариант ўлчовлар. Эргодик теоремалар.	4	4	2	2	
5	Гиббс ўлчовлари (физикада қўлланиши). Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.	2	2		2	
6.	Ноархимед фазоларда ўлчовлар ва уларнинг татбиқлари.	2	2		2	
Жами:		**20**	**20**	**8**	**12**	**0**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-Мавзу: Ўлчов тушунчаси ва хоссалари. σ – аддитивлик.

Ўлчов тушунчасининг пайдо бўлиши. Ўлчовнинг кўп хоссалик хусусиятлари. σ – аддитивликнинг мазмуни ва моҳияти.

2-Мавзу: Лебег ўлчовлари.

Лебег маъносида ўлчовли тўпламлар синфи. Ўлчовсиз тўпламлар. Уларнинг хоссалари.

3-Мавзу: Ўлчовли функциялар.

Турли фазолар ва улар устидаги ўлчовларга мисоллар. Интеграллар. Эҳтимоллик ўлчовлар ва уларнинг қўлланиши.

4-Мавзу: Инвариант ўлчовлар. Эргодик теоремалар.

Гиббс ўлчовлари (физикада қўлланиши). Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси. Ноархимед фазоларда ўлчовлар ва уларнинг татбиқлари.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1-Амалий машғулот. Ўлчов тушунчаси ва хоссалари. σ – аддитивлик.

2-Амалий машғулот. Лебег ўлчовлари.

3-Амалий машғулот. Ўлчовли функциялар.

4-Амалий машғулот. Инвариант ўлчовлар. Эргодик теоремалар.

5-Амалий машғулот. Гиббс ўлчовлари (физикада қўлланиши). Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.

6-Амалий машғулот. Ноархимед фазоларда ўлчовлар ва уларнинг татбиқлари.

II. ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“SWOT-таҳлил” методидан фойдаланиш

Методнинг мақсади: мавжуд назарий билимлар ва амалий тажрибаларни таҳлил қилиш, таққослаш орқали муаммони ҳал этиш йўлларни топишга, билимларни мустаҳкамлаш, такрорлаш, баҳолашга, мустақил, танқидий фикрлашни, ностандарт тафаккурни шакллантиришга хизмат қилади.

S – (strength)	• кучли томонлари
W – (weakness)	• заиф, кучсиз томонлари
O – (opportunity)	• имкониятлари
T – (threat)	• тўсиқлар

Намуна: Анаънавий ва замонавий таълим шаклларини “SWOT-таҳлил” методида таҳлил қилинг.

	Оддий маърузада маърузачи талабалар, тингловчиларга кўп маълумот бера олади	Муаммоли маърузада камроқ маълумот берилади, бироқ улар талабалар онгига сингдириб берилади
	Ўқитувчи асосан ўзи ва аълочи, қизиқувчи талабалар билан гаплашади, яъни дарсда оз сонли талабалар қамраб олинади	Муаммоли маърузада кўп сонли талабалар, тингловчилар қамраб олинади
	Оддий маърузада фақат ўқитувчи режа асосида ва тайёрлаб келган маълумотлари атрофида гаплашилади	Муаммоли маърузада муҳокама жараёнида янги-янги масалалар, муаммолар юзага чиқиши, ғоялар туҳилиши мумкин.
	Ўқитувчи учун асосий тўсиқ – дастурдан чиқиб кета олмаслик, талаба учун қизиқмаса ҳам ўқитувчини эшитиб ўтириш мажбурияти	Кенг муҳокама учун вақтнинг чегараланганлиги, талабаларни мавзудан четга буришга интилишлари

Резюме, Веер методидан фойдаланиш

Методнинг мақсади: Бу метод мураккаб, кўптармоқли, мумкин қадар, муаммоли характеридаги мавзуларни ўрганишга қаратилган. Методнинг моҳияти шундан иборатки, бунда мавзунинг турли тармоқлари бўйича бир хил ахборот берилади ва айни пайтда, уларнинг ҳар бири алоҳида аспектларда муҳокама этилади. Масалан, муаммо ижобий ва салбий томонлари, афзаллик, фазилат ва камчиликлари, фойда ва зарарлари бўйича ўрганилади. Бу интерфаол метод танқидий, таҳлилий, аниқ мантиқий фикрлашга ҳамда ўқувчиларнинг мустақил ғоялари, фикрларини ёзма ва оғзаки шаклда тизимли баён этиш, ҳимоя қилишга имконият яратади. “Хулосалаш” методидан маъруза машғулотларида индивидуал ва жуфтликлардаги иш шаклида, амалий ва семинар машғулотларида кичик гуруҳлардаги иш шаклида фойдаланиш мумкин.

Методни амалга ошириш тартиби:

тренер-ўқитувчи иштирокчиларни 5-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратади;

тренинг мақсади, шартлари ва тартиби билан иштирокчиларни таништиргач, ҳар бир гуруҳга умумий муаммони таҳлил қилиниши зарур бўлган қисмлари туширилган тарқатма

ҳар бир гуруҳ ўзига берилган муаммони атрофлича таҳлил қилиб, ўз мулоҳазаларини тавсия этилаётган схема бўйича тарқатмага ёзма баён қилади;

навбатдаги босқичда барча гуруҳлар ўз тақдимотларини ўтказадилар. Шундан сўнг, тренер томонидан таҳлиллар умумлаштирилади, зарурий ахборотлр билан тўлдирилади ва

Намуна:

Математикадан малака талаблари					
Собиқ стандартлар		**Амалдаги стандартлар**		**Такомиллаштирилган стандартлар**	
афзаллиги	камчилиги	афзаллиги	камчилиги	афзаллиги	камчилиги
Хулоса:					

“ФСМУ” методидан фойдаланиш

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизни баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

-

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

Намуна.

Фикр: “Математикадан малака талабларини халқаро андозалар асосида такомиллаштириш ва сертификатлаштириш таълим самарадорлигининг энг муҳим омилларидан биридир”.

Топшириқ: Мазкур фикрга нисбатан муносабатингизни ФСМУ орқали таҳлил қилинг.

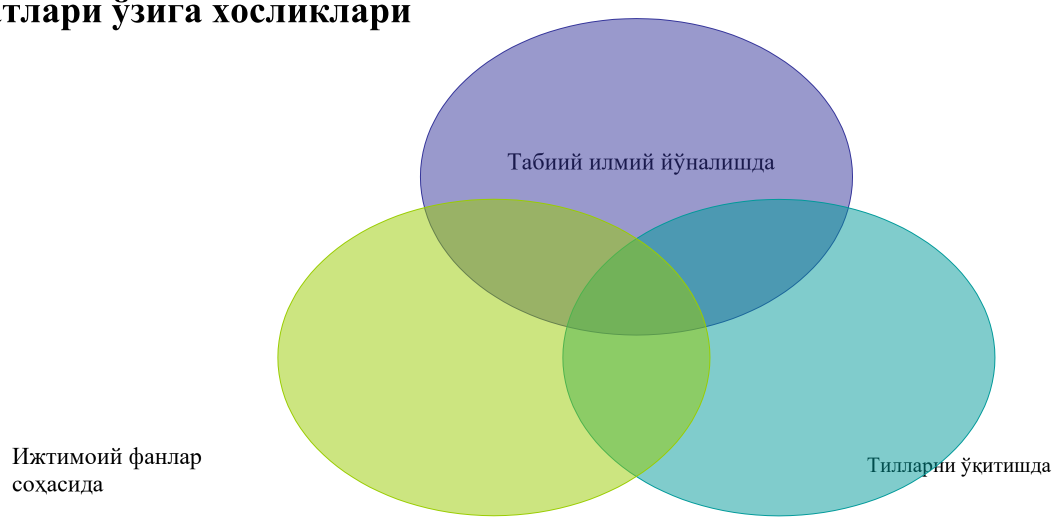
Венн Диаграммаси методидан фойдаланиш

Методнинг мақсади: Бу метод график тасвир орқали ўқитишни ташкил этиш шакли бўлиб, у иккита ўзаро кесишган айлана тасвири орқали ифодаланади. Мазкур метод турли тушунчалар, асослар, тасавурларнинг анализ ва синтезини икки аспект орқали кўриб чиқиш, уларнинг умумий ва фарқловчи жиҳатларини аниқлаш, таққослаш имконини беради.

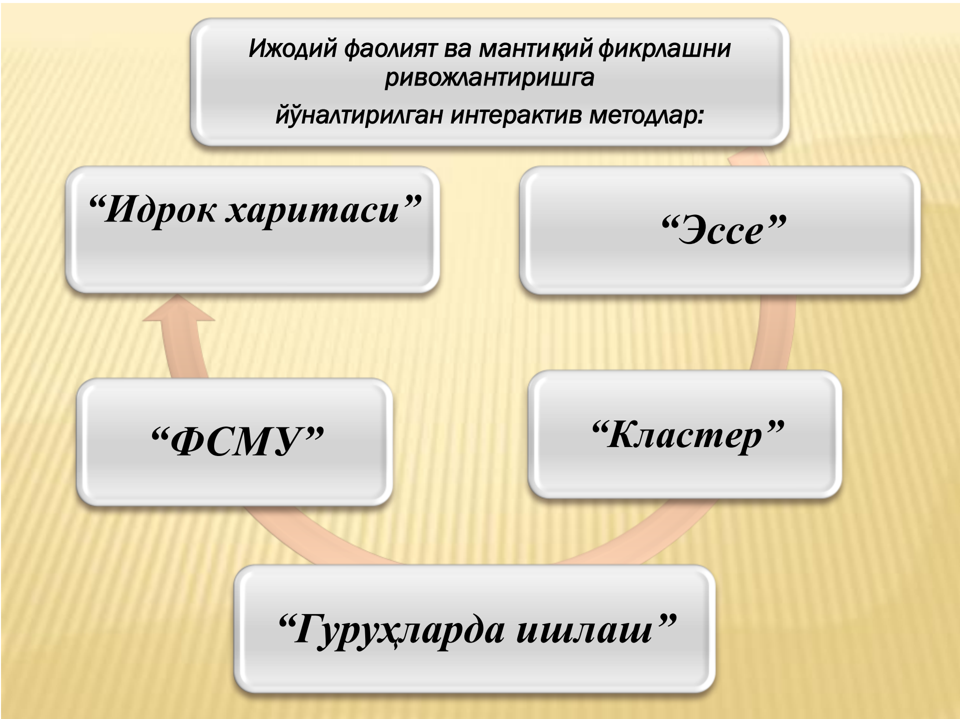
Методни амалга ошириш тартиби:

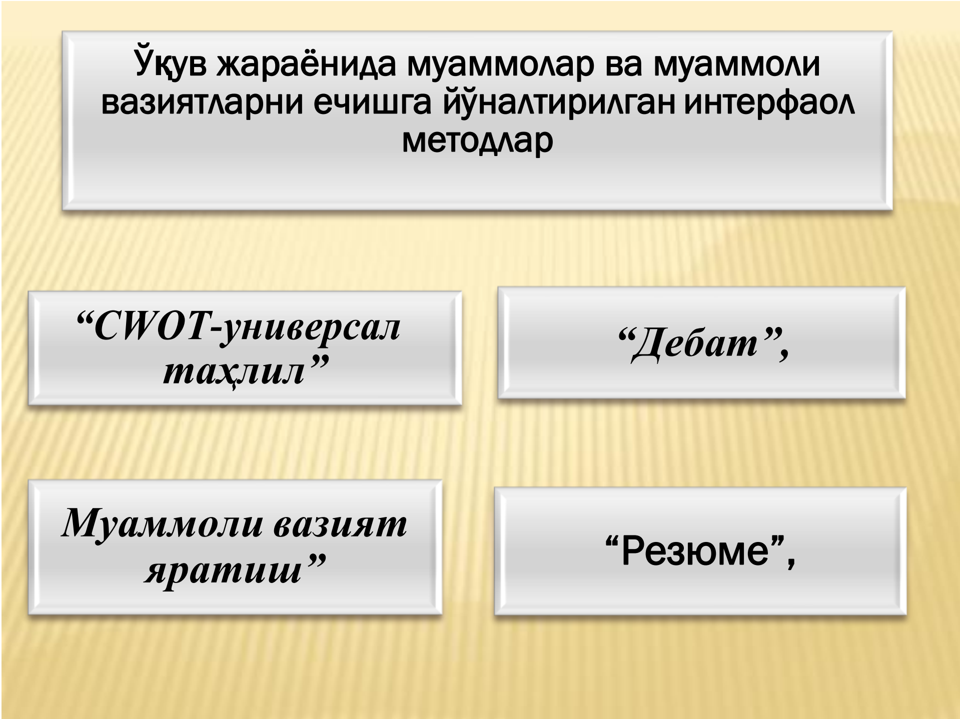
- иштирокчилар икки кишидан иборат жуфтликларга бирлаштириладилар ва уларга кўриб чиқилаётган тушунча ёки асоснинг ўзига хос, фарқли жиҳатларини (ёки акси) доиралар ичига ёзиб чиқиш таклиф этилади;
- навбатдаги босқичда иштирокчилар тўрт кишидан иборат кичик гуруҳларга бирлаштирилади ва ҳар бир жуфтлик ўз таҳлили билан гуруҳ аъзоларини таништирадилар;
- жуфтликларнинг таҳлили эшитилгач, улар биргалашиб, кўриб чиқилаётган муаммо ёхуд тушунчаларнинг умумий жиҳатларини (ёки фарқли) излаб топадилар, умумлаштирадилар ва доирачаларнинг кесишган қисмига ёзадилар.

Намуна: Математикани турли йўналишларда ўқитишнинг фарқли жиҳатлари ўзига хосликлари




Матн билан ишлашга йўналтирилган интерфаол метод ва усуллар
“Зинама-зина”,
“Инсерт”
“Кейс-стади”
“Бумеранг”


Ижодий фаолият ва мантиқий фикрлашни ривожлантиришга йўналтирилган интерактив методлар:
“Идрок харитаси”
“Эссе”
“ФСМУ”
“Кластер”
“Гуруҳларда ишлаш”


Ўқув жараёнида муаммолар ва муаммоли вазиятларни ечишга йўналтирилган интерфаол методлар
“СWОТ-универсал таҳлил”
“Дебат”,
Муаммоли вазият яратиш”
“Резюме”,


“Т-чизмаси”,
“Венн диаграммаси”,
“Органайзер”,
Ҳар хил чизмалар, жадваллар ёрдамида амалга ошириладиган интерфаол методлар:

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР

1-Мавзу: Ўлчов тушунчаси ва хоссалари. σ – аддитивлик.

1. Ўлчов тушунчасининг пайдо бўлиши.
2. Ўлчовнинг кўп хоссалик хусусиятлари.
3. σ – аддитивликнинг мазмуни ва моҳияти.

Тўпламлар ҳалқаси. Элементлари тўпламлардан иборат бўлган тўпламга тўпламлар системаси дейилади. Бундан буён, агар олдиндан таҲкидланмаса, тўпламлар системаси сифатида олдиндан тайинланган X тўпламнинг қисм тўпламларидан тузилган системаларни қараймиз. Тўпламлар системасини одатда *F*, *G*, *R*, $\mathfrak{R}$ ва х.қ. каби готик ҳарфлар билан белгилаймиз.

Агар *F* тўпламлар системасидан олинган ихтиёрий $A\in F$, $B\in F$ элементлар устида бирор ρ алгебраик амал аниқланган бўлиб, бу амал натижасида ҳосил бўлган элемент яна шу F системага тегишли бўлса, учун ҳолда F системани ρ амалга нисбатан ёпиқ система дейилади.

Тўпламлар системасида ρ алгебраик амаллар: $\cup$ -тўпламлар бирлашмаси; $\cap$ -тўпламлар кесишмаси; \ -тўпламлар айирмаси; Δ -тўпламларнинг симметрик айирмаси бўлиши мумкин.

ТАЪРИФ: Агар F тўпламлар системаси $\cap$ва Δ амалларига нисбатан ёпиқ бўлса, яъни $\forall A, B \in F$ лар учун

$A \cap B \in F$ ва $A \,\Delta\, B \in F$

ўринли бўлса, учун ҳолда F системани тўпламлар ҳалқаси дейилади.

$\cap$, Δ амаллари орқали A ва B тўпламларнинг йиьиндиси

$$A\cup B(A\Delta B)\Delta (A\cap B)$$

A ва B тўпламларнинг айирмаси эса

$$A\backslash B= A \,\Delta\, (A\cap B)$$

тенгликлар орқали ифодалангани туфайли F тўпламлар ҳалқаси $\cup$ ва \ амалларга нисбатан ҳам ёпиқ эканлиги келиб чиқади.

Бундан ташқари тўпламлар ҳалқаси

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

кўринишдаги чекли сондаги тўпламлар бирлашмаси ва чекли сондаги тўпламлар кесишмасига нисбатан ҳам ёпиқ эканлиги ўз-ўзидан равшан.

F ҳалқа \ амалга нисбатан ёпиқ эканлигидан ҳамда $\forall A\in F$ учун $A \backslash A=\varnothing\in F$ бўлгани учун ҳар қандай тўпламлар ҳалқаси бўш тўплам $\varnothing$ ни ўз ичига қабул қилиши келиб чиқади.

ТАЪРИФ E тўплам F тўпламлар системасининг бирлик элементи дейилади, агар бу тўплам F системага тегишли бўлиб, $\forall A\in F$ лар учун $A\cap E=A$ тенглик ўринли бўлса.

Бирлик элементга эга бўлган тўпламлар ҳалқаси тўпламлар алгебраси деб аталади.

МИСОЛЛАР 1. ихтиёрий A тўплам учун $\mathfrak{R}$ (A) орқали A нинг барча қисм остилари системасини белгилаймиз. $\mathfrak{R}$(A) система E=A бирлик элементга эга бўлган тўпламлар алгебрасини ҳосил қилади.

2. Ихтиёрий бўш бўлмаган A тўплам учун $\{A,\varnothing\}$ система алгебра ҳосил қилади. Бунда бирлик элемент E=A бўлади.

3. Ихтиёрий A тўпламнинг барча чекли қисм остилари системаси тўпламлар ҳалқасини ҳосил қилади. Агар A тўпламнинг ўзи ҳам чекли тўплам бўлса, у ҳолда ҳосил қилинган тўпламлар системаси алгебра ҳам бўла олади.

4. Ҳақиқий сонлар ўқидаги барча чегараланган тўпламлар системаси ҳалқа ҳосил қилади, лекин бу система алгебра бўла олмайди.

ТЕОРЕМА 1.Исталган сондаги $F_\alpha, \alpha \in I,$ Ҳалкаларнинг кесишмаси

$$F = \bigcap_{\alpha} F_\alpha$$

яна ҳалқа ҳосил қилади.

ТАОРИФ берилган $F_\alpha, \alpha \in I,$ ҳалқалар системасида бирор $\alpha_0 \in I$ учун F_{α_0} ҳалка F_α, $\alpha \neq \alpha_0$ ҳалқаларнинг барчасига қисм бўлиб $(F_{\alpha_0} \subset F_\alpha, \alpha \neq \alpha_0, \alpha \in I), F_{\alpha_0}$ ни ўз ичига оладиган бошқа ҳалқа мавжуд бўлмаса, у ҳолда F_{α_0} ни F_α ҳалқалар системасидаги минимал ҳалқа деб аталади.

Қуйидагича савол туьилиши мумкин: ихтиёрий G системани ўз ичига олувчи ҳалқалар ичида минимал ҳалқа мавжудми? ёки G система қандай бўлганда бу системани ўз ичига олувчи минимал ҳалқа мавжуд бўлади?

Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Т Е О Р Е М А 2: Ҳар қандай G тўпламлар системаси учун, шу системани ўз ичига олувчи ягона минимал ҳалқа мавжуд.

ИСБОТ X деб қуйидаги тўпламни қараймиз: $X = \bigcup_{A \in G} A.$ $\mathfrak{R}$ (X) орқали X нинг барча қисм тўпламлари системасини белгилаймиз. Маолумки, G$\subset\mathfrak{R}$ (X) хамда $\mathfrak{R}$ (X) - ҳалқани ҳосил қилади.

R_α орқали G системани ўз ичига олган, ўзлари эса $\mathfrak{R}$ (X) ҳалқада ётган ҳалқалар системасини белгилаймиз:

$$\{ R_\alpha : G \subset R_\alpha \subset \mathfrak{R}(X) \}$$

МаҲлумки $R^* = \bigcap_{\alpha} R_\alpha$ ҳалқани ташкил этади, ҳамда $G \subset R^* \subset \mathfrak{R}$ (X) ўринлидир. Шу R* биз излаган ягона минимал ҳалқа бўлади, Ҳақиқатан ҳам $R_0 \subset G$ иҲтиёрий ҳалқа бўлсин. У ҳолда $R_0' = R_0 \bigcap \mathfrak{R}(X)$ система ҳам ҳалқа бўлади, яҲни $R_0' \in R_\alpha$

Демак: $R^* \subset R_0' \subset R_0$

Демак R* ҳалқа G системани ўз ичига олувчи ихтиёрий ҳалқага қисм бўлар экан. Бундан R* нинг минимал ҳалқа эканлиги келиб чиқади.

Бундай ҳосил қилинган R* минимал ҳалқа G устидаги минимал ҳалқа ёки G орқали ҳосил қилинган ҳалқа деб аталади ва R(G) орқали белгиланади.

Тўпламлар ярим ҳалқаси. Абстракт ўлчовлар назариясида ҳалқа тушунчаси билан бир қаторда ундан умумийрок, айни вақтда зарур тушунчалардан бири бўлган ярим ҳалқа тушунчасини киритамиз.

ТАЪРИФ: G тўпламлар системаси ярим ҳалқа дейилади, 1) агар бу система ∅-бўш тўпламни ўз ичига қабул килса; 2) агар бу система тўпламлар кесишмасига нисбатан ёпиқ бўлса; 3) $\forall A\in G$ ҳамда $A_1\subset A$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий $A_1\in G$ учун, шундай ўзаро кесишмайдиган $A_2,A_3,\ldots,A_n\in G$, тўпламлар топилиб $(A_i \in G,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i,j=\overline{1,n}\quad i\neq j)$ A тўплам

$$A = \bigcup_{i=1}^{ò} A_i$$

кўринишда ифодаланса.

Ҳар қандай тўпламлар ҳалқаси ярим ҳалқа бўла олади. Ҳақиқатан ҳам G = ҳалқа бўлса у ҳолда A ва $A_1\subset A\in G$ бўлгани учун $A_0=A\backslash A_1\in G$ бўлади, ҳамда $A=A_0\cup A_1$ (бунда $A_0\cap A_1=\varnothing$) ўринлидир.

Лекин ҳар қандай ярим ҳалқа ҳалқа бўла олмайди. Масалан, G Ҳақиқий сонлар ўқидаги барча $[a,b)$ кўринишдаги ярим очиқ интерваллар системаси бўлсин. Текшириш мумкинки G ярим ҳалқани ташкил қилади, яони $a_1\leq a_2\leq b_1\leq b_2$ лар учун $[a_1;b_1)\wedge[a_2,b_2)=[a_2,b_1)$бўлади. $\varnothing=[a;a)$хамда$a< a_1< a_2< \ldots < a_n< b$ учун $[a:b)=[a;a_1)\cup[a_1;a_2)\ \cup[a_2;a_3)\cup \ldots\ \cup[a_n;b)$ ўринлидир. Лекин G ҳалқа бўла олмайди, чунки $a_1<a_2<b_1<b_2$ учун

$$[a_1;b_1)\ \Delta[a_2;b_2)\not\in G$$

Ярим ҳалқа орқали ҳосил қилинган ҳалқа. Фараз қилайлик R(G) бирор G системани ўз ичига олган минимал ҳалқа бўлсин. R(G) ҳалқа ҳар бир элементи кўринишини аниқлаш муҲим масала бўлиб ҳисобланади. Агар G ихтиёрий система бўлса R(G) ҳалқа элементи кўринишини айтиш мураккабдир, мабодо G система ярим ҳалқа бўлса, у ҳолда R(G) ҳалқа элементи кўринишини айтиш мумкин.

Аниқроьи қуйидаги теорема ўринлидир.

ТЕОРЕМА 3. G ярим ҳалқа бўлиб, R(G) уни ўз ичига олган минимал ҳалқа бўлсин. У ҳолда ҳар бир $A\in R(G)$ учун шундай $A_1,A_2,\ldots,A_k$,G ҳалқадан олинган ўзаро кесишмайдиган элементлар топиладики $(A_i \in G,\ \ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i\neq j=\overline{1,k})$қуйидаги ёйилма ўринлидир:

$$A = \bigcup_{\substack{k=1 \\ A_k\in G}}^{n} A_k$$

σ- алгебралар. Математиканинг кўп масалаларида, хусусан, абстракт ўлчовлар назариясида чекли сондаги тўпламларнинг бирлашмаси ёки кесишмасидан ташқари саноқли сондаги тўпламларнинг бирлашмаси ёки кесишмасини ҳам қарашга тўьри келади. Шунинг учун тўпламлар ҳалқасидан бошқа бўлган қуйидаги тушунчани ҳам киритамиз.

ТАЪРИФ. F тўпламлар ҳалқаси σ- ҳалқа сигма ҳалқа деб аталади, агар F га тегишли бўлган ҳар қандай $A_1,A_2,\ldots A_n,\ldots$ саноқли тўпламлар билан бирга уларнинг $S=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ йиьиндиси ҳам F га тегишли бўлса.

ТАЪРИФ: F тўпламлар ҳалқаси δ-ҳалқа дельта ҳалқа деб аталади, агар F га тегишли бўлган ҳар қандай $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ саноқли тўпламлар билан бирга уларнинг $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ кесишмаси ҳам F га тегишли бўлса.

Агар F σ-ҳалқа (δ-ҳалқа) E бирлик элементга эга бўлса, у холда F σ-алгебра (δ-алгебра) деб аталади.

Ҳар қандай σ-алгебра бир вақтнинг ўзида δ-алгебра ҳамдир ва аксинча хар қандай δ -алгебра бир вақтнинг ўзида σ-алгебра ҳамдир.

МИСОЛ: Ихтиёрий A тўпламнинг барча қисм остилари системаси σ-алгебра ҳосил қилади.

Агар G қандайдир система бўлса, у ҳолда бу системани ўз ичига олган Ҳеч бўлмаганда битта σ-алгебра мавжуддир. Ҳақиқатан ҳам $X = \bigcup_{A \in G} A$ десак, у ҳолда $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{I}$ X нинг барча қисм остиларидан тузилган система σ-алгебра ташқил қилади. Равшанки $G \subset \mathfrak{I}$. Агар G ни ўз ичига олувчи $\mathfrak{I}$σ-алгебранинг E бирлик элементи $E = \bigcup_{A \in G} G$ бўлса $\mathfrak{I}$ ни G га нисбатан келтирилмайдиганσ-алгебра деб аталади.

G системани ўз ичига олган келтирилмайдиган минимал σ-алгебра ҳар доим мавжуд.

Ҳақиқий сонлар ўқидаги барча *[a;b]* кўринишдаги тўпламлар системасини ўз ичига олувчи келтирилмайдиган минимал σ-алгебра элементларини борелр тўпламлар ёки $\mathfrak{I}$-тўпламлар деб аталади.

Тўпламлар системаси ва акслантиришлар. Ўлчовли функциялар тушунчасини ўрганиш учун зарур бўлган қуйидаги муҳим хоссаларни келтирамиз.

M тўпламда аниқланиб, N тўпламда қиймат кабул қилувчи $y=f(x)$ функцияни қараймиз. $\mathfrak{R}$ орқали M даги тўплам остиларнинг қандайдир системасини белгилайлик. f ($\mathfrak{R}$) орқали $\mathfrak{R}$ га тегишли бўлган A тўпламларнинг f(A) образлари системасини белгилаймиз. $\mathfrak{R}$ орқали эса N даги тўплам остиларнинг қоидайдир системасини белгилаймиз.

$f^{-1}(\aleph)$ орқали эса. $\aleph$ га тегишли бўлган A тўпламларнинг $f^{-1}(A)$ прообразлари системасини белгилаймиз. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринлидир.

1) Агар $\aleph$ Ҳалка бўлса, у ҳолда $f^{-1}(\aleph)$ ҳам ҳалқадир;

2) Агар $\aleph$ алгебра бўлса, у ҳолда $f^{-1}(\aleph)$ ҳам алгебрадир;

3) Агар $\aleph$σ-алгебра бўлса, у ҳолда $f^{-1}(\aleph)$ ҳам σ-алгебрадир;

4) $R(f^{-1}(\aleph)) = f^{-1}R(\aleph)$;

5) $\mathfrak{I}(f^{-1}(\aleph)) = f^{-1}\mathfrak{I}(\aleph)$.

Ўлчовнинг таорифи. Маолумки тўьри тўртбурчакнинг юзи, кесманинг узунлиги ва Ҳ.к. шунга ўхшаш катталикларни аниқлаганимизда уларнинг ҳаммаси учун умумий бўлган Ҳоссаларни кузатамиз, яони бу катталиклар манфий эмас, ҳамда уларни ўлчаш учун фигураларни майда бўлакларга бўлиб ўлчаб сўнг уларнинг йиьиндисини олишимиз мумкин. Шунинг учун бу хоссаларни умумлаштириб қуйида абстракт ўлчов тушунчасини аниқлаймиз. Дастлаб қуйидаги тушунча бизга керак бўлади.

ТАЪРИФ. G тўпламлар системасини R Ҳақиқий сонлар тўпламига бир қийматли акслантирувчи μ: $G \to R$ акслантириш G да аниқланган <u>тўплам функцияси</u> деб аталади.

Агар G системада μ тўплам функцияси аниқланган бўлса, у ҳолда бу системани G_μорқали белгилаймиз.

<u>ТАЪРИФ.</u> G_μ да аниқланган $m(\cdot)$ тўплам функцияси <u>ўлчов</u> дейилади, агар :

1) $m(\cdot)$ нинг аниқланиш соҲаси G_m ярим ҳалқа бўлса;

2) $\forall$ $A \in G_m$учун $m(A) \geq 0$ бўлса, яони $\boldsymbol{m: G_m \to R_0^+}$;

3) $m(A)$ -аддитивбўлса, яони G_mданолинганўзарокесишмайдиган $A_1, A_2, \dots A_n$ тўпламларучун $\boldsymbol{(A_i \in G_m, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \neq j = \overline{1,k})}$

$\boldsymbol{A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ бўлиб

$$\boldsymbol{m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)}$$

тенглик ўринли бўлса.

<u>ИЗОХ</u>$\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ эканлигидан ҳамда m нинг аддитив эканлигидан $m(\varnothing) = 2m(\varnothing)$ ёки $m(\varnothing) = 0$ эканлиги келиб чиқади.

МИСОЛ: G система сифатида текисликдаги кўриниши $\{(x;y): a \leq x < b; c \leq y < d\}$бўлган тўьри тўртбурчаклар системасини оламиз.

G нинг ярим ҳалқа ташкил этишини кўриш қийин эмас. G га тегишли бўлган ихтиёрий $A = \{(x;y) : a \leq x < b ; c \leq y < d\}$ тўплам учун m тўплам функцияси қийматини $m(A) = (b-a)(d-c)$ тенглик орқали аниқлаймиз. Бундай аниқланган тўплам функцияси ўлчовнинг 2) ва 3) шартларини қаноатлантиришини кўриш қийин эмас.

<u>Ўлчовни ярим ҳалқадан, бу ярим ҳалқа орқали ҳосил қилинган ҳалқагача давом эттириш.</u> Қуйидаги таорифни келтирамиз:

<u>Т А Ҳ Р И Ф:</u> Аниқланиш соҲаси $\boldsymbol{G_{\mu_2}}$ дан иборат бўлган μ_2 ўлчов аниқланиш соҲаси G μ_1 дан иборат бўлган μ_1<u>ўлчовнинг давоми</u> дейилади, агар $G_{\mu 1} \subset G_{\mu 2}$ бўлиб , $\forall A \in G_{\mu 1}$ лар учун $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ тенглик ўринли бўлса.

Энди берилган ўлчовнинг давоми ягонами ёки йўқми? деган саволга жавоб берамиз. Бошкача қилиб айтганда қандай Ҳоллар берилган ўлчовнинг ягона давоми мавжуд бўлишини аниқлаймиз.

<u>ТЕОРЕМА.</u> G_m ярим ҳалқада аниқланган ҳар қандай m ўлчов учун аниқланиш соҲаси G_m орқали ҳосил қилинган $R(G_m)$ ҳалқадан иборат бўлган (яони G_m ни ўз ичига олувчи минимал ҳалқадан иборат бўлган) <u>ягона</u> m_1 давоми мавжуд.

<u>Исбот</u> . Маолумки G_m ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқа $F = R(G_m)$нинг ҳар бир $A \in F$ элементи учун қуйидаги ёйилма ўринли эди:

$$\boldsymbol{A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k} \text{ , буерда} A_k \in G_m \text{ , } A_i \cap A_j = \varnothing \text{. } i \neq j.$$

ЭндиFдаm$_1$тўпламфукнциясиниқуйидагичааниқлаймиз:

$\forall A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ учун

$$m_1(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \qquad (1)$$

деболамиз.

(1) тенгликорқалианиқлангантўпламфункциясиўлчовҳосилқилади. Ҳақиқатанҳам, mўлчовэканлигиданA$_k$∈G$_m$учунm(A$_k$)≥ 0 ўринлидир, бунданэса $m_1(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \geq 0$ эканлигикелибчиқади.

(1) тенгликAэлементучун $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ёйилмасинингтанланишигабоьлиқэмас. Ҳақиқатанҳам, айтайлик $A = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ ҳамда $A = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ ёйилмаларўринлибўлсин. B$_i$∈G, C$_j$∈G$_m$. ∀i ва ∀j лар учун B$_i$∩ C$_j$∈ G$_m$ ўринлидир. У холда m ўлчовнинг аддитив эканлигидан

$\sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{m} m(C_j)$ келиб чиқади.

У ҳолда m$_1$(A) тўплам функцияси аддитив эканлигини ҳам курсатиш қийин эмас. Шунинг учун (1) тенглик орқали аниқланган m$_1$ тўплам функцияси ўлчовни ташкил қилар экан. Энди m$_1$ давомнинг ягоналигини кўрсатамиз.

Фараз килайлик F ҳалқада m$_2$ ҳам m нинг давоми бўлсин, у ҳолда

$m_2(A) = \sum_{k=1}^{n} m_2(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) = m_1(A)$ эканлиги келиб чиқади. Демак m$_1$=m$_2$.

Шундай қилиб биз G$_m$ ярим ҳалқада аниқланган m ўлчовни аниқланиш соҲаси. F=R(G$_m$) дан иборат бўлган m$_1$ ўлчовгача ягона давом эттирдик. Бу m$_1$ ўлчов қуйидаги хоссаларга эга:

1. Агар A$_1$,A$_2$,...A$_n$ лар F=R(G$_m$) дан олинган ўзаро кесишмайдиган тўпламлар бўлиб, A∈ F учун $A \supset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$` ўринли бўлса, у ҳолда

$$m_1(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m_1(A_k)$$

тенгсизлик ўринлидир.

2. Агар F=R(G$_m$) ҳалқанинг ихтиёрий A$_1$,A$_2$,...A$_n$ элементлари учун $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ўринли бўлса, у ҳолда

$$m_1(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m_1(A_k)$$

тенгсизликни ўринлидир.

<u>σ - аддитивлик</u> . Анализнинг кўпгина масалаларида тўпламларнинг чекли бирлашмасидан, ташқари саноқли сондаги тўпламларнинг бирлашмасини хам қарашга тўьри келиб қолади. Шу сабабли биз қуйидаги таорифни берамиз.

<u>ТАЪРИФ:</u> G_m ярим ҳалқада аниқланган m ўлчов <u>σ - аддитив ўлчов</u> дейилади, агар G_m ярим ҳалқага тегишли бўлган ихтиёрий ўзаро кесишмайдиган, саноқли сондаги $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ($A_i \in G$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i,j=1,2,...$) тўпламлар учун $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in G_m$ бўлганда

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

тенглик ўринли бўлса.

Ҳозир иккита мисол келтирамиз. Биринчисида σ - аддитив бўлган ўлчовга, иккинчисида аддитив бўлиб, σ - аддитивлик хоссаси бажарилмайдиган ўлчовга мисоллар келтирилади.

1. Бизга ξ-тасодифий миқдор берилган бўлсин ва у $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n...$ саноқли сондаги қийматларни қабул қилинсин. $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n, ...$ мос равишда ξ тасодифий миқдорнинг қийматларини қабул қилиш эҲтимоли бўлсин, яони $\rho_i = P(\xi = \xi_i)$. Маолумки $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

$X = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n...\}$ тўпламнинг барча қисм остилари системаси $\Re$ (X) бўлсин. Маолумки $\Re(X)$ σ - алгабрани ташкил қилади ва бунда X тўплам бирлик элемент вазифасини бажаради. $\forall A \in \Re(X)$ тўплам ($A \subset X$) учун

$$m(A) = \sum_{\xi_i \in A} p_i$$

деб оламиз. (Масалан $A=\{\xi_1, \xi_{17}, \xi_{15}, \xi_{25}\}$ бўлса $m(A)=\rho_1+\rho_7+\rho_{15}+\rho_{25}$)

Бундай тенглик орқали m тўплам функцияси σ- аддитив ўлчовни ташкил этади ва бунда $m(X)=1$ эканлиги маолум. (Буни текшириш мустақил бажарилади).

2. Аддитив, лекин σ -аддитив бўлмаган ўлчовга мисол.

Q орқали [0;1] кесмадаги барча рационал сонлар тўпламини белгилаймиз. G_m система орқали *Q* тўплам ва [0;1] даги *[a;b]* кесма, *(a;b)* интерваллар билан кесишган ёки *[a;b), (a;b]* ярим интерваллар билан кесишган тўпламлар системасини белгилаймиз. A_{ab}орқали масалан $Q \cap [a;b)$ тўпламни белгилаймиз. $\forall A_{ab} \in G_m$ учун

$$m(A_{ab})=b-a$$

деб оламиз. Маолумки G_m ярим ҳалқа ташкил этади ва m нинг ўлчов эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Бироқ m учун σ - аддитивлик хоссаси ўринли эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\{r\}=A_{rr}$эканлигини хисобга олсак

$Q = \bigcup_{r \in [0;1]} A_{rr}$ бўлади. Агар m σ аддитив бўлса, у ҳолда

$$m(Q)=m\left(\bigcup_{r\in[0;1]}A_{rr}\right)=\sum_{r}m(A_{rr})=0$$

Иккинчи томондан $Q=Q\cap[0;1]=A_{0,1}$ деб ёзишимиз мумкин, у ҳолда

$$m(Q)=m(A_{0,1})=1-0=1$$

Бу эса зиддият. Демак m σ аддитив эмас.

Агар G_m ярим ҳалқада аниқланган m ўлчов σ аддитив бўлса, у ҳолда унинг $R(G_m)$ гача давоми бўлган m ўлчов ҳам σ -аддитивдир. У холда σ - аддитив бўлган m_1ўлчов куйидаги хоссаларга эга.

1. Агар $A_1,A_2,...,A_n,...$ ва A тўпламлар m_1 ўлчовнинг аниқланиш соҲасидан олинган ўзаро кесишмайдиган тўпламлар бўлиб, $A\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ўринли бўлса, у ҳолда

$$m_1(A)\geq\sum_{n=1}^{\infty}m_1(A_n)$$

тенгсизлик ўринлидир.

2. Агар m_1 ўлчовнинг аниқланиш соҲасида ҳар қандай $A_1,A_2,...,A_n,...$ ва A тўплам учун $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ўринли бўлса, у ҳолда

$$m_1(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m_1(A_n)$$

ўринлидир.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР РУЙХАТИ

Тўпламлар системаси, ρ амалга нисбатан ёпиқ система, тўпламлар ҳалқаси, бирлик элемент, тўпламлар алгебраси, $\Re(A)$ система, минимал ҳалқа, G орқали ҳосил қилинган ҳалқа ярим ҳалқа, ярим ҳалқа орқали ҳосил қилинган ҳалқа, σ-ҳалқа, δ-ҳалқа, σ-алгебра, δ-алгебра, келтирилмайдиган σ-алгебра, борелр тўпламлар.Тўплам функцияси; ўлчов; аддитивлик шарти; ўлчовнинг давоми; ўлчовни ярим ҳалқадан ҳалқагача давоми; σ-аддитвилик хоссаси; аддитив, лекин σ -аддитив бўлмаган ўлчов.

НАЗОРАТ УЧУН САВОЛЛАР

1. Бирор амалга нисбатан ёпиқ система деганда нимани тушунасиз?
2. Ҳалка қандай амалларга нисбат ёпиқ бўлиши керак? Ярим халқаси?
3. Минимал ҳалқа деб нимага айтилади.
4. Ҳалқани қачон алгебра деб атаймиз?
5. R(G) минимал ҳалқа элементлари қандай кўринишда ифодаланади?
6. σ- алгебра деганда нимани тушунасиз? δ - алгебрада эсачи?
7.Ўлчов қандай таорифланади?
8.. Ўлчовнинг давоми деганда нимани тушунасиз?
9. Қандай шартларда ўлчовнинг ярим халқадан ҳалқагача давоми ягона бўлади?

10. σ -аддитивлик хоссаси нима?
11. Ҳар қандай аддитив ўлчов σ -аддитив ўлчов бўла оладими? Нима учун?
12. Агар G ҳалқада аниқланган m ўлчов σ - аддитив ўлчовнинг давоми ҳам σ - аддитивлик хоссасини сақлайдими?
13. Агар f: $\aleph \to \aleph$ акслантириш учун $\aleph$ халқа бўлса, у холда $f^{-1}(\aleph)$ қанақа система бўлади?

2-Мавзу:Лебег ўлчовлари.

1. Лебег маҲносида ўлчовли тўпламлар синфи.
2. Ўлчовсиз тўпламлар.
3. Уларнинг хоссалари.

Ташқи ўлчов тушунчаси G_m ярим ҳалқа берилган бўлиб, m ундаги σ -аддитив ўлчов бўлсин. Е тўплам G_m ярим ҳалқанинг бирлик элементи бўлсин.

Е бирлик элементнинг барча қисм тўпламларидан тузилган системани $\Re$ (Е) орқали белгилаймиз. Маолумки $\Re$(Е) σ -алгебрани ташкил этади. Шу σ -алгебрада ташки ўлчов тушунчаси киритамиз.

Фараз килайлик $B \subset E$ бўлиб, $B_1, B_2, ..., B_n, ...$лар G_m ярим ҳалқадан олинган чекли ёки саноқли сондаги тўпламлар бўлиб, $B \subset \bigcup_k B_k$ бўлсин.

У ҳолда биз $B \subset E$ тўпламни G_m ярим ҳалқадан олинган $\{B_k\}$ тўпламлар системаси қоплайди деб айтамиз.

В ни чексиз кўп усуллар билан қоплаш мумкин. У ҳолда $\sum_k m(B_k)$ йиьинди ҳам чексиз кўп қийматга эга бўлади.

Хар бир $B_k \in G_m$ учун $m(B_k) \geq 0$ бўлгани учун $\sum_k m(B_k) \geq 0$ ўринли бўлади. Демак $\sum_k m(B_k)$ йиьинди қуйидан чегаралангандир. Бу йиьиндининг аниқ қуйи чегарасига В тўпламнинг ташқи ўлчови деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$\mu^*(B) = \inf_{\substack{B \subset \bigcup_k B_k \\ B_k \in G_m}} \sum_k m(B_k)$$

Ташки ўлчов қуйидаги хоссаларга эга
1. G_m ярим халқани ўз ичига олган $F=R(G_m)$ минимал халқагача m ўлчовнинг давоми m_1бўлса, у холда $\forall A \in F$ учун $\mu^*(A)=m_1(A)$ ўринлидир.
2. Агар $A_1 \in \Re$ (Е) ва $A_2 \in \Re$(Е) бўлиб, $A_1 \subset A_2$ўринлибўлса, уҳолда
$\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ тенгсизликўринлидир.

3. Агар $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \Re$ (Е) ва $A \in \Re$(А)ларучун $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

ўринлибўлса, ухолда $\mu^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$ ўринлидир

Ўлчовлитўпламларалгебраси.

Ташкиўлчовтушунчасиданфойдаланибэндиўлчовлитўпламгатаорифберамиз.

ТАЪРИФ. G_mяримхалқаниўзичигаолганминималхалқа $F=R(G_m)$ бўлсин. Агар$\forall \varepsilon > 0$ сонучуншундай $B \in F$ тўпламмавжудбўлсаки, $A \in \mathfrak{R}$ (E) тўпламучун

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

тенгсизликўринлибўлса, уҳолда $A \in \mathfrak{R}(E)$ тўпламниўлчовлитўпламдебаталади.

$A_1 \Delta A_2 = (E \backslash A_1) \Delta (E \backslash A_2)$ тенгликўринлиэканлигиданқуйидагитеоремаўринлиэканлигикелибчиқади.

ТЕОРЕМА. Агар $A \in \mathfrak{R}(E)$ тўпламўлчовлибўлса, уҳолда $E \backslash A \in \mathfrak{R}$ (E) тўпламҳамўлчовлибўлади.

Бунданбуён$\mathfrak{R}$ (E) дагибарчаўлчовлитўпламларсистемасини Z орқалибелгилаймиз.

ТЕОРЕМА.Ҳарқандайиккитаўлчовлитўпламларнингйиьиндиси, кўпайтмаси, айирмаси, симметрикайирмасиянаўлчовлитўпламдир.

НатижаБутеорема Z нингхалқаэканлигиникўрсатади. Бундан ташкари Z алгебра хамдир.

Ҳақиқатан хам $A \in Z$ бўлсин, у ҳолда $E \backslash A \in Z$ бўлади. Теоремага асосан

$E = A \cup (E \backslash A) \in Z$, яони Z бирлик элементга эга бўлган ҳалқа, яони алгебра эканлиги келиб чиқади.

ТЕОРЕМА Агар $A_1 \in Z$ ва $A_2 \in Z$ бўлиб $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ бўлса у ҳолда

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

бўлади.

Бутеорематашқиўлчовнингўлчовлитўпламларсистемаси Z даўлчовташқилқилишиникўрсатади.

ТЕОРЕМА. Ўлчовлитўпламларсистемаси Z σ - алгебрадир, яониагар $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots \in Z$ бўлса, у холда $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j \in Z$ ва $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_j \in Z$ бўлади.

Лебег ўлчови ва унинг хоссалари. Энди биз Лебег ўлчови тушунчасини аниқлашимиз мумкин.

Таориф. Ўлчовли тўпламлар системаси Z да аниқланган μ^* тўплам функциясига (ташқи ўлчовга). Лебег ўлчови дейилади ва μ орқали белгиланади.

ТЕОРЕМА. Лебег ўлчови σ - аддитив ўлчовдир, яони

$A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots \in Z$бўлиб, $A_k \cap A_j = \varnothing$, $k \neq j$, $k,j = 1,2,\ldots$, ва $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

бўлса у ҳолда $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ бўлади.

ТАЪРИФ: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ бўлиб $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A$ бўлганда

$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(A)$ тенглик ўринли бўлса, у холда μ ўлчовга узлуксиз ўлчов дейилади.

ТЕОРЕМА. Лебег ўлчови узлуксиз ўлчовдир.

Шундай қилиб биз аниқланиш соҲаси G_m ярим ҳалқадан иборат бўлган σ - аддитив m ўлчовни аниқланиш сохаси σ алгебра Z дан иборат бўлган σ аддитив ва узлуксиз Лебег ўлчови μ гача давом эттирдик. Ўлчовнинг бундай усулда давом эттирилиши ўлчовнинг Лебег маоносида давом эттириш деб аталади.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР РЎЙХАТИ

Қоплама, ташки ўлчов, ўлчовли тўплам, ўлчовли тўпламлар системаси, Лебег ўлчови, узлуксиз ўлчов, ўлчовнинг Лебег маоносидаги давоми.

НАЗОРАТ УЧУН САВОЛЛАР

1. В тўпламнинг қопламаси деганда нимани тушинасиз?
2.Ташки ўлчовни таорифланг.
3. Ўлчовли тўплам деб нимага айтилади?
4. Лебег ўлчови қандай курилади?
5. Лебег ўлчови қандай хоссаларга эга?
6. Узлуксиз ўлчов деб нимага айтилади?

3-Мавзу: Ўлчовли функциялар.

1. Турли фазолар ва улар устидаги ўлчовларга мисоллар.
2. Интеграллар.
3. Эҳтимоллик ўлчовлар ва уларнинг қўлланиши.

Айтайлик X ва Y тўпламлар ихтиёрий бўлсин. Z(X) ва Z(Y) лар мос равишда X ва Y нинг барча ўлчовли тўплам остилари системаси бўлсин.

Аникланиш сохаси X тўпламдан иборат бўлган, Y тўпламда қиймат қабул қилувчи y=f(x) функция (Z(X) , Z(Y))-ўлчовли дейилади агар A ∈Z(Y) эканлигидан $f^{-1}(A) \in Z(X)$ эканлиги келиб чиқса

Масалан , X ва Y тўпламлар сифатида Ҳақиқий сонлар ўқини олсак (яони Ҳақиқий ўзгарувчининг функциясини қарасак) , Z(X) ва Z(Y) лар сифатида R^1 даги барча очиқ (ёки барча ёпиқ) қисм тўпламлар системаларини олсак у холда ўлчовли функция тушунчаси узлуксиз функция тушунчасига келтирилади. Агар Z(X) ва Z(Y)системалар сифатида барча борелр тўпламлари системаларини қарасак, у ҳолда биз В-ўлчовли (яони Борелр бўйича ўлчовли) функциялар тушунчасига келамиз.

Бундан буён ўлчовли функциялар тушунчасига интеграллаш назарияси нуктаи назари билан қараймиз. Бунда аниқланиш соҲаси
σ -аддитив μ ўлчов аниқланган X тўпламдан иборат бўлган сонли функцияларни қараймиз. Бу ҳолда Z(X) сифатида X нинг μ ўлчов бўйича ўлчовли бўлган барча қисм остилари системасини қараймиз, Z(Y) сифатида эса тўьри чизиқдаги барча борелр

тўпламлари системасини қарамиз. Хар қандай σ - аддитив ўлчовни σ - алгебрагача давом эттириш мумкин бўлганлиги учун биз бошиданоқ Z(X) ни σ алгебра деб хисоблаймиз. Шундай қилиб сонли функциялар учун ўлчовли функциялар тушунчасини қуйидагича аниқлаймиз.

ТАЪРИФ. Айтайлик X тўпламда аниқланиш соҲаси Z(X) σ - алгебрадан иборат бўлган $\mu\sigma$ аддитив ўлчов $\mu\sigma$ берилган бўлсин. X тўпламда аниқланган f (x) хақиқий функция μ -ўлчовли дейилади, агар сонлар ўқидаги ипхтиёрий A борелр тўпламлари учун

$$f^{-1}(A)\in Z(X)$$

ўринлибўлса

Ҳақиқий сонлар ўқида берилган сонли функция борель функцияси (ёки B-ўлчовли) дейилади, агар ҳар бир борель тўпламларини прообрази на борель тўплами бўлса.

ТЕОРЕМА 1. X,Y,V -ихтиёрийтўпламларбўлиб, Z(X), Z(Y), Z(V) лармосравишдабутўпламларнингўлчовлиқисмостиларисистемасибўлсин. Xтўпламдааниқланганy=f(x) функция (Z(X), Z(Y)) -ўлчовли, хамдаYтўпламдааниқланганυ=q(y) функция (Z(Y), Z(V)) - ўлчовлибўлсин. У ҳолда

$$\upsilon = \varphi(x) = q\,(f(x))$$

функция (Z(X), Z(V)) - ўлчовлидир

Қисқача қилиб айтганда ўлчовли функциялардан олинган ўлчовли функция ҳам ўлчовли функциядир.

Бундан буён англашилмовчилик бўлмаган тақдирда μ - ўлчовли функция тушунчасини ўлчовли функция деб юритамиз.

ТЕОРЕМА 2. Ҳақиқий ўзгарувчили сонли функция f(x) ўлчовли бўлиши учун ихтиёрий Ҳақиқий сон c учун

$$E_c=\{x{:}f(x)<c\}$$

тўпламнинг ўлчовли бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу теоремани кўп Ҳолларда f(x) сонли функциялар учун ўлчовли функция таорифи сифатида қабул қилинади.

Ўлчовли функциялар устида арифметик амаллар . Қандайдир тўпламда аниқланган барча ўлчовли функциялар тўплами арифметик амалларга нисбатан ёпиқлигини кўрсатамиз.

ТЕОРЕМА 3. Иккита ўлчовли функциянинг йиьиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси яна ўлчовли функция бўлади. Агар бўлувчи функция нолр қийматга эришмаса, у холда иккита ўлчовли функциянинг бўлинмаси ҳам яна ўлчовли функция бўлади.

ИСБОТ. Теорема исботини бир неча қадамда бажарамиз.

1) Агар f ўлчовли бўлса, у ҳолда ихтиёрий k сон учун kf ҳамда f+k функцияларнинг ўлчовли бўлиши ўз-ўзидан равшан.

2) Агар f ва q функциялар ўлчовли бўлса, у ҳолда {x:f(x)>q(x)} тўплам ўлчовли бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$\{x: f(x) > q(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(\{x: f(x) > r_k\} \cap \{x: q(x) < r_k\})$$

бу ерда r_k -номерлаб чиқилган рационал сонлар.

Бу ердан

$$\{x{:}f(x)>a-q(x)\}=\{x{:}f(x)+q(x)>a\}$$

тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади, яони ўлчовли функцияларнинг йиьиндиси ҳам ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

3) 1) ва 2) дан f-q нинг ҳам ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

4) Куйидаги тенгликдан фойдаланамиз

$$f\cdot q=\frac{1}{4}[(f+q)^2-(f-q)^2]$$

Квадрат функция борелр функцияси, яони ўлчовли функция бўлганлиги сабабли теорема 1 га асосан $(f+q)^2$ ва $(f-q)^2$ лар ҳам ўлчовли бўлади. У холда 1), 2) га асосан f · q ҳам ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

5) Агар f(x) ўлчовли ва f(x) ≠ 0 бўлса, у холда $\frac{1}{f(x)}$ ўлчовли бўлишини кўрсатамиз.

Агар c>0 десак, у холда

$$\left\{x{:}\frac{1}{f(x)}<c\right\}=\left\{x{:}\,f(x)>\frac{1}{c}\right\}\cup\{x{:}\,f(x)<0\},$$ агар c<0 десак, у ҳолда

$$\left\{x{:}\frac{1}{f(x)}<c\right\}=\left\{x{:}0>f(x)<\frac{1}{c}\right\};$$ агар c=0 десак, у холда

$$\left\{x{:}\frac{1}{f(x)}<c\right\}=\{x{:}\,f(x)<c\}$$

Бу холларнинг ҳаммасида ҳам ўнг томонда ўлчовли тўпламни ҳосил қиламиз, демак q(x)≠0 да $\frac{f(x)}{q(x)}$ хам ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

Ўлчовли фукнциялар тўплами на фақат арифметик амалларга нисбатан ёпиқ, балки лимитга нисбатан хам ёпиқдир, яони.

ТЕОРЕМА 4. X тўпламнинг ҳар бир x элементида яқинлашувчи ўлчовли функциялар кетма-кетлигининг лимити ҳам ўлчовли функциядир.

<u>Эквивалентлик тушунчаси</u>. Ўлчовли функцияларни ўрганишда кўп холларда ўлчови нолр бўлган тўпламлар устидаги қийматларини хисобга олмасликка тўьри келади. Шунинг учун куйидаги таорифни келтирамиз.

ТАЪРИФ. E ўлчовли тўпламда аниқланган иккита f(x) ва q(x) функциялар <u>эквивалент</u> функциялар дейилади (ва f ~q кўринишда белгиланади) агарда

$$\mu\{x{:}f(x)\neq q(x)\}=0 \text{ бўлса}$$

Мисол.

$$d(x)=\begin{cases}0, & \text{àãàð} \quad \text{õ - èððàöèîíàë} \quad \text{ñîí}\\ 1, & \text{àãàð} \quad \text{õ - èððàöèîíàë} \quad \text{ñîí}\end{cases}$$

функция 0(x)≡0 функциясига эквивалент, яони d(x)~ 0(x)Ҳақиқатан хам,μ {x:d(x)≠0}= μ{Q}=0.

ТЕОРЕМА 5. E ўлчовли тўпламда аниқланган f(x) функция шу E тўпламда аниқланган ўлчовли q(x) функцияга эквивалент бўлса, у хол- да f(x) функция хам ўлчовли бўлади.

<u>Деярли ҳамма ерда яқинлашиш тушунчаси.</u> Кўп Ҳолларда ўлчовли функцияларнинг ўлчови нолр бўлган тўпламлардаги Ҳолати қизиқтирмагани учун табиийки, нуктавий яқинлашишдан кўра умумийроқ бўлган қуйидаги тушунчани киритамиз.

<u>ТАЪРИФ.</u> Бирор ўлчовли Е тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга Е нинг <u>деярли хамма ерида якинлашади</u> дейилади, агар

$$\mu\{x \in E: \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\} = 0$$

ўринли бўлса.

Масалан: $f_n(x)=(-x)^n$, $x\in[0;1]$

$$\mu\{x \in [0;1];\ \lim_{n\to\infty}(-x)^n \neq 0\} = \mu\{1\} = \mu([1;1]) = 0$$

ТЕОРЕМА: Ўлчовли Е тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга деярли хамма ерда яқинлашса, у холда f(x) функция хам ўлчовли бўлади.

Куйида келтириладиган теорема 1911 йилда Д.Ф.Егоров томонидан исботланган бўлиб, у текис якинлашиш тушунчаси билан деярли хамма ерда яқинлашиш тушунчаси ўртасидаги боьланишини кўрсатиб беради.

ТЕОРЕМА. (Егоров) Айтайлик Е тўпламда чекли μ ўлчов аниқланган бўлиб, $\{f_n(x)\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги Е да f(x) функция деярли хамма ерда яқинлашсин. У ҳолда ҳар қандай $\delta>0$ сон учун шундай ўлчовли $E_\delta\subset E$ тўплам топиладики куйидаги шартлар ўринлидир:

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E)-\delta$;

2) E_δ тўпламда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга текис якинлашади.

<u>Ўлчов бўйича яқинлашиш.</u> Ўлчовли функциялар кетма-кетлиги учун яқинлашишнинг яна бир турини аниқлаймиз.

ТАЪРИФ. Е ўлчовли тупламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги f(x) функцияга <u>ўлчов бўйича якинлашади</u> дейилади, агар ихтиёрий $\sigma>0$ сон учун

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in E: |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$$

ўринли бўлса.

Куйида келтириладиган иккита теорема деярли ҳамма ерда яқинлашиш тушунчаси билан ўлчов бўйича яқинлашиш тушунчаси ўртасида боьланишни ўрнатиб беради. Бу теоремаларда ҳам кўрилаётган ўлчовни хам чекли деб қабул киламиз.

ТЕОРЕМА. Агар Е ўлчовли тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ ўлчовли функциялар кетлик-кетлиги f(x) функцияга деярли ҳамма ерда яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик f(x) га ўлчов бўйича хам яқинлашади.

Ўлчов бўйича яқинлашишдан деярли хамма ерда яқинлашиш келиб чиқмайди.

МАСАЛАН. (0;1] кесмада хар бир k натурал сон учун қуйидаги функциялар кетма-кетлиги

$$f_i^k(x)=\begin{cases}1, & \text{àã àð} \quad \dfrac{i-1}{k}<x\le\dfrac{i}{k}\\ 0, & \text{õ í èí ã ûî ë ãàí ûè é ì àò ë à ðè ä à}\end{cases}$$

ўлчов бўйича нолрга яқинлашади, лекин Ҳеч бир нуқтада яқинлашмайди. (мустақил исботланади)

Юқорида келтирилган теоремага тескари теорема ўринли бўлмаса ҳам, қуйидаги натижани келтириш мумкин.

ТЕОРЕМА. Агар Е ўлчовли тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги Е да f(x) функцияга ўлчов бўйича яқинлашса, у холда бу кетма-кетликдан f(x) функцияга деярли хамма ерда яқинлашувчи $\{f_{nk}(x)\}$қисмий кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин.

Матанализ курсидан маолум бўлган Риман интеграли фақат узлуксиз ёки узулишлари сони чекли бўлган функцияларга қўлланилиши мумкин. Ўлчовли функциялар хамма ерда узулишга эга бўлганлиги, ёки абстракт тўпламларда аниқлангани сабабли уларга Риман интегралини кўллаб бўлмайди. Бироқ бундай функциялар учун мукаммал ва қатоий бўлган Лебег интеграли тушунчаси мавжуд.

Лебег интеграли қурилишининг асосий мазмуни шундан иборатки бунда Риман интегралидан фарқли ўлароқ, х нуқталар уларнинг х ўқида бир-бирига якин туришига караб эмас, балки бу нуқталарда функция қийматларининг бир-бирига яқин туришига қараб группаланади. Бу усул эса Лебег интегралини анча кенгроқ бўлган функциялар синфига татбиқ этиш имконини яратади.

Бундан буён, агар олдиндан таокидлаб ўтилмаса, бирлик элемент Е га эга бўлган σ-алгебрада аниқланган тўла σ-аддитив бўлган қандайдир μ ўлчовни қараймиз. Хамма $A\subset E$ тўпламлар ўлчовли, $x\in X$ ларда аниқланган f(x) функциялар хам ўлчовли деб хисоблаймиз.

Лебег интегралини дастлаб содда функциялар деб аталувчи функциялар синфи учун аниқлаймиз. Сўнгра бу тушунчани кенгроқ бўлган функциялар синфи учун давом эттирамиз.

Содда функциялар. Анализ ва эҲтимоллар назариясининг кўп масалаларида кўпинча қуйидаги функциялар синфига дуч келамиз.

ТАЪРИФ. Ўлчов киритилган Х тўпламда аниқланган f(x) функция содда функция деб аталади, агар у ўлчовли бўлиб, Х да чекли ёки саноқли сондаги қийматга эришса.

Содда функцияларнинг тузилиши қуйидаги теорема орқали характерланади.

ТЕОРЕМА 1. Чекли ёки саноқли сондаги $y_1,y_2,...,y_n,...$ қийматларга эга бўлган f(x) функция ўлчовли бўлиши учун $A_n=\{\ x\in X:\ f(x)=y_n\}$ тўпламларнинг барчаси ўлчовли бўлиши зарур ва етралидир.

ТЕОРЕМА 2. f(x) функциянинг ўлчовли бўлишлиги учун, бу функция текис яқинлашувчи содда функциялар кетма-кетлиги лимити сифатида ифодаланиши зарур ва етарлидир.

Бу келтирилган теорема Лебег интегралини аниқлашда содда функциялардан фойдаланиш учун катта аҳамият касб этади.

Содда функциялар учун Лебег интеграли. Айтайлик f чекли ёки саноқли сондаги

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots;\ y_i \neq y_j,\ i \neq j$$

қийматларни қабул қилувчи содда функция бўлсин. А эса Х даги ўлчовли тўплам бўлсин. Куйидаги белгилашни киритамиз:

$$A_k = \{x \in A:\ f(x) = y_k\}$$

Маълумки A_k тўпламлар ўлчовлидир

Қуйидаги $\sum_k y_k \mu(A_k)$ (1) қаторни қараймиз.

<u>ТАЪРИФ</u>. Агар (1) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, у холда f(x) функция (μ ўлчов бўйича) А тўпламда <u>интегралланувчи</u> ёки <u>жамланувчи</u> деб аталади. Агар f интегралланувчи бўлса, у холда (1) қаторнинг йиьиндиси f(x) функциянинг А тўплам бўйича <u>Лебег интеграли</u> деб аталади ва қуйидаги кўринишда белгиланади.

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k y_k \mu(A_k)$$

Мисол. А=[0;1] бўлсин ва

$$d(x) = \begin{cases} 0, & \text{àãàð õ - èððàöèîíàë ñîí} \\ 1, & \text{àãàð õ - èððàöèîíàë ñîí} \end{cases}$$

берилган бўлсин, у ҳолда

$$\int_A d(x)d\mu = \int_{[0;1]} d(x)d\mu = \int_{Q \cup J} d(x)d\mu = 0 \cdot \mu(J) + 1 \cdot \mu(Q) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

<u>ЛЕММА</u> . Айтайлик $A = \bigcup_k B_k,\ \ B_i \cap B_j = \varnothing,\ \ i \neq j$ ҳамда ҳар бир B_k тўпламда f(x) функция фақат битта c_k қийматга эришсин; у ҳолда

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_k c_k \cdot \mu(B_k) \qquad (2)$$

ўринлидир, бу холда f функция А тўпламда интегралланувчи бўлиши учун (2) қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлишлиги зарур ва етарлидир.

<u>Содда функциялар учун Лебег интегралнинг хоссалари.</u> Содда функциялар учун Лебег интегралининг қуйидаги хоссаларини келтирамиз.

А) $\int_A (f(x) + q(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A q(x)d\mu;$

Бу ерда ўнг томондаги интегралларнинг мавжуд эканлигидан чап томондаги интегралнинг мавжудлиги келиб чиқади.

Б) ихтиёрий ўзгармас сон k учун

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$$

бу ерда ўнг томондаги интегралнинг мавжудлигидан чап томондаги интегралнинг мавжудлиги келиб чиқади.

В) А тўпламда чегараланган f(x) содда функция интегралланувчидир, бунда агар А тўпламда |f(x)|≤ M бўлса, у ҳолда

$$\left|\int_A f(x)d\mu\right| \le M\mu(A)$$

Бу хоссалар бевосита таорифдан фойдаланиб текшириб чиқилади.

Чекли ўлчов аниқланган тўпламларда Лебег интегралининг умумий таорифи.

Т А ЪР И Ф: А тўпламда f функцияни интегралланувчи (ёки жамланувчи) дейилади, агар А тўпламда f функцияга текис яқинлашувчи А да интегралланувчи $\{f_n\}$содда функциялар кетма-кетлиги мавжуд бўлса.

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu \qquad (1)$$

лимитга f функциянинг А тўплам бўйича Лебег интеграли дейилади ва

$$\int_A f(x)d\mu$$

каби белгиланади.

Бу киритилган таорифда аниқлик бўлиши (коррект бўлиши) учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

1. Ихтиёрий текис яқинлашувчи содда, А да интегралланувчи $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги учун (1) лимит мавжуд бўлиши керак.

2. Бу лимит берилган f учун $\{f_n\}$ кетма-кетликнинг танланишига боьлиқ бўлмаслиги керак.

3. Содда функциялар учун интегралланувчилик таорифи бундан олдинги мавзуда келтирилган таорифга тенг кучли бўлиши керак.

Бу шартларнинг ҳаммаси Ҳақиқатан ҳам ўринли бўлади. Бу шартлар содда функциялар учун аниқланган Лебег интеграли ва унинг хоссаларидан бевосита келиб чиқади.

Демак Лебег интегралини таорифлаш икки боскичда амалга оширилар экан. Биринчи босқичда қандайдир функциялар синфи (содда функциялар) учун бевосита (интеграл қатор) яқинлашувчилигидан фойдаланиб таорифланса, иккинчи босқичда бу таориф ундан кенгроқ бўлган функциялар синфи учун лимитга утиш орқали кенгайтирилар экан.

Лебег интегралининг асосий хоссалари. Бевосита таорифдан фойдаланиб Лебег интегралининг асосий хоссаларини келтирамиз.

1. $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$

2. Ихтиёрий ўзгармас k сон учун

$$\int_A kf(x)d\mu = k\int_A f(x)d\mu$$

бунда ўнг томондаги интегралнинг мавжудлигидан чап томондаги интегралнинг мавжудлиги келиб чиқади.

3. $\int_A (f(x)+q(x))d\mu = \int_A f(x)d\mu + \int_A q(x)d\mu$

бунда ўнг томондаги интеграллар мавжудлигидан чап томондаги интегралнинг мавжудлиги келиб чиқади. (Бу хосса аддитивлик хоссаси дейилади).

4. А тўпламда чегараланган f(x) функция А да интегралланувчидир.

5. Агар *f(x)≥0* бўлса, у холда

$$\int_A f(x)d\mu \geq 0$$

(албатта бу ерда интегралнинг мавжудлиги талаб этилади). (Бу хосса монотонлик хоссаси дейилади)

5'. Агар А тўпламда *f(x)≥q(x)* бўлса, у холда

$$\int_A f(x)d\mu \geq \int_A q(x)d\mu$$

5''. Агар А тўпламнинг деярли хамма ерида $m \leq f(x) \leq M$ бўлса, у холда

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x)d\mu \leq M\mu(A)$$

6. Агар $\mu(A)=0$ бўлса, у холда $\int_A f(x)d\mu = 0$

6'. Агар А нинг деярли ҳамма ерида *f(x)=q(x)*бўлса, у холда

$\int_A f(x)d\mu = \int_A q(x)d\mu$, бунда икки тарафдаги интеграллар бир вақтнинг ўзида мавжуд бўлади ёки мавжуд эмас.

7. Агар φ функция А да жамланувчи бўлса, ва А нинг деярли хамма ерида $|f(x)| \leq q(x)$ бўлса у холда f хам А да жамланувчидир.

8. $I_1 = \int_A f(x)d\mu$ âà $I_2 = \int_A |f(x)|d\mu$

интеграллар бир вақтнинг ўзида мавжуд ёки мавжуд эмас.

Лебег интегралнинг σ-аддитивлик хоссаси. Агар $\int_A f(x)d\mu$ интегралда биз f(x) функцияни тайинлаб олсак у холда интегралнинг қиймати А тўпламга боьлиқ бўлиб қолади, яони

$$F(A) = \int_A f(x)d\mu$$

ифода ўлчовли тўпламлар системасида аниқланган тўплам функцияси сифатида қаралади.

ТЕОРЕМА 1: Агар $A = \bigcup_n A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \ i \neq j,$

бўлса, у холда

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_A f(x)d\mu$$

ўринлидир, бунда чап томонда тўрьан интегралнинг мавжудлигидан ўнг томонда турган интегралларнинг мавжудлиги ва қаторнинг абсолют яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Бу теорема одатда Лебег интегралнинг σ-аддитивлик хоссаси деб юритилади.

Натижа Агар f функция А тўпламда интегралланувчи бўлса, у холда f A тўпламнинг ихтиёрий ўлчовли қисм остиси A′⊂ A да хам интегралланувчидир.

Юқорида келтирилган тасдиқларни биз қуйидаги натижага келтириб олишимиз мумкин.

ТЕОРЕМА 2: Агар $A=\bigcup_n A_n, \quad A_i \cap A_j=\varnothing, \; i\neq j,$ бўлса, у холда

$$\int_A f(x)d\mu=\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$$

тенглик ўринлидир.

Чебишев тенгсизлиги. Энди ўлчовлар назарияси, айниқса эхтимоллар назариясида аҳамиятга эга бўлган, Чебишев тенгсизлиги деб аталувчи тенгсизликни келтирамиз.

ТЕОРЕМА 3: Агар $\varphi(x)\geq 0$ муносабат A тўпламда ўринли бўлиб ва c>0 бўлса, у холда

$$\mu\{x\in A: \varphi(x)\geq c\}\leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu$$

тенгсизлик ўринлидир.

НАТИЖА Агар $\int_A |f(x)|d\mu=0$ бўлса, у холда деярли хамма ерда f(x)=0 бўлади.

Лебег интегралининг абсолют узлуксизлиги хоссаси. Чебишев тенгсизлиги ва унинг натижасини қуйидаги Лебег интегралининг абсолют узлуксизлиги деб аталувчи хоссанинг лимити сифатида қараш мумкин.

ТЕОРЕМА 4. Агар f(x) функция A тўпламда интегралланувчи бўлса, у холда ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики

$$\left|\int_e f(x)d\mu\right|<\varepsilon$$

тенгсизлик $\mu(e)<\delta$ шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай $e\subset A$ ўлчовли тўплам учун ўринлидир.

Лебег интегралининг юқорида келтирилган хоссаларидан қуйидаги хулосага келамиз:

Айтайлик μ ўлчов аниқланган X фазода f- манфий бўлмаган тайинланган функция бўлса, у холда $F(A)=\int_A f(x)d\mu$ тўплам функцияси X нинг барча ўлчовли $A\subset X$ қисм тўпламларида аниқланган, мусбат аниқланган ва σ- аддитивлик хоссасига эга, яони $\forall A\subset X$ учун $F(A)\geq 0$;

агар $A=\bigcup_n A_n, \quad A_i \cap A_j=\varnothing, \; i\neq j,$ у холда $F(A)=\sum_n F(A_n)$

Бошкача қилиб айтганда F(A) тўплам функцияси σ-аддитив ўлчовни ҳосил қилар экан. Бу ўлчов хам дастлабки берилган μ ўлчов аниқланган σ-алгебрада аниқланган ва μ билан қуйидаги шарт орқали боьланган, агар μ(A)=0 бўлса, у холда F(A)=0

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР РЎЙХАТИ

(Z(X),Z(Y)) - ўлчовли функция, В-ўлчовли функция, μ-ўлчовли функция, борелр функцияси, ўлчовли функциялар устида амаллар, эквивалентлик. Нуктавий яқинлашиш, текис яқинлашиш, деярли ҳамма ерда яқинлашиш, ўлчов бўйича яқинлашиш, Егоров теоремаси. Содда функция, саноқли сондаги қийматлар, интегралланувчи, абсолют яқинлашувчи қатор, содда функция учун Лебег интеграли. Интегралланувчи функция, текис яқинлашиши, Лебег интеграли аниқлик шартлари, аддитивлик ва монотонлик хоссалари. F(A)- тўплам функцияси, Лебег интегралининг σ-аддитивлик хоссаси, Чебишев тенгсизлиги, Лебег интегралининг абсолют узлуксизлиги хоссаси F(A) -ўлчов.

НАЗОРАТ УЧУН САВОЛЛАР

1. Ўлчовли функция деб нимага айтилади?
2. Ўлчовли функциялар қандай хоссаларга эга?
3. Сонли функциялар учун ўлчовли функция тушунчасини қандай таорифлаш мумкин?
4. Эквивалент функциялар деб нимага айтилади?
5. Деярли хамма ерда деган иборани қачон ишлатиш мумкин?
6. Ўлчовли функция ва узлуксиз функция тушунчаси орасида қандай боьланиш бор?
7.Деярли хамма ерда якинлашиш тушунчасини таорифланг?
8.. Ўлчов бўйича якинлашиш нима?
9.. Ҳар хил якинлашишлар орасида қандай боьланишлар мавжуд?
10. Егоров теоремасини тушунтириб беринг.
11. Деярли ҳамма ерда яқинлашувчи кетма-кетлик ўлчов бўйича яқинлашувчи бўлиш шарти нима?
12. Содда функциялар таорифини келтиринг
13. Содда функциялар қандай хоссаларга эга?
14. Содда функциянинг интегралланувчи бўлиши шарти нима?
15. Содда функциялар учун Лебег интеграли қандай таорифланади?
16. Содда функциялар учун Лебег интеграли қандай хоссаларга эга?
17. Лебег интегралининг умумий таорифини келтиринг ва таорифнинг аниқлилиги шартларини кўрсатинг
18. Лебег интеграли умумий таорифининг аниқлилиги шартларини кўрсатинг?
19. Лебег интегралини таорифлаш қандай босиқчларда амалга оширилади?
20. Лебег интеграли қандай асосий хоссаларга эга?
21. Нима учун Лебег интегралини тўплам функцияси деб қараш мумкин?
22. Лебег интеграли учун σ- аддитивлик хоссаси қандай ифодаланади?
23. Лебег интегралининг абсолют узлуксизлиги қандай ифодаланади?
24. Лебег интеграл ҳам ўлчов бўлишини тушунтиринг?
25. Лебег интеграли билан аниқланган ўлчов, берилган ўлчов билан қандай боьланган?

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАТЕРИАЛЛАРИ

1 амалий машғулот. Ўлчов тушунчаси ва хоссалари. σ- аддитивлик.

1.1-мисол. $A\subset E$ ƅирлик квадратдаги барча рационал координатали нуқталар топлами бўлсин. A ва $E\setminus A$ тўпламлар E да зич бўлганлиги учун

$$j^*(A)=1,\quad j^*(E\setminus A)=1$$

тенгликлар ўринли. Бу ердан

$$j_*(A)=0 \quad \text{va} \quad j^*(A)\neq j_*(A).$$

Демак, A тўплам Жордан маҲносида ўлчовли эмас. МаҲлумки, A - саноқли тўплам, шунинг учун унинг элементларини $(x_k,y_k),\ k\in N$ кўринишда номерлаб чиқиш мумкин. Шундай экан

$$A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}P_k,\quad P_k=\{(x,y): x_k\le x\le x_k,\ y_k\le y\le y_k\}.$$

Иккинчи томондан ихтиёрий $k\in N$ учун $m(P_k)=0$. Бундан

$$\mu^*(A)=0$$

эканлиги келиб чиқади.

Шуни таҲкидлаш керакки, ташқи ўлчови нолга тенг бўлган ҳар қандай тўплам ўлчовли тўпламдир. Бунинг учун элементар тўплам сифатида $B=\varnothing$ ни олиш етарли:

$$\mu^*(A\Delta B)=\mu^*(A\Delta\varnothing)=\mu^*(A)=0<\varepsilon.$$

Демак, A Лебег маҲносида ўлчовли тўплам, аммо A тўплам Жордан маҲносида ўлчовли эмас.

МаҲлумки, Лебег маҲносида ўлчовли бўлган тўпламлар синфи етарлича кенг. Табиий равишда "Лебег маҲносида ўлчовсиз тўплам мавжудми?" – деган савол туғилади

1.2-мисол. $[-1,1]$ кесманинг нуқталари орасида эквивалентлик тушунчасини қуйидагича киритайлик: агар x ва y нинг айирмаси $x-y$ рационал сон бўлса, улар эквивалент дейилади. Бу муносабат эквивалентлик муносабати бўлади. Шунинг учун $[-1,1]$ кесма ўзаро эквивалент бўлган элементлардан иборат $K(x),\ x\in[-1,1]$ синфларга ажралади. Бунда турли синфлар ўзаро кесишмайди. Шундай қилиб, $[-1,1]$ кесма ўзаро кесишмайдиган $K(x),\ x\in[-1,1]$ синфларга ажралади. Энди бу синфларнинг ҳар биридан биттадан элемент танлаб олиб, бу танлаб олинган элементлар тўпламини A билан белгилаймиз. Ушбу A тўпламнинг ўлчовсиз эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. $[-1,1]$ кесмадаги барча рационал сонларни номерлаб чиқамиз:

$$r_0 = 0, r_1, r_2, \dots$$

A_k билан A тўпламни r_k сонга силжитишдан ҳосил бўлган тўпламни белгилаймиз, яҲни $A_k = A + r_k = \{y : y = x + r_k, x \in A\}$. Хусусан $A_0 = A$. A_k тўплам A тўпламдан r_k га силжитиш орқали ҳосил қилингани учун улар бир вақтда ё ўлчовли, ё ўлчовсиз тўпламлар бўлади. Фараз қилайлик, A ўлчовли тўплам бўлсин. У ҳолда A_k тўпламлар ҳам ўлчовли бўлади ва $\mu(A_k) = \mu(A)$ тенглик ўринлидир. Равшанки,

$$[-1;1] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Бундан, ўлчовнинг ярин аддитивлик хоссасига асосан

$$2 = \mu([-1;1]) \le \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \mu(A) + \mu(A) + \dots + \mu(A) + \dots.$$

Бундан $\mu(A) > 0$ эканлиги келиб чиқади. Иккинчи томондан, ихтиёрий $k \in \{0,1,2,\dots,\}$ учун $A_k \subset [-2;2]$. Бундан

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k \subset [-2;2]$$

ва A_k тўпламлар ўзаро кесишмайди. Ўлчовнинг σ - аддитивлик хоссасига асосан

$$4 = \mu([-2;2]) \ge \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k) = \mu(A) + \mu(A) + \dots + \mu(A) + \dots.$$

Бундан $\mu(A) = 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу қарама-қаршиликдан A тўпламнинг ўлчовсиз эканлиги келиб чиқади.

1.3-мисол. Кантор тўплами K нинг Лебег ўлчови нолга тенг эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Кантор тўплами K нинг ўлчови нолга тенглиги $\mu([0,1] \setminus K) = 1$ тенгликдан келиб чиқади. Барча чиқариб ташланган интерваллар узунликлари йиғиндиси

$$\mu([0,1] \setminus K) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots = 1.$$

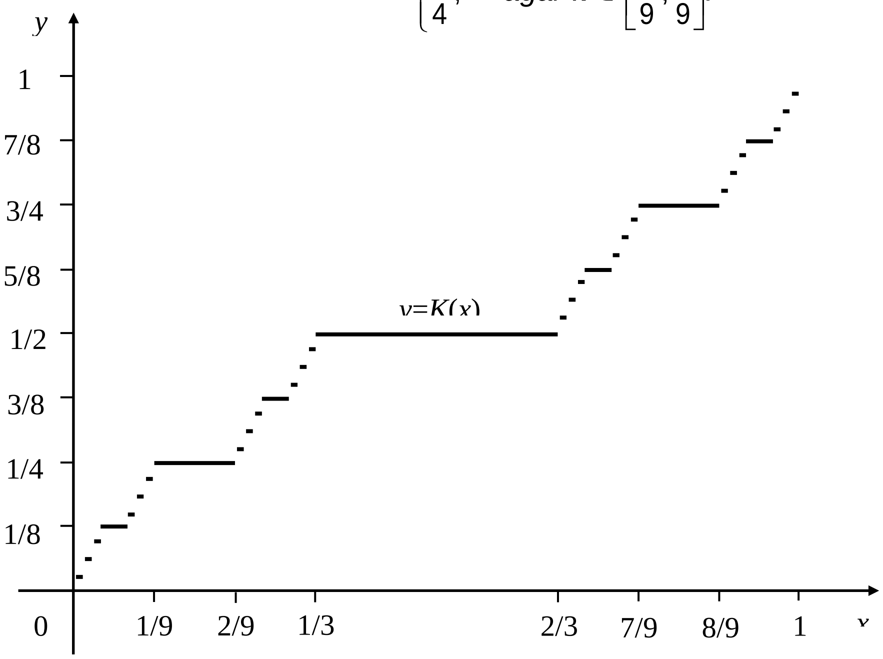
Бунда $K_n -$ n - қадамда ташлаб юборилган интерваллар бирлашмаси. Демак, $\mu(K) = 0$.

1.4-мисол. $K(x)$ функцияни $[0;1]$ кесмада қуйидагича аниқлаймиз.

$K_1 = \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ тўплам ва унинг чегарасида $K(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

$K_2 = \left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ тўплам ва унинг чегараларида

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & agar\ x \in \left[\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right], \\ \frac{3}{4}, & agar\ x \in \left[\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right]. \end{cases}$$



Шунингдек ,

2.3 - chizma

$$K_3 = \left(\frac{1}{3^3};\frac{2}{3^3}\right) \cup \left(\frac{7}{3^3};\frac{8}{3^3}\right) \cup \left(\frac{19}{3^3};\frac{20}{3^3}\right) \cup \left(\frac{25}{3^3};\frac{26}{3^3}\right)$$

тўплам ва унинг чегараларида

$$K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^3}, & agar\ x \in \left[\frac{1}{3^3};\frac{2}{3^3}\right], \\ \frac{3}{2^3}, & agar\ x \in \left[\frac{7}{3^3};\frac{8}{3^3}\right], \\ \frac{5}{2^3}, & agar\ x \in \left[\frac{19}{3^3};\frac{20}{3^3}\right], \\ \frac{7}{2^3}, & agar\ x \in \left[\frac{25}{3^3};\frac{26}{3^3}\right]. \end{cases}$$

Худди шундай K_n тўпламнинг к-интервали ва унинг чегарасида

$$K(x) = \frac{k}{2^n}, \quad k = 1,3,5,\ldots,2^n - 1.$$

$[0;1]$ кесманинг қолган нуқталарига $K(x)$ ни узлуксиз давом эттирамиз. Ҳосил бўлган $K(x)$ функция Канторнинг зинапоя функцияси дейилади (2.3-чизмага қаранг). Канторнинг зинапоя функцияси $[0;1]$ кесмада аниқланган, узлуксиз, монотон камаймайдиган функция бўлади. Хусусан, $K(0)=0, K(1)=1$.

1.5-мисол. $F(x)=2x+1$ функция ёрдамида қурилган $\mu_F -$ Лебег-Стилтес ўлчови абсолют узлуксиз ўлчов бўлади. Ушбу Лебег-Стилтес ўлчови бўйича $A=(1;5]$ тўпламнинг ўлчовини ҳисобланг.

Ечиш. ТАЪРИФга кўра

$$\mu_F(A) = F(5) - F(1) = 2\cdot 5+1-(2\cdot 1+1) = 11-3 = 8.$$

1.6-мисол. $F(x)=[x]$ функция ёрдамида қурилган $\mu_F -$ Лебег-Стилтес ўлчови дискрет ўлчов бўлади. Чунки $F(x)=[x]$ функция монотон камаймайдиган ўнгдан узлуксиз функция бўлиб, унинг қийматлар тўплами бутун сонлар тўплами Z дан иборат. Бутун сонлар тўплами эса саноқли тўпламдир. Бу ўлчов бўйича $A=(1;5]\cup\{7;8\}$ тўпламнинг ўлчовини топинг.

Ечиш. Ҳосил қилинган $\mu_F -$ Лебег-Стилтес ўлчови бўйича ихтиёрий $n\in Z$ нуқтанинг ўлчови бирга тенг. Чунки $\{n\}=[n;n]$ тенглик ўринли бўлгани учун, ТАЪРИФга кўра

$$\mu_F([n;n]) = F(n)-F(n-0) = n-(n-1) = 1.$$

Демак, $\mu_F(\{7;8\})=2$. Энди $B=(1;5]$ тўпламнинг ўлчовини топамиз:

$$\mu_F(B) = F(5) - F(1) = 5-1 = 4.$$

Берилган A тўплам ўзаро кесишмайдиган B ва $\{7;8\}$ тўпламларнинг бирлашмасидан иборат. Ўлчовнинг аддитивлик хоссасига кўра

$$\mu_F(A) = F(B) + F(\{7;8\}) = 4+2 = 6.$$

1.7-мисол. $F(x)=K(x)$, бунда $K(x)-$ Канторнинг зинапоя функцияси. $F(x)=K(x)$ ёрдамида қурилган Лебег-Стилтес ўлчови μ_F сингуляр ўлчов эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Канторнинг зинапоя функцияси $K(x)$ ni $(-\infty;\infty)$ га қуйидагича узлуксиз давом эттирамиз. $K(x)=0$, агар $x<0$ бўлса ва $K(x)=1$, агар $x>1$ бўлса. Ҳосил қилинган $\mu_F -$ Лебег-Стилтес ўлчови бўйича ихтиёрий $a\in R$ нуқтанинг ўлчови нолга тенг. Чунки $\{a\}=[a;a]$ тенглик ўринли бўлгани учун, ТАЪРИФга кўра

$$\mu_F([a;a]) = K(a) - K(a-0) = 0.$$

Бундан ташқари, $A = (-\infty;0)\cup(1;\infty)$ тўпламнинг ўлчови ҳам нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам, ўлчовнинг аддитивлик хоссасига кўра

$$\mu_F(A)=\mu_F((-\infty,0))+\mu_F((1,\infty))=F(0)-\lim_{a\to-\infty}F(a)+\lim_{a\to+\infty}F(a)-F(1)=0. \qquad (2.7)$$

2.3-мисолда кўрсатилдики, $\mu(K)=0.$ Агар $\mu_F(R\setminus K)=0$ эканлиги кўрсатилса, μ_F ўлчовнинг сингуляр ўлчов эканлиги келиб чиқади. Энди $\mu_F(R\setminus K)$ ни ҳисоблаймиз. Ўлчовнинг аддитивлик хоссаси ва (2.7) тенгликка кўра

$$\mu_F(R\setminus\ K) = \mu_F((-\infty;0)) + \mu_F((1;\infty)) + \mu_F([0;1]\setminus\ K) = \mu_F([0;1]\setminus\ K).$$

Дастлаб $K_n, n\in N$ тўпламларнинг ўлчови нол эканлигини кўрсатамиз:

$$\mu_F(K_1) = F\left(\frac{2}{3}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0.$$

Шунингдек,

$$\mu_F(K_2) = \mu_F\left(\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\right)+\mu_F\left(\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\right) = F\left(\frac{2}{9}\right)-F\left(\frac{1}{9}\right)+F\left(\frac{8}{9}\right)-F\left(\frac{7}{9}\right) = 0$$

тенглик ўринли. $\mu_F(K_n)=0, n\geq 3$ тенгликлар ҳам шунга ўхшаш кўрсатилади. Энди Лебег-Стилтес ўлчови $\mu_F(\cdot)$ нинг σ - аддитивлик хоссасидан фойдалансак

$$\mu_F([0,1]\setminus K)=\mu_F(\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_F(K_n) \qquad (2.8)$$

тенгликни оламиз. Шундай қилиб, ҳосил қилинган Лебег-Стилтес ўлчови $\mu_F(\cdot)$ сингуляр ўлчов экан.

Масалалар

1. Агар A,B ўлчовли тўпламлар ва $A\supset B$ бўлса, у ҳолда $\mu(A\setminus B)=\mu(A)-\mu(B)$ тенгликни исбонланг.
2. Агар A,B,C,D ўлчовли тўпламлар ва $A\Delta C=B\Delta D,\ \mu(C)=\mu(D)=0$ бўлса, у ҳолда $\mu(A)=\mu(B)$ тенгликни кўрсатинг.
3. A,B ўлчовли тўпламлар учун $\mu(A)+\mu(B)=\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B)$ тенгликни исботланг.
4. Ўлчовли бўлмаган тўпламга мисоллар келтиринг.
5. Текисликдаги $A=\{(x,y):0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq x\}$ тўплам элементар тўплам бўладими? Унинг ўлчовини топинг.
6. Ўнли каср ёзувида 5 рақами қатнашмаган $[0,1]$ кесмадаги барча сонлар тўпламининг Лебег ўлчовини ҳисобланг.

7. Ўнли каср ёзувида 2 ва 5 рақамлари қатнашмаган $[0,1]$ кесмадаги барча сонлар тўпламининг Лебег ўлчовини ҳисобланг.

8. Ҳақиқий сонлар ўқида жойлашган, мусбат ўлчовга эга бўлган тўплам континуум қувватли тўплам эканлигини исботланг.

9. Ҳақиқий сонлар ўқидаги A ўлчовли тўплам ёрдамида аниқланган $f(t) = \mu([a,t] \cap A),\ t \in [a,b]$ функциянинг узлуксиз эканлигини кўрсатинг.

10. Барча ҳақиқий сонлар тўпламида жойлашган, континуум қувватли ва ўлчови нолга тенг бўлган тўпламга мисоллар келтиринг.

11. Тўгри чизиқдаги барча ўлчовли тўпламлар системасининг қуввати /эканлигини кўрсатинг.

12. $[0,1]$ кесмада жойлашган ва бу кесманинг ҳеч қаерида зич бўлмаган, ўлчови 0,9 га тенг бўлган мукаммал тўплам тузинг.

13. $[0,1]$ кесмада жойлашган ва бу кесманинг ҳеч қаерида зич бўлмаган, ўлчови $a\,(0 < a < 1)$ га тенг бўлган мукаммал тўплам тузинг.

14. $[0,1]$ кесмада жойлашган ва бу кесманинг ҳеч қаерида зич бўлмаган, ўлчови 1 га тенг бўлган мукаммал тўплам тузинг.

15. Текисликда A тўпламни қуйидагича тузамиз: дастлаб, усбу $\{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ бирлик квадратнинг ҳар бир томонларини тенг учга ажратган ҳолда тенг 9 та кичик квадратга ажратамиз ва марказда жойлашган очиқ кичик квадратни ташлаб юборамиз, иккинчи қадамда эса қолган саккизта кичик квадратнинг ҳар бирини яна тенг 9 та кичик квадратга ажратамиз ва бу ҳар бир 9 та кичик квадратнинг марказида жойлашган очиқ кичик квадратни ташлаб юборамиз ва бу жараённи чексиз марта давом эттирамиз. Юқоридаги қоида бўйича саноқли марта “кичик квадратлар” ташлаб юборилгандан кейин, қолган A тўплам “Серпинский гилами” деб юритилади. “Серпинский гилами”нинг ўлчовини ҳисобланг.

16. Текисликда A тўпламни қуйидагича тузамиз: дастлаб, усбу $\{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ бирлик квадратнинг ҳар бир томонларини тенг учга ажратган ҳолда тенг 9 та кичик квадрат ажратамиз ва бирлик квадратнинг тўрттала бурчагида жойлашган ёпиқ квадратлар бирлашмасини A_1 билан белгилаймиз ва A_1 га тегишли квадратларни 1 - турга тегишли деб юритамиз, иккинчи қадамда эса A_1 тўпламга тегишли бўлган квадратларнинг ҳар бирини яна тенг 9 та кичик квадратларга ажратамиз ва бу ҳар бир 9 та кичик

квадратларнинг 1 - тур квадратлар бурчакларида жойлашган кичик квадратлар бирлашмасини A_2 билан белгилаймиз ва A_2 га тегишли квадратларни 2 - турга тегишли деб юритамиз ва бу жараённи чексиз марта давом эттирамиз. Натижада, кичик квадратлардан тузилган $A_1, A_2, A_3, \ldots$ тўпламлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади ва $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$. Ушбу $A = \bigcap_k A_k$ тўплам ўлчовини ҳисобланг.

17. XOY текисликда қуйидаги тўпламни аниқлаймиз: $W = \{(x, y) : x \in [0,1],\ y \in K\}$, бунда K тўплам Оу ўқидаги Кантор тўплами. /тўплам ўлчовини ҳисобланг.

18. Тўғри чизиқдаги чегараланган A ўлчовли тўплам учун $\mu(A) = p > 0$ бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $q\,(0 < q < p)$ сон учун ўлчови q га тенг бўлган A нинг қисм тўплами мавжудлигини исботланг.

19. Бирорта ички нуқтаси мавжуд бўлган ўлчовли тўплам ўлчови нолга тенг бўлиши мумкинми?

20. Ўлчови $b-a$ га тенг бўлган $[a,b]$ кесманинг, $[a,b]$ дан фарқли ёпиқ қисм тўплами мавжудми?

21. Чексиз ўлчовга эга бўлган камаювчи тўпламлар кетма-кетлиги кесишмасининг ўлчови чексиз бўладими?

22. Чекли ўлчовга эга бўлган ўсувчи тўпламлар кетма-кетлиги бирлашмасининг ўлчови чекли бўладими?

23. Тўғри чизиқдаги чегараланмаган ўлчовли тўплам ўлчови чекли мусбат сонга тенг бўлиши мумкинми?

24. Исботланг: агар тўғри чизиқда ётувчи A тўплам ўлчови мусбат бўлса, у ҳолда бу тўпламда шундай иккита ҳар хил нуқталар топиладики, уларнинг орасидаги масофа иррационал сонга тенг бўлади.

25. Исботланг: агар тўғри чизиқда ётувчи $A \subset [a,b]$ тўплам ўлчови мусбат бўлса, уҳолда бу тўпламда шундай иккита ҳар хил нуқта топиладики, уларнинг орасидаги масофа рационал сонга тенг бўлади.

26. Исботланг: агар тўғри чизиқда ётувчи A чегараланмаган тўплам ўлчови мусбат бўлса, уҳолда бу тўпламда шундай иккита ҳар хил нуқта топиладики, уларнинг орасидаги масофа рационал сонга тенг бўлади.

27. μ_F – 2.7-мисолда келтирилган Лебег-Стилтес ўлчови бўлсин. $\mu_F(K) = 1$ эканлигини исботланг. Бунда K – Кантор тўплами.

28. $\mu_F -$2.7-мисолда келтирилган Лебег-Стилтес ўлчови, $A(K\subset A)$ ихтиёрий тўплам бўлсин. $\mu_F(A)=1$ тенгликни исботланг.

29. Элементар тўпламлар системасида аниқланган m' ўлчовнинг аддитивлик хоссасини исботланг.

30. 2.3-теоремани μ ўлчов учун исботланг. Бу хосса Лебег ўлчовининг ярим аддитивлик хоссаси деб аталади.

31. $F(x)=x$ функция ёрдамида қурилган Лебег-Стилтес ўлчови абсолют узлуксиз ўлчов бўладими?

32. $F(x)=2[x]+1$ функция ёрдамида қурилган Лебег-Стилтес ўлчови дискрет ўлчов бўладими?

33. Сингуляр Лебег-Стилтес ўлчовига мисоллар келтиринг.

34. Элементар тўпламлар системаси ҳалқа ташкил қиладими?

35. Лебег маҲносида ўлчовли тўпламлар системаси $\sigma-$алгебра ташкил қиладими?

36.$[0;1]$ кесмадаги барча иррационал сонлар тўпламини X билан белгилаймиз. Σ_m орқали X нинг $(a;b)$ интерваллар, $[a;b]$ кесмалар ва $[a;b),(a;b]$ ярим интерваллар билан кесишмаларидан иборат тўпламлар системасини белгилаймиз. Агар $A_{ab}=X\bigcap(a;b)$ $(\bigcap[a;b],\bigcap(a;b],\ \bigcap[a;b))$ десак, ҳар бир A_{ab} тўпламга $m(A_{ab})=b-a$ сонни мос қўямиз. Бу тўплам функцияси m σ-аддитив ўлчов бўладими?

37.Ҳар бир $A\subset R=(-\infty;\infty)$ тўпламга

$$m(A)=\sum_{n\in N\bigcap A}\frac{1}{2^n}$$

сонни мос қўямиз. m тўплам функцияси ўлчов бўлишини кўрсатинг. $A=(-\infty;0)$ ва $B=[1;4]$ тўпламларнинг ўлчовларини топинг.

38.Юқорида аниқланган m ўлчов $\sigma-$ аддитив ўлчов бўладими?

39.$\sigma-$ҳалқа бўлмаган, аммо саноқли сондаги тўпламлар кесишмасига нисбатан ёпиқ бўлган ҳалқага мисоллар келтиринг.

40.Фараз қилайлик, f $[0,1]$ кесмада аниқланган номанфий функция бўлсин. Ҳар бир $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\},x_k\in[0,1]$ чекли тўплам учун $\mu(A)=\bigcup_{k=1}^{n}f(x_k)$ бўлсин. $\mu(A)$тўплам функциянинг саноқли аддитив ўлчов эканлигини исботланг.

2 амалий машғулот. Лебег ўлчовлари.

Бирли (бирлик элементли) ярим ҳалқада аниқланган ўлчовни Лебег маЪносида давом эттириш. Агар $\pounds_m$ ярим ҳалқада аниқланган m ўлчов аддитивлик хоссасига эга бўлиб, аммо $\sigma-$ аддитив бўлмаса, у ҳолда m нинг $\pounds_m$ дан $\Re(\pounds_m)$ га давоми билан ўлчовни давом эттириш жараёни тугайди, яЪни m ўлчовни $\Re(\pounds_m)$ дан кенгроқ синфга давом эттириб бўлмайди. Агар $\pounds_m$ да аниқланган m ўлчов $\sigma-$ аддитив бўлса, у ҳолда m ни $\pounds_m$ дан $\Re(\pounds_m)$ га нисбатан кенгроқ бўлган ва қандайдир маЪнода максимал синфга давом эттириш мумкин.

Бизга бирор $\pounds_m$ бирли ярим ҳалқада аниқланган $\sigma-$ аддитив m ўлчов берилган бўлсин ва E тўплам $\pounds_m$ ҳалқанинг бири бўлсин. E нинг барча қисм тўпламларидан ташкил бўлган $M(E)$ системада ташқи ўлчов деб аталувчи μ^* функцияни қуйидаги усулда аниқлаймиз.

2.1-ТАЪРИФ. *Ихтиёрий* $A \subset E$ *тўплам учун*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_n B_n} \sum_n m(B_n) \tag{4.1}$$

сон A *тўпламнинг ташқи ўлчови деб аталади, бу ерда аниқ қуйи чегара* A *тўпламни қопловчи барча чекли ёки саноқли* $\{B_n\}, B_n \in \pounds_m$ *тўпламлар системаси бўйича олинади.*

2.1-теорема. *(Саноқли ярим аддитивлик). Агар* A *ва саноқлита* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *тўпламлар учун*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

бўлса, у ҳолда

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

2.2-ТАЪРИФ. *Агар* $A \subset E$ *тўплам ва исталган* $\varepsilon > 0$ *учун шундай* $B \in \Re(\pounds_m)$ *тўплам мавжуд бўлиб,*

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A *(Лебег маЪносида) ўлчовли тўплам дейилади.*

Фақат ўлчовли тўпламлар синфида аниқланган μ^* функция Лебег ўлчови деб аталади ва у μ ҳарфи билан белгиланади. Равшанки, $\pounds_m$ ва $\Re(\pounds_m)$ дан олинган тўпламлар ўлчовли бўлади. Бунда, агар $A \in \pounds_m$ ва $B \in \Re(\pounds_m)$ бўлса, у ҳолда

$$\mu(A) = m(A), \quad \mu(B) = m'(B).$$

Агар A ўлчовли тўплам ва $\mu^*(A\Delta B)<\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $B\in\Re(£_m)$ тўплам берилган бўлса,

$$A\Delta B=(E\setminus A)\Delta(E\setminus B)$$

тенгликдан A нинг тўлдирувчи тўплами $E\setminus A$ нинг ҳам ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

2.2-теорема. *Ўлчовли тўпламлар системаси $\Im(M)$ ҳалқа бўлади.*

2.1-эслатма. $£_m$ нинг бирлик элементи - E ўлчовли тўпламлар системаси $\Im(M)$ учун ҳам бирлик элемент бўлади, шунинг учун ўлчовли тўпламлар системаси $\Im(M)$ алгебра ташкил қилади.

2.3-теорема. Ўлчовли тўпламлар системаси $\Im(M)$ *да аниқланган μ тўплам функцияси аддитивдир.*

2.4-теорема. Ўлчовли тўпламлар системаси $\Im(M)$ да аниқланган μ тўплам функцияси $\sigma-$ аддитувдир.

2.5-теорема. Лебег бўйича ўлчовли бўлган барча тўпламлар системаси $\Im(M)$, *бирлик элементли $\sigma-$ алгебра, бунда Е тўплам бирлик элементдир.*

Текисликдаги тўпламларнинг Лебег ўлчови (5-§ га қаранг) хоссаларига ўхшаш, ўлчовнинг $\sigma-$ аддитивлик хоссасидан унунг узлуксизлик хоссаси келиб чиқади. ЯҲни, $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$ ўлчовли тўпламлар кетма-кетлиги учун $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ бўлса, у ҳолда

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

бўлади. Худди шунингдек, агар бирор ўлчовли тўпламларнинг $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$ кетма-кетлиги учун $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ бўлса, у ҳолда

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

тенглик ўринли.

Шундай қилиб, агар бирлик элементли $£_m$ ярим ҳалқада $\sigma-$ аддитив m ўлчов берилган бўлса, бу ўлчовни Лебег маҲносида давом эттириш натижасида $\Im(M)$ $\sigma-$ алгебрада аниқланган $\sigma-$ аддитив μ ўлчов ҳосил бўлар экан.

2.3-ТАЪРИФ. *Ўлчовли тўпламлар системаси $\Im(M)$ да аниқланган ва $\Im(M)$ да ташқи ўлчов μ^* билан устма-уст тушувчи μ функция m ўлчовнинг $\mu=L(m)$ Лебег маҲносидаги давоми деб аталади.*

Бирлик элементга эга бўлмаган ярим ҳалқада берилган ўлчовни давом

эттириш. Агар m ўлчов бирлик элементга эга бўлмаган $£_m$ ярим ҳалқада аниқланган бўлса, у ҳолда аввалги банддаги ўлчовни Лебег маҲносида давом эттириш жараёнида баҲзи ўзгаришлар содир бўлади. Аникроғи, μ^* ташқи ўлчов чекли $\sum_n m(B_n)$ йиғиндига эга бўлган $\bigcup_n B_n \in £_m$, қопламаси мавжуд бўлган A тўпламлар учун аниқланади. Тўплам ўлчовлилиги ТАЪРИФи ўзгаришсиз қолади. 4.2–4.4-теоремалар ва 4.3-ТАЪРИФ ўз кучини сақлаб қолади. Ярим ҳалқада бирлик элементнинг мавжудлигидан 4.2- теорема исботида фойдаланилади. Умумий ҳолда ҳам 4.2-теоремани исботлаш мумкин. Бунинг учун $A_1, A_2 \in \Im(M)$ dan $A_1 \cup A_2 \in \Im(M)$ келиб чиқишини бирлик элементга боғлиқсиз равишда кўрсатиш керак. Бу тасдиқ

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

муносабатдан келиб чиқади.

$£_m$ ярим ҳалқада бир мавжуд бўлмаган ҳолда 4.5-теорема қуйидаги теоремага алмаштирилади.

2.6-теорема. *Исталган бошланғич / ўлчов учун Лебег бўйича ўлчовли тўпламлар системаси* $\Im(M)$ $\delta-$ *ҳалқа бўлади. Саноқли сондаги ўлчовли* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *тўпламлар бирлашмаси бўлган* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *тўпламнинг ўлчовли бўлиши учун* $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ *қийматнинг* n *га боғлиқ бўлмаган ҳолда юқоридан бирор ўзгармас билан чегараланган бўлиши зарур ва етарлидир.*

2.1-натижа. *Ўлчовли тўпламлар синфи* $\Im(M)$ *ва* $A \in \Im(M)$ *тўплам берилган бўлсин.* A *тўпламнинг барча* $B \in \Im(M)$ *қисм тўпламларидан тузилган* $\Im(M(A))$ *система* $\sigma-$ *алгебра бўлади.*

Мисол учун, агар $\Im(M)$ сонлар ўқидаги Лебег маҲносида ўлчовли тўпламлар синфи ва $A = [a,b]$ - ихтиёрий кесма бўлса, у ҳолда $[a,b]$ кесмада жойлашган ўлчовли тўпламлар системаси $\sigma-$ алгебра ташкил қилади.

2.4-ТАЪРИФ. *Агар* $\mu(A) = 0$ *ва* $A' \subset A$ *бўлишидан* A' *нинг ўлчовли эканлиги келиб чиқса,* μ *ўлчов тўла деб аталади.*

ТАЪРИФда келтирилган A' тўплам учун $\mu(A') = 0$ бўлади. Қийинчиликсиз исботлаш мумкинки, ихтиёрий ўлчовнинг Лебег маҲносида давоми тўла бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $A' \subset A$, $\mu(A) = \mu^*(A) = 0$ бўлса, $\mu(A') = 0$ бўлади ва $\varnothing \in £_m$ ни олсак,

$$\mu^*(A' \Delta \varnothing) = \mu^*(A') = 0,$$

яҲни A' ўлчовли бўлиши келиб чиқади.

Умуман олганда $\sigma -$ алгебрада аниқланган ҳар қандай $\sigma -$ аддитив ўлчовни тўла ўлчовгача давом эттириш мумкин. Бунинг учун нол ўлчовли тўпламнинг ихтиёрий қисмига нолни мос қўйиш кифоя қилади.

2.1-мисол. Бизга ихтиёрий саноқли

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

тўплам берилган бўлсин. $p_n > 0$ сонларни шундай танлаймизки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

бўлсин. Ҳар бир $A \subset X$ тўпламга

$$m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$$

сонни мос қўямиз. Аниқланишига кўра, $m(A)$ тўплам функцияси ўлчов бўлади ва X нинг барча қисм тўпламлари ўлчовли бўлади. Бундан ташқари, $m(X) = 1$.

Энди X нинг ўзаро кесишмайдиган саноқлита ихтиёрий $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ қисм тўпламларини олайлик ва $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ бўлсин. Аниқланишига кўра,

$$m(A) = \sum_{x_k \in A} p_k$$

ва тенглик ўнг томонидаги қатор абсолют яқинлашувчи бўлгани учун

$$m(A) = \sum_{x_k \in A} p_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x_k \in A_n} p_k = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

тенгликлар ўринли, яЋни m $\sigma -$ аддитив ўлчов бўлади.

2.2-мисол. $[0;1]$ кесмадаги барча рационал сонлар тўпламини X билан белгилаймиз. Σ_m орқали X нинг $(a;b)$ интерваллар, $[a;b]$ кесмалар ва $[a;b)$, $(a;b]$ ярим интерваллар билан кесишмаларидан иборат тўпламлар системасини белгилаймиз. Кўрсатиш мумкинки, Σ_m ярим ҳалқа бўлади. Агар $A_{ab} = X \bigcap (a;b) \left(\bigcap [a;b], \bigcap (a;b], \bigcap [a;b) \right)$ десак, ҳар бир A_{ab} тўпламга

$$m(A_{ab}) = b - a$$

сонни мос қўйиш мумкин. Бу тўплам функцияси m аддитив ўлчов бўлади, аммо $\sigma -$ аддитив бўлмайди. Чунки $[0;1]$ кесмадаги барча рационал сонлар тўплами саноқли, яЋни $X = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ тенглик ўринли. Биринчидан $A_{01} = X \bigcap [0;1]$ тўплам учун $m(A_{01}) = 1$ бўлади, иккинчи томондан $A_{01} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ўзаро кесишмайдиган саноқлита нол ўлчовли $A_n = X \bigcap [r_n; r_n]$ тўпламларнинг йиғиндисидан иборат бўлади, яҲни

$$m(A_{01}) = 1 \neq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0.$$

Ушбу 3-§ да ва 4-§ да қаралаётган ўлчовларни $\sigma -$ аддитив ўлчовлар деб ҳисоблаймиз.

Масалалар

1. $[0;1]$ кесмадаги барча иррационал сонлар тўпламини X билан белгилаймиз. Σ_m орқали X нинг $[a;b)$ ярим интерваллар билан кесишмаларидан иборат тўпламлар системасини белгилаймиз. Бу системанинг ярим ҳалқа эканлигини кўрсатинг.

2. 1-топшириқда аниқланган Σ_m ярим ҳалқанинг ҳар бир $A_{ab} = X \cap [a;b)$ тўпламига $m(A_{ab}) = b - a$ сонни мос қўямиз. Бу тўплам функцияси ўлчов бўлишини кўрсатинг.

3. 2-топшириқда аниқланган $m : \Sigma_m \to R$ ўлчовнинг Лебег бўйича давомини топинг. Уни сонлар ўқидаги Лебег ўлчови билан устма-уст тушишини исботланг.

4. Фараз қилайлик, $X = N$ натурал сонлар тўплами ва $\mathfrak{R}$ - X нинг барча чекли тўпламларидан тузилган система ҳамда $\varnothing \in \mathfrak{R}$ бўлсин. Ҳар бир $A \in \mathfrak{R}$ учун A тўпламдаги элемементлар сони $\mu(A)$ ни мос қўямиз. $\mu(A)$ нинг ўлчов эканлигини кўрсатинг ва $\mu(A)$ ўлчовнинг Лебег маҲносидаги давомини қуринг.

5. Фараз қилайлик, μ_1, μ_2 тўплам функциялар $\mathfrak{R}$ ҳалқада аниқланган $\sigma -$ аддитив ўлчовлар бўлсин. Ихтиёрий номанфий α, β сонлар учун $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ тўплам функция $\mathfrak{R}$ ҳалқада σ - аддитив ўлчов бўлишини исботланг.

3 амалий машғулот. Ўлчовли функциялар

Бу параграфда узлуксиз функцияга «қайсидир» маҲнода яқин бўлган ўлчовли функция тушунчасини киритамиз. Ўлчовли функциялар Лебег интеграли тушунчасини киритишда асосий манба ҳисобланади.

Бизга $E \subset R^2$ $(E \subset R)$ Лебег маҲносида ўлчовли тўплам ва унда аниқланган ҳақиқий қийматли f функция берилган бўлсин.

3.1-ТАЪРИФ. *Агар ихтиёрий* $c \in R$ *учун* $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ *тўплам* *ўлчовли бўлса, f функция E тўпламда ўлчовли дейилади.*

3.1-мисол. $f:E\to R,\quad f(x)\equiv a=const$ функциянинг ўлчовли эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Ихтиёрий $c\in R$ учун

$$E(f<c)=\{x\in E: f(x)<c\}=\begin{cases} E, & \text{agar} \quad c>a, \\ \varnothing, & \text{agar} \quad c\le a \end{cases}$$

тенглик ўринли. E ва $\varnothing$ тўпламлар ўлчовли. Демак, ихтиёрий $c\in R$ учун $E(f<c)$ тўплам ўлчовли экан. ТАЪРИФга кўра, $f(x)=a$ функция E да ўлчовли функция бўлади.

3.2-мисол. *Агар f функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда ихтиёрий $a,b\in R$ лар учун қуйидаги тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли бўлишини исботланг:*

1) $E(f\ge a)$; 2) $E(a\le f<b)$; 3) $E(f=a)$; 4) $E(f\le a)$; 5) $E(f>a)$.

Ечиш. Фараз қилайлик, f ўлчовли функция бўлсин, у ҳолда ТАЪРИФга кўра, ихтиёрий $a\in R$ учун $E(f<a)$ тўплам ўлчовли бўлади.

1) $E(f\ge a)=E\setminus E(f<a)$ тенгликдан ҳамда ўлчовли тўпламнинг тўлдирувчиси ўлчовли эканлигидан $E(f\ge a)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

2) $E(a\le f<b)=E(f\ge a)\cap E(f<b)$ тенгликдан ҳамда ўлчовли тўпламлар кесишмаси ўлчовли эканлигидан $E(a\le f<b)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

3) $E(f=a)$ тўпламнинг ўлчовли эканлигини кўрсатамиз:

$$E(f=a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left(a\le f<a+\frac{1}{n}\right).$$

Бунда $E(a\le f<a+1/n)$ тўплам 2) кўринишдаги тўплам бўлгани учун у ўлчовли. Ўлчовли тўпламларнинг саноқли сондаги кесишмаси ўлчовли бўлгани учун $E(f=a)$ тўплам ўлчовли бўлади.

4) $E(f\le a)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги ТАЪРИФдан, 3) дан ҳамда $E(f\le a)=E(f<a)\cup E(f=a)$ тенгликдан келиб чиқади.

5) $E(f>a)=E\setminus E(f\le a)$ тенгликдан ҳамда ўлчовли тўпламлар тўлдирувчи тўпламининг ўлчовлилигидан келиб чиқади.

3.3-мисол. Агар ихтиёрий $a\in R$ учун $E(f\le a)$ тўплам ўлчовли тўплам бўлса, у ҳолда f функциянинг E тўпламда ўлчовли бўлишини исботланг.

Ечиш. Ихтиёрий $a \in R$ учун ушбу $E(f \leq a)$ тўплам ўлчовли бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгликларга кўра

(i) $E(f > c) = E \backslash E(f \leq c),\ c \in R;$

(ii) $E(c < f \leq d) = E(f > c) \cap E(f \leq d),\ c, d \in R;$

(iii) $E(f = c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(c - \frac{1}{n} < f \leq c\right),\ c \in R;$

(iv) $E(f \geq c) = E(f > c) \cup E(f = c),\ c \in R$

ушбу $E(f > c),\ E(c < f \leq d),\ E(f = c),\ E(f \geq c)$ тўпламлар ҳар бири ўлчовлидир. Натижада ушбу $E(f < a) = E \backslash E(f \geq a),\ a \in R$ тенгликдан ихтиёрий $a \in R$ учун $E(f < a)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади. Демак, ТАЪРИФга кўра f *функция* E тўпламда ўлчовлидир.

3.4-мисол. *Агар ихтиёрий* $a \in R$ *учун 5.2-мисолдаги 1), 5) кўринишдаги тўпламларнинг бирортаси ўлчовли бўлса, у ҳолда* f *фукнция* E *тўпламда ўлчовли бўлишини исботланг.*

Ечиш. 1). Ихтиёрий $c \in R$ учун ушбу $E(f \geq c)$ тўплам ўлчовли бўлсин. Ушбу $E(f < c) = E \backslash E(f \geq c)$ тенгликдан ўлчовли тўпламлар хоссасига кўра $E(f < c)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

2). Ихтиёрий $c \in R$ учун ушбу $E(f > c)$ тўплам ўлчовли бўлсин. Ушбу $E(f < c) = E \backslash (E(f > c) \cup E(f = c))$ тенгликдан ўлчовли тўпламлар хоссасига кўра $E(f < c)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

3.5-мисол. *Агар* f *ва* g *лар* E *да ўлчовли функциялар бўлса, у ҳолда*

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\}$$

тўплам ўлчовли эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Рационал сонлар тўплами саноқли бўлгани учун унинг элементларини номерлаб чиқамиз, яҲни $Q = \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots\}$ ва қуйидаги тенгликни исботлаймиз:

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E(f > r_k) \cap E(g < r_k)). \tag{5.1}$$

Фараз қилайлик, $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ бўлсин, у ҳолда рационал сонларнинг зичлик хоссасига кўра шундай $r_k \in Q$ мавжудки, $f(x_0) > r_k > g(x_0)$ муносабат ўринли бўлади. Демак,

$$x_0 \in \{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}.$$

Бундан

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\})$$

эканлиги келиб чиқади. Энди

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{ x : f(x) > r_k\} \cap \{ x : g(x) < r_k\}\right)$$

ихтиёрий нуқта бўлсин, у ҳолда x_0 бирлашмадаги тўпламларнинг ҳеч бўлмаганда биттасига тегишли бўлади, яҲни шундай $r_k \in Q$ мавжудки, бир вақтда $f(x_0) > r_k$ ва $g(x_0) < r_k$ бўлади. Бундан $f(x_0) > g(x_0)$ эканлиги ва демак $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ эканлиги келиб чиқади.

Биз (5.1) тенгликни исботладик. $\{x \in E : f(x) > g(x)\}$ тўплам ўлчовлилиги исботи (5.1) тенгликдан, ҳамда ўлчовли тўпламларнинг саноқли бирлашмаси яна ўлчовли тўплам эканлигидан келиб чиқади.

3.2-ТАЪРИФ. *E ўлчовли тўпламда аниқланган f ва g функциялар учун*

$$\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

бўлса, f ва g лар эквивалент функциялар дейилади ва $f \sim g$ шаклда белгиланади.

Биз айнан нол функцияга эквивалент бўлган функцияларни θ (ёки $\theta(x)$) билан белгилаймиз.

3.1-теорема. *Агар f ва g функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси $f+g$, айирмаси $f-g$ ва кўпайтмаси $f \cdot g$ E тўпламда ўлчовли бўлади. Агар $g(x) \neq \theta(x)$ бўлса, у ҳолда f/g функция ҳам E да ўлчовли бўлади.*

Шундай қилиб, ўлчовли функциялар тўпламининг арифметик амалларга нисбатан ёпиқлиги ҳақидаги хоссалари билан танишдик.

E ўлчовли тўпламда f функция ва $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

3.3-ТАЪРИФ. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ *учун шундай $n_0 > 0$ мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ ва ихтиёрий $x \in E$ лар учун $| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда f функцияга текис яқинлашади дейилади.*

3.4-ТАЪРИФ. *Агар ҳар бир $x \in E$ да $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ бўлса, у ҳолда $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги f га нуқтали яқинлашади дейилади.*

Қуйидаги теорема ўлчовли функциялар тўпламининг лимитга ўтиш (нуқтали яқинлашиш) амалига нисбатан ҳам ёпиқлигини ифодалайди.

3.2-теорема. Агар E тўпламда $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги ҳар бир $x \in E$ да $f(x)$ га яқинлашса, у ҳолда лимит функция f E тўпламда ўлчовли бўлади.

3.6-мисол. Агар $f: E \to R$ ўлчовли функция бўлса, у ҳолда f функция E нинг ихтиёрий ўлчовли A қисмида ҳам ўлчовли функция бўлишини кўрсатинг.

Ечиш. Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий $c \in R$ учун

$$\{x \in A: f(x) < c\} = E(f < c) \cap A$$

тенглик ўринли. $E(f < c)$ ва A тўпламлар ўлчовли бўлганлиги учун $\{x \in A: f(x) < c\}$ тўплам ҳам ўлчовли бўлади. ТАЪРИФга кўра, f функция A да ўлчовли бўлади.

Masalalar

1. Ўлчовли бўлмаган функцияга мисол келтиринг.
2. Ўлчовли бўлмаган, лекин модули ўлчовли бўлган функцияга мисол келтиринг.
3. Шундай f ва g функцияларга мисол келтирингки, уларнинг йиғиндиси ўлчовли бўлсин, лекин айирмаси ўлчовли бўлмасин.
4. Шундай f ва функцияларга мисол келтирингки, уларнинг кўпайтмаси ўлчовли бўлсин, лекин йиғиндиси ўлчовли бўлмасин.
5. Дирихле функцияси

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \in R \setminus Q, \\ 1, & \text{agar} \quad x \in Q \end{cases}$$

нинг [0;3] тўпламда ўлчовли эканлигини ТАЪРИФ ёрдамида кўрсатинг.

6. Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $h(x) = [f(x)]$ нинг ўлчовли эканлигини исботланг. Бу ерда $[x]$ билан x нинг бутун қисми белгиланган.
7. Агар $[f(x)]^{11}$ функция E да ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўладими?
8. Агар $[f(x)]^{10}$ функция E да ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўладими?
9. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функция E да ўлчовли бўлса, у ҳолда

$$m(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \ x \in E,$$
$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \ x \in E$$

10. Функциялар E тўпламда ўлчовли эканлигини кўрсатинг.

11. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ нинг қисми бўлган ихтиёрий $[\alpha,\beta]$ $(a<\alpha<\beta<b)$ кесмада ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a,b]$ да ўлчовли эканлигини кўрсатинг.

12. Фараз қилайлик A - тўғри чизиқдаги ихтиёрий тўплам, K – Кантор тўплами. У ҳолда ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ agar } x\in A\cap K, \\ x-1, \text{ agar } x\notin A\cap K \end{cases}$$

функция $[0,1]$ да ўлчовли бўладими?

13. Агар $[a,b]$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлса, у ҳолда $f'(x)$ҳосила функциянинг $[a,b]$ да ўлчовли эканлигини кўрсатинг.

14. Ушбу $\chi_A(x)$, $A\subset R$ характеристик функциянинг R да ўлчовли бўлиши учун, A тўпламнинг ўлчовли бўлиши зарур ва етарли эканлигини кўрсатинг.

15. Агар $f(x)$ функция E да ўлчовли бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция E тўпламда ўлчовли бўладими?

16. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли функция, A тўғри чизиқдаги ихтиёрий очиқ ёки ёпиқ тўплам бўлсин. A тўплам асли $f^{-1}(A)$ ўлчовли тўплам бўладими?

17. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли функция, A тўғри чизиқдаги ихтиёрий тўплам бўлсин. A тўплам асли $f^{-1}(A)$ ўлчовли тўплам бўладими?

18. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли функция, $A\subset E$ - ихтиёрий ўлчовли қисмтўплам бўлсин. A тўплам асли $f^{-1}(A)$ ўлчовли тўплам бўладими?

19. Фараз қилайлик, $g(t)$ функция E тўпламда ўлчовли функция, $B=g(E)$ – $g(t)$ функциянинг қийматлар тўплами бўлсин. Агар $f(x)$ функция B тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(t)=f(g(t))$ функциянинг E тўпламда ўлчовли эканлигини исботланг.

20. Фараз қилайлик, $g(t)$ функция $E=[a,b]$ тўпламда узлуксиз, $B=g(E)$ – $g(t)$ функциянинг қийматлар тўплами бўлсин. Агар $f(x)$ функция B тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $F(t)= f(g(t))$ функциянинг E тўпламда ўлчовли бўладими?

21. Агар *g(t)* функция *R* тўпламда узлуксиз функция бўлса, у ҳолда *g(t)* функциянинг *R* да ўлчовли эканлигини исботланг.

4 амалий машғулот. Инвариант ўлчовлар. Эргодик теоремалар.

Бу параграфда эквивалент функциялар, уларнинг айрим хоссалари ва ўлчовли функциялар кетма-кетликларининг турли яқинлашишлари орасидаги боғланишларни келтирамиз.

4.1-ТАЪРИФ. Э ўлчовли тўпламда аниқланган f *ва* g *функциялар учун*

$$\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

бўлса, f *ва* g *лар эквивалент функциялар дейилади ва* $f \sim g$ *каби белгиланади.*

4.1-мисол. Дирихле функцияси

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \in R \setminus Q \\ 1, & \text{agar} \quad x \in Q, \end{cases}$$

Риман функцияси

$$R(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa} \\ \frac{1}{n}, & \text{agar } x = \frac{m}{n} \text{ qisqarmas kasr bo'lsa } (m \in Z, n \in N) \end{cases}$$

берилган. Бу функциялар қайси биринол $\theta(x) \equiv 0$ функцияга, қайси бири бир $I(x) \equiv 1$ функцияга эквивалент бўлади.

Ечиш. МаҲлумки, Q саноқли тўплам, шунинг учун $\mu(Q) = 0.$ Лебег ўлчови - тўла ўлчов, шундай экан, ихтиёрий $A \subset Q$ учун $\mu(A) = 0.$ Энди бу функцияларни эквивалентликка текширамиз:

$$\{x : D(x) \neq \theta(x)\} = Q, \quad \{x : R(x) \neq \theta(x)\} = Q,$$
$$\{x : D(x) \neq R(x)\} \subset Q, \quad \{x : D(x) \neq I(x)\} = R \setminus Q.$$

Бу ердан қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\mu\{x : D(x) \neq \theta(x)\} = \mu\{x : R(x) \neq \theta(x)\} = \mu\{Q\} = 0,$$

$$\mu\{x : D(x) \neq R(x)\} = 0, \quad \mu\{x : D(x) \neq I(x)\} = \mu\{R \setminus Q\} \neq 0.$$

Демак, $D \sim \theta$, $R \sim \theta$, $R \sim D$ бўлади. I билан D эквивалент эмас.

4.2-ТАЪРИФ. Агар бирор хосса E *тўпламнинг нол ўлчовли қисм тўпламидан бошқа барча нуқталарида бажарилса, бу хосса* E *тўпламда деярли* *бажарилади дейилади.*

МаҲлумки, агар иккита функция деярли тенг бўлса, улар эквивалентдир.

4.2-мисол. Айтайлик, $E = A_1 \cup A_2$ ва $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ бўлсин. Агар $f_1 : A_1 \to R$ ва $f_2 : A_2 \to R$ функциялар ўлчовли бўлса, у ҳолда

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{agar} \quad x \in A_1 \\ f_2(x), & \text{agar} \quad x \in A_2 \end{cases}$$

E да ўлчовли функция бўлишини кўрсатинг.

Ечиш. Ихтиёрий $c \in R$ да

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \{x \in A_1 : f_1(x) < c\} \cup \{x \in A_2 : f_2(x) < c\}$$

тўплам - ўлчовли. Демак, f функция- E да ўлчовли.

4.3-мисол. Нол ўлчовли A тўпламда аниқланган ихтиёрий $f : A \to R$ функциянинг ўлчовли бўлишини исботланг.

Ечиш. Ўлчови нолга тенг тўпламнинг ихтиёрий қисми

$$\{x \in A : f(x) < c\} \subset A$$

ўлчовли, шунинг учун, $f - A$ да ўлчовли функция бўлади.

4.4-мисол. Агар f *функция* E *ўлчовли тўпламда аниқланган бўлиб, ўлчовли* $g : E \to R$ *функцияга эквивалент бўлса, у ҳолда* f *ҳам* E *да ўлчовли функция бўлади.*

Ечиш. Фараз қилайлик, g -ўлчовли, $f \sim g$ бўлсин, ва $A = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ бўлсин. У ҳолда $E | A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ ва $\mu(E | A) = 0$.

Натижада, 4.2-ва 4.3- мисолларга кўра, ушбу функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} x \in E \backslash A \\ g(x), & \text{agar } x \in A \end{cases}$$

E да ўлчовли функция бўлади.

4.1. Деярли яқинлашиш. Бизга E ўлчовли тўпламда аниқланган $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

4.3-ТАЪРИФ. Агар E *тўпламда аниқланган* $\{f_n\}$ *функциялар кетма-кетлигининг* f *функцияга яқинлашмайдиган нуқталари тўпламининг ўлчови нол бўлса, яҲни*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

тенглик E *даги деярли барча* x *лар учун ўринли (ёки*

$$A=\{x:\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\}\qquad \mu(E\setminus A)=0.)$$

бўлса, у ҳолда $\{f_n\}$ *функциялар кетма-кетлиги* E *тўпламда* f *функцияга деярли яқинлашади дейилади*

4.5-мисол. $f_n(x)=\cos^n x,\quad E=[0;2\pi]$ функциялар кетма-кетлигининг нол функцияга деярли яқинлашишини кўрсатинг.

Yechish.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos x)^n=\begin{cases}0, & \text{agar}\quad x\in(0;2\pi)\setminus\{\pi\},\\ \text{mavjud} & \text{emas}\ ,\quad x=\pi,\\ 1, & \text{agar}\quad x\in\{0,2\pi\}.\end{cases}$$

Демак,

$$A=\{x:\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\}=E\setminus\{0,\pi,2\pi\},\quad \mu(E\setminus A)=\mu\{0,\pi,2\pi\}=0.$$

ТАЪРИФга асосан, $f_n(x)=\cos^n x$ функциялар кетма-кетлиги $E=[0;2\pi]$ тўпламда нол $\theta(x)=0$ функцияга деярли яқинлашади.

4.1-теорема. Агар E *тўпламда* $\{f_n\}$ *ўлчовли функциялар кетма-кетлиги* f *га деярли яқинлашса, у ҳолда лимит функция* f *ҳам ўлчовлидир.*

МаҲлумки, текис яқинлашишдан нуқтали яқинлашиш, нуқтали яқинлашишдан эса деярли яқинлашиш келиб чиқади. Қуйидаги муносабатлар ўринли:

Текис яқинлашиш	$\Rightarrow$	Нуқтали яқинлашиш	$\Rightarrow$	Деярли яқинлашиш	$\Rightarrow$	Ўлчов бўйича яқинлашиш

Егоров теоремаси деярли яқинлашиш билан текис яқинлашиш орасидаги боғланишни ифодалайди.

4.2-теорема (Егоров). E *чекли ўлчовли тўпламда* $\{f_n\}$ *функциялар кетма-кетлиги* f *га деярли яқинлашсин. У ҳолда ихтиёрий* $\delta>0$ *учун шундай* $E_\delta\subset E$ *тўплам мавжудки, унинг учун қуйидагилар ўринлидир:*

1) $\mu(E\setminus E_\delta)<\delta,$

2) E_δ *тўпламда* $\{f_n\}$ *функциялар кетма-кетлиги* f *га текис яқинлашади.*

4.2. Ўлчов бўйича яқинлашиш. Бизга E ўлчовли тўпламда аниқланган $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги ва f ўлчовли функция берилган бўлсин.

4.4-ТАЪРИФ. Агар ихтиёрийкичик $\delta>0$ *учун*

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|\ge\delta\}=0$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда f функцияга ўлчов бўйича яқинлашади дейилади.

4.3-теорема. Агар $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги $E\ (\mu(E)<\infty)$ тўпламда f функцияга деярли яқинлашса, у ҳолда $\{f_n\}$ кетма-кетлик E тўпламда f га ўлчов бўйича ҳам яқинлашади.

"Ўлчов бўйича яқинлашишдан деярли яқинлашиш келиб чиқадими?" дегансаволтуғилади. Умуман олганда, ўлчов бўйича яқинлашишдан деярли яқинлашиш келиб чиқмайди!

4.6-мисол. Ҳарбир $k\in N$ учун $(0,1]$ ярим интервалда $f_1^{(k)}, f_2^{(k)},\ldots, f_k^{(k)}$ функцияларни қуйидаги усул билана ниқлаймиз

$$f_i^{(k)}=\begin{cases}1, & agar\ \dfrac{i-1}{k}<x\le\dfrac{i}{k},\\ 0, & agar\ x\in(0,1]\setminus\left(\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right].\end{cases}$$

бу ерда $i=1,\ldots k$. Бу функциялар ҳар бири $(0,1]$ ярим интервалда ўлчовлидир.

Бу функцияларни қуйи ва юқори индекслари йиғиндисининг ўсиш тартибида жойлаштирсак, $\{g_n\}$функциялар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Ушбу $\{g_n\}$ кетма-кетликнинг нол функцияга ўлчов бўйича яқинлашишини ва ҳар бир $x\in(0,1]$ учун $g_n(x)$ нолга яқинлашмаслигини кўрсатинг.

Ечиш. Ҳар бир $n\in\mathrm{N}$ учун шундай k ва i сонлар топиладики, $f_i^{(k)}(x)=g_n(x)$ тенглик бажарилади ва n чексизга интилиши билан k ҳам чексизга интилади. Демак, ихтиёрий кичик $\delta>0$ учун

$$\mu\{x:|g_n(x)|\ge\delta\}=\mu\{x: f_i^{(k)}(x)\ge\delta\}\le\mu\left[\left(\frac{i-1}{k};\frac{1}{k}\right]\right]=\frac{1}{k}\to0,\quad k\to\infty.$$

Охирги муносабат $\{g_n\}$функциялар кетма-кетлигининг нол функцияга ўлчов бўйича яқинлашишини англатади.

Энли $\{g_n\}$функциялар кетма-кетлиги $(0;1]$ интервалдаги ҳар бир нуқтада нолга яқинлашмаслигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $x_0\in(0;1]$ нуқтани оламиз. Шундай k_n ва $i_n\ (k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots)$ сонлар топиладики,

$$x_0\in\left(\frac{i_n-1}{k_n};\frac{i_n}{k_n}\right]$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_{i_n}^{(k_n)}(x_0) = 1 \neq 0.$$

4.4-теорема. Агар $\{f_n\}$ *ўлчовли функциялар кетма-кетлиги* E *тўпламда* f *га ўлчов бўйича яқинлашса, у ҳолда ундан* f *га деярли яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.*

Масалалар

1. Агар f ва g функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $h_-(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ва $h_+(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ функцияларнинг ўлчовли бўлишини исботланг.
2. Агар $f \sim g$ ва $g \sim \varphi$ бўлса, у ҳолда $f \sim \varphi$ эканлигини исботланг.
3. 6.6-мисолда келтирилган $\{g_n\}$функциялар кетма-кетлигидан нолга деярли яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратинг.
4. 6.5-мисол учун Егоров теоремаси шартларини қаноатлантирувчи E_δ, $\delta = 10^{-3}$ тўпламни қуринг.
5. Дирихле ва Риман функцияларига деярли яқинлашувчи ўлчовли функциялар кетма-кетлигини тузинг.
6. f функцияга ҳар бир нуқтада яқинлашувчи, лекин текис яқинлашмайдиган f_n функциялар кетма-кетлигига мисол келтиринг.
7. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0;1]$ функционал кетма-кетликнинг лимит функциясини топинг.
8. $f_n(x) = x^n$, $x \in [-1;1]$ функционал кетма-кетлик Дирихле(ёки Риман) функциясига деярли яқинлашадими?
9. Деярли яқинлашувчи функционал кетма-кетликнинг лимит функцияси ягона бўладими? Агар ягона бўлмаса, бу ҳақда ўз фикрингизни асосланг.
10. Фараз қилайлик, E ўлчовли тўплам ва ўлчови нолдан фарқли бўлсин. Агар E тўпламда $\{f_n\}$ ва $\{g_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги мос равишда E тўпламда *f(x)* ва $g(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашса, у ҳолда ушбу $h_n(x) = f_n(x) + g_n(x)$ $(x \in E), n \in N$ функциялар кетма-кетлигининг E тўпламда *h(x)=f(x)+g(x)* функцияга ўлчов бўйича яқинлашишини исботланг.
11. Фараз қилайлик, E ўлчовли тўплам ва ўлчови нолдан фарқли бўлсин. Агар E тўпламда $\{f_n\}$ ва $\{g_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги мос равишда E тўпламда *f(x)* ва $g(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашса, у ҳолда ушбу

$h_n(x)=f_n(x)g_n(x)\ (x\in E), n\in N$ функциялар кетма-кетлигининг E тўпламда $h(x)=f(x)g(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашишини исботланг.

12. Фараз қилайлик, E ўлчовли тўплам ва ўлчови нолдан фарқли бўлсин. Агар E тўпламда $\{f_n\}$ ва $\{g_n\}$($g_n(x)\neq 0$ деярли барча $x\in E$ ларда) ўлчовли функциялар кетма-кетлиги мос равишда E тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашса, бу ерда $g(x)\neq 0$ деярли барча $x\in E$ ларда, у ҳолда ушбу $h_n(x)=\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)}\ (x\in E), n\in N$ функциялар кетма-кетлигининг E тўпламда $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашишини исботланг.

13. Фараз қилайлик, E ўлчовли тўпламда $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашсин. Агар $f_n(x)\le a,\ n\in N$ бўлса, у ҳолда $f(x)\le a$ тенгсизликнинг деярли E тўпламда бажарилишини исботланг.

14. [0,1] сегментда ўлчов бўйича яқинлашувчи, шундай ўлчовли функциялар кетма-кетлигига мисол тузингки,бу кетма-кетлик [0,1] сегментнинг бирор нуқтасида яқинлашувчи бўлмасин.

15. Ушбу $f_n(x)=\chi_{\left(\sqrt{n},\sqrt{n+1}\right)}(x),\ x\in R$ ўлчовли функциялар кетма-кетлигининг R да нол функцияга ўлчов бўйича яқинлашишини кўрсатинг.

16. Ушбу $f_n(x)=\sin^n x,\ x\in R$ ўлчовли функциялар кетма-кетлигининг R да нол функцияга деярли яқинлашишини кўрсатинг.

17. Қуйидаги функцияларнинг R да ўлчовли эканлигини кўрсатинг:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(ne^{10x})}{n\sqrt[5]{n}},\ x\in R;$

2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1+\sin x},\ x\in R.$

18. Қуйидаги функцияларнинг R^2 да ўлчовли эканлигини кўрсатинг:

1) $f(x,y)=sign\sin\pi(x^2+y^2),\ x,y\in R;$

2) $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n\left(1+n[x^2+y^2]\right)},\ x,y\in R.$

19. Ушбу $f_n(x)=x^2+\sin^n x+\cos^n x,\ x\in R$ ўлчовли функциялар кетма-кетлигининг R да $f(x)=x^2$ функцияга деярли яқинлашишини кўрсатинг.

20. Ушбу $f_n(x,y)=\sin^n x+\cos^n y,\ x,y\in R$ ўлчовли функциялар кетма-кетлигининг R^2 да нол функцияга деярли яқинлашишини кўрсатинг.

5 амалий машғулот. Гиббс ўлчовлари (физикада қўлланиши). Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.

Биз ушбу параграфда ўлчовли функцияларни узлуксиз функциялар билан яқинлаштириш ҳақидаги теоремалар билан танишамиз.

5.1-теорема. Фараз қилайлик E *тўпламда ўлчовли ва деярли чекли қийматларни қабул қилувчи* f *функция берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $\delta > 0$ *учун шундай ўлчовли чегараланган* g *функция топиладики, бунда* $\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} < \delta$ *тенгсизлик ўринли бўлади.*

5.1-ТАЪРИФ. f *функция* E *тўпламда аниқланган бўлсин ва* $x_0 \in E$, $f(x_0) \neq \pm\infty$. *Қуйидаги ҳолларда* f *функция* x_0 *нуқтада узлуксиз деб юритилади: 1) агар* x_0 *нуқта* E *тўпламнинг яккаланган нуқтаси бўлса; 2) агар* $x_0 \in E'$ *va* $x_n \to x_0$ *муносабатдан* $f(x_n) \to f(x_0)$ *муносабат келиб чиқса.*

f функция E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, f функция E тўпламда узлуксиз деб юритилади.

Қуйидаги теорема узлуксиз ва ўлчовли функциялар ўртасидаги муҳим боғланишни ифодалайди.

5.2-теорема (Борель). Фараз қилайлик, $[a,b]$ *тўпламда ўлчовли ва деярли чекли қийматларни қабул қилувчи* f *функция берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $\delta > 0$ *ва ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *учун* $[a,b]$ *да узлуксиз бўлган шундай* g *функция мавжудки, бунда* $\mu\{x \in [a,b] : |f(x) - g(x)| \geq \delta\} < \varepsilon$ *тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда агар* $|f(x)| \leq C$ *бўлса,* g *функцияни ушбу* $|g(x)| \leq C$ *шартни қаноатлантирувчи этиб танлаш мумкин.*

5.1-натижа. $[a,b]$ *сегментда ўлчовли ва деярли чекли қийматларни қабу лқилувч иихтиёрий* f *функция учун, ўлчов бўйича* f *га яқинлашувчи* f_n *узлуксиз ф ункциялар кетма-кетлиги мавжуддир.*

Ушбу хоссадан ваўлчов бўйича яқинлашувчи функциялар кетма-кетлиги хоссасидан қуйидаги теорема келиб чиқади.

5.3-теорема(Фреше). $[a,b]$ *сегментда ўлчовли ва деярли чекли қийматларни қабул қилувчи ихтиёрий* f *функция учун, деярли* f *га яқинлашувчи узлуксиз функциялар кетма-кетлиги мавжуддир.*

Юқоридаги теорема ёрдамида ўлчовли функциялар назариясида муҳим аҳамиятга эга бўлган Лузин теоремаси келиб чиқади.

5.4-теорема (Лузин). $[a,b]$ *кесмада аниқланган* f *функция ўлчовли бўлиши учун ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *сон учун* $[a,b]$ *да узлуксиз бўлган шундай* φ *функция мавжуд бўлиб,* $\mu\{x \in [a,b] : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$ *тенгсизлик бажарилиши зарур ва етарли.*

5.2-натижа. $[a,b]$ *кесмада узлуксиз функция ўлчовлидир.*

5.1-мисол. $[0;\pi]$ кесмада аниқланган

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\pi]\setminus Q\\ \cos^2(\sin x), & x\in Q\end{cases}$$

функция ўлчовли бўладими?

Ечиш. Ушбу $\varphi(x)=\sin x,\quad x\in[0,\pi]$ узлуксиз функция учун

$$\mu\{x:\, f(x)\neq\varphi(x)\}=\mu\big([0,\pi]\cap Q\big)=0<\varepsilon$$

ва бу тенгсизликдан ҳамда Лузин теоремасидан f функциянинг $[0;\pi]$ кесмада ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

5.2-мисол. $[0,1]$ тўпламда ушбу чегараланмаган

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & \text{agar } x\in[0,1) \text{ bo'lsa,}\\ 1, & \text{agar } x=1 \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

функция ўлчовли бўладими?

Ечиш. Бизга ихтиёрий кичик ε сонберилган бўлсинва $\varepsilon>0$. $[0,1]$ тўпламда аниқланган ушбу

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & \text{agar } x\in[0,1-\varepsilon^2) \text{ bo'lsa,}\\ \dfrac{x-1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\left(1-\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)+\dfrac{1}{\varepsilon^2}, & \text{agar } x\in[1-\varepsilon^2,1] \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

узлуксиз функцияни тузиб оламиз.

Лузин теоремаси ва

$$\mu\{x\in[0,1]:\, f(x)\neq\varphi_\varepsilon(x)\}\leq\mu\big([1-\varepsilon^2,1]\big)=\varepsilon^2<\varepsilon$$

тенгсизликдан f функциянинг $[0,1]$ кесмада ўлчовли эканлиги келиб чиқади

5.3-мисол. $[0,10\pi]$ тўпламда ушбу чегараланмаган

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin^2 x}, & \text{agar } x\notin\{0,\pi,\ldots,10\pi\} \text{ bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar } x=0,\pi,\ldots,10\pi \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

функция ўлчовли бўладими?

Ечиш. Бизга ихтиёрий кичик ε сон берилган бўлсин ва $\varepsilon>0$. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\Delta_0=\left[0,\frac{\varepsilon^2}{20}\right),\ \Delta_k=\left[\pi k-\frac{\varepsilon^2}{20},\pi k+\frac{\varepsilon^2}{20}\right],\ k=1,...9,\ \Delta_{10}=\left(10\pi-\frac{\varepsilon^2}{20},10\pi\right]$$

va $t_0=\frac{\varepsilon^2}{20},\ t_k=\pi k-\frac{\varepsilon^2}{20},\ k=1,...9,\ t_{10}=10\pi-\frac{\varepsilon^2}{20}$. $[0,10\pi]$ тўпламда аниқланган ушбу

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sin^2 x}, \text{ agar } x\notin\bigcup_{k=0}^{10}\Delta_k \text{ bo'lsa,}\\ f(t_k), \text{ agar } x\in\Delta_k,\ k\in\{0,1,...,10\} \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

узлуксиз функсияни тузиб оламиз.

Лузин теоремаси ва

$$\mu\{x\in[0,1]: f(x)\neq\varphi_\varepsilon(x)\}=\mu\left(\bigcup_{k=0}^{10}\Delta_k\right)=\varepsilon^2<\varepsilon$$

тенгсизликдан f функциянинг $[0,1]$ кесмада ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

Масалалар

1. (0,1) тўпламда аниқланган ушбу $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ўлчовли функция учун 7.1-теорема шартларининг бажарилишини текширинг.

2. $(0,\pi)$ тўпламда аниқланган ушбу $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ ўлчовли функция учун 7.1-теорема шартларининг бажарилишини текширинг.

3. E=(0,1) тўпламда аниқланган ушбу $f(x)=\frac{1}{1-x}$ ўлчовли функция учун, ихтиёрий $\delta>0$ кичик сон берилганда E=(0,1) тўпламда шундай ўлчовли чегараланган/ функция топингки, бунда $\mu\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}<\delta$ тенгсизлик ўринли бўлсин (7.1-теоремага қаранг).

4. $E=(0,\pi)$ тўпламда аниқланган ушбу $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ ўлчовли функция учун, ихтиёрий $\delta>0$ кичик сон берилганда $E=(0,\pi)$ тўпламда шундай ўлчовли чегараланган g функция топингки, бунда $\mu\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}<\delta$ тенгсизлик ўринли бўлсин(7.1-теоремага қаранг).

5. P да аниқланган ушбу

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, \text{ agar } x\neq 1,\\ 0, \text{ agar } x=1\end{cases}$$

ўлчовли функция учун 7.1-теорема шартларининг бажарилишини текширинг.

6. $(0,2\pi)$ тўпламда аниқланган ушбу

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}, & \text{agar } x\neq\pi,\\ 1, & \text{agar } x=\pi\end{cases}$$

ўлчовли функция учун 7.1-теорема шартларининг бажарилишини текширинг.

7. R да аниқланган ушбу

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & \text{agar } x\neq 1,\\ 0, & \text{agar } x=1\end{cases}$$

ўлчовли функция учун, ихтиёрий $\delta>0$ кичик сон берилганда R да шундай ўлчовли чегараланган g функция топингки, бунда $\mu\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}<\delta$ тенгсизлик ўринли бўлсин.

8. $E=(0,2\pi)$ тўпламда аниқланган ушбу

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin x}, & \text{agar } x\neq\pi,\\ 1, & \text{agar } x=\pi\end{cases}$$

ўлчовли функция учун, ихтиёрий $\delta>0$ кичик сон берилганда $E=(0,2\pi)$ тўпламда шундай ўлчовли чегараланган g функция топингки, бунда $\mu\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}<\delta$ тенгсизлик ўринли бўлсин (7.1-теоремага қаранг).

9. Фараз қилайлик $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. Қуйидаги жумлани исботланг. Ихтиёрий кичик $\varepsilon>0$ учун шундай $P(x)$ кўпҳад топиладики, ушбу

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

Тенгсизлик барча $x\in[a,b]$ ларда ўринли бўлади.

10. $[a,b]$ сегментда аниқланган, деярли чекли қийматлар қабул қилувчи ихтиёрий ўлчовли $f(x)$ функция учун $f(x)$ га деярли яқинлашувчи кўпҳадлар кетма-кетлиги мавжудлигини исботланг.

V. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбекча изоҳи	Инглизча изоҳи
Тўпламлар системаси	Элементлари тўпламлардан иборат бўлган тўплам	A set whose elements consist of sets
Тўпламлар ҳалқаси	Тўпламлар кесишмаси ва симметрик айирмасига нисбатан ёпиқ бўлган тўпламлар системаси	A set system that is closed relative to the intersection and symmetric separation of the sets
Тўпламлар алгебраси	Бирлик элементга эга тўпламлар ҳалқаси	A set system that is closed relative to the intersection and symmetric separation of the sets
Тўпламлар ярим ҳалқаси	Шундай системаси, бу система Бўш тўпламни ўз ичига олган, тўпламлар кесишмасига нисбатан ёпиқ бўлган ва унга тегишли бўлган ихтиёрий A тўплам шу системага тегишли бўлган бир нечта ўзаро кесишмайдиган тўпламларнинг (уларда ҳеч бўлмаганда бўлиши керак) бирлмашмасидан иборатдир.	Such a system consists of a combination of several non-intersecting sets (which they must have) that belong to the same system, including an empty set, which is closed relative to the intersection of sets, and an arbitrary set A belonging to it.
G системани орқали ҳосил қилинган ҳалқа	G ни ўз ичига олган энг кичик ҳалқа, R(G) орқали белгиланади.	The smallest ring containing G is denoted by R (G).
2-ҳалқа	Берилган ҳалқа ўзига тегишли бўлган ҳар сондан саноқли сондаги элементларининг бирлашмагани ҳам ўз ичиг олади.	A given ring also contains a combination of a small number of elements from each number to which it belongs.
Борель тўпламлари	Ҳақиқий сонлар ўқидаги барча $[a,b]$ кўринишдаги тўпламлар системасини ўз ичига олувчи келтирилмайдиган минимал σ-алгебранинг элементлари.	Elements of the nonlinear minimum σ-algebra, which includes a system of sets of all forms [a, b] on the axis of real numbers.
Ўлчов	G_m ярим ҳалқада аниқланган, мусбат	G_m is a set function of m (·) with a positive value,

	қийматли, аддитив бўлган *m(·)* тўплам функцияси	additive, defined in the semicircle
G_{m_1} дан G_{m_2} гача ўлчовнинг давоми	$G_{m_1} \subset G_{m_2}$ бўлиб, G_{m_1} даги m_1 ўлчов ва G_{m_2} даги m_2 ўлчов учун $\forall A \in G_{m_1}$ лар учун $m_1(A) = m_2(A)$ бўлса, $m_1 \cdot m_2$ нинг G_{m_2} гача давомидир.	$G_{m_1} \subset G_{m_2}$ as, G_{m_1} m_1 measurement in and G_{m_2} for the measurement of m_2 in $\forall A \in G_{m_1}$ for s $m_1(A) = m_2(A)$ if $m_1 \cdot m_2$ of G_{m_2} continues until.
σ- аддитив ўлчов	G_m даги *m* ўлчов учун $A_1, A_2, \dots, A_m$ G_m $((A_i \cap A_j) = \varnothing;\ i \neq j)$ учун $m(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i);\ m(A_i)$ бўлса	G_m for the measurement of m in $A_1, A_2, \dots, A_m$ G_m $((A_i \cap A_j) = \varnothing;\ i \neq j)$ for $m(\bigcup_{i=j}^{\infty} A_i);\ m(A_i)$ if
R(E) σ алгебра	G_m ярим ҳалқа бирлик элементи *E* нинг барча мумаин бўлган қисм тўпламларидан тузилган система	G_m a system consisting of all mumain part sets of a semicircular unit element E
***B* тўпламнинг ташки ўлчови**	$B \subset \bigcup_i B_i$ бўлган $B_1 \in G_m$ лар учун $\sum_i m(B_i)$ йиғиндининг аниқ қуйи чегараси $\mu^*(B) = \inf\limits_{B \subset \bigcup_i B_i} \sum_i m(B_i)$	$B \subset \bigcup_i B_i$ which was $B_1 \in G_m$ for s $\sum_i m(B_i)$ the exact lower limit of the sum $\mu^*(B) = \inf\limits_{B \subset \bigcup_i B_i} \sum_i m(B_i)$
Ўлчовли тўплам	Ихтиёрий мусбат сон учун G_m ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқа $F=R(G_m)$ даги *B* тўплам мавжуд бўлиб $A \in R(E)$ тўплам учун $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$ бўлса *A* ўлчовли тўплам дейилади.	For an arbitrary positive number G_m a minimum ring containing a half ring $F=R(G_m)$ There is a set B in $A \in R(E)$ for the collection $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$ is called A one-dimensional set.
Лебег ўлчови	Lebesg o'lchovi - bu *n* o'lchovli Evklid fazosining ichki o'lchovlari ma'nosiga	The Lebeg measure is a measure that has the meaning of the n-

	ega o'lchov. Lebesg o'lchovi Iordan o'lchovining to'plamlarning keng sinfiga kengayishi hisoblanadi. Xususan, segmentning haqiqiy chiziqdagi Lebeg o'lchovi uning uzunligiga, tekislikdagi ko'pburchakning Lebeg o'lchovi uning yusiga teng.	dimensional volume of subsets of *n*-dimensional Euclidean space. More formally, the Lebesgue measure is an extension of the Jordan measure to a wider class of sets. In particular, the Lebesgue measure of a segment on the real line is equal to its length, and the Lebesgue measure of a polygon on the plane is equal to its area.
Lebeg bo'yicha o'lchanuvchan to'plam	To'plam Lebeg bo'yicha o'lchanuvchan deb nomlanadi, agar uning tashqi va ichki o'lchovlari teng bo'lsa	A set is called Lebesgue measurable if its outer and inner measures are equal
Ўлчовли функция	X нинг ўлчовли тўплам остилари системаси $Z(X)$ да аниқланиб. Унинг ўлчовли тўплам остилар системаси $Z(Y)$ қиймат қабул қилувчи $y=f(x)$, учун $A \in Z(Y)$, учун $f^{-1}(A) \in Z(X)$ ўринли бўлса.	The dimensional subsystem of X is defined in Z (X). For its dimensional set subsystem Z (Y), for the receiver y = f (x) $A \in Z(Y)$ for $f^{-1}(A) \in Z(X)$ if appropriate.
Содда фукнция	Берилган тўпламда чекли ёки саноқли қийматга эришувчи ўлчовли функция	A dimensional function that achieves a finite or finite value in a given set
Jordan o'lchovi	Jordan o'lchovi - bu uzunlik, maydon va *n*-o'lchovli hajm tushunchasini *n*-o'lchovli Evklid fazosida ko'chirishning bir usuli.	The Jordan measure is one way to formalize the concept of length, area, and {\ displaystyle n} n-dimensional volume in {\ displaystyle n} n-dimensional Euclidean space.
Geometrik o'lchov nazariyasi	Geometrik o'lchov nazariyasi o'lchov nazariyasidan foydalangan holda to'plamlarning geometrik xususiyatlarini o'rganish bilan shug'ullanadi (odatda Evklid fazosida).	Geometric measure theory deals with the study of geometric properties of sets (usually in Euclidean space) using measure theory.

Hausdorff o'lchovi	Hausdorff o'lchovi - bu Borel algebrada aniqlangan o'lchovlar sinfining umumiy nomi. metrik makon Feliks Xausdorff tomonidan qurilgan	Hausdorff measure is a collective name for a class of measures defined on the Borel of the metric space X Built by Felix Hausdorff
Tuzatiladigan to'plam	Tuzatiladigan to'plam - bu to'g'rilanadigan egri chiziqni yuqori o'lchamlarga umumlashtirish.	A rectifiable set is a generalization of a rectifiable curve to higher dimensions.
Tashqi o'lchov	Tashqi o'lchov - bu uzunlik, maydon va hajm tushunchalarini umumlashtirishdan biridir; fazoning barcha kichik to'plamlarida aniqlangan, bir nechta qo'shimcha shartlarni qanoatlantiradigan aniq qiymatli funktsiya.	External measure is one of the generalizations of the concepts of length, area and volume; is a real-valued function defined on all subsets of the space that satisfies several additional technical conditions.
Ichki o’lchov	Agar E to'plami chegaralangan bo'lsa, unda E to'plamining ichki o'lchovi - bu $[a, b]$segment uzunligidan E ning to’dirmasining ayirmasiga teng	If the set E is bounded, then the inner measure of the set E is the difference between the length of the segment [a, ; b] [a, b] containing E and the outer measure of the complement [a ; b]:

VI. ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 592 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 592 б.
4. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб ҳалқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.
5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.
7. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.
9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.
10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.
11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.
12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.
13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.
14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий

таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.

Ш. Махсус адабиётлар

16. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

17. Bauer, H. Measure and Integration Theory, Berlin: de Gruyter, ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

18. Bear, H.S. A Primer of Lebesgue Integration, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.

19. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464

20. Bogachev, V. I. Measure theory, Berlin: Springer, 2006.

21. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.

22. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010. 204.

23. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts//2013, ISBN-13: 978-0313319983

24. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

25. H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

26. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

27. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

28. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

29. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

30. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

31. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.

32. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

33. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.

34. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

35. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.

36. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

37. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

38. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.

39. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672 с.

40. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.

41. Гулобод Қудратуллоҳ қизи, Р.Ишмуҳамедов, М.Нормуҳаммедова. Анъанавий ва ноанъанавий таълим. – Самарқанд: “Имом Бухорий халқаро илмий-тадқиқот маркази” нашриёти, 2019. 312 б.

42. Ибраймов А.Е. Масофавий ўқитишнинг дидактик тизими. методик қўлланма/ тузувчи. А.Е. Ибраймов. – Тошкент: “Lesson press”, 2020. 112 бет.

43. Ишмуҳамедов Р.Ж., М.Мирсолиева. Ўқув жараёнида инновацион таълим технологиялари. – Т.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 б.

44. Кирянов Д. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.

45. Муслимов Н.А ва бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: “Sano-standart”, 2015. – 208 б.

46. Образование в цифровую эпоху: монография / Н. Ю. Игнатова; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

47. Олий таълим тизимини рақамли авлодга мослаштириш концепцияси. Европа Иттифоқи Эрасмус+ дастурининг кўмагида. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

48. Современные образовательные технологии: педагогика и психология: монография. Книга 16 / О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бу-гакова и др. – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

49. Усмонов Б.Ш., Ҳабибуллаев Р.А. Олий ўқув юртларида ўқув жараёнини кредит-модуль тизимида ташкил қилиш.–Т.: “ТКТИ” нашриёти, 2019.

IV. Интернет сайтлар

50. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги: www.edu.uz.
51. Бош илмий-методик марказ: www.bimm.uz
52. www. Ziyonet. Uz
53. Открытое образование. https://openedu.ru/
54. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma
55. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/
56. https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search
57. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html
58. https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics.