ҚҚДУ ҲУЗУРИДАГИ
МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

2021

Ў Қ У В – У С Л У Б И Й М А Ж М У А

МАТЕМАТИКАНИНГ СОҲАЛАРГА ТАДБИҚЛАРИ

А.Алауадинов | ф-м.ф.ф. доктори

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

“МАТЕМАТИКАНИНГ СОҲАЛАРГА ТАДБИҚЛАРИ”

МОДУЛИ БЎЙИЧА

Ў Қ У В – У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси йўналиши: Математика

Тингловчилар контингенти: Олий таълим муассасалари профессор-ўқитувчилари

Нукус – 2021

Модулнинг ўкув услубий мажмуаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил “7”-декабрдаги 648-сонли баённомаси билан маъқулланган ўқув дастури ва ўқув режасига мувофиқ ишлаб чиқилган.

Тузувчи: А.Алауадинов – ф-м.ф.ф. доктори, PhD

Тақризчилар: Ж.Сейпуллаев – ф-м.ф.н. доцент

Ўқув-услубий мажмуа Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети илмий-методик кенгаши (2020 йил “30” декабрдаги 5-сонли баённомаси).

М У Н Д А Р И Ж А

I. ИШЧИ ЎҚУВ ДАСТУРИ

Кириш

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир. “Математиканинг соҳаларга тадбиқлари” модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Математиканинг соҳаларга тадбиқлари” модулининг мақсади педагог кадрларни инновацион ёндошувлар асосида математиканинг соҳаларга тадбиқлари жараёнларини илмий-методик даражада лойиҳалаштириш, математика соҳасидаги илғор тажрибалар, замонавий билим ва малакаларни ўзлаштириш ва амалиётга жорий этишлари учун зарур бўладиган касбий билим, кўникма ва малакаларини такомиллаштириш, шунингдек уларнинг ижодий фаоллигини ривожлантиришдан иборат.

“Математиканинг соҳаларга тадбиқлари” модулининг вазифалари:

- “Математика” йўналишида педагог кадрларнинг касбий билим, кўникма, малакаларини такомиллаштириш ва ривожлантириш;
- педагогларнинг ижодий-инновацион фаоллик даражасини ошириш;
- математиканинг соҳаларга тадбиқларини ўқитиш жараёнига замонавий ахборот-коммуникация технологияларини самарали тадбиқ этилишини таъминлаш;
- математиканинг соҳаларга тадбиқларини ўқитишнинг инновацион технологиялари ва илғор хорижий тажрибаларини ўзлаштириш;
- “Математика” йўналишида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларини фан ва ишлаб чиқаришдаги инновациялар билан ўзаро интеграциясини таъминлаш

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар

“Математиканинг соҳаларга тадбиқлари” модулини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида тингловчилар:

- математик масалаларни математик тизимларда ечишни ва стандарт функциялардан фойдаланишни;
- математикани ўқитишда унинг тадбиқлари билан тушунтиришни, ҳаётий ва соҳага оид мисолларни;
- математик фанларни ўқитишнинг замонавий усулларини ***билиши*** керак.
- математик анализ ва дифференциал тенгламаларни биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, иқтисодий соҳалар ва бошқа соҳаларда кенг қўллаш;

- математик фанларни ўқитишда инновацион таълим методлари ва воситаларини амалиётда қўллаш ***кўникмаларига*** эга бўлиши лозим.

- математикани ўқитиш инновацион жараёнини лойиҳалаштириш ва ташкиллаштиришнинг замонавий усулларини қўллаш ***малакаларига*** эга бўлиши лозим.
- математикани турли соҳаларга татбиқ этиш ***компетенциясига*** эга бўлиши лозим.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Математиканинг соҳаларга тадбиқлари” модули ўқув режадаги “Ўлчов назарияси ва унинг қўлланиши” ва “Замонавий геометрия” модуллари билан чамбарчас боғлиқ ва педагог кадрларнинг умумий тайёргарлик даражасини оширишга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар математиканинг бошқа соҳалардаги кенг тадбиқларининг ўрни ва истиқболли йўналишлари бўйича мос зарурий билим, кўникма ва малакаларни ўзлаштирадилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти:

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Модул мавзулари</th><th colspan="5">Тингловчининг ўқув юкламаси, соат</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Ҳаммаси</th><th colspan="3">Аудитория ўқув юкламаси</th><th rowspan="3">Кўчма машғулот</th></tr>
<tr><th rowspan="2">жами</th><th colspan="2">жумладан</th></tr>
<tr><th>Назарий</th><th>Амалий машғулот</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Матрицалар ва уларнинг тадбиқлари. Векторлар ва уларнинг тадбиқлари.</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Функциялар ва уларнинг тадбиқлари. Ҳосила ва унинг тадбиқлари</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Интеграл ва унинг тадбиқлари. Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Дифференциал тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Математика ва саънат. Математика ва муҳандислик</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Жами:</td><td>20</td><td>20</td><td>8</td><td>12</td><td></td></tr>
</table>

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Матрицалар ва уларнинг тадбиқлари. Векторлар ва уларнинг тадбиқлари

1. Тенгламалар ва уларнинг табиийй фанлардаги тадбиқлари
2. Матрицалар ва уларнинг иқтисодиётдаги тадбиқлари
3. Векторлар ва уларнинг тадбиқлари

2-Мавзу: Функциялар ва уларнинг тадбиқлари. Ҳосила ва унинг тадбиқлари

1. Функциялар ва уларнинг табиийй фанлардаги тадбиқлари
2. Ҳосила ва унинг иқтисодиётдаги тадбиқлари

3-Мавзу: Интеграл ва унинг тадбиқлари.Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари

1. Интеграл ва унинг фанлардаги тадбиқлари
2. Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари

4-Мавзу: Дифференциал тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Математика ва саънат. Математика ва муҳандислик

1. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг табиийй фанлардаги тадбиқлари
2. Математика ва саънат
3. Математика ва муҳандислик

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Андреа Просперетти, Адвансед Матҳематисс фор Апплисатионс, Самбридге Университй Пресс, 2011.
2. Эван М. Глазер, Жоҳн W. МсСоннелл Реал-Лифе Матҳ: Эверйдай Усе оф Матҳематисал Сонсептс, 2013.
3. И. М. Рикҳсибоев анд Н. С. Моҳамед, Энгинееринг Матҳематисс 2, Малайсиа, 2019.
4. Жим Либбй, Матҳ фор Реал Лифе: Теачинг Прастисал Усес фор Алгебра, Геометрй анд Тригонометрй// 2019, 234п.
5. Маргарет Л. Лиал, Тҳомас W. Ҳунгерфорд, Жоҳн П. Ҳолсомб, Бернадетте Муллинс, Матҳематисс wитҳ Апплисатионс Ин тҳе Манагемент, Натурал анд Сосиал Ссиенсес (11тҳ Эдитион), Пеарсонб 2018.
6. Муслимов Н.А ва бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: “Сано-стандарт”, 2015. – 208 б.
7. Аюпов Ш. А., Ибрагимов М.М., Кудайбергенов К.К. Функсионал анализдан мисол ва масалалар. – Нукус, Билим, 2009. 302 б.
8. Нуржанов О.Д. Áпиwайı дифференсиаллıқ теńлемелер. – Нóкис, Қарақалпақстан, 2019. 400 б.

Интернет сайтлари

1. www.эду.уз
2. www.бимм.уз
3. www.зиёнет.уз
4. ҳттпс://опенеду.ру/
5. ҳттпс://www.онлинестудиес.com/Соурсес/Матҳематисс/Эуропе/

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

Машғулотлар жараёнида “Ақлий хужум” ва “Хотирани чархлаймиз” усуллари қўлланилади.

Ақлий хужум	- (брейнсторминг – мия бўрони), амалий ва илмий муаммоларни ечишда жамоа билан маълумот йиғиш
Усулни асосий ғояси	- ғоялар тўплаш, уларни баҳолаш ва таҳлил қилиш, ажратиш. “Ақлий ҳужум”ни олиб борувчининг ҳатти-ҳаракати учун бу ғоя асосий кўрсатгич бўлиб, иштирокчиларни имконият қадар кўп ғоялар таклиф қилишга ундайди. Хотирани чархлаймиз усули бўйича саволлар экранда намойиш қилинади. (1**-мавзу, 1а- илова); (1-мавзу, 1б- илова);**
Қоидалари	- имкони борича кўпроқ ғояларни таклиф этиш (жамлаш), уларни талқин қилиш, муаммоларни ечиш ва уларни қайд этиш.
Таълим берувчи	- иштирокчиларни қўллаб-қўвватлайди (имо-ишора, жилмайиш, ҳа-йўқ сўзлари билан); - сўровга киришиб кетишига ёрдам бериш ва психологик тўсқинликни йўқотиш учун, олдинги ёки шу дарсдан кутилмаган, оригинал саволлар бериб машқ ўтказади (блиц сўров). Қатнашчиларни жавобларини таҳлил қилади умумий хулоса беради. - ҳар бир жавоб текширилади (**1-мавзу, 2- илова)** - хулосалар чиқарилади(**1-мавзу, 3- илова)**
Фидбэйк	- ҳар бир ғояни муҳокама қилиш; (**2-мавзу, 2-илова)** - энг тўғри ғояларни қўллаб-кувватлаш **(2 мавзу, 3-илова)**

1-мавзу учун (1а- илова)

<u>Таъриф:</u> Номаълум қатнашган тенгликка тенглама дейилади. Номаълумнинг бу тенгламани сонли айниятга айлантирувчи қиймати тенгламанинг илдизи, барча илдизлар тўплами эса тенгламанинг эчими бўлади.

<u>1.Мисол.</u> (x+1)*(x–2)*(x+3) = 0 тенгламанинг илдизлари $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ қийматлардан, эчими эса x = { –3; –1; 2} тўпламдан иборат.

<u>2. Мисол.</u> $x^2 + 4 = 0$ ёки $x^2 = -4$. Тенгликнинг чап қисми **x** нинг ҳар қандай қийматида мусбат, $x^2 \geq 0$, ўнг қисми эса манфийдир. Демак, берилган тенглик бажарилмайди, эчим мавжуд эмас: **x** = **∅.** <u>а</u>**<u>) Таъриф.</u>** Биринчи даражали бир номаълумли тенглама деб, *а*x + б = 0 (1) кўринишидаги тенгламаларга айтилади. Бунда **x** – номаълум сон, ***а*** ва **б** – озод ҳад.

<u>Таъриф.</u> $ax^2 + бx + c = 0$ (2) бунда $a \neq 0$ кўринишдаги тенглама квадрат тенглама дейилади.

Теорема: (Виет теоремаси) келтирилган квадрат тенгламада илдизларининг йиғиндиси қарама-қарши ишора билан олинган биринчи даражали номаълум олдидаги иккинчи коеффитсиент (–p) га, илдизларининг кўпайтмаси эса озодҳад **қ** га тенгдир

<u>Таъриф:</u> А(x) > Б(x) , А(x) < Б(x) , А(x) ≥ Б(x) , А(x) ≤ Б(x) муносабатларга **x** номаълумли тенгсизликлар дейилади.

1-мавзу учун (1б- илова)

1-мавзу бўйича саволлар:

1. Noma`lum qatnashgan tenglikka nima deyiladi.
2. $ax^2 + bx + c = 0$ (2) bunda $a \neq 0$ ko`rinishdagi tenglama kvadrat tenglama deyiladi.
3. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadvali $m \times n$ ***<u>nima</u>*** deyiladi.
4. $\det A \neq 0$ bo'lsa, **<u>qanday matritsa</u>** deyiladi.
5. $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ elementlar joylashgan diagonali ***<u>qanday diagonal</u>*** deyiladi.
6. Bosh diagonaldagi elementlar 0dan farqli boshqa barcha elemaentlari 0 ga teng kvadrat matritsa ***<u>qanday matritsa</u>*** deyiladi.
7. Diagonaldagi barcha elementlari 1 ga teng diagonal matritsa ***<u>qanday matritsa</u>*** deyiladi.
8. Matritsalarni ustida qanday amallar bajarish mumkin

2-мавзу учун (1а- илова)

Функция таърифи, берилиш усуллари.

Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор f қоидага кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда **функция берилган**

Кўпинча x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш формулалар ёрдамида

Баъзи ҳолларда $x \in X$, $y \in Y$ ўзгарувчилар орасидаги боғланиш жадвал орқали бўлиши мумкин. Масалан, кун давомида ҳаво ҳароратини кузатганимизда, t_1 вақтда ҳаво ҳарорати T_1, t_2 вақтда ҳаво ҳарорати T_2 ва ҳ.к. бўлсин. Натижада қуйидаги жадвал ҳосил бўлади.

Қуйидаги саволларга аниқ ва асосли жавоб берин

1. Агар шундай ўзгармас M сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун $f(x) \le M$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда нима** дейилади.
2. Агар шундай ўзгармас m сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун $f(x) \ge m$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда нима** дейилади.
3. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда нима** дейилади.
4. Агар шундай ўзгармас T $(T \ne 0)$ сон мавжуд бўлсаки, $\forall x \in X$ учун

   1) $x - T \in X$, $x + T \in X$

   2) $f(x+T) = f(x)$

   бўлса, $f(x)$ **нима** дейилади

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-Мавзу: Тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Матрицалар ва уларнинг тадбиқлари. Векторлар ва уларнинг тадбиқлари

1. Тенгламалар ва уларнинг табиййй фанлардаги тадбиқлари
2. Матрицалар ва уларнинг иқтисодиётдаги тадбиқлари
3. Векторлар ва уларнинг тадбиқлари

Таъриф: Номаълум қатнашган тенгликка тенглама дейилади. Номаълумнинг бу тенгламани сонли айниятга айлантирувчи қиймати тенгламанинг илдизи, барча илдизлар тўплами эса тенгламанинг эчими бўлади.

1.Мисол. $(x+1)*(x-2)*(x+3) = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ қийматлардан, эчими эса $x = \{ -3; -1; 2\}$ тўпламдан иборат.

2. Мисол. $x^2 + 4 = 0$ ёки $x^2 = -4$. Тенгликнинг чап қисми **x** нинг ҳар қандай қийматида мусбат, $x^2 \geq 0$, ўнг қисми эса манфийдир. Демак, берилган тенглик бажарилмайди, эчим мавжуд эмас: $\mathbf{x} = \varnothing$. а) **Таъриф.** Биринчи даражали бир номаълумли тенглама деб, ax + б = 0 (1) кўринишидаги тенгламаларга айтилади. Бунда **x** – номаълум сон, ***a*** ва **б** – озод ҳад.

Биринчи даражали бир номаълумли тенглама (1) кўринишда бўлмаса, уни қуйидаги тартибда эчилади.

1) тенглама каср кўринишида бўлса, уни касрҳадлардан куткариш.

2) қавслар бўлса, уларни очиш.

3) номаълум ҳадларни тенгламанинг бир қисмига, маълумларини бир қисмига утказиш.

4) ўхшаш ҳадларни ихчамлаш.

5) тенгламанинг иккала қисмини номаълумнинг коеффитсиентига бўлиш керак.

б) Таъриф. ax^2 + бх + с = 0 (2) бунда $a \neq 0$ кўринишдаги тенглама квадрат тенглама дейилади.

Квадрат тенгламаларни урганишда **х** номаълумнинг хакикий қийматлари тўпламини комплекс сонларнинг <u>бутун тўплами</u> деб хисоблашга шартлашиб оламиз.

а, **б** ва **с** коеффитсиентларни ҳақиқий сонлар деб хисоблашимиз.

(2) Тенглама эчими қуйидагича аниқланади.

х$_{1,2}$ = $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, Д = б^2 – 4*а*с – дискриминант

Д > 0 , х$_{1,2}$ = $\frac{-b \pm \sqrt{Д}}{2a}$ – хақиқий сонлар

Д = 0 , х$_1$ = х$_2$ = – $\frac{b}{2a}$ – хақиқий сонлар

Д < 0 да $\sqrt{Д}$ мавхум сон х$_{1,2}$ = $\frac{-b \pm \sqrt{|Д|}}{2a}$ – қўшма комплекс сонлардир. Агар (2) да с=0 бўлса,

*а*х^2 + бх = 0 (3) х(*а*х + б) = 0 х$_1$ = 0 х$_2$ = – б/*а*

Агар б = 0 бўлса

*а*х^2 + с = 0 (4) х$_{1,2}$ = ± √ – с/*а*

Агар б = 0, с=0 бўлса

*а*х^2 = 0 (5) х$_{1,2}$ = 0

3; 4; 5 тенгламалар чала квадрат тенгламалар дейилади.

х^2 + рх+қ=0 (6) – келтирилган квадрат тенглама дейилади.

Теорема: (Виет теоремаси) келтирилган квадрат тенгламада илдизларининг йиғиндиси қарама-қарши ишора билан олинган биринчи даражали номаълум олдидаги иккинчи коеффитсиент (–р) га, илдизларининг кўпайтмаси эса озодҳад **қ** га тенгдир.

в) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = 0 (7) – кўринишидаги тенглама каср ратсионал тенглама дейилади, бу эрда

П(х) ва Қ(х) лар кўпҳадлар.

Ратсионал тенгламани эчиш учун:

1. Барча касрларнинг умумий махражи топилади.
2. Берилган тенгламанинг иккала томонини умумий махражга кўпайтириб, уни бутун тенгламага келтирилади.
3. Хосил қилинган бутун тенглама эчилади.
4. Унинг илдизлари ичидан умумий махражни нолга айлантирадиганларини чикариб юборилади.

<u>Таъриф:</u> А(х) > Б(х) , А(х) < Б(х) , А(х) ≥ Б(х) , А(х) ≤ Б(х) муносабатларга **х** номаълумли тенгсизликлар дейилади.

Тенгсизликнинг эчими деб, номаълумнинг шу тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматлар тўпламига айтилади.

Агар тенгсизликда **>** ёки **<** ишора бўлса, уни катъий тенгсизлик (масалан $2x + 1 > 5$, $x + 2 < 3$)

≥ ёки ≤ ишора бўлса, уни катъиймас тенгсизлик (Масалан, $a^2 – 1 \ge 0$, $5x^2 + 3 \le 0$) дейилади.

а) aх + б > 0 ёки (aх + б < 0) $a \neq 0$, ∀б энг содда тенгсизлик эчими х > $\frac{b}{a}$ ёки х < $\frac{b}{a}$ дан иборат, ундаги $\frac{b}{a}$ сони aх + б = 0 тенгламанинг илдизи a > 0 бўлганда aх + б < 0 тенгсизликнинг эчими $(-\infty; -\frac{b}{a})$, а < 0 да $(-\frac{b}{a}; \infty)$ тўпламдан иборат.

Матрицалар ва уларнинг тадбиқлари.

1 Матритсалар ҳақида умумий тушунчалар. Системани моделлаштиришда матритсалар алгебраси деган тушунча муҳим аҳамиятга эга. Режалаштириш муаммолари, ялпи маҳсулот, жами меҳнат сарфи, нархни аниқлаш ва бошқа масалалар ҳамда уларда компъютерларни қўллаш матритсалар алгебрасини қарашга олиб келади. Ишлаб чиқаришни ривожлантириш, моддий ишлаб чиқариш орасидаги мавжуд боғланишларни ифодалашда ва бошқаларда, маълум даражада тартиблангаг ахборотлар системасига асосланган бўлиши лозим. Бу тартибланган ахборотлар системаси муайян жадваллар кўринишида ифодаланган бўлади. Мисол ўрнида моддий ишлаб чиқариш тармоқлари орасидаги ўзаро боғлиқлик ахборотлари системасини қарайлик. Ишлаб чиқариш 5 та (масалан, машинасозлик, электроенергия, метал, кўмир, резина ишлаб чиқариш саноатлари) тармоқдан иборат бўлсин. Бунда улар орасидаги ўзаро боғлиқлик 1-жадвал билан ифодалансин.

1-жадвал.

Тармоқлар	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Бу жадвалда $a_{ij}\ (i, j = 1,2,3,4,5)$ лар билан, i-тармоқнинг j-тармоққа тетказиб берадиган маҳсулоти миқдори белгиланган, чунончи, a_{21}, a_{22}, ..., a_{25} лар 2-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга; a_{31}, a_{32}, ..., a_{35} лар эса 3-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга етказиб берадиган маҳсулотлари миқдорини билдиради. a_{22}, a_{33} лар мос равишда 2,3- тармоқларнинг ўз эҳтиёжларига сарфини ифодалайди.

Юқоридагилар ўхшаш ишлаб чиқариш мезони (нормаси) ахборотлари системасига сонли мисол қилайлик. Корхона 3 турдаги хом ашё ишлатиб 4 хилдаги маҳсулот ишлаб чиқарадиган бўлсин, бунда хом ашё сарфи нормаси системаси 2-жадвал билан берилган бўлсин.

2-жадвал.

Хом ашёлар	Маҳсулотлар			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-жадвалда масалан, 1-турдаги хом ашё сарфи нормаси мос равишда 1,2,3,4-хилдаги маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун 2,3,2,0 бўлади.

1 ва 2 жадваллар, математикада ўрганиладиган матритсалар тушунчасининг мисоллари бўла олади. Матритсалар иқтисодий изланишларда кенг қўлланилмоқда, хусусан, улардан фойдаланиш ишлаб чиқаришни режалаштиришни осонлаштириб, меҳнат сарфини камайтиради, ҳамда режанинг ҳар хил вариантларини тузишни ихчамлаштиради. Бундан ташқари ҳар хил иқтисодий кўрсаткичлар орасидаги боғлиқликни текширишни осонлаштиради. Бу ҳолатлар матритсаларни умумий ҳолда қарашга олиб келади.

1-таъриф. m та сатрли ва n та устунли тўғри бурчакли $m \cdot n$ та элементдан тузилган жадвал

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ -------- & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\underline{m \times n}$ ***<u>ўлчамли матритса</u>*** дейилади. A матритсани қисқача (a_{ij}) $(i = 1,...m,\ j = 1,...n)$ билан ҳам белгилаш мумкин. Матритсаларда сатрлар сони устунлар сонига тенг бўлса, бундай матритсалар **квадрат матритсалар** дейилади.

Ҳар бир n тартибли квадрат матритса учун унинг элементларидан тузилган детерминантни ҳисоблаш мумкин, бу детерминантга A матритсанинг детерминанти дейилади ва $\det A$ ёки $|A|$ билан белгиланади.

$\det A = 0$ бўлса, A матритсага **махсус матритса,** $\det A \neq 0$ бўлса, **махсусмас матритса** дейилади. Квадрат матритсанинг $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ элементлар жойлашган диагонали **бош диагонал,** $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ элементлар жойлашган диагонали ***ёрдамчи диагонал*** дейилади. Бош диагоналдаги элементлар 0дан фарқли бошқа барча элемаентлари 0 га тенг квадрат матритса ***диагонал матритса*** дейилади. Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матритса диагонал матритсадир. Диагоналдаги барча элементлари 1 га тенг диагонал матритса ***бирлик матритса*** дейилади ва

$$E = \begin{pmatrix} 1\,0 \ldots 0 \\ 0\,1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

билан белгиланади..

Фақат битта сатрдан иборат $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$ матритсага сатр матритса дейилади. Фақат битта устундан иборат

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

матритсага устун матритса дейилади.

Барчаелементлари 0 лардан иборат бўлган матритсага нол матритса дейилади ва O билан белгиланади.

А матритсага қуйидаги матритсани мос қўйиш мумкин:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\cdots a_{m2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матритсанинг ҳар сатри A матритсанинг унга мос устунидан иборат. A^T матритсани A матритсага нисбатан транспонирланган дейилади.

$A=(a_{ij})$ ва $B=(b_{ij})$ $(i=\overline{1m},\ j=\overline{1n})$ матритсаларнинг мос элементлари $a_{ij}=b_{ij}$ тенг бўлса, бундай матритсалар тенг матритсалар дейилади.

2. Матритсалар устида амаллар. Матритсаларни қўшиш, сонга кўпайтириш ва бир-бирига кўпайтириш мумкин.

Бир хил ўлчамли $A=(a_{ij})$ ва $B=(b_{ij})\,(i=\overline{1m},\ j=\overline{1n})$ матритсаларнинг йиғиндиси деб, элементлари $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ равишда аниқланадиган учинчи $C=(c_{ij})$ матрисага айтилади. Равшанки, C матритсанинг ўлчами олдинги матритсаларнинг ўлчами билан бир хил бўлади.

Матритсаларни қошишда бирор матрисага O матрисани қўшиш одатдаги сонларни қўшишдаги нол сони ролини ўйнайди, яъни

$$A+O=A.$$

масалан,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A матрисани λ сонга кўпайтириш деб унинг ҳамма элементларини шу сонга кўпайтиришга айтилади, яъни

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

$m \cdot k$ ўлчамли $A = (a_{ij})$ матрисанинг $k \cdot n$ ўлчамли $B = (b_{ij})$ матрисага, кўпайтмаси деб $m \cdot n$ ўлчамли шундай $C = (c_{ij})$ матрисага айтиладики унинг c_{ij} элементи A матрисага i-сатри элементларини B матриса j-устунинг мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Матрисалар кўпайтмаси $C = AB$ билан белгиланади. Демак, матрисаларни кўпайтириш учун биринчи кўпайтувчининг устунлари сони, иккинчи кўпайтувчининг устунлари сонига тенг бўлиши талаб қилинади. Шу сабабли, умуман $AB \neq BA$.

Матрисаларни ко;пайтириш ушбу

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

Гуруҳлаш ҳамда

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

Тақсимот хоссасига эга.Хосса ўринли бўлади.

Исталган квадрат матриса A ни мос бирлик E матрисага кўпайтирганда

$$AE = EA = A$$

тенглик ўринли бўлади, масалан

Худди шунга ўхшаш $EA = A$ тенгликни ҳам текшириб кўриш мумкин (буни бажаришни ўқувчига ҳавола қиламиз)

3.Матрисанинг ранги ва уни ҳисоблаш. A $m \times n$ ўлчовли матрисада k сатр ва k та устунини ажратамиз, бунда, k, m ва n сонлардан кичик ёки уларнинг кичигига тенг бўлиши мумкин. Ажратилган сатрлар ва устунларнинг кесишувида ҳосил бўлган k-тартибли детерминантга A ***матрисанинг*** k ***-тартибли минори дейилади*.**

Таръриф. A матрисанинг 0 дан фарқли минорласрининг энг юқори тартибига A **матрисанинг минори** дейилади. A матрисанинг ранги $rangA$ ёки $r(A)$ билан белгиланади.

Матриса рангини бевосита ҳисоблашда кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғи келади. Қуйидаги амаллардан фойдаланиб матриса рангини ҳисоблаш қулайроқ. Матрисада: 1)фақат 0 лардан иборат сатри (устуни)ни ўчиришданлардан; 2) иккита сатр (устун)нинг ўринларини алмаштиришдан; 3) бирор сатр (устун)нинг элементларини бирор $\lambda \neq 0$ сонга кўпайтириб, бошқа сатр (устун) мос элементларига қўшиш; 4) матрисани транспонирлашдан, унинг ранги ўзгармайди. Бу амалларга одатда элементар алмаштиришлар дейилади.

4. Тескари матриса ва уни топпиш. A квадрат матриса учун $AB = BA = E$ бирлик матриса бўлса, B квадрат матриса A матрисага ***тескари матриса*** дейилади. Одатда, A матрисага тескари матриса A^{-1} билан белгиланади.

Теорема: A квадрат матриса тескари матрисага эга бўлиши учун A матрисанинг детерминанти 0 дан фарқли бўлиши зарур ва этарлидир. дан фарқли бўлиши зарур ва етарлидир.

A квадрат матриса усчун $\det A \neq 0$ бўлса , унга тескари бўлган ягона матриса A^{-1} мавжуд.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - & - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрисага тескари A^{-1} матриса

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ ---- & ---- \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Формула билан топилади. Бунда A_{ij} мос равишда a_{ij} элементларнинг алгебраис тўлдирувчилари ва $\Delta = \det A$.

Чизиқли тенгламалар системасини матрисалар ёрдамида ечиш. Энди матрисалар ёрдамида чизиқли тенгламалар системасини ечишга ўтамиз.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \tag{7}$$

n номаълумли, n та тенгламалр системаси берилган бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ---- & ---- \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

белгилашларни киритамиз. Энди (7) системани матрисаларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб,

$$AX = B \tag{8}$$

кўринишда ёзиш мумкин. $\det A \neq 0$ бўлса, тескари матриса A^{-1} мавжуд ва $A^{-1}AX = A^{-1}B$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, номаълум X матриса $A^{-1}B$ матрисага тенг бўлади, яъни

$$X = A^{-1}B.$$

Бу (7) тенгламалр системасини ечишнинг **матрисавий ёзувини** билдиради.

2-Мавзу: Функциялар ва уларнинг тадбиқлари. Ҳосила ва унинг тадбиқлари

1. Функциялар ва уларнинг табиий фанлардаги тадбиқлари
2. Ҳосила ва унинг тадбиқлари

1^0. Функция таърифи, берилиш усуллари. Биз 2-маърузада E тўпламни F тўпламга акслантириш

$$f:\ E \to F$$

ни ўрганган эдик.

Энди $E = F$, $F = R$ деб оламиз. Унда ҳар бир ҳақиқий x сонга бирор ҳақиқий й сонни мос кўювчи

$$f:\ F \to R \quad (x \xrightarrow{f} y)$$

акслантиришга келамиз. Бу эса функция тушунчасига олиб келади.

Функция тушунчаси ўқувчига ўрта мактаб математика курсидан маълум. Шуни эътиборга олиб функция ҳақидаги дастлабки маълумотларни қисқароқ баён этишни лозим топдик.

Айтайлик, $X \subset R, Y \subset R$ тўпламлар берилган бўлиб, x ва y ўзгарувчилар мос равишда шу тўпламларда ўзгарсин: $x \in X$, $y \in Y$.

1-таъриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор f қоидага кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда **функция берилган** (**аниқланган**) дейилади ва

$$f: x \to y \ \text{ ёки } \ y = f(x)$$

каби белгиланади. Бунда X - **функциянинг аниқланиш тўплами** (**соҳаси**), Y - **функциянинг ўзгариш тўплами (соҳаси) дейилади.** x- **эркли ўзгарувчи** ёки **функция аргументи**, й эса **эрксиз ўзгарувчи** ёки **функция** дейилади.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин. $x_0 \in X$ нуқтага мос келувчи y_0 миқдор $y = f(x)$ **функциянинг** $x = x_0$ **нуқтадаги хусусий қиймати** дейилади ва $f(x_0) = y_0$ каби белгиланади.

Айтайлик, $f_1(x)$ функция $X_1 \subset R$ тўпламда, $f_2(x)$ функция эса $X_2 \subset R$ тўпламда аниқланган бўлсин.

Агар

1) $X_1 = X_2$

2) $\forall x \in X_1$ да $f_1(x) = f_2(x)$

бўлса, $f_1(x)$ ҳамда $f_2(x)$ функциялар ўзаро тенг дейилади ва $f_1(x) = f_2(x)$ каби белгиланади.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун $f(x) \leq M$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда юқоридан чегараланган** дейилади. Агар шундай ўзгармас m сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун $f(x) \geq m$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда қуйидан чегаралан-ган** дейилади.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда чегараланган** дейилади.

4-таъриф. Агар ҳар қандай $M > 0$ сон олинганда ҳам шундай $x_0 \in X$ нуқта топилсаки,

$$f(x_0) > M$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда юқоридан чегараланмаган** дейилади.

5-таъриф. Агар шундай ўзгармас $T\ (T \neq 0)$ сон мавжуд бўлсаки, $\forall x \in X$ учун

1) $x - T \in X$, $x + T \in X$

2) $f(x+T) = f(x)$

бўлса, $f(x)$ **даврий функция** дейилади, T сон эса $f(x)$ **функциянинг даври** дейилади.

6-таъриф. Агар $\forall\ x \in X$ учун $f(-x) = f(x)$ тенглик бажарил-са, $f(x)$ **жуфт функция** дейилади. Агар $\forall\ x \in X$ учун $f(-x) = -f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ **тоқ функция** дейилади.

Элементар функциялар китобхонга ўрта мактаб математика курсидан маълум. Биз қуйида элементар функциялар ҳақидаги асосий маълумотларни баён этамиз.

1^0. Бутун рационал функциялар.

Ушбу

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

кўринишдаги функция бутун рационал функция дейилади. Бунда $a_0, a_1, \ldots, a_n -$ ўзгармас сонлар, $n \in N$. Бу функция $R = (-\infty,\ +\infty)$ да аниқланган.

Бутун рационал функциянинг баъзи хусусий ҳоллари:

а) Чизиқли функция. Бу функция

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0)$$

кўринишга эга, бунда a, b ўзгармас сонлар.

Чизиқли функция $(-\infty,\ +\infty)$ да аниқланган $a > 0$ бўлганда ўсувчи, $a < 0$ бўлганда камаювчи: графиги текисликдаги тўғри чизиқдан иборат.

б) Квадрат функция. Бу функция

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

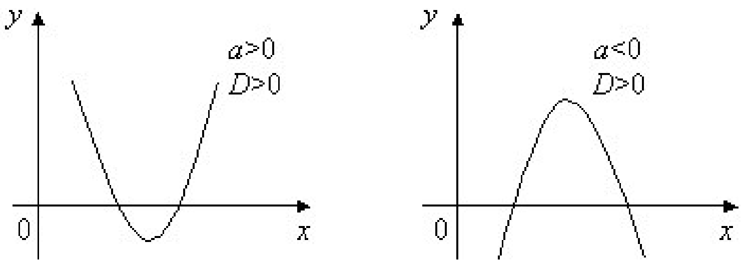
кўринишга эга, бунда a, b, c – ўзгармас сонлар.

Квадрат функция R да аниқланган бўлиб, унинг графиги параболани ифодалайди.

Равшанки,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Параболанинг текисликда жойлашиши a ҳамда $D = b^2 - 4ac$ ларнинг ишорасига боғлиқ бўлади. Масалан, $a > 0$, $D > 0$ ва $a < 0$, $D < 0$ бўлганда унинг графиги 3-чизмада тасвирланган параболалар кўринишида бўлади.



3-чизма.

2^0. Каср рационал функциялар. Ушбу

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m}$$

кўринишдаги функция каср рационал функция дейилади. Бунда $a_0, a_1, ..., a_n$ ва $b_0, b_1, ..., b_m$ лар ўзгармас сонлар $n \in N$, $m \in N$. Бу функция

$$X = (-\infty, +\infty) \setminus \{x | b_0 + b_1x + ... + b_mx^m = 0\}$$

тўпламда аниқланган.

Каср рационал функциянинг баъзи хусусий ҳоллари:

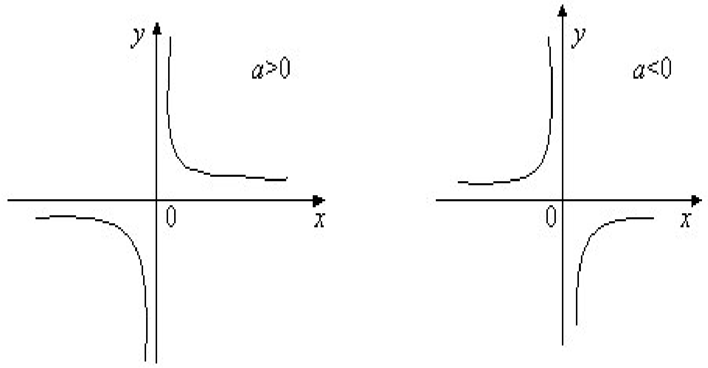
а) Тескари пропорционал боғланиш. У

$$y = \frac{a}{x} \qquad (x \neq 0 \quad a = const)$$

кўринишга эга. Бу функция

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = R \setminus \{0\}$$

тўпламда аниқланган, тоқ функция, a нинг ишорасига қараб функция $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ оралиқларнинг ҳар бирида камаюв-чи ёки ўсувчи бўлади (4-чизма).



4-чизма

б) Каср чизиқли функция. У ушбу

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

кўринишга эга. Бу функция

$$X = R \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \qquad (c \neq 0)$$

тўпламда аниқланган:

Равшанки,

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Демак,

$$y = \frac{\alpha}{x + \beta} + \gamma, \quad \left(\alpha = \frac{bc - ad}{c^2}, \ \ \beta = \frac{d}{c}, \ \ \gamma = \frac{a}{c} \right).$$

Унинг графигини $y=\frac{a}{x}$ функция графиги ёрдамида чизиш мумкин.

3^0. Даражали функция. Ушбу

$$y=x^a, \quad (x\geq 0)$$

кўринишдаги функция даражали функция дейилади.

Бу функциянинг аниқланиш тўплами a га боғлиқ. Даражали функция $a>0$, бўлганда $(0, +\infty)$ да ўсувчи, $a<0$ бўлганда камаювчи бўлади. $y=x^a$ функция графиги текислик-нинг $(0,0)$ ва $(1,1)$ нуқталаридан ўтади.

4^0. Кўрсаткичли функция. Ушбу

$$y=a^x$$

кўринишдаги функция кўрсаткичли функция дейилади. Бунда $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$. Кўрсаткичли функция $(-\infty, +\infty)$ аниқ-ланган, $\forall x\in R$ да $a^x>0$; $a>1$ бўлганда ўсувчи; $0<a<1$ бўлганда камаювчи бўлади.

Хусусан, $a=e$ бўлса, математикада муҳим рол ўйнайди-ган $y=e^x$ функция ҳосил бўлади.

Кўрсаткичли функциянинг графиги Ox ўқидан юқорида жойлашган ва текисликнинг $(0,1)$ нуқтасидан ўтади.

5^0. Логарифмик функция. Ушбу

$$y=\log_a x$$

кўринишдаги функция логарифмик функция дейилади. Бунда $a>0$, $a\neq 1$.

Логарифмик функция $(0, +\infty)$ да аниқланган, $y=a^x$ функ-цияга нисбатан тескари; $a>1$ бўлганда ўсувчи, $0<a<1$ бўлганда камаювчи бўлади.

Логарифмик функциянинг графиги Oy ўқининг ўнг томонида жойлашган ва текисликнинг $(0,1)$ нуқтасидан ўтади.

6^0. Тригонометрик функциялар. Ушбу

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = tgx, \quad y = ctgx,$$
$$y = \sec x, \quad y = \cos ecx$$

функциялар тригонометрик функциялар дейилади.

$y = \sin x$, $y = \cos x$ функциялар $R = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган, 2π даврли функциялар $\forall x \in R$ да

$$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1$$

бўлади. Ушбу

$$y = tgx,$$

функция

$$X = R \setminus \left\{ x \in R \mid x = (2k+1)\frac{\pi}{2}; \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \right\}$$

тўпламда аниқланган π даврли функция, $\mathrm{ctg}x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}x$ функциялар $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$ лар орқали қуйидагича ифодала-нади:

$$ctgx = \frac{1}{tgx}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cos ecx = \frac{1}{\sin x}.$$

7^0. Гиперболик функциялар. Кўрсаткичли $y = e^x$ функ-ция ёрдамида тузилган ушбу

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

функциялар **гиперболик** (мос равишда **гиперболик синус, гиперболик косинус, гиперболик тангенс, гиперболик катангенс**) функциялар дейилади ва улар қуйидагича

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \; chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \; cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

белгиланади.

8^0. Тескари тригонометрик функциялар. Маълумки, $y = \sin x$ функция R да аниқланган ва унинг қийматлари тўплами

$$Y_f = [-1, \; 1]$$

бўлади.

Агар $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ бўлса, у ҳолда $X = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ ва $Y_f = [-1,\ 1]$ тўпламларнинг элементлари ўзаро бир қийматли мосликда бўлади.

$y = \sin x$ функцияга нисбатан тескари функция

$$y = arc\sin x$$

каби белгиланади.

Шунга ўхшаш $y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$ функцияларга нис-батан тескари функциялар мос равишда

$$y = \arccos x,\ \ y = arctgx,\ \ y = arcctgx,$$

каби белгиланади.

Ушбу $y = arc\sin x$, $y = arc\cos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$ функция-лар тескари тригонометрик функциялар дейилади.

Ҳосила

1^0. Функция ҳосиласининг таърифи. Мисоллар. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,b) \subset R$ да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ бўлсин.

Маълумки ушбу

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

айирма $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади.

1-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги ҳосиласи** дейилади ва $\frac{df(x_0)}{dx}$, ёки $f'(x_0)$, ёки $(f(x))'_{x_0}$ каби белгиланади. Демак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Агар $x_0+\Delta x=x$ дейилса, унда $\Delta x=x-x_0$ ва $\Delta x\to 0$ да $x\to x_0$ бўлиб, (1) муносабат қуйидаги

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

кўринишга келади.

2^0. Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0-\delta,\ \ x_0)\subset X\ \ (\delta>0)$ бўлсин.

2-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги чап ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0-0)$ каби белгиланади:

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Айтайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0,\ \ x_0+\delta)\subset X\ \ (\delta>0)$ бўлсин.

3-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги ўнг ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0+0)$ каби белгиланади:

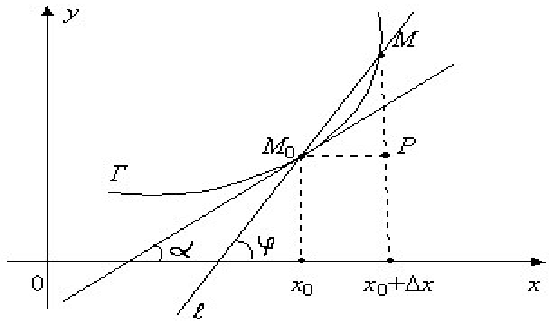
$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Юқорида келтирилган таърифлардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада ўнг $f'(x_0+0)$ ҳамда чап $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга ва $f'\,x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ тенгликлар ўринли бўлади.

2. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнг $f'(x_0+0)$ ҳамда чап $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга ва $f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ тенгликлар ўринли бўлади.

3^0. Ҳосиланинг геометрик ҳамда механик маънолари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f(x)$ функция-нинг графиги 5-чизмада тасвирланган Γ эгри чизиқни ифодаласин:



5-чизма.

Бу Γ чизикда $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$ нуқталарни олиб, улар орқали ўтувчи l кесувчини қараймиз.

$M_0(x_0,f(x_0))\in\Gamma$, $M(x,f(x))\in\Gamma$, $M\to M_0$ да l кесувчи лимит ҳолати Γ чизиққа M_0 нуқтада **ўтказилган уринма** дейилади.

Равшанки, φ бурчак Δx га боғлиқ: $\varphi=\varphi(\Delta x)$. $f(x)$ функциянинг графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\alpha$$

нинг мавжуд бўлиши лозим. Бунда α –уринманинг OX ўқи-нинг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчак.

M_0MP учбурчакдан:

$$tg\varphi(\Delta x)=\frac{MP}{M_0P}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиб, ундан

$$\varphi(\Delta x) = arctg\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиши келиб чиқади. Функция узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0} arctg\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= arctg\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right] = arctgf'(x_0).$$

Демак, $\Delta x \to 0$ да $\varphi(\Delta x)$ нинг лимити мавжуд ва

$$\alpha = arctgf'(x_0).$$

Кейинги тенгликдан

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, функциянинг x_0 нуқтадаги $f'(x_0)$ ҳосиласи урин-манинг бурчак коэффицентини ифодалайди. Бунда уринманинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

кўринишда бўлади.

Айтайлик, P нуқта тўђри чизиқ бўйлаб $s = s(t)$ қонун билан ҳаракат қилсин, бунда $t-$вақт, $s-$ўтилган йўл. Агар вақтнинг t_1 ва t_2 $(t_1 < t_2)$ қийматларидаги ўтилган йўл $s(t_1)$, $s(t_2)$ бўлса, унда ушбу нисбат

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

$[t_1, t_2]$ вақт оралиђидаги ўртача тезликни ифодалайди.

Қуйидаги

$$\lim_{t_2\to t_1+0}\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

лимит ҳаракатдаги нуқтанинг t_1 вақтдаги оний тезлигини билдиради.

Демак, ҳаракатдаги P нуқтанинг t вақтдаги оний тезлиги $v(t)$, ўтилган $s(t)$ йўлнинг ҳосиласидан иборат бўлади:

$$v(t) = s'(t).$$

4^0. Ҳосилага эга бўлган функциянинг узлуксизлиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a, b) \subset R$ да берилган бўлсин.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

◀ Айтайлик, $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Таърифга биноан

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

яъни

$$\Delta x \to 0 \text{ да } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$$

бўлади.

Энди

$$\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

деб белгилаймиз.

Равшанки,

$$\Delta x \to 0 \text{ да } \alpha \to 0.$$

Кейинги тенгликлардан топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Одатда, бу тенглик функция орттирмасининг формуласи дейилади. Ундан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканини билдиради. ►

Эслатма. Функциянинг бирор нуқтада узлуксиз бўлиши-дан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада узлуксиз, аммо у шу нуқтада ҳосилага эга эмас.

3-Мавзу: Интеграл ва унинг тадбиқлари.Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари

1. Интеграл ва унинг фанлардаги тадбиқлари
2. Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Функсиянинг ҳосиласини топиш (топиш амали) уни дифференциаллаш, функсиянинг бирор нуқтада ҳосилага эга бўлишини эса, уни шу нуқтада дифференциалланувчи дейилишини айтиб ўтган эдик.

Кўп ҳолларда функсиянинг ҳосиласига кўра функсиянинг ўзини топиш лозим бўлади. Масалан, ҳаракатдаги моддий нуқтани тезлигига кўра ҳаракат қонунини топишга тўғри келади. Бундай масалалар дифференциаллаш амалига тескари бўлган интеграллаш (интеграллаш амали) тушунчасига олиб келади.

Аниқмас интеграл тушунчаси

Айтайлик, $f(x)$ ва $F(x)$ функсиялари (a,b) да берилган бўлиб, $F(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

1-Таъриф. Агар

$$F'(x)=f(x) \quad (x\in(a,b))$$

бўлса, (a,b) да $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг **бошланғич функцияси** дейилади.

Масалан,

$$f(x)=x^2 \quad \left(x\in(-\infty,+\infty)\right)$$

функциянинг бошланғич функцияси

$$F'(x)=\frac{x^3}{3} \quad \left(x\in(-\infty,+\infty)\right)$$

бўлади, чунки

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x).$$

Агар (a,b) да $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, уҳолда

$$F(x)+C$$

ҳам $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, бунда C ихтиёрий ўзгармас сон.

◁ Маълумки,

$$F'(x)=f(x) \quad \left(x\in(a,b)\right).$$

Унда

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x)$$

бўлиб, $F(x)+C$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси эканини топамиз. ▷

Айтайлик, (a,b) да $F(x)$ ва $G(x)$ функциялари битта $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x)=f(x),$$

$$G'(x)=f(x).$$

Бу тенгликлардан

$$F'(x)=G'(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Унда

$$G(x)=F(x)+C$$

бўлади, бунда C ўзгармас сон.

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функциянинг битта бошланғич функцияси $F(x)$ маълум бўлганда унинг бошқа барча бошлснғч функциялари $F(x)$ га ихтиёрий ўзгармас сонни қўшишдан ҳосил бўлади ва

$$F(x)+C$$

ифода $f(x)$ нинг бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини ифодалайди.

2-Таъриф. Ушбу $F(x)+C$ ифода $f(x)$ функциянинг **аниқмас интеграли** дейилади ва $\int f(x)dx$ каби белгиланади:

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Бунда $\int$ интеграл белгиси, $f(x)$ интеграл остидаги функсия, $f(x)dx$ эса **интеграл остидаги ифода** дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int x^6dx$$

интеграл топилсин.

◁ Бу аниқмас интеграл шундай функсияки, (аникроғи, шундай функсиялар тўпламики) унинг ҳосиласи (тўпламдаги ҳар бир функсиянинг ҳосиласи) интеграл остидаги функсияга, яъни x^6 га тенг. Равсянки,

$$F(x)=\frac{x^7}{7}$$

дейилса, унда

$$F'(x)=\left(\frac{x^7}{7}\right)'=\frac{1}{7}\cdot 7x^6=x^6$$

бўлади. Демак,

$$\int x^6dx=\frac{x^7}{7}+C. \ \triangleright$$

Кейинчалик, аниқмас интеграл ибораси ўрнига интеграл сўзини ишлатаверамиз.

1-Эслатма. $F(x)$ функсия $f(x)$ нинг бошланғч функсияси бўладиган оралиқ кўрсатилмаган ҳолда оралиқ сифатида функсиянинг аниқланиш соҳаси тушунилади.

2-Эслатма. Ҳар бир узлюксиз функсиянинг аниқмас интегралининг мавжуд бўлиши кейинчалик кўрсатилади.

Асосий формулалар

Қуйидаги энг содда функсиянинг интегралларини келтирамиз:

1. $\int dx=\int 1\cdot dx=x+C$, бунда C – ўзгармас, чункি, $(x+C)'=1$ бўлади.

2. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \ (n\neq 1)$ бўлади, чунки $n\neq 1$ бўлганда

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)'=x^n$$

бўлади. Агар $n=-1$ бўлиб, $x>0$ бўлганда

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C,$$

чунки

$$\left(\ln x + C\right)' = \frac{1}{x};$$

$x < 0$ бўлганда

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C,$$

чунки $\left(\ln(-x) + C\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ бўлади. Умуман,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1)$, чунки $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{a^x \cdot \ln a}{\ln a} = a^x$ бўлади.

4. $\int e^x dx = e^x + C$, чунки $\left(e^x + C\right)' = e^x$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, чунки $\left(-\cos x + C\right)' = -(-\sin x) = \sin x$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$, чунки $\left(\sin x + C\right)' = \cos x$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$, чунки $\left(\arcsin x + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

8. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, чунки $\left(\operatorname{arctg} x + C\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Шунингдек,

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$,

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$,

11. $\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + C$,

12. $\int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + C$,

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$,

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ бўлади.

Интегралнинг содда ҳоссалари

Аниқмас интегралларни ҳисоблашда кўп фойдаланиладиган ҳоссаларни келтирамиз (*Аниқмас интеграл билан боғлиқ тенгликлар ўзгармас сон аниқлигидаги тенгликлар деб қаралади*):

1) Агар

$$\int f(x)dx = F(x), \int g(x)dx = G(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = F(x) \pm G(x) \qquad (1)$$

бўлади.

◁ Равшанки,

$$\int f(x)dx = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x),$$

$$\int g(x)dx = G(x) \;\Rightarrow\; G'(x) = g(x).$$

Унда

$$\left[F(x) \pm G(x)\right]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$$

бўлиб, бу тенгликдан

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = F(x) \pm G(x)$$

бўлиши келиб чиқади. ▹

(1) тенглик қуйдагича

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

ёзилиб, у йиғиндининг интеграли интеграллар йиғиндисига тенг бўлиши қоидасини ифодалайди.

2) Агар

$$\int f(x)dx = F(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int kf(x)dx = k \cdot F(x) \tag{2}$$

бўлади, бунда k – ўзгармас сон $(k \neq 0)$.

◃ Равшанки,

$$\int f(x)dx = F(x) \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x).$$

Унда

$$\left(k \cdot F(x)\right)' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$$

бўлиб,

$$\int kf(x)dx = k \cdot F(x)$$

бўлади. ▹

(2) тенглик қуйдагича

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

ёзилиб, у ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси остидан чиқариш қоидасини ифодалайди.

Мисоллар.1. Ушбу

$$\int\left(10x^7+2x^5-7\right)dx$$

интеграл ҳисоблансин

◁ Асосий формулалар ҳамда интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\left(10x^7+2x^5-7\right)dx = \int 10x^7dx + \int 2x^5dx - \int 7dx = 10\int x^7dx + 2\int x^5dx - 7\int dx =$$

$$= 10\cdot\frac{x^8}{8} + 2\cdot\frac{x^6}{6} - 7x + C = \frac{5}{4}x^8 + \frac{1}{3}x^6 - 7x + C\,. \ \triangleright$$

Интеграллаш усуллари

Ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш усули

Фараз қилайлик, $f(x)$ функсиянинг интеграли

$$\int f(x)dx$$

берилган бўлиб, уни ҳисоблаш керак бўлсин.

Баъзан, ўзгарувчи x ни алмаштириш натижасида интегрални ҳисоблаш осон бўлади.

Айтайлик, $F(x)$ функсия $f(x)$ нинг бошланғич функсияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Унда

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{2}$$

бўлади.

Энди $x=\varphi(t)$ дейлик, бунда $\varphi(t)$ функция узлюксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга.

Ушбу $F(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(t)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади.

Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидасидан ҳамда (1) дан фойдаланиб топамиз:

$$\left[F(\varphi(t))\right]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

Кейинги тенгликдан

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t)) \tag{3}$$

бўлиши келиб чиқади.

(2) ва (3)муносабатлардан $x=\varphi(t)$ бўлганда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \tag{4}$$

бўлишини топамиз.

(4) формула интегралда **ўзгарувчини алмаштириш формуласи** дейилади.

Мисоллар: 1. Ушбу

$$\int(2+3x)^{100}\,dx$$

интеграл ҳисоблансин.

⊲ Бу интегралда $2+3x=t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$x=\frac{t-2}{3},\quad dx=\frac{1}{3}dt$$

бўлиб,

$$\int (2+3x)^{100}dx = \int t^{100}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^{100}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{101}}{101}+C = \frac{1}{303}(2+3x)^{101}+C$$

бўлади. ▷

Эслатма. Иҳтиёрий ўзгармас a да

$$x+a,$$

$$ax \quad (a\neq 0)$$

лар учун

$$d(x+a)=dx,$$

$$d(ax)=adx,\ dx=\frac{1}{a}d(ax) \quad (a\neq 0)$$

бўлиши, баъзи интегралларни ҳисоблашни бирмунча энгиллаштиради. Бу ҳолда

$$\int f(x)dx = \int f(x)d(x+a),$$

$$\int f(x)dx = \frac{1}{a}\int f(x)d(ax)$$

бўлади. Масалан,

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2|+C,$$

$$\int \sqrt{x-3}dx = \int \sqrt{x-3}d(x-3) = \int (x-3)^{\frac{1}{2}}d(x-3) = \frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}+C$$

,

$$\int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\int \cos 6x d(6x) = \frac{1}{6}\sin 6x + C,$$

$$\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}\int e^{5x}d(5x)=\frac{1}{5}e^{5x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax)}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$$

(a,b – ўзгармас сонлар, $a\neq 0$).

Ратсионал функцияларни интеграллаш

1°. Содда касрлар ва уларни интеграллаш.

Ушбу

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^n},\quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q},\quad \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^n}$$

функциялар содда касрлар дейилади, бунда A,B,C,a,p,q – ўзгармас сонлар, n – натурал сон ва x^2+px+q – квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас. Бу функцияларнинг интегралларини ҳисоблаймиз.

Равшанки,

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\cdot\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{A}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}+C\quad(n\neq 1).$$

Энди

$$J=\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

интегрални ҳисоблаймиз. Интеграл остидаги x^2+px+q квадрат учҳадни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x^2=px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2,$$

бунда $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}>0$. Натижада

$$J=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

бўлади. Бу интегралда

$$x=t-\frac{p}{2}$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$J=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt$$

бўлади. Кейинги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=B\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{2\left(t^2+a^2\right)}+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=B\cdot\frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+$$

$$+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=\frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\sqrt{\frac{4}{4q-p^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Демак,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+2\left(C-\frac{p}{2}B\right)\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C \qquad (*)$$

бўлади.

Энди

$$J_n = \int \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx \quad (n>1)$$

интегрални ҳисоблаймиз. Бу интегрални ҳисоблашда юқоридаги каби белгилаш ва алмаштиришлар бажарамиз.

Натижада

$$J_n = B\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{B}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^n}+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

бўлади, бунда

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

интеграл реккуррент формуладан топилади.

Масалан,

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

бўлади.

2^o. Тўғри касрларни содда касрларга ёйиш

Фараз қилайлик,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

каср ратсионал функсия-тўғри каср берилган бўлсин, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар кўпҳадлар бўлиб, $P(x)$ кўпҳаднинг даражаси $Q(x)$ кўпҳаднинг даражасидаги кичик. Айтайлик, бу тўғри касрнинг маҳражи $Q(x)$ кўпҳад қуйидагича

$$Q(x)=(x-a)^n\cdot(x-b)^m\cdot\ldots\cdot\left(x^2+px+q\right)^r\cdot\left(x^2+\tilde{p}x+\tilde{q}\right)^s$$

ифодалансин, бунда $a,b,\ldots,p,q,\tilde{p},\tilde{q}$ – ҳақиқий сонлар, $n,m,\ldots,r,s$ – натурал сонлар.

У ҳолда

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_m}{(x-b)^m}+\frac{B_{m-1}}{(x-b)^{m-1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+$$

$$+\ldots+\frac{C_rx+D_r}{\left(x^2+px+q\right)^r}+\frac{C_{r-1}x+D_{r-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{r-1}}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+ \qquad (1)$$

$$+\frac{E_sx+F_s}{\left(x^2+\tilde{p}x+\tilde{q}\right)^r}+\frac{E_{s-1}x+F_{s-1}}{\left(x^2+\tilde{p}x+\tilde{q}\right)^{r-1}}+\ldots+\frac{E_1x+F_1}{x^2+\tilde{p}x+\tilde{q}}$$

бўлади, бунда $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m,C_r,D_r,\ldots,C_1,D_1,E_s,F_s,\ldots,E_1,F_1$ – ўзгармас сонлар.

(1) тенглик тўғри касрни содда касрларга ёйилишини ифодалайди.

(1) тенгликнинг ўнг томонидаги ўзгармас сонлар қуйидагича топилади:

1) (1) тенгликни ҳар икки томони $Q(x)$ га кўпайтирилади. Натижада маҳраждан қутилиб

$$P(x)=R(x)$$

тенгликка келинади,

2) бу тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир ҳил даражалари олдидаги коеффитсиентлар тенглаштирилади. Натижада ўзгармас сонларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил бўлади,

3) тенгламалар системаси эчилиб, изланаётган ўзгармас сонлар топилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}$$

каср содда касрларга ёйилсин.

◁ Аввало берилган касрнинг маҳражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=\left(x^2-1\right)(x-2)=(x-1)(x+1)(x-2).$$

Сўнг (1) муносабатдан фойдаланиб, берилган касрни қуйидаги

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{5-7x}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

кўринишида ёзамиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $(x-1)(x+1)(x-2)$ га кўпайтириб топамиз:

$$5-7x=A(x+1)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+1)=$$

$$=(A+B+C)x^2-(A+3B)x-2A+2B-C\,.$$

x нинг бир ҳил даражалари олдидаги коеффитсиентларни тенглаштириш натижасида

$$A+B+C=0\,,$$

$$A+3B=7\,,$$

$$-2A+2B-C=5$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Уни ечиб топамиз:

$$A=1,\ B=2,\ C=-3\,.$$

Натижада

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x-2}$$

бўлади. ▷

3^{o}. Ратсионал функсияларни интеграллаш.

Ушбу

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

ратсионал функсияни қарайлик, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ – кўпҳадлар.

Агар

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

да суратидаги кўпҳаднинг даражаси маҳраждаги кўпҳаднинг даражасидан катта бўлса, унинг суратини маҳражига бўлиб, бутун ратсионал функсия ҳамда тўғри каср йиғиндиси кўринишда қуйидагича ифодалаб олинади:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

У ҳолда

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int R(x)dx+\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$$

бўлади, бунда $\int R(x)dx$ – бутун ратсионал функсиянинг интеграли сифатида осон ҳисобланади, $\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ – тўғри касрнинг интеграли, интеграл остидаги тўғри касрни содда касрга ёйиб ҳисобланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◁ Интеграл остидаги тўғри касрни содда касрлсрга ёямиз:

$$x^3+4x^2+4x=x\left(x^2+4x+4\right)=x\cdot\left(x+2\right)^2,$$

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{3x^2+8}{x\left(x+2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{\left(x+2\right)^2},$$

$$3x^2+8=\left(A+B\right)x^2+\left(4A+2B+C\right)x+4A,$$

$$\begin{cases}A+B=3,\\ 4A+2B+C=0,\\ 4A=8\end{cases}$$

$$A=2,\ B=1,\ C=-10,$$

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{\left(x+2\right)^2}.$$

Натижада

$$\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{\left(x+2\right)^2}\right)dx=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{d\left(x+2\right)}{x+2}-$$

$$-10\int\left(x+2\right)^{-2}d\left(x+2\right)=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C=\ln\left(x^2|x+2|\right)+\frac{10}{x+2}+C$$

бўлади. ▷

Баъзи ирратсионал функцияларни интеграллаш

Кўп ҳолларда иррасионал ҳамда тригонометрик функцияларни интеграллаш ўзгарувчиларини алмаштириш билан расионал функцияларни интеграллашга келади.

1) Айтайлик, $f\left(x\right)$ функсия x ва унинг турли каср даражалари устида арифметик амаллар бажарилишидан юзага келсин. Масалан,

$$f(x)=\frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}},\ f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}},\ f(x)=\frac{x}{1+\sqrt[5]{x}}$$

Бундай функцияларни интеграллаш

$$x=t^{\alpha}$$

алмаштириш билан ратсионал функцияларни интеграллашга келади, бунда α сон $f(x)$ ифодасидаги x нинг даражаларида қатнашган касрлар маҳражларининг энг кичик умумий карралиси.

Мисоллар 1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$$

интеграл ҳисоблансин.

⊲ Интеграл остидаги функция

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}=\frac{1}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot x^{\frac{1}{2}}}$$

ифодасидаги x нинг даражалари $\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{3}$ бўлоб, бу каср маҳражлари 2 ва 3 ларнинг энг кичик умумий карралиси 6 га тенг. Бинобарин

$$x=t^{6}$$

алмаштириши лозим. Унда $dx=6t^5dt$ бўлиб

$$\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}=\int\frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3}$$

бўлади. Кейинги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\frac{1+t^2-t^2dt}{1+t^2}=6\left(\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=6\left(t-\operatorname{arctg}t\right)+C.$$

Демак,

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}} = 6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C\ . \ \triangleright$$

4) Айтайлик, $f(x)$ функсия x ва $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (a,b,c – ўзгармас сонлар) устида арифметик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлсин.

Масалан,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,,\quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,,\quad f(x) = \frac{x}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+4}}\,.$$

Бундай функсияларни интеграллашда:

а) $a>0$ бўлганда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a} = t$$

алмаштириш билан,

б) $c>0$ бўлганда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$$

алмаштириш билан,

в) ax^2+bx+c квадрат учҳад ҳақиқий α ва β илдизларга эга бўлганда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(x-\alpha\right)$$

алмаштириш билан раттсионал функсияларни интеграллашга келади.

Мисоллар. 1.Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$$

интеграл ҳисоблансин.

$\triangleleft$ Бу интегралда

$$\sqrt{x^2+6x+5} - x = t$$

алмаштириш бажарамиз (чунки, $a=1>0$).

Унда

$$\sqrt{x^2+6x+5}-x=t,\quad \sqrt{x^2+6x+5}=x+t,$$

$$x^2+6x+5=x^2+2xt+t^2,$$

$$(6-2t)x=t^2-5,$$

$$x=\frac{t^2-5}{6-2t},$$

$$dx=\left(\frac{t^2-5}{6-2t}\right)'\cdot dt=2\frac{-t^2+6t-5}{\left(6-2t^2\right)}dt,\quad \sqrt{x^2+6x+5}=\frac{-t^2+6t-5}{6-2t}$$

бўлиб,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}=\int\frac{6-2t}{-t^2+6t-5}\cdot 2\frac{-t^2+6t-5}{\left(6-2t^2\right)}dt=\int\frac{2dt}{6-2t}=$$

$$=-\int\frac{d(3-t)}{3-t}=-\ln|3-t|+C$$

бўлади.

Демак,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}=-\ln\left|3+x-\sqrt{x^2+6x+5}\right|+C.\ \triangleright$$

Тригонометрик функцияларни интеграллаш.

Айтайлик, $f(x)$ функсия $\sin x$ ва $\cos x$ лар устида арифметик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлсин.

Масалан,

$$f(x)=\frac{1}{2\sin x-\cos x+5},\ f(x)=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x},\ f(x)=\frac{\sin x+4\cos x}{\sin^2 x}.$$

Бундай функцияларни интеграллаш

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \ \left(x=2\operatorname{arctg}t\right)$$

алмаштириш билан ратсионал функцияларни интеграллашга келади. Бу алмаштириш ёрдамида $\sin x$, $\cos x$ лар t нинг ратсионал функцияларга айланади:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx=d\left(2\operatorname{arctg}t\right)=\frac{2t}{1+t^2}dt\ .$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$$

интеграл ҳисоблансин.

$\lhd$ Бу интегралда

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

бўлиб,

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{dt}{6t + 4\left(1-t^2\right) + 5\left(1+t^2\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \left(t+3\right)^{-2} d\left(t+3\right) = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{3 + \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} + C\,.$$

бўлади. ▹

Ушбу

$$\int \sin nx \sin mx dx\,, \int \cos nx \cos mx dx$$

ва

$$\int \sin nx \cos mx dx$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда қуйидаги

$$\begin{aligned} \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right) - \cos\left(\alpha+\beta\right)\right], \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right) + \cos\left(\alpha+\beta\right)\right], \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha-\beta\right) + \sin\left(\alpha+\beta\right)\right] \end{aligned} \tag{1}$$

формулалардан фойданилади.

Мисол. Ушбу

$$\int \sin nx \cdot \sin mx dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◃ (1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int \sin nx \cdot \sin mx dx = \int \frac{1}{2}\left[\cos\left(n-m\right) - \cos\left(n+m\right)\right] dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int\cos(n-m)dx-\int\cos(n+m)dx\right].$$

а) Айтайлик, $n\neq m$ бўлсин. У ҳолда

$$\int\cos(n-m)dx=\int\cos(n-m)d\big((n-m)x\big)\cdot\frac{1}{n-m}=\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x+C\,,$$

$$\int\cos(n+m)dx=\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x+C$$

бўлиб,

$$\int\sin nx\cdot\sin mxdx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x-\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]+C$$

бўлади.

б) Айтайлик, $n=m$ бўлсин. У ҳолда

$$\int\cos(n-m)xdx=\int dx=x+C$$

$$\int\cos(n+m)xdx=\int\cos 2nxdx=\int\cos 2nxd(2nx)\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}\sin 2nx+C$$

бўлиб,

$$\int\sin nx\cdot\sin mxdx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]+C$$

бўлади. ⊳

4-Мавзу: Дифференциал тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Математика ва саънат. Математика ва муҳандислик

1. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг табиийй фанлардаги тадбиқларига оид масалалар ечиш

2. Математика ва саънат. Математика ва муҳандислик

Дифференсиал тенглама тушунчаси

Фан ва техниканинг турли соҳаларида учраб турадиган ба'зи масалалар номаълум функсия ва унинг ҳосилалари қатнашган тенгламаларга келади. Бундай тенгламалар ва уларни ечиш усуллари олий математиканинг муҳим бўлимларидан бири дифференсиал тенгламалар назариясида ўрганилади.

1. Масалалар

1). Идишда 140 л аралашма бўлиб, унинг таркибида 14 кг. туз бор. Бу идишга иккита қувур уланган. Биринчи қувурдан ҳар дақиқада таркибида 1 кг туз бўлган 7 л аралашма узлуксиз равишда қуйилади, иккинчи қувурдан эса шу тезлик билан аралашма оқизилади. Бир соатдан сўнг идишдаги аралашма таркибида қанча туз бўлади?

Вақтни эркли ўзгарувчи сифатида олиб, уни t билан белгилаймиз. У ҳолда аралашмадаги тузнинг миқдори y шу t га боғлиқ бўлади: $y = y(t)$. Маълумки, $t + \Delta t$ пайтда аралашмадаги тузнинг миқдори $y(t + \Delta t)$ бўлиб, Δt вақт оралиғида туз миқдори $y(t + \Delta t) - y(t)$ га ўзгарди.

Масаланинг шартига кўра Δt вақт оралиғида идишга $1 \cdot \Delta t$ кг туз тушади ва идишдан

$$\frac{y(t)}{140} \cdot 7 \cdot \Delta t = \frac{y(t)}{20} \cdot \Delta t \text{ кг}$$

туз чиқиб кетади. Уларнинг фарқи

$$1 \cdot \Delta t - \frac{y(t)}{20} \cdot \Delta t = \left(1 - \frac{y(t)}{20}\right)\Delta t$$

бўлади.

Ҳар дақиқада идишдаги аралашма таркибида туз миқдори ўзгариб турганлиги сабабли

$$y(t+\Delta t)-y(t)\approx\left(1-\frac{y(t)}{20}\right)\Delta t \qquad (1)$$

бўлади. Агар Δt нолга интила борса, (1) тақрибий тенглик қатъий тенгликка айлана боради. Бинобарин,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=1-\frac{y(t)}{20}$$

бўлади. Маълумки,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=y'(t).$$

Демак,

$$y'(t)=1-\frac{y(t)}{20}. \qquad (2)$$

Шундай қилиб, идишдаги аралашма таркибидаги туз миқдорини топиш номаълум функсия $y(t)$ ва унинг ҳосиласи $y'(t)$ қатнашган тенгламани ечишга келади.

2). Ҳаво ҳарорати $0^\circ C$ бўлган муҳитда $T^\circ C$ ҳароратли $(T>0)$ жисм совутилаётган бўлсин. Вақтнинг $t=0$ вақтидан бошлаб жисмнинг совуш қонунияти топилсин.

T ҳарорат t вақтнинг функсияси бўлади: $T=T(t)$. Нютон қонунига биноан $T^\circ C$ ҳароратли жисмнинг совуш тезлиги шу $T^\circ C$ га пропорсионал бўлади. Агар тезлик $T'(t)$ ҳосила эканлигини эътиборга олсак ва пропорсионаллик коеффитсиенти $K\,(K>0)$ дейилса, унда Нютон қонунига кўра

$$T'(t)=-KT(t) \qquad (3)$$

бўлади.

Шундай қилиб жисмнинг совуш қонунияти $T(t)$ ни топиш, номаълум функсия $T(t)$ ва унинг ҳосиласи $T'(t)$ қатнашган тенгламани ечишга келади.

2. Дифференсиал тенглама

Айтайлик, x ўзгарувчи (эркли ўзгарувчи), y эса унинг функсияси $y=y(x)$ бўлиб, $y'=y'(x)$, $y''=y''(x)$, $\ldots$, $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$ лар бу функсиянинг биринчи, иккинчи ва ҳ.к. n-тартибли ҳосилалари бўлсин. x ўзгарувчи, номаълум y функсия ва унинг турли тартибдаги ҳосилалари қатнашган тенглама **дифференсиал тенглама** дейилади.

Юқоридаги (2) ва (3) тенгламалар дифференсиал тенгламалар бўлади.

$x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ ларни боғловчи ушбу

$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)=0 \tag{4}$$

тенглик дифференсиал тенгламанинг умумий кўринишини ифодалайди. (4) дифференсиал тенгламада қатнашган номаълум функсия ҳосиласининг юқори тартиби (4) **дифференсиал тенгламанинг тартиби** дейилади.

Масалан,

$$y'+\frac{2}{x}y=\sin x,\ 2xy'-3y=0,\ y'-x^2y+x^3=0,\ y'-x=0$$

биринчи тартибли дифференсиал тенгламалар,

$$y''+4y'+13y=0,\ y''+2y-\cos x=0,\ y''=\arcsin x$$

иккинчи тартибли дифференсиал тенгламалар бўлади. Хусусан, биринчи тартибли дифференсиал тенгламанинг умумий кўриниши

$$F(x, y, y')=0,$$

иккинчи тартибли дифференсиал тенгламанинг умумий кўриниши эса

$$F(x, y, y', y'')=0$$

шаклда ёзилади.

3. Дифференсиал тенгламанинг ечими

Умумий кўринишга эга бўлган

$$\Phi\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{4}$$

дифференсиал тенгламани қарайлик.

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ функсия бирор оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу оралиқда $\varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар (4) тенгламадаги y нинг ўрнига $\varphi(x)$, y' нинг ўрнига $\varphi'(x)$, y'' нинг ўрнига $\varphi''(x)$ ва ҳ.к., $y^{(n)}$ нинг ўрнига $\varphi^{(n)}(x)$ қўйилганда (4) тенглама айниятга айланса:

$$\Phi\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0,$$

$\varphi(x)$ функсия (4) **дифференсиал тенгламанинг ечими** дейилади.

Масалан, $y = x^2$ функсия ушбу

$$xy' - 2y = 0 \tag{5}$$

биринчи тартибли дифференсиал тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$y = x^2, \; y' = 2x$$

ларни (5) тенгламадаги y ва y' лар ўрнига қўйсак, у ҳолда

$$x \cdot 2x - 2 \cdot x^2 \equiv 0$$

бўлади. Айни пайтда

$$y = Cx^2 \quad (C \text{ – ўзгармас сон}) \tag{6}$$

функсия ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

Чунки,

$$y = Cx^2, \ y' = 2Cx$$

ларда (5) тенглама айниятга айланади:

$$x \cdot 2Cx - 2 \cdot Cx^2 \equiv 0.$$

Дифференсиал тенгламанинг (6) кўринишдаги ечими унинг **умумий ечими** дейилади. Бу умумий ечимда ихтиёрий ўзгармас C нинг бирор тайин C_0 қийматидаги $C_0 x^2$ ечим (5) тенгламанинг **хусусий ечими** дейилади.

Демак, дифференсиал тенгламанинг умумий ечимдаги ихтиёрий ўзгармас C нинг турли қийматларида дифференсиал тенгламанинг хусусий ечимлари (улар чексиз кўп бўлади) ҳосил бўлиб, умумий ечим бу хусусий ечимларнинг барчасини ўзида мужассамлаштиради. Бошқача қилиб айтганда умумий ечимдан тенгламанинг барча хусусий ечимлари келиб чиқади.

Аммо ечимга эга бўлган (бу ечимни $\varphi(x)$ дейлик) шундай дифференсиал тенгламалар борки, бу $\varphi(x)$ ечим қаралаётган дифференсиал тенгламанинг умумий ечимдан (ихтиёрий ўзгармас C нинг ҳеч бир қийматидан) келиб чиқмайди. Масалан,

$$y'^2 = 4y \quad \left(y = y(x)\right) \tag{7}$$

дифференсиал тенгламанинг умумий ечими

$$y = (x + C)^2$$

бўлади. Чунки,

$$y = (x + C)^2, \ y' = 2(x + C)$$

лар берилган тенгламани айниятга айлантиради:

$$\left[2(x + C)\right]^2 \equiv 4(x + C)^2.$$

Айни пайтда $y = \varphi(x) = 0$ функция (7) дифференсиал тенгламанинг ечими бўлиб (бу равшан), у умумий ечимдан (C нинг ҳеч бир қийматида) бу ечим келиб чиқмайди. Одатда бундай ечим қаралаётган дифференсиал тенгламанинг **махсус ечими** дейилади. Дифференсиал тенгламанинг умумий ечимидан хусусий ечим аргументи x бирор x_0 қийматни қабул қилганда $y(x)$ функсия берилган y_0 қийматни қабул қилсин деган шарт асосида ҳосил қилинади. Бунда x_0, y_0 бошланғич қийматлар дейилади, келтирилган шарт **бошланғич шарт** дейилиб,

$$x = x_0 \text{ бўлганда } y = y_0$$

ёки

$$y|_{x=x_0} = y_0$$

каби ёзилади.

Умумий ечимдаги C ўзгармас шу шарт асосида топилади. Масалан, юқорида келтирилган

$$xy' - 2y = 0$$

дифференсиал тенгламанинг умумий ечими

$$y = Cx^2$$

га кўра ушбу

$$y|_{x=2} = 8$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими қуйидагича топилади: $x = 2, y = 8$ ларни умумий ечимдаги x ва y ларнинг ўрнига қўйиб,

$$8 = C \cdot 4$$

бўлишни, ундан эса $C = 2$ эканини аниқлаймиз. C нинг бу қийматини умумий ечимдаги C нинг ўрнига қўйиб, изланаётган хусусий ечим

$$y = 2x^2$$

бўлишини топамиз.

Дифференсиал тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш дифференсиал тенгламалар назариясининг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади. Одатда бу масала Коши масаласи дейилади.

4. Дифференсиал тенгламалар назариясининг асосий масалалари

Дифференсиал тенгламалар назариясида қуйидаги масалалар асосий масалалар ҳисобланади:

1) Дифференсиал тенглама эчимининг мавжудлиги ва ягоналиги. Дифференсиал тенгламалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини ифодаловчи теоремалар мавжуд. Бундай теоремаларда тенглама ечимининг мавжуд ва ягона бўлишининг етарли шартлари келтирилган. Мавжудлик теоремалари дифференсиал тенгламаларга оид махсус адабиётларда исботланган. Биз кейинги параграфларда мавжудлик теоремаларини келтириш билангина кифояланамиз;

2) Дифференсиал тенгламаларни ечиш. Дифференсиал тенгламаларни ечиш (ечимини топиш), ечиш усулларини аниқлаш энг муҳим масалалардандир. Кўпгина тенгламалар (ҳатто уларнинг ечими мавжудлиги маълум бўлса ҳам) ечилавермайди. Кейинги параграфларда ечиладиган тенгламалар қаралади ва уларни ечиш усуллари баён этилади;

3) Дифференсиал тенгламаларининг татбиқлари. Дифференсиал тенгламаларнинг татбиқ доираси жуда кенг. Фан ва техниканинг турли соҳаларидаги (геометрия, физика, механика, техника, табиатшунослик ва ҳ.к) масалалар дифференсиал тенгламалар ёрдамида ҳал этилади.

Биринчи тартибли дифференсиал тенгламалар

Маълумки, биринчи тартибли дифференсиал тенглама умумий кўринишда қуйидагича

$$\Phi\left(x, y, y'\right) = 0$$

ифодаланади. Бунда, x – эркли ўзгарувчи (функсия аргументи) $y = y\left(x\right)$– номаълум функсия, y' эса – номаълум функсиянинг ҳосиласи. Бу тенгламани уъ га нисбатан ечилган ҳоли бўлган

$$y' = f\left(x, y\right) \quad \left(\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)\right) \qquad (1)$$

тенгламани ўрганамиз. Одатда, (1) тенглама ҳосилага нисбатан ечилган дифференсиал тенглама деб ҳам юритилади. (1) тенглама учун тенгламанинг ечими (умумий ва хусусий ечимлари), бошланғич шарт, Коши масалалари тушунчалари 1-§ да келтирилган тушунчалар каби киритилади.

1. Дифференсиал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги.

Ушбу

$$y' = f\left(x, y\right)$$

дифференсиал тенгламани қарайлик. Равшанки, бу тенглама ечимининг мавжудлиги ва унинг ечими $f\left(x, y\right)$ функсияга боғлиқ. Айтайлик, функсия текисликдаги ёпиқ тўғри тўртбурчак

$$D = \left\{\left(x, y\right) : x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b\right\}$$

да берилган бўлсин, бунда a ва b лар мусбат сонлар.

Теорема. Агар $f\left(x, y\right)$ функсия D да узлуксиз бўлиб, узлуксиз $f_y'\left(x, y\right)$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда (1) дифференсиал тенглама бошланғич шарт

$$x = x_0, \ y = y_0$$

ни қаноатлантирувчи ечимга эга ва у ягона бўлади.

Эслатма. Теоремада келтирилган шарт (1) тенглама ечими мавжуд бўлишининг етарли шартини ифодалайди. Бинобарин, бу шарт бажарилмаганда ҳам (1) тенглама ечимга эга бўлиши мумкин. Юқорида айтиб ўтганимиздек, (1) тенглама ечими $f\left(x, y\right)$ функсияга (унинг кўринишига) боғлиқ бўлади. Бу функсиянинг махсус кўринишларида юзага келадиган дифференсиал тенгламаларни келтирамиз:

1) Айтайлик,

$$f\left(x, y\right) = \varphi\left(x\right) \cdot \psi\left(y\right)$$

бўлсин, бунда $\varphi(x)$ ва $\psi(y)$ узлуксиз функсиялар. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x)\cdot\psi(y) \tag{2}$$

кўринишга келади. Уни ўзгарувчилари ажраладиган дифференсиал тенглама дейилади.

2) Айтайлик,

$$f(x,y)=q(x)-p(x)\cdot y$$

бўлсин, бунда $p(x)$ ва $q(x)$ – узлуксиз функсиялар. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$y'+p(x)y=q(x) \quad (y'+py=q) \tag{3}$$

кўринишга келади. Уни чизиқли дифференсиал тенглама дейилади.

3) Айтайлик

$$f(x,y)=q(x)\cdot y^m-p(x)y$$

бўлсин, бунда $p(x), q(x)$ – узлуксиз функсиялар; m – ўзгармас сон.

Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$y'+p(x)y=q(x)y^m \tag{4}$$

кўринишга келади. Уни Бернулли тенгламаси дейилади.

4) Айтайлик,

$$f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{5}$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

ифода бирор $F(x,y)$ функсиянинг тўлиқ дифференсиали

$$(dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$$

бўлиши мумкин. Бундай вазиятда (5) ($dF(x,y)=0$) тенглама тўлиқ дифференсиал тенглама дейилади.

5) Айтайлик, $f(x,y)$ функсия ушбу

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

шартни қаноатлантирсин, бунда t – ихтиёрий сон (бундай ҳолда $f(x,y)$ нол ўлчовли бир жинсли функсия дейилади.) Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

кўринишга келади.Уни бир жинсли дифференсиал тенглама дейилади. Юқорида келтирилган (2), (3), (4) ва (5) дифференсиал тенгламалар ечимга эга (уларнинг ечимга эга бўлиши, $f(x,y)$ функсиянинг кўриниши ҳамда мавжудлик теоремасининг шартларининг бажарилишидан келиб чиқади).

Кейинги параграфларда шундай тенгламаларни ечиш усуллари билан танишамиз.

Бир жинсли дифференсиал тенгламалар

Маълумки,

$$y' = f(x,y) \tag{1}$$

дифференсиал тенгламада $f(x,y)$ функсия

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

шартни қаноатлантирса, (1) ни **бир жинсли** дифференсиал тенглама дейилади. Унда $t = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ дейилиши билан

$$f(x,y) = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

бўлиб, қаралаётган (1) дифференсиал тенглама ушбу

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left(\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \tag{2}$$

кўринишга келади. (2) тенгламани ечиш учун

$$\frac{y}{x} = u \quad \left(u = u(x)\right)$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$y = ux, \quad y' = (ux)' = u + xu'$$

бўлиб, (2) тенгламага қўйилса

$$u + xu' = \varphi(u)$$

яъни

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Кейинги тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлиб, уни интеграллаш билан

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C \quad \left(u = \frac{y}{x}\right)$$

бўлишини топамиз. Бу тенглик берилган бир жинсли дифференсиал тенгламанинг умумий ечимини, $y = xu$ функсияни ифодалайди.

Мисол. Ушбу

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

дифференсиал тенгламанинг умумий ечими топилсин.

$\lhd$ Берилган тенгламада

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

бўлиб, унинг учун

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2+(ty)^2}{(tx)(ty)}=\frac{t^2\left(x^2+y^2\right)}{t^2xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}=f(x,y)$$

бўлади. Демак, берилган тенглама бир жинсли тенглама. Агар

$$\frac{y}{x}=u, \quad y=ux$$

дейилса, унда

$$y'=u+xu'$$

бўлиб, берилган тенглама ушбу

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$$

кўринишга келади. Бу тенгламани ечамиз:

$$udu=\frac{dx}{x},$$

$$\int udu=\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+\ln C,$$

$$u^2=2\ln\left(|x|C\right).$$

Энди $y=xu$ эканини эътиборга олиб,

$$\frac{y^2}{x^2}=2\ln\left(|x|C\right),$$

$$y^2 = 2x^2 \ln|xC|,$$

$$y = \pm x\sqrt{2\ln|xC|}\,.$$

бўлишини топамиз. Бу берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади. ▷

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-Мавзу: Тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Матрицалар ва уларнинг тадбиқлари. Векторлар ва уларнинг тадбиқлари

1. Тенгламалар ва уларнинг табиийй фанлардаги тадбиқлари
2. Матрицалар ва уларнинг иқтисодиётдаги тадбиқлари
3. Векторлар ва уларнинг тадбиқлари

Таъриф: Номаълум қатнашган тенгликка тенглама дейилади. Номаълумнинг бу тенгламани сонли айниятга айлантирувчи қиймати тенгламанинг илдизи, барча илдизлар тўплами эса тенгламанинг эчими бўлади.

1.Мисол. $(x+1)*(x–2)*(x+3) = 0$ тенгламанинг илдизлари $x_1 = – 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = – 3$ қийматлардан, эчими эса $x = \{ –3; –1; 2\}$ тўпламдан иборат.

2. Мисол. $x^2 + 4 = 0$ ёки $x^2 = – 4$. Тенгликнинг чап қисми **x** нинг ҳар қандай қийматида мусбат, $x^2 \geq 0$, ўнг қисми эса манфийдир. Демак, берилган тенглик бажарилмайди, эчим мавжуд эмас: $\mathbf{x} = \varnothing$. а) **Таъриф.** Биринчи даражали бир номаълумли тенглама деб, ax + б = 0 (1) кўринишидаги тенгламаларга айтилади. Бунда **x** – номаълум сон, ***a*** ва **б** – озод ҳад.

Биринчи даражали бир номаълумли тенглама (1) кўринишда бўлмаса, уни қуйидаги тартибда эчилади.

1) тенглама каср кўринишида бўлса, уни касрҳадлардан куткариш.

2) қавслар бўлса, уларни очиш.

3) номаълум ҳадларни тенгламанинг бир қисмига, маълумларини бир қисмига утказиш.

4) ўхшаш ҳадларни ихчамлаш.

5) тенгламанинг иккала қисмини номаълумнинг коеффитсиентига бўлиш керак.

б) Таъриф. ax^2 + бх + с = 0 (2) бунда $a \neq 0$ кўринишдаги тенглама квадрат тенглама дейилади.

Квадрат тенгламаларни урганишда **х** номаълумнинг хакикий қийматлари тўпламини комплекс сонларнинг <u>бутун тўплами</u> деб хисоблашга шартлашиб оламиз.

а, **б** ва **с** коеффитсиентларни хақиқий сонлар деб хисоблашимиз.

(2) Тенглама эчими қуйидагича аниқланади.

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, Д = б^2 – 4*а*с – дискриминант

Д > 0 , $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{Д}}{2a}$ – хақиқий сонлар

Д = 0 , $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ – хақиқий сонлар

Д < 0 да $\sqrt{Д}$ мавхум сон $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|Д|}}{2a}$ – қўшма комплекс сонлардир. Агар (2) да с=0 бўлса,

*а*х^2 + бх = 0 (3) х(*а*х + б) = 0 $x_1 = 0$ x_2 = – б/*а*

Агар б = 0 бўлса

*а*х^2 + с = 0 (4) $x_{1,2}$ = ± √ – с/*а*

Агар б = 0, с=0 бўлса

*а*х^2 = 0 (5) $x_{1,2} = 0$

3; 4; 5 тенгламалар чала квадрат тенгламалар дейилади.

х^2 + рх+қ=0 (6) – келтирилган квадрат тенглама дейилади.

Теорема: (Виет теоремаси) келтирилган квадрат тенгламада илдизларининг йиғиндиси қарама-қарши ишора билан олинган биринчи даражали номаълум олдидаги иккинчи коеффитсиент (–р) га, илдизларининг кўпайтмаси эса озодҳад **қ** га тенгдир.

в) $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ (7) – кўринишидаги тенглама каср ратсионал тенглама дейилади, бу эрда

П(x) ва Қ(x) лар кўпҳадлар.

Ратсионал тенгламани эчиш учун:

1. Барча касрларнинг умумий махражи топилади.
2. Берилган тенгламанинг иккала томонини умумий махражга кўпайтириб, уни бутун тенгламага келтирилади.
3. Хосил қилинган бутун тенглама эчилади.
4. Унинг илдизлари ичидан умумий махражни нолга айлантирадиганларини чикариб юборилади.

<u>Таъриф:</u> А(x) > Б(x) , А(x) < Б(x) , А(x) ≥ Б(x) , А(x) ≤ Б(x) муносабатларга **x** номаълумли тенгсизликлар дейилади.

Тенгсизликнинг эчими деб, номаълумнинг шу тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматлар тўпламига айтилади.

Агар тенгсизликда **>** ёки **<** ишора бўлса, уни катъий тенгсизлик (масалан $2x + 1 > 5$, $x + 2 < 3$)

≥ ёки ≤ ишора бўлса, уни катъиймас тенгсизлик (Масалан, $a^2 - 1 \geq 0$, $5x^2 + 3 \leq 0$) дейилади.

а) ax + б > 0 ёки (ax + б < 0) $a \neq 0$, ∀б энг содда тенгсизлик эчими $x > \frac{b}{a}$ ёки $x < \frac{b}{a}$ дан иборат, ундаги $\frac{b}{a}$ сони ax + б = 0 тенгламанинг илдизи $a > 0$ бўлганда ax + б < 0 тенгсизликнинг эчими $(-\infty; -\frac{b}{a})$, а < 0 да $(-\frac{b}{a}; \infty)$ тўпламдан иборат.

Матрицалар ва уларнинг тадбиқлари.

1 Матритсалар ҳақида умумий тушунчалар. Системани моделлаштиришда матритсалар алгебраси деган тушунча муҳим аҳамиятга эга. Режалаштириш муаммолари, ялпи маҳсулот, жами меҳнат сарфи, нархни аниқлаш ва бошқа масалалар ҳамда уларда компъютерларни қўллаш матритсалар алгебрасини қарашга олиб келади. Ишлаб чиқаришни ривожлантириш, моддий ишлаб чиқариш орасидаги мавжуд боғланишларни ифодалашда ва бошқаларда, маълум даражада тартиблангаг ахборотлар системасига асосланган бўлиши лозим. Бу тартибланган ахборотлар системаси муайян жадваллар кўринишида ифодаланган бўлади. Мисол ўрнида моддий ишлаб чиқариш тармоқлари орасидаги ўзаро боғлиқлик ахборотлари системасини қарайлик. Ишлаб чиқариш 5 та (масалан, машинасозлик, электроенергия, метал, кўмир, резина ишлаб чиқариш саноатлари) тармоқдан иборат бўлсин. Бунда улар орасидаги ўзаро боғлиқлик 1-жадвал билан ифодалансин.

1-жадвал.

Тармоқлар	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Бу жадвалда $a_{ij}\ (i, j = 1,2,3,4,5)$ лар билан, i-тармоқнинг j-тармоққа тетказиб берадиган маҳсулоти микдори белгиланган, чунончи, a_{21}, a_{22}, ..., a_{25} лар 2-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга; a_{31}, a_{32}, ..., a_{35} лар эса 3-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга етказиб берадиган маҳсулотлари миқдорини билдиради. a_{22}, a_{33} лар мос равишда 2,3- тармоқларнинг ўз эҳтиёжларига сарфини ифодалайди.

Юқоридагилар ўхшаш ишлаб чиқариш мезони (нормаси) ахборотлари системасига сонли мисол қилайлик. Корхона 3 турдаги хом ашё ишлатиб 4 хилдаги маҳсулот ишлаб чиқарадиган бўлсин, бунда хом ашё сарфи нормаси системаси 2-жадвал билан берилган бўлсин.

2-жадвал.

Хом ашёлар	Маҳсулотлар			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-жадвалда масалан, 1-турдаги хом ашё сарфи нормаси мос равишда 1,2,3,4-хилдаги маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун 2,3,2,0 бўлади.

1 ва 2 жадваллар, математикада ўрганиладиган матритсалар тушунчасининг мисоллари бўла олади. Матритсалар иқтисодий изланишларда кенг қўлланилмоқда, хусусан, улардан фойдаланиш ишлаб чиқаришни режалаштиришни осонлаштириб, меҳнат сарфини камайтиради, ҳамда режанинг ҳар хил вариантларини тузишни ихчамлаштиради. Бундан ташқари ҳар хил иқтисодий кўрсаткичлар орасидаги боғлиқликни текширишни осонлаштиради. Бу ҳолатлар матритсаларни умумий ҳолда қарашга олиб келади.

1-таъриф. m та сатрли ва n та устунли тўғри бурчакли $m \cdot n$ та элементдан тузилган жадвал

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------- & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ ***ўлчамли матритса*** дейилади. A матритсани қисқача (a_{ij}) $(i = 1,...m,\ \ j = 1,...n)$ билан ҳам белгилаш мумкин. Матритсаларда сатрлар сони устунлар сонига тенг бўлса, бундай матритсалар **квадрат матритсалар** дейилади.

Ҳар бир n тартибли квадрат матритса учун унинг элементларидан тузилган детерминантни ҳисоблаш мумкин, бу детерминантга A матритсанинг детерминанти дейилади ва $\det A$ ёки $|A|$ билан белгиланади.

$\det A = 0$ бўлса, A матритсага **махсус матритса,** $\det A \neq 0$ бўлса, **махсусмас матритса** дейилади. Квадрат матритсанинг $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ элементлар жойлашган диагонали **бош диагонал,** $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ элементлар жойлашган диагонали ***ёрдамчи диагонал*** дейилади. Бош диагоналдаги элементлар 0дан фарқли бошқа барча элемаентлари 0 га тенг квадрат матритса ***диагонал матритса*** дейилади. Масалан,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матритса диагонал матритсадир. Диагоналдаги барча элементлари 1 га тенг диагонал матритса ***бирлик матритса*** дейилади ва

$$E = \begin{pmatrix} 1\,0 \ldots 0 \\ 0\,1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

билан белгиланади..

Фақат битта сатрдан иборат $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$ матритсага сатр матритса дейилади. Фақат битта устундан иборат

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

матритсага устун матритса дейилади.

Барчаелементлари 0 лардан иборат бўлган матритсага нол матритса дейилади ва O билан белгиланади.

А матритсага қуйидаги матритсани мос қўйиш мумкин:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\cdots a_{m2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матритсанинг ҳар сатри A матритсанинг унга мос устунидан иборат. A^T матритсани A матритсага нисбатан транспонирланган дейилади.

$A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ $(i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ матритсаларнинг мос элементлари $a_{ij} = b_{ij}$ тенг бўлса, бундай матритсалар тенг матритсалар дейилади.

2. Матритсалар устида амаллар. Матритсаларни қўшиш, сонга кўпайтириш ва бир-бирига кўпайтириш мумкин.

Бир хил ўлчамли $A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})\ (i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ матритсаларнинг йиғиндиси деб, элементлари $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ равишда аниқланадиган учинчи $C = (c_{ij})$ матрисага айтилади. Равшанки, C матритсанинг ўлчами олдинги матритсаларнинг ўлчами билан бир хил бўлади.

Матритсаларни қошишда бирор матрисага O матрисани қўшиш одатдаги сонларни қўшишдаги нол сони ролини ўйнайди, яъни

$$A + O = A.$$

масалан,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A матрисани λ сонга кўпайтириш деб унинг ҳамма элементларини шу сонга кўпайтиришга айтилади, яъни

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

$m \cdot k$ ўлчамли $A = (a_{ij})$матрисанинг $k \cdot n$ ўлчамли $B = (b_{ij})$ матрисага, кўпайтмаси деб $m \cdot n$ ўлчамли шундай $C = (c_{ij})$матрисага айтиладики унинг c_{ij} элементи A матрисага i-сатри элементларини B матриса j-устунинг мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Матрисалар кўпайтмаси $C = AB$ билан белгиланади. Демак, матрисаларни кўпайтириш учун биринчи кўпайтувчининг устунлари сони, иккинчи кўпайтувчининг устунлари сонига тенг бўлиши талаб қилинади. Шу сабабли, умуман $AB \neq BA$.

Матрисаларни ко;пайтириш ушбу

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

Гуруҳлаш ҳамда

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

Тақсимот хоссасига эга.Хосса ўринли бўлади.

Исталган квадрат матриса A ни мос бирлик E матрисага кўпайтирганда

$$AE = EA = A$$

тенглик ўринли бўлади, масалан

Худди шунга ўхшаш $EA = A$ тенгликни ҳам текшириб кўриш мумкин (буни бажаришни ўқувчига ҳавола қиламиз)

3.Матрисанинг ранги ва уни ҳисоблаш. A $m \times n$ ўлчовли матрисада k сатр ва k та устунини ажратамиз, бунда, k, m ва n сонлардан кичик ёки уларнинг кичигига тенг бўлиши мумкин. Ажратилган сатрлар ва устунларнинг кесишувида ҳосил бўлган k-тартибли детерминантга A ***матрисанинг*** k ***-тартибли минори дейилади.***

Таръриф. A матрисанинг 0 дан фарқли минорласрининг энг юқори тартибига A **матрисанинг минори** дейилади. A матрисанинг ранги $rangA$ ёки $r(A)$ билан белгиланади.

Матриса рангини бевосита ҳисоблашда кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғи келади. Қуйидаги амаллардан фойдаланиб матриса рангини ҳисоблаш қулайроқ. Матрисада: 1)фақат 0 лардан иборат сатри (устуни)ни ўчиришданлардан; 2) иккита сатр (устун)нинг ўринларини алмаштиришдан; 3) бирор сатр (устун)нинг элементларини бирор $\lambda \neq 0$ сонга кўпайтириб, бошқа сатр (устун) мос элементларига қўшиш; 4) матрисани транспонирлашдан, унинг ранги ўзгармайди. Бу амалларга одатда элементар алмаштиришлар дейилади.

4. Тескари матриса ва уни топпиш. A квадрат матриса учун $AB = BA = E$ бирлик матриса бўлса, B квадрат матриса A матрисага ***тескари матриса*** дейилади. Одатда, A матрисага тескари матриса A^{-1} билан белгиланади.

Теорема: A квадрат матриса тескари матрисага эга бўлиши учун A матрисанинг детерминанти 0 дан фарқли бўлиши зарур ва этарлидир. дан фарқли бўлиши зарур ва етарлидир.

A квадрат матриса усчун $\det A \neq 0$ бўлса , унга тескари бўлган ягона матриса A^{-1} мавжуд.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - & - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрисага тескари A^{-1} матриса

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ ------ & --- \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Формула билан топилади. Бунда A_{ij} мос равишда a_{ij} элементларнинг алгебраис тўлдирувчилари ва $\Delta = \det A$.

Чизиқли тенгламалар системасини матрисалар ёрдамида ечиш. Энди матрисалар ёрдамида чизиқли тенгламалар системасини ечишга ўтамиз.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (7)$$

n номаълумли, n та тенгламалр системаси берилган бўлсин.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------ & --- \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

белгилашларни киритамиз. Энди (7) системани матрисаларни кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб,

$$AX = B \qquad (8)$$

кўринишда ёзиш мумкин. $\det A \neq 0$ бўлса, тескари матриса A^{-1} мавжуд ва $A^{-1}AX = A^{-1}B$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, номаълум X матриса $A^{-1}B$ матрисага тенг бўлади, яъни

$$X = A^{-1}B.$$

Бу (7) тенгламалр системасини ечишнинг <u>**матрисавий ёзувини**</u> билдиради.

2-Мавзу: Функциялар ва уларнинг тадбиқлари.
Ҳосила ва унинг тадбиқлари

1. Функциялар ва уларнинг табиий фанлардаги тадбиқлари
2. Ҳосила ва унинг тадбиқлари

1^0. Функция таърифи, берилиш усуллари. Биз 2-маърузада E тўпламни F тўпламга акслантириш

$$f:\ E \to F$$

ни ўрганган эдик.

Энди $E = F$, $F = R$ деб оламиз. Унда ҳар бир ҳақиқий x сонга бирор ҳақиқий й сонни мос қўювчи

$$f:\ F \to R \quad (x \xrightarrow{f} y)$$

акслантиришга келамиз. Бу эса функция тушунчасига олиб келади.

Функция тушунчаси ўқувчига ўрта мактаб математика курсидан маълум. Шуни эътиборга олиб функция ҳақидаги дастлабки маълумотларни қисқарок баён этишни лозим топдик.

Айтайлик, $X \subset R, Y \subset R$ тўпламлар берилган бўлиб, x ва y ўзгарувчилар мос равишда шу тўпламларда ўзгарсин: $x \in X$, $y \in Y$.

1-таъриф. Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор f қоидага кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилган бўлса, X тўпламда **функция берилган** (**аниқланган**) дейилади ва

$$f: x \to y \ \text{ёки}\ y = f(x)$$

каби белгиланади. Бунда X - **функциянинг аниқланиш тўплами** (**соҳаси**), Y - **функциянинг ўзгариш тўплами (соҳаси) дейилади.** x - **эркли ўзгарувчи** ёки **функция аргументи**, й эса **эрксиз ўзгарувчи** ёки **функция** дейилади.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин. $x_0 \in X$ нуқтага мос келувчи y_0 миқдор $y = f(x)$ **функциянинг** $x = x_0$ **нуқтадаги хусусий қиймати** дейилади ва $f(x_0) = y_0$ каби белгиланади.

Айтайлик, $f_1(x)$ функция $X_1 \subset R$ тўпламда, $f_2(x)$ функция эса $X_2 \subset R$ тўпламда аниқланган бўлсин.

Агар

1) $X_1 = X_2$

2) $\forall x \in X_1$ да $f_1(x) = f_2(x)$

бўлса, $f_1(x)$ ҳамда $f_2(x)$ функциялар ўзаро тенг дейилади ва $f_1(x) = f_2(x)$ каби белгиланади.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас M сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун $f(x) \le M$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда юқоридан чегараланган** дейилади. Агар шундай ўзгармас m сони топилсаки, $\forall x \in X$ учун $f(x) \ge m$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда қуйидан чегаралан-ган** дейилади.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда чегараланган** дейилади.

4-таъриф. Агар ҳар қандай $M > 0$ сон олинганда ҳам шундай $x_0 \in X$ нуқта топилсаки,

$$f(x_0) > M$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ **функция** X **тўпламда юқоридан чегараланмаган** дейилади.

5-таъриф. Агар шундай ўзгармас $T\ (T \neq 0)$ сон мавжуд бўлсаки, $\forall x \in X$ учун

1) $x - T \in X$, $x + T \in X$

2) $f(x+T) = f(x)$

бўлса, $f(x)$ **даврий функция** дейилади, T сон эса $f(x)$ **функциянинг даври** дейилади.

6-таъриф. Агар $\forall\, x \in X$ учун $f(-x) = f(x)$ тенглик бажарил-са, $f(x)$ **жуфт функция** дейилади. Агар $\forall\, x \in X$ учун $f(-x) = -f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ **тоқ функция** дейилади.

Элементар функциялар китобхонга ўрта мактаб математика курсидан маълум. Биз қуйида элементар функциялар ҳақидаги асосий маълумотларни баён этамиз.

1^0. Бутун рационал функциялар.

Ушбу

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

кўринишдаги функция бутун рационал функция дейилади. Бунда $a_0, a_1, \ldots, a_n -$ ўзгармас сонлар, $n \in N$. Бу функция $R = (-\infty,\ +\infty)$ да аниқланган.

Бутун рационал функциянинг баъзи хусусий ҳоллари:

а) Чизиқли функция. Бу функция

$$y = ax + b \qquad (a \neq 0)$$

кўринишга эга, бунда a, b ўзгармас сонлар.

Чизиқли функция $(-\infty,\ +\infty)$ да аниқланган $a > 0$ бўлганда ўсувчи, $a < 0$ бўлганда камаювчи: графиги текисликдаги тўғри чизиқдан иборат.

б) Квадрат функция. Бу функция

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

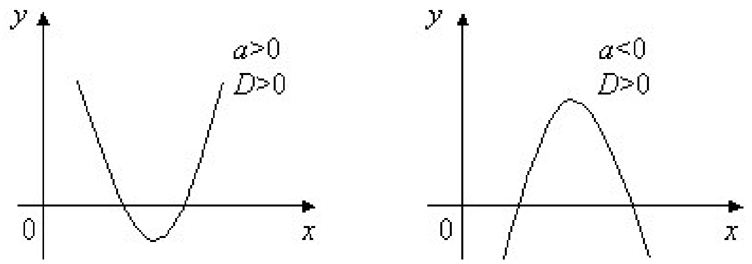
кўринишга эга, бунда a, b, c $-$ ўзгармас сонлар.

Квадрат функция R да аниқланган бўлиб, унинг графиги параболани ифодалайди.

Равшанки,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Параболанинг текисликда жойлашиши a ҳамда $D = b^2 - 4ac$ ларнинг ишорасига боғлиқ бўлади. Масалан, $a > 0$, $D > 0$ ва $a < 0$, $D < 0$ бўлганда унинг графиги 3-чизмада тасвирланган параболалар кўринишида бўлади.



3-чизма.

2⁰. Каср рационал функциялар. Ушбу

$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m}$$

кўринишдаги функция каср рационал функция дейилади. Бунда $a_0, a_1, ..., a_n$ ва $b_0, b_1, ..., b_m$ лар ўзгармас сонлар $n \in N$, $m \in N$. Бу функция

$$X = (-\infty, +\infty) \setminus \{x | b_0 + b_1x + ... + b_mx^m = 0\}$$

тўпламда аниқланган.

Каср рационал функциянинг баъзи хусусий ҳоллари:

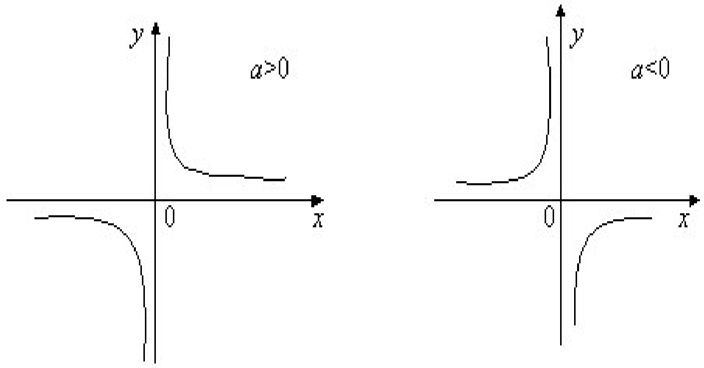
а) Тескари пропорционал боғланиш. У

$$y = \frac{a}{x} \qquad (x \neq 0 \quad a = const)$$

кўринишга эга. Бу функция

$$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = R \setminus \{0\}$$

тўпламда аниқланган, тоқ функция, a нинг ишорасига қараб функция $(-\infty, 0)$ ва $(0, +\infty)$ оралиқларнинг ҳар бирида камаюв-чи ёки ўсувчи бўлади (4-чизма).



4-чизма

б) Каср чизиқли функция. У ушбу

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

кўринишга эга. Бу функция

$$X = R \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \qquad (c \neq 0)$$

тўпламда аниқланган:

Равшанки,

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Демак,

$$y = \frac{\alpha}{x+\beta} + \gamma, \quad \left(\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}, \ \ \beta = \frac{d}{c}, \ \ \gamma = \frac{a}{c} \right).$$

Унинг графигини $y=\frac{a}{x}$ функция графиги ёрдамида чизиш мумкин.

3⁰. Даражали функция. Ушбу

$$y=x^a, \quad (x\geq 0)$$

кўринишдаги функция даражали функция дейилади.

Бу функциянинг аниқланиш тўплами a га боғлиқ. Даражали функция $a>0$, бўлганда $(0, +\infty)$ да ўсувчи, $a<0$ бўлганда камаювчи бўлади. $y=x^a$ функция графиги текислик-нинг $(0,0)$ ва $(1,1)$ нуқталаридан ўтади.

4⁰. Кўрсаткичли функция. Ушбу

$$y=a^x$$

кўринишдаги функция кўрсаткичли функция дейилади. Бунда $a\in R$, $a>0$, $a\neq 1$. Кўрсаткичли функция $(-\infty, +\infty)$ аниқ-ланган, $\forall x\in R$ да $a^x>0$; $a>1$ бўлганда ўсувчи; $0<a<1$ бўлганда камаювчи бўлади.

Хусусан, $a=e$ бўлса, математикада муҳим рол ўйнайди-ган $y=e^x$ функция ҳосил бўлади.

Кўрсаткичли функциянинг графиги Ox ўқидан юқорида жойлашган ва текисликнинг $(0,1)$ нуқтасидан ўтади.

5⁰. Логарифмик функция. Ушбу

$$y=\log_a x$$

кўринишдаги функция логарифмик функция дейилади. Бунда $a>0$, $a\neq 1$.

Логарифмик функция $(0, +\infty)$ да аниқланган, $y=a^x$ функ-цияга нисбатан тескари; $a>1$ бўлганда ўсувчи, $0<a<1$ бўлганда камаювчи бўлади.

Логарифмик функциянинг графиги Oy ўқининг ўнг томонида жойлашган ва текисликнинг $(0,1)$ нуқтасидан ўтади.

6⁰. Тригонометрик функциялар. Ушбу

$$y=\sin x,\quad y=\cos x,\quad y=tgx,\quad y=ctgx,$$
$$y=\sec x,\quad y=\cos ecx$$

функциялар тригонометрик функциялар дейилади.

$y=\sin x,\ y=\cos x$ функциялар $R=(-\infty,+\infty)$ да аниқланган, 2π даврли функциялар $\forall x\in R$ да

$$-1\le\sin x\le 1,\quad -1\le\cos x\le 1$$

бўлади. Ушбу

$$y=tgx,$$

функция

$$X=R\setminus\left\{x\in R \mid x=(2k+1)\frac{\pi}{2};\ \ k=0,\pm1,\pm2,...\right\}$$

тўпламда аниқланган π даврли функция, $\mathrm{ctg}x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}x$ функциялар $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}x$ лар орқали қуйидагича ифодала-нади:

$$ctgx=\frac{1}{tgx},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \cos ecx=\frac{1}{\sin x}.$$

7^0. Гиперболик функциялар. Кўрсаткичли $y=e^x$ функ-ция ёрдамида тузилган ушбу

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

функциялар **гиперболик** (мос равишда **гиперболик синус, гиперболик косинус, гиперболик тангенс, гиперболик катангенс**) функциялар дейилади ва улар қуйидагича

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\quad cthx=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

белгиланади.

8^0. Тескари тригонометрик функциялар. Маълумки, $y=\sin x$ функция R да аниқланган ва унинг қийматлари тўплами

$$Y_f=[-1,\ 1]$$

бўлади.

Агар $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ бўлса, у ҳолда $X=\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ ва $Y_f=[-1,\ 1]$ тўпламларнинг элементлари ўзаро бир қийматли мосликда бўлади.

$y=\sin x$ функцияга нисбатан тескари функция

$$y=arc\sin x$$

каби белгиланади.

Шунга ўхшаш $y=\cos x,\ y=tgx,\ y=ctgx$ функцияларга нис-батан тескари функциялар мос равишда

$$y=\arccos x,\ \ y=arctgx,\ \ y=arcctgx,$$

каби белгиланади.

Ушбу $y=arc\sin x$, $y=arc\cos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$ функция-лар тескари тригонометрик функциялар дейилади.

Ҳосила

1^0. Функция ҳосиласининг таърифи. Мисоллар. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a,b)\subset R$ да берилган бўлиб, $x_0\in(a,b)$, $x_0+\Delta x\in(a,b)$ бўлсин.

Маълумки ушбу

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

айирма $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади.

1-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги ҳосиласи** дейилади ва $\frac{df(x_0)}{dx}$, ёки $f'(x_0)$, ёки $(f(x))'_{x_0}$ каби белгиланади. Демак,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Агар $x_0 + \Delta x = x$ дейилса, унда $\Delta x = x - x_0$ ва $\Delta x \to 0$ да $x \to x_0$ бўлиб, (1) муносабат қуйидаги

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (2)$$

кўринишга келади.

2^0. Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0 - \delta,\ \ x_0) \subset X \ \ (\delta > 0)$ бўлсин.

2-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги чап ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0 - 0)$ каби белгиланади:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Айтайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $(x_0,\ \ x_0 + \delta) \subset X \ \ (\delta > 0)$ бўлсин.

3-таъриф. Агар ушбу

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ **функциянинг** x_0 **нуқтадаги ўнг ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0 + 0)$ каби белгиланади:

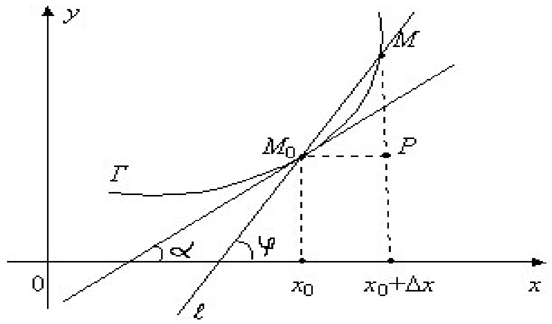
$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Юқорида келтирилган таърифлардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуқтада ўнг $f'(x_0 + 0)$ ҳамда чап $f'(x_0 - 0)$ ҳосилаларга эга ва $f' x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$ тенгликлар ўринли бўлади.

2. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ўнг $f'(x_0+0)$ ҳамда чап $f'(x_0-0)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга ва $f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ тенгликлар ўринли бўлади.

3^0. Ҳосиланинг геометрик ҳамда механик маънолари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу $f(x)$ функция-нинг графиги 5-чизмада тасвирланган Γ эгри чизиқни ифодаласин:



5-чизма.

Бу Γ чизикда $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ нуқталарни олиб, улар орқали ўтувчи l кесувчини қараймиз.

$M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $M \to M_0$ да l кесувчи лимит ҳолати Γ чизиққа M_0 нуқтада **ўтказилган уринма** дейилади.

Равшанки, φ бурчак Δx га боғлиқ: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. $f(x)$ функциянинг графигига M_0 нуқтада ўтказилган уринманинг мавжуд бўлиши учун

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

нинг мавжуд бўлиши лозим. Бунда α–уринманинг OX ўқи-нинг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчак.

M_0MP учбурчакдан:

$$tg\varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиб, ундан

$$\varphi(\Delta x) = arctg\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлиши келиб чиқади. Функция узлуксизлигидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} arctg\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= arctg\left[\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = arctgf'(x_0).$$

Демак, $\Delta x \to 0$ да $\varphi(\Delta x)$ нинг лимити мавжуд ва

$$\alpha = arctgf'(x_0).$$

Кейинги тенгликдан

$$f'(x_0) = tg\alpha$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, функциянинг x_0 нуқтадаги $f'(x_0)$ ҳосиласи урин-манинг бурчак коэффицентини ифодалайди. Бунда уринманинг тенгламаси

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

кўринишда бўлади.

Айтайлик, P нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $s = s(t)$ қонун билан ҳаракат қилсин, бунда $t -$вақт, $s -$ўтилган йўл. Агар вақтнинг t_1 ва t_2 $(t_1 < t_2)$ қийматларидаги ўтилган йўл $s(t_1)$, $s(t_2)$ бўлса, унда ушбу нисбат

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$ вақт оралиғидаги ўртача тезликни ифодалайди.

Қуйидаги

$$\lim_{t_2 \to t_1 + 0}\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

лимит ҳаракатдаги нуқтанинг t_1 вақтдаги оний тезлигини билдиради.

Демак, ҳаракатдаги P нуқтанинг t вақтдаги оний тезлиги $v(t)$, ўтилган $s(t)$ йўлнинг ҳосиласидан иборат бўлади:

$$v(t) = s'(t).$$

4⁰. Ҳосилага эга бўлган функциянинг узлуксизлиги. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $(a, b) \subset R$ да берилган бўлсин.

Теорема. Агар $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

◀ Айтайлик, $f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Таърифга биноан

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

яъни

$$\Delta x \to 0 \text{ да } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$$

бўлади.

Энди

$$\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

деб белгилаймиз.

Равшанки,

$$\Delta x \to 0 \text{ да } \alpha \to 0.$$

Кейинги тенгликлардан топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Одатда, бу тенглик функция орттирмасининг формуласи дейилади. Ундан

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Бу $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканини билдиради. ►

Эслатма. Функциянинг бирор нуқтада узлуксиз бўлиши-дан унинг шу нуқтада чекли ҳосилага эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада узлуксиз, аммо у шу нуқтада ҳосилага эга эмас.

3-Мавзу: Интеграл ва унинг тадбиқлари.Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари

1. Интеграл ва унинг фанлардаги тадбиқлари
2. Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ

Функсиянинг ҳосиласини топиш (топиш амали) уни дифференциаллаш, функсиянинг бирор нуқтада ҳосилага эга бўлишини эса, уни шу нуқтада дифференциалланувчи дейилишини айтиб ўтган эдик.

Кўп ҳолларда функсиянинг ҳосиласига кўра функсиянинг ўзини топиш лозим бўлади. Масалан, ҳаракатдаги моддий нуқтани тезлигига кўра ҳаракат қонунини топишга тўғри келади. Бундай масалалар дифференциаллаш амалига тескари бўлган интеграллаш (интеграллаш амали) тушунчасига олиб келади.

Аниқмас интеграл тушунчаси

Айтайлик, $f(x)$ ва $F(x)$ функсиялари (a,b) да берилган бўлиб, $F(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

1-Таъриф. Агар

$$F'(x)=f(x) \quad (x\in(a,b))$$

бўлса, (a,b) да $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг **бошланғич функцияси** дейилади.

Масалан,

$$f(x)=x^2 \quad (x\in(-\infty,+\infty))$$

функциянинг бошланғич функцияси

$$F'(x)=\frac{x^3}{3} \quad (x\in(-\infty,+\infty))$$

бўлади, чунки

$$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2=f(x).$$

Агар (a,b) да $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлса, уҳолда

$$F(x)+C$$

ҳам $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлади, бунда C ихтиёрий ўзгармас сон.

◁ Маълумки,

$$F'(x)=f(x) \quad (x\in(a,b)).$$

Унда

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$$

бўлиб, $F(x)+C$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси эканини топамиз. ▷

Айтайлик, (a,b) да $F(x)$ ва $G(x)$ функциялари битта $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x)=f(x),$$

$$G'(x)=f(x).$$

Бу тенгликлардан

$$F'(x) = G'(x)$$

бўлиши келиб чиқади. Унда

$$G(x) = F(x) + C$$

бўлади, бунда C ўзгармас сон.

Шундай қилиб, берилган $f(x)$ функциянинг битта бошланғич функцияси $F(x)$ маълум бўлганда унинг бошқа барча бошлснғч функциялари $F(x)$ га ихтиёрий ўзгармас сонни қўшишдан ҳосил бўлади ва

$$F(x) + C$$

ифода $f(x)$ нинг бошланғич функцияларнинг умумий кўринишини ифодалайди.

2-Таъриф. Ушбу $F(x)+C$ ифода $f(x)$ функциянинг **аниқмас интеграли** дейилади ва $\int f(x)dx$ каби белгиланади:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Бунда $\int$ интеграл белгиси, $f(x)$ интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ эса **интеграл остидаги ифода** дейилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int x^6 dx$$

интеграл топилсин.

⊲ Бу аниқмас интеграл шундай функцияки, (аникроғи, шундай функциялар тўпламики) унинг ҳосиласи (тўпламдаги ҳар бир функциянинг ҳосиласи) интеграл остидаги функцияга, яъни x^6 га тенг. Равсянки,

$$F(x) = \frac{x^7}{7}$$

дейилса, унда

$$F'(x)=\left(\frac{x^7}{7}\right)'=\frac{1}{7}\cdot 7x^6=x^6$$

бўлади. Демак,

$$\int x^6dx=\frac{x^7}{7}+C\,.\ \triangleright$$

Кейинчалик, аниқмас интеграл ибораси ўрнига интеграл сўзини ишлатаверамиз.

1-Эслатма. $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғч функцияси бўладиган оралиқ кўрсатилмаган ҳолда оралиқ сифатида функциянинг аниқланиш соҳаси тушунилади.

2-Эслатма. Ҳар бир узлюксиз функциянинг аниқмас интегралининг мавжуд бўлиши кейинчалик кўрсатилади.

Асосий формулалар

Қуйидаги энг содда функциянинг интегралларини келтирамиз:

1. $\int dx=\int 1\cdot dx=x+C$, бунда C – ўзгармас, чунки, $(x+C)'=1$ бўлади.

2. $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ (n\neq 1)$ бўлади, чунки $n\neq 1$ бўлганда

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)'=x^n$$

бўлади. Агар $n=-1$ бўлиб, $x>0$ бўлганда

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C\,,$$

чунки

$$\left(\ln x + C\right)' = \frac{1}{x};$$

$x < 0$ бўлганда

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C,$$

чунки $\left(\ln(-x) + C\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ бўлади. Умуман,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, a \neq 1)$, чунки $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{a^x \cdot \ln a}{\ln a} = a^x$ бўлади.

4. $\int e^x dx = e^x + C$, чунки $\left(e^x + C\right)' = e^x$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, чунки $\left(-\cos x + C\right)' = -\left(-\sin x\right) = \sin x$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$, чунки $\left(\sin x + C\right)' = \cos x$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$, чунки $\left(\arcsin x + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

8. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, чунки $\left(\operatorname{arctg} x + C\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

Шунингдек,

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$,

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$,

11. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$,

12. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$,

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$,

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ бўлади.

Интегралнинг содда ҳоссалари

Аниқмас интегралларни ҳисоблашда кўп фойдаланиладиган ҳоссаларни келтирамиз (*Аниқмас интеграл билан боғлиқ тенгликлар ўзгармас сон аниқлигидаги тенгликлар деб қаралади*):

1) Агар

$$\int f(x) dx = F(x), \quad \int g(x) dx = G(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = F(x) \pm G(x) \tag{1}$$

бўлади.

◁ Равшанки,

$$\int f(x)dx = F(x) \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x),$$

$$\int g(x)dx = G(x) \;\Rightarrow\; G'(x) = g(x).$$

Унда

$$\left[F(x) \pm G(x)\right]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$$

бўлиб, бу тенгликдан

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = F(x) \pm G(x)$$

бўлиши келиб чиқади. ▷

(1) тенглик қуйдагича

$$\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

ёзилиб, у йиғиндининг интеграли интеграллар йиғиндисига тенг бўлиши қоидасини ифодалайди.

2) Агар

$$\int f(x)dx = F(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int kf(x)dx = k \cdot F(x) \tag{2}$$

бўлади, бунда k – ўзгармас сон $(k \neq 0)$.

◁ Равшанки,

$$\int f(x)dx = F(x) \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x).$$

Унда

$$\left(k \cdot F(x)\right)' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$$

бўлиб,

$$\int kf(x)dx = k \cdot F(x)$$

бўлади. ▷

(2) тенглик қуйдагича

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

ёзилиб, у ўзгармас кўпайтувчини интеграл белгиси остидан чиқариш қоидасини ифодалайди.

Мисоллар.1. Ушбу

$$\int\left(10x^7 + 2x^5 - 7\right)dx$$

интеграл ҳисоблансин

◁ Асосий формулалар ҳамда интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\left(10x^7 + 2x^5 - 7\right)dx = \int 10x^7 dx + \int 2x^5 dx - \int 7dx = 10\int x^7 dx + 2\int x^5 dx - 7\int dx =$$

$$= 10\cdot\frac{x^8}{8} + 2\cdot\frac{x^6}{6} - 7x + C = \frac{5}{4}x^8 + \frac{1}{3}x^6 - 7x + C\,. \ \triangleright$$

Интеграллаш усуллари

Ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш усули

Фараз қилайлик, $f(x)$ функциянинг интеграли

$$\int f(x)dx$$

берилган бўлиб, уни ҳисоблаш керак бўлсин.

Баъзан, ўзгарувчи x ни алмаштириш натижасида интегрални ҳисоблаш осон бўлади.

Айтайлик, $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошланғич функцияси бўлсин:

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Унда

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{2}$$

бўлади.

Энди $x = \varphi(t)$ дейлик, бунда $\varphi(t)$ функция узлюксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга.

Ушбу $F(\varphi(t))$ функция $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(t)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлади.

Мураккаб функциянинг ҳосиласини ҳисоблаш қоидасидан ҳамда (1) дан фойдаланиб топамиз:

$$\left[F(\varphi(t))\right]' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Кейинги тенгликдан

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \tag{3}$$

бўлиши келиб чиқади.

(2) ва (3)муносабатлардан $x = \varphi(t)$ бўлганда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \tag{4}$$

бўлишини топамиз.

(4) формула интегралда **ўзгарувчини алмаштириш формуласи** дейилади.

Мисоллар: 1. Ушбу

$$\int (2+3x)^{100} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

⊲ Бу интегралда $2 + 3x = t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$x = \frac{t-2}{3}, \quad dx = \frac{1}{3}dt$$

бўлиб,

$$\int(2+3x)^{100}dx=\int t^{100}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^{100}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{101}}{101}+C=\frac{1}{303}(2+3x)^{101}+C$$

бўлади. ⊳

Эслатма. Иҳтиёрий ўзгармас a да

$$x+a,$$

$$ax \quad (a\neq 0)$$

лар учун

$$d(x+a)=dx,$$

$$d(ax)=adx,\ dx=\frac{1}{a}d(ax) \quad (a\neq 0)$$

бўлиши, баъзи интегралларни ҳисоблашни бирмунча энгиллаштиради. Бу ҳолда

$$\int f(x)dx=\int f(x)d(x+a),$$

$$\int f(x)dx=\frac{1}{a}\int f(x)d(ax)$$

бўлади. Масалан,

$$\int\frac{dx}{x+2}=\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\ln|x+2|+C,$$

$$\int\sqrt{x-3}dx=\int\sqrt{x-3}d(x-3)=\int(x-3)^{\frac{1}{2}}d(x-3)=\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{(x-3)^3}+C$$

,

$$\int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\int \cos 6x d(6x) = \frac{1}{6}\sin 6x + C,$$

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5}\int e^{5x} d(5x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax)}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

(a, b – ўзгармас сонлар, $a \neq 0$).

Ратсионал функсияларни интеграллаш

1°. Содда касрлар ва уларни интеграллаш.

Ушбу

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^n}$$

функсиялар содда касрлар дейилади, бунда A, B, C, a, p, q – ўзгармас сонлар, n – натурал сон ва x^2+px+q – квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга эмас. Бу функсияларнинг интегралларини ҳисоблаймиз.

Равшанки,

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1).$$

Энди

$$J=\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

интегрални ҳисоблаймиз. Интеграл остидаги x^2+px+q квадрат учҳадни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x^2=px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2,$$

бунда $a^2=q-\frac{p^2}{4}>0$. Натижада

$$J=\int\frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}dx$$

бўлади. Бу интегралда

$$x=t-\frac{p}{2}$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$J=\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt$$

бўлади. Кейинги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int\frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+C}{t^2+a^2}dt=B\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=B\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{2\left(t^2+a^2\right)}+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}=B\cdot\frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+$$

$$+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=\frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+\left(C-\frac{p}{2}B\right)\sqrt{\frac{4}{4q-p^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Демак,

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+$$

$$+2\left(C-\frac{p}{2}B\right)\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C \qquad (*)$$

бўлади.

Энди

$$J_n=\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx \quad (n>1)$$

интегрални ҳисоблаймиз. Бу интегрални ҳисоблашда юқоридаги каби белгилаш ва алмаштиришлар бажарамиз.

Натижада

$$J_n=B\int\frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{B}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^n}+$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}=\frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

бўлади, бунда

$$\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

интеграл реккуррент формуладан топилади.

Масалан,

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

бўлади.

2^o. Тўғри касрларни содда касрларга ёйиш

Фараз қилайлик,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

каср ратсионал функсия-тўғри каср берилган бўлсин, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар кўпҳадлар бўлиб, $P(x)$ кўпҳаднинг даражаси $Q(x)$ кўпҳаднинг даражасидаги кичик. Айтайлик, бу тўғри касрнинг маҳражи $Q(x)$ кўпҳад қуйидагича

$$Q(x)=(x-a)^n\cdot(x-b)^m\cdot\ldots\cdot\left(x^2+px+q\right)^r\cdot\left(x^2+\tilde{p}x+\tilde{q}\right)^s$$

ифодалансин, бунда $a,b,...,p,q,\tilde{p},\tilde{q}$ – ҳақиқий сонлар, $n,m,...,r,s$ – натурал сонлар.

У ҳолда

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_m}{(x-b)^m}+\frac{B_{m-1}}{(x-b)^{m-1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-b}+$$

$$+\ldots+\frac{C_rx+D_r}{\left(x^2+px+q\right)^r}+\frac{C_{r-1}x+D_{r-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{r-1}}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+ \qquad (1)$$

$$+\frac{E_sx+F_s}{\left(x^2+\tilde{p}x+\tilde{q}\right)^r}+\frac{E_{s-1}x+F_{s-1}}{\left(x^2+\tilde{p}x+\tilde{q}\right)^{r-1}}+\ldots+\frac{E_1x+F_1}{x^2+\tilde{p}x+\tilde{q}}$$

бўлади, бунда $A_1,...,A_n,B_1,...,B_m,C_r,D_r,...,C_1,D_1,E_s,F_s,...,E_1,F_1$ – ўзгармас сонлар.

(1) тенглик тўғри касрни содда касрларга ёйилишини ифодалайди.

(1) тенгликнинг ўнг томонидаги ўзгармас сонлар қуйидагича топилади:

1) (1) тенгликни ҳар икки томони $Q(x)$ га кўпайтирилади. Натижада маҳраждан қутилиб

$$P(x)=R(x)$$

тенгликка келинади,

2) бу тенгликнинг ҳар икки томонидаги x нинг бир ҳил даражалари олдидаги коеффитсиентлар тенглаштирилади. Натижада ўзгармас сонларни топиш учун тенгламалар системаси ҳосил бўлади,

3) тенгламалар системаси эчилиб, изланаётган ўзгармас сонлар топилади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}$$

каср содда касрларга ёйилсин.

⊲ Аввало берилган касрнинг маҳражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=\left(x^2-1\right)(x-2)=(x-1)(x+1)(x-2).$$

Сўнг (1) муносабатдан фойдаланиб, берилган касрни қуйидаги

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{5-7x}{(x-1)(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

кўринишида ёзамиз. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини $(x-1)(x+1)(x-2)$ га кўпайтириб топамиз:

$$5-7x=A(x+1)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+1)=$$

$$=(A+B+C)x^2-(A+3B)x-2A+2B-C\,.$$

x нинг бир ҳил даражалари олдидаги коеффитсиентларни тенглаштириш натижасида

$$A+B+C=0,$$

$$A+3B=7,$$

$$-2A+2B-C=5$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Уни ечиб топамиз:

$$A=1,\ B=2,\ C=-3.$$

Натижада

$$\frac{5-7x}{x^3-2x^2-x+2}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x-2}$$

бўлади. ▷

3°. Ратсионал функсияларни интеграллаш.

Ушбу

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

ратсионал функсияни қарайлик, бунда $P(x)$ ва $Q(x)$ – кўпҳадлар.

Агар

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

да суратидаги кўпҳаднинг даражаси маҳраждаги кўпҳаднинг даражасидан катта бўлса, унинг суратини маҳражига бўлиб, бутун ратсионал функсия ҳамда тўғри каср йиғиндиси кўринишда қуйидагича ифодалаб олинади:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

У ҳолда

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int R(x)dx+\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$$

бўлади, бунда $\int R(x)dx$ – бутун ратсионал функсиянинг интеграли сифатида осон ҳисобланади, $\int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$ – тўғри касрнинг интеграли, интеграл остидаги тўғри касрни содда касрга ёйиб ҳисобланади.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

⊲ Интеграл остидаги тўғри касрни содда касрлсрга ёямиз:

$$x^3+4x^2+4x = x\left(x^2+4x+4\right) = x\cdot(x+2)^2,$$

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{3x^2+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2},$$

$$3x^2+8 = (A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A,$$

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+2B+C=0, \\ 4A=8 \end{cases}$$

$$A=2,\ B=1,\ C=-10,$$

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}.$$

Натижада

$$\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{d(x+2)}{x+2}-$$

$$-10\int(x+2)^{-2}d(x+2) = 2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C = \ln\left(x^2|x+2|\right)+\frac{10}{x+2}+C$$

бўлади. ⊳

Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

Кўп ҳолларда иррасионал ҳамда тригонометрик функцияларни интеграллаш ўзгарувчиларини алмаштириш билан расионал функцияларни интеграллашга келади.

1) Айтайлик, $f(x)$ функсия x ва унинг турли каср даражалари устида арифметик амаллар бажарилишидан юзага келсин. Масалан,

$$f(x)=\frac{1}{x^{1/2}+x^{1/3}},\ f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}},\ f(x)=\frac{x}{1+\sqrt[5]{x}}$$

Бундай функсияларни интеграллаш

$$x=t^{\alpha}$$

алмаштириш билан ратсионал функсияларни интеграллашга келади, бунда α сон $f(x)$ ифодасидаги x нинг даражаларида қатнашган касрлар маҳражларининг энг кичик умумий карралиси.

Мисоллар 1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$$

интеграл ҳисоблансин.

⊲ Интеграл остидаги функсия

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}=\frac{1}{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot x^{\frac{1}{2}}}$$

ифодасидаги x нинг даражалари $\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{3}$ бўлоб, бу каср маҳражлари 2 ва 3 ларнинг энг кичик умумий карралиси 6 га тенг. Бинобарин

$$x=t^{6}$$

алмаштириши лозим. Унда $dx=6t^{5}dt$ бўлиб

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{\left(1+t^2\right)t^3}$$

бўлади. Кейинги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int \frac{6t^5 dt}{\left(1+t^2\right)t^3} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 6\int \frac{1+t^2-t^2 dt}{1+t^2} = 6\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 6\left(t - \operatorname{arctg} t\right) + C.$$

Демак,

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}} = 6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C. \ \triangleright$$

4) Айтайлик, $f(x)$ функсия x ва $\sqrt{ax^2+bx+c}$ (a,b,c – ўзгармас сонлар) устида арифметик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлсин.

Масалан,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+5}}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x\sqrt{x^2+x+1}}, \quad f(x) = \frac{x}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+4}}.$$

Бундай функсияларни интеграллашда:

а) $a > 0$ бўлганда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - x\sqrt{a} = t$$

алмаштириш билан,

б) $c > 0$ бўлганда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$$

алмаштириш билан,

в) ax^2+bx+c квадрат учҳад ҳақиқий α ва β илдизларга эга бўлганда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t\left(x-\alpha\right)$$

алмаштириш билан раттсионал функсияларни интеграллашга келади.

Мисоллар. 1.Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◁ Бу интегралда

$$\sqrt{x^2+6x+5}-x=t$$

алмаштириш бажарамиз (чунки, $a=1>0$).

Унда

$$\sqrt{x^2+6x+5}-x=t, \quad \sqrt{x^2+6x+5}=x+t,$$

$$x^2+6x+5=x^2+2xt+t^2,$$

$$(6-2t)x=t^2-5,$$

$$x=\frac{t^2-5}{6-2t},$$

$$dx=\left(\frac{t^2-5}{6-2t}\right)'\cdot dt=2\frac{-t^2+6t-5}{\left(6-2t^2\right)}dt, \quad \sqrt{x^2+6x+5}=\frac{-t^2+6t-5}{6-2t}$$

бўлиб,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}=\int \frac{6-2t}{-t^2+6t-5}\cdot 2\frac{-t^2+6t-5}{\left(6-2t^2\right)}dt=\int \frac{2dt}{6-2t}=$$

$$=-\int \frac{d(3-t)}{3-t}=-\ln|3-t|+C$$

бўлади.

Демак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}=-\ln\left|3+x-\sqrt{x^2+6x+5}\right|+C. ▷$$

Тригонометрик функцияларни интеграллаш.

Айтайлик, $f(x)$ функция $\sin x$ ва $\cos x$ лар устида арифметик амаллар бажарилишидан ҳосил бўлсин.

Масалан,

$$f(x)=\frac{1}{2\sin x-\cos x+5},\ f(x)=\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x},\ f(x)=\frac{\sin x+4\cos x}{\sin^2 x}.$$

Бундай функцияларни интеграллаш

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\ \ (x=2\operatorname{arctg}t)$$

алмаштириш билан ратсионал функцияларни интеграллашга келади. Бу алмаштириш ёрдамида $\sin x$, $\cos x$ лар t нинг ратсионал функцияларга айланади:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx=d(2\operatorname{arctg}t)=\frac{2t}{1+t^2}dt.$$

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$$

интеграл ҳисоблансин.

◁ Бу интегралда

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

алмаштириш бажарамиз. Унда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

бўлиб,

$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=\int\frac{dt}{6t+4\left(1-t^2\right)+5\left(1+t^2\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=2\int\left(t+3\right)^{-2}d\left(t+3\right)=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

бўлади. ⊳

Ушбу

$$\int\sin nx\sin mxdx,\ \int\cos nx\cos mxdx$$

ва

$$\int\sin nx\cos mxdx$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда қуйидаги

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right],\\ \cos\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right],\\ \sin\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha-\beta\right)+\sin\left(\alpha+\beta\right)\right]\end{aligned}\tag{1}$$

формулалардан фойданилади.

Мисол. Ушбу

$$\int \sin nx \cdot \sin mxdx$$

интеграл ҳисоблансин.

◁ (1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\int \sin nx \cdot \sin mxdx = \int \frac{1}{2}\left[\cos(n-m) - \cos(n+m)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos(n-m)dx - \int \cos(n+m)dx\right].$$

а) Айтайлик, $n \neq m$ бўлсин. У ҳолда

$$\int \cos(n-m)dx = \int \cos(n-m)d\left((n-m)x\right) \cdot \frac{1}{n-m} = \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x + C,$$

$$\int \cos(n+m)dx = \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + C$$

бўлиб,

$$\int \sin nx \cdot \sin mxdx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right] + C$$

бўлади.

б) Айтайлик, $n = m$ бўлсин. У ҳолда

$$\int \cos(n-m)xdx = \int dx = x + C$$

$$\int \cos(n+m)xdx = \int \cos 2nxdx = \int \cos 2nxd(2nx) \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}\sin 2nx + C$$

бўлиб,

$$\int \sin nx \cdot \sin mxdx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right] + C$$

бўлади. ▷

4-Мавзу: Дифференциал тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Математика ва саънат. Математика ва муҳандислик

1. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг табиийй фанлардаги тадбиқларига оид масалалар ечиш
2. Математика ва саънат. Математика ва муҳандислик

Дифференсиал тенглама тушунчаси

Фан ва техниканинг турли соҳаларида учраб турадиган ба'зи масалалар номаълум функсия ва унинг ҳосилалари қатнашган тенгламаларга келади. Бундай тенгламалар ва уларни ечиш усуллари олий математиканинг муҳим бўлимларидан бири дифференсиал тенгламалар назариясида ўрганилади.

1. Масалалар

1). Идишда 140 л аралашма бўлиб, унинг таркибида 14 кг. туз бор. Бу идишга иккита қувур уланган. Биринчи қувурдан ҳар дақиқада таркибида 1 кг туз бўлган 7 л аралашма узлуксиз равишда қуйилади, иккинчи қувурдан эса шу тезлик билан аралашма оқизилади. Бир соатдан сўнг идишдаги аралашма таркибида қанча туз бўлади?

Вақтни эркли ўзгарувчи сифатида олиб, уни t билан белгилаймиз. У ҳолда аралашмадаги тузнинг миқдори y шу t га боғлиқ бўлади: $y = y(t)$. Маълумки, $t+\Delta t$ пайтда аралашмадаги тузнинг миқдори $y(t+\Delta t)$ бўлиб, Δt вақт оралиғида туз миқдори $y(t+\Delta t) - y(t)$ га ўзгарди.

Масаланинг шартига кўра Δt вақт оралиғида идишга $1 \cdot \Delta t$ кг туз тушади ва идишдан

$$\frac{y(t)}{140} \cdot 7 \cdot \Delta t = \frac{y(t)}{20} \cdot \Delta t \text{ кг}$$

туз чиқиб кетади. Уларнинг фарқи

$$1 \cdot \Delta t - \frac{y(t)}{20} \cdot \Delta t = \left(1 - \frac{y(t)}{20}\right)\Delta t$$

бўлади.

Ҳар дақиқада идишдаги аралашма таркибида туз миқдори ўзгариб турганлиги сабабли

$$y(t+\Delta t)-y(t)\approx\left(1-\frac{y(t)}{20}\right)\Delta t \qquad (1)$$

бўлади. Агар Δt нолга интила борса, (1) тақрибий тенглик қатъий тенгликка айлана боради. Бинобарин,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=1-\frac{y(t)}{20}$$

бўлади. Маълумки,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=y'(t).$$

Демак,

$$y'(t)=1-\frac{y(t)}{20}. \qquad (2)$$

Шундай қилиб, идишдаги аралашма таркибидаги туз миқдорини топиш номаълум функсия $y(t)$ ва унинг ҳосиласи $y'(t)$ қатнашган тенгламани ечишга келади.

2). Ҳаво ҳарорати $0^\circ C$ бўлган муҳитда $T^\circ C$ ҳароратли $(T>0)$ жисм совутилаётган бўлсин. Вақтнинг $t=0$ вақтидан бошлаб жисмнинг совуш қонунияти топилсин.

T ҳарорат t вақтнинг функсияси бўлади: $T=T(t)$. Нютон қонунига биноан $T^\circ C$ ҳароратли жисмнинг совуш тезлиги шу $T^\circ C$ га пропорсионал бўлади. Агар тезлик $T'(t)$ ҳосила эканлигини эътиборга олсак ва пропорсионаллик коеффитсиенти $K(K>0)$ дейилса, унда Нютон қонунига кўра

$$T'(t)=-KT(t) \qquad (3)$$

бўлади.

Шундай қилиб жисмнинг совуш қонунияти $T(t)$ ни топиш, номаълум функция $T(t)$ ва унинг ҳосиласи $T'(t)$ қатнашган тенгламани ечишга келади.

2. Дифференсиал тенглама

Айтайлик, x ўзгарувчи (эркли ўзгарувчи), y эса унинг функцияси $y = y(x)$ бўлиб, $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$, $\ldots$, $y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ лар бу функциянинг биринчи, иккинчи ва ҳ.к. n-тартибли ҳосилалари бўлсин. x ўзгарувчи, номаълум y функция ва унинг турли тартибдаги ҳосилалари қатнашган тенглама **дифференсиал тенглама** дейилади.

Юқоридаги (2) ва (3) тенгламалар дифференсиал тенгламалар бўлади.

$x, y, y', ..., y^{(n)}$ ларни боғловчи ушбу

$$\Phi\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{4}$$

тенглик дифференсиал тенгламанинг умумий кўринишини ифодалайди. (4) дифференсиал тенгламада қатнашган номаълум функция ҳосиласининг юқори тартиби (4) **дифференсиал тенгламанинг тартиби** дейилади.

Масалан,

$$y' + \frac{2}{x}y = \sin x,\ 2xy' - 3y = 0,\ y' - x^2 y + x^3 = 0,\ y' - x = 0$$

биринчи тартибли дифференсиал тенгламалар,

$$y'' + 4y' + 13y = 0,\ y'' + 2y - \cos x = 0,\ y'' = \arcsin x$$

иккинчи тартибли дифференсиал тенгламалар бўлади. Хусусан, биринчи тартибли дифференсиал тенгламанинг умумий кўриниши

$$F(x, y, y') = 0,$$

иккинчи тартибли дифференсиал тенгламанинг умумий кўриниши эса

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

шаклда ёзилади.

3. Дифференсиал тенгламанинг ечими

Умумий кўринишга эга бўлган

$$\Phi\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{4}$$

дифференсиал тенгламани қарайлик.

Фараз қилайлик, $\varphi(x)$ функсия бирор ораликда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, шу ораликда $\varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин.

Агар (4) тенгламадаги y нинг ўрнига $\varphi(x)$, y' нинг ўрнига $\varphi'(x)$, y'' нинг ўрнига $\varphi''(x)$ ва ҳ.к., $y^{(n)}$ нинг ўрнига $\varphi^{(n)}(x)$ қўйилганда (4) тенглама айниятга айланса:

$$\Phi\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\right) \equiv 0,$$

$\varphi(x)$ функсия (4) **дифференсиал тенгламанинг ечими** дейилади.

Масалан, $y = x^2$ функсия ушбу

$$xy' - 2y = 0 \tag{5}$$

биринчи тартибли дифференсиал тенгламанинг ечими бўлади. Ҳақиқатан ҳам,

$$y = x^2, \; y' = 2x$$

ларни (5) тенгламадаги y ва y' лар ўрнига қўйсак, у ҳолда

$$x \cdot 2x - 2 \cdot x^2 \equiv 0$$

бўлади. Айни пайтда

$$y = Cx^2 \quad (C \text{ – ўзгармас сон}) \tag{6}$$

функсия ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

Чунки,

$$y = Cx^2, \; y' = 2Cx$$

ларда (5) тенглама айниятга айланади:

$$x\cdot 2Cx-2\cdot Cx^2\equiv 0.$$

Дифференсиал тенгламанинг (6) кўринишдаги ечими унинг **умумий ечими** дейилади. Бу умумий ечимда ихтиёрий ўзгармас C нинг бирор тайин C_0 қийматидаги C_0x^2 ечим (5) тенгламанинг **хусусий ечими** дейилади.

Демак, дифференсиал тенгламанинг умумий ечимдаги ихтиёрий ўзгармас C нинг турли қийматларида дифференсиал тенгламанинг хусусий ечимлари (улар чексиз кўп бўлади) ҳосил бўлиб, умумий ечим бу хусусий ечимларнинг барчасини ўзида мужассамлаштиради. Бошқача қилиб айтганда умумий ечимдан тенгламанинг барча хусусий ечимлари келиб чиқади.

Аммо ечимга эга бўлган (бу ечимни $\varphi(x)$ дейлик) шундай дифференсиал тенгламалар борки, бу $\varphi(x)$ ечим қаралаётган дифференсиал тенгламанинг умумий ечимдан (ихтиёрий ўзгармас C нинг ҳеч бир қийматидан) келиб чиқмайди. Масалан,

$$y'^2=4y \quad \left(y=y(x)\right) \tag{7}$$

дифференсиал тенгламанинг умумий ечими

$$y=(x+C)^2$$

бўлади. Чунки,

$$y=(x+C)^2,\ y'=2(x+C)$$

лар берилган тенгламани айниятга айлантиради:

$$\left[2(x+C)\right]^2\equiv 4(x+C)^2.$$

Айни пайтда $y=\varphi(x)=0$ функсия (7) дифференсиал тенгламанинг ечими бўлиб (бу равшан), у умумий ечимдан (C нинг ҳеч бир қийматида) бу ечим келиб чиқмайди. Одатда бундай ечим қаралаётган дифференсиал тенгламанинг **махсус ечими** дейилади. Дифференсиал тенгламанинг умумий ечимидан хусусий ечим аргументи x бирор x_0 қийматни қабул қилганда $y(x)$ функсия берилган y_0 қийматни қабул қилсин деган шарт асосида ҳосил қилинади. Бунда x_0, y_0 бошланғич қийматлар дейилади, келтирилган шарт **бошланғич шарт** дейилиб,

$$x = x_0 \text{ бўлганда } y = y_0$$

ёки

$$y\big|_{x=x_0} = y_0$$

каби ёзилади.

Умумий ечимдаги C ўзгармас шу шарт асосида топилади. Масалан, юқорида келтирилган

$$xy' - 2y = 0$$

дифференсиал тенгламанинг умумий ечими

$$y = Cx^2$$

га кўра ушбу

$$y\big|_{x=2} = 8$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими қуйидагича топилади: $x = 2, y = 8$ ларни умумий ечимдаги x ва y ларнинг ўрнига қўйиб,

$$8 = C \cdot 4$$

бўлишни, ундан эса $C = 2$ эканини аниқлаймиз. C нинг бу қийматини умумий ечимдаги C нинг ўрнига қўйиб, изланаётган хусусий ечим

$$y = 2x^2$$

бўлишини топамиз.

Дифференсиал тенгламанинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш дифференсиал тенгламалар назариясининг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади. Одатда бу масала Коши масаласи дейилади.

4. Дифференсиал тенгламалар назариясининг асосий масалалари

Дифференсиал тенгламалар назариясида қуйидаги масалалар асосий масалалар ҳисобланади:

1) Дифференсиал тенглама эчимининг мавжудлиги ва ягоналиги. Дифференсиал тенгламалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини ифодаловчи теоремалар мавжуд. Бундай теоремаларда тенглама ечимининг мавжуд ва ягона бўлишининг етарли шартлари келтирилган. Мавжудлик теоремалари дифференсиал тенгламаларга оид махсус адабиётларда исботланган. Биз кейинги параграфларда мавжудлик теоремаларини келтириш билангина кифояланамиз;

2) Дифференсиал тенгламаларни ечиш. Дифференсиал тенгламаларни ечиш (ечимини топиш), ечиш усулларини аниқлаш энг муҳим масалалардандир. Кўпгина тенгламалар (ҳатто уларнинг ечими мавжудлиги маълум бўлса ҳам) ечилавермайди. Кейинги параграфларда ечиладиган тенгламалар қаралади ва уларни ечиш усуллари баён этилади;

3) Дифференсиал тенгламаларининг татбиқлари. Дифференсиал тенгламаларнинг татбиқ доираси жуда кенг. Фан ва техниканинг турли соҳаларидаги (геометрия, физика, механика, техника, табиатшунослик ва ҳ.к) масалалар дифференсиал тенгламалар ёрдамида ҳал этилади.

Биринчи тартибли дифференсиал тенгламалар

Маълумки, биринчи тартибли дифференсиал тенглама умумий кўринишда қуйидагича

$$\Phi\left(x, y, y'\right) = 0$$

ифодаланади. Бунда, x – эркли ўзгарувчи (функсия аргументи) $y = y\left(x\right)$ – номаълум функсия, y' эса – номаълум функсиянинг ҳосиласи. Бу тенгламани уъ га нисбатан ечилган ҳоли бўлган

$$y' = f\left(x, y\right) \quad \left(\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)\right) \tag{1}$$

тенгламани ўрганамиз. Одатда, (1) тенглама ҳосилага нисбатан ечилган дифференсиал тенглама деб ҳам юритилади. (1) тенглама учун тенгламанинг ечими (умумий ва хусусий ечимлари), бошланғич шарт, Коши масалалари тушунчалари 1-§ да келтирилган тушунчалар каби киритилади.

1. Дифференсиал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги.

Ушбу

$$y' = f(x, y)$$

дифференсиал тенгламани қарайлик. Равшанки, бу тенглама ечимининг мавжудлиги ва унинг ечими $f(x, y)$ функсияга боғлиқ. Айтайлик, функсия текисликдаги ёпиқ тўғри тўртбурчак

$$D = \{(x, y): x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$$

да берилган бўлсин, бунда a ва b лар мусбат сонлар.

Теорема. Агар $f(x, y)$ функсия D да узлуксиз бўлиб, узлуксиз $f'_y(x, y)$ хусусий ҳосилага эга бўлса, у ҳолда (1) дифференсиал тенглама бошланғич шарт

$$x = x_0, \ y = y_0$$

ни қаноатлантирувчи ечимга эга ва у ягона бўлади.

Эслатма. Теоремада келтирилган шарт (1) тенглама ечими мавжуд бўлишининг етарли шартини ифодалайди. Бинобарин, бу шарт бажарилмаганда ҳам (1) тенглама ечимга эга бўлиши мумкин. Юқорида айтиб ўтганимиздек, (1) тенглама ечими $f(x, y)$ функсияга (унинг кўринишига) боғлиқ бўлади. Бу функсиянинг махсус кўринишларида юзага келадиган дифференсиал тенгламаларни келтирамиз:

1) Айтайлик,

$$f(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$$

бўлсин, бунда $\varphi(x)$ ва $\psi(y)$ узлуксиз функсиялар. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \psi(y) \tag{2}$$

кўринишга келади. Уни ўзгарувчилари ажраладиган дифференсиал тенглама дейилади.

2) Айтайлик,

$$f(x,y)=q(x)-p(x)\cdot y$$

бўлсин, бунда $p(x)$ ва $q(x)$ – узлуксиз функсиялар. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$y'+p(x)y=q(x) \quad (y'+py=q) \tag{3}$$

кўринишга келади. Уни чизиқли дифференсиал тенглама дейилади.

3) Айтайлик

$$f(x,y)=q(x)\cdot y^m-p(x)y$$

бўлсин, бунда $p(x), q(x)$ – узлуксиз функсиялар; m – ўзгармас сон.

Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$y'+p(x)y=q(x)y^m \tag{4}$$

кўринишга келади. Уни Бернулли тенгламаси дейилади.

4) Айтайлик,

$$f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

бўлсин. Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{5}$$

кўринишга келади. Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

ифода бирор $F(x,y)$ функсиянинг тўлиқ дифференсиали

$$(dF(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy)$$

бўлиши мумкин. Бундай вазиятда (5) ($dF(x,y)=0$) тенглама тўлиқ дифференсиал тенглама дейилади.

5) Айтайлик, $f(x,y)$ функсия ушбу

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

шартни қаноатлантирсин, бунда t – ихтиёрий сон (бундай ҳолда $f(x, y)$ нол ўлчовли бир жинсли функсия дейилади.) Бу ҳолда (1) тенглама ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

кўринишга келади.Уни бир жинсли дифференсиал тенглама дейилади. Юқорида келтирилган (2), (3), (4) ва (5) дифференсиал тенгламалар ечимга эга (уларнинг ечимга эга бўлиши, $f(x, y)$ функсиянинг кўриниши ҳамда мавжудлик теоремасининг шартларининг бажарилишидан келиб чиқади).

Кейинги параграфларда шундай тенгламаларни ечиш усуллари билан танишамиз.

Бир жинсли дифференсиал тенгламалар

Маълумки,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

дифференсиал тенгламада $f(x, y)$ функсия

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

шартни қаноатлантирса, (1) ни **бир жинсли** дифференсиал тенглама дейилади. Унда $t = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ дейилиши билан

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

бўлиб, қаралаётган (1) дифференсиал тенглама ушбу

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \left(\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \tag{2}$$

кўринишга келади. (2) тенгламани ечиш учун

$$\frac{y}{x}=u \qquad \left(u=u(x)\right)$$

алмаштириш бажарамиз. Натижада

$$y=ux, \quad y'=(ux)'=u+xu'$$

бўлиб, (2) тенгламага қўйилса

$$u+xu'=\varphi(u)$$

яъни

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Кейинги тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлиб, уни интеграллаш билан

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C \quad \left(u=\frac{y}{x}\right)$$

бўлишини топамиз. Бу тенглик берилган бир жинсли дифференсиал тенгламанинг умумий ечимини, $y=xu$ функсияни ифодалайди.

Мисол. Ушбу

$$y'=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

дифференсиал тенгламанинг умумий ечими топилсин.

◁ Берилган тенгламада

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

бўлиб, унинг учун

$$f\left(tx,ty\right)=\frac{\left(tx\right)^2+\left(ty\right)^2}{\left(tx\right)\left(ty\right)}=\frac{t^2\left(x^2+y^2\right)}{t^2xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}=f\left(x,y\right)$$

бўлади. Демак, берилган тенглама бир жинсли тенглама. Агар

$$\frac{y}{x}=u,\quad y=ux$$

дейилса, унда

$$y'=u+xu'$$

бўлиб, берилган тенглама ушбу

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$$

кўринишга келади. Бу тенгламани ечамиз:

$$udu=\frac{dx}{x},$$

$$\int udu=\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{u^2}{2}=\ln|x|+\ln C,$$

$$u^2=2\ln\left(|x|C\right).$$

Энди $y=xu$ эканини эътиборга олиб,

$$\frac{y^2}{x^2}=2\ln\left(|x|C\right),$$

$$y^2=2x^2\ln|xC|,$$

$$y=\pm x\sqrt{2\ln|xC|}.$$

бўлишини топамиз. Бу берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади. ▷

V. КЕЙСЛАР

1-кейс учун мавзу

Тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Матрицалар ва уларнинг тадбиқлари

2-кейс учун мавзу

Векторлар ва уларнинг тадбиқлари

3-кейс учун мавзу

Тенгламалар ва уларнинг табиийий фанлардаги тадбиқлари. Матрицалар ва уларнинг иқтисодиётдаги тадбиқлари

4-кейс учун мавзу

Функциялар ва уларнинг тадбиқлари.
Ҳосила ва унинг тадбиқлари

5-кейс учун мавзу

Функциялар ва уларнинг табиийй фанлардаги тадбиқлари .Ҳосила ва унинг иқтисодиётдаги тадбиқлари

6-кейс учун мавзу

Интеграл ва унинг тадбиқлари.Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари

7-кейс учун мавзу

. Интеграл ва унинг фанлардаги тадбиқлари. Қаторлар ва уларнинг тадбиқлари

8-кейс учун мавзу

Дифференциал тенгламалар ва уларнинг тадбиқлари. Математика ва саънат. Математика ва муҳандислик

9-кейс

Дифференциал тенгламалар ва уларнинг табиийй фанлардаги тадбиқлари. Математика ва саънат

VI. ГЛОССАРИЙ

Биргаликда- чизиқли тенгламалар системасининг ҳеч бўлмаганда битта эчими мавжуд бўлса;

биргаликда бўлмаган система- чизиқли тенгламалар системасининг бирорта ҳам эчими мавжуд бўлмаса;

аниқмас система- чизиқли тенгламалар системаси биттадан кўп эчимларга эга бўлса;

Гаусс усули-номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули;

Крамер усули-минорлар ва алгебраик тўлдирувчилар ёрдамида ҳисоблаш

абел группа - $< G, *, ' >$ группа, агар группанинг “$*$” бинар амали коммутатив булса, яъни хар кандай *а*,*б*$\in$*Г* лар учун *а*$*$*б*=*б*$*$*а* уринли булса, коммутатив ёки абел группа дейилади.

чексиз тартибли группа-$< G, *, ' >$ группанинг *Г* асосий элементлар туплами чекли булса, бу элементлар сонига группанинг тартиби дейилади.

Агар *Г* чексиз булса, у чексиз тартибли группа дейилади.

қисм группа-$<Г, \cdot, ^{-1}>$группанинг қисм группаси деб, бу группанинг хар кандай қисм алгебрасига айтилади.

гомоморфизм-$< G, \cdot, ^{-1} >$группани $< H, \circ, ^{-1} >$ группага (устига) гомоморфизми деб *Г* тыпламни *Ҳ* тупламга (тупламнинг устига) акслантирувчи ва *Г* группанинг асосий амалларини сакловчи, яъни куйидаги;

(1) *Г* дан олинган хар кандай *а*, *б* ларда $h(a \cdot b) = h(a) \circ h(b)$;

(2) Γ дан олинган хар кандай a да $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$

шартларни каноатлантирувчи $\chi:\Gamma \to X$ (устига) акслантиришга айтилади.

циклик-Агар группанинг барча элементлари, шу группанинг муайян бир элементининг даражаларидан (карралиларидан) ҳосил қилинган бўлса бундай группа циклик дейилади ва бу элемент циклик группанинг барпо этувчи элементи дейилади.

Матритсанинг детерминанти - қуйидаги формула билан аниқланувчи сонга айтилади:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \bar{M}_j^1.$$

устки учбурчак (остки учбурчак)-Агар A матритса бош диагоналининг остидаги (устидаги) барча элементлар нолъга тенг бўлса.

учбурчак-Устки ва остки учбурчак матритсалар **учбурчак** матритсалар дейилади.

кўп чизиқли-Агар бир неча аргументли сонли функтсия ҳар бир аргументига нисбатан чизиқли бўлса.

чизиқли қисм фазоси -В чизиқли фазонинг Л қисм тўпламининг ўзи ҳам В да аниқланган векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амалларига нисбатан чизиқли фазо бўлса, Л ва В фазонинг *чизиқли қисм фазоси* дейилади.

дим-фазонинг ўлчови

фазоларнинг *кесишмаси* -Ҳам $Л_1$ га, ҳам $Л_2$ га тегишли бўлган векторлар тўплами $Л_0$ чизиқли қисм фазо бўлишини текшириб кўрш осон; у $Л_1$ ва $Л_2$ қисм фазоларнинг *кесишмаси* дейилади.
матритса -м та сатр ва н та устундан иборат сонлар жадвали
квадрат матритса- матритсанинг сатрлари сони устунлар сонига тенг

нол матритса -барча элементлари нолдан иборат матритса.
диагонал матритса -фақат бош диоганал элементлари нолдан фарқли бўлган квадрат матритса
бирлик матритса -бош диагонал элементлари бирдан иборат бўлган диагонал матритса.
матритсани қўшиш сонга кўпайтмаси- матритсанинг барча элементларини сонга кўпайтмасидан ҳосил бўлган матритса.

скаляр кўпайтма - *Агар В хақиқий чизиқли фазода икки вектор аргументли (х,й) скаляр функтсия учун ушбу*

1) *хар қандай* $x, y \in V$ *учун* $(x, y) = (y, x)$;

2) *хар қандай* $x_1, x_2, y \in V$ *учун* $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2 y)$;

3) *хар қандай* $x, y \in V, \lambda \in R$ *учун* $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

хар қандай нолъдан фарқли $x \in V$ *вектор учун* $(x, x) > 0$ *шартлар бажарилса, у скаляр кўпайтма деб аталади.*

векторларнинг орасидаги масофа - *х ва у векторларнинг орасидаги масофа* (кўпинча метрика хам дейилади) *деб* $\rho(x, y) = | x - y |$ *хақиқий функтсияга айтилади.*

ортогонал-*Агар х ва й векторлар орасидаги бурчак* $\frac{\pi}{2}$ *га тенг бўлса, бу векторлар ортогонал дейилади.*

ортогонал проектсия-V_1 *қисмфазога тегишили бўлмаган* $x \in V$ *вектор учун шундай* $x_1 \in V_1$ *вектор топилсаки,* $x - x_1$ *вектор* V_1 *қисмфазога ортогонал* *бўлса, бундай x_1 вектор x векторнинг V_1 қисмфазога ортогонал проектсияси (сояси) деб аталади.*

к*-тартибли минор-A* матритсада қандайдир *к* та сатр ва *к* та устунларнинг кесишган жойидаги элементлардан ташкил топган к-тартибли матритсанинг детерминанти *к*-тартибли минор дейилади.

алгебраик тўлдирувчиси-*A*-квадрат матритса бўлсин $(n = s)$. Бу ҳолда $M = M_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k}$ минорнинг элементларидан ўтмайдиган сатрлар ва устунларнинг кесишишидан ҳосил бўлган минор *M* га тўлдирувчи минор деб аталади. Ушбу

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k} = (-1)^{i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k} \; M'^{\, j_1 \ldots j_k}_{\, i_1 \ldots i_k}$$

сон эса *M* минорнинг алгебраик тўлдирувчиси дейилади.

Лаплас теоремаси- А квадрат матритсада $i_1, i_2, \ldots, i_k (1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n)$ сатрлар (устунлар) танланган бўлсин. Агар сатрлари (устунлари) шу танланган сатрларда (устунларда) жойлашган мумкин бўлган тартибли минорларни уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб, бу кўпайтмалар барчасининг йиғиндиси олинса, А матритсанинг детерминанти ҳосил бўлади.

элементнинг алгебраик тўлдирувчиси-Лаплас теоремасининг $k = 1$бўлган хусусий ҳолини кўрамиз. Ушбу $i_1 = i,\ j_1 = j$ белгилаш киритамиз. Бу холда M_j^i минор *A* матритсанинг a_{ij} элементига тенг бўлиб, бу минорнинг алгебраик тўлдирувчиси a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси дейилади.

детерминантнинг сатрлар бўйича ёйиш хақидаги теорема-А квадрат матритсанинг бирор сатр (устун) элементларини уларнинг алгебра тўлдирувчиларига кўпайтириб, йиғсак, бу матритсанинг детерминанти хосил бўлади, яъни ҳар қандай $i = \overline{1, n}$ учун

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \det A$$

ва хар қандай $j=\overline{1,n}$ учун

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \det A$$

тенгликлар ўринли.

1. **ортогонал векторлар системаси-**Система векторларнинг хар қандай икки жуфти ўзаро ортогонал бўлса, у ҳолда системага ортогонал векторлар системаси дейилади.
2. **чизиқли эркли система-**Ҳар қандай нолмас векторлардан иборат ортогинал векторлар системаси чизиқли эркли системадир.
3. **ортогоналланган векторлар системаси-**Ҳар бир вектори нормалланган, яъни бирлик кўринишга келтирилган ортогонал системага ортогоналланган векторлар системаси дейилади.
4. **квадратик форма мусбат (манфий)-**Агар хар қандай нолъдан фарқли х вектор учун $q(x)>0\ (q(x)<0)$ тенгсизлик бажарилса, $q(x)$ қўшиш квадратик форма мусбат (манфий) деб аталади;
5. **инертсия қонуни -** Хақиқий квадратик форманинг ихтиёрий каноник базиси векторларидаги мусбат қийматлари сони ва манфий қийматлари сони базиснинг танланишига боғлиқ эмас;

чизиқли форма-Агар $\varphi\ V \to F$ функтсия ушбу:

1) хар қандай $x, y, \in V$ учун $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$;
2) хар қандай $x \in V,\ \lambda \in F$ учун $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$ шартларни қаноатлантирса, у чизиқли форма (чизиқли функтсия, чизиқли функтсионал) деб аталади.

бичизиқли форма -Агар иши вектор аргументли скаляр $\varphi(x,y)$ функтсия $\varphi: V^2 \to F$ хар бир аргументи бўйича чизиқли бўлса, яъни

1) хар қандай $x_1, x_2 \in V$ ва $\lambda, \mu \in F$ учун

$\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda\varphi(x_1, y) + \mu\varphi(x_2, y);$

2) хар қандай $y_1, y_2 \in V$ ва $\lambda, \mu \in F$ учун

$$\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\varphi(x, y_1) + \mu\varphi(x, y_2)$$

шартлар бажарилса, у бичизиқли форма (функтсия, функтсионал) деб аталади.

симметрик -Агар хар қандай $x, y \in V$ векторлар учун $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ тенглик ўринли бўлса, бу бичизиқли форма симметрик деб аталади.

квадратик форманинг матритсаси -Квадратик формани хосил қилувчи ягона симметрик бичизиқли форманинг матритсасига квадратик форманинг матритсаси деб аталади.

Каноник-Агар В даги $\{e_1, ..., e_n\}$ базисда $\varphi(x, y)$ бичизиқли форманинг матритсаси диагонал (яъни $i \neq k$ бўлганда $\varphi(e_i, e_k) = 0$) бўлса, бу базис $\varphi(x, y)$ бичизиқли форма учун каноник деб аталади.

мусбат (манфий)-Агар хар қандай нольдан фарқли **х** вектор учун $q(x) > 0$ $(q(x) < 0)$ тенгсизлик бажарилса, $q(x)$ қўшиш квадратик форма мусбат (манфий) деб аталади.

чизиқли оператор-Чизиқли фазонинг ўзини ўзига чизиқли акслантириши чизиқли оператор деб аталади.

тескари -Агар $f : V \to V$ акслантриш (чизитсли бўлиши шарт эмас) учун шундай $g : V \to V$ акслантириш мавжуд бўлсаки, $fg = gf = e -$бирлик (айний) акслантириш бўлса, г акслантириш ф га тескари деб аталади.

хос вектори (хос сон)-Агар нольдан фарқли х вектор учун шундай $\lambda \in F$ мавжуд бўлсаки, $f(x) = \lambda x$ тенглик бажарилса, х вектор ф чизиқли операторнинг хос вектори ва λ эса бу хос векторга мос хос сон деб аталади.

ўз-ўзига қўшма -Агар A^*=А бўлса, у ҳолда, у ҳолда А чизиқли алмаштириш ўз-ўзига қўшма (ёки Эрмит бичизиқли алмаштириши) дейилдади.

чизиқли алмаштириш Агар $УУ^*=У^*У=Э^1$ бўлса, у ҳолда У унитар чизиқли алмаштириш дейилади.

нормал чизиқли алмаштириш-Агар $АА^*=А^*А$ бўлса, А-нормал чизиқли алмаштириш дейилади.

полйномиал матриса-элементлари бирор λ ҳарфига нисбатан кўпҳадлардан иборат бўлганматрисага айтилади.

матрисанинг даражаси -λ- матрисанинг даражаси деб , матриса таркибига кирган кўпҳадларнинг энг юқори даражасига айтилади.

Эквивалент-Агар элементар алмаштиришларни бир неча марта кетма-кет қўллаш йўли билан бир λ-матрисадан иккинчи λ-матрисани ҳосил қилиш мумкин бўлса , у ҳолда бундай икки λ- матриса – бир –бирига эквивалент λ-матрисалар дейилади.

элементар алмаштиришлари-Биз ҳозир λ-матрисанинг элементар алмаштиришлари деб аталган алмаштиришларга нисбатан каноник кўриниши ҳақидаги масалани кўрамиз.

λ- матрисанинг элементар алмаштиришкари деб , алмаштиришларнинг қуйидаги типларига айтилади.

1°. Матрисанинг қандайдир икки йўли ёки устунларининг ўринларини ўзаро алмаштириш.

2°. Бирон йўлга қандайдир бошқа йўлни бирор ф(λ) кўпҳадга кўпайтириб қўшиш ва шунга ўхшаш , бирон устунга бошқа бир устунни бирор кўпҳадга кўпайтириб қўшиш.

3°. Бирон ёки устунни нолдан фарқли бирор сонга кўпайтириш.

жордан катаги-Агар Ф майдон устидаги квадрат матритсанинг диагоналидаги барча элементлар ўзаро тенг, хар бир сатрда диагоналдаги элементнинг ўнг томонида турган эле-мент бирга тенг ва қолган барча элементлар нолъга тенг бўлса, бундай матритса жордан катаги деб аталади:

$$J_k(\alpha)=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Бу эрдаги a сон жордан катагининг хос сони деб ата-лади.

жордан матритсаси -Агар Ф майдон устидаги квадрат матритсанинг бош диагонали бирин-кетин жойлашган жордан катаклардан иборат ва бу катаклардан ташқаридаги барча элементлар ноль бўлса, бундай матритса жордан матритсаси деб аталади.

VII. ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 592 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 592 б.
4. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб ҳалқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.
5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.
6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.
7. Ўзбекистон Республикасининг “Талим тўғрисида”ги Қонуни.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий талим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.
9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.
10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий талим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.
11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.
12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.
13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш

тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.
14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий талим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.
15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий талим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.
16. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.
17. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts, 2013.
18. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
19. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p.
20. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.
21. Муслимов Н.А ва бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: “Sano-standart”, 2015. – 208 б.
22. Ayupov Sh. A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar. – Nukus, Bilim, 2009. 302 b.
23. Nurjanov O.D. Ápiwayı differenciallıq teńlemeler. – Nókis, Qaraqalpaqstan, 2019. 400 b.

Интернет сайтлари

1. www.edu.uz
2. www.bimm.uz
3. www.ziyonet.uz
4. https://openedu.ru/
5. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/

Қарақалпақ мәмлекетлик университети жанындағы Педагог кадрларды қайта таярлаў ҳәм олардың қәнигелигин жетилистириў аймақлық орайының Жоқары оқыў орынлары тыңлаўлаушыларына арналған «Математиканың тараўларға қолланылыўы» пәнининң оқыў-методикалық комплексине

ПИКИР

Функционаллық анализ, алгебра ҳәм геометрия кафедрасы доценти А.Алауадинов тәрепинен «Математиканың тараўларға қолланылыўы» пәнининң оқыў-методикалық комплекси дүзилиси жағынан Исши оқыў бағдарламасы, модулди оқытыўда қолланылатуғын интерактив тәлим методлары, лекция текстлери, әмелий сабақлар ушын материаллар, тапсырмалар ҳәм оларды орынлаў бойынша усынıслар, кейслер банки, глоссарий, әдебиятлар дизминен ибарат.

Пәнниң исши оқыў бағдарламасы мәмлекетлик тәлим стандартларына тийкарланып таярланған. Онда тыңлаўшылардың билимине қойылатуғын талаплар, пәнниң әмелияттағы орны көрсетип өтилген. Бағдарламада әмелий сабақлардың мазмуны берилген. Бағдарламада улыўма аудиториялық саат - 20, соннан лекция ушын - 8 саат, әмелий сабақлар ушын 12 саатқа мөлшерлеп дүзилген.

Лекция курсында Тенглемелер, матрицалар, векторлар, функциялар, туўынды, интеграл, қатарлар ҳәм дифференциал тенглемелердиң қолланылыўлары хаққында зәрүр теориялық материаллар келтирилген. Ҳәр бир әмелий сабақ ушын материаллар, тапсырмалар ҳәм оларды орынлаў бойынша усыныслар, соның менен бирге жеке тапсырмалар ҳәм тестлер ислеп шығылған.

Курсты машқалалы оқытыў бойынша кейслер ислеп шығылған ҳәм олардың орынланыўы бойынша жобалар керсетилген. Сондай-ақ, курс бойынша глоссарийлер ҳәм әдебиятлар дизими берилген.

Улыўмаластырып айтқанда, «Математиканың тараўларға қолланылыўы» курсы бойынша, дүзилген оқыў-методикалық комплексти жоқары оқыў орынлары тыңлаўшыларын оқытыўда пайдаланыўға болады деп есаплайман.

Пикир билдириўши: **DSc, доц. Ж.Сейпуллаев**

ҚМУ, Математика факультети деканы

BERDAQ ATÍNDAǴÍ QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI
KADRLAR BÓLIMI
"___"__________20___ j.