ҚҚДУ ҲУЗУРИДАГИ
МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

2021

Ў Қ У В – У С Л У Б И Й М А Ж М У А

ЗАМОНАВИЙ ГЕОМЕТРИЯ

Таңирбергенов Садык | ф-м.ф.н., доцент

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

“ЗАМОНАВИЙ ГЕОМЕТРИЯ” МОДУЛИ БЎЙИЧА

Ў Қ У В – У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси йўналиши: Математика

Тингловчилар контингенти: Олий таълим муассасалари профессор-ўқитувчилари

НУКУС – 2021

Модулнинг ўкув услубий мажмуаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил “7”-декабрдаги 648-сонли баённомаси билан маъқулланган ўқув дастури ва ўқув режасига мувофиқ ишлаб чиқилган.

Тузувчи: **С.А. Танирбергенов** – ф. - м.ф.н., доцент

Тақризчи: **Т. К. Курбанбаев –** ф. - м. ф. н.

Ўқув-услубий мажмуа Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети илмий-методик кенгаши (2020 йил “30” декабрдаги 5-сонли баённомаси).

М У Н Д А Р И Ж А

I. ИШЧИ ЎҚУВ ДАСТУРИ

Кириш

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир. “Замонавий геометрия” модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Замонавий геометрия” модулининг мақсади педагог кадрларни инновацион ёндошувлар асосида замонавий геометрия жараёнларини илмий-методик даражада лойиҳалаштириш, математика соҳасидаги илғор тажрибалар, замонавий билим ва малакаларни ўзлаштириш ва амалиётга жорий этишлари учун зарур бўладиган касбий билим, кўникма ва малакаларини такомиллаштириш, шунингдек уларнинг ижодий фаоллигини ривожлантиришдан иборат.

“Замонавий геометрия” модулининг вазифалари:

- “Математика” йўналишида педагог кадрларнинг касбий билим, кўникма, малакаларини такомиллаштириш ва ривожлантириш;
- педагогларнинг ижодий-инновацион фаоллик даражасини ошириш;
- замонавий геометрияни ўқитиш жараёнига замонавий ахборот-коммуникация технологияларини самарали тадбиқ этилишини таъминлаш;
- замонавий геометрияни ўқитишнинг инновацион технологиялари ва илғор хорижий тажрибаларини ўзлаштириш;
- “Математика” йўналишида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларини фан ва ишлаб чиқаришдаги инновациялар билан ўзаро интеграциясини таъминлаш.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар

“Замонавий геометрия” модулини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида тингловчилар:

- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланишни;

- математик масалаларни математик тизимларда ечишни ва стандарт функциялардан фойдаланишни;

- геометрияни ўқитишда унинг тадбиқлари билан тушунтиришни, ҳаётий ва соҳага оид мисолларни;

- математик фанларни ўқитишнинг замонавий усулларини ***билиши*** керак.

- замонавий геометриядан физика ва биология амалий масалаларида кенг фойдаланиш;

- математик фанларни ўқитишда инновацион таълим методлари ва воситаларини амалиётда қўллаш ***кўникмаларига*** эга бўлиши лозим.

- замонавий геометрияни турли фазоларда қўллай олиш;

- геометрияни ўқитиш инновацион жараёнини лойиҳалаштириш ва ташкиллаштиришнинг замонавий усулларини қўллаш ***малакаларига*** эга бўлиши лозим.

- геометрияни турли соҳаларга татбиқ этиш ***компетенциясига*** эга бўлиши лозим.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

"Замонавий геометрия" модули ўқув режадаги "Ўлчов назарияси ва унинг қўлланиши" ва "Математиканинг соҳаларга татбиқлари" модуллари билан чамбарчас боғлиқ ва педагог кадрларнинг умумий тайёргарлик даражасини оширишга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар математиканинг бошқа соҳалардаги кенг тадбиқларининг ўрни ва истиқболли йўналишлари бўйича мос зарурий билим, кўникма ва малакаларни ўзлаштирадилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти:

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат				
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси			Кўчма машғулот
			ам	жумладан		

				Назарий	Амалий машғулот	
1.	Чизиқли фазо. Чизиқли фазо ўлчами. Аффин фазо. Аффин координаталар системаси. Аффин алмаштиришлар ва текисликлари. Бичизиқли форма.	6	6	2	4	
2.	Евклид фазоси. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар. Сирт дифференциал геометрияси. Сирт ички геометрияси. Сирт ташқи геометрияси.	6	6	2	4	
3.	Псевдоевклид фазо. Сферик фазо. Риман геометрияси. Гиперболик фазо. Ярим Евклид фазолар. Ярим гиперболик фазолар.	4	4	2	2	
4.	Иккинчи тартибли сиртлар. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари. Кўпхиллик геометрияси.	4	4	2	2	
	Жами:	**20**	**20**	**8**	**12**	

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

Машғулотлар жараёнида “Ақлий ҳужум” ва “Хотирани чархлаймиз” усуллари қўлланилади.

Ақлий хужум	- (брейнсторминг – мия бўрони), амалий ва илмий

	муаммоларни ечишда жамоа билан маълумот йиғиш
Усулни асосий ғояси	- ғоялар тўплаш, уларни баҳолаш ва таҳлил қилиш, ажратиш. “Ақлий ҳужум”ни олиб борувчининг хатти-ҳаракати учун бу ғоя асосий кўрсатгич бўлиб, иштирокчиларни имконият қадар кўп ғоялар таклиф қилишга ундайди. Хотирани чархлаймиз усули бўйича саволлар экранда намойиш қилинади.
Қоидалари	- имкони борича кўпроқ ғояларни таклиф этиш (жамлаш), уларни талқин қилиш, муаммоларни ечиш ва уларни қайд этиш.
Таълим берувчи	- иштирокчиларни қўллаб-қўвватлайди (имо-ишора, жилмайиш, ҳа-йўқ сўзлари билан); - сўровга киришиб кетишига ёрдам бериш ва психологик тўсқинликни йўқотиш учун, олдинги ёки шу дарсдан кутилмаган, оригинал саволлар бериб машқ ўтказади (блиц сўров). Қатнашчиларни жавобларини таҳлил қилади умумий хулоса беради. - ҳар бир жавоб текширилади - хулосалар чиқарилади
Фидбэйк	- ҳар бир ғояни муҳокама қилиш; - энг тўғри ғояларни қўллаб-кувватлаш

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Чизиқли фазо. Чизиқли фазо ўлчами. Аффин фазо. Аффин координаталар системаси. Аффин алмаштиришлар ва текисликлари. Бичизиқли форма.

- 1. Чизиқли фазо ва унинг ўлчами.
- 2. Аффин фазо.
- 3. Аффин координаталар системаси.
- 4. Аффин алмаштиришлар ва k ўлчовли текисликлар.
- 5. Бичизиқли форма.

1-мавзу бўйича саволлар:

1. Чизиқли фазо ва унинг ўлчами нима?
2. Чизиқли фазо нима?
3. Аффин фазо нима?
4. Аффин координаталар системаси нима?
5. Аффин алмаштиришлар нима?
6. Аффин алмаштиришлар ва k ўлчовли текисликлар нима?
7. Бичизиқли форма нима?

2-Мавзу: Евклид фазоси. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар. Сирт дифференциал геометрияси. Сирт ички геометрияси. Сирт ташқи геометрияси.

- 1. Евклид фазоси.
- 2. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.
- 3. Сирт дифференциал геометрияси.
- 4. Сирт ички ва ташқи геометрияси.

2-мавзу бўйича саволлар:

1. Евклид фазоси нима?
2. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар нима?
3. Сирт дифференциал геометрияси нима?
4. Сирт ички ва ташқи геометрияси нима?

3-Мавзу: Псевдоевклид фазо. Сферик фазо. Риман геометрияси. Гиперболик фазо. Ярим Евклид фазолар. Ярим гиперболик фазолар.

- 1. Псевдоевклид фазо.
- 2. Сферик фазо.
- 3. Риман геометрияси.
- 4. Ярим Евклид ва ярим гиперболик фазолар.

3-мавзу бўйича саволлар:

1. Псевдоевклид фазо нима?

4-Мавзу: Иккинчи тартибли сиртлар. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари. Кўпхиллик геометрияси.

- 1. Иккинчи тартибли сиртлар.
- 2. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари.
- 3. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари.
- 4. Кўпхиллик геометрияси.

4-мавзу бўйича саволлар:

1. Иккинчи тартибли сиртлар нима?
2. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари нима?
3. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари нима?
4. Кўпхиллик геометрияси нима?

1-§. Чизиқли фазо аксиомалари

Бизга ихтиёрий элементлардан ташкил топган L тўплам берилган бўлсин. Тўплам элементларини $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ лар билан белгилаймиз. Шунингдек, ҳақиқий сонлар тўплами $\mathbb{R}$ нинг элементларини грекча $\alpha, \beta, \ldots$ лар билан белгилайлик.

Берилган L тўпламда қўшиш ва сонга кўпайтириш деб аталган амаллар киритилган бўлсин:

1. ҳар қандай икки $a, b \in L$ учун шу L тўпламга тегишли ва бу элементлар *йиғиндиси* деб аталган $a + b$ элемент мос қўйилсин;

2. ҳақиқий сонлар тўпламидан олинган $\alpha \in \mathbb{R}$ ва $a \in L$ учун уларнинг *кўпайтмаси* деб аталган $\alpha \cdot a = a \cdot \alpha \in L$ элемент мос қўйилган бўлсин.

Тўплам элементлари учун киритилган бу амаллар саккизта аксиомани қаноатлантирсин.

I. Ихтиёрий $a, b \in L$ учун

$$a + b = b + a$$

яъни қўшиш амали ўрин алмаштириш (коммутативлик) хоссасига эга бўлсин;

II. Ихтиёрий $a, b, c \in L$ учун

$$(a + b) + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

бу хоссаси ассоциативлик хоссаси деб аталади. Бундан йиғинди амалини қавсларсиз ёзиш мумкинлиги келиб чиқади;

III. Тўпламда 0 – ноль элемент деб аталган ва

$a + 0 = 0 + a = a$

тенгликни қаноатлантирувчи элемент мавжуд бўлсин;

IV. Тенгликнинг ҳар қандай x элементи учун шундай y элемент мавжудки, $x + y = 0$ тенглик ўринли бўлсин. Бу y элемент x га қарама-қарши элемент деб аталади ва $y = -x$ шаклда ёзилади.

V. Тўпламда 1 – бирлик элемент деб аталган ва

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

тенгликни қаноатлантирувчи элемент мавжуд бўлсин;

Қуйидаги аксиомалар учун $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ва $a, b \in L$

VI. $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$ – дистрибутивлик хоссаси;

VII. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ – сонли кўпайтувчи тақсимоти хоссаси;

VIII. $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ – тўплам элементи тақсимоти хоссаси.

Таъриф. Элементлари учун қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари берилган L тўпламда келтирилган саккизта аксиома ўринли бўлса, бу тўплам ***чизиқли фазо*** дейилади.

Келтирилган I-VIII аксиомалар *чизиқли фазо аксиомалари* дейилади.

Эслатамиз биз α, β – сонларни ҳақиқий сонлар тўплами $\mathbb{R}$ дан олдик, шунинг учун чизиқли фазо *ҳақиқий чизиқли фазо* деб ҳам аталади.

Шунингдек, α, β – сонларни $\mathbb{C}$ – комплекс сонлар тўпламидан ҳам олиш ёки ихтиёрий бирор бошқа U – майдон элементи бўлиши мумкин. Бу ҳолларда чизиқли фазо мос равишда *комплекс чизиқли фазо* ёки U*-майдонда аниқланган чизиқли фазо* деб юритилади.

Ушбу ўқув қўлланмада биз асосан ҳақиқий чизиқли фазони кўриш билан чегаралвамиз.

2-§. Чизиқли фазо аксиомаларидан келиб чиқадиган натижалар

Чизиқли фазо элементлари юқорида келтирилган саккизта аксиомани қаноатлантиришидан баъзи натижалар пайдо бўлади.

Қуйида шу натижаларни баён қиламиз.

1. Чизиқли фазода 0 (ноль) элемент битта.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, агар 0_1 ва 0_2 иккита ноль элемент бўлади деб ҳисобласак, I ва III аксиомалардан

$$0_2 = 0_2 + 0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$$

эканлиги, яъни бу элементлар бир хил бўлиши келиб чиқади.

2. Ҳар қандай $x \in L$ учун қарама-қарши элемент ягона.

Исбот. Фараз қилайлик $x + y_1 = 0$ ва $x + y_2 = 0$ бўлсин, яъни y_1, y_2 – иккита қарама-қарши элемент мавжуд бўлсин. У ҳолда I-IV аксиомалардан

$$y_1 = y_2 + 0 = y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = (x + y_2) + y_1 = 0 + y_1 = y_1$$

демак, $y_1 = y_2$ тенгликни ҳосил қиламиз.

3. Ҳар қандай $x \in L$ нинг 0 (ноль) га кўпайтмаси 0 га тенг.

Исбот. Берилган $x \in L$ нинг қарама-қарши элементи y бўлсин. II, V ва VII аксиомаларни қўллаб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз

$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + (x + y) = (0 + 1) \cdot x + y = x + y = 0.$

4. Ҳар қандай $x \in L$ нинг -1 га кўпайтмаси қарама-қарши элементни беради, яъни $(-1) \cdot x = -x$.

Исбот. Бу натижани исбот қилиш учун $x + (-1) \cdot x = 0$ эканини кўрсатиш керак. Ҳақиқатан ҳам, 3-натижа ҳамда V ва VII аксиомалардан

$x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$

эканлиги келиб чиқади.

5. Чизиқли фазо 0 элементини ихтиёрий $\alpha \in L$ сонига кўпайтмаси 0 элементни беради.

Исбот. Хақиқатан ҳам,VI аксиома ва 3-натижага кўра

$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 \cdot x) = (\alpha \cdot 0) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

Шунингдек, бу натижадан нолга тенг бўлмаган элементнинг $\alpha \neq 0$ га кўпайтмаси нолга тенг бўлмаган элемент бўлишни ҳосил қиламиз.

Чизиқли фазода йиғиндидан фойдаланиб элементлар айирмасини киритиш мумкин.

Икки a ва b элемент айирмаси $a - b$ деб, a элемент билан b элементга қарама-қарши элемент йиғиндисига айтилади

$$a - b = a + (-b).$$

Элементлар айирмаси мавжуд ва ягона бўлишини келтирилган натижалардан фойдаланиб исбот қилиш мумкин.

Чизиқли фазо аксиомалари ва келтирилган натижалардан фойдаланган ҳолларимизда буни алоҳида таъкидлаб ўтмаймиз. Шу билан бирга бу параграфларга кўрсатма (ҳавола) келтирмаймиз.

3-§. Чизиқли фазога мисоллар

Чизиқли фазо ихтиёрий тўпламда киритилган қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари ҳамда бу амаллар қаноатлантириши зарур бўлган саккизта аксиома орқали аниқланади. Бунда тўплам элементлари чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Биз баён этилиши содда бўлиши ва кейинчалик геометрик образлар билан боғлиқ эканини ҳисобга олиб, асосан чексиз кўп элементли тўпламлардан ҳосил бўлган чизиқли фазолар билан танишамиз.

Мисол 1. Фақат битта элементдан ташкил топган тўплам. Тўплам элементи қандай бўлишидан қатъий назар уни θ – элемент деб ҳисоблаймиз. Бунда θ элементни ўзига қўшилгани ҳам ноль ва ҳар қандай сонга кўпайтмаси ҳам нолга тенг бўлишини ҳисобга олиб, келтирилган саккиз аксиоманинг бажарилишини кўрсатиш мумкин.

Демак, битта элементдан иборат бўлган тўплам ҳам чизиқли фазо бўлиши мумкин.

Мисол 2. Қаторлари сони m та, устунлари сони n та бўлган матрицалар тўплами $L(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix}$$

a_{ij} – ҳақиқий сонлар.

Бу тўплам чизиқли фазо ташкил этади. Бунда барча мос элементлари ўзаро тенг бўлган матрицалар ўзаро тенг, яъни бир хил матрица деб қаралади. $A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ матрицалар йиғиндиси $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ шаклда, $A = (a_{ij})$ матрицани α сонга кўпайтмаси $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$ шаклда аниқланиб, шу $(m \times n)$ ўлчовли матрицалар тўпламига тегишли бўлади. Шунингдек, аниқланган йиғинди ва сонга кўпайтириш амаллари юқоридаги саккизта аксиомани қаноатлантиришини кўрсатиш мумкин.

Чизиқли матрица фазолардан квадрат матрица, йўл матрица ва устун матрицалар алоҳида аҳамиятга эга.

Мисол 3. $[0;1]$ – кесмада аниқланган узлуксиз $y = f(x)$ функциялар тўплами.

Ҳақиқатан ҳам, бу тўплам чизиқли фазо бўлади. Чунки $[0;1]$ – кесмада аниқланган узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси ва ўзгармас сонга кўпайтмаси ҳам шу тўпламга тегишли бўлади. Бу амалларнинг чизиқли фазо аксиомаларини қаноатлантиришини исбот қилишни ўқувчи учун машқ сифатида қолдирамиз.

4-§. Чизиқли комбинация ва чизиқли боғлиқлик

Бизга L чизиқли фазо берилган бўлиб, $a,\ b,\ c, \dots, g$ шу фазо элементлари ва $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \dots, \omega$ – ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлсин. Агар берилган элементларни мос сонларга кўпайтмалари шу чизиқли фазога тегишли бўлиши ҳамда уларнинг йиғиндиси ҳам шу чизиқли фазога тегишли эканини ҳисобга олсак,

$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \ldots + \omega \cdot g \qquad (1.4.1)$$

элемент ҳам шу чизиқли фазонинг элементи бўлади.

Таъриф. $(1.4.1)$ формула билан аниқланган $x \in L$ элемент $a,\ b,\ c, \dots, g$ элементларнинг ***чизиқли комбинацияси*** деб аталади.

Баъзан x элемент $a,\ b,\ c, \dots, g$ элементлар орқали чизиқли ифодаланган деб ҳам аталади.

Табиийки, $(1.4.1)$ комбинацияда x нолдан фарқли элемент бўлса, $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \dots, \omega$ лардан камита биттаси нолдан фарқли бўлиши керак.

Таъриф. $(1.4.1)$ чизиқли комбинацияда $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \dots, \omega$ лардан камида биттаси нолдан фарқли бўлганда x ноль элемент бўлса, яъни

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \ldots + \omega \cdot g = 0$$

ва

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots + \omega^2 \neq 0$$

бўлса, $a,\ b,\ c, \dots, g$ – элементлар ***чизиқли боғлиқ элементлар*** деб аталади.

Шунингдек, аксинча $(1.4.1)$ комбинация $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \omega = 0$ бўлгандагина $x = 0$ бўлса, $a,\ b,\ c, \dots, g$ – элементлар ***чизиқли эркли элементлар*** дейилади.

Чизиқли эркли ва чизиқли боғлиқ элементларнинг баъзи хоссалари билан танишиб чиқамиз.

Чизиқли фазодан олинган ҳар қандай элементлар тизими чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эркли бўлиши шарт. Агар $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ элементларни танлаб олсак, улар чизиқли эркли ёки чизиқли боғлиқ бўлади.

1-хосса. Агар $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ элементларнинг бирор қисми чизиқли боғлиқ бўлса, бу элементлар ҳам чизиқли боғлиқ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, элементлардан $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ $(k < m)$ лар чизиқли боғлиқ бўлсин. Демак, α_i $\left(i = \overline{1,k}\right)$ лардан камида биттаси нолдан фарқли сон топиладики

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = 0$$

тенглик ўринли бўлади.

Бунда $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \ldots + 0 \cdot a_m = 0$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Бу тенгликда α_i лардан камита биттаси нолдан фарқли. Бу эса $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ – элементларнинг чизиқли боғлиқ эканини кўрсатади.

2-хосса. Агар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементлар чизиқли эркли бўлса, бу тўпламдан олинган ихтиёрий қисм тўплам элементлари ҳам чизиқли эркли бўлади.

Бу хоссанинг исботи аввалги хоссадан келиб чиқади.

3-хосса. Агар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементлар чизиқли боғлиқ бўлса, улардан ҳеч бўлмаганда биттаси қолганлари орқали чизиқли ифодаланади.

Ҳақиқатан ҳам $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементлар чизиқли боғлиқ бўлса, ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлган $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ сонлар мавжудки

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_m \cdot a_m = 0$$

тенглик ўринли бўлади. Чизиқли боғлиқликнинг таърифига кўра айтайлик $\alpha_1 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} a_m$$

тенгликни ҳосил қилиш мумкин. Бу эса a_1 – элементни бошқа элементлар орқали чизиқли ифода этилишини кўрсатади.

Келтирилган 3-хосса ўз ўрнида қуйидаги хоссани келтириб чиқаради.

4-хосса. Агар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементлардан бирортаси бошқалари орқали чизиқли ифодаланса, бу элементлар чизиқли боғлиқ бўлади.

Бу хосса чизиқли комбинацияда элементларни тенгликнинг бир томонига ўтказиш йўли билан исботланади.

Ҳақиқатан ҳам, агар a_1 элемент қолган элементлар орқали чизиқли ифодаланган бўлса, яъни

$$a_1 = \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + \ldots + \alpha_m \cdot a_m$$

ифодада барча элементларни тенгликнинг бир томонига ўтказиб

$$1 \cdot a_1 + (-\alpha_2) \cdot a_2 + (-\alpha_3) \cdot a_3 + \ldots + (-\alpha_m) \cdot a_m = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда a_1 элемент коэффитциенти $\alpha_1 = 1$. Чизиқли боғлиқлик шарти бажарилди.

5-§. Чизиқли фазо ўлчами. Базис

Чизиқли фазода ихтиёрий олинган элементларнинг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эркли бўлиши мумкинлиги билан 4-§ да танишган эдик.

Ихтиёрий икки a ва b элементлардан бири иккинчисини ўзгармас сонга кўпайтириш натижасида ҳосил бўлса, яъни $a = k \cdot b$ $(k \neq 0)$ ўринли бўлса, бу элементлар чизиқли боғлиқ бўлади.

Худди шунга ўхшаш чизиқли боғлиқ бўлмаган икки a ва b элементлар ва уларнинг алгебраик йиғиндиси бўлган $c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ элемент ўзаро чизиқли боғлиқ бўлишини кўришимиз мумкин.

Таъриф. Агар L чизиқли фазода n та чизиқли эркли элемент мавжуд бўлиб, ихтиёрий $(n+1)$-элемент чизиқли боғлиқ бўлса, чизиқли фазо ***n-ўлчовли чизиқли фазо*** деб аталади.

Бунда n – чизиқли фазонинг ўлчами деб аталади.

Умуман айтганда, фазо ўлчами n – чекли. Аммо ўлчами чексиз бўлган чизиқли фазолар ҳам мавжуд. Биз бу адабиётда фақат чекли ўлчамли фазоларни ўрганамиз.

Агар L_n – n-ўлчовли чизиқли фазо бўлса, унда роппа-роса n та чизиқли эркли элемент мавжуд бўлар экан.

Таъриф. Агар L_n чизиқли фазода $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – чизиқли эркли элементлар мавжуд бўлиб, фазонинг бошқа x элементлари $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ёрдамида чизиқли ифодаланса, яъни

$$x = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots \alpha_n \cdot a_n \qquad (1.6.1)$$

бўлса, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – элементлар тўплами L_n чизиқли фазонинг ***базиси*** деб аталади.

Келтирилган (1.6.1) ёйилмадаги $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ сонлар x элементнинг шу базисдаги ***координаталари*** дейилади.

Мисол. Иккинчи тартибли квадрат матрицалардан иборат чизиқли фазонинг базис элементларини топинг.

Ечиш. Иккинчи тартибли квадрат матрицани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрицалар тўпламининг чизиқли фазо ташкил қилиши билан 3-§ да танишган эдик.

Энди шу фазонинг ўлчами ва базис элементлари билан танишамиз. Ушбу

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицалар иккинчи тартибли квадрат матрицалар тўпламида базис элементни ташкил этади.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий берилган иккинчи тартибли квадрат матрицани

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

шаклда ёзиш мумкин.

Базис элементлари сони тўртта бўлгани учун иккинчи тартибли матрицалар тўрт ўлчовли чизиқли фазо бўлар экан.

6-§. Аффин фазоси

Бизга бирор $\mathcal{A}$ тўплам берилган бўлсин, бу тўплам элементларини нуқталар деб атаймиз ва уларни лотин алифбосининг бош ҳарфлари $A, B, \dots, M, \dots$ билан белгилаймиз. Шунингдек, бизга L – чизиқли фазо ҳам берилган бўлсин.

Берилган $\mathcal{A}$ тўпламдан олинган икки A ва B нуқтага L – чизиқли фазодан битта x элементни $x = \overline{AB}$ шаклда мос қўямиз ва бу мосликни *вектор* деб атаймиз. Бу ерда $\overline{AB}$ – L-чизиқли фазо элементининг янгича белгиланиши ва вектор деб аталишидир. Нуқталардан биринчисини *векторнинг боши*, иккинчисини *векторнинг охири* ёки *учи* деб атаймиз.

Таъриф. Агар $\mathcal{A}$ ва L тўплам элементлари ўртасида ўрнатилган мослик ушбу икки аксиомани қаноатлантирса

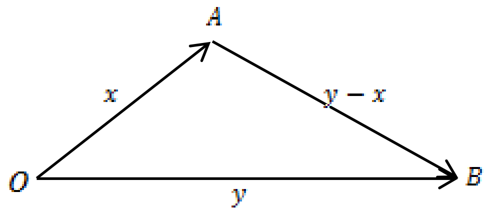
1. ҳар қандай $A \in \mathcal{A}$ ва $x \in L$ учун ягона $B \in \mathcal{A}$ мавжуд ҳамда $x = \overline{AB}$ бўлади;

2. $\mathcal{A}$ тўпламнинг ихтиёрий учта A, B ва C элементлари учун $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ бўлса, $\overline{AC} = x + y$ ёки $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ бўлади,

у ҳолда $\mathcal{A}$ – тўплам ***аффин вектор фазо*** деб аталади.

Бундан буён биз қисқалик учун аффин вектор фазони *аффин фазо* деб атаймиз.

Келтирилган таърифдан ҳар қандай L – чизиқли фазони аффин фазоси деб аташ учун фазонинг элементларини нуқталар деб ва икки a, b элементга шу элементлар айирмаси $b - a$ элементни мос қуйиб, уни вектор деб аташ кифоя экан. Бунда чизиқли фазо элементи x O (ноль) ва A нуқтага мос келувчи $x = \overline{OA}$ вектор бўлади (1.6.1-чизма).



1.6.1-чизма.

O – нуқта аффин фазосида *координаталар боши* деб аталади ва чизиқли фазонинг θ элементига мос келади.

Демак, ҳар қандай аффин фазони координаталар боши O элементга мос келган чизиқли фазо сифатида қараш ҳам мумкин экан. Бу ҳолда чизиқли фазо элементи $x = \overline{OA}$ вектор бўлади.

Шунинг учун ҳам адабиётларда чизиқли вектор фазо атамаси ёки чизиқли чизиқли фазо элементларини вектор деб аташлар ҳам учраб туради.

Биз эса аффин вектор фазоси тушунчасини киритишдагина тартибланган икки нуқтани вектор деб атадик. Бундай усулни танлашимизга сабаб, чизиқли фазо кенгроқ тушунча бўлиб, унинг элементлари бизга геометрияда одат бўлган "*нуқта*", "*кесма*" ва "*вектор*" атамаларидан тубдан фарқ қилиши мумкин эканлигидадир.

Демак, биз ушбу адабиёт кўламида аффин фазоси чизиқли фазо элементлари янги икки аксиомани қаноатлантирувчи фазо деб қараймиз. Фазо элементларини эса "*нуқта*" ва "*вектор*" деб атаб, уларни элементар геометриядаги каби тасаввур қиламиз,яъни векторни йўналтирилган кесма сифатида қабул қиламиз.

Энди аффин фазосига тегишли содда хоссалар билан танишиб чиқамиз.

Теорема 1. Аффин фазосининг устма-уст тушган нуқталарига 0 (ноль) вектор мос келади.

Исбот. Аффин фазосининг ихтиёрий $A \in \mathcal{A}$ нуқтасига одатда $x = \overline{OA}$ вектор мос келади. $\overline{AA} = z$ деб белгилаб олсак, у ҳолда аффин фазоси таърифининг иккинчи аксиомасига кўра

$$\overline{OA} - \overline{OA} = \overline{AA} \text{ ёки } x - x = \overline{AA} = 0.$$

Демак, $\overline{AA} = z = 0$.

Теорема 2. Агар $\overline{AB} = x$ бўлса, $\overline{BA} = -x$ бўлади.

Исбот. $\overline{BA} = y$ бўлсин. Аффин фазоси таърифининг иккинчи аксиомасига кўра

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} \text{ ёки } x + y = 0.$$

Бундан $\overline{BA} = y = -x$ эканлиги келиб чиқади.

Изоҳ. Ушбу қўлланмада ўқувчини ноевклид фазолар геометрияси билан таништириш асосий мақсад бўлгани учун, аффин фазосини аниқлашда киритилган аксиомаларнинг элементар геометрия фанидаги қандай аксиомаларга мазмунан мос келишига тўхталиб ўтмоқчимиз.

Биринчи аксиома ҳар кандай A нуқта ва x вектор учун ягона $\overline{AB} = x$ вектор мавжудлиги ҳақида бўлиб, бунда B нуқта ҳам шу аффин фазосига тегишли бўлиши талаб этилади. Бу элементар геометриядаги, яъни Евклид аксиомаларидаги нурда ихтиёрий узунликда кесма қўйиш мумкинлиги ҳақидаги аксиома мазмунини беради.

Иккинчи аксиома эса ихтиёрий учта нуқтадан ягона текислик ўтказиш мумкин деган маънодаги аксиомага мос келади.

7-§. Аффин фазо ўлчами. Аффин координаталар

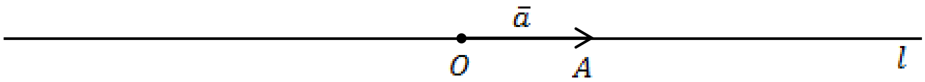
Маълумки, биз аффин фазосини чизиқли фазо сифатида кўрдик. Чизиқли фазо учун фазо ўлчами деган тушунча киритилган, яъни ўлчам ундаги чизиқли эркли элементлар сони билан аниқланар эди. Шунингдек, аффин фазосида чизиқли фазо элементига координаталар бошидан чиқувчи вектор мос келар эди. Бундан чизиқли эркли элементга чизиқли эркли вектор мос келади деб ҳисоблаш мумкин.

Таъриф. Аффин фазода чизиқли эркли n та вектор мавжуд бўлиб, ҳар қандай $(n+1)$ та вектор чизиқли боғлиқ бўлса, аффин фазо ***n-ўлчовли аффин фазо*** дейилади ва $\boldsymbol{A_n}$ билан белгиланади.

Энди баъзи бир содда аффин фазолар билан танишиб чиқайлик.

Теорема 1. Тўғри чизиқ – бир ўлчовли аффин фазо.

Исбот. Бизга бирор l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Аввало l тўғри чизиқнинг нуқталари тўплами бир ўлчовли чизиқли фазо ташкил қилишини кўрсатамиз. Бунинг учун тўғри чизиқда ихтиёрий O – нуқтани координаталар боши деб белгилаб оламиз (1.7.1-чизма).



1.7.1-чизма.

Сўнгра ихтиёрий $A \in l$ нуқта олиб $\overline{OA} = \bar{a}$ вектор киритамиз. Энди эса тўғри чизиқда ётган ихтиёрий векторни L тўплам элементи деб атаймиз ва уни бир ўлчамли чизиқли фазо эканлигини кўрсатамиз. Бу масалада элементлар чизиқли фазо ташкил этиши, яъни чизиқли фазонинг 8 та аксиомасини қаноатлантиришини кўрсатиш унча мураккаб эмас. Бу фазонинг ўлчами бирга тенглиги $\bar{a}$ вектор берилган деб олганимизда, ҳар қандай l тўғри чизиққа тегишли $\bar{b}$ вектор учун $\bar{b} = k \cdot \bar{a}$ $(k \neq 0)$ тенглик ўринли эканлигидан келиб чиқади. Бу тенглик $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг чизиқли боғлиқ эканини билдиради.

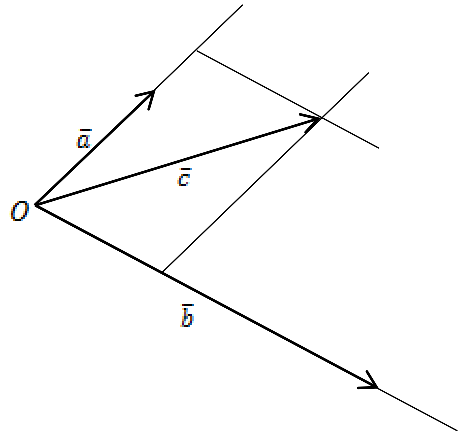
Демак, тўғри чизиқда битта чизиқли эркли вектор (элемент) мавжуд, аммо ихтиёрий икки вектор чизиқли боғлиқ.

Тўғри чизиқда аффин фазоси аксиомалари ўринли эканлигини кўрсатишни ўқувчининг ўзига қолдирамиз.

Теорема 2. Текислик – икки ўлчовли аффин фазодир.

Исбот. Бизга α текислик берилган бўлсин. Бу текисликда ихтиёрий икки коллинеар бўлмаган $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларни оламиз, яъни $\bar{b} \neq k \cdot \bar{a}$. Бу шарт $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг чизиқли эркли эканини билдиради. Энди α текисликка тегишли ихтиёрий учинчи $\bar{c}$ векторни оламиз ва $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторларнинг чизиқли боғлиқ эканлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторларнинг боши O нуқтада бўлсин деб ҳисоблаймиз (1.7.2-чизма).



1.7.2-чизма.

Агар $\bar{c}$ вектор учидан $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар йўналишига параллель тўғри чизиқлар ўтказиб, уларни $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторлар йўналишидаги тўғри чизиқлар билан кесишмасини қарасак, томонлари $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторлар йўналишидаги параллелограммни ҳосил қиламиз. Параллелограммнинг томонларидаги векторлар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларга коллинеарлигидан

$$\bar{c} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, текисликда икки чизиқли эркли вектор мавжуд, аммо ҳар қандай учта вектор чизиқли боғлиқ экан. Бу текислик – икки ўлчовли аффин фазо эканини кўрсатади.

Биз фақат текисликни чизиқли фазо сифатида ўлчами иккига тенглигинигина кўрсатдик. Унинг чизиқли фазо ва аффин фазоси аксиомаларини қаноатлантириши билан элементар геометрияда танишгансиз.

Бизга n-ўлчовли аффин фазо A_n берилган бўлиб, $e_1 = \overline{OE_1}$, $e_2 = \overline{OE_2}$, …, $e_n = \overline{OE_n}$ векторлар чизиқли эркли векторлар бўлсин, яъни

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = 0$$

фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ ҳолдагина ўринли бўлсин.

Ихтиёрий $\bar{a} \in A_n$ векторни қарайлик.

Аффин фазо ўлчами таърифига кўра, $\{\bar{a}, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторлар чизиқли боғлиқ векторлар тўплами бўлади.

Демак, ҳеч бўлмаганда биттаси нольдан фарқли $\{k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ сонлар учун

$$k_0 \cdot \bar{a} + k_1 \cdot e_1 + k_2 \cdot e_2 + \ldots + k_n \cdot e_n = 0 \qquad (1.7.1)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу тенгликда $k_0 \neq 0$ бўлиши шарт. Акс ҳолда, яъни $k_0 = 0$ бўлиши $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ларнинг чизиқли боғлиқ бўлишига олиб келади.

Келтирилган (1.7.1) тенгликни $k_0 \neq 0$ га бўлиб

$$\bar{a} = -\frac{k_1}{k_0} \cdot e_1 - \frac{k_2}{k_0} \cdot e_2 - \ldots - \frac{k_n}{k_0} \cdot e_n$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $x_i = -\frac{k_i}{k_0}$ алмаштиришни амалга оширсак,

$$\bar{a} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенглик $\bar{a}$ векторнинг $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторлар орқали чизиқли ёйиш мумкин эканлигини кўрсатади.

Демак, A_n да $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – чизиқли эркли векторлар бўлса, A_n нинг ихтиёрий векторини бу векторлар орқали чизиқли ёйиш мумкин экан.

Бунда $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – ***базис векторлар***, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – сонлар эса, $\bar{a}$ векторнинг шу базисдаги ***аффин координаталари*** деб аталади. Қисқалик учун кўпинча

$$\bar{a}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n$$

белгилаш ишлатилади.

Теорема 3. Базис векторга тегишли e_i вектор $(0,0,0,\ldots,0,i,0,\ldots,0)$ i-ўринда 1 ва бошқа ўринда 0 координатага эга.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам e_i базисга тегишли векторнинг базис орқали ёйилмаси

$$e_i = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_i \cdot e_i + \ldots + x_n \cdot e_n$$

бўлсин. Бундан

$$x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + (x_i - 1) \cdot e_i + \ldots + x_n \cdot e_n = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдаги $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторлар базис векторлар бўлгани учун, бу тенглик фақат

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_i - 1 = \ldots = x_n = 0$$

ҳолдагина ўринли бўлиши мумкин. Бу эса

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$$

ва $x_i = 1$ эканини кўрсатади.

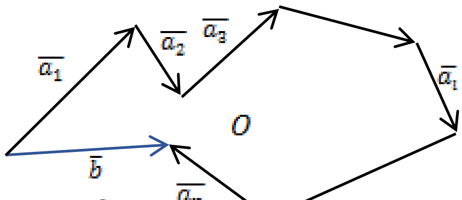
Демак, теоремага кўра $e_1\{1,0,\ldots,0\}$, $e_2\{0,1,0,\ldots,0\}$, …, $e_i\{0,0,0,\ldots,1,0,\ \ldots,0\}$, …, $e_n\{0,0,\ldots,1\}$ базис векторларнинг координат ифодаси бўлади.

Эслатма. Базис векторлар $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ фазога тегишли ихтиёрий чизиқли эркли векторлар бўлиб, улар бирлик ва ортогонал бўлиш шарт эмас. Хусусий ҳолда, базис вектoралар бирлик ва ортогонал бўлганда ҳам уларнинг кўриниши шу шаклда бўлади, яъни координаталари 1 ва 0 лардан иборат бўлади. Одатда текисликда ўзаро перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқлар ёрдамида тузилган координаталар системасини аффин координаталар системаси деб аталади, перпендикуляр тўғри чизиқлар ва бир хил бирлик векторлар ёрдамида ҳосил қилинган координаталар системаси Декарт координаталар системаси деб аталади. Эътибор қаратсангиз биз $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ векторларнинг ўзаро ортогонал бўлишини ёки бир хил нормага эга бўлишини ҳам талаб қилмадик. Фақат $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – чизиқли эркли векторлар бўлиши зарур ва етарли шарт шаклида қараяпмиз. Бунда векторлар бир хил нормага эга ва ўзаро ортогонал бўлиши, яъни Декарт координаталари биз кўраётган тушунчаларнинг хусусий ҳоли ҳисобланади.

8-§. Координаталари билан берилган векторлар устида амаллар

Элементар геометрия курси орқали абстракт векторлар устида бажарилган амаллар билан танишсиз. Векторларни қўшиш, сонга кўпайтириш амаллари аниқ геометрик маънога эга. Биз қисқача абстракт берилган, яъни йўналтирилган кесма шаклида аниқланган векторлар устида бажарилган амалларнинг геометрик маъносини эслатиб ўтамиз.

Берилган $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_n}$ ***векторлар йиғиндиси*** деб, бу векторлар кетма-кет жойлаштирилганда, яъни ҳар бир вектор учига кейинги векторнинг бошланиш нуқтаси қўйилганда, биринчи вектор бошидан чиқиб охирги вектор учига йўналган векторга айтилар эди (1.8.1-чизма).



$$b = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \dots + \overline{a_n}$$

1.8.1-чизма.

Аҳамият берсак, векторлар йиғиндиси векторлар сонига ва бу векторлар қаралаётган фазо ўлчамига боғлиқ эмас. Шунингдек, йиғинди ассоциативлик, яъни ўрин алмаштириш қоидасига эга бўлиб, йиғинди қўшилувчилар тартибига боғлиқ эмас.

Бизга A_n фазода $\overline{X}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ва $\overline{Y}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ векторлар берилган бўлсин. Бу ерда x_i, y_i лар бирор $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар ёрдамида аниқланган координаталар ва $O(0,0,\dots,0)$ – координаталар боши. Координаталар боши O дан $\overline{e_i}$ вектор йўналишида ўтган тўғри чизиқ $\overline{Ox_i}$ координаталар ўқини беради.

Координаталари билан берилган векторлар устида амалларни ўрганиш учун аввал $\{e_i\}$ базис векторлар устида амалларни кўрайлик. Масалан, $\alpha_i e_i$ ва $\beta_i e_i$ векторлар йиғиндисини.

Маълумки, e_i вектор сонга кўпайтирилганда ҳосил бўлган векторни ифодаловчи кесманинг базис вектор кесмасига нисбати α_i сонига мос келади, аммо вектор йўналиши ўзгармайди. Шундан,

$$\alpha_i e_i + \beta_i e_i = (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

тенглик ўринли бўлади.

$$\bar{X} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n,$$
$$\bar{Y} = y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n$$

бундан

$$\bar{X} + \bar{Y} = y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n + y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n =$$
$$= (x_1 + y_1) \cdot e_1 + (x_2 + y_2) \cdot e_2 + \ldots + (x_n + y_n) \cdot e_n.$$

Худди шунингдек,

$$k \cdot \bar{X} = k \cdot (x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n) = kx_1 \cdot e_1 + kx_2 \cdot e_2 + \ldots + kx_n \cdot e_n.$$

Юқоридаги тенгликлардан фойдаланиб қуйидаги хоссаларни келтириб чиқариш мумкин.

1-хосса. Координаталари билан берилган векторларни қўшиш учун уларнинг мос координаталарини қўшиш зарур.

2-хосса. Координаталари билан берилган векторни сонга кўпайтириш учун унинг барча координаталарини шу сонга кўпайтириш керак.

Мисол. $\bar{X}\{3, 2, 7, 5, 4\}$ ва $\bar{Y}\{2, 5, -9, 6, 4\}$ бўлса, $\bar{X} - 3\bar{Y}$ нинг координаталарини топинг.

Ечиш.

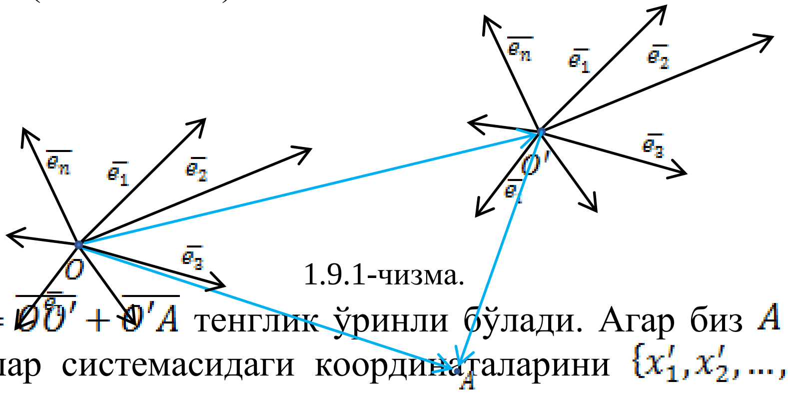
$$-3\bar{Y} = -3 \cdot (2e_1 + 5e_2 - 9e_3 + 6e_4 + 4e_5) =$$
$$= -6e_1 - 15e_2 + 27e_3 - 18e_4 - 12e_5;$$
$$\bar{X} - 3\bar{Y} = 3e_1 + 2e_2 + 7e_3 + 5e_4 + 4e_5 - 6e_1 - 15e_2 + 27e_3 - 18e_4 - 12e_5 =$$
$$= -e_1 - 13e_2 + 34e_3 - 13e_4 - 8e_5,$$
$$\bar{X} - 3\bar{Y}\{-1, -13, 34, -13, -8\}.$$

Векторларни сонга кўпайтириш ва қўшиш ***векторлар устида чизиқли операциялар*** деб аталади. Ихтиёрий сондаги векторларни мос равишда ихтиёрий сонларга кўпайтириш ва қўшиш, шу векторларнинг ***чизиқли комбинацияси*** деб аталади.

9-§. Аффин координаталарни алмаштириш

Фазода аффин координаталар системасини киритиш учун координаталар боши O нуқта танланади ва ўзаро чизиқли эркли бўлган $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – базис векторлар олинди. Бунда ҳар қандай $\bar{a}$ вектор учун унинг аффин координаталари деб аталган $\bar{a}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ сонлар тўплами мос қўйилди. Агар $\bar{a} = \overline{OA}$ бўлса, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор учи бўлган A нуқтанинг координаталари деб аталади. Демак, фазонинг ихтиёрий нуқтаси ўзининг $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n та координаталарига эга ва аксинча ихтиёрий n та сондан иборат тўпламга A_n фазода битта нуқта мос келади.

Ўрнатилган аффин координаталар системасида координаталар боши ўзгартирилса, яъни O координаталар боши фазонинг $O'\{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ кўчирилса, фазо нуқталарининг координаталари қандай ўзгаради? Шу саволга жавоб излаймиз. Ушбу ҳолатда $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базис векторлар ўзгаришсиз қолсин (1.9.1-чизма).



1.9.1-чизма.

Бунда $\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}$ тенглик ўринли бўлади. Агар биз A нуқтанинг янги координаталар системасидаги координаталарини $\{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$ билан белгиласак, нуқтанинг эски ва янги координаталари орасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз

$$x_i = x_i^0 + x_i', \qquad i = \overline{1,n}. \qquad (1.9.1)$$

Фақат координаталар бошини ўзгартириш, координаталар системасини $\bar{b} = \overline{OO'}$ векторга ***параллель кўчириш*** деб аталади. Ҳосил қилинган (1.9.1) тенглик A нуқтанинг эски ва янги координаталари орасидаги боғлиқликни ифодалайди.

Энди координаталар боши ўзгаришсиз қолиб $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар бошқа $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ базис векторлар билан алмаштирилса, A_n фазосининг ихтиёрий $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нуқтасининг координаталари қандай ўзгариши билан танишамиз.

Демак, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар бошқа чизиқли эркли n та векторлар $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ тўплами билан алмаштирилиб, янги аффин координаталар системаси барпо этилган. Фазонинг A нуқтасини бу янги координаталар системасидаги координаталарини $\{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$ билан белгилайлик. Мақсадимиз x_i ва x_i' орасидаги боғланишни топиш.

Координаталар системасида ўзгартириш қилишдан аввал e_1', e_2', ..., e_n' – векторлар $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базисда ўзларининг аниқ аффин координаталарига эга бўлар эди, яъни

$$\begin{cases} e_1' = \alpha_{11} \cdot e_1 + \alpha_{12} \cdot e_2 + \dots + \alpha_{1n} \cdot e_n, \\ e_2' = \alpha_{21} \cdot e_1 + \alpha_{22} \cdot e_2 + \dots + \alpha_{2n} \cdot e_n, \\ \dots \\ e_n' = \alpha_{n1} \cdot e_1 + \alpha_{n2} \cdot e_2 + \dots + \alpha_{nn} \cdot e_n \end{cases} \qquad (1.9.2)$$

боғлиқлик мавжуд эди.

Демак, эски $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис билан янги $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ базис векторлар орасида (1.9.2) боғлиқлик мавжуд бўлиб, бу чизиқли боғлиқлик ягона усулда бўлади.

Агар биз (1.9.2) чизиқли система коэффициентларидан тузилган $A = \{\alpha_{ij}\}$ – квадрат матрица детерминантини ҳисобласак

$$\Delta = \det A \neq 0$$

бўлади, яъни системанинг ягона ечимга эга бўлиши шарти бажарилади.

Ҳосил қилинган (1.9.2) системада $\overline{e_i}$ ларни номаълум ва $\overline{e_1'}$ ларни маълум деб ҳисоблаб, қуйидаги тенгликларни ҳосил қилишимиз мумкин

$$\begin{cases} e_1 = \frac{A_{11}}{\Delta} \cdot e_1' + \frac{A_{12}}{\Delta} \cdot e_2' + \ldots + \frac{A_{1n}}{\Delta} \cdot e_n', \\ e_2 = \frac{A_{21}}{\Delta} \cdot e_1' + \frac{A_{22}}{\Delta} \cdot e_2' + \ldots + \frac{A_{2n}}{\Delta} \cdot e_n', \\ \ldots \\ e_n = \frac{A_{n1}}{\Delta} \cdot e_1' + \frac{A_{n2}}{\Delta} \cdot e_2' + \ldots + \frac{A_{nn}}{\Delta} \cdot e_n'. \end{cases} \qquad (1.9.3)$$

Бу тенгликлар $\overline{e_i}$ – эски базис векторларнинг $\overline{e_i'}$ – янги базис векторлари орқали ифодасини беради. Чунки янги базисларда аввалги базис векторлар оддий чизиқли боғлиқ вектор ҳисобланади.

Биз аввалги (1.9.2) боғланиш матрицасини $A = \{\alpha_{ij}\}$, яъни

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \det A \neq 0$$

шаклда белгилаган эдик.

Янги (1.9.3) боғланиш матрицаси эса, A матрицага тескари матрица бўлиб,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \ldots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \ldots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \ldots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

бунда A_{ij} элемент α_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси бўлади.

Тескари A^{-1} матрица элементлари A матрица элементлари алгебраик тўлдирувчилари ва йўл-устун элементлари ўрни алмаштирилган ҳолда ёзилганига эътибор қаратинг.

Чизиқли алмаштиришлар хоссасига кўра, алмаштиришнинг матрицаси хосмас матрица бўлганида, яъни матрицадан тузилган детерминант нольдан фарқли бўлган ҳолда бу системага тескари ягона система мавжуд бўлади. Демак, эски ва янги базислар бир-бири орқали ягона тарзда чизиқли ифодаланиши мумкин.

Биз эски ва янги базис векторлари бир-бири баилан қандай боғлиқ эканини ўрганиб чиқдик.

Энди эса янги базисга ўтганимизда фазодаги нуқтанинг аффин координаталари орасидаги боғланиш қандай бўлишини аниқлаймиз. Эслатиб ўтсак, A нуқтанинг эски координаталар системасидаги аффин координаталари $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва янги аффин координаталарини $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ билан белгилаган эдик.

Агар $OA = x_1' \cdot e_1' + x_2' \cdot e_2' + \ldots + x_n' \cdot e_n'$ тенгликда (1.9.2) дан фойдаланиб e_i' ларни e_i билан алмаштирсак, у ҳолда

$$OA = x_1' \cdot e_1' + x_2' \cdot e_2' + \cdots + x_n' \cdot e_n' =$$
$$= x_1' \cdot (\alpha_{11} \cdot e_1 + \alpha_{12} \cdot e_2 + \cdots + \alpha_{1n} \cdot e_n) + x_2' \cdot (\alpha_{21} \cdot e_1 +$$
$$+ \alpha_{22} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot e_n) + \ldots + x_n' \cdot (\alpha_{n1} \cdot e_1 + \alpha_{n2} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot e_n) =$$
$$= (\alpha_{11} \cdot x_1' + \alpha_{21} \cdot x_2' + \ldots + \alpha_{n1} \cdot x_n')e_1 + (\alpha_{12} \cdot x_1' + \alpha_{22} \cdot x_2' + \ldots + \alpha_{n2} \cdot x_n')e_2 +$$

$$+\ldots+(\alpha_{1n}\cdot x_1'+\alpha_{2n}\cdot x_2'+\ldots+\alpha_{nn}\cdot x_n')\cdot e_n=x_1\cdot e_1+x_2\cdot e_2+\ldots+x_n\cdot e_n.$$

Базис векторлар чизиқли эркли эканлигидан

$$\begin{cases} x_1=\alpha_{11}\cdot x_1'+\alpha_{12}\cdot x_2'+\ldots+\alpha_{1n}\cdot x_n', \\ x_2=\alpha_{21}\cdot x_1'+\alpha_{22}\cdot x_2'+\ldots+\alpha_{2n}\cdot x_n', \\ \ldots \\ x_n=\alpha_{n1}\cdot x_1'+\alpha_{n2}\cdot x_2'+\ldots+\alpha_{nn}\cdot x_n' \end{cases}$$

тенгликлар системасини ҳосил қиламиз.

Агар системада қатнашган векторларнинг матрица шаклидан фойдалансак

$$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\qquad X'=(x_1',x_2',\ldots,x_n')$$

ва $A=\{\alpha_{ij}\}$ дан

$$X=A\cdot X'$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу ердан векторлар ёки фазо нуқтасининг координаталри бир-бири билан худди базис векторлар сингари чизиқли боғлиқликка эга экан.

Юқорида келтирилган белгилашлардан фойдалансак, координаталар бошини бирор $\bar{B}\{x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0\}$ векторга кўчирганда эски ва янги координаталар системасидаги векторлар орасидаги боғланиш

$$X=X'+\bar{B}$$

шаклда бўлади.

Координаталар боши $\bar{B}$ векторга кўчирилиб, координаталр системасининг базиси ҳам алмаштирлса

$$X=A\cdot X'+\bar{B}\qquad(1.9.4)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва бу тенглик эски координаталар системасида нуқтани ифодаловчи векторни, янги координаталар системасидаги шу нуқтани ифодаловчи вектор орқали ифодасидир.

Бу ҳосил қилинган (1.9.4) тенглик умуман A_n фазосида координаталар алмаштирилишини кўрсатувчи тенглик бўлиб, ***аффин координаталар алмаштирилиши*** деб юритилади.

Хусусан, $A=\{\alpha_{ij}\}$ матрица E бирлик матрица

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\ldots & 0\\ 0 & 1\ldots & 0\\ 0 & 0\ldots & 1\end{pmatrix}$$

бўлган ҳолда алмаштириш ***айний алмаштириш*** деб аталади. Айний алмаштиришда матрица диагонали элементлари мусбат бирлардан иборат. Матрица диагонал элементларидан баъзилари манфий бўлган ҳолларга биз кейинроқ геометрик изоҳ берамиз.

Шунингдек, A матрицанинг махсус ҳолларини ўрганишга алоҳида қайтамиз. Таъкидланмаган алоҳида ҳоллардан бошқа қринда A матрица – хосмас матрица бўлиши етарлидир.

10-§. Аффин фазода тўғри чизиқ ва текислик

Бизни қизиқтирган нарсалар аффин фазога оид геометрик образлар ва уларнинг хоссаларидир.

Юқорида айтиб ўтилгандек, тўғри чизиқ – бир ўлчовли аффин фазосига, текислик – икки ўлчовли аффин фазосига мисол бўлар эди. Шунингдек, уч ўлчовли евклид фазоси уч ўлчовли аффин фазога мисол бўлишини кўрсатиш мумкин.

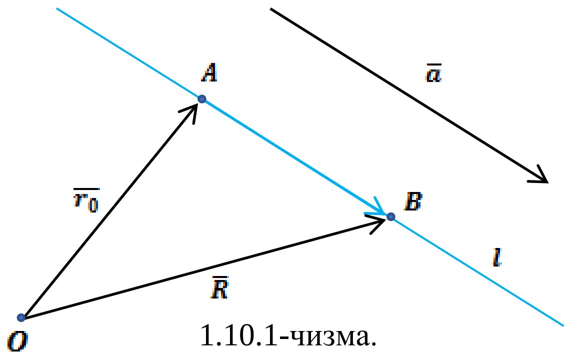
Демак, аффин фазосини ўрганишда $n > 3$ ҳоли муҳим аҳамият касб этади, яъни A_n да $n > 3$ бўлган ҳол.

Ўрганилаётган A_n фазода координаталар боши O белгиланган ва $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар берилган бўлсин. Координаталар боши O нуқтадан ўтувчи ва $\bar{e_i}$ базисга параллель тўғри чизиқни Ox_i координаталар ўқи деб атаймиз. Бу тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$$

тенглик билан аниқланади. Чунки бу координаталар тўғри чизиғида ётувчи ҳар қандай нуқтанинг координаталари $(0,0,0,x_i,0,0,0)$ бўлиб, $x_i \neq 0$ шаклда бўлади.

Энди A_n фазода $A(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтадан $\bar{a}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ вектор йўналишида ўтувчи l тўғри чизиқ тенгламасини топамиз (1.10.1-чизма).



1.10.1-чизма.

Берилган A нуқтанинг радиус векторини $\bar{r_0} = \overline{OA}$ деб белгилайлик. Тўғри чизиққа тегишли A дан фарқли $B \epsilon l$ нуқта радиус векторини $\bar{R}$ билан белгилаймиз. У ҳолда тўғри чизиқ нуқталари учун $\bar{R} = \bar{r_0} + \overline{AB}$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $\overline{AB}$ вектор $\bar{a}$ векторга коллинеар, яъни $\overline{AB} = t \cdot \bar{a}$ тенглик ўринли бўлади, $t \epsilon \mathbb{R}$ – параметр деб аталади.

Натижада A_n аффин фазосида берилган A нуқтадан $\bar{a}$ йўналишида ўтувчи тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$\bar{R} = \bar{r_0} + t \cdot \bar{a}. \qquad (1.10.1)$$

Бу (1.10.1) тенглик ***тўғри чизиқнинг вектор тенгласмаси***. Вектор тенгламадан базис векторларнинг чизиқли эркли эканлигидан фойдаланиб, ***тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси***ни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t \cdot a_1, \\ x_2 = x_2^0 + t \cdot a_2, \\ \dots \\ x_n = x_n^0 + t \cdot a_n. \end{cases}$$

x_i^0 – тўғри чизиққа тегишли нуқта координаталри, a_i – тўғри чизиққа параллель $\bar{a}$ вектор координаталари.

Маълумки, ҳар қандай икки нуқтадан ягона тўғри чизиқ ўтади. Бизга $A(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ ва $B(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ нуқталар берилган бўлсин. Шу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз. Бунинг учун $\overline{AB}$ вектор изланаётган тўғри чизиққа параллель вектор бўлишини билиш етарлидир. Тўғри чизиққа параллель $\bar{a}$ вектор координаталари $\left(x_i^2 - x_i^1\right)$ лардан иборат бўлади. Агар тўғри чизиқни A нуқтадан ўтишини ҳисобга олсак,

$$\begin{cases} x_1 = x_1^1 + t\cdot(x_1^2 - x_1^1), \\ x_2 = x_2^1 + t\cdot(x_2^2 - x_2^1), \\ \dots \\ x_n = x_n^1 + t\cdot(x_n^2 - x_n^1) \end{cases} \qquad (1.10.2)$$

тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини ҳосил қиламиз.

Агар (1.10.2) тенгликдан t параметрни топсак, у ҳолда

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1} = \ldots = \frac{x_n - x_n^1}{x_n^2 - x_n^1}$$

икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ҳосил қиламиз.

Демак, аффин фазосидаги ҳар қандай тўғри чизиқ тенгламасини ҳосил қилиш мумкин экан.

Маълумки, тўғри чизиқнинг ўзи бир ўлчовли аффин фазоси бўлар эди. Шу тушунчадан фойдаланиб, A_n аффин фазосининг $1 \le m \le n-1$ ўлчовли қисм фазоларини m-ўлчовли текисликлар деб қараймиз.

Таъриф. A_n аффин фазосининг m-ўлчовли $(1 \le m \le n-1)$ фазо остилари шу фазонинг $\boldsymbol{m}$ ***текислиги*** деб аталади.

Энди A_n фазода m-ўлчовли қисм фазо тенгламаларини шу фазодаги аффин координаталари орқали ифодасини келтириб чиқарамиз.

Биз A_n фазонинг m-ўлчовли қисм фазоси A_m ни аниқлашимиз керак. A_m қисм фазо m-ўлчовли фазо бўлгани учун, бу фазода m та чизиқли эркли векторлар мавжуд бўлади. Бу A_m фазонинг чизиқли эркли векторлари сифатида $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$ базис векторларига тегишли бирор m та векторни олиш мумкин. Аниқроғи, ҳар қандай m-қисм фазога тегишли m та базис вектор мавжуд бўлади.

Соддалик учун координаталар боши изланаётган m текисликда бўлган ҳолни кўрайлик.

Фараз қилайлик, $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_m}\}$ векторлар m текисликнинг базис векторлари бўлсин. Бунда текисликка тегишли ҳар қандай нуқтанинг радиус вектори $\bar{r}\{\overline{b_\iota}\}$ базис векторлар орқали чизиқли ифодаланади

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{b_\iota}. \qquad (1.10.3)$$

Шунингдек, $\bar{r}$ ва $\overline{b_\iota}$ лар A_n фазо базис векторлари орқали ҳам чизиқли ифодаланади, яъни

$$\bar{r} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_m e_m, \qquad \overline{b_\iota} = \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2 + \ldots + \beta_{im} x_m.$$

Бу ифодаларни (1.10.3) тенгликка қўйиб, $\{e_i\}$ векторларнинг чизиқли эркли эканлиги шартидан қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{(n-m)1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Бунда $a_{ij} = \alpha_i b_{ij}$ бўлиб, тенгламалар системасини қаноатлантирувчи нуқталар координаталар бошидан ўтувчи m-ўлчовли текисликка тегишли нуқталар бўлади.

$m = n - 1$ бўлган ҳолда, $(n-1)$ текислик – ***гипертекислик.***

Координаталар бошидан ўтмайдиган m текислик тенгламасининг ***вектор ифодаси***

$$\bar{R} = \bar{r_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{b_i}$$

шаклда бўлиб, унинг ***координаталарга нисбатан тенгламаси***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots \\ a_{(n-m)1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_{n-m} \end{cases}$$

каби $(n-m)$ та чизиқли тенгламалар билан ифодаланади.

Хусусий ҳолда, $m = n - 1$ ***гипертекислик тенгламаси*** n-ўзгарувчига боғлиқ чизиқли тенглама бўлади, яъни

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d.$$

II боб. ЕВКЛИД ВА ПСЕВДОЕВКЛИД ФАЗОСИ

11-§. Евклид ва псевдоевклид фазоси

Бизга n-ўлчовли аффин фазоси берилган бўлиб, $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ – векторлар фазосининг базис векторлари ва $O(0,...,0)$ – нукта координаталар боши бўлсин. У холда, фазодаги ихтиёрий вектор $\vec{X}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ аффин координаталарига эга бўлади.

Бизга иккита $\vec{X}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ва $\vec{Y}\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ векторлар берилган бўлса, бу векторлар ёрдамида ушбу бичизикли формани аниклаймиз

$$w\left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (2.1)$$

Бу форма иккала аргументга нисбатан чизикли бўлгани учун бичизикли форма деб аталади.

Қаралаётган (2.1) бичизиқли формаларга $a_{ij} = \left(e_i e_j\right)$ базис векторларнинг ўзаро кўпайтмаси.

Агар бу кўпайтмадаги $\left(e_i e_j\right)$ ларнинг аниқ қийматлари берилган бўлса, (2.1) бичизиқли форма тўлик аникланган бўлади.

Бу (2.1) бичизикли форма ушбу хоссаларга эга

$$w\left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right) = w\left(\vec{Y}\cdot\vec{X}\right).$$

Бу хосса бичизикли форманинг симметриклик шарти (хоссаси) деб аталади.

Одатда $\left(e_i e_j\right)$ базис векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб аталади ҳамда (1) форма икки $\vec{X}, \vec{Y}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб номланади ва $\left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right)$ шаклида ёзилади.

Умуман айтганда, (2.1) бизиқли форма мусбат аникланган ёки турли ишорали бўлиши мумкин, бу албатда a_{ij} катталикларни қандай эканига боғлик.

Таъриф. Берилган A_n аффин фазода векторларнинг скаляр кўпайтмаси мусбат аниқланган бичизиқли форма бўлса, бу аффин фазо *n-ўлчовли Евклид фазо* деб аталади ва R_n шаклида белгиланади.

Хақиқатдан хам, $n=3$ холда $\vec{X}\{x_1, x_2, x_3\}$ ва $\vec{Y}\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасида $a_{ii} = 1, a_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ бўлса, векторларнинг (2.1) скаляр кўпайтмаси

$$\left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

бу уч ўлчовли Евклид фазо векторларнинг скаляр кўпайтмасидир.

Таъриф. *Векторларнинг нормаси* деб, векторнинг ўзини-ўзига скаляр кўпайтмасидан олинган квадрат илдизга айтилади

$$\left|\bar{X}\right| = \sqrt{\left(\bar{X}\cdot\bar{X}\right)}.$$

Бундан Евклид фазосида векторларнинг нормаси

$$\left|\bar{X}\right| = \sqrt{\left(\bar{X}\cdot\bar{X}\right)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

га тенг.

Икки нукта орасидаги масофа шу нукталарни туташтирувчи векторнинг нормасига тенг деб олинади.

Агар $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ нукталар берилган бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталари

$$\overrightarrow{AB} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n\}$$

унинг нормаси

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(y_1 - x_1\right)^2 + \ldots + \left(y_n - x_n\right)^2}$$

ёки

$$d^2 = AB^2 = \left(y_1 - x_1\right)^2 + \ldots + \left(y_n - x_n\right)^2$$

га тенг бўлади.

Хақикатдан хам, бу n-ўлчовли Евклид фазода икки нукта орасидаги масофани хисоблаш формуласи. Бу формулани чексиз кичик миқдорлар ёрдамида ёзсак

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

шаклида бўлади.

Агар (2.1) биквадратик форма мусбат аниқланмаган бўлса, қаралаётган A_n аффин фазо *псевдоевклид фазо* деб номланади.

Алгебра курсидан маълумки, хар қандай бичизикли формани чизикли алмаштиришлар йўли билан каноник квадратик форма шаклига келтириш мумкин.

Бунда хосил бўладиган бичизикли форманинг шакли (a_{ij}) -матрица хосмас матрица бўлган ҳолда ҳадлари мусбат ва манфий ишорага эга бўлган бичизиқли форма шаклига келтирилади.

Аффин алмаштиришлар ёрдамида матрица бирлик диоганал шаклига келтирилиши мумкин.

Натижада скаляр кўпайтма ушбу шаклга келтирилсин

$$\left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right) = -x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ly_l + x_{l+1}y_{l+1} + \ldots + x_ny_n \qquad (2.2)$$

яъни l -та манфий ва $(n-l)$ та мусбат.

Таъриф. Икки $\vec{X}\{x_1, x_2, x_3\}$ ва $\vec{Y}\{y_1, y_2, y_3\}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси (2.2) шаклида аниқланган A_n аффин фазо, ${}^lR_n$ *псевдоевклид фазо* деб аталади.

Агар $l = 1$ бўлса, ${}^lR_n$ фазо Минковский фазоси деб номланади.

Псевдоевклид ${}^lR_n$ фазода икки нукта орасидаги масофа

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\vec{X}-\vec{Y}\right)^2 = -(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2-\dots-(y_l-x_l)^2+(y_{l+1}-x_{l+1})^2+\dots+(y_n-x_n)^2$$

формула билан хисобланади.

Вектор нормаси эса

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{-x_1^2-x_2^2-\dots-x_l^2+x_{l+1}^2+\dots+x_n^2} \qquad (2.3)$$

тенглик билан аниқланади.

Вектор нормаси $\left|\vec{X}\right|$ хақиқий, мавҳум ва нолга тенг қийматлар қабул қилиши мумкин экани (2.3) тенгликдан қелиб чикади.

Агар вектор нолдан фаркли бўлиб, унинг нормаси нолга тенг бўлса, изотроп вектор деб аталади. Изотроп векторлар ушбу

$$-x_1^2-x_2^2-\dots-x_l^2+x_{l+1}^2+\dots+x_n^2=0$$

тенгликни қаноатлантиради ва бу тенглик ${}^lR_n$ фазонинг *изотроп конуси* деб аталади. Чунки бу тенгликни қаноатлантирувчи векторлар тўплами A_n фазода конусни ташкил этади.

Изотроп конус ${}^lR_n$ фазода хақиқий ва мавҳум нормага эга бўлган векторларни ажратиб туради.

Умуман айтганда, Евклид фазосини псевдоевклид фазосининг $l=0$ бўлган хусусий ҳоли деб аташ мумкин. Шу сабаб билан биз псевдоевклид фазо сфераси ва улар ёрдамида аникланадиган геометриялар ҳақида сўз юритамиз. Бунда $l=0$ деб хисобланса, Евклид сферасига доир тушунчалар пайдо бўлади.

Псевдоевклид фазода икки нукта орасидаги масофа уч хил усул билан аниқланганлиги сабабли, бу фазода сфера хам уч хилда бўлади.

Бунда, Псевдоевклид фазода сферани берилган нуктадан тенг масофада ётувчи нукталарнинг геометрик ўрни сифатида аниқлаймиз.

Агар сфера маркази координалар бошида деб олинса, унинг тенгламаси

$$-x_1^2-x_2^2-\dots-x_l^2+x_{l+1}^2+\dots+x_n^2=a^2 \qquad (2.4)$$

шаклда бўлади.

Аммо a^2 уч хил бўлиши мумкин. Агар

1) $a^2>0$ – ҳақиқий радиусли сфера;

2) $a^2=0$ – изотроп конус ёки ноль радиусли сфера;

3) $a^2<0$ – мавҳум радиусли сфера.

Умуман айтганда, псевдоевклид фазосидаги сферанинг нуқталари ўзининг радиус вектори билан аниқланади ва бу радиус вектор координаталари (2.4) тенгликни қаноатлантириши керак.

Агар сфера устида икки A ва B нуқталар берилган бўлса, координаталар боши хамда A,B нукталардан ягона икки ўлчамли текислик ўтказиш мумкин. Бу текислик сферани A ва B нуқталардан ўтувчи айлана ёйи бўйича кесиб ўтади. Биз бу ёйни учлари A,B нукталарда бўлган кесма сифатида қабул қиламиз. У холда A,B нукталар орасидаги масофа

$$ch\frac{\delta}{|a|}=\frac{\left(\overline{OA}\cdot\overline{OB}\right)}{\left|\overline{OA}\right|\cdot\left|\overline{OB}\right|}$$

тенглик билан ҳисоблаш мумкин. Бунда δ – кесма узунлиги. Гиперболик косинус шаклида олинишига сабаб, умуман айтганда тенгликни ўнг томони бирдан кичик бўлмаслиги мумкин. Аммо бу тенглик фақат ярим сфера учун бажарилади. Шу сабабдан, сфера диаметрининг қарама-қарши нукталари битта нукта деб ҳисобланади.

Таъриф. *Гиперболик фазо* деб, Псевдоевклид фазо сферасининг диаметрал қарама-қарши нуқталари битта нуқта деб олинган нуқталар тўпламига изометрик нуқталар тўпламига айтилади ва қуйидагича белгиланади ${}^{1}S_{n-1}$.

Хусусан, уч ўлчовли Минковиский ${}^{1}R_{3}$ фазосидаги сферанинг ярми ${}^{1}S_{2}$ Лобачевский геометрияси бўлади.

III боб. СИРТ ИЧКИ ВА ТАШҚИ ГЕОМЕТРИЯСИ

12-§. Дифференциал геометриянинг асосий тушунчалари

Аввал бошдан хаётий заруратлар туфайли пайдо бўлган геометрия фани, умуман математика ривожи билан ҳамқадам ривожланиб келган ва хозирги вактда хам ўзининг янги кирраларини намоён этиб келмоқда. Декарт координаталар системасининг пайдо бўлиши (XVII аср) – аналитик геометрия фани ривожланишига сабаб бўлган бўлса, “чексиз кичик миқдорлар” назарияси ёки хозирги “математик анализ” усуллари “Дифференциал геометрия” фани асосида ётади.

Ўз моҳиятига кўра “Дифференциал геометрия” – геомертик шаклларни бирор нуқтасининг кичик атрофида ўрганади. Бу фаннинг асосий мақсади – чизиқ ва сиртлар хоссаларини функциялар ёрдамида, анализ усулларини қўллаб ўрганишдир.

Чизиклар хоссаларини ўрганишда энг мухим тушунчалардан бири чизикнинг уринма вектори, бош нормали ва бинормали ёрдамида, унинг иккинчи тартибли ҳосила векторларининг чизиқли ёйилмасини ифода этувчи Френе формуласидир:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\nu \\ \dot{\vec{\nu}} = -k\tau + \sigma\beta \\ \dot{\vec{\beta}} = \sigma\nu \end{cases}$$

Бу формуладаги k ва σ – лар чизиқнинг эгрилиги ва буралишидир.

Агар $k(s)$ ва $\sigma(s)$ – функциялар берилган бўлса, фазода эгрилиги $k(s)$ га ва буралиши $\sigma(s)$ функцияга тенг бўлган чизиқ ҳар доим мавжуд бўлади.

Дифференциал геометриянинг асосий усуллари чизик ва сирт назариясини вектор функция ёрдамида ўрганишдир. Албатта ўрганиш жараёнида вектор функциядан етарли даражада регуляр бўлиши талаб этилади.

Сиртлар назариясининг фундаментал асосини ташкил қиладиган тушунчалар

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

биринчи квадратик форма ва

$$(d^2\vec{r}\cdot\vec{n}) = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2$$

иккинчи квадратик формулалардир.

Бунда ds^2 – сирт устидаги чизик ёй дифференцияли бўлгани учун, бу квадратик формула ёрдамида, сирт устидаги чизиқ ёйи узунлигини, чизиқлар орасидаги бурчакни, сирт устидаги соҳани ва шунга ўхшаш кўплаб сирт билан боғлиқ катталикларни ҳисоблаш ва ўрганиш мумкин.

Сиртнинг иккинчи квадратик формаси эса қаралаётган нукта атрофида сирт ўзининг уринма текислигидан қанчалик четланган эканлигини билдирувчи катталикдир. Шунингдек, сирт устидаги чизиқнинг нормал эгрилиги, бош эгриликлар, тўла эгрилик ва ўрта эгриликларни аниқлашда иккинчи квадратик формадан фойдаланилади.

Дифференциал геометриянинг фундаментал асосини яратган олимлардан бири XX асрнинг буюк математиги Фридрих Гауссдир.

Шу ўринда баъзан кўпчилик томонидан бир хил маънода тушуниладиган аммо мазмунан ҳар хил бўлган ва Гаусс номи билан боғлик сиртлар назариясининг икки катталигига тўхталиб ўтамиз.

Улардан бири сиртнинг тўла эгрилиги.

Таъриф. Сиртнинг бош эгриликлари кўпайтмаси унинг *тўла эгрилиги* деб аталади

$$K = k_1 \cdot k_2 .$$

Иккинчиси эса Гаусс томонидан киритилган ва кейинчалик унинг номи билан аталадиган сиртга боғлиқ катталик.

Таъриф. Сиртнинг *Гаусс эгрилиги* деб, унинг бирор соҳасини сферик тасвири юзини шу соҳа юзига нисбатининг соҳа бир нуқтага интилгандаги лимитига айтилади

$$K = \lim_{S \to M} \frac{\Delta S^*}{\Delta S}$$

ΔS^* – сферик тасвир, ΔS – соҳа юзи.

Таърифдан кўриниб турибдики, тўла ва Гаусс эгриликлари сиртнинг икки хил геометрик характеристикаларидир.

Бу тушунчаларни бир хил деб қабул қилишгани сабаб хам, Гаусс номи билан боғликдир.

Теорема (Гаусс теоремаси). Регуляр сиртларнинг тўла эгрилиги уларнинг Гаусс эгрилигига тенгдир.

Ҳар қандай $C^2(D)$ синфга тегишли сиртлар учун Евклид фазосида, бу икки катталикнинг қийматлари тенгдир. Аммо регулярлик бундан кам бўлганда, яни кўпёқликлар учун тўла эгрилик тушунчаси йўқ, Гаусс эгрилик бор. Шуниндек, Гаусс теоремаси Евклид фазосида ўринли, ноевклид фазоларда ўринли эмас.

Гаусснинг яна бир буюк теоремасини эслаб ўтамиз. Бу теорема Риман геометриясининг асоси бўлиб, дифференциал геометрияни механика, физика ва квант механикаси каби йўналишларига қўлланилишига сабаб бўлган.

Теорема (Гаусс теоремаси). Регуляр сиртнинг Гаусс эгрилиги унинг биринчи квадратик формаси коэффициентлари ва уларнинг ҳосилалари билан тўла аникланади.

Бу боғланишнинг аналитик ифодаси ҳам Гаусс томонидан келтирилган.

13-§. Сирт ички геометрияси. Риман геометрияси

Геометриянинг асосий объекти сифатида сиртлар қаралади. Бунда чизиқ бир ўлчамли ёки бир ўзгарувчининг “сирти” сифатида ўрганилади.

Геометриянинг энг мураккаб тушунчаларидан бири аслида шу сиртлардир. Сиртнинг замонавий математик жиҳатдан аниқ таърифини бериш анчагина қийин. Ўч ўловли фазоларда сирт деганда текисликдаги соҳанинг фазодаги узлуксиз акси тушунилди.

Агар $D \subset \pi$ текисликдаги соҳа бўлса,

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k \tag{4.1}$$

бу шу $(u,v) \in D$ нуқтанинг $R_3\{i;j;k\}$ базисли фазодаги акси бўлиб, $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \subset C^2(D)$ бўлганда, (4.1) тенглама *сиртнинг вектор тенгламаси* деб аталади.

Бу вектор тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни сирт бўлади.

Маълумки, сиртнинг тенгламаси (4.1) шаклда бўлса, унинг биринчи квадратик формаси деб аталган, сирт устидаги чизиқ ёки узунлигини ҳисоблаш имконини берувчи

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

тенгликни ҳосил қилиш мумкин.

Аввалги бўлимда эслатиб ўтилгандек, сиртнинг биринчи квадратик формаси маълум бўлса, сирт устидаги чизиқлар орасидаги бурчак, соҳа юзи, тўла эгрилик, геодезик эгрилик, геодезик чизиқ ва шуларга ўхшаш сирт билан боғлиқ катталикларни ҳисоблаш имкони пайдо бўлар экан.

Сиртлар назариясида эгиш (изгибание) деган бир тушунча борки, у ҳам сиртнинг биринчи квадратик формаси билан боғлиқдир.

Эгиш – сиртни букмасдан, ертмасдан ва сирт устидаги икки нуқта орасидаги масофани сақлаган ҳолда сирт шаклини ўзгартиришдир.

Эгишга доир энг содда мисол сифатида бир варoқ қоғозни юқоридаги шартлар асосида шаклини ўзгартиришни кўриш мумкин.

Эътиборлиси шундаки, сиртни эгиш жараёнида биринчи квадратик форма ва унга боғлиқ бўлган катталиклар сақланиб қолар экан.

Шунинг учун сиртнинг биринчи квадратик формаси ва унга боғлиқ катталиклар *сиртнинг ички геометрияси* деб аталади.

Ички геометрияга доир катталикларни ўрганишда сиртнинг қандай фазода ва қайси шаклда берилганининг аҳамияти бўлмайди. Фақат биринчи квадратик форма коэффициентларини билишнинг ўзи етарли бўлади.

Сирт ички геометрияси, сиртларни эгиш масалалари XIX асрда Гаусс томонидан ўрганилган, асосан регуляр тенглама билан берилган сиртлар учун. XX асрнинг ўрталарида рус академиги А.Д. Александров бу тушунчаларни кўпёқликлар учун умумлаштирган. Бу тадқиқотларни А.Д. Александровнинг “Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей” монографиясида танишиш мумкин [1] (бу адабиёт 2006 йилда инглиз тилига таржима қилинди ва ҳозирда чет эл математиклари бу соҳада жуда кўплаб изланишлар олиб бормоқда).

Сирт ички геометриясининг энг равнақ топган қўлланишларидан бири “Риман геометрияси” деб номланган соҳанинг физика, механика, квант механикаси ва замонавий йўналишдаги кўплаб аниқ фанларга қўлланилишидир.

Риман геометрияси бўлими n-ўлчовли фазода сиртнинг биринчи квадратик формаси

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} du_i du_j$$

шаклда берилган деб ҳисобланади ва сиртнинг фазода қандай жойлашиши унинг шаклини ҳисобга олмаган ҳолда, унинг ички геометриясига доир катталикларни ўрганади.

Бу усул механика, айниқса, физика масалаларини ҳал қилишда самарали қўлланилади.

Бу усулнинг қулайликлари жуда кўп, аммо бир камчилиги бор, бу квадратик форма коэффициентлари g_{ij} га қўйиладиган регулярлик талаби, яъни уларни керакли тартибда узлуксиз ҳосилага эга бўлишини талаб этилишидир.

Охирги 30-40 йилларда А.Д. Александров назариясига эътибор кучайганлигининг асосий сабаби эса бу функциялардан фақат узлуксизликнинг талаб қилинишининг ўзи етарли эканидир.

14-§. Сирт ташқи геометрияси

Демак, сиртнинг ички геометрияси деганда унинг ички метрикаси билан боғлиқ катталиклар, яъни биринчи квадратик формаси билан боғлиқ хоссалар тушунилар экан.

Бундан ташқари сиртнинг иккинчи квадратик формаси деб номланадиган

$$II = (d^2\vec{r} \cdot \vec{n}) = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2$$

квадратик форма мавжуд бўлиб, у сиртни қаралаётган нуқтада ўзининг уринма текислигидан қанчалик узоқлашганини бидирувчи геометрик характеристикасидир.

Шу билан бирга сиртдаги чизиқнинг нормал эгрилиги, бош эгриликлар, ассимптотик йўналиш, эгрилик чизиқлари, ўрта эгрилик каби тушунчалар мавжуд-ки, улар иккинчи квадратик форманинг қандай экани билан боғлиқдир.

Сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формаларини боғловчи Бонне теоремаси мавжуд.

Теорема (Бонне теоремаси). Бизга

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 \tag{4.1}$$

$$II = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2 \tag{4.2}$$

икки квадратик форма берилган бўлиб, улардан биринчиси мусбат аниқланган ва уларнинг коэффициентлари Петерсон-Кадаци ва Гаусс тенгламаларини қаноатлантирса, фазода биринчи квадратик формаси (4.1) тенглик билан ва иккинчи квадратик формаси (4.2) тенглик билан ҳисобланадиган ягона сирт мавжуддир.

Теорема мазмуни шундайки, теорема шарти бажарилганда, сиртнинг вектор тенгламасидаги $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \subset C^2(D)$ функцияларни ягона усулда топиш мумкин экан.

Бу эса сиртни тўлиқ аниқлаш, унинг шакли ва хоссалари ҳақида тўла маълумотга эга бўлиш демакдир.

Сиртнинг шакли ва фазодаги ҳолати унинг ички геометриясига таъсир қилмайди. Шу сабабдан геометрияда “Сиртнинг ташқи геометрияси” деб номланган бўлим мавжуд бўлиб, у сиртнинг ички геометриясига тегишли бўлмаган хоссаларини ўрганади.

Сиртнинг ташқи геометриясига доир асосий масалалар А.В. Погореловнинг “Внешняя геометрия выпуклых поверхностей” [4] деб номланган асарида келтирилган. Бу асарда сирт ташқи геометриясига доир кўплаб ечилган масалалар берилган. Шунингдек, бу масалаларни эллиптик ва гиперболик фазолардаги ечимлари ҳам келтирилган. Қатор ечилмаган масалалар ва муаммолар берилган.

Аҳамиятлилиги шунда-ки, бу монографияда Коши томонидан XIX аср бошида қўйилган муаммо тўлиқ ҳал қилинган.

Коши масаласи қуйидагича: *Тенг кўпбурчаклардан ташкил топган кўпёқликлар ўзаро тенгми?*

Бу масаладан кўплаб геометрик муаммолар келиб чиққан. Шулардан бири Г.Вейл томонидан қўйилган регуляр сиртлар учун қўйилган ушбу масаладир: *берилган биринчи квадратик формага эга бўлган неча хил сирт мавжуд?*

Г.Вейлнинг ўзи бу масалани биринчи квадратик форма сферада аниқланган бўлса, яъни (u,v) – сферик координаталар бўлиб, функциялар C^3 синфга тегишли ва Гаусс эгрилиги мусбат бўлган ҳолда уни қаноатлантирувчи ягона овалоид мавжуд эканини исбот қилган.

А.В. Погорелов сиртнинг биринчи квадратик формаси билан боғлиқ масалаларни ечишда сиртнинг шартли эгрилиги тушунчасидан фойдаланган.

Сирт шартли эгрилиги сиртнинг сферик тасвири билан боғлиқ бўлиб, у сирт уринма текислиги бирлик нормалини бирлик радиусли сферага йиғиш йўли билан ҳосил қилинади.

Ташқи геометрия масалалари кўпинча дифференциал тенгламалар ёки дифференциал тенгламалар системаси ечими билан боғлиқ.

Шунингдек, баъзи ҳолларда масаланинг геометрик ечими дифференциал тенглама ечимининг мавжудлик ёки ягоналик масалалари билан боғлиқ бўлади.

Сиртнинг қавариқ ёки эгарсимон сирт бўлиши унинг Гаусс эгрилигининг мусбат ёки манфий аниқланганлиги билан боғлиқдир.

Ташқи геометрияга боғлиқ масалалар кўпинча Гаусс эгрилиги мусбат бўлган ҳолларда аниқ ҳал қилинган. Аммо Гаусс эгрилиги манфий бўлган ҳолларда масала ечими мавжуд бўлмаслиги ёки мавжуд бўлса ҳам ягона бўлмаслиги мумкин.

Хусусан, Гаусс эгрилиги манфий бўлган биринчи квадратик формага эга сиртнинг мавжуд бўлиши шарти баъзи хусусий ҳоллардагина ҳал қилинган. Бу мураккабликка сабаб , Гаусс эгриликлари манфий бўлган сиртлар гиперболик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар билан боғлиқдир.

IV боб. КЎПХИЛЛИКЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

15-§. Кўпхилликнинг таърифи

Ф.Клейн XIX асрда геометрик шаклларнинг гомеоморф акслантиришда сақланадиган хоссаларини ўрганди ва буни геометриянинг янги бўлими деб эътироф этди. Хусусан, ҳаракатда, проектив ёки аффин алмаштиришларда сақланадиган хоссалар ҳам топологик хоссалар деб юритилган.

Кейинчалик эса геометриянинг бу бўлими тўлақонли топология деб номланадиган бўлди.

Бизга ихтиёрий X тўплам берилган бўлсин. Агар X тўплам тўпламостилари бўлган Ω лар учун қуйидаги шартлар бажарилса:

a) Ω га тегишли тўпламостиларнинг чекли сонининг йиғиндиси Ω га тегишли;

b) Ω га тегишли тўпламостиларнинг кесишмаси ҳам Ω га тегишли;

c) $\varnothing$ ва X тўплам ҳам Ω га тегишли бўлса, X тўпламда *топологик структура киритилган* ёки *топология аниқланган* деб аталади.

Бунда X тўплам киритилган Ω структура билан (X,Ω) – *топологик фазо* деб аталади, Ω – тўпламостилар *очиқ тўплам* дейилади.

Масалан, Евклид текислиги топологик фазога мисол бўлади. Бунда очиқ тўплам сифатида нуқта ва маркази нуқталарда бўлган очиқ айланаларни олиш мумкин.

Агар топологик фазони иккита бўш бўлмаган очиқ тўпламларга ажратиб бўлмаса, у *боғламли фазо* деб аталади.

Топологик фазода *чизиқ* деб $s:[0,1]\to X$ гомеоморф акслантиришга айтилади.

Агар топологик фазонинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи чизиқ мавжуд бўлса, фазо *чизиқли боғлиқ фазо* дейилади.

Топологик фазо таърифининг соддалиги, яъни (a), (b), (c) – талаблардан ташкил этилгани бу талабларни қаноатлантирувчи объектларнинг кўплигини таъминлайди.

Умуман, топологик фазоларда метрик топологик фазолар алоҳида ўрин тутади.

Топологик фазолар учун қўшимча шартлар киритиш йўли билан уларнинг сони камайтирилади. Шундай шартлардан бири Хаусдорфликдир.

Агар топологик фазонинг бир-биридан фарқли икки элементининг ўзаро кесишмайдиган атрофи мавжуд бўлса, бу фазо *Хаусдорф топологик фазо* деб аталади.

Энди топологик фазоларнинг кўп қўлланиладиган муҳим ҳолларидан бири бўлган кўпхиллик тушунчаси билан танишамиз.

Кўпхиллик тушунчасининг пайдо бўлишига сабаб бўлган асосий геометрик шакллар билан танишамиз. Чизиқ, сирт – энг содда кўпхилликларга мисол бўла олади.

Масалан, бизга бирор чизиқ берилган бўлса, унинг ихтиёрий нуқтаси учун уринма тўғри чизиқни ўтказсак, уриниш нуқтаси ва унинг кичик атрофида чизиқни шу тўғри чизиққа ўхшаш деб қарашимиз мумкин.

Шунингдек, сиртнинг нуқтаси учун уринма текисликни қарасак, уриниш нуқтаси атрофида сиртни текислик бўлаги сифатида деб қарашимиз мумкин. Бунда кичик атроф учун сирт нуқталари ва уринма текислик нуқталари орасида ўзаро бир қийматли акслантириш ўрнатиш мумкин.

Агар тўғри чизиқ ва текисликни мос равишда бир ва икки ўлчовли Евклид фазоси эканини ҳисобга олсак, ўзаро бир қийматли мосликдан чизиқ ва сирт нуқталари билан мос равишда бир ва икки ўлчовли Евклид фазолари ўртасида гомеоморфизм ўрнатилиши мумкин бўлади.

Шу ўринда айтиб ўтиш керак-ки, бу мослик ҳар доим уриниш нуқтасининг тўла атрофи билан бўлмай, унинг ярим атрофи билан ҳам бўлиши мумкин.

Таъриф (кўпхилликнинг таърифи). Агар топологик фазо

a) Хаусдорф фазо;

b) саноқли сондаги Евклид фазоси очиқ тўпламлари билан қопланган бўлса;

c) ихтиёрий нуқтаси атрофи n-ўлчовли Евклид фазосига гомеоморф бўлса, у n-ўлчовли топологик кўпхиллик деб аталади.

Мисоллар.

1. Ҳар қандай саноқли дискрет фазони 0-ўлчовли топологик кўпхиллик деса бўлади.

2. R_n – Евклид фазо n-ўлчовли топологик кўпхиллик бўлади.

3. R_{n+1} – Евклид фазоси сфераси S_n n-ўлчовли кўпхилликка мисол бўлади.

16-§. Кўпхилликларнинг баъзи хоссалари

Биз қуйида кўпхилликлар билан боғлиқ баъзи хоссаларни исботсиз келтирамиз.

Кўпхилликнинг муҳим хоссаларидан бири унинг ўлчамининг сақланишидир. Кўпхилликнинг бир вақтнинг ўзида n-ўлчовли ва m-ўлчовли бўла олмайди ($n \neq m$).

Агар n-ўлчовли кўпхилликнинг x_0 нуқтаси атрофи R_n фазога гомеоморф бўлса, бу нуқта *кўпхилликнинг ички нуқтаси* дейилади.

Агар x_0 нуқта атрофи R_n^+ фазога гомеоморф бўлса, x_0 – нуқта *четки нуқта* дейилади ва x_0 нуқтага R_n^+ кўпхилликнинг четки нуқтаси мос келади.

Кўпхилликнинг четки нуқталари тўплами кўпхилликнинг *чегарасини* ташкил этади.

Ҳамма нуқталари ички нуқталардан ташкил топган кўпхиллик *чегарасиз кўпхиллик* деб аталади.

Масалан, фазодаги сирт ва сирт бўлаклари чегарали кўпхилликка мисол бўлади.

Сфера, тор, крендель каби сиртлар чегараси йўқ икки ўлчовли кўпхилликка мисол бўлади.

Чегарага эга бўлган икки ўлчовли кўпхилликка Мёбиус листи мисол бўлади.

Бу тўғри тўртбурчак шаклидаги соҳани қарама-қарши чегараларини ёпиштириш йўли билан ҳосил бўладиган бир томонли сиртдир.

Кўпхилликни таърифи билан танишаётганда чизиқ ва сиртлардан фойдаландик. Бу тасодиф эмас, ҳар қандай n-ўлчовли Евклид фазосидаги сиртлар $(n-1)$-ўлчовли кўпхилликни ташкил этади, яъни, $(n-1)$-ўлчовли кўпхиллик бўлади. Шунингдек, R_n фазода чизиқ бир ўлчовли кўпхиллик бўлса, шунга ўхшаш $2 \leq m < n-1$-ўлчовли кўпхиллик бўлувчи m-ўлчовли сиртлар мавжуд.

Худди шунингдек, тескари масала ҳам ўрганилган. Агар M_n-ўлчовли кўпхиллик бўлса, уни бирор R_N Евклид фазосида сирт деб қараш мумкинми?

Бу масала Нэш томонидан ҳал қилинган ва кўпхилликлардан баъзи шартлар талаб қилинганда R_N фазода сирт бўлиши шартлари берилган. Бунда $N - n$ га боғлиқ ифода.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Чизиқли фазо. Чизиқли фазо ўлчами. Аффин фазо. Аффин координаталар системаси. Аффин алмаштиришлар ва текисликлари. Бичизиқли форма.

- 1. Чизиқли фазо ва унинг ўлчами оид масалалар.
- 2. Аффин фазога мисоллар .
- 3. Аффин координаталар системаси оид масалалар ечиш.
- 4. Аффин алмаштиришлар ва k ўлчовли текисликлар оид масалалар ечиш.
- 5. Бичизиқли форма оид масалалар ечиш.

1-мавзу бўйича саволлар:

1. Чизиқли фазо ва унинг ўлчами нима?
2. Чизиқли фазо нима?
3. Аффин фазо нима?
4. Аффин координаталар системаси нима?
5. Аффин алмаштиришлар нима?
6. Аффин алмаштиришлар ва k ўлчовли текисликлар нима?
7. Бичизиқли форма нима?

2-Мавзу: Евклид фазоси. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар. Сирт дифференциал геометрияси. Сирт ички геометрияси. Сирт ташқи геометрияси.

- 1. Евклид фазосига мисоллар.
- 2. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар оид масалалар.
- 3. Сирт дифференциал геометрияси оид масалалар ечиш.
- 4. Сирт ички ва ташқи геометрияси оид масалалар ечиш.

2-мавзу бўйича саволлар:

1. Евклид фазоси нима?
2. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар нима?
3. Сирт дифференциал геометрияси нима?
4. Сирт ички ва ташқи геометрияси нима?

3-Мавзу: Псевдоевклид фазо. Сферик фазо. Риман геометрияси. Гиперболик фазо. Ярим Евклид фазолар. Ярим гиперболик фазолар.

- 1. Псевдоевклид фазо.
- 2. Сферик фазо оид масалалар.
- 3. Риман геометрияси.
- 4. Ярим Евклид ва ярим гиперболик фазолар.

3-мавзу бўйича саволлар:

1. Псевдоевклид фазо нима?
2. Сферик фазо нима?
3. Риман геометрияси нима?
4. Ярим Евклид ва ярим гиперболик фазолар нима?

4-Мавзу: Иккинчи тартибли сиртлар. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари. Кўпхиллик геометрияси.

- 1. Иккинчи тартибли сиртлар оид масалалар ечиш.
- 2. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари оид масалалар ечиш.
- 3. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турларига мисоллар.
- 4. Кўпхиллик геометрияси.

4-мавзу бўйича саволлар:

1. Иккинчи тартибли сиртлар нима?
2. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари нима?
3. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари нима?
4. Кўпхиллик геометрияси нима?

1-амалий машғулот. Чизиқли фазо таърифи ва хоссалари (2 соат)

Чизқли фазоларга доир баъзи мисоллар билан танишамиз.

1. Чизиқли фазога доир энг содда мисол бу, ҳақиқий сонлар тўпламининг ўзидир, яъни $V = R = \Lambda$.

2. Ихтиёрий n-тартибли квадрат матрицалар тўплами чизиқли фазо ташкил қилади.

3. Бирор $[a,b]$ да аниқланган, узлуксиз функциялар $\{f(x)\}$ – тўплами чизиқли фазо ташкил қилади.

4. Квадрат учҳадлар тўплами чизиқли фазо ташкил қилади.

5. Вектор фазо чизиқли фазо ташкил қилади.

Келтирилган 1-5 чизиқли фазога оид мисоллар чизиқли фазонинг энг кўп ишлатиладиган, содда ва тасаввур қилиш осон бўлган намуналаридир. Шунинг учун бу тўпламларнинг ҳақиқатан ҳам чизиқли фазонинг барча шартларини бажарилишини кўрсатишни тингловчичининг ўзига ҳавола қиламиз.

Мустаҳкамлаш учун савол ва масалалар

1. Ушбу $ax^2+bx+c \in W,\ a,b,c \in \mathbb{R}$ тўплам чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

2. $V=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

3. $W=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ – тўплам чизиқли фазо бўладими?

4. Қатор $(a_1\ a_2\ a_3 \dots . a_n)$ ва устун $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$ матрицалар тўплами чизиқли фазо бўладими?

5. Комплекс сонлар тўплами чизиқли фазо бўладими?

6. Ушбу $H=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ матрицалар тўплами чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

7. Нол элемент битта элементли чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

8. Интегралланувчи функциялар тўплами чизиқли фазо бўлишини исботланг.

9. Ушбу $W=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\}$ фазода нол элемент қандай бўлади?

10. Комплекс сонлар тўпламида нол элемент ва қарама-қарши элементлар қандай бўлади?

11. $V=\{(a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,a_n)\}$ – чизиқли фазода нол, бир ва қарама-қарши элементларни кўрсатинг.

12. Берилган $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$ – кўпҳадлар тўплами чизиқли фазо бўладими?

13. Текисликда берилган $\vec{a}\{x_1,y_1\} \in W,\ x_1,y_1 \in \mathbb{R}$ – векторлар тўплами чизиқли фазо ташкил этишини кўрсатинг. Йиғинди ва сонга кўпайтманинг координат ифодасини топинг, координаталар системасида кўрсатинг.

2-амалий машғулот. Чизиқли фазо ўлчами. Чизиқли фазога мисоллар (2 соат)

2.1. Чизиқли фазо ўлчами. Умуман айтганда, чизиқли фазо ўлчами чекли ва чексиз бўлиши мумкин. Биз геометрия фанида асосан чекли чизиқли фазолар билан шуғулланамиз.

Қуйида биз баъзи чизиқли фазоларнинг базиси ва ўлчамлари билан танишамиз:

1. Икки ўлчовли квадрат матрицалар $A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Бу матрицалар чизиқли фазо ташкил қилиши билан маърузада танишган эдик. Энди биз $\Lambda=A_2$ нинг базиси ва ўлчами ҳақида фикр юритамиз. Бу чизиқли фазода

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицалар фазонинг базисини ташкил қилади. Буларни чизиқли эркли эканлиги

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = 0$$

тенглик фақат $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ ҳол учунгина ўринли бўлишидан келиб чиқади. Шунингдек, A_2 тегишли ихтиёрий матрица учун

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4$$

тенглик ўринлилиги, ҳар қандай бешинчи элементнинг булар билан чизиқли боғлиқлигини кўрсатади. Демак, A_2 да тўртта чизиқли эркли элемент мавжуд ва ҳар қандай бешта элемент ўзаро чизиқли боғлиқдир. Бу еса иккинчи тартибли матрицалар тўплами $A_2 = \Lambda_5$ беш ўлчовли чизиқли фазо эканлигини кўрсатади.

2. Берилган $[-a, a]$ – оралиқда аниқланган узлуксиз ва ихтиёрий тартибли узлуксиз ҳосилага эга функциялар тўплами. Бу тўплам чизиқли фазо бўлиши билан танишган эдик. Энди бу тўплам учун базис ва унинг ўлчамини аниқлаймиз. Қаралаётган тўпламда $1, x, x^2, ..., x^n$ даражали функциялар чизиқли эркли элементларга мисол бўлади. Шунингдек, ҳар қандай $[-a, a]$ оралиқда аниқланган узлуксиз ва ихтиёрий тартибли ҳосилага эга функцияни Маклорен қаторига ёйиш мумкинлиги, даражали функциялар ихтиёрий тартибли бўлиши, чизиқли фазонинг ўлчами чегараланмаган эканини кўрсатади.

2.2. Чизиқли фазога мисоллар. Бу бўлимда чизиқли фазо элементлари ихтиёрий нарсалар бўлиши мумкин эканлигини, фақат улардан чизиқли фазо аксиомаларини бажарилишинигина талаб этилишини кўрсатувчи мисоллар келтирамиз.

1. Ранглар фазоси. Бу ерда ранг – бўёқ ранги маъносида тушунилади. Ҳаётий ранглар ҳақидаги мулоҳазаларни математик усулда баён этишга ҳаракат қиламиз. Табиатда асосий бўлган ранглар мавжуд. Масалан: оқ, қизил, қора, ... сингари. Кўпгина бошқа ранглар бу рангларнинг аралашмасидан иборат бўлади. Умуман айтганда, ҳар қандай рангни ҳам бир ёки бир нечта рангларнинг аралашмаси сифатида ҳосил қилиш мумкин. Аммо шундай ранглар борки, улар ўзининг аниқ номига эга ва уларнинг бирини фақат бошқа биридан ҳосил қилиш мумкин эмас.

Юқорида келтирилган A – оқ, B – қора, C – қизил рангларни стандарт ранглар деб ҳисобласак, мана шу учта рангни асос қилиб олиб ва улардан қандайдир ҳисса қўшиш йўли билан турли хил рангларни ҳосил қилиш мумкин. Табиийки, бундай уч хил рангларнинг ўзи ҳам ҳар хил бўлади, яъни асосий деб олишимиз мумкин бўлган уч хил ранглар ҳам турлича бўлади. Бошқа учлик эса янгича рангларни бериши аниқ.

Демак, биз A, B, C – рангларни асосий деб олдик. Унда A рангдан a ҳисса, B рангдан b ҳисса ва C рангдан c ҳисса қўшганимизда бирор G ранг ҳосил бўлсин. Шу айтилган жараённи ушбу тенглик билан ёзишимиз мумкин:

$$G = aA + bB + cC.$$

Энди биз $\{A, B, C\}$ – рангларни асосий ранглар, яъни базис ранглар деб қарасак, тенгликнинг ўнг томони бу базис рангларнинг чизиқли комбинацияси бўлади. Чизиқли комбинация коэффициентлари (a, b, c) – ларни G – рангнинг координаталари деб, ҳосил бўладиган G рангларни RF– ранглар фазоси деб атаймиз.

Демак, RF ранглар фазосида элементлар ранглардан иборат ва бу ранглар базис $\{A, B, C\}$ рангларнинг аралашмаси. Қайси рангдан қанча қўшилишини ифодаловчи (a, b, c) – сонлар шу рангнинг координаталари. Шу йўл билан биз уч ўлчовли фазо нуқталари ва ранглар тўплами орасида мослик ўрнатдик. Бу ранглар фазосининг ажойиб бир математик модели бўлади.

Бу моделдан рангларни ўрганувчи фан бўлган “колориметрия” соҳасида унумли фойдаланилади.

Ранглар фазосида асосий рангларнинг координаталарини кўрсак,

$$A = 1\cdot A + 0\cdot B + 0\cdot C$$

кўринишида ёзиш мумкин эканлигидан, $A(1, 0, 0)$ эканлигини ва шунга ўхшаш $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ координаталарга эга эканлигини кўришимиз мумкин.

Баъзан асос бўлган рангдан баъзилари қўшилмай қолиши мумкин

$$D = a\cdot A + b\cdot B + 0\cdot C.$$

Бунда D – ранг учун C – ранг қўшилмаяпти, у фақат A ва B ранглар аралашмасидан иборат.

Биз RF ранглар фазоси ҳақида бошланғич тушунчаларни келтирдик, қизиққан тингловчилар манбалардан бу ҳақида тўлароқ танишиши мумкин.

Бизнинг асосий мақсадимиз ҳозиргина танишган RF ранглар фазоси ҳам уч ўлчовли чизиқли фазога мисол бўлишини кўрсатиш эди.

2. Кимёвий элементлар чизиқли фазоси. Кимё фанидан бизга маълумки, табиатдаги ҳар қандай модда Менделеев даврий жадвалидаги элементлардан бири ёки уларнинг бир нечтасининг йиғиндисидан иборат бўлади. Ҳар бир элемент атом, молекула ёки бошқа ташкил этувчилардан иборат эканлигини ҳисобга олсак ва асосий ташкил этувчиларни $B_i(0,...,0,1,0,...,0)$ шаклида базис элемент сифатида n тасини танлаб олсак, ҳар қандай A_j элементни

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} B_i$$

шаклда ифода этиш мумкин. Бу ерда $B_j > 0$ бўлиб, A_j даги B_i атомлари сонини билдиради. Бунда B_i – чизиқли фазонинг базиси деб қаралади. A_j – элемент уларнинг чизиқли комбинацияси бўлади. Йиғинди ва сонга кўпайтириш амаллари бу элементлар чизиқли фазо ташкил этишини кўрсатади. Бунда кўпайтирилувчи сон бутун сонлар тўпламидан олинган бўлади.

Келтирилган фазони қуйидаги соддароқ ҳолда кўрайлик.

Мисол. Ушбу CO_2, H_2O, H_2CO_3 моддалар асосан H – водород, C – углерод, O – кислороддан ташкил топган. Бу элементлар орасидаги боғланишни қуйидаги матрица шаклида ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} CO_2 \\ H_2O \\ H_2CO_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ C \\ O \end{pmatrix}.$$

Агар бу тенгликда қатнашган устун матрицаларни чизиқли фазо элементи деб ҳисобласак, бу чизиқли фазо чизиқли алмаштириш ёрдамида бир элементлардан иборат учликни бошқа элементлар билан алмаштиришни беради.

Бу масалага тўла алгебраик усулда ёндашсак, тенгликда қатнашаётган матрицанинг ранги иккига тенг еканини кўриш мумкин.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad rang\Delta = 2.$$

Демак, чап томондаги 3 та элемент ҳосил қилинган чизиқли фазонинг икки ўлчовли фазо остига тегишли эканини билдиради. Бу икки ўлчовли фазо ости эса ўзининг базис элементларига эга бўлади. Бу базисда қаралаётган учта элемент янгича ифодаланади:

$$\begin{pmatrix} CO_2 \\ H_2O \\ H_2CO_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2O \\ CO_3 \end{pmatrix}.$$

Бу тенгликлар чизиқли фазо элементлари орасидаги чизиқли алмаштиришларни ифода этади. Табиийки, бу тенгликлар аниқ бир кимёвий реакциядаги қонуниятни беради. Масаланинг кимё фанидаги ўрнини ўрганиш қизиқувчилар учун яхши машқ бўлади.

Бизни эса масаланинг математик томони қизиқтиради. Демак, чизиқли фазода ҳар қандай элементни базис элементлар ёрдамида, яъни, фазо ўлчовига тенг сондаги чизиқли эркли элементлар ёрдамида чизиқли ифодалаш мумкин экан.

Агар бирор $e(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ базисдан бошқа $e'(e_1', e_2', e_3', ..., e_n')$ базисга ўтилса, улар орасида

$$e = Ae'$$

шаклда чизиқли боғланиш мавжуд бўлар экан. Бунда A – матрица, e ва e' бирлик матрицалар. Бу боғланиш чизиқли фазода чизиқли алмаштириш деб аталади.

Чизиқли алмаштиришнинг хоссалари билан ихтиёрий “чизиқли алгебра” га тегишли адабиётлардан танишиш мумкин.

3-амалий машғулот. Аффин фазо (2 соат)

Мустаҳкамлаш учун савол ва масалалар

1. Аффин фазосининг биринчи аксиомаси ва Евклид фазоси аксиомалари орасида қандай боғлиқлик ёки ўхшашлик бор?

2. Аффин фазосининг иккинчи аксиомаси ва Евклид аксиомалари орасида қандай боғлиқлик ёки ўхшашлик бор?

3. Иккинчи тартибли матрицалар чизиқли фазо ташкил этади, у аффин фазоси бўладими?

4. Текислик икки ўлчовли аффин текислиги билан эквивалент эканини кўрсатинг.

5. Ихтиёрий Λ_n – n-ўлчовли чизиқли фазо A_n – аффин фазоси бўлиши мумкинми?

6. Аффин фазосида параллеллик тушунчаси мавжуд эканлиги исботлансин.

7. Бир ўлчовли аффин фазода векторлар комбинацияси қандай геометрик маънога эга?

8. Уч ўлчовли аффин фазосида $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис векторлар. Агар $\vec{a} = 2e_1 + e_2 - e_3,\ \vec{b} = e_1 + 2e_2 + e_3,\ \vec{c} = e_1 + e_2 - 2e_3$ бўлса, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ни базис деб олса бўладими?

9. Аффин текислигида учлари $A(7,2),\ B(-3,4)$ – нуқталарда бўлган векторнинг координаталарини топинг.

10. Текисликда $\vec{a}(2,4),\ \vec{b}(3,7),\ \vec{c}(5,4)$ – векторлар берилган. Агар $(\vec{a}, \vec{b})$ векторларни базис деб олинса, $\vec{c}$ – векторнинг бу базисдаги координаталарини топинг.

11. Аффин фазосида берилган $\vec{a}(x_1, y_1, z_1),\ \vec{b}(x_2, y_2, z_2),\ \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ – векторларнинг бир текисликда ётиш шартини топинг.

12. Текисликда бир учи умумий бўлган $ABCD$ – параллелограмм ва $AKLN$ – квадрат берилган. Агар параллелограммнинг A учидан чиққан томонларида ётган векторларни базис деб олинса, квадрат томонларида ётган векторлар координаталарини топинг.

13. Текисликда $\vec{a}(3,4),\ \vec{b}(2,4),\ \vec{c}(1,9)$ – векторлар берилган. Агар $\vec{a}, \vec{b}$ – векторларни базис деб олинса, $\vec{c}$ векторнинг координаталари қандай бўлади?

14. Текисликда $\vec{a}(2,5),\ \vec{b}(6,15)$ векторлар базис ташкил қила оладими?

15. Аффин координаталар системасида $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

16. Аффин координаталар системасида “даста” тенгламаси яъни, $A(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тенгламасини ёзинг.

17. Умумий тенгламасидаги коэффициентлари қандай шартни бажарганда, икки тўғри чизиқ параллел бўлади?

18. Ушбу $\begin{cases} x' = 7x + 5y + 4 \\ y' = 4x + 3y - 2 \end{cases}$ аффин алмаштиришида 1) $A(1,-2),\ B(5,-9)$ – нуқталар аксини; 2) $3x + 2y - 5 = 0$ – тўғри чизиқ аксини топинг.

19. Берилган $\vec{a}(3,4)$ вектор координаталарини параллел кўчирганда $\vec{b}(7,5)$ векторга ўтган. Бунда координаталар боши қайси нуқтага параллел кўчирилган?

4-амалий машғулот. Евклид ва Псевдоевклид фазо (2 соат)

Соддалик учун икки ўлчовли псевдоевклид фазоси билан, яъни, Минковский текислиги геометрияси билан танишамиз.

Агар текисликда бирор декарт координаталар системаси киритилган бўлса, текисликдаги ҳар бир нуқта ўзининг бир жуфт сондан иборат координаталарига эга бўлади. Бу тушунча сизга мактабдан маълум. Айтайлик, π текисликда Oxy декарт координаталар системаси киритилган бўлиб, $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ бўлсин. Энди $\overline{e_1}$ билан Ox ўқи бўйича йўналган, $\overline{e_2}$ билан Oy ўқи бўйича йўналган векторларни оламиз. Бу векторлар коллинеар эмас, шунинг учун уларни текисликда базис векторлар сифатида қабул қилиш мумкин.

Энди бу базис $\{\overline{e_1},\overline{e_2}\}$ – векторлардан ушбу шартларни қаноатлантиришини талаб этамиз:

$$\overline{e_1}^2 = 1, \overline{e_2}^2 = -1,\ \overline{e_1}\cdot\overline{e_2} = \overline{e_2}\cdot\overline{e_3}. \qquad (4.1)$$

Маълумки, текисликдаги ҳар қандай вектор $\{\overline{e_1},\overline{e_2}\}$ – базислар ёрдамида чизиқли ифодаланади ва $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ векторларнинг чизиқли ифодаси ушбу шаклда бўлади:

$$\overline{OA} = x_1e_1 + y_1e_2,\ \overline{OB} = x_2e_1 + y_2e_2.$$

Агар $\overline{OA}$ векторнинг $\overline{OB}$ векторга кўпайтмасини алгебраик усулларда ҳисоблаб чиқсак,

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB} = (x_1e_1 + y_1e_2)\cdot(x_2e_1 + y_2e_2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Базис векторлар учун қўйилган (4.1) талабни эътиборга олсак,

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB} = x_1x_2 - y_1y_2 \qquad (4.2)$$

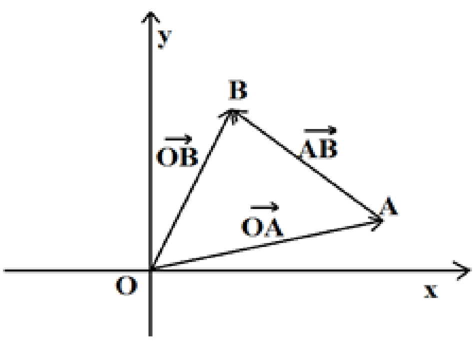
тенгликни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган бу (4.2) тенгликни $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб атаймиз ва $(\overline{OA}\cdot\overline{OB})$ шаклда белгилаймиз. Энди бу скаляр кўпайтма ёрдамида баъзи геометрик катталикларни аниқлаймиз.

Одатда, яъни Евклид геометриясида векторнинг узунлиги (нормаси) векторнинг ўзини-ўзига скаляр кўпайтиришдан ҳосил бўлган катталикдан олинган квадрат илдиз шаклида аниқланар эди, яъни,

$$|\overline{X}| = \sqrt{(X\cdot Y)}$$

тенглик билан.

Текисликда икки $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ нуқталар орасидаги масофани, учлари шу нуқталарда бўлган $\overline{AB}$ векторнинг нормасига тенг деб ҳисоблаймиз. Текисликдаги векторлар устидаги амалларга кўра $\overline{AB}$ вектор $\overline{OB}$ ва $\overline{OA}$ векторлар айирмасига тенг, яъни, $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ (4.1-расм) векторнинг координаталардаги ифодаси



4.1-расм.

$$\overline{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} = (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2.$$

Бундан $|\overline{AB}|$ ни ҳисоблаш унча мураккаб эмас:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}.$$

Демак, геометрияга замонавий таъриф беришда киритилган (4.2) тенглик (4.1) шартни қаноатлантирувчи базислар учун берилган икки нуқтани туташтирувчи вектор нормаси, яъни, шу векторни ифода этувчи кесма узунлиги сифатида аниқланар экан.

Биз Минковский текислигидаги масофани векторлар алгебраси ёрдамида, геометрик йўл билан аниқлаш усули билан танишдик. Бу текисликдаги геометрик катталиклар орасида ҳосил бўладиган муносабатларни Минковский геометрияси деб атаймиз.

Минковский геометриясида айлана ва бурчак. Демак, Минковский геометриясидаги асосий тушунчалар, текисликдаги векторлар ва улар орасидаги муносабатлар Евклид геометриясидаги ҳолатидан фарқ қилмайди. Асосий фарқ базис векторларнинг ўзаро кўпайтмаси талаблари асосида ҳосил қилинган икки нуқта орасидаги масофа аниқланишидадир. Аммо бу ўзгариш масофа ёрдамида аниқланадиган геометрик тушунчаларнинг тубдан ўзгаришига сабаб бўлади.

Аввало масофа тушунчасида пайдо бўладиган ўзгаришлар билан танишиб чиқайлик.

Вектор нормасининг қандай катталик бўлишини аниқлаймиз. Маълумки, вектор нормаси ушбу тенглик билан аниқланади:

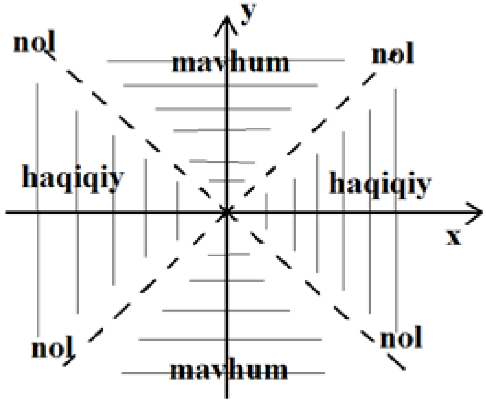
$$|\overline{OA}| = \sqrt{x_1^2 - y_1^2}.$$

Бундан,

$$|\overline{OA}| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 - y_1^2} - \text{ҳақиқий}, |x_1| > |y_1| \text{ бўлса}, \\ 0, \ \ |x_1| = |y_1| \ \text{ бўлса}, \\ \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \cdot i - \text{мавҳум}, |x_1| < |y_1| \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Бу тенгликдан, координаталар бошидан текисликка йўналган векторлар, текисликни уч хил узунликка (нормага) эга векторлардан иборат бўлакларга ажратилишини кўриш мумкин (4.2-расм).

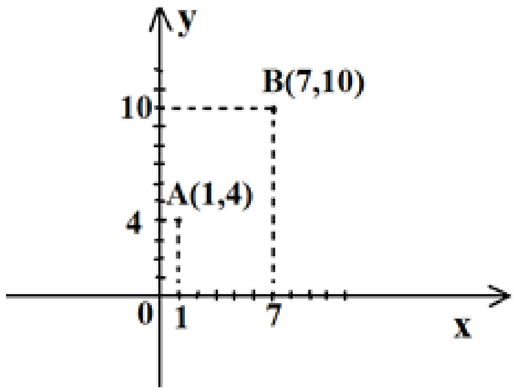
Одатда, векторлар нормасининг катталигига боғлиқ равишда ҳақиқий, мавҳум ва нол узунликдаги векторлар деб аталади. Физика фанида эса бу векторларни мос равишда фазовий, вақтга ўхшаш ва изотроп векторлар деб аташади. Шунинг учун биз ҳам нол векторларни изотроп векторлар деб атаймиз. Одатда, нол вектор деганда нуқта тушунилади, аммо Минковский геометриясида нол вектор фақат нуқтани ифода этмайди. Шу сабабли, узунлиги нолга тенг векторни



4.2-расм.

изотроп вектор деб аташ қулай бўлади. Бу ҳолни ушбу мисолда аниқ тасаввур қилиш мумкин.

Масалан, учлари $A(1{,}4)$ ва $B(7{,}10)$ нуқталарда бўлган вектор узунлиги топилсин. Масалани ҳал қилишдан аввал координаталар системасида A ва B нуқталарни топамиз. Бу нуқталар текисликнинг бир-биридан фарқли икки нуқтаси эканини кўриш мумкин (4.3-расм). Демак, учлари бу нуқталарда бўлган нол вектор бўлмаган $\overline{AB}$ вектор мавжуд. Энди $\overline{AB}$ векторнинг узунлигини ҳисоблаймиз:



4.3-расм.

$$\overline{AB} = \sqrt{(7-1)^2 - (10-4)^2} = \sqrt{36-36} = 0.$$

Демак, $\overline{AB}$ – вектор изотроп вектор.

Вектор изотроп бўлиши учун $|x_1| = |y_1|$ эканини ҳисобга олсак ва бу тенглик $y = \pm x$ тенгликка тенг кучли эканлигидан, изотроп векторлар координаталар системаси биссектрисасига коллинеар вектор эканлигини ҳосил қиламиз.

Шунинг учун координата ўқлари биссектрисаси текисликда изотроп конус деб аталади ва унинг тенгламаси,

$$x^2 - y^2 = 0$$

шаклда ёзилади.

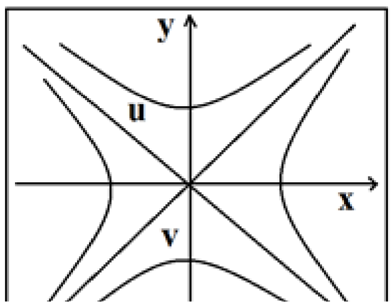
Изотроп конус текисликдаги ҳақиқий ва мавҳум узунликдаги векторлар тўпламини ажратиб туришини расмдан аниқлаш мумкин.

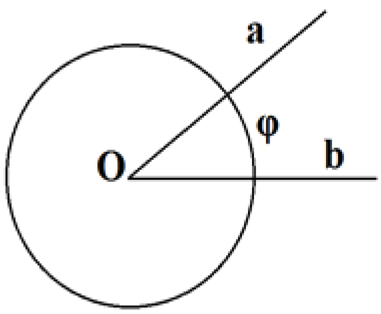
Текисликда нормалари (узунликлари) уч хил вектор мавжудлиги, текисликдаги нуқталар орасидаги масофанинг ҳам уч турга бўлинишига сабаб бўлади.

Худди Евклид геометриясида бўлгани сингари Минковский геометриясида айлана билан танишамиз.

Таъриф. Текисликда айлана деб, берилган нуқтадан тенг масофада ётган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

Минковский геометриясида ушбу таърифни қаноатлантирувчи нуқталарни аниқлашда масофанинг қиймати уч хил бўлишига аҳамият бериш зарур бўлади. Бу ҳоллар қуйидагича: агар айлана маркази координаталар боши $O(0{,}0)$ нуқта ва радиуси r га тенг бўлса, $x^2 - y^2 = r^2$ – ҳақиқий радиусли айлана, $x^2 - y^2 = 0$ – нол радиусли айлана, $x^2 - y^2 = -r^2$ – мавҳум радиусли айлана. Бу тенгликни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни (4.4-расм) да келтирилган.





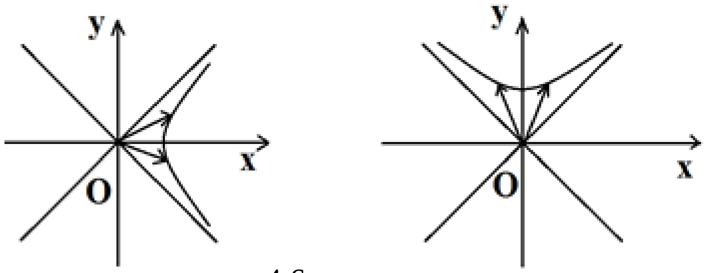
4.5-расм.

Ҳақиқий ва мавҳум радиусли айланалар

умумий асимптотага эга қўшма гипербола бўлса, нол радиусли айлана уларнинг асимптоталари ёки изотроп конусдан иборатдир.

Евклид геометриясида бурчак катталиги маркази бурчак учида бўлган бирлик айлана ёйи узунлигига тенг бўлган катталик ёрдамида аниқланар эди (4.5-расм). Минковский геометриясида ҳам бурчак катталиги худди Евклид геометриясидаги каби аниқланади. Аммо Минковский геометриясида бурчак фақат бир хил узунликка эга векторлар орасида аниқланиши мумкин. Чунки ҳар хил узунликка эга векторларни аниқлайдиган битта айлана мавжуд эмас.

Таъриф. Минковский геометриясида иккита узунликлари бир хил катталикда аниқланадиган векторлар орасидаги бурчак, шу хил узунликдаги бирлик радиусли айлана ёйи узунлигига тенг (4.6-расм).

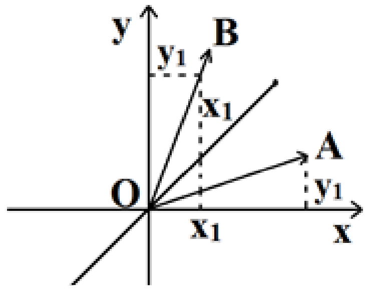


4.6-расм.

Гипербола ёйининг узунлиги чегараланмаганлиги Минковский геометриясида икки вектор орасидаги ψ бурчак $(-\infty, +\infty)$ интервалда бўлиши мумкин эканлигини билдиради. Бурчакнинг бу усулда аниқланиши *гиперболик бурчак* деб киритилади.

Маълумки, эллиптик бурчак $[0,2\pi]$ оралиққа тегишли бўлиб, ўзаро ортоганал йўналишларга $\frac{\pi}{2}$ қиймат ва ёпиқ бурчакка ёки π қиймат мос келар эди. Минковский геометриясида ҳам ортоганал йўналишлар скаляр кўпайтма ёрдамида аниқланади.

Таъриф. Скаляр кўпайтмалари нолга тенг, изотроп бўлмаган векторлар *ортоганал векторлар* деб аталади.



4.7-расм.

Ортоганал векторларнинг геометрик шакли қандай бўлиши билан танишамиз.

$\overline{\mathrm{OA}}\{x_1, y_1\}$ ва $\overline{\mathrm{OB}}\{x_2, y_2\}$ векторлар ортоганал векторлар бўлсин, яъни,

$$(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) = x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0.$$

Бундан $\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_2}{x_2}$ эканлигини ҳосил қиламиз. Бу тенглик $\overline{OA}\{x_1, y_1\}$ ва $\overline{OB}\{x_2, y_2\}$ векторлар изотроп йўналишга нисбатан симметрик бўлгандагина ўринли бўлади. (4.7-расм).

Демак, Минковский геометриясида векторларнинг ортоганаллиги уларни изотроп йўналишига нисбатан симметрик йўналганини билдирар экан. Хусусан, Ox ва Oy ўқлари ҳам ўзаро ортоганал экан.

Киритилган асосий тушунчалар ёрдамида Минковский геометриясида элементар геометриянинг асосий қонуниятларини ўрганиш мумкин. Бу илмий жиҳатдан қизиқ ва кўпгина амалий аҳамиятга эга бўлган машғулотни ўрганишни тингловчига қолдирамиз. Шунингдек, бу маълумотларни [8], [11] адабиётлардан топиш мумкин эканлигини ва бу геометрия Эйнштейн нисбийлик назариясининг геометрик талқини эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

Мустаҳкамлаш учун савол ва масалалар

1. Минковский геометриясида икки нуқта орасидаги масофа қандай аниқланади?

2. Гиперболик синус ва косинус функцияларининг хоссаларини айтинг.

3. Ортоганаллик нима?

4. Базис нима? Текисликда нечта чизиқли эркли вектор бор?

5. Векторнинг чизиқли ёйилмаси нима?

6. Қандай векторлар коллинеар дейилади?

7. Нол ва изотроп векторларнинг фарқи нимада?

8. Минковский текислигида базис векторларга қандай шартлар қўйилади?

9. Минковский текислигида икки векторнинг нормаси қандай аниқланади?

10. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай ифодаланади?

11. Геометрия фанига таъриф беришда қайси тенгликдан фойдаланилади?

12. Евклид ва Минковский геометрияларида икки нуқта орасидаги масофа формулаларида қандай фарқ бор?

13. Учбурчак томонлари бир хил ўлчовли бўлиши мумкинми?

14. Ихтиёрий икки нуқтани нол узунликка эга синиқ чизиқ билан бирлаштириш мумкинми?

15. $A(1{,}5)$ нуқтадан $y = 2x + 3$ тўғри чизиққа ортоганал тўғри чизиқ ўтказинг.

16. Ортоганал йўналишлар изотроп конусга нисбатан симметрик бўлишини кўрсатинг.

17. Минковский текислигида $X\{x_1, y_1\}$ ва $Y\{x_2, y_2\}$ векторлар скаляр кўпайтмаси $(X \cdot Y) = x_1 x_2 - y_1 y_2$ эканлигини кўрсатинг.

18. Минковский текислигида скаляр кўпайтманинг геометрик маъносини тушунтиринг.

19. $\bar{a}\{3{,}7\}$ векторга ортоганал бўлган вектор топинг ва чизмада кўрсатинг.

20. Минковский геометриясида векторлар узунликлари неча турга бўлинади?

21. Узунлиги нолга тенг вектор қандай номланади?

22. Изотроп конус нима?

23. Айлана таърифини келтиринг.

24. Минковский геометриясида неча хил айлана мавжуд?

25. Минковский геометриясида бурчак катталиги қандай аниқланади?

26. Қандай векторлар ортоганал векторлар деб аталади?

27. Ҳақиқий радиусли айланани чизинг.

28. Иккита ортогонал векторларни чизинг.

29. Гиперболик бурчак деганда нимани тушундингиз?

30. Маркази $A(x_0, y_0)$ нуқтада бўлган ҳолда айлана тенгламалари қандай бўлади?

31. Минковский текислигида айлана уринмасининг изотроп конус ичидаги бўлаги уриниш нуқтасида тенг иккига бўлинишини исботланг.

32. Минковский текислигида эллипснинг Евклид текислигидаги таърифини қаноанлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни топилсин.

33. Ихтиёрий нуқтасидан берилган $F(x_0, 0)$ нуқта ва $x = d$ тўғри чизиққача масофалар нисбати ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни топилсин.

34. Шундай $y = f(x)$ чизиқ топилсинки, унинг уринма вектори ҳар доим ҳақиқий қиймат қабул қилсин.

35. Минковский текислигида икки вектор орасидаги бурчак формуласини топинг, хоссасларини айтинг.

36. Ҳақиқий ва мавҳум радиусли айлана нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатса бўладими?

37. Минковский текислигида координаталар бошидан чиқувчи бир нурда ётадиган M ва M^* нуқталар учун $OM \cdot OM^* = r^2$ бўлса, улар r – радиусли айланага нисбатан қандай жойлашади?

5-амалий машғулот. Лобачевский текислиги (2 соат)

Маълумки 1826 йилда Н.И. Лобачевский ўзининг “Тасаввурдаги геометрия” асарида биринчи ноевклид, яъни Евклид геометриясидан фарқли геометрия ҳақида маъруза қилган. Бу сана ноевклид геометрияси вужудга келиш санаси ҳисобланади. Лобачевский геометриясининг вужудга келиш тарихи [11], [13] манбаларда баён этилган. Бу геометриянинг бир неча талқини пайдо бўлгандан сўнг фанда ўз ўрнига ва усулларига эга бўлди [14].

Биз ушбу амалий машғулотда Лобачевский текислигидаги асосий тушунчалар ҳақида Евклид фазосидаги сирт ёрдамида тасаввур ҳосил қилишига харакат қиламиз.

5.1. Лобачевский текислигидаги параллеллик. Маълумки, текисликда “нуқта” ва “тўғри чизиқ” асосий тушунчалар бўлади. Текисликдаги геометрияни ўрганиш учун асосий тушунчалар маълум бир нечта аксиомаларни қаноатлантириши зарур.

1^0. Хар қандай икки нуқтадан битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтади.

2^0. Тўғри чизиқ текисликни икки ярим текисликка ажратади (бўлади).

3^0. Текисликда берилган радиусли айлана чизиш мумкин.

4^0. Тўғри бурчаклар ўзаро тенг.

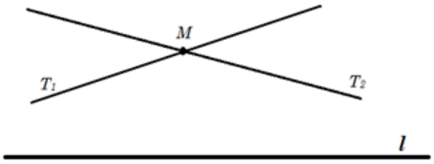
Ваниҳоят бешинчи параллеллик аксиомаси ёки V постулат. Бу аксиома тарихда жуда кўп мунозара ва тортишувга сабаб бўлган.

Н.И. Лобачевский V постулатни қуйидаги шаклда олишни таклиф қилган.

Аксиома. Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта берилган бўлсин. Бу нуқтадан берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган иккита тўғри чизиқ ўтказиш мумкин (5.1-расм).

Бунда $T_1\, va\, T_2$ тўғри чизиқлар l тўғри чизиқ билан кесишмайдиган тўғри чизиқлар.

Табиийки Евклид (мактаб) геометрияси доирасида бундай параллелликни тасаввур қилиш қийин.

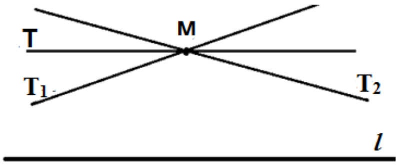


5.1-расм.

Ушбу амалий машғулотнинг асосий мақсади – Лобачевский аксиомасини Евклид геометрияси доирасида, яъни Евклид геометрияси элементлари ёрдамида тасаввур қила олиш имконини яратиш.

Аввало биз шу аксиомадан келиб чиқиши мумкин бўлган тасдиқлар билан танишамиз.

1-тасдиқ. Берилган нуқтадан тўғри чизиқ билан кесишмайдиган чексиз кўп тўғри чизиқ ўтказиш мумкин (5.2-расм).

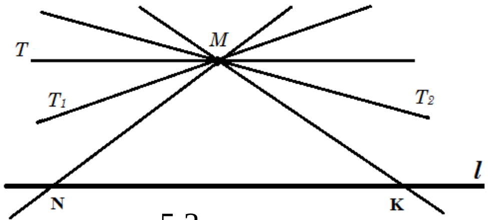


5.2-расм.

Бу тасдиқ исботини ушбу чизма орқали тушунтирамиз.

Аксиомага кўра $T_1\, va\, T_2$ – кесишмайдиган тўғри чизиқлар бўлсин. Бу тўғри чизиқлар ҳосил қилган вертикал бурчаклардан M нуқтадан ўтувчи ва l билан кесишмайдиган MT тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ l тўғри чизиқ билан кесиша олмайди. Чунки T тўғри чизиқ l билан кесишиши учун $T_1\, ёки\, T_2$ билан кесишиши керак бўлади. Бундай бўлиши мумкин эмас, чунки унинг кесишиши, аслида устма-уст тушишини кўрсатади. Бундай MT тўғри чизиқни чексиз кўп ҳолда ўтказиш мумкин.

Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта орқали тўғри чизиқ билан кесишадиган тўғри чизиқлар ҳам ўтади.



5.3-расм.

Масалан, 5.3-расмда MN ва MK тўғри чизиқлар l тўғри чизиқ билан кесишувчи тўғри чизиқлардир.

Демак, M нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасида l тўғри чизиқни кесувчи MN, MK ва l билан кесишмайдиган (MT) тўғри чизиқлар мавжуд экан.

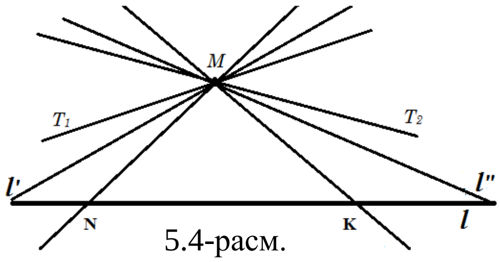
Таъриф. Берилган l тўғри чизиқда ётмаган M нуқтадан ўтувчи , тўғри чизиқлар дастасида l тўғри чизиқ билан кесишувчи ва l тўғри чизиқ билан кесишмайдиган тўғри чизиқлар тўпламини чегараловчи l' тўғри чизиқ l тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ деб аталади.

Бу Лобачевский текислигидаги тўғри чизиқларнинг параллеллиги таърифи, Евклид текислигидаги параллеллик тушунчасидан тубдан фарқ қилади. Лобачевский текислигида кесишмаслик тушунчаси ва параллеллик тушунчаси ҳар хил тушунчалардир.

Келтирилган таърифни қаноатлантирувчи тўғри чизиқ ягона бўлмайди.

2-тасдиқ. Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта берилган бўлсин. Бу нуқтадан берилган тўғри чизиқга иккита параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Тасдиқни тўғри эканига N нуқтани чапга, K нуқтани ўнгга қўзғатиш йўли билан кўрсатиш мумкин. Бунда тўғри чизиқ M нуқта атрофида бурилади ва бурилиш жараёнида кесишувчи тўғри чизиқ кесишмайдиган тўғри чизиқлар тўпламига ўтади. Чегаравий ҳолат параллелликни беради (5.4-расм).



5.4-расм.

Бу текисликнинг Кэли-Клейн, яъни доира ичидаги талқини билан [15] да танишиш мумкин.

5.2. Лобачевский текислигининг Евклид фазосидаги талқини. Маълумки, гиперболани симметрия ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган шакл икки паллали гиперболоид деб аталади. Бунда гиперболанинг ассимптоталаридан айланма конус сирт ҳосил бўлади. Бу айланма конус гиперболоиднинг ассимптотик конуси деб аталади.

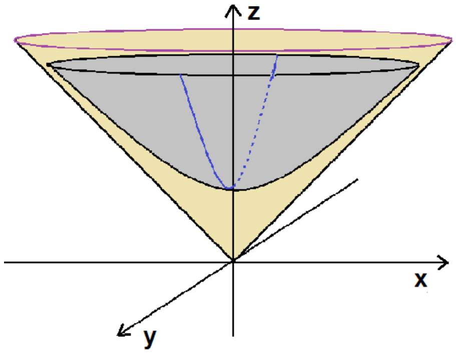
Биз Лобачевский текислиги талқинини ҳосил қилиш учун икки паллали гиперболоиднинг бир палласидан фойдаланамиз. Бундан сўнг гиперболоид деганда икки паллали гиперболоиднинг бир палласини тушунамиз. Тасаввур қилиш осон бўлиши учун, ассимптотик конус ва гиперболоид бирор координаталар системасида берилган бўлсин деб ҳисоблаймиз. Бунда координаталар боши конус учида, Oz ўқи эса конуснинг симметрия марказида бўлсин (5.5-расм).

Гиперболоидга тегишли бўлган нуқталарни Лобачевсгий текислиги “нуқта”лари деб қабул қиламиз.

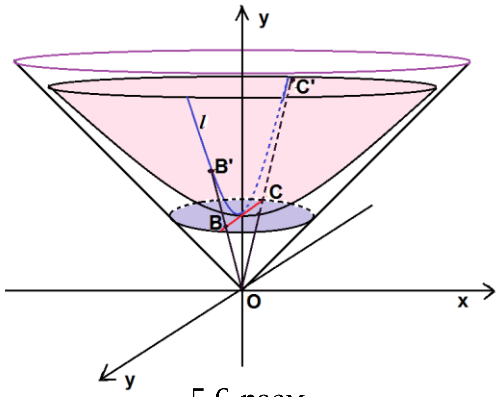
Конус учидан ва гиперболоидни кесувчи текисликларни ўтказамиз. Кесимда гипербола ҳосил бўлади. Шунингдек, бу текислик ассимптотик конусни икки ясовчиси бўйича кесиб ўтади. Бу ясовчилар кесимда ҳосил бўлган гипербола учун ассимптота бўлади.

Лобачевский текислигининг “тўғри чизиғи” – деб гиперболоидни конус учидан ўтувчи текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

Бу чизиқ гиперболоид устида ётувчи гипербола бўлади.



5.5-расм.



5.6-расм.

Маълумки, фазода берилган икки текислик ҳар доим бирор тўғри чизиқ (Евклид маъносида) бўйлаб кесишади.

Координаталар системасида π гиперболоид ва α ва β ассимптотик конус учидан ўтувчи текисликлар берилган бўлсин. Ҳар иккала текислик ассимптотик конус учидан ўтганлиги учун, улар албатта бирор l тўғри чизиқ бўйича кесишади. Бу кесишувчи тўғри чизиқ конусга нисбатан 3 ҳил жойлашиши мумкин:

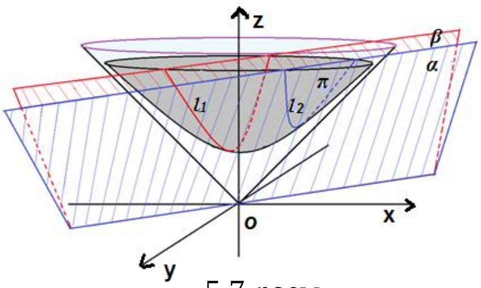
1. Конусдан ташқарида;

2. Конус ичида;

3. Конус устида.

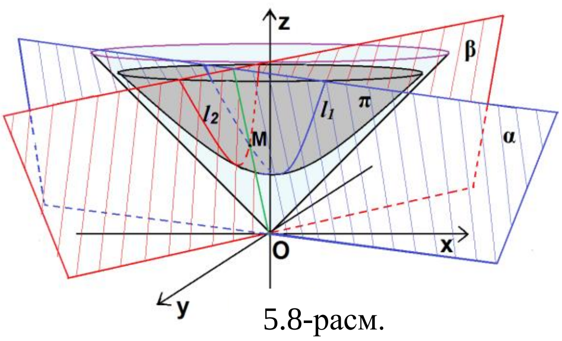
Берилган гиперболоид ва берилган текисликлар кесишишидан кесимида Лобачевский тўғри чизиқлари (яъни гиперболалар) ҳосил бўлади.

Берилган икки текислик гипербилоиддан ташқарида ва ассимптотик конуснинг учи орқали ўтувчи m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) бўйлаб кесишсин. Бу текисликлар гиперболоиддан ташқарида кесишганлиги учун бу икки текислик гиперболоид устида умумий нуқтага эга эмас. Шунинг учун текисликлар ва гиперболоид кесишишидан кесимида ҳосил бўлган Лобачевский тўғри чизиқлари умумий нуқтага эга бўлмайди. Умумий нуқтага эга бўлмаган тўғри чизиқлар кесишмайдиган тўғри чизиқлар деб аталади. (5.7-расм).



5.7-расм.

Берилган икки текислик гиперболоиднинг ичидан ва ассимптотик конус учи орқали ўтувчи m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) бўйлаб кесишсин. У ҳолда, бу икки текислик гиперболоид устида умумий нуқтага эга бўлади. Гиперболоид ва текисликлар кесишишидан кесимида ҳосил бўлган Лобачевский тўғри чизиқлари ҳам умумий нуқтага эга бўлади. Умумий нуқтага эга бўлган Лобачевский тўғри чизиқлари кесишадиган тўғри чизиқлар деб аталади (5.8-расм).

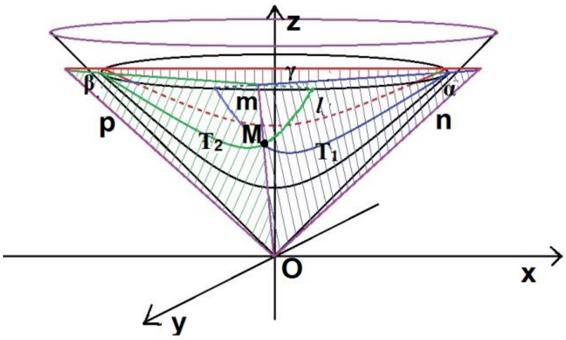


5.8-расм.

Энди гиперболоид устида киритилган “нуқта” ва “тўғри чизиқ” тушунчалари учун Лобачевский аксиомасининг бажарилишини кўрсатамиз.

Бизга юқоридаги гиперболоид ва α, β, γ учта ассимптотик конус учидан ўтувчи текисликлар берилган бўлсин. Бу учта текислик ўзаро кесишишидан учёқ ҳосил бўлади. Текисликлар кесишишидан ҳосил бўлган $\alpha \cap \beta = m$, $\alpha \cap \gamma = n$ ва $\beta \cap \gamma = p$ тўғри чизиқлар (Евклид маъносида) учёқнинг қирралади бўлсин. Ҳар уччала текислик ҳам ассимптотик конуснинг учи орқали ўтганлиги учун учёқнинг учи ҳам ассимптотик конуснинг учида ётади.

Бу учёқнинг m қирраси гиперболоид ичида, қолган n ва p қирралари ассимптотик конусдан ташқарида ётсин. У ҳолда, учёқнинг m қирраси гиперболоид устида M нуқтани чизади. n ва p қирралари орқали ўтувчи γ текислик гиперболоид билан кесишиши натижасида кесимида l тўғри чизиқ ҳосил бўлади. m ва n қирралари орқали ўтувчи α текислик ва m ва p қирралари орқали ўтувчи β текисликлар гиперболоид билан кесишиши натижасида кесимида мос равишда T_1 ва T_2 тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Бу икки тўғри чизиқ M нуқтада кесишади ва l тўғри чизиқ билан кесишмайди (5.9-расм).



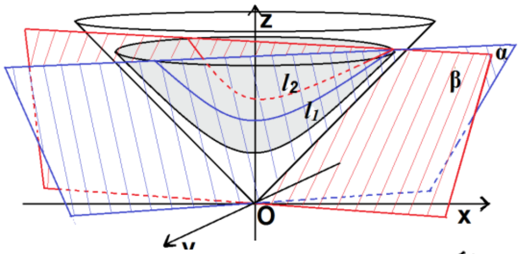
5.9-расм.

Демак, M нуқтадан ўтувчи ва l тўғри чизиқ билан кесишмайдиган иккита T_1 ва T_2 тўғри чизиқлар бор экан.

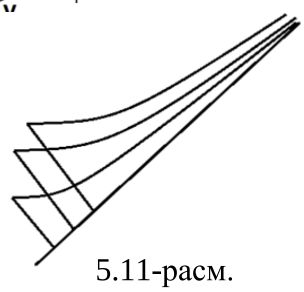
Бу текислик учун Лобачевский аксиомаси бажарилади.

Энди гиперболоид устидаги параллел тўғри чизиқларни кўрсатамиз.

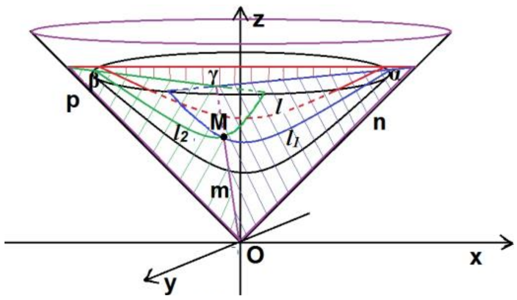
Бизга юқоридаги гиперболоид ҳамда α ва β ассимптотик конус учи орқали ўтувчи текисликлар берилган бўлсин. Бу текисликлар кесишишидан ҳосил бўлган m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) гиперболоиднинг ассимптотик конуси ясовчисида ётсин. Яъни, икки текислик ассимптотик конуснинг ясовчиси бўйлаб кесишсин. У ҳолда, m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) текисликлар ва гиперболоид кесишишидан кесимида ҳосил бўлган икки l_1 ва l_2 Лобачевский тўғри чизиқлари умумий ассимптотага эга бўлган гиперболалар шаклида бўлади. Бу икки тўғри чизиқ кесишадиган ҳам кесишмайдиган ҳам тўғри чизиқлар синфига кирмайди. Шунинг учун бу икки тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқлар деб аталади (5.10-расм).



Ассимптотик конусда бирор ясовчини танлаб олайлик. Шу ясовчи орқали ўтувчи тўғри чизиқлар тўпламидан гиперболоид билан кесишувчи текисликларни қарайлик. Бу текисликларнинг ҳар бири гиперболоидни бир Лобачевский тўғри чизиғи бўйлаб кесади. Бу тўғри чизиқлар Лобачевский текислигининг ўзаро параллел тўғри чизиқларини ташкил этади (5.11-расм).


5.11-расм.

Бизга юқоридаги учта текисликлар ўзаро кесишишидан ҳосил бўлган учёқ берилган бўлсин. Бу учёқнинг m қирраси гиперболоид ичида ётсин. У ҳолда, бу m қирра гиперболоид устида M нуқтани ясайди. Қолган икки n ва p қирралари эса гиперболоиднинг ассимптотик конусининг ясовчисида ётсин. У ҳолда, n ва p қирралари орқали ўтувчи γ текислик гиперболоид билан кесишишидан кесимида l тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Шунингдек, m ва n қирралари орқали ўтувчи α текислик ва m ва p қирралари орқали ўтувчи β текисликлар гиперболоид билан кесишиши натижасида кесимда мос равишда l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Бу икки тўғри чизиқ M нуқтада ўзаро кесишади ва l тўғри чизиқ билан кесишмайди (5.12-расм).



5.12-расм.

Келтирилган 5.12-расм тўғри чизиқдан ташқарида ётган M нуқтадан унга параллел икки тўғри чизиқ ўтишини кўрсатади. Бу эса Лобачевский аксиомасининг бажарилишини, яъни, бу текисликнинг гиперболоид устидаги талқинини кўрсатади.

6-амалий машғулот. Геометрия фанининг замонавий таърифи (2 соат)

Одатда геометрия сўзи “гео” – ер, “метрия” – ўлчаш, яъни, “ердаги ўлчаш” деган маънони беради. Геометрия деган атама фаннинг қадимда ҳақиқатан ҳам ердаги ўлчаш ишлари жараёнида пайдо бўлгани сабабдир.

Геометрия эрадан олдинги III асрдаёқ фан сифатида ривожланиб, Евклиднинг “Негизлар” китобида тўла мантиқий кўринишга эга бўган фандир. Демак, геометрия фани қадимий фан бўлиб, унинг пайдо бўлганига 24 асрдан кўпроқ вақт ўтибди. Бу 24 аср давомида нафақат геометрия фани, ҳозирги даврда таълим тизимида ўқитилаётган барча фанлар пайдо бўлди ва ривожланди.

Бошқа фанлар сингари геометрия фанида ҳам бир неча бор ўз бошидан “революцион” ўзгаришларни ўтказган. Бу ўзгаришлар даврида геометрия фани янги йўналиш бўйича ривожланишларни ўз бошидан ўтказган. Шунингдек, бу ўзгаришлар геометрия фанининг асосига ҳам тааллуқли бўлган.

Маълумки, геометрия фанининг асоси унинг “аксиомалар” – пойдевори устига қурилишидир. Умуман аксиомалар ҳар қандай фаннинг қурилишининг асосини ташкил этади.

Геометрия фани айтганимиздек, эрадан олдинги III асрдаёқ ўзининг аксиоматик қурилишига эга бўлган. Бу аксиомалар XIX асргача, яъни, Н.И.Лобачевский томонидан янгича аксиома таклиф этилгунга қадар норозиликлар ва аксиомаларга ишончсизликлар гирдобида бўлган.

Шуни айтиб ўтиш керакки, XX асргача даврда Евклид аксиомаларини билиш ва уни ўрганиш инсонлар ўртасида зиёлилик белгиси ҳисобланган. Яъни, ҳар қандай илм билан шуғулланган одам бу тушунчаларни билиши оддий ҳол бўлган.

Биз бу қўлланма доирасида, аксиома билан боғлиқ изланишларга тўхталиб ўтирмаймиз. Аммо бу муаммога боғлиқ фикрларни “Геометрия асослари” га доир адабиётлардан топиш мумкин.

Мақсадимиз геометрия фанининг унинг ҳозирги даврдаги ривожига мос келувчи замонавий таърифини келтиришдир. Хўш, бунинг учун аввало геометрия фани нималар билан ва қандай шуғулланишига эътибор қаратайлик (бунда биз тингловчи геометриянинг бошланғич тушунчаларидан хабардор деб ҳисоблаймиз, ҳеч бўлмаса 8-синф даражасида). Одатда, геометрик шакл хоссасини ўрганаётганда бу шакл қандай нарсадан (материалдан) ташкил топгани, унинг ранги ёки юмшоқ қаттиқлиги, унинг қаерда тургани бизни қизиқтирмайди. Шунингдек, ўрганаётган шакл ўлчами ҳақида гапирилганда фақат унинг катталиги аҳамиятга эга бўлиб, ўлчов бирлигининг қандай экани ҳам аҳамиятсиз. Масалан, “томонлари 3, 4 ва 5 бирликка эга учбурчак” деганда кўз олдимизда шу ўлчамли тўғри бурчакли учбурчак намоён бўлади. Биз бу ўлчовларни “қадам” дами, “қулоч” дами, сантиметр ёки ёруғлик йилида ўлчанаётгани билан қизиқмаймиз. Шунингдек, яна бир масалани қарайлик.

Масала. Қарама-қарши томонлари тенг, қўшни томонлари a ва b бирликка тенг тўртбурчак юзи топилсин. Қарама-қарши томонлари тенг бўлгани учун бу тўртбурчак параллелограмм эканини биламиз. Аммо бундай параллелограммлар чексиз кўп хилда бўлади. Энг содда ҳолда бу тўғри тўртбурчак ёки томонлари орасидаги бурчак α бўлган праллелограмм. Аммо α бурчак ораликдаги ихтиёрий қийматни қабул қилиши мумкин. Умуман айтганда, масалада берилган тўртбурчак юзасини

$$S = ab\sin\alpha$$

тенглик билан аниқлаш мумкин. Лекин геометрия фанида тўғри тўртбурчак ва параллелограмм алоҳида-алоҳида синф вакили сифатида ўрганилади. Бунда α бурчак ўзгармас деб ҳисобланади. Аслида бурчакнинг ҳар хил қийматларига тегишли тўртбурчаклар ҳам ҳар хил деб ҳисобланади. Аммо бу тўртбурчаклар бири иккинчисидан бурчак ўзгариши билан фарқ қилади. Уларнинг бирининг бурчагини ўзгартириш йўли билан бошқасини ҳосил қилиш мумкин.

Аҳамият берсангиз, геометрия шаклни ўзгармаган ҳолда ўрганар экан. Аммо шу вақтнинг ўзида шаклни қаерда экани юқорида айтиб ўтилганидек, аҳамиятга эга эмас.

Демак, томонлари a ва b бўлган тўғри тўртбурчак юзи $S = a \cdot b$ бўлади. Бу тенгликни аниқлаётганда, a ва b нинг ўлчами қандай экани, бу тўртбурчакнинг қаерда жойлашгани бизни қизиқтирмайди. Фақат текисликдаги шакл бўлса кифоя.

Геометрияга замонавий таъриф беришда бу фаннинг юқорида айтиб ўтилган хислатларини ҳисобга олиш керак.

Биз америкалик олим Тёрстон томонидан 1992 йилда унинг илмий мақоласида берилган таърифни келтирамиз.

Бизга бирор X чекли ёки чексиз тўплам берилган бўлсин. Унинг элементларини нуқталар деб атаймиз. Тўпламнинг $x, y \in X$ элементларига бирор катталикни мос қўювчи $\varphi(x, y) = k$ функция берилган бўлсин. Агар

$\varphi(x,y)$ функция $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ шартни қаноатлантирса, k – катталикни x, y нуқталар орасидаги “масофа” деб атаймиз.

Энди бизга бирор Y тўплами берилган бўлсин. X ва Y тўплам элементлари учун шундай f акслантириш мавжуд бўлсинки, бу акслантириш натижасида бир-бирига мос келувчи нуқталар орасидаги масофалар тенг бўлсин, яъни,

$$\varphi(x,y) = \varphi\big(f(x), f(y)\big).$$

Бундай мослик ўрнатилган икки X, Y тўпламлар ўзаро изометрик тўплам деб аталади ва $Y = \mathrm{Isom}X$ шаклда белгиланади.

Тёрстон томонидан келтирилган геометрия фанининг замонавий таърифи қуйидагича.

Таъриф. Геометрия $(X, \mathrm{Isom}X)$ тўпламларга тегишли хоссаларни ўрганувчи фандир.

Бу ушбу таърифни соддароқ шаклда тушунтиришга, элементар геометрия фани ҳам шу таърифга мос келиши ва текисликда бу таърифга мос келувчи ҳар хил геометриялар мавжуд экани билан танишамиз.

Аввало $\mathrm{Isom}X$ тушунчасини “ҳаракат” тушунчаси билан солиштириб кўрайлик. Умуман айтганда, ҳаракат, яъни, параллел кўчириш ва буриш даврида мос шаклнинг нуқталари орасидаги масофа ўзгармайди. Шу нуқтаи назардан ҳаракат изометриянинг хусусий ҳоли бўлар экан. Шунинг учун f – акслантиришни ҳаракат деб атаймиз (аммо f – айнан биз билган ҳаракатдан бошқача бўлиши ҳам мумкин).

Таърифда X чекли ёки чексиз тўплам деб айтилди. Бунда X тўплам элементлари сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Элементлари сони чекли бўлган тўпламлар геометрияси “чекли геометрия” номи билан аталиб, замонанинг энг янги ривожланаётган бўлимидир. Масалан, телеэкран ёки уяли телефон юзини квадратлардан иборат тўр билан қопланган деб ҳисобласак, бу тўр томонлари кесишиш нуқталари чекли сонда бўлади. Бу юзада геометрик шаклларни ҳосил қилиш шу нуқталардан иборат қисмий тўпламдан иборатдир. Демак, чекли сондаги нуқталардан иборат шакллар хоссасини ўрганишга тўғри келади. Бу “дискрет математика” билан боғлиқ бўлган геометрик тушунчалардир.

Соддалик учун биз оддий текислик билан боғлиқ геометриялар, яъни, чексиз тўплам геометриялари билан шуғулланамиз. Табиийки, “Биз мактабда ўрганган геометрия фани юқорида айтилган таърифга мос келадими?”, – деган савол пайдо бўлади. Бу саволнинг жавоби – “ҳа, мос келади”. Шу тушунчанинг исботи билан шуғулланамиз.

Бизга α ва β текисликлар берилган бўлсин. Бунда “нуқта”, “тўғри чизиқ”, “текислик” каби тушунчаларни бошланғич тушунчалар деб ҳисоблаймиз. Берилган α текисликда Oxy Декарт координаталар системасини киритайлик. Бунда, учлари $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталарда бўлган кесма узунлиги

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{6.1}$$

тенглик билан ҳисобланади. Агар $d = \varphi(A,B)$ белгилаш киритсак, $\varphi(A,B)$ –

масофа функцияси бўлади. Чунки, $\varphi(A,B)=\varphi(B,A)$ – шарти бажарилади.

Энди β текисликда $O'x'y'$ декарт координаталар системаси ўрнатилган бўлсин. Агар α ва β текисликларни бир текислик деб ҳисобласак, улардаги декарт координаталар системаси орасида, яъни, бир-бирига мос келувчи нуқталар координаталари орасида қуйидаги акслантиришни ўрнатиш мумкин:

$$f:\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b. \end{cases} \tag{6.2}$$

Агар f акслантиришда A ва B нуқталар A' ва B' нуқталарга аксланган бўлса, улар орасидаги (6.1) масофа $\varphi(A,B)=\varphi(A',B')$ эканини исбот қилиш мумкин (бу ишни тингловчига қолдирамиз).

Демак, (6.1) тенглик билан аниқланган кесма узунлиги (масофа), (6.2) акслантиришда сақланар экан. Яъни, текисликлар орасида изометрия мавжуд. Мактаб геометрияси текисликдаги шаклларнинг (6.2) акслантиришда сақланадиган хоссаларини ўрганувчи фан экан. Одатда, мактабда ўрганиладиган текислик геометрияси (планиметрия) Евклид геометрияси деб номланади.

Яна бир савол ўз-ўзидан пайдо бўлади: “Евклид геометриясидан бошқа геометрия ҳам борми?”. Бу саволга ҳам “ҳа, мавжуд”, – деб жавоб берамиз. Масалан, ўша α текислигида кесма узунлигини

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2} \tag{6.3}$$

тенглик билан аниқланса, бу масофа

$$f:\begin{cases} x' = xch\varphi + ysh\varphi + a, \\ y' = xsh\varphi + ych\varphi + b \end{cases} \tag{6.4}$$

акслантиришда сақланишини кўрсатиш мумкин. Бу деган сўз, янгича масофа (6.3), янги акслантириш (6.4) – изометрияни ҳосил қилаяпти. Бу эса янги геометрияни пайдо қилади. Фанда бу “*Псевдоевклид геометрия*” ёки “*Минковский геометрияси*” деб аталади.

Демак, таърифга кўра “масофа” ва “изометрик акслантириш” мавжуд бўлса, янги геометрия ҳосил бўлар экан. Хўш, текисликда буни неча хил усулда бажариш мумкин? Бу саволга жавоб қуйидагича: агар биз “нуқта”, “тўғри чизиқ”, “текислик” каби бошланғич тушунчаларни ўзгартирмасак, яъни, мактаб геометрия дарслигидагидек тушунсак, бу геометриялар сони 9 та бўлади. Бошланғич тушунчаларни ўзгартирсак, бу геометриялар сони исталганча бўлиши мумкин.

Юқорида қўйилган чегаралаш ўз навбатида f акслантиришга ҳам чекловлар қўяди. Чунки бу акслантириш асосий тушунчага асосий тушунчани мос қўйиши керак бўлади. Акслантириш ўзаро бир қийматли бўлгани учун, “нуқта” – “нуқта” га аксланади. Шунингдек, акслантиришда “тўғри чизиқ” – “тўғри чизиқ”қа аксланиши зарур.

Демак, бу қўйилган талаблардан – f акслантириш фақат текисликдаги координаталарга нисбатан каср чизиқли акслантиришлар бўлиши мумкин эканлиги келиб чиқади.

Бунда кесма узунлиги

$$d = \frac{1 + x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}\sqrt{1 + x_2^2 + y_2^2}} \qquad (6.5)$$

ва

$$d = \frac{1 - x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}} \qquad (6.6)$$

тенгликлар билан аниқланганда мос келувчи изометрик акслантиришларни кўрсатишимиз мумкин.

Масофа (6.5) тенглик билан аниқланган геометрия *сферик* ёки *эллиптик геометрия*, (6.6) тенглик билан аниқланганда *гиперболик* ёки *Лобачевский геометрияси* деб аталади.

Биз Евклид, Минковский, сферик ҳамда Лобачевский геометриялари мавжуд экани ҳақида маълумот бердик, буларнинг сони 4 та. Айтиб ўтилганидек, уларнинг жами сони 9 та бўлиши керак.

Мустаҳкамлаш учун савол ва масалалар

1. Геометрия фанига замонавий таъриф беринг.
2. Минковский геометриясига таъриф беринг.
3. Лобачевский геометриясидаги нуқта ва тўғри чизиқни тушунтиринг.
4. Сферик геометрияда кесма узунлиги қандай ҳисобланади?
5. Гиперболик геометрияда кесма узунлиги қандай ҳисобланади?
6. Евклид геометриясидан бошқа неча хил геометрия мавжуд?
7. Аксиома таърифини келтиринг.
8. Масофа нима?
9. Изометрия нима?
10. Қандай мослик ўзаро бир қийматли дейилади?
11. Тўплам қандай тушунча?
12. Чекли ва чексиз элементли тўпламга мисол келтиринг.
13. Тўғри чизиқда координаталар системаси қандай киритилади?

V. КЕЙСЛАР

1-кейс учун мавзу

Чизиқли фазо аксиомаларини келтиринг.

2-кейс учун мавзу

Чизиқли фазо аксиомаларидан келиб чиқадиган натижаларни айтиб беринг.

3-кейс учун мавзу

Чизиқли фазога мисоллар келтиринг.

4-кейс учун мавзу

Чизиқли комбинация ва чизиқли боғлиқлик ҳақида айтиб беринг.

5-кейс учун мавзу

Чизиқли фазо ўлчами ва базис ҳақида айтиб беринг.

6-кейс учун мавзу

Аффин фазоси моҳиятини ёритиб беринг.

7-кейс учун мавзу

Аффин фазо ўлчами. Аффин координаталар. Моҳиятини ёритиб беринг.

8-кейс учун мавзу

Координаталари билан берилган векторлар устида амалларга мисоллар келтиринг.

9-кейс

Аффин координаталарни алмаштиришни тушунтириб беринг.

10-кейс

Аффин фазода тўғри чизиқ ва текислик ҳақида тушунтириб беринг.

11-кейс

Евклид ва псевдоевклид фазоси ҳақида тушунтириб беринг.

12-кейс

Дифференциал геометриянинг асосий тушунчалари ҳақида тушунтириб беринг.

13-кейс

Сирт ички геометрияси ва Риман геометрияси ҳақида тушунтириб беринг.

14-кейс

Сирт ташқи геометрияси ҳақида тушунтириб беринг.

15-кейс

Кўпхилликнинг таърифини келтиринг.

16-кейс

Кўпхилликларнинг баъзи хоссаларини келтиринг.

VI. Глоссарий

(Изоҳли луғат).

Биргаликда- чизиқли тенгламалар системасининг ҳеч бўлмаганда битта эчими мавжуд бўлса;

биргаликда бўлмаган система- чизиқли тенгламалар системасининг бирорта ҳам эчими мавжуд бўлмаса;

аниқмас система- чизиқли тенгламалар системаси биттадан кўп эчимларга эга бўлса;

Гаусс усули-номаълумларни кетма-кет йўқотиш усули;

Крамер усули-минорлар ва алгебраик тўлдирувчилар ёрдамида ҳисоблаш

абел группа - $<G,*,'>$ группа, агар группанинг “$*$” бинар амали коммутатив булса, яъни хар кандай $a,б\in Г$ лар учун $a*б=б*a$ уринли булса, коммутатив ёки абел группа дейилади.

чексиз тартибли группа-$<G,*,'>$ группанинг $Г$ асосий элементлар туплами чекли булса, бу элементлар сонига группанинг тартиби дейилади.

Агар $Г$ чексиз булса, у чексиз тартибли группа дейилади.

қисм группа-$<Г,\cdot,^{-1}>$группанинг қисм группаси деб, бу группанинг хар кандай қисм алгебрасига айтилади.

гомоморфизм-$<G,\cdot,^{-1}>$группани $<H,\circ,^{-1}>$ группага (устига) гомоморфизми деб $Г$ тыпламни $Ҳ$ тупламга (тупламнинг устига) акслантирувчи ва $Г$ группанинг асосий амалларини сакловчи, яъни куйидаги;

(1) $Г$ дан олинган хар кандай $a, б$ ларда $h(a\cdot b)=h(a)\circ h(b)$;

(2) Γ дан олинган хар кандай a да $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$

шартларни каноатлантирувчи $ҳ:\Gamma \to Ҳ$ (устига) акслантиришга айтилади.

циклик-Агар группанинг барча элементлари, шу группанинг муайян бир элементининг даражаларидан (карралиларидан) ҳосил қилинган бўлса бундай группа циклик дейилади ва бу элемент циклик группанинг барпо этувчи элементи дейилади.

Матритсанинг детерминанти - қуйидаги формула билан аниқланувчи сонга айтилади:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{ij} \bar{M}_{j}^{1}.$$

устки учбурчак (остки учбурчак)-Агар A матритса бош диагоналининг остидаги (устидаги) барча элементлар нолъга тенг бўлса.

учбурчак-Устки ва остки учбурчак матритсалар **учбурчак** матритсалар дейилади.

кўп чизиқли-Агар бир неча аргументли сонли функтсия ҳар бир аргументига нисбатан чизиқли бўлса.

чизиқли қисм фазоси -В чизиқли фазонинг Л қисм тўпламининг ўзи ҳам В да аниқланган векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амалларига нисбатан чизиқли фазо бўлса, Л ва В фазонинг *чизиқли қисм фазоси* дейилади.

дим-фазонинг ўлчови

фазоларнинг *кесишмаси* -Ҳам $Л_1$ га, ҳам $Л_2$ га тегишли бўлган векторлар тўплами $Л_0$ чизиқли қисм фазо бўлишини текшириб кўрш осон; у

$Л_1$ ва $Л_2$ қисм фазоларнинг *кесишмаси* дейилади.

матритса -м та сатр ва н та устундан иборат сонлар жадвали

квадрат матритса- матритсанинг сатрлари сони устунлар сонига тенг

нол матритса -барча элементлари нолдан иборат матритса.

диагонал матритса -фақат бош диоганал элементлари нолдан фарқли бўлган квадрат матритса

бирлик матритса -бош диагонал элементлари бирдан иборат бўлган диагонал матритса.

матритсани қўшиш сонга кўпайтмаси- матритсанинг барча элементларини сонга кўпайтмасидан ҳосил бўлган матритса.

скаляр кўпайтма - *Агар В хақиқий чизиқли фазода икки вектор аргументли (х,й) скаляр функтсия учун ушбу*

1) *хар қандай* $x, y \in V$ *учун* $(x, y) = (y, x)$;

2) *хар қандай* $x_1, x_2, y \in V$ *учун* $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2 y)$;

3) *хар қандай* $x, y \in V, \lambda \in R$ *учун* $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

хар қандай нолъдан фарқли $x \in V$ *вектор учун* $(x, x) > 0$ *шартлар бажарилса, у скаляр кўпайтма деб аталади.*

векторларнинг орасидаги масофа - *х ва у векторларнинг орасидаги масофа* (кўпинча метрика хам дейилади) *деб* $\rho(x, y) = |x - y|$ *хақиқий функтсияга айтилади.*

ортогонал-*Агар х ва й векторлар орасидаги бурчак* $\frac{\pi}{2}$ *га тенг бўлса, бу векторлар ортогонал дейилади.*

ортогонал проектсия-V_1 *қисмфазога тегшили бўлмаган* $x \in V$ *вектор учун шундай* $x_1 \in V_1$ *вектор топилсаки,* $x - x_1$ *вектор* V_1 *қисмфазога ортогонал бўлса, бундай* x_1 *вектор х векторнинг* V_1 *қисмфазога ортогонал проектсияси (сояси) деб аталади.*

к*-тартибли минор-А* матритсада қандайдир *к* та сатр ва *к* та устунларнинг кесишган жойидаги элементлардан ташкил топган к-тартибли матритсанинг детерминанти *к*-тартибли минор дейилади.

алгебраик тўлдирувчиси-A-квадрат матритса бўлсин $(n=s)$. Бу ҳолда $M=M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ минорнинг элементларидан ўтмайдиган сатрлар ва устунларнинг кесишишидан ҳосил бўлган минор M га тўлдирувчи минор деб аталади. Ушбу

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_k}=(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}\; M'^{\,j_1 \dots j_k}_{\,i_1 \dots i_k}$$

сон эса M минорнинг алгебраик тўлдирувчиси дейилади.

Лаплас теоремаси- А квадрат матритсада $i_1, i_2, \dots, i_k (1 \le i_1 < \dots < i_k \le n)$ сатрлар (устунлар) танланган бўлсин. Агар сатрлари (устунлари) шу танланган сатрларда (устунларда) жойлашган мумкин бўлган тартибли минорларни уларнинг алгебраик тўлдирувчиларига кўпайтириб, бу кўпайтмалар барчасининг йиғиндиси олинса, А матритсанинг детерминанти ҳосил бўлади.

элементнинг алгебраик тўлдирувчиси-Лаплас теоремасининг $k=1$бўлган хусусий ҳолини кўрамиз. Ушбу $i_1=i,\ j_1=j$ белгилаш киритамиз. Бу холда M_j^i минор A матритсанинг a_{ij} элементига тенг бўлиб, бу минорнинг алгебраик тўлдирувчиси a_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси дейилади.

детерминантнинг сатрлар бўйича ёйиш хақидаги теорема-А квадрат матритсанинг бирор сатр (устун) элементларини уларнинг алгебра тўлдирувчиларига кўпайтириб, йиғсак, бу матритсанинг детерминанти хосил бўлади, яъни ҳар қандай $i=\overline{1,n}$ учун

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \det A$$

ва хар қандай $j=\overline{1,n}$ учун

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \det A$$

тенгликлар ўринли.

1. **ортогонал векторлар системаси**-Система векторларнинг ҳар қандай икки жуфти ўзаро ортогонал бўлса, у ҳолда системага ортогонал векторлар системаси дейилади.
2. **чизиқли эркли система**-Ҳар қандай нолмас векторлардан иборат ортогинал векторлар системаси чизиқли эркли системадир.
3. **ортогоналланган векторлар системаси**-Ҳар бир вектори нормалланган, яъни бирлик кўринишга келтирилган ортогонал системага ортогоналланган векторлар системаси дейилади.
4. **квадратик форма мусбат (манфий)**-Агар хар қандай нолъдан фарқли х вектор учун $q(x) > 0$ $(q(x) < 0)$ тенгсизлик бажарилса, $q(x)$ қўшиш квадратик форма мусбат (манфий) деб аталади;
5. **инертсия қонуни** - Хақиқий квадратик форманинг ихтиёрий каноник базиси векторларидаги мусбат қийматлари сони ва манфий қийматлари сони базиснинг танланишига боғлиқ эмас;

чизиқли форма-Агар $\varphi\ V \to F$ функтсия ушбу:

1) хар қандай $x, y, \in V$ учун $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2) хар қандай $x \in V,\ \lambda \in F$ учун $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ шартларни қаноатлантирса, у чизиқли форма (чизиқли функтсия, чизиқли функтсионал) деб аталади.

бичизиқли форма -Агар иши вектор аргументли скаляр $\varphi(x, y)$ функтсия $\varphi : V^2 \to F$ хар бир аргументи бўйича чизиқли бўлса, яъни

1) хар қандай $x_1, x_2 \in V$ ва $\lambda, \mu \in F$ учун

$\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda \varphi(x_1, y) + \mu \varphi(x_2, y)$;

2) хар қандай $y_1, y_2 \in V$ ва $\lambda, \mu \in F$ учун

$$\varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \varphi(x, y_1) + \mu \varphi(x, y_2)$$

шартлар бажарилса, у бичизиқли форма (функтсия, функтсионал) деб аталади.

симметрик -Агар хар қандай $x, y \in V$ векторлар учун $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ тенглик ўринли бўлса, бу бичизиқли форма симметрик деб аталади.

квадратик форманинг матритсаси -Квадратик формани хосил қилувчи ягона симметрик бичизиқли форманинг матритсасига квадратик форманинг матритсаси деб аталади.

Каноник-Агар В даги $\{e_1, ..., e_n\}$ базисда $\varphi(x, y)$ бичизиқли форманинг матритсаси диагонал (яъни $i \neq k$ бўлганда $\varphi(e_i, e_k) = 0$) бўлса, бу базис $\varphi(x, y)$ бичизиқли форма учун каноник деб аталади.

мусбат (манфий)-Агар хар қандай нолъдан фарқли **х** вектор учун $q(x) > 0$ $(q(x) < 0)$ тенгсизлик бажарилса, $q(x)$ қўшиш квадратик форма мусбат (манфий) деб аталади.

чизиқли оператор-Чизиқли фазонинг ўзини ўзига чизиқли акслантириши чизиқли оператор деб аталади.

тескари -Агар $f: V \to V$ акслантриш (чизитсли бўлиши шарт эмас) учун шундай $g: V \to V$ акслантириш мавжуд бўлсаки, $fg = gf = e-$бирлик (айний) акслантириш бўлса, г акслантириш ф га тескари деб аталади.

хос вектори (хос сон)-Агар нолъдан фарқли х вектор учун шундай $\lambda \in F$ мавжуд бўлсаки, $f(x) = \lambda x$ тенглик бажарилса, х вектор ф чизиқли операторнинг хос вектори ва λ эса бу хос векторга мос хос сон деб аталади.

ўз-ўзига қўшма -Агар $A^*=A$ бўлса, у ҳолда, у ҳолда А чизиқли алмаштириш ўз-ўзига қўшма (ёки Эрмит бичизиқли алмаштириши) дейилдади.

чизиқли алмаштириш Агар $УУ^*=У^*У=Э^1$ бўлса, у ҳолда У унитар чизиқли алмаштириш дейилади.

нормал чизиқли алмаштириш-Агар $АА^*=А^*А$ бўлса, А-нормал чизиқли алмаштириш дейилади.

полйномиал матриса-элементлари бирор λ ҳарфига нисбатан кўпҳадлардан иборат бўлганматрисага айтилади.

матрисанинг даражаси -λ- матрисанинг даражаси деб , матриса таркибига кирган кўпҳадларнинг энг юқори даражасига айтилади.

Эквивалент-Агар элементар алмаштиришларни бир неча марта кетма-кет қўллаш йўли билан бир λ-матрисадан иккинчи λ-матрисани ҳосил қилиш мумкин бўлса , у ҳолда бундай икки λ- матриса – бир –бирига эквивалент λ-матрисалар дейилади.

элементар алмаштиришлари-Биз ҳозир λ-матрисанинг элементар алмаштиришлари деб аталган алмаштиришларга нисбатан каноник кўриниши ҳақидаги масалани кўрамиз.

λ- матрисанинг элементар алмаштиришкари деб , алмаштиришларнинг қуйидаги типларига айтилади.

1°. Матрисанинг қандайдир икки йўли ёки устунларининг ўринларини ўзаро алмаштириш.

2°. Бирон йўлга қандайдир бошқа йўлни бирор ф(λ) кўпҳадга кўпайтириб қўшиш ва шунга ўхшаш , бирон устунга бошқа бир устунни бирор кўпҳадга кўпайтириб қўшиш.

3°. Бирон ёки устунни нолдан фарқли бирор сонга кўпайтириш.

жордан катаги-Агар Ф майдон устидаги квадрат матритсанинг диагоналидаги барча элементлар ўзаро тенг, хар бир сатрда диагоналдаги элементнинг ўнг томонида турган эле-мент бирга тенг ва қолган барча элементлар нолъга тенг бўлса, бундай матритса жордан катаги деб аталади:

$$J_k(\alpha)=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Бу эрдаги a сон жордан катагининг хос сони деб ата-лади.

жордан матритсаси -Агар Ф майдон устидаги квадрат матритсанинг бош диагонали бирин-кетин жойлашган жордан катаклардан иборат ва бу катаклардан ташқаридаги барча элементлар нолъ бўлса, бундай матритса жордан матритсаси деб аталади.

VII. ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 592 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-ЖИЛД / Ш.М. Мирзиёев. – Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 592 б.
4. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб ҳалқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.
5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.
6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.
7. Ўзбекистон Республикасининг “Талим тўғрисида”ги Қонуни.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий талим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.
9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.
10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий талим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.
11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.
12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.
13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш

тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.
14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий талим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.
15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий талим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.
16. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.
17. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464
18. Bogachev, V. I. Measure theory, Berlin: Springer, 2006.
19. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.
20. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010. 204.
21. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts//2013, ISBN-13: 978-0313319983
22. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.
23. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492
24. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.
25. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.
26. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.
27. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672 с.

IV. Интернет сайтлари

1. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги: www.edu.uz.
2. Бош илмий-методик марказ: www.bimm.uz
3. www. Ziyonet. Uz
4. Открытое образование. https://openedu.ru/
5. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma

6. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/
7. https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search
8. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html

https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics

Қарақалпақ мәмлекетлик университети жанындағы Педагог кадрларды қайта таярлаў ҳәм олардың қәнигелигин жетилистириў аймақлық орайының Жоқары оқыў орынлары тыңлаўшыларына арналған «Заманагөй геометрия» пәниниң оқыў-методикалық комплексине

ПИКИР

Математика оқытыў методикасы кафедрасының доценти С.А.Танирбергенов тәрепинен дүзилген «Заманагөй геометрия» пәниниң оқыў-методикалық комплекси қурылысы жағынан исши оқыў бағдарламасы, модулди оқытыўда қолланылатуғын интерактив тәлим методлары, лекция текстлери, әмелий сабақлар ушын материаллар, тапсырмалар ҳәм оларды орынлаў бойынша усыныслар, кейслер банки, глоссарий, әдебиятлар дизиминен ибарат.

Пәнниң исши оқыў бағдарламасы мәмлекетлик тәлим стандартларына тийкарланып таярланған. Онда тыңлаўшылардың билимине қойылатуғын талаплар, пәнниң әмелияттағы орны көрсетилип өтилген. Бағдарламада лекция ҳәм әмелий сабқлардың мазмуны берилген. Бағдарламада улыўма аудиториялық саат – 20, соннан лекция ушын – 8 саат, әмелий сабақлар ушын 12 саатқа мөлшерлеп дүзилген.

Лекция курсында сызықлы ҳәм аффинлик кеңисликлер, бисызықлы формалар, Евклид кеңислигиндеги сызықлар ҳәм бетликлерге тийисли материаллар берилген. Сондай-ақ псевдоевклид кеңислиги, сфералық кеңислик ҳәм Риман кеңисликлери, екинши тәртипли бетликлердиң инвариантлары, көпобразлылықлар бойынша зәрүрли мағлыўматлар келтирилип өтилген. Ҳәр бир әмелий сабақ ушын материаллар, тапсырмалар ҳәм оларды орынлаў бойынша усыныслар, соның менен бирге жеке тапсырмалар, тестлер ислеп шығылған.

Курсты машқалалы оқытыў бойынша кейслер ислеп шығылған ҳәм олардың орынланыўы бойынша жобалар көрсетилген. Соның менен бирге курс бойынша глоссарийлар ҳәм әдебиятлар дизими берилген.

Улыўмаласатырып айтқанда «Заманагөй геометрия» курсы бойынша дүзилген оқыў-методикалық комплексти жоқары оқыў орынлары тыңлаўшыларын оқытыўда пайдаланыўға болады деп есаплайман.

Пикир билдириўши: **ф.-м. и. к. доц. Т. К. Курбанбаев**
ҚМУ, «Функционаллық анализ, алгебра ҳәм геометрия» кафедрасы

KADRLAR BÓLIMI
« » 20 j.