

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIV VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

**OLIV TA‘LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA
TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL
ETISH BOSH ILMIY - METODIK MARKAZI**

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG
KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI
OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI**

**“Matematikaning sohalarga tatbiqlari”
moduli bo‘yicha
O‘QUV –USLUBIY MAJMUA**

Toshkent — 2021

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrda 648-sonli buyrug‘i bilan tasdoiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi: V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti katta ilmiy xodimi, f.-m.f.d. E.T.Karimov.

Taqrizchilar: Matematika instituti “Hisoblash matematikasi” ilmiy laboratoriyasi mudiri, f.-m.f.d. A.R.Hayotov
Matematika instituti “Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari” ilmiy laboratoriyasi yetakchi ilmiy xodimi, f.-m.f.d. A.Xasanov

O‘quv -uslubiy majmua O‘zbekiston milliy universiteti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan (2020 yil 24 dekabrda №3-sonli baènnomasi)

MUNDARIJA:

I. ISHCHI DASTUR.....	4
II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA‘LIM METODLARI.....	10
III. NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI.....	13
IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI.....	51
V. GLOSSARIY.....	57
VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI.....	60

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

Mazkur dasturni shakllantirishda O'zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda tasdiqlangan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining bir qator farmonlari hamda O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining tegishli qarorida belgilangan ustuvor vazifalar hisobga olingan. Dastur oliy ta'lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg'or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o'zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko'nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta'lim sohasi bo'yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo'yiladigan umumiy malaka talablari va o'quv rejalari asosida shakllantirilgan bo'lib, uning mazmuni kredit modul tizimi va o'quv jarayonini tashkil etish, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, pedagogning kasbiy professionalligini oshirish, ta'lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish, maxsus maqsadlarga yo'naltirilgan ingliz tili, mutaxassislik fanlar negizida ilmiy va amaliy tadqiqotlar, o'quv jarayonini tashkil etishning zamonaviy uslublari bo'yicha so'nggi yutuqlar, pedagogning kreativ kompetentligini rivojlantirish, ta'lim jarayonlarini raqamli texnologiyalar asosida individuallashtirish, masofaviy ta'lim xizmatlarini rivojlantirish, vebinar, onlayn, «blended learning», «flipped classroom» texnologiyalarini amaliyotga keng qo'llash bo'yicha tegishli bilim, ko'nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo'naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish yo'nalishining o'ziga xos xususiyatlari hamda dolzarb masalalaridan kelib chiqqan holda dasturda tinglovchilarning mutaxassislik fanlar doirasidagi bilim, ko'nikma, malaka hamda kompetensiyalariga qo'yiladigan talablar takomillashtirilishi mumkin.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi: Tinglovchiga matematikaning turli sohalardagi tatbiqlarini ko'rsatish, tinglovchi o'z pedagogik faoliyatida matematik tushunchalarni amaliy misollar orqali tushuntirishga o'rgatish, talabalarda matematikaga bo'lgan qiziqishni shakllantirishda va nazorat ishlarida matematika tatbig'iga oid masalalaridan keng foydalanishishga erishish.

Modulning vazifalari:

- matematikaning turli sohalardagi tatbiqlarini sodda matematik tilda yetkazish, shu bilan birga tegishli sohadagi terminlarga tushuntirish berib ketish kabi maqsadlarni o'z ichiga olgan uslubni shakllantirish;
- turli yo'nalishdagi talabalarga o'z ixtisosligi sohasidagi masalalarni o'quv dasturidagi matematikaga oid mavzularga bog'lash yuzasidan turli resurslardan

foydalanish malakasini hosil qilish;

- o'quv dasturida mavjud bo'lgan turli algebraik tenglamalar, matritsalar, funksiyalar, integral, hosila, differensial tenglamalar mavzulari misolida tatbiqiy yo'nalishdagi masalalar yordamida matematikaning tatbiqlarini talabalarga qiziqarli tushuntirish usullarini o'rgatish;

- matematikaning san'atdagi tatbiqlari, muhandislik va axborot texnologiyalaridagi tatbiqlari haqidagi ma'lumotlarni taqdim etishdan iborat.

Modul bo'yicha tinglovchilarning bilimi, ko'nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo'yiladigan talablar

- Modulni o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida:

- matematik masalalarni matematik tizimlarda yechishni va standart funksiyalardan foydalanishni;

- matematikani o'qitishda uning tatbiqlari bilan tushuntirishni, hayotiy va sohaga oid misollarni;

- matritsa va ularning kriptografiya, loyihalashdagi tatbiqlarini;

- vektorlarning fizikaviy va mexanik jaraenlardagi tatbiqlarini;

- funksiya va uning axborot texnologiyalaridagi tatbiqi haqidagi ma'lumotlarni;

- matematik fanlarni o'qitishning zamonaviy usullarini *bilishi* kerak.

Tinglovchi:

- o'lchovlar nazariyasidan matematika, fizika va biologiya masalalarida keng foydalanish;

- matematik analizning biomatematika, mexanika, ommaviy xizmat nazariyasi, iqtisodiy sohalar va boshqa sohalarida keng qo'llash;

- matematik fanlarni o'qitishda innovatsion ta'lim metodlari va vositalarini amaliyotda qo'llash;

- matnli masalalar orqali matematikaning turli sohalar, jumladan, ximiya, biologiya, iqtisodiёт, qurilishga tatbiqlari borasida talabalarga aniq tasavvurlarni bera olish;

- talabani o'zlashtirish darajasini nazorat qilish va baholashning nazariy asoslari hamda innovatsion yondashuv uslublarini to'g'ri qo'llay olish *ko'nikmalariga* ega bo'lishi lozim.

Tinglovchi:

- o'lchovlar nazariyasi va uning tatbiqini turli fazolarda qo'llay olish;

- geometriyaning chiziqli fazo va chiziqli akslantirishlar yordamida bayon etilishi, vektor algebrasidan foydalanish;

- algebraik tenglamalarning turli sohadagi tatbiqlari, jumladan iqtisodiy masalalardagi tatbiqini aniq misollar orqali tushuntirish;

- matematikani o'qitish innovatsion jarayonini loyihalashtirish va

tashkillashtirishning zamonaviy usullarini qo'llash *malakalariga* ega bo'lishi lozim.

Tinglovchi:

- matematikani o'qitishda foydalaniladigan zamonaviy (matlab, mathcad, maple, GeoGebra va boshqalar) matematik paketlarini o'quv jarayoniga tatbiq etish;

- matematikaning xorij va respublika miqyosidagi dolzarb muammolari, yechimlari, tendensiyalari asosida o'quv jarayonini tashkil etish;

- matematikani turli sohalarga tatbiq etish;

- hosila va integrallarning turli tatbiqlarini talabalarga aniq misollar orqali tushuntira olish;

- differensial tenglamalar va ularning biologik jaraenlardagi tatbiqlari haqida tushunchaga ega bo'lish.

- oliy ta'lim tizimida matematik fanlar mazmunining uzviyligi va uzluksizligini tahlil qila olish *kompetensiyalariga* ega bo'lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o'tkazish bo'yicha tavsiyalar

Modulni o'qitish ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar shaklida olib boriladi. Modulni o'qitish jarayoni asosan interaksion bo'lishi nazarda tutilgan:

- ma'ruza darslarida prezentatsiya va internet havolalari, videodarslar platformalaridan foydalaniladi;

- o'tkaziladigan amaliy mashg'ulotlarda maxsus vebsaytlardan, test so'rovlari, aqliy hujum, kichik guruhlar bilan ishlash va boshqa interaktiv ta'lim usullarini qo'llash nazarda tutiladi.

Modulning o'quv rejadagi boshqa modullar bilan bog'liqligi va uzviyligi

“Matematikaning sohalarga tatbiqlari” moduli o'quv rejadagi “Ta'lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish”, “O'lchov nazariyasi va uning qo'llanishi”, “Zamonaviy geometriya” va “Matematikada informatsion texnologiyalari” o'quv modullari bilan uzviy bog'langan holda matematik pedagoglarning ta'lim jarayonidagi tursi sohalardagi tatbiqlarni zamonaviy axborot texnologiyalari, resurslari va dasturlaridan foydalanish bo'yicha kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta'limdagi o'rni

Modulni o'zlashtirish orqali tinglovchilar ta'lim jarayonida matematikaning turli sohalarga tatbiqlarini aniq misollarda tushunarli tarzda talabalarga yetkazishga doir kasbiy kompetentlikka ega bo'ladilar.

Modul bo'yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya o'quv yuklamasi		
		Jami	jumladan	
			Nazariy	Amaliy mashg'ulot
1.	Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Matritsalar va ularning tatbiqlari. Vektorlar va ularning tatbiqlari	6	2	4
2.	Funksiyalar va ularning tatbiqlari. Hosila va uning tatbiqlari. Integral va uning tatbiqlari	4	2	2
3.	Qatorlar va ularning tatbiqlari. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari	4	2	2
4.	Matematika va sa'nat. Matematika va muhandislik	4	2	2
	Jami:	18	8	10

NAZARIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Matritsalar va ularning tatbiqlari. Vektorlar va ularning tatbiqlari (2 soat).

- 1.1. Tenglamalar va ularning tatbiqlari.
- 1.2. Matritsalar va ularning tatbiqlari.
- 1.3. Vektorlar va ularning tatbiqlari.

2-mavzu. Funksiyalar va ularning tatbiqlari. Hosila va uning tatbiqlari. Integral va uning tatbiqlari (2 soat).

- 2.1. Funksiyalar va ularning tatbiqlari.
- 2.2. Hosila va uning tatbiqlari.
- 2.3. Integral va uning tatbiqlari.

3-mavzu. Qatorlar va ularning tatbiqlari. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari (2 soat).

- 3.1. Qatorlar va ularning tatbiqlari.
- 3.2. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari.

4-mavzu. Matematika va sa'nat. Matematika va muhandislik (2 soat).

4.1. Matematika va sa'nat.

4.2. Matematika va muhandislik.

AMALIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

O'tilgan mavzularni chuqur tahlil qilish va o'zlashtirilgan bilimlarni mustahkamlash uchun tashkil etiladigan amaliy mashg'ulotlar mavzu doirasida berilgan tushunchalarga misollar keltirish, ba'zi muhim natijalarni tinglovchilar bilan muhokama tarzida isbotlash, mavzu doirasidagi ilmiy yangiliklarni tinglovchilarga oson usulda yetkazishga mo'ljallangan.

1-amaliy mashg'ulot. Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Matritsalar va ularning tatbiqlari. Vektorlar va ularning tatbiqlari (4 soat).

Iqtisodiy, biologik, kimëviy va fizik masalalarni matnli masalalar orqali algebraik tenglama va tenglamalar sistemasi orqali tushuntirish orqali talabalarda ularning tatbiqlari haqida ko'nikmalar hosil qilish. Matritsalarining iqtisodiy masalalardagi tatbiqi hamda kriptografiya sohasidagi tatbiqlarini aniq misollar orqali tushuntirish. Vektorlarning egri chiziqlarning pozitsion vektor funksiyalar orqali ifodalab, zarraning aniq vaqtdagi holatini aniqlashga oid misollar orqali tushuntirish.

2-amaliy mashg'ulot. Funksiyalar va ularning tatbiqlari. Hosila va uning tatbiqlari. Integral va uning tatbiqlari (2 soat).

Funksiyalarni iqtisodiy masalalardagi tatbiqini tushuntirishda aniq bir biznes reja tuzgan holda talabalarga tushuntirish borasida loyihalar tayërlash. Hosila va integralning tatbiqlarini fizik, kimëviy jaraënlarni ifodalashda ishlatiladigan matematik modellarning bir qismi sifatida tushuntirish. Aniq funksiyalarning hosila va integrallarning amaliy mazmunini tushuntiruvchi misollar bazasini yaratish.

3-amaliy mashg'ulot. Qatorlar va ularning tatbiqlari. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari (4 soat).

Qatorlarni aniq bir differensial tenglamalar uchun o'rganiladigan chegaraviy masalalar yeichmlarini ifodalash orqali biologik, mexanik va kimëviy jaraënlarga bog'lagan holda tushuntirish. Oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarning bevosita amaliëtda tatbiqi mavjud sinflarini ajratib olish va ma'lumotlar bazasini yaratish.

4-amaliy mashg'ulot. Matematika va sa'nat. Matematika va muhandislik (2 soat).

Matematikaning arxitekturadagi tatbiqlariga oid aniq misollar keltirish va ularda foydalanilgan matematika elementlari bazasini aniqlash. Jumladan, oltin kesim tatbiqiga oid ko'rgazmali ma'lumotlar bazasini shakllantirish. Muhandislikda qo'llaniladigan matematik usullarga aniq misollar keltirish va tegishli bazani shakllantirish. Qurilish sohasidagi matematikaning tatbiqlarini o'zida aks ettiruvchi tugal taqdimotlar yaratish.

O'QITISH SHAKLLARI

Mazkur modul bo'yicha quyidagi o'qitish shakllaridan foydalaniladi:

- ma'ruzalar, amaliy mashg'ulotlar (ma'lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko'rilayotgan loyiha yechimlari bo'yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);

- - bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo'yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

“Keys-stadi” metodi

“Keys-stadi”— inglizcha so‘z bo‘lib, (“case” – aniq vaziyat, hodisa, “stadi” – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta‘minoti bilan tanishtirish	<ul style="list-style-type: none"> ✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich:Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	<ul style="list-style-type: none"> ✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	<ul style="list-style-type: none"> ✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	<ul style="list-style-type: none"> ✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

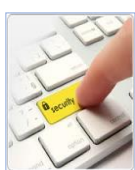
“Assisment” metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o’zlashtirish ko’rsatkichi va amaliy ko’nikmalarini tekshirishga yo’naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo’nalishlar (test, amaliy ko’nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo’yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assisment”lardan ma’ruza mashg’ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o’rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg’ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o’zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o’z-o’zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o’qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o’quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo’shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Har bir katakdagi to’g’ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.



Test

Yangilik — bu:

- A) Xabar
- V) Ma’lumot
- S) Dalil
- D) Ob-havo ma’lumoti



Qiyosiy tahlil

O’zbekiston raqamli televideniyesi va an’anaviy televideniye qiyosiy taxlil qiling.



Tushuncha tahlili

Yangiliklarni izohlang...



Amaliy ko’nikma

“O’zbekiston” telekanali informatsion dasturlarida yangiliklar foizini aniqlang

Venn Diagrammasi metodi

Metodning maqsadi: Bu metod grafik tasvir orqali o’qitishni tashkil etish shakli bo’lib, u ikkita o’zaro kesishgan aylana tasviri orqali ifodalanadi. Mazkur metod turli tushunchalar, asoslar, tasavurlarning analiz va sintezini ikki aspekt orqali ko’rib chiqish, ularning umumiy va farqlovchi jihatlarini aniqlash, taqqoslash imkonini beradi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar ikki kishidan iborat juftliklarga birlashtiriladilar va ularga ko‘rib chiqilayotgan tushuncha yoki asosning o‘ziga xos, farqli jihatlarini (yoki aksi) doiralarda ichiga yozib chiqish taklif etiladi;
- navbatdagi bosqichda ishtirokchilar to‘rt kishidan iborat kichik guruhlariga birlashtiriladi va har bir juftlik o‘z tahlili bilan guruh a‘zolarini tanishtiradilar;
- juftliklarning tahlili eshitilgach, ular birgalashib, ko‘rib chiqilayotgan muammo yohud tushunchalarning umumiy jihatlarini (yoki farqli) izlab topadilar, umumlashtiradilar va doirachalarning kesishgan qismiga yozadilar.



III. NAZARIY MASHG'ULOT MATERIALLARI.

Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Matritsalar va ularning tatbiqlari. Vektorlar va ularning tatbiqlari

REJA:

- 1.1. Tenglamalar va ularning tatbiqlari.
- 1.2. Matritsalar va ularning tatbiqlari.
- 1.3. Vektorlar va ularning tatbiqlari.

Kalit so'z va tushunchalar: chiziqli algebraik tenglamalar; ishga oid matnli masalalar; aralashmaga oid matnli masalalar; tezlikka oid matnli masalalar; iqtisodiy masalalar.

1.1. Tenglamalar va ularning tatbiqlari.

Avvalo talabalarga maktab matematika kurslarida ma'lum bo'lgan matnli masalalardan ularning ixtisosligiga mos ravishda keltirib, masalalar qanday usulda sodda algebraik tenglamalar bilan ifodalanishini eslatib o'tish kerak. Matnli masalalarni tanlashda imkon qadar sohaning maxsus terminlari ishlatilmasligiga e'tibor qaratgan ma'qul. Misol uchun, o'rtacha miqdorni aniqlashga oid (sodda holatda o'rta arifmetik qiymat) masalani talabalar e'tiboriga havola qilib, hosil bo'ladigan tenglamani yozib berish so'raladi:

1-masala. Ahmadjon 3 ta imtixonda 82, 74 va 90 ball oldi. 4 ta imtixonning o'rtacha (o'rta arifmetik qiymati) bali 85 bo'lishi uchun Ahmadjon 4-imtixonda necha ball olishi kerak?

Bunday masalani o'z universitetingiz baholash tizimiga moslab bimalol o'zgartirish ham mumkin. Umuman, masalani murakkablashtirish kerak bo'lsa o'rta garmonik qiymatni qo'llagan holda ham o'xshash masalalar tuzish tavsiya etiladi.

Keyin esa talabalarning ixtisosligiga qarab turli mazmundagi matnli masalalardan misollar keltirish o'rinli. Aytaylik, kimyo yo'nalishidagi talabalar uchun aralashmaga oid masalalar ko'proq qiziqish uyg'otadi:

2-masala. 12 litrli sirka va yog' aralashmasida 40 % sirka bor. Aralashmaga qancha yog' qo'shilsa, sirka miqdori 30% bo'ladi?

Masala soddaroq tuyulsa aralashmadagi moddalar sonini orttirish mumkin, faqat bu moddalarning kimyoviy xususiyatlarini hisobga olish kerak bo'ladi.

Keyingi umumiy xarakterdagi masalalardan biri ish, harakatga oid masalalar bo'lib, ixtiyoriy yo'nalishdagi talabalarga berish mumkin va bu masalalarning ahamiyati logistika bilan osongina bog'lanadi. Talabalarda matematikaning logistika masalalaridagi tatbiqi haqida yanglish tasavvur hosil bo'lmasligi uchun albatta, logistikaning maxsus matematik modellar talab qiladigan asosiy masalalari ham borligini eslatib o'tish kerak bo'ladi¹.

3-masala. Ikki avtomobil orasidagi masofa 500 km va ular bir-biri tomon harakatlanishi rejalangan. 1-avtomobil soatiga 100 km tezlikda, 2-si esa soatiga 70 km tezlikda harakatlanadi. Agar ikkala avtomobil ham bir vaqtda bir-biri tomon harakat boshlagan bo'lsa, ular Qancha vaqtdan keyin uchrashadi?

¹ https://www.logistics-gr.com/index.php?option=com_content&view=category&id=65&Itemid=207

Bu masalani biroz murakkablashtirmoqchi bo'lsangiz, tezroq yuruvchi avtomobil boshqa avtomobildan ma'lum vaqt keyinroq yo'lga chiqishini yoki yo'lda biroz to'xtashini bildiradigan ma'lumot qo'shishingiz mumkin.

Keyingi turdagi masala iqtisodiy xarakterga ega bo'lsa ham maxsus iqtisodiy bilim yoki terminlarni bilishni talab qilmaydi. Bunday tipdagi matnli masalalar ixtiyoriy yo'nalishdagi talabalar uchun ham qiziq bo'lib, elementar matematikaning tatbiqlarini eslab olishga foyda beradi.

4-masala. *Ishlab chiqarish korxonasida ma'lum bir turdagi mahsulotni ishlab chiqaruvchi 2 ta uskuna bor. A Mashina zarur miqdordagi mahsulotni ishlab chiqarishga 5 soat vaqt sarflasa, B Mashina 3 soatda mahsulotni ishlab chiqara oladi. Agar har ikkala mashina bir vaqtda mahsulot ishlab chiqarishga ishlatilsa, zarur miqdordagi mahsulotni ishlab chiqarish uchun qancha vaqt ketadi?*

Bu tipdagi masalalarni sohaga ixtisoslashtirish ham mumkin. Misol uchun geologiya sohasidagi talabalarga "Kondagi zahira oziq-ovqat 1-brigadaga 5 kunga, 2-brigadaga esa 3 kunga yetadi. Agar ikkala brigada konda bir vaqtda ishlasa zahira oziq-ovqat necha kunga yetadi?" Kabi o'zgarishlar bilan yangi masala tuzish mumkin bo'ladi.

Keyingi bosqichlarda masalalarda sohaga oid maxsus terminlar ishlatilgan masalalar bilan ishlash kerak bo'ladi. E'tiboringizga havola qilinayotgan iqtisodiy masalalar shunday xususiyatga ega.

1-masala. *Ma'lum bir mahsulot uchun talabning o'zgarishi uning narxiga quyidagicha bog'langan: $q_d = 90 - 0.05p$, bu yerda p - mahsulot narxi. Mahsulot ishlab chiqarishning uning narxiga bog'lanishi esa quyidagicha: $q_s = -12 + 0.8p$. Mahsulotning muvozanat narxini aniqlash uchun qiyosiy statistik tahlil o'tkazing va muvozanat narxni toping.*

Agar mahsulot narxini 100 shartli birlik deb olsak, u holda unga bo'lgan talab $q_d = 90 - 0.05 \cdot 100 = 85$, taklif miqdori esa $q_s = -12 + 0.8 \cdot 100 = 68$ ga teng bo'ladi. Talab va taklif orasidagi farq $85 - 68 = 17$. Bu holda talab taklifdan ko'p. Bu degani mahsulot narxi ortadi. Muvozanat narxni topish uchun talab va takliflar soni teng bo'lishi kerak. Yuqoridagi ikki tenglamada $q_s = q_d$ deb olinsa p (mahsulot narxi) ga nisbatan algebraik tenglama kelib chiqadi: $90 - 0.05p = -12 + 0.8p$. Bu yerdan esa $p = 120$ ekanini topamiz.

Eslatma: Bu iqtisodiy model faqatgina erkin bozor mexanizmi mavjud sharoitda ishlaydi, monopollar hukm suruvchi bozorlarda muvozanat narx tushunchasi foydasiz.

Keyingi masalada muvozanat narx faqat mahsulot narxiga bog'liq bo'lmasligini keltiramiz. Bu holatda qo'shimcha faktor noaniq bo'lsa, algebraik tenglamalar sistemasi orqali yechish usuli yordam bera olmaydi.

2-masala. *Ma'lum bir mahsulot uchun talabning o'zgarishi uning narxiga quyidagicha bog'langan: $q_d = 160 - 0.5p + 0.1m$, bu yerda p - mahsulot narxi, m - xaridorlarning o'rtacha daromadi miqdori. Mahsulot ishlab chiqarishning uning narxiga bog'lanishi esa quyidagicha: $q_s = -20 + 0.4p$. Mahsulotning muvozanat narxini toping.*

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, muvozanat narxni topish uchun $q_s = q_d$ deb olganimizda $160 - 0.5p + 0.1m = -20 + 0.4p$ hosil bo'ladi yoki $p = 200 + 0.1m$ ifodani olamiz.

Demak, muvozanat yuzaga kelishi uchun qo'yiladigan narx, xaridorlarning o'rtacha daromadiga bog'liq bo'lib qoladi. Agar statistik ma'lumotlar asosida bu kattalik aniqlansa muvozanat narxni topish imkoni bo'ladi.

Keyingi misolda erkin bozorda muvozanat yuzaga kelishda hukumat tomonidan joriy etiladigan soliqlar ham ta'sir ko'rsatishini qarab o'tamiz.

3-masala. *Ma'lum bir mahsulot uchun talabning o'zgarishi uning narxiga quyidagicha bog'langan:*

$q = 20 - 1\frac{1}{3}p$, bu yerda p - mahsulot narxi. Mahsulot ishlab chiqarishning uning narxiga bog'lanishi esa quyidagicha: $q = -12 + 4p$. Agar hukumat har bir ishlab chiqarilgan mahsulotga t miqdorda soliq solsa, erkin bozordagi muvozanat yuzaga kelgandagi mahsulot miqdorining bu soliq miqdoriga bog'lanishini toping.

Berilgan munosabatlarni mahsulot narxiga nisbatan yozib olamiz, ya'ni

$$q = 20 - 1\frac{1}{3}p \rightarrow p = 15 - 0.75q; \quad q = -12 + 4p \rightarrow p = 3 + 0.25q.$$

Endi har bir ishlab chiqarilgan mahsulotga qo'shiladigan t soliqni hisobga olsak, mahsulot narxi $p = 3 + 0.25q + t$ ko'rinishda yoziladi. Hosil bo'lgan ikki tenglamani sistema qilib yechsak

$$\begin{cases} p = 15 - 0.75q \\ p = 3 + 0.25q + t \end{cases} \rightarrow q = 12 - t \text{ munosabatni olamiz. Bu ifoda solinadagina soliqni}$$

muvozanat narx hosil bo'lishidagi mahsulot miqdori o'zgarishiga ta'sirini ko'rsatadi.

Bunday tipdagi masalalarni "funksiyalarning tatbiqlari" mavzusida ham tadqiq etishda davom etamiz.

1.2 Matritsalar va ularning tatbiqlari

Kalit so'z va tushunchalar: Matritsa; teskari matritsa; texnologik matritsa; shifrlash; obyektlarni akslantirish; iqtisodiy masalalar.

Iqtisodiy masalalarda matritsalarining sodda tatbiqlari.

Matritsalar mavzusini boshlaganda dastlab sodda elementlar beriladi, ular ustidagi amallar haqida tushuncha berilgandan keyin bevosita ularning tatbiqlari haqida to'xtalib o'tish maqsadga muvofiq. Matritsalarining real muammolarning hal qilishdagi rolini yaqqol ochib berishda iqtisodiy masalalar juda qo'l keladi. Misol uchun, texnologik matritsa, bir nechta turdagi resurslardan bir nechta mahsulot turlarini ishlab chiqarishni rejalashtirish (programmallashtirish), tarmoqlararo balansni modellashtirish kabi muhim iqtisodiy masalalarda asosiy rolni o'ynaydi.¹

Bu yerda dastlab iqtisodiy jarayonni texnologik matritsaga bog'lanadi:

- Aytaylik, o'rganilayotgan iqtisodiy jarayonda n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil ishlab chiqarish faktorlari (resurslar) zarur bo'lsin. i -mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun j -turdagi resursdan a_{ij} miqdori sarflansin. a_{ij} elementlardan tuzilgan $m \times n$ o'lchamli A matritsa **texnologik matritsa** deb ataladi;

So'ngra har bir mahsulotga qo'yiladigan rejani matematik tilda ifodalaniadi:

- 1-turdagi mahsulotdan x_1 miqdorda, 2-turdagi mahsulotdan x_2 miqdorda, ..., n - turdagi

mahsulotdan x_n birlik miqdorda ishlab chiqarilishi talab qilinsin. Bu rejani $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

$n \times 1$ o'lchamli matritsa ko'rinishida yozib olish mumkin.

¹ Xashimov A.R., Xujaniyozova G.S. Toshkent Moliya Instituti, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrası iqtisodchilar uchun matematika fanidan o'quv-uslubiy majmua (I semestr), 2019 yil (12-betga qarang).

Mahsulotlarning narxlarini rejani ifodalaganimiz singari $n \times 1$ o'lchamli matritsa

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ ko'rinishida yozib olsak, korxonaning mahsulot ishlab chiqarishdan oladigan}$$

daromadini C va X matritsalarining ko'paytmasi orqali topishimiz mumkin.

Agar biz biror bir turdagi resursning rejani bajarish uchun qancha sarflanishini bilishni istasak, u holda har bir, masalan j -turdagi turdagi resursning sarfini $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n$ formula orqali hisoblasak bo'ladi. Bu formula esa A va X matritsalarining ko'paytmasi ko'rinishida yoziladi. Shu masalaning davomida resurs

zahiralarini (i -turdagi zahira miqdorini b_i deb belgilagan holda) $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ matritsa orqali

ifodalash mumkin bo'ladi. $AX \leq B$ matritsaviy tengsizlik esa X rejani bajarish imkonini tekshirish uchun ishlatiladi.

Talabalarda umumiy xarakterga ega bo'lgan misollar yetarlicha qiziqish uyg'otmasligini hisobga olgan holda masalani aniq miqdorlarda, turli variantlarda taqdim etishga ham e'tibor qaratish kerak bo'ladi. Keling shu umumiy masala misolida turli yo'nalishdagi talabalarga masalalar tuzib ko'raylik.

1-masala (texnika yo'nalishi). Ishlab chiqarish sexida 2 xil tayyor mahsulot ishlab chiqariladi. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xom-ashyolar kerak bo'ladi. 1-xil mahsulot uchun 1-turdagi xom-ashyodan 2 birlik, 2-tur xom-ashyodan 3 birlik ishlatiladi. 2-xil mahsulot uchun esa 1-turdagi xom-ashyodan 4 birlik, 2-turidan 2 birlik ishlatiladi. Agar 1-tur xom-ashyoning bir birligi narxi 2 ming so'm va zahirasi 300 birlik, 2-tur xom-ashyoning bir birligi narxi 3 ming so'm va zahirasi 400 birlik bo'lsa, $X = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$

(1-xil mahsulotdan 30 ta, 2-sidan 40 ta) va $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$ (1-xil mahsulotdan 50 ta, 2-sidan

60 ta) rejalar bo'yicha

- mahsulotlarni ishlab chiqarishdan keladigan daromadni toping;
- rejalarni bajarish uchun xom-ashyolar zahirasi yetish-yetmasligini aniqlang.

2-masala (tabiiy fanlar yo'nalishi). Laboratoriyada 2 xil tayyor mahsulot ishlab chiqariladi. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 turdagi moddalar kerak bo'ladi. 1-xil mahsulot uchun 1-turdagi moddadan 2 birlik, 2-tur moddadan 3 birlik ishlatiladi. 2-xil mahsulot uchun esa 1-turdagi moddadan 4 birlik, 2-turidan 2 birlik ishlatiladi. Agar 1-tur moddaning bir birligi narxi 2 ming so'm va zahirasi 300 birlik, 2-tur moddaning bir birligi narxi 3 ming so'm va zahirasi 400 birlik bo'lsa, $X = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix}$ (1-xil mahsulotdan 30 ta, 2-

sidan 40 ta) va $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$ (1-xil mahsulotdan 50 ta va 2-sidan 60 ta) rejalar bo'yicha

- mahsulotlarni ishlab chiqarishdan keladigan daromadni toping;
- rejalarni bajarish uchun moddalar zahirasi yetish-yetmasligini aniqlang.

3-masala (gumanitar yo'nalish). Ijtimoiy so'rovda 2 tur guruh qatnashadi. Har bir guruh ayol va erkak jinsiga mansub insonlardan iborat. 1-guruhda 30 nafar ayol va 40 nafar erkak, 2-huruhda esa 20 nafar ayol va 30 nafar erkak bor. Agar so'rovda qatnashgan har bir ayolga 100 ming so'm va har bir erkakka 90 ming so'mdan pul berilsa hamda 1-guruhda 10 marta, 2-guruhda 12 marta so'rov o'tkazilsa ($X = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$), jami so'rovlarga

sarflanadigan pul miqdorini toping.

Matritsalarini kriptografiyadagi tatbiqlari.

Matritsalarini turli mazmundagi xabarlarini shifrlashtirishda foydalanish mumkin. Buning uchun 1-navbatda ishlatiladigan alifboni raqamlashtirib olish kerak bo'ladi. Masalan,

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.			
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	0		

Izoh: 0 raqamiga bo'sh joy (probel) ni mos qo'yamiz.

Keyin esa shifr matritsasini tanlab olamiz. **E'tibor qiling**, shifr matritsa doimo **kvadrat matritsa** bo'lishi shart! Misol uchun

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Keyin esa xabarni yuqorida berilgan jadval asosida matrisaga aylantiramiz:

Xabar: **Men matematikman.**

Dastlab harflarni sonlar orqali yozib olamiz: 13-5-14-0-13-1-9-5-13-1-20-9-11-13-1-14-27

Endi bu sonlarni 3 ustundan iborat matritsa ko'rinishida yozamiz (bu shifr matritsaning o'lchamiga bog'liq ravishda o'zgaradi):

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 14 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 5 & 13 \\ 1 & 20 & 9 \\ 11 & 13 & 1 \\ 14 & 27 & 0 \end{bmatrix}$$

Endi bu matritsani shifr matritsaga ko'paytirsak shifrlangan xabar matritsasi paydo bo'ladi, ya'ni

$$\begin{bmatrix} 13 & 5 & 14 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 5 & 13 \\ 1 & 20 & 9 \\ 11 & 13 & 1 \\ 14 & 27 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 113 & 114 \\ 40 & 9 & -19 \\ 64 & 108 & 99 \\ 73 & 80 & 25 \\ 84 & -2 & 3 \\ 137 & -14 & -26 \end{bmatrix}$$

Endi shifrlangan matritsani yana sonlar qatoriga aylantirsak

81-113-114-40-9--19-64-108-99-73-80-25-84--2-3-137--14--26

Bu esa to'la shifrlangan xabar. Endi uni o'qish uchun shifr matritsa va yuqoridagi jadval kerak bo'ladi. Shifrnı ochish jarayoni quyidagicha kechadi:

1) Avvalo shifr matritsaning teskari matritsasi topiladi:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{149} & \frac{25}{149} & \frac{2}{149} \\ \frac{-23}{149} & \frac{26}{149} & \frac{14}{149} \\ \frac{27}{149} & \frac{-37}{149} & \frac{3}{149} \end{bmatrix}$$

2) Keyin esa teskari matritsa bilan hosil bo'lgan matritsani ko'paytiramiz, ya'ni

$$\begin{bmatrix} 81 & 113 & 114 \\ 40 & 9 & -19 \\ 64 & 108 & 99 \\ 73 & 80 & 25 \\ 84 & -2 & 3 \\ 137 & -14 & -26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{18}{149} & \frac{25}{149} & \frac{2}{149} \\ -\frac{23}{149} & \frac{26}{149} & \frac{14}{149} \\ \frac{27}{149} & -\frac{37}{149} & \frac{3}{149} \end{bmatrix} = \dots$$

3) Hosil bo'lgan matritsadagi elementlarni jadval asosida harflarga aylantirib dastlabki xabar olinadi.

Matritsalar ustida amallar bajarish, xususan, ularni ko'paytirish amallarini EXCEL dasturidan foydalanib ham ishlashingiz mumkin² yoki <http://mathtools/calculator/matrix/> saytidan ham foydalansangiz ham bo'ladi.

Imkon bo'lsa shifr matritsani soddaroq 2×2 ko'rinishda olish va xabarlarni talabalar ixtisosligiga mos ravishda tuzgan holda turkum masalalardan foydalanish mumkin.

Bu mavzuga oid videodarslarni quyidagi havoladan foydalanib ko'rishingiz mumkin^{3,4}

Arxitektura va dizaynda matritsalarining qo'llanilishi.

3 o'lchamli tasvirlarni 2 o'lchamliga o'tkazish, masshtabini o'zgartirish, turli akslantirishlarda matritsalaridan foydalanish ancha qulay. Bunda matritsalaridan biror bir obyektning shaklini almashtirishda uning yangi koordinatalarini hisoblashda foydalaniladi. Matritsa elementlari qiymatlarini mos ravishda o'zgartirish bilan berilgan obyekt ustida istalgancha o'zgartirishlar, xususan, masshtabni o'zgartirish, ko'zqusimon akslantirish, burish, ko'chirish va hakazo almashtirishlarni bajarish mumkin.

3 o'lchovli fazodagi 2 ta turli koordinatalar sistemasi (biri 2 o'lchovlidan 3 o'lchovlarga maxsus o'tkazilgan)ni o'zaro bog'liq almashtirishi quyidagi 3×3 matritsa bilan yoziladi:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$$

² Xashimov A.R., Xujaniyozova G.S. Toshkent Moliya Instituti, "Oliy matematika, statistika va ekonometrika" kafedrasida iqtisodchilar uchun matematika fanidan o'quv-uslubiy majmua (I semestr), 2019 yil (16-betga qarang).

³ <https://youtu.be/TJQD4dnCbAA>

⁴ <https://youtu.be/vrxzWNTtF68>

Koordinatalar bo'yicha o'zgarish quyidagi matritsalar ko'paytmasi ko'rinishida beriladi:

$$[\bar{x} \ \bar{y} \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$$

yoki $\bar{x} = ax + by + e$, $\bar{y} = cx + dy + f$.

Masshtabni o'zgartirishda gorizontaal yoki vertikal yo'nalishda kattalashtirish yoki kichiklashtirish kerak bo'lganda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

birlik matritsadan foydalanish kerak bo'ladi. Misol uchun obyektни gorizontaal yo'nalishda 2 barobar kattalashtirish kerak bo'lsa, almashtirish matritsasini

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ko'rinishda olish kifoya. U holda obyektning yangi koordinatalari quyidagicha topiladi:

$$\bar{x} = 2x + 0 \cdot y + 0 \rightarrow \bar{x} = 2x \quad \bar{y} = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \rightarrow \bar{y} = y.$$

Ko'zguşimon akslantirishda almashtirish matritsasini

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ko'rinishda olinsa, gorizontaal yoki vertikal yo'nalishda qiyalashtirish uchun b va c larning qiymatlari mos ravishda o'zgartiriladi. Misol uchun b ($-b$) - yuqoriga (pastga), c ($-c$) - o'ngga (chapga) qiyalashga mos keladi.

Burish esa masshtab va qiyalash kombinatsiyasidan iborat bo'lib, obyektning aniq proporsiyalarini saqlab qolish uchun sinus va kosinuslarni aniq hisoblash talab etiladi:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bunda burish soat strelkasiga qarshi yo'nalishda ro'y beradi, α esa burish burchagini graduslarda qabul qiladi. Siljitishda esa e (gorizontaal) va f (vertikal) qiymatlar o'zgartiriladi.

Vizual misollar va batafsil ma'lumotlarni hamda matritsalarini python dasturlash tilidan foydalanib ishlash haqidagi ma'lumotlarni quyidagi havolalardan olishingiz mumkin bo'ladi^{5, 6, 7}.

⁵ <https://code-industry.ru/masterpdfeditor-help/transformation-matrix/>

⁶ <https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Matrix>

⁷ <https://www.geeksforgeeks.org/python-encoding-decoding-using-matrix/>

1.3. Vektorlar va ularning tatbiqlari.

Kalit so'z va tushunchalar: Vektor; pozitsion vektor; kuch; tezlik; kimyo, biologiyada vektor tushunchasi.

Vektorlarning fizik, mexanik jarayonlardagi tatbiqlari.

Vektorlar haqida asosiy tushunchalarni berib bo'lgach, ularning turli sohalardagi talqinini ham qisqacha aytib o'tish kerak. Misol uchun kimyoda vektorlar nima ma'noni beradi? Ma'lumki, kimyoviy jarayonlarning to'g'ri chizig'i koordinata boshidan albatta o'tadi. Ixtiyoriy fazoni vektorlar orqali ifodalab bo'lgani uchun, kimyoviy jarayonga mos keluvchi vektor o'sha jarayonning to'g'ri chizig'ida yotadi. Odatda bunday vektorlarni radius-vektorlar deb ataladi va ularning boshi koordinata boshi bilan ustma-ust tushadi. Demak, kimyoda ixtiyoriy kimyoviy jarayon unga mos keluvchi vektorning fazodagi joylashuvi bilan xarakterlanadi desak bo'ladi. Biologiyada esa bir organizmdan boshqa organizmga parazit tashuvchi organizmni vektor deb atash mumkin. Misol uchun, Vabo kasalligini tashuvchi kalamushlar, bezgak kasalligini tashuvchi chivinlar va hakazo. Iqtisodiyotda vektorlar juda ko'p ishlatiladi. Vektorlarning komponentalari turli mazmundagi kattaliklarni o'zida aks ettirib, iqtisodiy masalani kompakt ifodalab, kerakli hisoblashlarni oson bajarishda juda qo'l keladi. Misol uchun bir tekstil fabrika 3 turdagi mahsulot ishlab chiqarsa, 3 komponentali vektor orqali shu fabrikaning ishlab chiqaradigan mahsuotlarini ifodalash mumkin. Keyingi hisoblashlarda vektorlar ustidagi amallar orqali kerakli natijalarni olish mumkin bo'ladi.

Quyida vektorlarning tatbiqlarini ko'rgazmali tarzda tushuntirishga harakat qilaylik. Misol uchun quyidagi amaliy masalani qaraylik:

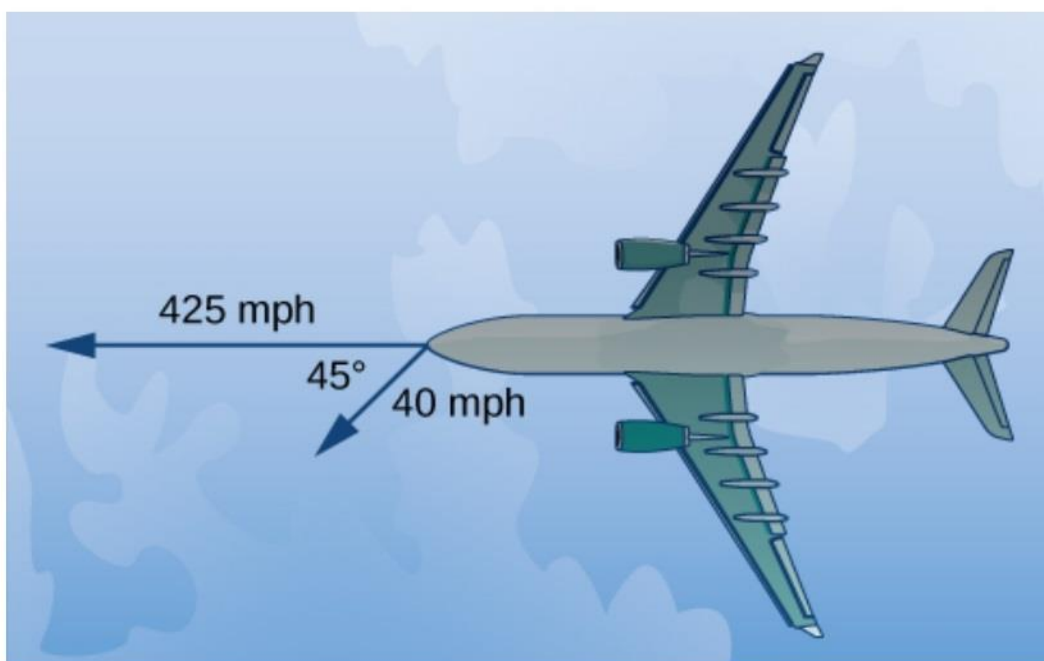
1-masala. *Alijonning mashinasi loyga botib qoldi. Uni loydan chiqarish uchun traktor yordamga olib kelindi. Arqonning bir uchi Mashina oldiga bog'lanib, ikkinchi uchi traktorga bog'landi hamda Alijonning o'zi mashinani ortidan itarib uni loydan chiqarishni boshldilar. Traktor mashinani gorizontaal yo'nalishda 300 kuch bilan tortsa, Alijon mashinani 150 kuch bilan, lekin ma'lum burchak ostida (15 gradus) itaradi (rasmga qarang). Umumiy ta'sir kuchini aniqlang.*



Ikki yo'nalishdagi kuchning birlashmasini topish uchun ularning vektorlarini aniqlab olamiz. Gorizontaal yo'nalishdagi vektorning boshi $(0; 0)$ va uchini $(300; 0)$ deb olsak bu vektorni $\langle 300; 0 \rangle$ yoki $300\vec{i}$ deb yozsak bo'ladi. Keyingi vektor esa uzunligi 150 va Ox o'qining musbat yo'nalishidan 15° burchak ostida yo'naltirilganligi uchun $\langle 150 \cos(15^\circ); 150 \sin(15^\circ) \rangle$ yoki $150 \cos(15^\circ)\vec{i} + 150 \sin(15^\circ)\vec{j}$ deb yozib olamiz. Shunda yig'indi vektor $\vec{r} = \langle 300; 0 \rangle + \langle 150 \cos(15^\circ); 150 \sin(15^\circ) \rangle$ bo'ladi. Uning uzunligi esa $\|\vec{r}\| = \sqrt{(300 + 150 \cos(15^\circ))^2 + (150 \sin(15^\circ))^2} \approx 446.6$ ga teng bo'ladi.

2-masala. Samolyot g'arb tomonga qarab soatiga 425 mil tezlikda uchib ketyapti. Shamol shimoli-sharqiy tomondan soatiga 40 mil tezlikda esib turgan bo'lsa, samolyotning yerga nisbatan tezligini aniqlang.

Masala shartini vizuallashtiraylik:



Samolyot tumshug'ini koordinata boshi deb hisoblab samolyot tezligi vektorini $\vec{p} = -425\vec{i}$ ko'rinishida yozib olamiz. Shamolni ifodalovchi vektor Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan 225° burchak hosil qilgani uchun

$$\vec{w} = \langle 40 \cos(225^\circ); 40 \sin(225^\circ) \rangle = \left\langle -\frac{40}{\sqrt{2}}; -\frac{40}{\sqrt{2}} \right\rangle = -\frac{40}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{40}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Samolyotning o'z tezligi va shamol tezligining birgalikdagi ta'siri natijasida

$$\vec{p} + \vec{w} = -425\vec{i} + \left(-\frac{40}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{40}{\sqrt{2}}\vec{j} \right) = \left(-425 - \frac{40}{\sqrt{2}} \right)\vec{i} - \frac{40}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Bu vektorning uzunligi shamol ta'sirida samolyotning yerga nisbatan qanday tezlik bilan harakatlanayotganini ifodalaydi, ya'ni

$$\|\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{w}}\| = \sqrt{\left(-425 - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 454.17 \text{ mph.}$$

Pozitsion vektor qiymatli funksiyalarning zarra harakatiga tatbiqi.

Ma'lumki egri chiziqlar parametrik ko'rinishda ham beriladi. Amaliy masalalarda, masalan, zarraning egri chiziq bo'ylab harakatini ifodalashdi parameter vaqtni anglatadi. Misol uchun markazi koordinatalar boshida, radiusi R ga teng bo'lgan aylanani t parametr orqali

$C : x = R \cos(t), y = R \sin(t)$ ko'rinishida yozish mumkin. Aytaylik, qandaydir zarra shu egri chiziq bo'ylab harakatlanayapti. Uning ixtiyoriy momentdagi joylashuvini topmoqchi bo'lsak, bu egri chiziqni pozitsion vektor qiymatli funksiya ko'rinishida ifodalab olgan qulay. Pozitsion vektorning oddiy vektordan farqi, uning boshlanish nuqtasi doim koordinata boshida bo'lishi shartligidir. Demak, yuqoridagi egri chiziqni pozitsion vektor-qiymatli funksiya ko'rinishida quyidagicha yozib olish mumkin:

$$C : \bar{\mathbf{r}}(t) = R \cos(t)\bar{\mathbf{i}} + R \sin(t)\bar{\mathbf{j}}$$

1-masala. Aytaylik qandaydir bir zarra parametr ga bog'liq quyidagicha berilgan

$$C : \bar{\mathbf{r}}(t) = 10 \cos(2t)\bar{\mathbf{i}} - 5 \sin(t)\bar{\mathbf{j}}$$

egri chiziq bo'ylab harakatlanayapti. $t = \frac{\pi}{2}$ vaqtdagi zarraning koordinata tekisligidagi o'rnini toping.

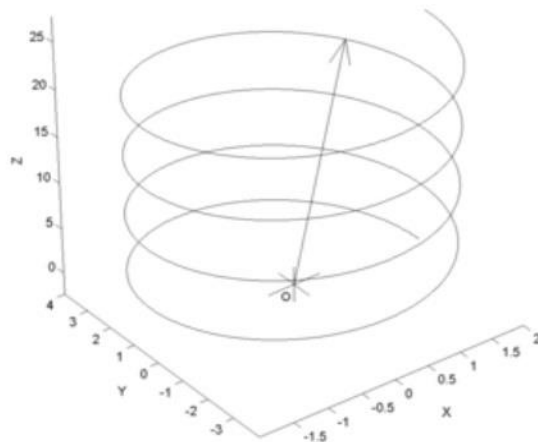
Bu yerda $\bar{\mathbf{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10 \cos(\pi)\bar{\mathbf{i}} - 5 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\bar{\mathbf{j}} = \langle -10; -5 \rangle$. Demak, $t = \frac{\pi}{2}$ vaqtda

zarraning joylashuvi (x, y) tekislikning $(-10; -5)$ nuqtasida bo'ladi.

Bunday parametrik ko'rinishda berish Ko'p o'lchovli sohalardagi egri chiziqlarni ifodalashda qulaylik tug'dirsa, zarraning fazodagi vaqt momentidagi joylashuvini topishda muhim rol o'ynaydi.

2-masala. Quyidagi pozitsion vektor-qiymatli funksiya $\bar{\mathbf{r}}(t) = \langle 2 \cos(t); 4 \sin(t); t \rangle$ bilan berilgan egri chiziq bo'ylab harakat qiluvchi zarraning $t = \pi$ dagi joylashuvini toping.

Oddiy hisob-kitob bilan $\bar{\mathbf{r}}(\pi) = \langle 2 \cos(\pi); 4 \sin(\pi); \pi \rangle = \langle -2; 0; \pi \rangle$ ni olamiz. Demak, $t = \pi$ da zarra (x, y, z) fazoning $(-2; 0; \pi)$ nuqtasida joylashgan.



Vektorlarni bevosita matematikaning boshqa bo'limlaridagi tatbiqlari haqida to'xtalmadik. Bu haqida, misol uchun quyidagi manba¹dan foydalanib ma'lumot olishingiz mumkin.

¹ [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_\(OpenStax\)/12%3A_Vectors_in_Space](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/12%3A_Vectors_in_Space)

2-mavzu. Funktsiyalar va ularning tatbiqlari. Hosila va uning tatbiqlari. Integral va ularning tatbiqlari.

2.1. Funktsiyalar va ularning tatbiqlari

Reja:

1. Funktsiyalarning iqtisodiy masalalardagi tatbiqlari.
2. Ratsional funktsiyaning aralashmaga oid masalaga tatbiqi.

Kalit so'z va tushunchalar: Funktsiya; chiziqli funktsiya; kvadratik funktsiya; ratsional funktsiya; iqtisodiy masalada funktsiya; kimyoviy masalada funktsiya.

2.1.1. Funktsiyalarning iqtisodiy masalalardagi tatbiqlari.

Funktsiyaning ta'rifini berib, ma'lum bir misollar ketirilgandan so'ng elementar funktsiyalarning aniq tatbiqlari haqida to'xtalish kerak. Quyida biz funktsiyalarning iqtisodiy masalalariga e'tibor qaratamiz. Dastlab sodda misollardan boshlaymiz.

1-misol. *Tadqiqotchi ma'lum bir iste'mol bozorida choyga bo'lgan talabni o'rganmoqchi. Qancha miqdorda choy ishlab chiqarish uchun u quyidagi funktsiyani tuzdi: $Q_t = f(P_t; Y; A; N; P_c)$*

Bu yerda Q_t - talab qilinadigan choy miqdori, P_t - choyni narxi, Y - iste'molchilarning o'rtacha daromadi, A - choyni reklama qilishga sarflanadigan xarajat, N - iste'molchilar soni, P_c - kofe (muqobil ichimlik sifatida) narxi.

Shu o'rinda talabalardan funktsiyaning argumentlari haqida bir oz fikr yuritishlarini so'rash kerak. Balki qaysidir argument ortiqchadir, balki yana boshqa argumentlar qo'shish kerakdir. f funktsiyaning ko'rinishi haqida nimalar deyish mumkin, aniqrog'i, bu funktsiya chiziqli bo'lgan holatiga aniq misol keltirish mumkinmi?

Funktsiya tuzishga oid topshiriqlarni ham turli mavzuga moslab berish maqsadga muvofiq. Masalan,

- Mashina soatiga 60 km o'zgarmas tezlikda harakatlanmoqda. Uning bosib o'tgan masofasini vaqtga bog'liqligini ifodalovchi funktsiya tuzing.
- Pandemiya davrida kasallangan 1 shaxs boshqa 5 shaxsga kasal yuqtirsa, jami aholining qancha qismi kasallanishini funktsiya orqali ifodalang.
- Bir shaxs bankdan kredit oldi. Agar yillik ustama 25% bo'lsa, uning bankka qaytaradigan summasini vaqtga bog'liqligini ifodalovchi funktsiya tuzing.
- O'q uzildi. Uning boshlang'ich tezligi 100 km/soat. Bir sekunddan so'ng o'q o'zining maksimal tezligi 200 km/soat ga erishadi. O'q bosib o'tgan masofaning vaqtga bog'liqligini analitik ko'rinishda ifodalang.

Keyingi misolda maxsus iqtisodiy tushunchani bilish talab etiladigan holatni qaraylik.

2-misol. Talab funksiyasi $P = 60 - 0.2Q$ uchun mahsulot narxi 25 sh.b. bo'lgan holdagi talabning elastiklik nuqtasini toping.

Bunda talabning elastiklik nuqtasini topish formulasini bilish kerak bo'ladi. Agar talab funksiyasi berilgan bo'lsa TEN (talabning elastiklik nuqtasi) quyidagicha topiladi:

$$e = (-1) \frac{P}{Q} \left(\frac{1}{\text{burchakoeffitsiyent}} \right)$$

Demak, bu misolda burchak koeffitsiyent Q ning oldidagi koeffitsiyentga teng bo'ladi. Bizdan $P = 25$ bo'lgan hol so'ralayotgani uchun, avval mos Q ni topib olamiz, ya'ni $Q = (60 - 25)/(0.2) = 175$. Keyin esa TEN quyidagicha topiladi:

$$e = (-1) \frac{25}{175} \left(\frac{1}{-0.2} \right) = \frac{5}{7}.$$

Keyingi misolda chiziqli bo'lmagan funksiyalarning tatbiqiga oid misollarni keltiramiz.

3-misol. Firma bino ijarasi uchun yiliga 10000 sh.b. sarflaydi. Firmaning o'rtacha qiymat funksiyasini toping.

Avvalo o'rtacha qiymat funksiyasini qanday topish formulasini berish kerak bo'ladi:

$$AFC = \frac{\text{Umumiy O'zgarmas Xarajat}}{Q}.$$

Bu yerda umumiy o'zgarmas xarajat tushunchasini aniqlashtirib ketish kerak. Biror bir ishlab chiqaruvchi mahsulotni ishlab chiqarishda doimiy o'zgarmas xarajatlari yig'indisi (bino arendasi, texnika lizing to'lovlari va hakazo) umumiy o'zgarmas xarajatlarni tashkil etadi. Demak, o'rtacha qiymat funksiyasi

$$AFC = \frac{10000}{Q} = 10000Q^{-1}$$

formulasi bilan topiladi. Bu funksiya esa chiziqli emas. Misolning davomida ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori aniq keltirilsa o'rtacha qiymat funksiyasining ham aniq miqdorini topish mumkin bo'ladi.

Keyingi misolda o'zgarmas va o'zgaruvchan xarajatlar tushunchalaridan foydalanib kvadrat funksiya, umuman, murakkab funksiya kelib chiqadigan iqtisodiy masalalardan namuna keltiramiz.

4-misol. Agar biror korxonaning o'rtacha o'zgarmas xarajat funksiyasi $AFC = 200x - 1$, o'rtacha o'zgaruvchan xarajat funksiyasi esa $AVC = 0.2x^2$ bo'lsa (bu yerda x - mahsulot miqdori), korxonaning o'rtacha umumiy xarajat funksiyasini toping.

O'rtacha umumiy xarajat funksiyasi o'rtacha o'zgarmas va o'zgaruvchan xarajatlarning yig'indisidan iborat, ya'ni:

$$ATC = AFC + AVC = 200x - 1 + 0.2x^2$$

yoki

$$ATC = 0.2x^2 + 200x - 1.$$

5-misol. *Biror mahsulotga bo'lgan talab funksiyasi $P = 80 - 0.2Q$ bo'lsa, mahsulot ishlab chiqarishdan olinadigan jami daromad funksiyasini toping.*

Q ta mahsulot ishlab chiqarishdan keladigan daromadni hisoblash uchun mahsulot miqdorini uning narxiga ko'paytirish kerak bo'ladi:

$$TR = PQ = (80 - 0.2Q)Q = 80Q - 0.2Q^2.$$

2.1.2. Ratsional funksiyaning aralashmaga oid masalaga tatbiqi.

Endi funksiyalarning aralashmaga oid masalalardagi tatbiqi haqida to'xtalamiz. Bunday masalalar tabiiy fanlar yo'nalishida o'quvchi talabalarda qiziqish uyg'otishi mumkin.

1-misol. 100 litr suv va 5 kg shakar bir idishga solinib aralashtirildi. Idishga har daqiqada 10 litr toza suv va 1 kg shakar qo'shilib turadi. 12 daqiqadan so'ng idishdagi aralashmada shakar konsentratsiyasi (1 litrga kg) ni toping. Bu kattalik masala boshidagi konsentratsiyadan kattami, kichikmi?

Agar idishga suv va shakar qo'shiladigan daqiqalarni t bilan belgilasak, idishdagi suvning o'zgarishi $100 + 10t$, shakarning o'zgarishi esa $5 + t$ bo'ladi. Aralashmadagi shakar konsentratsiyasini topish uchun shakarning o'zgarishini suvning o'zgarishiga nisbatini olishimiz kerak, ya'ni

$$C(t) = \frac{5 + t}{100 + 10t}.$$

Endi 12 daqiqadan keyin konsentratsiya qancha bo'lganini topish uchun quyidagi ishni bajaramiz:

$$C(12) = \frac{5 + 12}{100 + 10 \cdot 12} = \frac{17}{220} \approx 0.08.$$

Endi boshlang'ich vaqtda aralashmadagi shakar konsentratsiyasi qancha bo'lganini topaylik, buning uchun $t = 0$ deb olsak

$$C(0) = \frac{5 + 0}{100 + 10 \cdot 0} = \frac{1}{20} \approx 0.05.$$

Demak, 12 daqiqadan keyin shakar konsentratsiyasi boshlang'ich vaqtdagi shakar konsentratsiyasidan katta bo'ladi.

Xuddi shuningdek, bu tipda boshqa yo'nalishlarga moslab ham masalalar tuzish mumkin bo'ladi.

2.2. Hosila va uning tatbiqlari

Reja:

1. Hosilaning iqtisodiy masalalardagi tatbiqlari.
2. Hosilaning fizika va kimyodagi tatbiqlari.
3. Hosilaning optimallashtirish masalalari orqali tatbiqi.

Kalit so'z va tushunchalar: Hosila; daromad; maksimal foyda; tezlik; optimallashtirish; yer maydonining maksimal yuzasi.

2.2.1. Hosilaning iqtisodiy masalalardagi tatbiqlari.

Hosila mavzusiga kelganda aksariyat o'qituvchilar uning tatbiqlarini funksiyalarni tadqiq qilishdagi tatbiqlari, limitlarni hisoblashda Lopital qoidasini ishlatishdagi foydasi, fizikadagi tezlik va tezlanishlarni ifodalovchi 1- va 2-tartibli hosilalar bilan cheklanib qoladi. Aslida hosilaning tatbiqlari juda keng ko'lamli bo'lib juda ko'p amaliy masalalarni misol tarzida keltirib o'tish mumkin. Biz bu yerda iqtisodiy masalalardagi tatbiqlarini tanlab olishimizdan asosiy maqsad bu tipdagi masalalarni osonlik bilan boshqa sohalarga moslashtirgan holda talabalarga tushuntirish mumkin. Misol uchun biror korxonaning maksimal foydasi haqidagi masala, bu korxonaning qaysi sohada faoliyat yuritishiga qarab talabalarga qiziq tarzda bayon etish mumkin bo'ladi.

Demak, dastlabki masalamiz korxonalarning maksimal foydasiga oid bo'ladi.

1-masala. *Aytaylik, firmaning mahsulot ishlab chiqarishdagi jami xarajatlari funksiyasi quyidagicha bo'lsin:*

$$TC = 50 + 0.4q^2,$$

bu yerda q - mahsulot miqdori. Mahsulotga bo'lgan talabga ko'ra narx funksiyasi esa $p = 360 - 2.1q$ ko'rinishda bo'lib, p - mahsulot narxi. Boshqa ta'sir qiluvchi faktorlar yo'q deb hisoblab, muvozanat narx holatida firma foydasi maksimalga erishadi deb olamiz. Agar hukumat har bir ishlab chiqarilgan mahsulotga soliq joriy etsa, firmaning foydasi maksimal bo'lishi uchun mahsulot narxi qanday o'zgaradi?

Agar firma davlatga har bir mahsulot uchun t miqdorda soliq to'lasa, unda q mahsulot uchun tq miqdorda soliq to'laydi. Demak, jami harajat funksiyasi

$$TC = 50 + 0.4q^2 + tq$$

ko'rinishda bo'ladi. Firmaning yalpi daromadi esa

$$TR = pq = 360q - 2.1q^2.$$

Firmaning maksimallashtiriladigan sof daromadi

$$F = TR - TC = 360q - 2.1q^2 - (50 + 0.4q + tq) = -2.5q^2 + (360 - t)q - 50$$

funksiya orqali ifodalanadi. Sof foydani maksimallashtirishning birinchi shartini olish uchun yuqoridagi funksiyadan q bo'yicha bir marta hosila olamiz va nolga tenglaymiz:

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 360 - 5q - t = 0$$

Ikkinchi shart esa ikkinchi tartibli hosila bilan bog'liq. $\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = -5 < 0$, demak firmaning sof foydasining maksimallashtirish shartlari bajarildi. Endi yuqoridagi tenglikdan maksimal sof foyda uchun qancha mahsulot ishlab chiqarishning qo'yilgan soliq miqdoriga bog'liqligi quyidagicha bo'ladi:

$$q = 72 - 0.2t.$$

Bu funksiyadan bir marta t bo'yicha hosila olsak $\frac{dq}{dt} = -0.2$ ni hosil qilamiz. Bu esa mahsulotning har biriga t miqdorda soliq qo'yilsa maksimal foyda olish uchun mahsulot miqdori 0.2 birlikka kamayishini ko'rsatadi. Endi qo'shilgan soliq narxga qanday ta'sir ko'rsatishini bilish uchun yuqoridagi ifodani narx funksiyasiga qo'yamiz:

$$p = 360 - 2.1(72 - 0.2t) = 4.2t + 208.8.$$

Bu ifodadan bir marta hosila olib $\frac{dp}{dt} = 0.42$ ni olamiz. Bu esa firmaning maksimal foyda olishi mumkin bo'lgan holatdagi mahsulot narxi har bir mahsulotga 1\$ soliq solinsa, 0.42\$ ga qimmatlashishini ko'rsatadi.

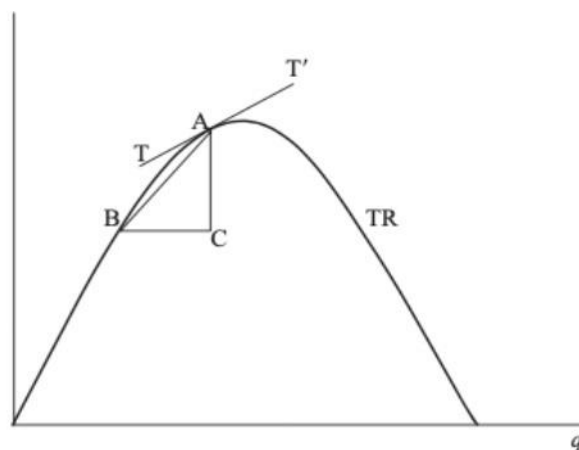
2-masala. Korxonaning mahsulotiga bo'lgan talab funksiyasi $q = 40 - 0.5p$, bu yerda p - mahsulot narxi. Korxonaning marginal daromadini toping.

Avvalo marginal daromad nimani bilib olish kerak. Iqtisod bo'yicha darsliklarda marginal daromad (MR - marginal revenue) mahsulot miqdorini 1 birlikka oshirishdan keladigan umumiy daromadning o'sishi deb aniqlangan. O'z navbatida umumiy daromad (TR - total revenue) haqida ham tushuncha berish kerak. TR - mahsulot miqdorini uning narxiga ko'paytirish bilan aniqlanadi, ya'ni: $TR = pq$. Demak, berilgan talab funksiyasidan p ni topsak $p = 80 - 2q$. Bu esa $TR = q(80 - 2q) = 80q - 2q^2$ ni keltirib chiqaradi.

MR ning ta'rifiga ko'ra mahsulot miqdori q ning ortganda TR nig ortishini belgilovchi kattalikdir, ya'ni TR ning hosilasiga teng:

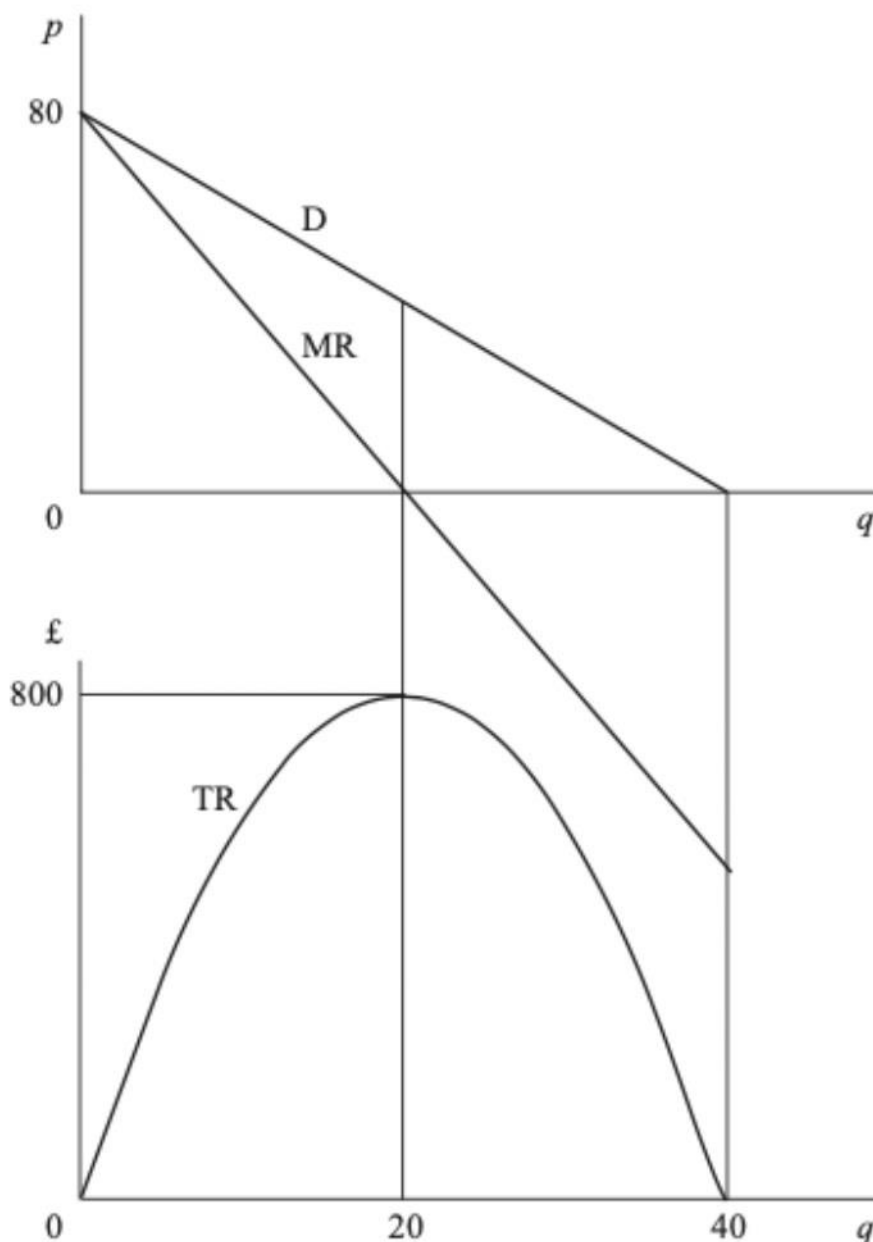
$$MR = \frac{dTR}{dq}.$$

Quyidagi grafik ham buni yaqqolroq ko'rsatadi.



Demak, $MR = \frac{dTR}{dq} = 80 - 4q$ bo'ladi. Quyidagi grafikda taalab funksiyasi (D), marginal

daromad (MR) va umumiy daromad (TR) bitta grafikda berilgan. Undan marginal daromadning mahsulot Miqdori o'zgarishiga qanday bog'langanligini ko'rishingiz mumkin. Xususan, mahsulot soni o'sib borishi barobarida TR ortib borar ekan, MR kamayib boradi, TR maksimumga yetganda MR nolga teng bo'ladi. TR kamayib borganda MR manfiy qiymatlarni qabul qilib borishi ham tabiiydir.



2.2.2. Hosilaning fizika va kimyodagi tatbiqlari.

Birinchi tartibli hosila tezlikni, ikkinchi tartibli tezlanishni bildirishini ko'pchilik biladi. Ularga oid sodda masalalar ham ko'pchilikka ma'lum. Shu sababdan 1-masalamizni ozgina murakkabroq qilib olamiz.

1-masala. *Tormoz bosilishidan oldin mashina soatiga 40 mil tezlikda harakatlanayotgan edi. Mashina sekundiga 10 futga o'zgarmas tarzda sekinlashi ma'lum bo'lsa, u to'la to'xtaguncha qancha masofani bosib o'tadi?*

Dastlab t vaqtdagi mashinaning pozitsiyasini $x(t)$ bilan belgilab olsak, u holda $v(t) = x'(t)$ (tezlik), $a(t) = x''(t)$ (tezlanish) bo'ladi.

Keyin masala shartiga ko'ra mashina sekundiga 10 futga sekinlashadi, ya'ni $a(t) = \frac{-10ft}{s^2}$ o'zgarmasdir. Bu degani $x''(t) = \frac{-10ft}{s^2}$. Bu tenglikni integrallasak

$$v(t) = x'(t) = \int x''(t)dt = -10t + c_1,$$

bu yerda t sekundlarda o'lchanadi. Tormoz bosilgan paytda ($t = 0$) da $v(0) = 40$ mil/soat bo'lgani sababli $v(t) = 40 - 10t$ bo'ladi. Endi mashina tezlik 0 ga teng bo'lganda to'xtashini hisobga olsak $v(t) = 0$ dan $t = \frac{40 \text{ mil / soat}}{10 \text{ ft / sek}^2}$ kelib chiqadi. Birliklarni bir xillashtirsak, ya'ni

$$t = \frac{40 \text{ mil / soat}}{10 \text{ ft / sek}^2} = \frac{40 \cdot \frac{5280 \text{ ft}}{3600 \text{ sek}}}{10 \cdot \text{ft / sek}^2} = 4 \frac{528}{360} \text{ sek} = 5.867 \text{ sek}.$$

Demak, mashina tormoz bosilganidan 5.867 sekund o'tib to'xtagan. Keyingi qadam shu vaqt ichida mashinaning qancha km masofa bosib o'tganini aniqlash.

Endi $v(t) = x'(t) = -10t + 58.57$ ni hisobga olib mashina pozitsiyani hisoblaymiz:

$$x(t) = \int x'(t)dt = -5t^2 + 58.67t + c_2,$$

bu yerda $c_2 = x(0)$ boshlang'ich pozitsiyani bildiradi. Demak, mashina bosib o'tgan masofa

$s = x(t) - x(0) = -5t^2 + 58.67t$ formula bilan topiladi. Aniqrog'i mashina

$s = -5(5.867)^2 + 58.67 \cdot 5.867 = 172.108$ fut masofa yurgan.

E'tibor qilgan bo'lsangiz bu masalada mazmundan kelib chiqib ifodalar hosil qilindi. Talabalarga tayyor ifodani berib, tezlik va tezlanishning hosilalar bilan bog'lanishini bergan holda topshiriq berish osonroqday tuyuladi, lekin talabalarda matematikaning tatbiqi ma'nosida ma'lumotlar kam saqlanadi deb o'ylaymiz. Keyingi misol shu tipdagi masalalardan biri.

2-masala. $d(t) = 2 - 3t^2$ ifodaga mos ravishda harakatlanayotgan mashinaning 5-sekunddagi tezligini toping. Bu yerda masofa metrda, vaqt esa sekundlarda o'lchanadi.

Bunda $v(t) = d'(t)$ ekanligini bilgan holda $t = 5$ da $v(t)$ ning qiymatini topish kifoya, ya'ni

$$v(t) = d'(t) = -6t \rightarrow v(5) = -6 \cdot 5 = -30 \text{ metr/sek.}$$

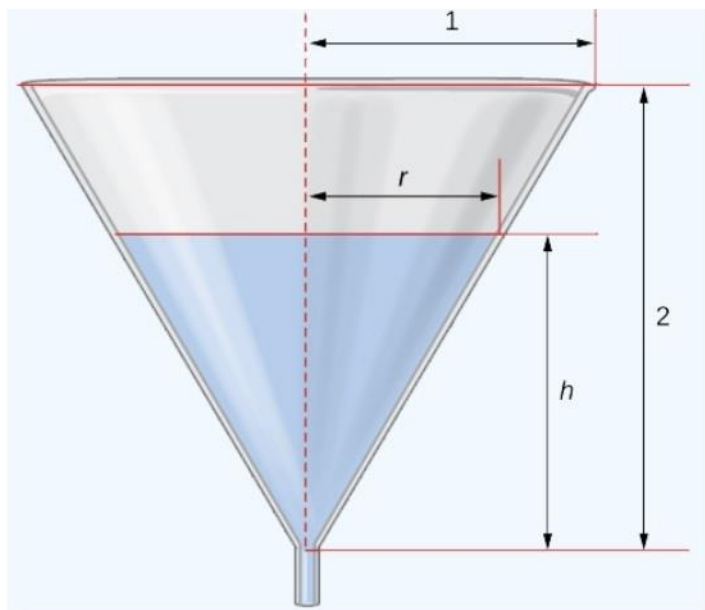
Keyingi tipdagi masalani vektorlarning tatbig'i mavzusida ham ko'rib chiqqanmiz. Zarraning ma'lum bir egri chiziq bo'ylab harakat qilyapti deb faraz qilsak, egri chiziqning ma'lum bir nuqtasidan boshqa nuqtasiga qanchalik tez yetib borayotganini aniqlash masalasini ko'raylik. Bunda egri chiziqning tenglamasi pozitsion vektor qiymatli funksiya orqali berilgan. Demak,

3-masala. Zarra $\vec{r}(t) = \langle 2 \cos(t); 4 \sin(t); t \rangle$ pozitsion vektor orqali berilgan egri chiziq bo'ylab harakatlanmoqda. Bu yerda t parametr vaqtni ifodalaydi. Zarra $t = \pi$ vaqtdagi pozitsiyasidan $t = 3\pi/2$ vaqtdagi pozitsiyasiga qanday tezlikda yetib boradi?

Bu yerda pozitsion vektordan hosila olinganda yana vektor hosil bo'ladi, uning uzunligi esa zarraning harakatlanish tezligini beradi. Demak, $\vec{r}'(t) = \langle -2 \sin(t); 4 \cos(t); 1 \rangle$. Bu vektorning uzunligini topsak $|\vec{r}'(t)| = |\langle -2 \sin(t); 4 \cos(t); 1 \rangle| = \sqrt{4 \sin^2(t) + 16 \cos^2(t) + 1}$. Lekin biz aniq bir vaqt oralig'idagi zarraning harakat tezligini topishimiz kerak. Masalaning yechimini qanday davom ettirgan bo'lardingiz? Yuqoridagi mulohazamiz to'g'rimi? Agar noto'g'ri deb hisoblasangiz qayerda xato bor deb o'ylaysiz?

Endi hosilaning kimyodagi tatbiqlariga o'tsak. Quyidagi masalaning kimyoga to'g'ridan-to'g'ri aloqasi bo'lmasa ham, kimyoviy reaksiyalarni ifodalovchi matematik modellarning bir qismi sifatida ishlatilishi mumkin. Aytaylik, kimyoviy jarayonda qandaydir modda qandaydir aralashmani ma'lum vaqt oralig'ida hosil qilish uchun bir idishdan aniq bir tezlikda va miqdorda ikkinchi idishga tushib turishi shart bo'lganda quyidagi masalaga duch kelishimiz mumkin.

4-masala. Konussimon voronkadan suv $0.03 \text{ sm}^3/\text{sek}$ tezlikda tushmoqda. Voronkaning bo'yi 2 sm , yuqori qismining radiusi 1 sm ga teng bo'lsa, suvning voronkadagi balandligi 0.5 sm bo'lganda uning o'zgarish tezligi qanday bo'ladi?



h bilan voronkadagi suvning balandligini, r bilan voronka ustki qismi radiusini va V bilan voronka hajmini belgilab olamiz. Topishimiz kerak bo'lgan kattalik $h = 0.5$ bo'lgan paytdagi $\frac{dh}{dt}$

ning qiymatidir. Masala shartidan

ma'lumki, $\frac{dV}{dt} = -0.03 \text{ sm}^3/\text{sek}$. Boshqa tomondan esa konus hajmi $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Rasmdan

ko'rish mumkinki (o'xshash uchburchaklar xossasiga ko'ra) $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$ yoki $r = \frac{h}{2}$. Hajm formulasiga

buni olib borib qo'ysak:

$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$ ni olamiz. Suv balandligi vaqt o'tishi bilan o'zgarib borganligi uchun

$h = h(t)$ deb yozib olsak bo'ladi. Endi hajmdan t bo'yicha hosila olsak $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$ ni olamiz.

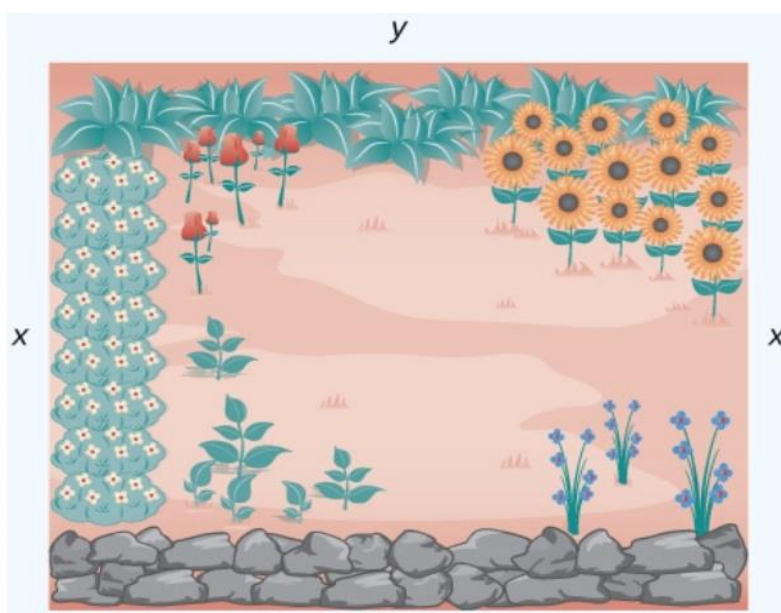
Bu yerdan esa $-0.03 = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$ ni olamiz yoki $\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{25\pi h^2}$. Suv balandligi $h = 0.5$

bo'lganda $\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{25\pi(0.5)^2} \approx -0.153 \text{ sm/sek}$ kelib chiqadi.

2.2.3. Hosilaning optimizatsiya masalalari orqali tatbiqi.

Turli sohalarga moslash mumkin bo'lgan masalalarning yana bir tipi bu optimallashtirishga oid masalalardir. Eng ko'p foyda olishdan boshlab, eng katta yuzaga ega bo'lish, eng kam vaqt sarflash kabi masalalargacha optimallashtirishga oid masalalarni topish mumkin.

1-masala. Bir tomoni tosh devor bilan o'ralgan to'g'ri to'rtburchak shakldagi yer maydoni qolgan 3 tomoni gullar bilan ekilib yopilishi kerak. Qolgan uch tomonlarning yig'indisi 100 metr bo'lishini bilgan holda yer maydoni maksimal katta yuzaga ega bo'lishi uchun tomonlarni qanday kattalikda olish kerak bo'ladi?



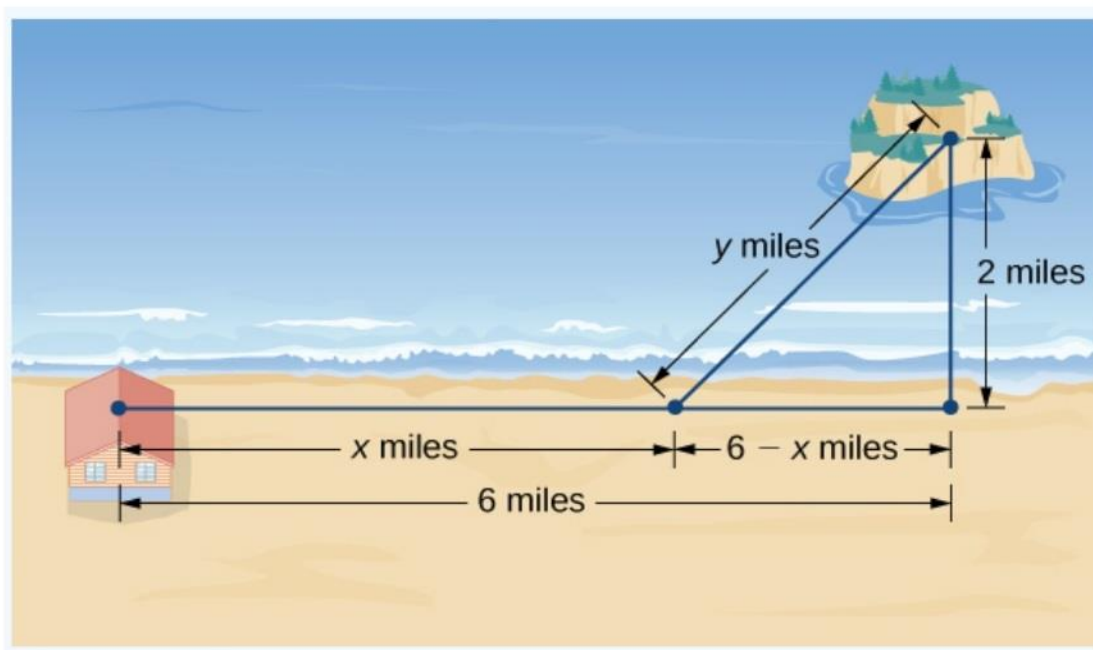
Tosh bilan o'ralgan tomonga perpendikulyar bo'lgan tomon uzunligini x va tosh devorga parallel tomon uzunligini y deb olsak,

masala shartiga ko'ra $100 = 2x + y$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglamadan y ni topsak $y = 100 - 2x$ bo'ladi. Endi bu maydonning yuzasi $S = xy$ yoki $S = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$ ga teng bo'ladi. Yuza maksimal bo'lishi $S(x) = 100x - 2x^2$ funksiyaning maksimal qiymatini topishni talab etadi. Lekin x ning o'zgarish oralig'ini belgilab olish kerak bo'ladi. Ravshanki, $x > 0$ va $y > 0$. Biroq $y = 100 - 2x > 0$ dan $x < 50$ ni Olish mumkin. Demak biz $S(x) = 100x - 2x^2$ funksiyaning $[0; 50]$ kesmadagi maksimum qiymatini topsak, masalani yechgan bo'lamiz. Buning uchun avvalo $S'(x) = 100 - 4x$ ni topamiz, keyin $S'(x) = 0$ dan esa $x = 25$ ni topamiz. Bundan

esa $y = 50$ ekanligi kelib chiqadi. Vanihoyat, yer maydonining yuzasi uning tomonlari 25, 25, 50, 50 bo'lganda maksimal bo'larkan: $S = 25 \cdot 50 = 1250$.

Keyingi optimallashtirishga oid masala kam vaqt sarflashga qaratilgan.

2-masala. Orolning to'g'ri chiziqli qirg'oqqagacha bo'lgan eng qisqa masofasi 2 mil bo'lib, bu joy uydan 6 mil uzoqlikda joylashgan. Sayyoh shu uydan orol Tomonga bormoqchi. Agar u soatiga 8 mil tezlikda yursa va soatiga 3 mil tezlikda suzsa, orolga imkon qadar qisqa vaqtda yetib borish uchun qirg'oq bo'ylab necha km yurishi kerak?



Aytaylik sayyoh qirg'oq bo'ylab x mil yursin. U holda o'sha nuqtadan orolgacha bo'lgan masofani y deb belgilab olamiz. Chizmadan ko'rinadiki, qirg'oq bo'ylab yurishga sarflangan vaqt $T_q = \frac{x}{8}$ va

suzishga sarflangan vaqt $T_s = \frac{y}{3}$. Orolga yetib borishga ketadigan to'la vaqt esa

$T = T_q + T_s = \frac{x}{8} + \frac{y}{3}$. Rasmdagi to'g'ri burchakli uchburchakda Pifagor teoremasini qo'llasak

$(6-x)^2 + 2^2 = y^2$ yoki $y = \sqrt{4 - (6-x)^2} = \sqrt{-32 + 12x - x^2}$. Buni T ning ifodasiga olib

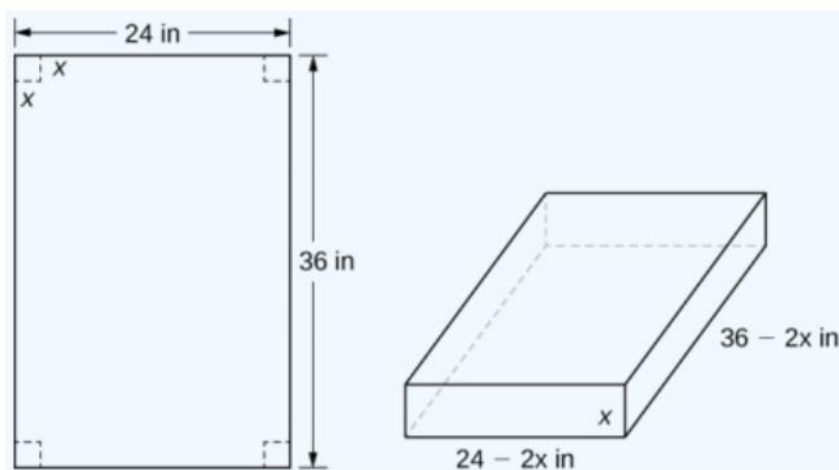
borib qo'ysak $T = \frac{x}{8} + \frac{1}{3}\sqrt{-32 + 12x - x^2}$. Bu funksiyaning $[0; 6]$ kesmadagi minimum

qiymatini topish masalasini yechish dastlabki masalani yechishga olib keladi.

Keyingi masalada hajmni maksimallashtirishga oid amaliy masala qaraymiz.

3-masala. Usti ochiq shakldagi quti eni 24 inch, bo'yi 36 inch shakldagi kartondan to'rt uchidan chizmadagidek buklagan holda yasaladi. Qutining hajmi maksimal bo'lishi uchun buklanadigan kvadratchalarning tomoni qanday bo'lishi kerak?

Agar biz buklanadigan kvadrat tomonini x deb olsak, buklangan holda tayyor qutining eni $24 - 2x$, bo'yi $36 - 2x$ va balandligi x inch bo'ladi. To'g'ri parallelepiped shaklidagi qutining hajmini topish formulasiga ko'ra



$$V(x) = (24 - 2x)(36 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 120x^2 + 864x.$$

Hajm endi buklanadigan kvadrat tomoni x ga bog'liq ifodaga aylandi. x ning Qabul qiladigan qiymatlari $x > 0$ va $24 - 2x > 0$ shartlardan kelib chiqadi, ya'ni $x \in [0; 12]$. Hajmdan hosila olsak $V'(x) = 12x^2 - 240x + 864$ kelib chiqadi. Uni 0 ga tenglab kritik nuqtalarni topib $12x^2 - 240x + 864 = 0 \rightarrow x = 10 \pm 2\sqrt{7}$, berilgan kesmada yotganini aniqlab olamiz: $x = 10 - 2\sqrt{7}$. Shunda $V(10 - 2\sqrt{7}) \approx 1825$ kubik inch javobni olamiz.

2.3. Integral va uning tatbiqlari

Reja:

1. Integralning iqtisodiy masalalardagi tatbiqlari.
2. Integralning fizikadagi tatbiqlari.

Kalit so'z va tushunchalar: Integral; samaradorlik; diskontirlangan daromad; massa va zichlik; ish va kuch; gidrostatik kuch.

2.3.1. Integralning iqtisodiy masalalardagi tatbiqlari.

Integralning iqtisodiy masalalardagi tatbig'iga to'xtalganda avvalo ish unumdorligining mahsulot ishlab chiqarishga bog'liqligiga oid masalalar keltirilib o'tiladi. Avvalo bu ikki tushunchaning integral orqali ifodalanishini keltirib o'tsak.

Agar ish unumdorligi ma'lum vaqt oralig'ida o'zgarmaydi deb hisoblasak, shu vaqt $[t; t + \Delta t]$ ichida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Δu quyidagicha aniqlanadi: $\Delta u = f(t)\Delta t$. Agar $f(t)$ o'zgaruvchi bo'lsa, u holda $\Delta u \approx f(\xi)\Delta t$ bo'ladi, bu yerda $\xi \in [t; t + \Delta t]$.

Ma'lum vaqt oralig'ini qismlarga ajrataylik: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$.

$[t; t + \Delta t]$ ($i = \overline{1, n}$) vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori $\Delta u \approx f(\xi_i)\Delta t_i$, $\xi_i \in [t_{i-1}; t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ bo'ladi. Bundan $u \approx \sum_{i=1}^n \Delta u_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i$. Agar

$\Delta t_i \rightarrow 0$ bo'lsa, har bir taqribiy tenglamalar ayanada aniqlashib boradi:

$$u = \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i. \text{ Aniq integral ta'rifiga ko'ra esa } u = \int_0^T f(t)dt.$$

Demak, $[0; T]$ vaqt oralig'ida $f(t)$ unumdorlik bilan ishlansa, shu vaqt oralig'ida ishlab

chiqarilgan mahsulot miqdori $u = \int_0^T f(t)dt$ formula bilan aniqlanadi.

1-masala. Agar ishchining unumdorligi $f(t) = \frac{1}{8t + 5} + 8$ funksiya bilan berilgan bo'lsa, uning ish

kunining 2-soatida ishlab chiqargan mahsuloti hajmini toping:

Yuqoridagiga ko'ra ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi quyidagicha topiladi:

$$V = \int_1^2 \left(\frac{1}{8t+5} + 8 \right) dt = \left(\frac{1}{8} \ln(8t+5) + 8t \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{8} \ln \frac{21}{13} + 8.$$

Yillik p foiz bilan t vaqtda, oxirida olingan yakuniy summaga qarab boshlang'ich omonat miqdorini aniqlash diskontirlash deyiladi. Bunday masalalar kapital qo'yishning iqtisodiy samarali yo'llarini topishda ko'p uchraydi.

Aytaylik K_t - t yildagi jami summa, K - diskontirlangan summa. Oddiy foizlarda $K = K_t(1 + it)$, $i = \frac{p}{100}$ - muayyan foiz stavkasi. Bu yerdan $K_t = \frac{K}{1 + it}$ bo'ladi. Murakkab foizlarda esa $K_t = K(1 + it)^t$ yoki $K = \frac{K_t}{(1 + it)^t}$.

Aytaylik, yillik daromad va vaqt o'tishi bilan o'zgarib borsin va $f(t)$ funksiya bilan ifodalansin. i foiz stavkasida foizlar doim qo'shilib boradi. U holda diskontirlangan foyda

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it} dt.$$

2-masala. Dastlabki kapital 20 ming \$ bo'lgan pul 10 foiz stavkasida 4 yil mobaynida keltirgan diskontirlangan daromadi topilsin. Bu degani kapital har yili 2 ming \$ ga ortib boradi.

Demak, kapital funksiyasi $f(t) = 20 + 2t$ bo'ladi. Endi oxirgi olingan formulaga asosan

$$K = \int_0^4 (20 + 2t)e^{-0.1t} dt.$$

Bu integralni bo'laklab integrallash yordamida yechib javobni topish mumkin. Natijada $K = 80$ ni olamiz. Bundan "har yili shart bo'yicha 20 ming \$ dan 24 ming \$ gacha qo'yib borgandagi (oddiy foizda) foyda birdaniga 80 ming \$ boshlang'ich kapital qo'ygandagi (murakkab foizda) foyda bilan teng bo'ladi" degan xulosani olish mumkin.

Iqtisodiy masalalarda funksiyaning o'rta qiymati haqidagi teorema ham ishlatiladi:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a), \quad \xi \in [a; b].$$

Boshqacha qilib aytganda funksiyaning $[a; b]$ dagi o'rtacha qiymati $f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$ ga

teng. Aytaylik, biror bir mahsulotni ishlab chiqarishni o'zlashtirishga bog'liq holda tayyorlashga sarflanadigan vaqtni ifodalovchi $t = t(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu yerda x - mahsulotning

tartib raqami. U holda 1-mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan o'rtacha vaqt (x_1 dan x_2 gacha bo'lgan o'zlashtirish davri) o'rta vaqt haqidagi teoremdan aniqlanadi:

$$\bar{t} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx.$$

Mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan vaqtni hisoblovchi funksiya odatda $t = Ax^{-B}$ ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda A - birinchi mahsulotni ishlab chiqarishga ketgan vaqt, B - ishlab chiqarish jarayonining ko'rsatkichi.

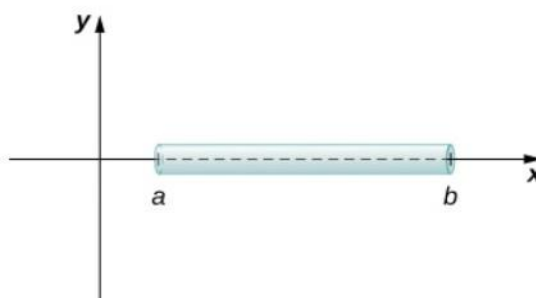
Integralning iqtisodiy masalalarga tatbig'i haqida mana bu yerdan¹ yoki bu yerdan² ham ma'lumot olishingiz mumkin.

2.3.2. Integralning fizikadagi tatbiqlari.

Og'irlik va zichlik

Bir o'lchamli jismning og'irligini uning chiziqli zichlik funksiyasidan foydalanib topishdan aniq integraldan foydalaniladi.

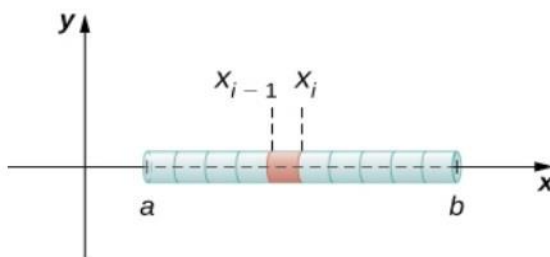
Aytaylik bizga judayam ingichka sim berilgan bo'lsin. Uni Ox o'qi bo'ylab joylashtiramiz, uning uzunligi $b - a$ ga teng bo'lsin. Simning qalindligi shunchalik kichik bo'lsinki, natijada uni hisobga olmasdan bir o'lchamli obyekt sifatida qabul qilaylik.



Agar simning zichligi ρ doimiy bo'lsa, u holda

simning massasi $m = \rho(b - a)$ ga teng bo'ladi, lekin simning zichligi turli qismlarda turlicha bo'lsa, unda $\rho(x)$ funksiyaga ega bo'lamiz. U holda $\rho(x)$ ni integrallanuvchi chiziqli funksiya deb olib simni ($[a; b]$ ni) bo'laklarga bo'lamiz:

$P = x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Unda ixtiyoriy nuqta olamiz: $x_i^* \in [x_{i-1}; x_i]$. Simning x_{i-1} dan x_i gacha bo'lgan qismining massasi $m_i \approx \rho(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \rho(x_i^*)\Delta x$ formula bilan hisoblanadi. Qaralayotgan simning massasini esa



¹ Габбасова Ю.Р. Уфимцева Л.И. Расчет изменения излишка продукции с помощью интегрального исчисления // Международный студенческий научный вестник №4-2 2015 –С 340

² Макаров С.И. Математика для экономистов: учебное пособие//2-е изд., перер.- М.: КНОРУС, 2008.- 264 с

$m = \sum_{i=1}^n m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*) \Delta x$ bo'yicha topamiz. n ni cheksizlikka intiltirsak, o'zimiz bilgan aniq

integralga kelamiz:

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho(x_i^*) \Delta x = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Kuch va ish

Fizikadagi kuch tushunchasi intuitiv ravishda biror jismni siljitishda namoyon bo'ladi va bunda kuch Jism ustida ish bajardi deyiladi. Boshqacha aytganda, ishni biror jismni siljitish uchun sarflangan energiya desa ham bo'ladi. Agar ta'sir etayotgan kuch o'zgarmas bo'lsa, ish kuch va masofaning ko'paytmasidan iborat bo'ladi. Bilamizki, 1 nyuton u 1 kg massani 1 m/sek² tezlantirishga kerak bo'lgan kuchdir. Shu sababdan ishning o'lchovi 1 nyuton-metr yoki joul deb ataladi.

Agar ta'sir qilayotgan kuch o'zgaruvchi bo'lsa, ishni topishda aniq integral ishlatiladi. Aytaylik, biror jismni Ox o'qi bo'ylab siljitish kerak bo'lsin, misol uchun, a dan b ga. Xuddi yuqoridagidek mulohaza yuritsak, $[x_{i-1}; x_i]$ intervalda bajarilgan ish

$$W_i \approx F(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = F(x_i^*) \Delta x,$$

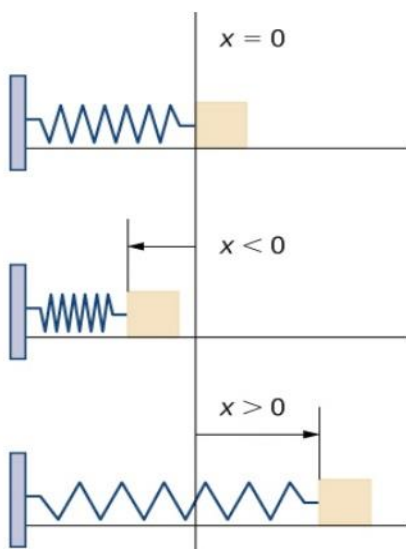
$[a; b]$ dagi ish esa

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \approx F(x_i^*) \Delta x$$

kabi aniqlanadi. $n \rightarrow \infty$ da esa

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(x_i^*) \Delta x = \int_a^b F(x) dx.$$

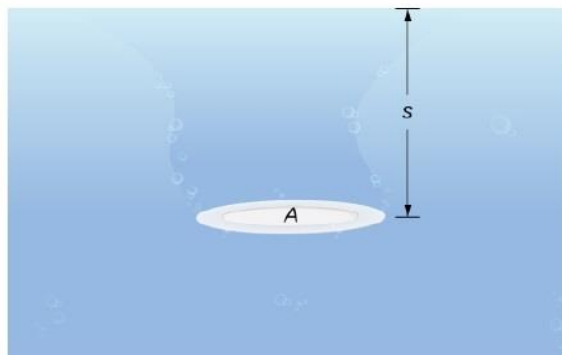
Masalan, prujina mahkamlangan jismni siljitish, uning quyidagi holatlaridan qaysi birida ekanligiga qarab turli kuch talab qilinadi:



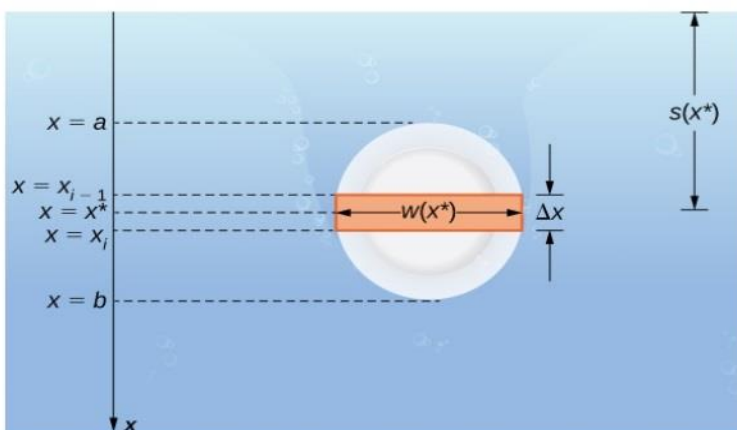
Gidrostatik kuch va bosim

Endi suyuqlikka botirilgan jismga ta'sir etuvchi kuch va bosim haqida gaplashaylik. Bir birlik yuzaga ta'sir etuvchi bosim paskalda o'lchanishini eslatib o'tamiz.

Aytaylik, A yuzaga ega bo'lgan likob s chuqurlikda gorizontal holatda joylashgan. Bu holda likobga ta'sir etayotgan kuch $F = \rho A s$ formula bilan aniqlanadi, bu yerda ρ suvning zichligi. Gidravlik bosim - suvning bosimini suv ichidagi jism yuzasiga bo'linganiga teng, ya'ni $p = F/A = \rho s$.



Paskal prinsipiga ko'ra³, berilgan chuqurlikdagi bosim barcha yo'nalishlarda bir xil bo'ladi. Demak, likobning gorizontalmi, boshqa yo'nalishdami, joylashganining farqi yo'q. Ox o'qini vertikal holatda joylashtirsak, $x = 0$ holat suvning yuzasiga to'g'ri keladi va biz s chuqurlikni x ning funksiyasi sifatida qarashimiz mumkin, ya'ni $s(x)$. Agar likob gorizontal holatda joylashsa $s(x) = x$ bo'ladi. Likobning x ga mos keluvchi eni $w(x)$ bo'lsin deb quyidagi rasmdagidek balandlikni n ta bo'lakka bo'lib olamiz.



Endi shu ingichka likobdagi kuchni aniqlaymiz: $F_i = \rho A s = \rho [w(x_i^*) \Delta x] s(x_i^*)$.

Barcha kuchlar $F \approx \sum_{i=1}^n F_i = \rho A s = \sum_{i=1}^n \rho [w(x_i^*) \Delta x] s(x_i^*)$

formuladan topiladi. $n \rightarrow \infty$ da esa $F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho [w(x_i^*) \Delta x] s(x_i^*) = \int_a^b \rho w(x) s(x) dx$.

³ [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_\(OpenStax\)/Map%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_\(OpenStax\)/14%3A_Fluid_Mechanics/14.05%3A_Pascal's_Principle_and_Hydraulics](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_I_-_Mechanics_Sound_Oscillations_and_Waves_(OpenStax)/14%3A_Fluid_Mechanics/14.05%3A_Pascal's_Principle_and_Hydraulics)

3-mavzu. Qatorlar va ularning tatbiqlari. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari

3.1. Qatorlar va ularning tatbiqlari

Reja:

1. Qatorlarning texnikadagi tatbiqlari.
2. Qatorlarning differensial tenglamalar uchun boshlang'ich, chegaraviy masalalarni yechishda va avtomodel yechimlarini topishdagi tatbiqlari.
3. O'z-o'zini tekshirishga oid savol va topshiriqlar.

Kalit so'z va tushunchalar: Afzal sonlar qatori; unifikatsiyalangan texnik parametrlar; maxsus funskiyalar; integro-differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar; avtomodel yehimlar.

3.1.1. Qatorlarning texnikadagi tatbiqlari.

Qatorlar haqida tushuncha berilganda asosan sonli va funksional qatorlar sanab o'tilib, ularning yaqinlashish masalalari o'rganish obyekti bo'ladi. Darajali qatorlar (Teylor, Loran), trigonometrik qatorlar (Furye)ning tatbiqlari haqida (asosan matematikaning o'zida) to'xtalamiz.

Sonli qatorlarning, xususan, arifmetik progressiya, geometrik progressiyaning turli amaliy masalalarni yechishga tatbiqi haqida yetarlicha ma'lumot topishingiz mumkin. Shu sababdan bu boradagi masalalar bazasini yaratishni o'zingizga havola etiladi.

Dastlab, qatorlarning texnikadagi tatbiqlariga to'xtalsak. Bu borada "Afzal sonlar qatori" degan tushuncha ko'p uchraydi. Bunday qatorlar texnik parametrlarni unifikatsiya qilish maqsadida tartiblangan sonlar ketma-ketligidir. Afzal sonlar qatori sonli ketma-ketliklar asosida tuziladi. Bu arifmetik progressiya bo'lishi mumkin (chizg'ichdagi o'lchov birliklari), zinali arifmetik progressiya (20 mm dan 110 mm gacha bo'lgan diametrlar qatorida qatorning doimiy hadi 5 mm, 110 mm dan 200 mm gacha bo'lganda 10 mm, 200 mm dan katta diametrlar qatorida 20 mm bo'lgan podshipniklarning ichki xalqalaridagi chuqurchalar soni, masalan, 12, 24, 48, 96, ...) tarzida qo'llanilishi ham mumkin. Arifmetik progressiyalarning bir noqulay xossasi, ya'ni katta hadlarning bir-biriga kichik hadlarga nisbatan yaqin joylashishi (tekis taqsimlamaganlik), amaliyotda ko'proq geometrik progressiyalarni qo'llashni ham taqazo qiladi. Eng ko'p qo'llanilgan geometrik progressiyalardan biri $q = \sqrt[n]{10}$, bu yerda ($n = 5, 10, 20, 40, 80$). Bu GOST 8032-84¹ turkumga kiruvchi R5, R10, R20, R40, R80 bilan raqamlangan afzal sonlar qatori deb yuritiladi.

R5 : 1 – 1,6 – 2,5 – 4 – 6,3;

R10 : 1 – 1,25 – 1,6 – 2 – 2,5 – 3,15 – 4 – 5 – 6,3 – 8;

R20 : 1 – 1,12 – 1,25 – 1,4 – 1,6 – 1,8 – 2 – 2,24 – 2,5 – 2,8 – 3,15 – 3,55 – 4 – 4,5 – 5 – 5,6 – 6,3 – 7,1 – 8 – 9.

R40 : R20 va 1,06 – 1,18 – 1,32 – 1,5 – 1,7 – 1,9 – 2,12 – 2,36 – 2,65 – 3 – 3,35 – 3,75 – 4,25 – 4,75 – 5,3 – 6 – 6,7 – 7,5 – 8,5 – 9,5.

Bu yerdagi qatorlarning hadlari 1.3% aniqlikda yaxlitlangan.

¹ <http://protect.gost.ru/document.aspx?control=7&id=143630>

Elektronikada xuddi shu geometrik progressiyaning $n = 3,6,12,\dots$ bo'lgan holatlari qo'llaniladi va E3, E6, E12 deb nomlanadi, masalan, E3: 1 — 2,15 — 4,6; E9: 1 — 1,3 — 1,67 — 2,15 — 2,8 — 3,6 — 4,6 — 6 — 7,7. Afzal sonlar qatoridan foydalanib kiritilgan normal chiziqli o'lchamlar qatori ham kiritilgan va ular Ra5, Ra10 va hakazo tarzida belgilangan. Ularda yaxlitlash darajasi 5% da qo'llanilgan. Bu qatorlar GOST 6636-69 ga kiritilgan². O'z navbatida bu qatorlar

- Detallarning chuqurlarining o'lchamlari (natijada seriya tarzida ishlab chiqariladigan detallarning tipi kamayadi va ishlab chiqarish osonlashadi, aniqrog'i arzonlashadi);
- Detallarni ishlab chiqarishda ishlatiladigan materiallarni sortlarga ajratgan holda standartlash;
- Tipovoy instrumentlar ishlab chiqarish maqsadida ishlatiladi³.

3.1.2. Qatorlarning differensial tenglamalar uchun boshlang'ich, chegaraviy masalalarni yechishda va avtomodel yechimlarini topishdagi tatbiqlari.

Funksiyalarni darajali qatorlar orqali ifodalanishi ularning qiymatlarini taqribiy hisoblashda ishlatilishi yaxshi ma'lum. Trigonometrik funksiyalar, eksponensial funksiyalardan tashqari maxsus funksiyalar deb ataydigan, differensial tenglamalarning yechimlarida ishlatiladigan funksiyalar ham cheksiz qatorlar ko'rinishida ifodalanadi. Misol uchun, Bessel funksiyasi

$$J_{\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \quad \text{quyidagi differensial tenglamaning kanonik yechimidir:}$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0.$$

α ning butun qiymatlarida bu funksiyani silindrik funksiyalar qatoriga qo'shishadi. Gauss gipergeometrik funksiyasi ham eng ko'p qo'llaniladigan funksiyalardan bo'lib uning qator ko'rinishidagi ifodasi quyidagicha:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}.$$

O'z navbatida bu funksiya Eyler gipergeometrik differensial tenglamasining yechimi hisoblanadi:

$$x(1-x) \frac{d^2 w}{dx^2} + [c - (a+b+1)x] \frac{dw}{dx} - abw = 0.$$

² <http://protect.gost.ru/document.aspx?control=7&id=170743>

³ А. И. Якушев, Л. Н. Воронцов, Н. М. Федотов. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения: учебник для вузов. — 6-е изд., перераб. и доп.. — М.: Машиностроение, 1986. — 352 с.

Oxirgi yillarda kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasi jadal rivojlanib bormoqda. Bunday tenglamalarning yechimida Mittag-Leffler tipidagi funksiyalar ishtirok etadi. Quyida 2 parametrli Mittag-Leffler funksiyasining qator ko‘rinishidagi ifodasi $E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$ dir.

Differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich masalalarni integral tenglamaga keltirib, undan keyin integral tenglamani ketma-ket yaqinlashish usulida yechiladi. Hosil bo‘ladigan revolzenta qator ko‘rinishida bo‘ladi. Aksariyat hollarda ular aniq bir funksiyalarni ifodalab, bu funksiyalarning tegishli xossalari dastlabki masalaning yechimini o‘rganishda ishlatiladi. Misol uchun singulyar bo‘lmagan yadroga ega kasr tartibli hosila qatnashgan differensial tenglama uchun Koshi masalasini qaraylik:

$$*D_{0t}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad 0 < \alpha < 1,$$

bu yerda $*D_{0t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t f'(s)E_{\alpha,1} \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-s)^{\alpha} \right] ds$ - Atangana-Baleanu kasr tartibli hosilasi.

Dastlab bu masala quyidagi integral tenglamaga keltiriladi

$$u(t) - \int_0^t u(s)K(t,s)ds = \bar{f}(t),$$

bu yerda

$$K(t,s) = \frac{1}{1-\lambda(1-\alpha)} \frac{d}{ds} E_{\alpha,1} \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-s)^{\alpha} \right],$$

$$\bar{f}(t) = \frac{u_0}{1-\lambda(1-\alpha)} E_{\alpha,1} \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}t^{\alpha} \right] + \frac{1-\alpha}{1-\lambda(1-\alpha)} f(t).$$

Ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanganda

$$u_n(t) = \bar{f}(t) + \int_0^t \bar{f}(\xi) \sum_{i=1}^n K_i(t,\xi) d\xi,$$

$$K_i(t,\xi) = \left(\frac{1}{1-\lambda(1-\alpha)} \right)^i \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right)^i (t-\xi)^{i\alpha-1} E_{\alpha,ai}^i \left[\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-\xi)^{\alpha} \right], \quad i = 1,2,3,\dots$$

Bundan tashqari xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda Furiye usulini qo‘llaganda masala yechimlari cheksiz qatorlar bilan yoziladi. Bu qatorlarning tekis yaqinlashishini isbotlash bilan formal yechimlarning haqiqiy yechim ekanligi isbotlanadi. Misol uchun quyidagi diffuziya tenglamasini qaraylik:

$$u_t - u_{xx} = f(x,t).$$

Bu tenglama uchun to'g'rito'rtburchakda 1-chegaraviy masalani $u(x,0) = \tau(x)$ boshlang'ich va $u(0,t) = u(1,t) = 0$ chegaraviy shartlar bilan tadqiq etamiz. Bunda yechimni $u(x,t) = X(x)T(t)$ ko'rinishda qidirilsa, x o'zgaruvchiga nisbatan Shturm-Liuuill spektral masalasiga ega bo'lamiz. Ma'lumki, bu masalaning yechimlari to'la va ortogonal sistemani tashkil qiluvchi funksiyalardan iborat, ya'ni $\{\sin(n\pi x)\}$ ($n = 1,2,\dots$). Davomida biz masala yechimini $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T(t)\sin(n\pi x)$ ko'rinishda topib, bu cheksiz qatorlarning tekis yaqinlashishini

isbotlash bilan qo'yilgan masalaning yechimi topiladi.

Bundan tashqari differensial tenglamalarning avtomodel yechimlarini topishda ham qatorlarni uchratish mumkin. Misol uchun

$$x^n u_t - t^k u_{xxxx} = 0, \quad n, k = \text{const} > 0.$$

4-tartibli xususiy hosilali differensial tenglamaning avtomodel yechimlarini $u(x,t) = P(t)\omega(\sigma)$

ko'rinishida izlaymiz, bu yerda $P = \left(\frac{1}{k+1}t^{k+1}\right)^{-1}$, $\sigma = -\frac{k+1}{(n+4)t^{k+1}}x^{n+4}$.

U holda ω ga nisbatan quyidagi gipergeometrik tenglamani hosil qilamiz:

$$x^3 \omega_{xxxx} + (3 + c_1 + c_2 + c_3)x^2 \omega_{xxx} + (1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)x \omega_{xx} + (c_1 c_2 c_3 - x)\omega_x - a\omega = 0,$$

bu tenglamaning yechimlari esa o'z navbatida umumlashgan gipergeometrik funksiyalar

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_i}{\prod_{j=1}^q (b_j)_i} \frac{z^i}{i!}$$

orqali ifodalanadi.

3.2. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari.

Reja:

1. Iqtisodiy masalalarda differensial tenglamalarning qo'llanilishi.
2. Biologiyada differensial tenglamalar.
3. O'z-o'zini tekshirishga oid savol va topshiriqlar.

Kalit so'z va tushunchalar: oddiy differensial tenglamalar; xususiy hosilali differensial tenglamalar; Tornli masalasi.

3.2.1. Iqtisodiy masalalarda differensial tenglamalarning qo'llanilishi.

Juda ko'plab iqtisodiy masalalar differensial tenglamalar orqali hal etiladi. Oldingi mavzularda bunday masalalarda hosilaning o'zini ishlatgan holatlar qaralgandi. Endi masalalar aynan differensial tenglamalarni yechishga keltiriladigan tipdagi masalalarni ko'rib chiqamiz.

Masala. Bankdan 100 ming \$ kredit yiliga 15% stavkasida 5 yilga olindi. Agar qo'shiladigan foizlar uzluksiz tarzda qo'shib borilsa, jami qancha miqdorda pul bankka to'lanishi kerak bo'ladi? Agar foizlar yilda bir qo'shilsachi?

Buning uchun avvalo $a' = 0.15a$ differensial tenglamani yechishimiz kerak bo'ladi. Sababi hosilaning ta'rifiga ko'ra $a'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t + \Delta t) - a(t)}{\Delta t}$ va bu uzluksiz o'sishdagi $\Delta t \rightarrow 0$ dagi

pul miqdorini beradi. Bu yerda $a(t)$ ifoda t vaqtda bankka to'lanishi kerak bo'lgan pul miqdori. Boshqa tomondan esa pulning miqdori uzluksiz 15% o'sgani uchun o'sadigan pul miqdori $0.15a$ ga teng. Bu yerda t yillarda o'zgaradi, ya'ni $a(1)$ bir yildan keying pul miqdorini bersa, $a\left(\frac{1}{12}\right)$

esa 1 oydan keying pul miqdorini beradi. Masala shartidan ma'lumki, $a(0) = 100000$. Demak biz quyidagi Koshi masalasini yechishimiz kerak:

$$a'(t) - 0.15a(t) = 0, \quad a(0) = 10^5.$$

Bu masalaning yechimi esa $a(t) = 10^5 e^{0.15t}$ dan iborat bo'ladi. Demak,

$$a(5) = 10^5 e^{0.15 \cdot 5} \approx 211700 \$.$$

Agar foizlar yil oxirida qo'shiladigan bo'lsa, bankka to'lanadigan pulni hisoblash uchun murakkab foiz formulasidan foydalanish kifoya:

$$10^5(1 + 0.15)^5 \approx 201135.7 \$.$$

Bunday tipdagi misollarni mana bu darslikdan ko'plab topsa bo'ladi⁴. Xususan, optimallashtirish masalalari ikki o'zgaruvchili funksiyalar va mos ravishda xususiy hosilali differensial tenglamalarga bog'liq bo'ladi.

⁴ Mike Rosser. Basic Mathematics for economists. Routledge, Taylor & Francis Group, London and New York, USA, Second edition, 2003.

3.2.2. Biologiyada differensial tenglamalar.

O'simliklarda barglarning joylashuvi fillotaksis deb atalib, biologiyaning qiziqarli masalalaridan biridir. Tabiatda spiral tipidagi fillotaksis eng ko'p uchraydi. Unda barglar o'simlikning asosiy o'qi atrofida spiralsimon holatda joylashadi. Spiral fillotaksisli o'simliklarning aksariyatida divergensiya burchagi (ketma-ket joylashgan barglar orasidagi burchak) taxminan Fibonachchi burchagiga (137.51) teng bo'ladi.

1975 yilda Dj. G.M.Tornli Fibonachchi burchagini tushuntirish uchun quyidagi farazlarga asoslangan spiral fillotaksisning modelini taklif qilgan:

1. Barcha yangi primordiumlar r o'simlikda apikal meristemaning $r = 0$ vertikal o'qidan gorizontal holatda paydo bo'lishni boshlaydi. Bu yerda apikal to'qima primordiumlarning paydo bo'lishiga kompetentligiga qarab xarakterlanadi;
2. Polyar koordinatalar sistemasi (r, θ) orqali gorizontal tekislikka o'tkazilgan barcha burchak va masofalar $r = 0$ vertikal o'qi atrofida aylanishga nisbatan simmetrik va apeks formasidagi chetlashishlarni hisobga olinmaydi;
3. Har bir primordium markazi koordinata boshida bo'lgan, r radiusli, γv tezlik bilan tarqoqlanuvchi nuqtali morfogen manbasi kabi harakatlanadi. Bu yerda $\gamma = const > 0$, vesa t vaqtidagi nuqtadagi morfogen konsentratsiyasi, aylanadagi diffuziya o'zgarmas diffuziya koeffitsiyenti bilan yuz beradi;
4. Birinchi primordium $(r, 0)$ nuqtada joylashgan va $S_0 = S(t)$ morfogen konsentratsiyasining manbasi hisoblanadi;

Bu farazlar asosida ixtiyoriy $x \in (0, l)$, $l = 2\pi r$ nuqtadagi v morfogen konsentratsiyasini quyidagi diffuziya tenglamasi bilan ifodalasa bo'ladi:

$$v_t = a^2 v_{xx} - \gamma v. \quad (1)$$

Shartlarga ko'ra $x = 0$ morfogen aylana bo'ylab ikki yo'nalishda tarqoqlanadi - yarmi musbat yo'nalishda, qolgan yarmi qarama-qarshi yo'nalishda. v gradient $x = 0$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, lekin v funksiya ixtiyoriy $x \in [0, l]$, $t \geq 0$ da uzluksiz. Shu sababdan v funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirishi zarur:

$$-a^2 \lim_{x \rightarrow +0} v_x = \frac{1}{2} S_0(t), 0 < t < T, \quad (2)$$

$$v(0, t) = v(l, t), 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

bu yerda T - rejalangan vaqt.

(1) tenglamaga quyidagi boshlang'ich shartni qo'shamiz:

$$v(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

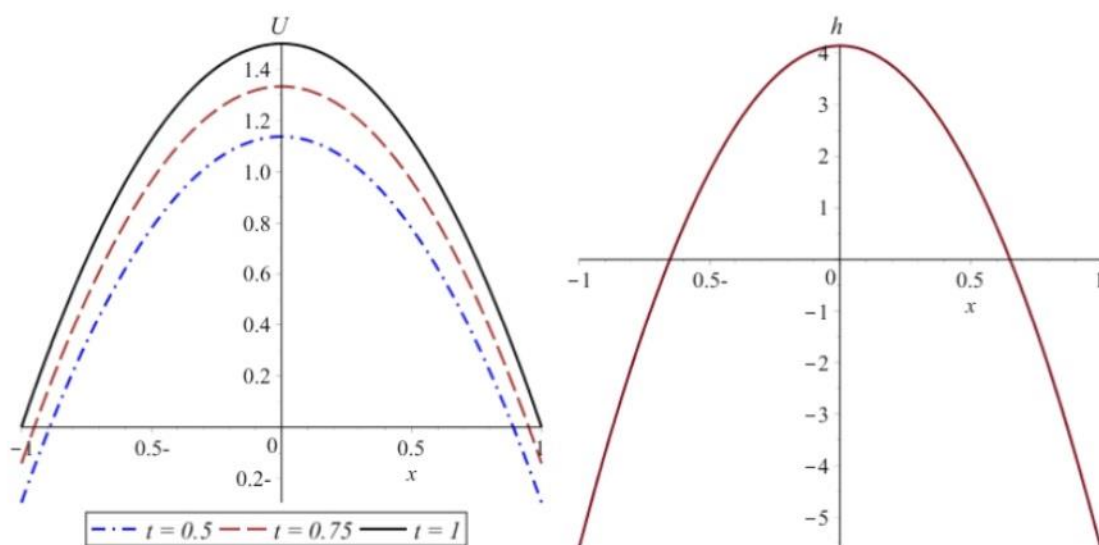
Bu yerda $\varphi(x)$ funksiya $t = 0$ boshlang'ich momentdagi morfogen konsentratsiyasi.

Shunday qilib biz spiral fillotaksisning matematik modeli ((1) tenglamaning (2)-(4) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish)ni oldik. Demak, (1)-(4) nolokal masala **Tornli masalasi** deb ataladi va u spiral fillotaksis (o'simliklarda barglarning spiralsimon joylashuvi) ning matematik modeli hisoblanadi⁵.

Quyida tuproqdagi kislorod kotsentratsiyasi hamda kislorod manbasini kuzatuvning boshlang'ich va oxirigi momentida berilgan ma'lumotlardan foydalanib topish masalasini bayon qilamiz. Jarayon diffuziya tenglamasi orqali ifodalangani uchun

$$D_{0+}^{\alpha} u - (p(x, t)u_x)_x = f(t, x)$$

kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglama asosiy rol o'ynaydi. Boshlang'ich va ma'lum bir momentdagi kislorod konsentratsiyasi ma'lum bo'lsa, ya'ni $u(0, x) = v(x)$, $u(T, x) = w(x)$, biz tuproq tarkibidagi kislorod konsentratsiyasining o'zgarishi hamda uning manbalarini topishimiz mumkin bo'ladi. Albatta, bu holatda ma'lum cheklovlar bilan ishlashga to'g'ri keladi. Masalan, $p(x, t)$ ning ma'lum bir ko'rinishda bo'lishi, kislorod manbalarining $f(t, x)$ vaqtga bog'liq bo'lmaydigan tarzda, ya'ni qisqa vaqt oralig'ida qarasaq, bu jarayonning matematik modeli asosida ma'lum xulosalar qilishimiz mumkin bo'ladi.



Bu grafikda kasr tartibning aniq bir qiymatida vaqtning turli momentlarida kislorod konsentratsiyasi va manbasining o'zgarishi ko'rsatilgan. Grafikdan ko'rinadiki, vaqt o'tgan sari kislorod konsentratsiyasi o'sib boradi, manbasi esa deyarli o'zgarmaydi.

⁵ А.М.Нахушев. «Уравнения математической биологии». М.: Высшая школа, 1995. -301 с.

IV. AMALIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

Tenglamalar va ularning tatbiqlari. Matritsalar va ularning tatbiqlari. Vektorlar va ularning tatbiqlari

1-topshiriq

O'z-o'zini tekshirishga oid savol va topshiriqlar.

1. Ijtimoiy, texnik va tabiiy fanlar yo'nalishidagi talabalar uchun o'rtacha qiymat, ishga oid va iqtisodiy mazmundagi matnli masalalar tuzing. Foydalanish uchun manba¹

2. To'g'rito'rtburchak perimetri, yuzasi formulalaridan foydalanib yechiladigan, yer kadastriga oid masalalar tuzing.

3. Qurilish sohasiga oid matnli masalalar, misol uchun, ma'lum o'lchamli 3 ta xonadan iborat xonadonni ta'mirlashdagi asosiy xarajatlarni hisoblashga oid matnli masalalar tuzing.

4. Biologiya, qishloq xo'jaligiga oid, misol uchun, ma'lum gektardagi turli turdagi ekinlarning hosildorligini hisoblash, ularni sug'orishga ketadigan xarajatlarni hisoblashni nazarda tutadigan masalalar tuzing.

5. Ma'lum bir mahsulot uchun taklif funksiyasi $p = 4 + 0.25q$, talab funksiyasi esa $p = 16 - 0.5q$ orqali berilgan erkin bozor mavjud. Bu yerda p -mahsulot narxi, q esa mahsulot miqdori. Hukumat har bir ishlab chiqarilgan mahsulot uchun t miqdorda soliq joriy etgan. Shu soliq miqdori 3 shartli belgi bo'lga paytdagi muvozanat narx va mahsulot miqdorini toping.

6. Mahsulotni ishlab chiqarish soni uning narxi bilan $q_s = -12 + 0.3p$ munosabat bilan bog'langan bo'lsa, bu mahsulotga talab miqdori $q_d = 80 - 0.2p + 0.1a$ orqali bog'langan. Bu yerda a - muqobil mahsulotning narxi. Erkin bozor sharoitida muvozanat yuzaga kelgandagi narx va mahsulot miqdorini $a = 160$ bo'lgan holda toping.

2-topshiriq

O'z-o'zini tekshirishga oid savol va topshiriqlar.

1. Texnik matritsa nima (misollar bilan tushuntiring)?
2. Iqtisodiy masalalarda matritsaviy tengsizlikning ishlatilishiga oid misol keltiring va bu tengsizlikning iqtisodiy mazmunini bayon eting.
3. Texnik, tabiiy va ijtimoiy yo'nalishlardagi ma'lum matnni shifrlang. Mos jadval va shifr matritsani taqdim eting.
4. 3 o'lchovli fazodagi obyektни 2 o'lchovga vertikal yo'nalishda 2 barobar kattalashtirib, obyektning yangi koordinatalarini toping.
5. Berilgan obyektни gorizontal va vertikal yo'nalishda qiyalashtiruvchi akslantirish matritsasiga misol keltiring.
6. 5 ta kompaniya 3 turdagi xom-ashyo asosida tayyorlangan 4 xil mahsulot ishlab chiqaradi. Quyidagi jadvalda keltirilgan ma'lumotlarga asosan

Mahsulot Turi	Korxonalarining samaradorligi					Xom-ashyoning ishlatilishi		
	1	2	3	4	5	1	2	3
1	5	6	4	7	8	2	4	5
2	1	3	5	4	1	3	6	7
3	9	16	1	5	7	4	5	6
4	4	11	8	6	5	5	9	7
	Yildagi ish kunlar soni					Xom-ashyolarning narxi		
	1	2	3	4	5	1	2	3
	210	160	180	130	150	50	60	70

- 1) Har bir kompaniyaning har bir turdagi mahsulot bo'yicha samaradorligini aniqlang;
- 2) Har bir kompaniyaning xom-ashyoga bo'lgan talabini aniqlang;
- 3) Ko'rsatilgan mahsulotlarni ko'rsatilgan miqdorda ishlab chiqarish uchun korxonalariga zarur kredit miqdorini aniqlang.

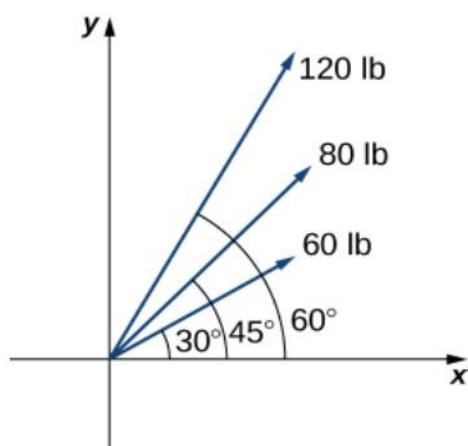
3-topshiriq

O'z-o'zini tekshirishga oid savol va topshiriqlar.

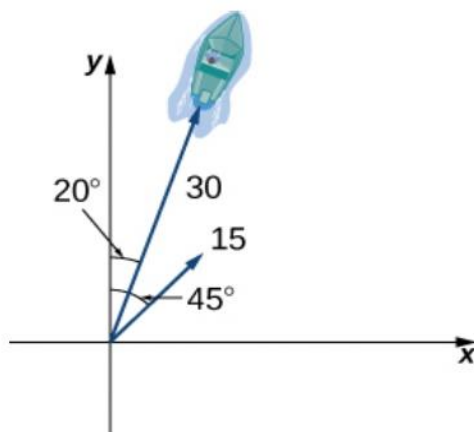
1. Soatiga 70 mil tezlikda 30 gradus burchak ostida uloqtirilgan koptokning tezlik vektorining komponentalarini toping.



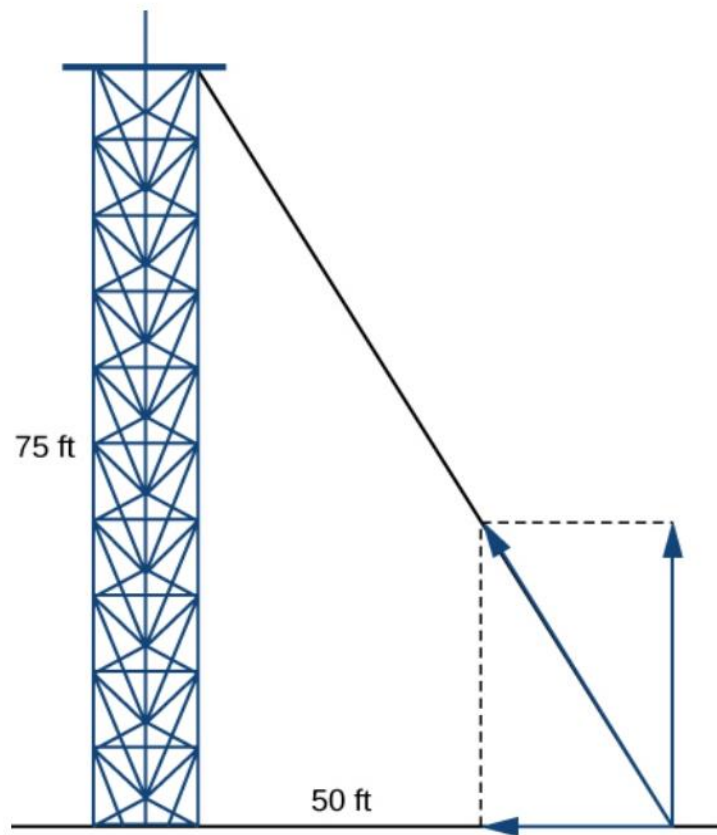
2. Bir obyektga 80, 120 va 60 birlikda 3 ta kuch ta'sir qilmoqda. Bu kuchlar mos ravishda Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan 45° , 60° , 30° burchak ostida obyektga ta'sir qilayotgani ma'lum bo'lsa, obyektga ta'sir qilayotgan umumiy kuch miqdorini aniqlang.



3. Qayiq soatiga 30 mil tezlikda N20E (shimoli-sharqiy 20 gradus) yo'nalishi bo'ylab harakatlanmoqda. Suv oqimi esa soatiga 15 mil bo'lib, uning yo'nalishi N45E. Qayiqning yangi tezligi va yo'nalishini toping.



4. 75 fut balandlikka ega bo'lgan minorani uning ostki qismidan 50 fut uzoqlikka bir uchi, ikkinchi uchi esa minora tepasiga qotirilgan tross ushlab turibdi. Trossdagi kuchning miqdori 50 ga teng bo'lsa, tross bo'ylab ta'sir qiladigan kuchni ifodalovchi vektor komponentalarini toping.



2-mavzu bo'yicha o'z-o'zini tekshirishga oid savol va topshiriqlar

Mavzuga oid berilgan ma'lumotlardan foydalanib quyidagi savol va topshiriqlarni bajaring.

2.1. Funksiya va uning tatbiqlari

1. Iste'mol (C) va daromad (Y) quyidagi chiziqli funksiya orqali bog'langan: $C = a + bY$. Agar $Y = 600$ bo'lganda, $C = 660$ hamda $Y = 1000$ bo'lganda $C = 900$ bo'lgani ma'lum bo'lsa. Noma'lum parametrlar a va b larni toping.
2. Korxonaning 85 ta mahsulot ishlab chiqarishdagi xarajati 3200\$, 130 ta mahsulot ishlab chiqarishda esa 4820\$. Agar jami xarajat funksiyasi chiziqli funksiya ekanligi ma'lum bo'lsa, korxonada 175 ta mahsulot ishlab chiqarish uchun qancha xarajat qiladi?
3. Talab funksiyasining burchak koeffitsiyenti -0.3 ga teng. Mahsulot narxi 3\$ bo'lganda 30 ta mahsulot sotilgani ma'lum bo'lsa
 - Talab funksiyasi narx va mahsulot miqdori o'qlarini qaysi nuqtalarda kesib o'tadi?
 - Mahsulot 25 dona sotilsa, uning narxi qancha bo'ladi?
 - Agar mahsulot narxi 9\$ bo'lsa, qancha mahsulot sotiladi?
4. Korxonada barcha mahsulotlarini donasini 50\$ narxda sotadi. Korxonaning mahsulot ishlab chiqarishdagi o'rtacha xarajati mahsulot soniga nisbatan quyidagicha bog'langan:
 $AC = 100x^{-1} + 0.4x^2$.

Korxonaning daromad funksiyasini x (mahsulot miqdori) orqali ifodalang.

5. Korxonaning mahsulot ishlab chiqarishdagi o'rtacha xarajat funksiyasi $AC = 40 + 1.25q^{-1}$ ko'rinishga ega, bu yerda q - mahsulot soni. Agar korxonada mahsulot reklamasi uchun qiladigan xarajati 2000\$ ni tashkil etsa, korxonada umumiy o'rtacha xarajat funksiyasini toping.

2.2. Hosila va uning tatbiqlari

Bu mavzuga oid nazariy ma'lumotlar va misollarni ko'plab internet saytlardan, xususan mana bu sayt¹ yoki buni²dan olishingiz mumkin.

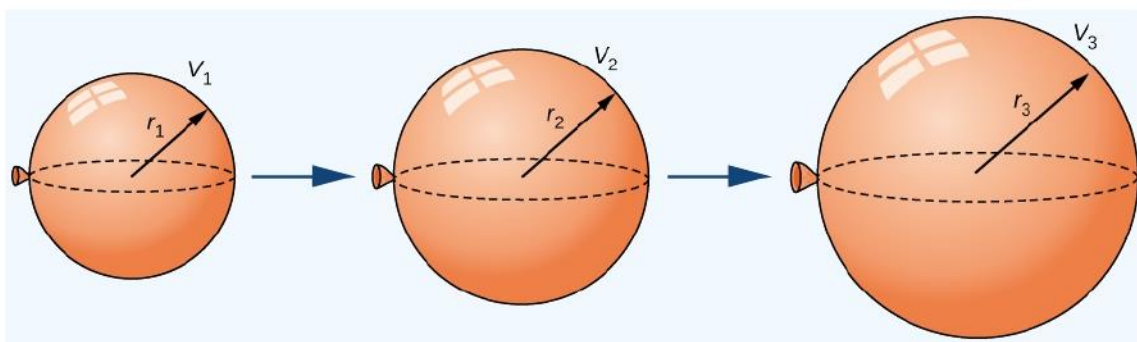
1. Xonadonlarni ijaraga beruvchi firmaning 250 ta xonadoni bor. x ta xonadonni ijaraga berganda keladigan daromadi $P(x) = -8x^2 + 3200x - 80000$ funksiya orqali aniqlangan bo'lsa, firma maksimal foyda olishi uchun nechta xonadonni ijaraga berishi kerakligini anilang.
2. Kuniga 60000 detal chiqarish imkoni bor korxonaning kuniga x ta detal ishlab chiqarishga sarflaydigan xarajati $C(x) = 250000 + 0.08x + \frac{200000000}{x}$ funksiya orqali berilgan bo'lsa,

¹ <https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/Calcl/DerivAppsIntro.aspx>

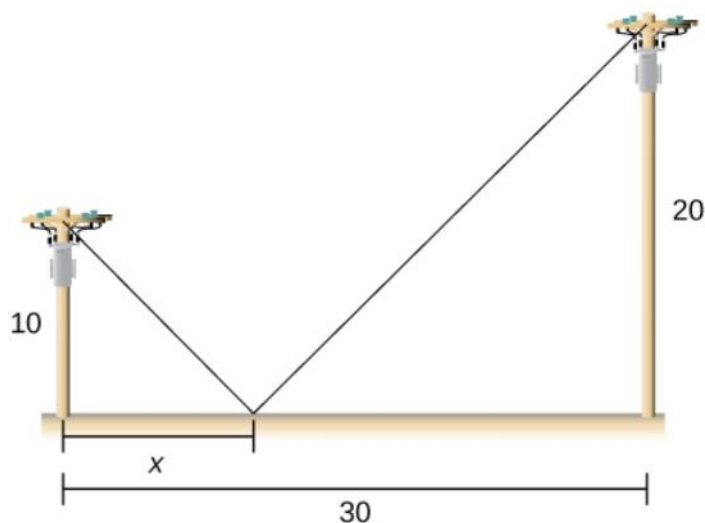
² https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_210_Calculus_I/Chapter_4%3A_Applications_of_Derivatives/4.5_E%3A_Optimization_Exercises

kunlik detallarga sarflanadigan xarajatni minimallashtirish uchun korxonada kuniga nechta mahsulot ishlab chiqarishi kerak?

3. Mashina katta yo'lga chiqib tezligini sekundiga 12 futga oshirib tezlanib bormoqda. Uning tezligi soatiga 60 mil bo'lishi uchun qancha vaqt ketadi?
4. Sferik shakldagi idishga daiqasiga 6 kub metrdan gaz kiritilmoqda. Agar bosim o'zgarmas bo'lsa diametr 120 sm bo'lganda radius qanday tezlik bilan o'zgaradi?
5. Agar jism $d(t) = t^3 - 27t$ qoida bo'yicha to'g'ri chiziqli harakatlanyaotgan bo'lsa, qachon uning tezligi nolga teng bo'ladi? O'sha momentda uning tezlanishi qanchaga teng?
6. Sferik shar (rezina koptok) sekundiga 2 kub santimetr tezlik bilan damlanyapti. Shar radiusi 3 ga teng bo'lganda radius qanday tezlik bilan o'zgaradi?



7. Yuzasi 1600 m² ga teng to'g'ri to'rtburchakli maydonning tomonlarini qanday qilib tanlab olinganda bu maydonni o'rash uchun quriladigan devor xarajatlari minimallasadi?
8. Biri 10 metr, boshqasi 20 metr balandlikka ega bo'lgan ustunlar bir-biridan 30 metr uzoqlikda joylashgan. Ularning uchlari rasmda ko'rsatilgandek sim bilan ulash nazarda tutilgan. Yerdan ulanadigan masofani shunday tanlangi, natijada ulaydigan sim uzunligi minimal bo'lsin.



2.3. Integral va uning tatbiqlari

1. Kapitalni bankka samarali qo'yishda integralning tatbig'iga oid aniq misol keltiring. Oddiy va murakkab foizlardagi omonat turlaridan foydalaning.
2. Mehnat sarfining Duglas funksiyasini mahsulot hajmiga bog'liqligiga oid iqtisodiy masalada integralning ishlatilishi haqida ma'lumot yig'ing. Aniq bir misol keltiring.
3. Ox o'qida $[\pi/2; \pi]$ intervalda joylashgan ingichka sim berilgan. Agar simning zichligi $\rho = \sin(x)$ bilan berilgan bo'lsa, uning massasini toping.
4. Darsliklardagi aniq integrallarga oid misollardan foydalanib, 3-misol tipidagi misollar tuzing.
5. Nazariy qismda bir o'lchamli obyekt uchun massa va zichlik orasidagi bog'lanishni ikki o'lchamli diskka nisbatan o'rganing va bu diskning massasini uning zichligi orqali topish formulasini keltirib chiqaring.
6. 5-misolda keltirib chiqargan formulangizga bog'liq aniq integrallardan kerakli fizik masalalar tuzing.
7. Silindrsimon idishdagi suvni bo'shatishda bajariladigan ishni aniq integral yordamida hisoblashni batafsil tushuntiring.
8. 7-misoldagi jarayonni konussimon idish uchun bajarib ko'ring.
9. Yuqori asosi 1250 metr, pastki asosi esa 750 metr va balandligi 750 metr bo'lgan teng yonli trapetsiya ko'rinishdagi damba devori ko'lni to'sib turibdi. Suv ombori to'la bo'lganda suvning chuqurligi maksimum 530 metr bo'ladi. Bunda suv sathi dambadan 10 metr pastda bo'ladi. Damba yuzasidagi kuchni toping.

3-mavzu. Qatorlar va ularning tatbiqlari. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlariga oid savol va topshiriqlar.

3.1. Qatorlar va ularning tatbiqlari

1. Afzal sonlar qatorlari nima? Ularning texnikadagi tatbiqlariga misol keltiring.
2. Qatorlarni funksiyalarning taqribiy qiymatlarini hisoblashga oid misollar keltiring.
3. Gipergeometrik funksiyalarning qator ko'rinishlarini yozib, ularning yaqinlashish oraliqlarini aniqlang.
4. Mittag-Leffler tipidagi funksiyalarning qator ko'rinishlarini toping.
5. Xususiy hosilali differensial tenglama uchun chegaraviy masalalarni yechishdagi qatorlarning tatbig'ini to'lqin tenglamasi misolida tushuntiring.
6. To'rtinchi tartibli xusuiy hosilali differensial tenglamaning avtomodel yechimlarini qatorlar yordamida yozilgan ifodalariga misollar keltiring.

3.2. Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari.

1. Auksionlar nazariyasida quyidagi Koshi masalasi uchraydi:

$$x'(t)G(t) + x(t)G'(t) = tG'(t), \quad x(t_0) = t_0,$$

bu yerda $G(t)$ - berilgan funksiya? t esa auksionga qo'yilgan obyektga auksion ishtirokchilari bergan qiymat o'zgaruvchisi. Masala yechimini berilgan funksiya orqali (uning hosilasi emas) ifodalang.

2. $x'(t) + 1/2x(t) = 1/4$ tenglamaning umumiy yechimini toping. Uning muvozanat holatini aniqlang, turg'unlikka tekshiring.
3. Bankning bir omonat turida dastlabki 2 yilda 11%, keyin esa 8% lik foiz qo'shilishi belgilangan. Shu turdagi omonat turiga 2000\$ pul tikilsa 5 yildan keyin ancha foyda olish mumkin? Differensial tenglama bilan yeching.
4. Muayyan organizmda 400 ta bakteriya bor. Agar 3 soatda bakteriyalar soni 2 barobarga ortgani ma'lum bo'lsa, 7 soatdan keyin organizmda Qancha bakteriya bo'ladi? 2 kundan keyinchi?
5. Dorilarning organizmda Erish jarayonini ifodalovchi differensial tenglamani toping. Bu tenglamaning populyatsiya dinamikasiga bog'liqligi qanday?
6. Organizm atrofda 20 gradus selsiy harorat bo'lganda o'z haroratini 100 gradusdan 60 gradusga 10 daqiqada tushiradi. Organizm o'z haroratini 25 gradusga tushishi uchun qancha vaqt kerak bo'ladi?

V. KEYSLAR BANKI

VI. MUSTAQIL TA'LIM MAVZULARI

VII. GLOSSARIY

Tenglama	ikki yoki undan oshiq ifodalarning o'zaro bog'langanini ko'rsatuvchi matematik tenglik
Matritsa	ixtiyoriy elementlardan tuzilgan to'g'ri burchakli jadval. Matritsa elementlari yo'l (satr)lar va ustunlar bo'ylab joylashadi. Satr va ustunlar, ko'pincha, umumiy atama bilan "Matritsa ning qatorlari" deyiladi.
Vektor	ko'p ma'noli termin, yo'nalishi hamda miqdori orqali ifodalanuvchi kattalikdir.
Funksiya	lot. functio — bajarish, amalga oshirish) (tilshunoslikda) — muayyan til, til birligi, lisoniy shaklning u yoki bu vazifani bajarish qobiliyati; tilning kishilik jamiyatidagi roli, vazifasi; til tizimining barcha sathlarida uning birliklari o'rtasidagi bog'liqlik yoki munosabatlar. Til birligi F.sini belgilash uning muayyan til (til tizimi)dagi rolini aniqlashni ko'zda tutadi, mas, gapda kommunikativ (biror narsa, voqea haqida xabar berish) va nominativ (ushbu voqeani atash) F.lar ajratilishi mumkin. Har bir til birligi ma'lum maqsad uchun xizmat qiladi, ya'ni muayayn F.ni (vazifani) bajaradi, shuning uchungina boshqa til birligidan farq qilgan holda mavjud bo'ladi. Til birliklarining ko'plab F.lari — o'xshatish, ajratish, farqlash F.lari ajratiladi; ana shu F.larga muvofiq ravishda til birliklarining o'zlari ham farqlanadi, ajratiladi. Mac, fonema turli so'z va morfemalarni farklash yoki ular orasiga chegara qo'yish uchun xizmat qiladi.
Qatorlar	quyidagi ko'rinishdagi ifoda: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ X a kabi belgilanadi. Yig'indida qatnashgan a_1, a_2, \dots, a_n elementlar qatorning hadlari, apesa umumiy hadi. Qatorning hadlari sonlar, funksiyalar, vektorlar, matritsalar va boshqalarni ifodalashi mumkin. Shunga ko'ra, sonli, funksional, vektorlar, matritsalar qatori bo'ladi. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S$, $a_n \sim K$ qator ning qisman yig'indisi; δ — qator yig'indisi), aks holda uzoqlashuvchi deb ataladi.

VIII. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 592 b.
2. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
3. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-JILD / Sh.M. Mirziyoyev. – T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 592 b.
4. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob halqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”. 2017. – 488 b.
5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz – T.: “O‘zbekiston”. 2017. – 592 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.
7. O‘zbekiston Respublikasining “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni.
8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.
10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.
11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini innovatsion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillarda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida talab yuqori bo‘lgan malakali kadrlar tayyorlash tizimini tubdan takomillashtirish va ilmiy salohiyatini rivojlantiri chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4358-sonli Qarori.
14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
15. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini

PF-5847-sonli Farmoni.

16. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr "O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida"gi PF-5847-sonli Farmoni.

17. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabr "Oliy ta'lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo'yicha qo'shimcha chora-tadbirlar to'g'risida"gi 797-sonli Qarori.

18. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyul "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4387-sonli Qarori.

19. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 may "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4708-sonli Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

20. Andrea Prosperetti, *Advanced Mathematics for Applications*, Cambridge University Press, 2011.

21. Bauer, H. *Measure and Integration Theory*, Berlin: de Gruyter, ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

22. Bear, H.S. *A Primer of Lebesgue Integration*, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.

23. Bobenko A.I. (Ed.) *Advances in Discrete Differential Geometry*// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464

24. Bogachev, V. I. *Measure theory*, Berlin: Springer, 2006.

25. David Spencer "Gateway", Students book, Macmillan 2012.

26. *English for Specific Purposes*. All Oxford editions. 2010. 204.

27. Evan M. Glazer, John W. McConnell *Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts*//2013, ISBN-13: 978-0313319983

28. Georgii H.O. *Gibbs measures and phase transitions*. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

29. H.Q. Mitchell "Traveller" B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

30. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni "PIONEER", B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

31. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, *Engineering Mathematics 2*, Malaysia, 2019.

32. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492
33. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020
34. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.
35. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.
36. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.
37. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.
38. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.
39. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.
40. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
41. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.
42. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.
43. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672 с.
44. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.
45. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An’anaviy va noan’anaviy ta’lim. – Samarqand: “Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi” nashriyoti, 2019. 312 b.
46. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. metodik qo‘llanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: “Lesson press”, 2020. 112 bet.
47. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.
48. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BVXV-Peterburg, 2012. — 432 s.
49. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.
50. Образование в цифровую эпоху: монография / Н. Ю. Игнатова; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил:

НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с.
http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

51. Олий таълим тизимини рақамли авлодга мослаштириш концепцияси. Европа Иттифоқи Эрасмус+ дастурининг кўмагида.
https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3_UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

52. Современные образовательные технологии: педагогика и психология: монография. Книга 16 / О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бугакова и др. – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с.
<http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf>

53. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o'quv yurtlarida o'quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish.–T.: “TKTI” nashriyoti, 2019.

54. Волошинов А.В. Математика и искусство. Просвещение, 2000 г.

55. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. Наука, 1997 г.

56. A.R. Xashimov, G.S. Xo'janiyozov. Iqtisodchilar uchun oliy matematika (o'quv qo'llanma), 2019.

57. Mike Rosser. Basic Mathematics for economists. Routledge, Taylor & Francis Group, London and New York, USA, Second edition, 2003.

IV. Интернет сайтлар

58. O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi: www.edu.uz.

59. Bosh ilmiy-metodik markaz: www.bimm.uz

60. www.Ziyonet.Uz

61. Открытое образование. <https://openedu.ru/>

62. <https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma>

63. <https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/>

64. <https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search>

65. <https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html>

66. <https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics>.

67. http://tajvedelem.hu/Tankonyv/AI_en/AI_book.html (Matematika va arxitektura)

68. <http://blog.tripbase.com/9-most-mathematically-interesting-buildings-in-the-world/> (Matematika va arxitektura)

69. <https://www.slideshare.net/Iftekharbhuiyan1/real-life-application-of-vector> (vektorlarning tatbiqlariga oid)

70. <https://www.slideshare.net/ssuser2eafea/application-of-coordinate-system-and-vectors-in-the-real-life> (vektorlarning tatbiqlariga oid)

71. <https://code-industry.ru/masterpdfeditor-help/transformation-matrix/> (matritsalarining tatbiqi haqida)

72. <https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Matrix> (matritsalar haqida)

73. <https://www.geeksforgeeks.org/python-encoding-decoding-using-matrix/> (matritsalarini python dasturlash tili ërdamida ishlashga oid)

<https://youtu.be/TJQD4dnCbAA>; <https://youtu.be/vrxzWNTtF68> (Matritsalarining kriptografiyadagi tatbiqlariga oid videolar).