ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“Замонавий геометрия” модули бўйича ЎҚУВ –УСЛУБИЙ МАЖМУА

Тошкент — 2021

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 7 декабрдаги 648-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: Тошкент давлат транспорт университети “Олий математика” кафедраси профессори, ф.-м.ф.д. А.Артикбаев

Тақризчилар: Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети “Геометрия ва топология” кафедраси мудири, ф.-м.ф.д. Р.Б.Бешимов
Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети “Геометрия ва топология” кафедраси профессори, ф.-м.ф.д. А.С.Шарипов

Ўқув -услубий мажмуа Ўзбекистон миллий университети Кенгашининг қарори билан нашрга тавсия қилинган (2020 йил 24 декабрдаги №3-сонли баѐнномаси)

МУНДАРИЖА:

I. ИШЧИ ДАСТУР 4

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ 10

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ... 13

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ.. 51

V. ГЛОССАРИЙ 57

VI. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ... 60

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Дастур Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда тасдиқланган “Таълим тўғрисида”ги Қонуни, Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сон, 2019 йил 9 июлдаги “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4387-сон, 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сон, 2019 йил 8 октябрдаги “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сон, 2020 йил 7 майдаги “математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4708-сон ли Фармонлари ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарорларида белгиланган устувор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини такомиллаштиришни мақсад қилади.

Дастур доирасида берилаётган мавзулар таълим соҳаси бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш мазмуни, сифати ва уларнинг тайёргарлигига қўйиладиган умумий малака талаблари ва ўқув режалари асосида шакллантирилган бўлиб, унинг мазмуни кредит модул тизими ва ўқув жараёнини ташкил этиш, илмий ва инновацион фаолиятни ривожлантириш, педагогнинг касбий профессионаллигини ошириш, таълим жараёнига рақамли технологияларни жорий этиш, махсус мақсадларга йўналтирилган инглиз тили, мутахассислик фанлар негизида илмий ва амалий тадқиқотлар, ўқув жараёнини ташкил этишнинг замонавий услублари бўйича сўнгги ютуқлар, педагогнинг креатив компетентлигини ривожлантириш, таълим жараёнларини рақамли технологиялар асосида индивидуаллаштириш, масофавий таълим хизматларини ривожлантириш, вебинар, онлайн, «blended learning», «flipped classroom» технологияларини амалиётга кенг қўллаш бўйича тегишли билим, кўникма, малака ва компетенцияларни ривожлантиришга йўналтирилган.

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналишининг ўзига хос хусусиятлари ҳамда долзарб масалаларидан келиб чиққан ҳолда дастурда тингловчиларнинг мутахассислик фанлар доирасидаги билим, кўникма, малака ҳамда компетенцияларига қўйиладиган талаблар такомиллаштирилиши мумкин.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

Модулнинг мақсади: Аффин фазоси ва бичизиқли функция ёрдамида ихтиёрий ноевклид фазоларни таърифлаш. Сиртлар назариясидаги ички ва ташқи геометриялар тушунчалари билан танишиш. Кўпхиллик ва унинг бошқа турдош соҳаларда қўлланиши борасида олий таълим муассасалари педагог кадрларининг билим, кўникма ва компетенцияларини ошириш.

Модулнинг вазифалари:

- чизиқли фазо ҳақида умумий тушунчалар, Аффин фазо, бичизиқли форма ва ноевклид фазоси ҳақидаги қўшимча маълумотлар билан тингловчиларни таништириш ва уларнинг амалий билимларини шакллантириш;
- сирт дифференциал геометриясига кириш орқали сиртнинг ички ва ташқи геометрияси билан танишиш, уларнинг муҳим хоссаларини ўрганиш;
- Псевдоевклид, сферик, гиперболик, ярим Евклид, ярим гиперболик фазолар билан таништириш ва уларни амалий масалаларда қўллашга доир кўникмаларни ҳосил қилиш;
- кўпхилликлар, кўпхиллик турлари ва кўпхиллик геометриясини ўрганиш орқали олий таълим педагог кадрларини геометриянинг замонавий ютуқлари билан таништиришдан иборат.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

Модулни ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланишни ***билиши*** керак.
- ўлчов назариясидан математика, физика ва биология масалаларида кенг фойдаланиш;
- математик фанларни ўқитишда инновацион таълим методлари ва воситаларини амалиётда қўллаш;
- талабаларни ўзлаштириш даражасини назорат қилиш ва баҳолашнинг назарий асослари ҳамда инновацион ёндошув усулларини тўғри қўллай олиш **кўникмаларига** эга бўлиши лозим.
- Ўлчовлар назарияси ва унинг табиқини турли фазоларда қўллай олиш;
- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланиш ***малакасига*** эга бўлиши керак.
- матеманиканинг хориж ва республика миқиёсидаги долзарб ечимлари, тенденциялари асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;
- математикани турли соҳаларга татбиқ этиш ***компетенцияларига*** эга бўлиши лозим.

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

Модулни ўқитиш маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Модулни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, педагогик технологиялар ва ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Замонавий геометрия” модулининг мазмуни ўқув режадаги “Ўлчов назарияси ва унинг қўлланиши”, “Математиканинг соҳаларга татбиқлари” ва “Математикада информацион технологиялар” ўқув модуллари билан узвий боғланган бўлиб, педагогларнинг таълим жараёнида ушбу модуллардаги мавзуларни тушунишига ёрдам беради ҳамда уларнинг касбий педагогик тайёргарлик даражаси ва илмий салоҳиятини оширишга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар таълим жараёнида геометрия фанидан талабаларга дарсни қизиқарли ва мазмунли тарзда ўтиш, шунингдек, ўз билимларини илмий фаолиятга йўналтиришга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

“Замонавий геометрия” модули бўйича соатлар тақсимоти

№	Модул мавзулари	Аудитория ўқув юкламаси		
		Жами	жумладан	
			Назарий	Амаий машғулот
1.	Чизиқли ва Аффин фазо	6	2	4
2.	Евклид ва Псевдоевклид фазо	6	2	4
3.	Сирт ички ва ташқи геометрияси	4	2	2
4.	Кўпхилликлар геометрияси	4	2	2
	Жами:	**20**	**8**	**12**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-мавзу. Чизиқли ва Аффин фазо (2 соат).

1.1. Чизиқли фазо. Чизиқли фазо ўлчами.

1.2. Аффин фазо. Аффин координаталар системаси.

1.3. Аффин алмаштиришлар. Аффин текисликлари.

1.4. Бизиқли форма.

1.5.

2-мавзу. Евклид ва Псевдоевклид фазо (2 соат).

3.1. Евклид фазоси. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар

3.2. Псевдоевклид фазо.

3.3. Сферик фазо.

3.4. Гиперболик фазо.

3.5. Ярим Евклид фазолар.

3.6. Ярим гиперболик фазолар.

3.7. Иккинчи тартибли сиртлар. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари.

3-мавзу. Сирт ички ва ташқи геометрияси (2 соат).

2.1. Сирт дифференциал геометрияси.

2.2. Сирт ички геометрияси. Риман геометрияси.

2.3 Сирт ташқи геометрияси.

4-мавзу. Кўпхилликлар геометрияси (2 соат).

4.1. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари.

4.2. Кўпхиллик геометрияси.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

Ўтилган мавзуларни чуқур таҳлил қилиш ва ўзлаштирилган билимларни мустаҳкамлаш учун ташкил этиладиган амалий машғулотлар мавзу доирасида берилган тушунчаларга мисоллар келтириш, баъзи муҳим натижаларни тингловчилар билан муҳокама тарзида исботлаш, мавзу доирасидаги илмий янгиликларни тингловчиларга осон усулда етказишга мўлжалланган.

1-амалий машғулот. Чизиқли ва Аффин фазо (4 соат).

Чизиқли фазо ўлчами, чизиқли алмаштиришлар. Вектор фазо. Аффин фазо, базис. Аффин алмаштиришлар. Аффин координаталар системаси. Бичизиқли функция. Аффин фазода тўғри чизиқ ва текисликлар.

2-амалий машғулот. Евклид ва Псевдоевклид фазо (4 соат).

Уч ўлчовли псевдоевклид фазо. Вектор нормаси, масофа. Изотроплик. Галилей геометрияси. Сфера ва унинг турлари. Сфера устидаги геометриялар. Лобачевский текислиги. Кэли-Клейн талқини.

3-амалий машғулот. Сирт ички ва ташқи геометрияси (2 соат).

Биринчи квадратик форма ва у билан боғлиқ катталиклар. Гаусс теоремаси. Сиртларни эгиш. Иккинчи квадратик форма. Нормал эгрилик. Тўла ва ўрта эгрилик. Бонне теоремаси.

4-амалий машғулот. Кўпхилликлар геометрияси (2 соат).

Кўпхиллик ва ноевклид геометриялари орасидаги боғланиш. Риман геометрияси. Чекли геометрия ҳақида тушунча. Текисликдаги геометриялар.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (кўрилаётган лойиҳа ечимлари бўйича таклиф бериш қобилиятини ошириш, эшитиш, идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);

- баҳс ва мунозаралар (лойиҳалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“Кейс-стади” методи

“Кейс-стади”— инглизча сўз бўлиб, (“case” – аниқ вазият, ҳодиса, “stadi” – ўрганмоқ, таҳлил қилмоқ) аниқ вазиятларни ўрганиш, таҳлил қилиш асосида ўқитишни амалга оширишга қаратилган метод ҳисобланади. Мазкур метод дастлаб 1921 йил Гарвард университетида амалий вазиятлардан иқтисодий бошқарув фанларини ўрганишда фойдаланиш тартибида қўлланилган. Кейсда очиқ ахборотлардан ёки аниқ воқеа-ҳодисадан вазият сифатида таҳлил учун фойдаланиш мумкин. Кейс ҳаракатлари ўз ичига қуйидагиларни қамраб олади: Ким (Who), Қачон (When), Қаерда (Where), Нима учун (Why), Қандай/ Қанақа (How), Нима-натижа (What).

“Кейс методи” ни амалга ошириш босқичлари

Иш босқичлари	Фаолият шакли ва мазмуни
1-босқич: Кейс ва унинг ахборот таъминоти билан таништириш	✓ якка тартибдаги аудио-визуал иш; ✓ кейс билан танишиш(матнли, аудио ёки медиа шаклда); ✓ ахборотни умумлаштириш; ✓ ахборот таҳлили; ✓ муаммоларни аниқлаш
2-босқич:Кейсни аниқлаштириш ва ўқув топшириғни белгилаш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муаммоларни долзарблик иерархиясини аниқлаш; ✓ асосий муаммоли вазиятни белгилаш
3-босқич: Кейсдаги асосий муаммони таҳлил этиш орқали ўқув топшириғининг ечимини излаш, ҳал этиш йўлларини ишлаб чиқиш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил ечим йўлларини ишлаб чиқиш; ✓ ҳар бир ечимнинг имкониятлари ва тўсиқларни таҳлил қилиш; ✓ муқобил ечимларни танлаш
4-босқич: Кейс ечимини ечимини шакллантириш ва асослаш, тақдимот.	✓ якка ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил вариантларни амалда қўллаш имкониятларини асослаш; ✓ ижодий-лойиҳа тақдимотини тайёрлаш; ✓ якуний хулоса ва вазият ечимининг амалий аспектларини ёритиш

“Ассисмент” методи

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур техника орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташхис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби:

“Ассисмент”лардан маъруза машғулотларида талабаларнинг ёки қатнашчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, семинар, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассесментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

Ҳар бир катакдаги тўғри жавоб 5 балл ёки 1-5 балгача баҳоланиши мумкин.

Тест

Янгилик — бу:

A) Хабар

B) Маълумот

C) Далил

D) Об-ҳаво маълумоти

Қиёсий таҳлил

Ўзбекистон рақамли телевидениеси ва анъанавий телевидениени қиёсий тахлил қилинг.

Тушунча таҳлили

Янгиликларни изоҳланг...

Амалий кўникма

“O’zbekiston” телеканали информацион дастурларида янгиликлар фоизини аниқланг

Венн Диаграммаси методи

Методнинг мақсади: Бу метод график тасвир орқали ўқитишни ташкил этиш шакли бўлиб, у иккита ўзаро кесишган айлана тасвири орқали ифодаланади. Мазкур метод турли тушунчалар, асослар, тасавурларнинг анализ ва синтезини икки аспект орқали кўриб чиқиш, уларнинг умумий ва фарқловчи жиҳатларини аниқлаш, таққослаш имконини беради.

Методни амалга ошириш тартиби:

- иштирокчилар икки кишидан иборат жуфтликларга бирлаштириладилар ва уларга кўриб чиқилаётган тушунча ёки асоснинг ўзига хос, фарқли жиҳатларини (ёки акси) доиралар ичига ёзиб чиқиш таклиф этилади;
- навбатдаги босқичда иштирокчилар тўрт кишидан иборат кичик гуруҳларга бирлаштирилади ва ҳар бир жуфтлик ўз таҳлили билан гуруҳ аъзоларини таништирадилар;
- жуфтликларнинг таҳлили эшитилгач, улар биргалашиб, кўриб чиқилаётган муаммо ёҳуд тушунчаларнинг умумий жиҳатларини (ёки фарқли) излаб топадилар, умумлаштирадилар ва доирачаларнинг кесишган қисмига ёзадилар.

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ.

Чизиқли ва Аффин фазо

Бизга ихтиёрий элементлардан ташкил топган L тўплам берилган бўлсин. Тўплам элементларини $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ лар билан белгилаймиз. Шунингдек, ҳақиқий сонлар тўплами $\mathbb{R}$ нинг элементларини грекча $\alpha, \beta, \ldots$ лар билан белгилайлик.

Берилган L тўпламда қўшиш ва сонга кўпайтириш деб аталган амаллар киритилган бўлсин:

1. ҳар қандай икки $a, b \in L$ учун шу L тўпламга тегишли ва бу элементлар *йиғиндиси* деб аталган $a + b$ элемент мос қўйилсин;

2. ҳақиқий сонлар тўпламидан олинган $\alpha \in \mathbb{R}$ ва $a \in L$ учун уларнинг *кўпайтмаси* деб аталган $\alpha \cdot a = a \cdot \alpha \in L$ элемент мос қўйилган бўлсин.

Тўплам элементлари учун киритилган бу амаллар саккизта аксиомани қаноатлантирсин.

I. Ихтиёрий $a, b \in L$ учун

$$a + b = b + a$$

яъни қўшиш амали ўрин алмаштириш (коммутативлик) хоссасига эга бўлсин;

II. Ихтиёрий $a, b, c \in L$ учун

$$(a + b) + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

бу хоссаси ассоциативлик хоссаси деб аталади. Бундан йиғинди амалини қавсларсиз ёзиш мумкинлиги келиб чиқади;

III. Тўпламда 0 – ноль элемент деб аталган ва

$a + 0 = 0 + a = a$

тенгликни қаноатлантирувчи элемент мавжуд бўлсин;

IV. Тенгликнинг ҳар қандай x элементи учун шундай y элемент мавжудки, $x + y = 0$ тенглик ўринли бўлсин. Бу y элемент x га қарама-қарши элемент деб аталади ва $y = -x$ шаклда ёзилади.

V. Тўпламда 1 – бирлик элемент деб аталган ва

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

тенгликни қаноатлантирувчи элемент мавжуд бўлсин;

Қуйидаги аксиомалар учун $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ва $a, b \in L$

VI. $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$ – дистрибутивлик хоссаси;

VII. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ – сонли кўпайтувчи тақсимоти хоссаси;

VIII. $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$ – тўплам элементи тақсимоти хоссаси.

Таъриф. Элементлари учун қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари берилган L тўпламда келтирилган саккизта аксиома ўринли бўлса, бу тўплам ***чизиқли фазо*** дейилади.

Келтирилган I-VIII аксиомалар *чизиқли фазо аксиомалари* дейилади.

Эслатамиз биз α, β – сонларни ҳақиқий сонлар тўплами $\mathbb{R}$ дан олдик, шунинг учун чизиқли фазо *ҳақиқий чизиқли фазо* деб ҳам аталади.

Шунингдек, α, β – сонларни $\mathbb{C}$ – комплекс сонлар тўпламидан ҳам олиш ёки ихтиёрий бирор бошқа U – майдон элементи бўлиши мумкин. Бу ҳолларда чизиқли фазо мос равишда *комплекс чизиқли фазо* ёки U*-майдонда аниқланган чизиқли фазо* деб юритилади.

Ушбу адабиётда биз асосан ҳақиқий чизиқли фазони кўриш билан чегаралامیз.

Чизиқли фазо аксиомаларидан келиб чиқадиган натижалар

Чизиқли фазо элементлари юқорида келтирилган саккизта аксиомани қаноатлантиришидан баъзи натижалар пайдо бўлади.

Қуйида шу натижаларни баён қиламиз.

1. Чизиқли фазода 0 (ноль) элемент битта.

Исбот. Хақиқатан ҳам, агар 0_1 ва 0_2 иккита ноль элемент бўлади деб ҳисобласак, I ва III аксиомалардан

$$0_2 = 0_2 + 0_2 = 0_1 + 0_2 = 0_1$$

эканлиги, яъни бу элементлар бир хил бўлиши келиб чиқади.

2. Ҳар қандай $x \in L$ учун қарама-қарши элемент ягона.

Исбот. Фараз қилайлик $x + y_1 = 0$ ва $x + y_2 = 0$ бўлсин, яъни y_1, y_2 – иккита қарама-қарши элемент мавжуд бўлсин. У ҳолда I-IV аксиомалардан

$$y_1 = y_2 + 0 = y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = (x + y_2) + y_1 = 0 + y_1 = y_1$$

демак, $y_1 = y_2$ тенгликни ҳосил қиламиз.

3. Ҳар қандай $x \in L$ нинг 0 (ноль) га кўпайтмаси 0 га тенг.

Исбот. Берилган $x \in L$ нинг қарама-қарши элементи y бўлсин. II, V ва VII аксиомаларни қўллаб, ушбу тенгликни ҳосил қиламиз

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + (x + y) = (0 + 1) \cdot x + y = x + y = 0.$$

4. Ҳар қандай $x \in L$ нинг -1 га кўпайтмаси қарама-қарши элементни беради, яъни $(-1) \cdot x = -x$.

Исбот. Бу натижани исбот қилиш учун $x + (-1) \cdot x = 0$ эканини кўрсатиш керак. Ҳақиқатан ҳам, 3-натижа ҳамда V ва VII аксиомалардан

$$x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

эканлиги келиб чиқади.

5. Чизиқли фазо 0 элементини ихтиёрий $\alpha \in L$ сонига кўпайтмаси 0 элементни беради.

Исбот. Хақиқатан ҳам,VI аксиома ва 3-натижага кўра

$$\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 \cdot x) = (\alpha \cdot 0) \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

Шунингдек, бу натижадан нолга тенг бўлмаган элементнинг $\alpha \neq 0$ га кўпайтмаси нолга тенг бўлмаган элемент бўлишни ҳосил қиламиз.

Чизиқли фазода йиғиндидан фойдаланиб элементлар айирмасини киритиш мумкин.

Икки a ва b элемент айирмаси $a - b$ деб, a элемент билан b элементга қарама-қарши элемент йиғиндисига айтилади

$$a - b = a + (-b).$$

Элементлар айирмаси мавжуд ва ягона бўлишини келтирилган натижалардан фойдаланиб исбот қилиш мумкин.

Чизиқли фазо аксиомалари ва келтирилган натижалардан фойдаланган ҳолларимизда буни алоҳида таъкидлаб ўтмаймиз. Шу билан бирга бу параграфларга кўрсатма (ҳавола) келтирмаймиз.

Чизиқли фазога мисоллар

Чизиқли фазо ихтиёрий тўпламда киритилган қўшиш ва сонга кўпайтириш амаллари ҳамда бу амаллар қаноатлантириши зарур бўлган саккизта аксиома орқали аниқланади. Бунда тўплам элементлари чекли ёки чексиз бўлиши мумкин. Биз баён этилиши содда бўлиши ва кейинчалик геометрик образлар билан боғлиқ эканини ҳисобга олиб, асосан чексиз кўп элементли тўпламлардан ҳосил бўлган чизиқли фазолар билан танишамиз.

Мисол 1. Фақат битта элементдан ташкил топган тўплам. Тўплам элементи қандай бўлишидан қатъий назар уни θ – элемент деб ҳисоблаймиз. Бунда θ элементни ўзига қўшилгани ҳам ноль ва ҳар қандай сонга кўпайтмаси ҳам нолга тенг бўлишини ҳисобга олиб, келтирилган саккиз аксиоманинг бажарилишини кўрсатиш мумкин.

Демак, битта элементдан иборат бўлган тўплам ҳам чизиқли фазо бўлиши мумкин.

Мисол 2. Қаторлари сони m та, устунлари сони n та бўлган матрицалар тўплами $L(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right) \quad \begin{matrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{matrix}$$

a_{ij} – ҳақиқий сонлар.

Бу тўплам чизиқли фазо ташкил этади. Бунда барча мос элементлари ўзаро тенг бўлган матрицалар ўзаро тенг, яъни бир хил матрица деб қаралади. $A = \left(a_{ij}\right)$ ва $B = \left(b_{ij}\right)$ матрицалар йиғиндиси $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$ шаклда, $A = \left(a_{ij}\right)$ матрицани α сонга кўпайтмаси $\alpha \cdot A = \left(\alpha \cdot a_{ij}\right)$ шаклда аниқланиб, шу $(m \times n)$ ўлчовли матрицалар тўпламига тегишли бўлади. Шунингдек, аниқланган йиғинди ва сонга кўпайтириш амаллари юқоридаги саккизта аксиомани қаноатлантиришини кўрсатиш мумкин.

Чизиқли матрица фазолардан квадрат матрица, йўл матрица ва устун матрицалар алоҳида аҳамиятга эга.

Мисол 3. $[0;1]$ – кесмада аниқланган узлуксиз $y = f(x)$ функциялар тўплами.

Ҳақиқатан ҳам, бу тўплам чизиқли фазо бўлади. Чунки $[0;1]$ – кесмада аниқланган узлуксиз функцияларнинг йиғиндиси ва ўзгармас сонга кўпайтмаси ҳам шу тўпламга тегишли бўлади. Бу амалларнинг чизиқли фазо аксиомаларини қаноатлантиришини исбот қилишни ўқувчи учун машқ сифатида қолдирамиз.

Чизиқли комбинация ва чизиқли боғлиқлик

Бизга L чизиқли фазо берилган бўлиб, $a,\ b,\ c, \dots, g$ шу фазо элементлари ва $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \dots, \omega$ – ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлсин. Агар берилган элементларни мос сонларга кўпайтмалари шу чизиқли фазога тегишли бўлиши ҳамда уларнинг йиғиндиси ҳам шу чизиқли фазога тегишли эканини ҳисобга олсак,

$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \ldots + \omega \cdot g \qquad (1.4.1)$$

элемент ҳам шу чизиқли фазонинг элементи бўлади.

Таъриф. $(1.4.1)$ формула билан аниқланган $x \in L$ элемент $a,\ b,\ c, \ldots, g$ элементларнинг ***чизиқли комбинацияси*** деб аталади.

Баъзан x элемент $a,\ b,\ c, \ldots, g$ элементлар орқали чизиқли ифодаланган деб ҳам аталади.

Табиийки, $(1.4.1)$ комбинацияда x нолдан фарқли элемент бўлса, $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots, \omega$ лардан камита биттаси нолдан фарқли бўлиши керак.

Таъриф. $(1.4.1)$ чизиқли комбинацияда $\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots, \omega$ лардан камида биттаси нолдан фарқли бўлганда x ноль элемент бўлса, яъни

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \ldots + \omega \cdot g = 0$$

ва

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots + \omega^2 \neq 0$$

бўлса, $a,\ b,\ c, \ldots, g$ – элементлар ***чизиқли боғлиқ элементлар*** деб аталади.

Шунингдек, аксинча $(1.4.1)$ комбинация $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \omega = 0$ бўлгандагина $x = 0$ бўлса, $a,\ b,\ c, \ldots, g$ – элементлар ***чизиқли эркли элементлар*** дейилади.

Чизиқли эркли ва чизиқли боғлиқ элементларнинг баъзи хоссалари билан танишиб чиқамиз.

Чизиқли фазодан олинган ҳар қандай элементлар тизими чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эркли бўлиши шарт. Агар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементларни танлаб олсак, улар чизиқли эркли ёки чизиқли боғлиқ бўлади.

1-хосса. Агар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементларнинг бирор қисми чизиқли боғлиқ бўлса, бу элементлар ҳам чизиқли боғлиқ бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, элементлардан $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ $(k < m)$ лар чизиқли боғлиқ бўлсин. Демак, α_i $\left(i = \overline{1, k}\right)$ лардан камида биттаси нолдан фарқли сон топиладики

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = 0$$

тенглик ўринли бўлади.

Бунда $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \ldots + 0 \cdot a_m = 0$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Бу тенгликда α_i лардан камита биттаси нолдан фарқли. Бу эса $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ – элементларнинг чизиқли боғлиқ эканини кўрсатади.

2-хосса. Агар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементлар чизиқли эркли бўлса, бу тўпламдан олинган ихтиёрий қисм тўплам элементлари ҳам чизиқли эркли бўлади.

Бу хоссанинг исботи аввалги хоссадан келиб чиқади.

3-хосса. Агар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементлар чизиқли боғлиқ бўлса, улардан ҳеч бўлмаганда биттаси қолганлари орқали чизиқли ифодаланади.

Ҳақиқатан ҳам $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементлар чизиқли боғлиқ бўлса, ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фарқли бўлган $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ сонлар мавжудки

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_m \cdot a_m = 0$$

тенглик ўринли бўлади. Чизиқли боғлиқликнинг таърифига кўра айтайлик

$\alpha_1 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}a_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}a_m$$

тенгликни ҳосил қилиш мумкин. Бу эса a_1 – элементни бошқа элементлар орқали чизиқли ифода этилишини кўрсатади.

Келтирилган 3-хосса ўз ўрнида қуйидаги хоссани келтириб чиқаради.

4-хосса. Агар $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ элементлардан бирортаси бошқалари орқали чизиқли ифодаланса, бу элементлар чизиқли боғлиқ бўлади.

Бу хосса чизиқли комбинацияда элементларни тенгликнинг бир томонига ўтказиш йўли билан исботланади.

Ҳақиқатан ҳам, агар a_1 элемент қолган элементлар орқали чизиқли ифодаланган бўлса, яъни

$$a_1 = \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 + \ldots + \alpha_m \cdot a_m$$

ифодада барча элементларни тенгликнинг бир томонига ўтказиб

$$1 \cdot a_1 + (-\alpha_2) \cdot a_2 + (-\alpha_3) \cdot a_3 + \ldots + (-\alpha_m) \cdot a_m = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда a_1 элемент коэффитциенти $\alpha_1 = 1$. Чизиқли боғлиқлик шарти бажарилди.

Чизиқли фазо ўлчами. Базис

Чизиқли фазода ихтиёрий олинган элементларнинг чизиқли боғлиқ ёки чизиқли эркли бўлиши мумкинлиги билан 4-§ да танишган эдик.

Ихтиёрий икки a ва b элементлардан бири иккинчисини ўзгармас сонга кўпайтириш натижасида ҳосил бўлса, яъни $a = k \cdot b$ $(k \neq 0)$ ўринли бўлса, бу элементлар чизиқли боғлиқ бўлади.

Худди шунга ўхшаш чизиқли боғлиқ бўлмаган икки a ва b элементлар ва уларнинг алгебраик йиғиндиси бўлган $c = \alpha \cdot a + \beta \cdot b$ элемент ўзаро чизиқли боғлиқ бўлишини кўришимиз мумкин.

Таъриф. Агар L чизиқли фазода n та чизиқли эркли элемент мавжуд бўлиб, ихтиёрий $(n+1)$-элемент чизиқли боғлиқ бўлса, чизиқли фазо ***n-ўлчовли чизиқли фазо*** деб аталади.

Бунда n – чизиқли фазонинг ўлчами деб аталади.

Умуман айтганда, фазо ўлчами n – чекли. Аммо ўлчами чексиз бўлган чизиқли фазолар ҳам мавжуд. Биз бу адабиётда фақат чекли ўлчамли фазоларни ўрганамиз.

Агар L_n – n-ўлчовли чизиқли фазо бўлса, унда роппа-роса n та чизиқли эркли элемент мавжуд бўлар экан.

Таъриф. Агар L_n чизиқли фазода $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – чизиқли эркли элементлар мавжуд бўлиб, фазонинг бошқа x элементлари $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ёрдамида чизиқли ифодаланса, яъни

$$x = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots \alpha_n \cdot a_n \qquad (1.6.1)$$

бўлса, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – элементлар тўплами L_n чизиқли фазонинг ***базиси*** деб аталади.

Келтирилган $(1.6.1)$ ёйилмадаги $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ сонлар x элементнинг шу базисдаги ***координаталари*** дейилади.

Мисол. Иккинчи тартибли квадрат матрицалардан иборат чизиқли фазонинг базис элементларини топинг.

Ечиш. Иккинчи тартибли квадрат матрицани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Матрицалар тўпламининг чизиқли фазо ташкил қилиши билан 3-§ да танишган эдик.

Энди шу фазонинг ўлчами ва базис элементлари билан танишамиз. Ушбу

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицалар иккинчи тартибли квадрат матрицалар тўпламида базис элементни ташкил этади.

Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий берилган иккинчи тартибли квадрат матрицани

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

шаклда ёзиш мумкин.

Базис элементлари сони тўртта бўлгани учун иккинчи тартибли матрицалар тўрт ўлчовли чизиқли фазо бўлар экан.

Аффин фазоси

Бизга бирор $\mathcal{A}$ тўплам берилган бўлсин, бу тўплам элементларини нуқталар деб атаймиз ва уларни лотин алифбосининг бош ҳарфлари $A, B, \dots, M, \dots$ билан белгилаймиз. Шунингдек, бизга L – чизиқли фазо ҳам берилган бўлсин.

Берилган $\mathcal{A}$ тўпламдан олинган икки A ва B нуқтага L – чизиқли фазодан битта x элементни $x = \overline{AB}$ шаклда мос қўямиз ва бу мосликни *вектор* деб атаймиз. Бу ерда $\overline{AB}$ – L-чизиқли фазо элементининг янгича белгиланиши ва вектор деб аталишидир. Нуқталардан биринчисини *векторнинг боши*, иккинчисини *векторнинг охири* ёки *учи* деб атаймиз.

Таъриф. Агар $\mathcal{A}$ ва L тўплам элементлари ўртасида ўрнатилган мослик ушбу икки аксиомани қаноатлантирса

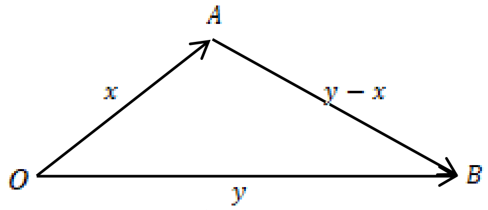
1. ҳар қандай $A \in \mathcal{A}$ ва $x \in L$ учун ягона $B \in \mathcal{A}$ мавжуд ҳамда $x = \overline{AB}$ бўлади;

2. $\mathcal{A}$ тўпламнинг ихтиёрий учта A, B ва C элементлари учун $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$ бўлса, $\overline{AC} = x + y$ ёки $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ бўлади,

у ҳолда $\mathcal{A}$ – тўплам ***аффин вектор фазо*** деб аталади.

Бундан буён биз қисқалик учун аффин вектор фазони *аффин фазо* деб атаймиз.

Келтирилган таърифдан ҳар қандай L – чизиқли фазони аффин фазоси деб аташ учун фазонинг элементларини нуқталар деб ва икки a, b элементга шу элементлар айирмаси $b - a$ элементни мос қуйиб, уни вектор деб аташ кифоя экан. Бунда чизиқли фазо элементи x O (ноль) ва A нуқтага мос келувчи $x = \overline{OA}$ вектор бўлади (1.6.1-чизма).



1.6.1-чизма.

O – нуқта аффин фазосида *координаталар боши* деб аталади ва чизиқли фазонинг θ элементига мос келади.

Демак, ҳар қандай аффин фазони координаталар боши O элементга мос келган чизиқли фазо сифатида қараш ҳам мумкин экан. Бу ҳолда чизиқли фазо элементи $x = \overline{OA}$ вектор бўлади.

Шунинг учун ҳам адабиётларда чизиқли вектор фазо атамаси ёки чизиқли чизиқли фазо элементларини вектор деб аташлар ҳам учраб туради.

Биз эса аффин вектор фазоси тушунчасини киритишдагина тартибланган икки нуқтани вектор деб атадик. Бундай усулни танлашимизга сабаб, чизиқли фазо кенгроқ тушунча бўлиб, унинг элементлари бизга геометрияда одат бўлган “*нуқта*”, “*кесма*” ва “*вектор*” атамаларидан тубдан фарқ қилиши мумкин эканлигидадир.

Демак, биз ушбу адабиёт кўламида аффин фазоси чизиқли фазо элементлари янги икки аксиомани қаноатлантирувчи фазо деб қараймиз. Фазо элементларини эса “*нуқта*” ва “*вектор*” деб атаб, уларни элементар геометриядаги каби тасаввур қиламиз,яъни векторни йўналтирилган кесма сифатида қабул қиламиз.

Энди аффин фазосига тегишли содда хоссалар билан танишиб чиқамиз.

Теорема 1. Аффин фазосининг устма-уст тушган нуқталарига 0 (ноль) вектор мос келади.

Исбот. Аффин фазосининг ихтиёрий $A \in \mathcal{A}$ нуқтасига одатда $x = \overline{OA}$ вектор мос келади. $\overline{AA} = z$ деб белгилаб олсак, у ҳолда аффин фазоси таърифининг иккинчи аксиомасига кўра

$$\overline{OA} - \overline{OA} = \overline{AA} \text{ ёки } x - x = \overline{AA} = 0.$$

Демак, $\overline{AA} = z = 0$.

Теорема 2. Агар $\overline{AB} = x$ бўлса, $\overline{BA} = -x$ бўлади.

Исбот. $\overline{BA} = y$ бўлсин. Аффин фазоси таърифининг иккинчи аксиомасига кўра

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} \text{ ёки } x + y = 0.$$

Бундан $\overline{BA} = y = -x$ эканлиги келиб чиқади.

Изоҳ. Ушбу қўлланмада ўқувчини ноевклид фазолар геометрияси билан таништириш асосий мақсад бўлгани учун, аффин фазосини аниқлашда киритилган аксиомаларнинг элементар геометрия фанидаги қандай аксиомаларга мазмунан мос келишига тўхталиб ўтмоқчимиз.

Биринчи аксиома ҳар кандай A нуқта ва x вектор учун ягона $\overline{AB} = x$ вектор мавжудлиги ҳақида бўлиб, бунда B нуқта ҳам шу аффин фазосига тегишли бўлиши талаб этилади. Бу элементар геометриядаги, яъни Евклид аксиомаларидаги нурда ихтиёрий узунликда кесма қўйиш мумкинлиги ҳақидаги аксиома мазмунини беради.

Иккинчи аксиома эса ихтиёрий учта нуқтадан ягона текислик ўтказиш мумкин деган маънодаги аксиомага мос келади.

Аффин фазо ўлчами. Аффин координаталар

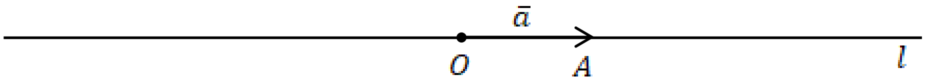
Маълумки, биз аффин фазосини чизиқли фазо сифатида кўрдик. Чизиқли фазо учун фазо ўлчами деган тушунча киритилган, яъни ўлчам ундаги чизиқли эркли элементлар сони билан аниқланар эди. Шунингдек, аффин фазосида чизиқли фазо элементига координаталар бошидан чиқувчи вектор мос келар эди. Бундан чизиқли эркли элементга чизиқли эркли вектор мос келади деб ҳисоблаш мумкин.

Таъриф. Аффин фазода чизиқли эркли n та вектор мавжуд бўлиб, ҳар қандай $(n+1)$ та вектор чизиқли боғлиқ бўлса, аффин фазо ***n-ўлчовли аффин фазо*** дейилади ва $\boldsymbol{A_n}$ билан белгиланади.

Энди баъзи бир содда аффин фазолар билан танишиб чиқайлик.

Теорема 1. Тўғри чизиқ – бир ўлчовли аффин фазо.

Исбот. Бизга бирор l тўғри чизиқ берилган бўлсин. Аввало l тўғри чизиқнинг нуқталари тўплами бир ўлчовли чизиқли фазо ташкил қилишини кўрсатамиз. Бунинг учун тўғри чизиқда ихтиёрий O – нуқтани координаталар боши деб белгилаб оламиз (1.7.1-чизма).



1.7.1-чизма.

Сўнгра ихтиёрий $A \in l$ нуқта олиб $\overline{OA} = \bar{a}$ вектор киритамиз. Энди эса тўғри чизиқда ётган ихтиёрий векторни L тўплам элементи деб атаймиз ва уни бир ўлчамли чизиқли фазо эканлигини кўрсатамиз. Бу масалада элементлар чизиқли фазо ташкил этиши, яъни чизиқли фазонинг 8 та аксиомасини қаноатлантиришини кўрсатиш унча мураккаб эмас. Бу фазонинг ўлчами бирга тенглиги $\bar{a}$ вектор берилган деб олганимизда, ҳар қандай l тўғри чизиққа тегишли $\bar{b}$ вектор учун $\bar{b} = k \cdot \bar{a}$ $(k \neq 0)$ тенглик ўринли эканлигидан келиб чиқади. Бу тенглик $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг чизиқли боғлиқ эканини билдиради.

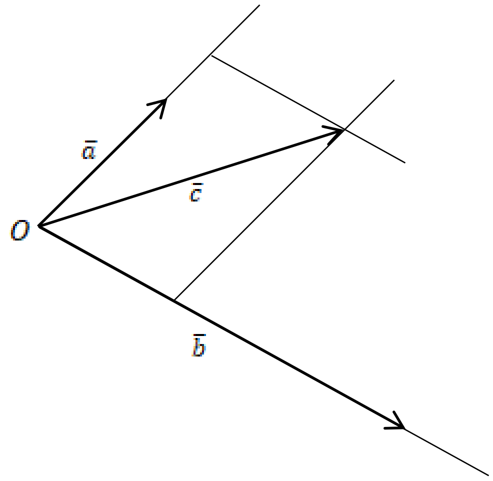
Демак, тўғри чизиқда битта чизиқли эркли вектор (элемент) мавжуд, аммо ихтиёрий икки вектор чизиқли боғлиқ.

Тўғри чизиқда аффин фазоси аксиомалари ўринли эканлигини кўрсатишни ўқувчининг ўзига қолдирамиз.

Теорема 2. Текислик – икки ўлчовли аффин фазодир.

Исбот. Бизга α текислик берилган бўлсин. Бу текисликда ихтиёрий икки коллинеар бўлмаган $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларни оламиз, яъни $\bar{b} \neq k \cdot \bar{a}$. Бу шарт $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг чизиқли эркли эканини билдиради. Энди α текисликка тегишли ихтиёрий учинчи $\bar{c}$ векторни оламиз ва $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторларнинг чизиқли боғлиқ эканлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторларнинг боши O нуқтада бўлсин деб ҳисоблаймиз (1.7.2-чизма).



1.7.2-чизма.

Агар $\bar{c}$ вектор учидан $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар йўналишига параллель тўғри чизиқлар ўтказиб, уларни $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторлар йўналишидаги тўғри чизиқлар билан кесишмасини қарасак, томонлари $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторлар йўналишидаги параллелограммни ҳосил қиламиз. Параллелограммнинг томонларидаги векторлар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларга коллинеарлигидан

$$\bar{c} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Демак, текисликда икки чизиқли эркли вектор мавжуд, аммо ҳар қандай учта вектор чизиқли боғлиқ экан. Бу текислик – икки ўлчовли аффин фазо эканини кўрсатади.

Биз фақат текисликни чизиқли фазо сифатида ўлчами иккига тенглигинигина кўрсатдик. Унинг чизиқли фазо ва аффин фазоси аксиомаларини қаноатлантириши билан элементар геометрияда танишгансиз.

Бизга n-ўлчовли аффин фазо A_n берилган бўлиб, $e_1 = \overline{OE_1}$, $e_2 = \overline{OE_2}$, …, $e_n = \overline{OE_n}$ векторлар чизиқли эркли векторлар бўлсин, яъни

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = 0$$

фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = 0$ ҳолдагина ўринли бўлсин.

Ихтиёрий $\bar{a} \in A_n$ векторни қарайлик.

Аффин фазо ўлчами таърифига кўра, $\{\bar{a}, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторлар чизиқли боғлиқ векторлар тўплами бўлади.

Демак, ҳеч бўлмаганда биттаси нольдан фарқли $\{k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ сонлар учун

$$k_0 \cdot \bar{a} + k_1 \cdot e_1 + k_2 \cdot e_2 + \ldots + k_n \cdot e_n = 0 \qquad (1.7.1)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бу тенгликда $k_0 \neq 0$ бўлиши шарт. Акс ҳолда, яъни $k_0 = 0$ бўлиши $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ларнинг чизиқли боғлиқ бўлишига олиб келади.

Келтирилган (1.7.1) тенгликни $k_0 \neq 0$ га бўлиб

$$\bar{a} = -\frac{k_1}{k_0} \cdot e_1 - \frac{k_2}{k_0} \cdot e_2 - \ldots - \frac{k_n}{k_0} \cdot e_n$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $x_i = -\frac{k_i}{k_0}$ алмаштиришни амалга оширсак,

$$\bar{a} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу тенглик $\bar{a}$ векторнинг $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторлар орқали чизиқли ёйиш мумкин эканлигини кўрсатади.

Демак, A_n да $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – чизиқли эркли векторлар бўлса, A_n нинг ихтиёрий векторини бу векторлар орқали чизиқли ёйиш мумкин экан.

Бунда $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – ***базис векторлар***, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – сонлар эса, $\bar{a}$ векторнинг шу базисдаги ***аффин координаталари*** деб аталади. Қисқалик учун кўпинча

$$\bar{a}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n$$

белгилаш ишлатилади.

Теорема 3. Базис векторга тегишли e_i вектор $(0,0,0,\ldots,0,i,0,\ldots,0)$ i-ўринда 1 ва бошқа ўринда 0 координатага эга.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам e_i базисга тегишли векторнинг базис орқали ёйилмаси

$$e_i = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_i \cdot e_i + \ldots + x_n \cdot e_n$$

бўлсин. Бундан

$$x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + (x_i - 1) \cdot e_i + \ldots + x_n \cdot e_n = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдаги $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторлар базис векторлар бўлгани учун, бу тенглик фақат

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_i - 1 = \ldots = x_n = 0$$

ҳолдагина ўринли бўлиши мумкин. Бу эса

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$$

ва $x_i = 1$ эканини кўрсатади.

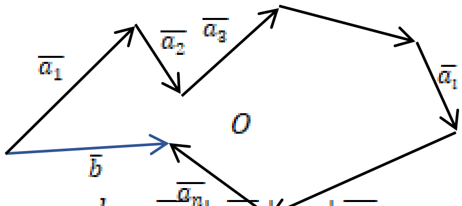
Демак, теоремага кўра $e_1\{1,0,\ldots,0\}$, $e_2\{0,1,0,\ldots,0\}$, ..., $e_i\{0,0,0,\ldots,1,0,\ \ldots,0\}$, ..., $e_n\{0,0,\ldots,1\}$ базис векторларнинг координат ифодаси бўлади.

Эслатма. Базис векторлар $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ фазога тегишли ихтиёрий чизиқли эркли векторлар бўлиб, улар бирлик ва ортогонал бўлиш шарт эмас. Хусусий ҳолда, базис вектоalар бирлик ва ортогонал бўлганда ҳам уларнинг кўриниши шу шаклда бўлади, яъни координаталари 1 ва 0 лардан иборат бўлади. Одатда текисликда ўзаро перпендикуляр бўлмаган тўғри чизиқлар ёрдамида тузилган координаталар системасини аффин координаталар системаси деб аталади, перпендикуляр тўғри чизиқлар ва бир хил бирлик векторлар ёрдамида ҳосил қилинган координаталар системаси Декарт координаталар системаси деб аталади. Эътибор қаратсангиз биз $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторларнинг ўзаро ортогонал бўлишини ёки бир хил нормага эга бўлишини ҳам талаб қилмадик. Фақат $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ – чизиқли эркли векторлар бўлиши зарур ва етарли шарт шаклида қараяпмиз. Бунда векторлар бир хил нормага эга ва ўзаро ортогонал бўлиши, яъни Декарт координаталари биз кўраётган тушунчаларнинг хусусий ҳоли ҳисобланади.

Координаталари билан берилган векторлар устида амаллар

Элементар геометрия курси орқали абстракт векторлар устида бажарилган амаллар билан танишсиз. Векторларни қўшиш, сонга кўпайтириш амаллари аниқ геометрик маънога эга. Биз қисқача абстракт берилган, яъни йўналтирилган кесма шаклида аниқланган векторлар устида бажарилган амалларнинг геометрик маъносини эслатиб ўтамиз.

Берилган $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, …, $\overline{a_n}$ ***векторлар йиғиндиси*** деб, бу векторлар кетма-кет жойлаштирилганда, яъни ҳар бир вектор учига кейинги векторнинг бошланиш нуқтаси қўйилганда, биринчи вектор бошидан чиқиб охирги вектор учига йўналган векторга айтилар эди (1.8.1-чизма).



$$b = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \ldots + \overline{a_n}$$

1.8.1-чизма.

Аҳамият берсак, векторлар йиғиндиси векторлар сонига ва бу векторлар қаралаётган фазо ўлчамига боғлиқ эмас. Шунингдек, йиғинди ассоциативлик, яъни ўрин алмаштириш қоидасига эга бўлиб, йиғинди қўшилувчилар тартибига боғлиқ эмас.

Бизга A_n фазода $\bar{X}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ва $\bar{Y}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ векторлар берилган бўлсин. Бу ерда x_i, y_i лар бирор $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базис векторлар ёрдамида аниқланган координаталар ва $O(0, 0, \ldots, 0)$ – координаталар боши. Координаталар боши O дан $\overline{e_i}$ вектор йўналишида ўтган тўғри чизиқ $\overline{Ox_i}$ координаталар ўқини беради.

Координаталари билан берилган векторлар устида амалларни ўрганиш учун аввал $\{e_i\}$ базис векторлар устида амалларни кўрайлик. Масалан, $\alpha_i e_i$ ва $\beta_i e_i$ векторлар йиғиндисини.

Маълумки, e_i вектор сонга кўпайтирилганда ҳосил бўлган векторни ифодаловчи кесманинг базис вектор кесмасига нисбати α_i сонига мос келади, аммо вектор йўналиши ўзгармайди. Шундан,

$$\alpha_i e_i + \beta_i e_i = (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

тенглик ўринли бўлади.

$$\bar{X} = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n,$$
$$\bar{Y} = y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n$$

бундан

$$\bar{X} + \bar{Y} = y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n + y_1 \cdot e_1 + y_2 \cdot e_2 + \ldots + y_n \cdot e_n =$$
$$= (x_1 + y_1) \cdot e_1 + (x_2 + y_2) \cdot e_2 + \ldots + (x_n + y_n) \cdot e_n.$$

Худди шунингдек,

$$k \cdot \bar{X} = k \cdot (x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n) = kx_1 \cdot e_1 + kx_2 \cdot e_2 + \ldots + kx_n \cdot e_n.$$

Юқоридаги тенгликлардан фойдаланиб қуйидаги хоссаларни келтириб чиқариш мумкин.

1-хосса. Координаталари билан берилган векторларни қўшиш учун уларнинг мос координаталарини қўшиш зарур.

2-хосса. Координаталари билан берилган векторни сонга кўпайтириш учун унинг барча координаталарини шу сонга кўпайтириш керак.

Мисол. $\bar{X}\{3, 2, 7, 5, 4\}$ ва $\bar{Y}\{2, 5, -9, 6, 4\}$ бўлса, $\bar{X} - 3\bar{Y}$ нинг координаталарини топинг.

Ечиш.

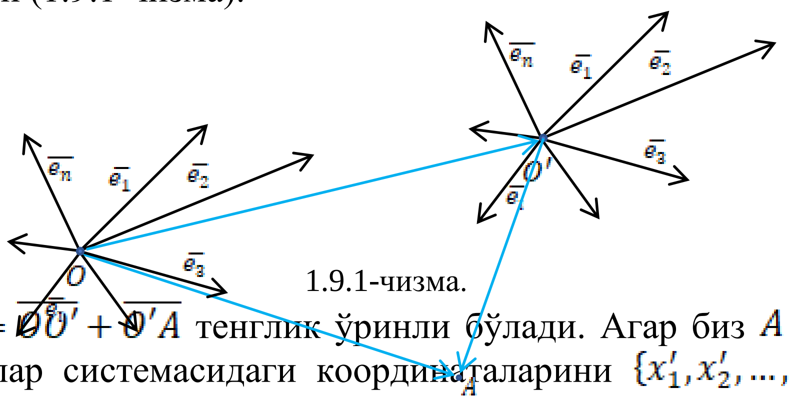
$$-3\bar{Y} = -3 \cdot (2e_1 + 5e_2 - 9e_3 + 6e_4 + 4e_5) =$$
$$= -6e_1 - 15e_2 + 27e_3 - 18e_4 - 12e_5;$$
$$\bar{X} - 3\bar{Y} = 3e_1 + 2e_2 + 7e_3 + 5e_4 + 4e_5 - 6e_1 - 15e_2 + 27e_3 - 18e_4 - 12e_5 =$$
$$= -e_1 - 13e_2 + 34e_3 - 13e_4 - 8e_5,$$
$$\bar{X} - 3\bar{Y}\{-1, -13, 34, -13, -8\}.$$

Векторларни сонга кўпайтириш ва қўшиш ***векторлар устида чизиқли операциялар*** деб аталади. Ихтиёрий сондаги векторларни мос равишда ихтиёрий сонларга кўпайтириш ва қўшиш, шу векторларнинг ***чизиқли комбинацияси*** деб аталади.

Аффин координаталарни алмаштириш

Фазода аффин координаталар системасини киритиш учун координаталар боши O нуқта танланади ва ўзаро чизиқли эркли бўлган $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – базис векторлар олинди. Бунда ҳар қандай $\bar{a}$ вектор учун унинг аффин координаталари деб аталган $\bar{a}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ сонлар тўплами мос қўйилди. Агар $\bar{a} = \overline{OA}$ бўлса, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор учи бўлган A нуқтанинг координаталари деб аталади. Демак, фазонинг ихтиёрий нуқтаси ўзининг $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n та координаталарига эга ва аксинча ихтиёрий n та сондан иборат тўпламга A_n фазода битта нуқта мос келади.

Ўрнатилган аффин координаталар системасида координаталар боши ўзгартирилса, яъни O координаталар боши фазонинг $O'\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ кўчирилса, фазо нуқталарининг координаталари қандай ўзгаради? Шу саволга жавоб излаймиз. Ушбу ҳолатда $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар ўзгаришсиз қолсин (1.9.1-чизма).



1.9.1-чизма.

Бунда $\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}$ тенглик ўринли бўлади. Агар биз A нуқтанинг янги координаталар системасидаги координаталарини $\{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$ билан белгиласак, нуқтанинг эски ва янги координаталари орасида қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз

$$x_i = x_i^0 + x_i', \qquad i = \overline{1, n}. \qquad (1.9.1)$$

Фақат координаталар бошини ўзгартириш, координаталар системасини

$\bar{b} = \overline{OO'}$ векторга ***параллель кўчириш*** деб аталади. Ҳосил қилинган (1.9.1) тенглик A нуқтанинг эски ва янги координаталари орасидаги боғлиқликни ифодалайди.

Энди координаталар боши ўзгаришсиз қолиб $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар бошқа $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ базис векторлар билан алмаштирилса, A_n фазосининг ихтиёрий $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нуқтасининг координаталари қандай ўзгариши билан танишамиз.

Демак, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар бошқа чизиқли эркли n та векторлар $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ тўплами билан алмаштирилиб, янги аффин координаталар системаси барпо этилган. Фазонинг A нуқтасини бу янги координаталар системасидаги координаталарини $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ билан белгилайлик. Мақсадимиз x_i ва x'_i орасидаги боғланишни топиш.

Координаталар системасида ўзгартириш қилишдан аввал e'_1, e'_2, ..., e'_n – векторлар $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базисда ўзларининг аниқ аффин координаталарига эга бўлар эди, яъни

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11} \cdot e_1 + \alpha_{12} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot e_n, \\ e'_2 = \alpha_{21} \cdot e_1 + \alpha_{22} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot e_n, \\ \dots \\ e'_n = \alpha_{n1} \cdot e_1 + \alpha_{n2} \cdot e_2 + \ldots + \alpha_{nn} \cdot e_n \end{cases} \qquad (1.9.2)$$

боғлиқлик мавжуд эди.

Демак, эски $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис билан янги $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ базис векторлар орасида (1.9.2) боғлиқлик мавжуд бўлиб, бу чизиқли боғлиқлик ягона усулда бўлади.

Агар биз (1.9.2) чизиқли система коэффициентларидан тузилган $A = \{\alpha_{ij}\}$ – квадрат матрица детерминантини ҳисобласак

$$\Delta = \det A \neq 0$$

бўлади, яъни системанинг ягона ечимга эга бўлиши шарти бажарилади.

Ҳосил қилинган (1.9.2) системада $\overline{e_i}$ ларни номаълум ва $\overline{e'_1}$ ларни маълум деб ҳисоблаб, қуйидаги тенгликларни ҳосил қилишимиз мумкин

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{A_{11}}{\Delta} \cdot e'_1 + \dfrac{A_{12}}{\Delta} \cdot e'_2 + \ldots + \dfrac{A_{1n}}{\Delta} \cdot e'_n, \\ e_2 = \dfrac{A_{21}}{\Delta} \cdot e'_1 + \dfrac{A_{22}}{\Delta} \cdot e'_2 + \ldots + \dfrac{A_{2n}}{\Delta} \cdot e'_n, \\ \dots \\ e_n = \dfrac{A_{n1}}{\Delta} \cdot e'_1 + \dfrac{A_{n2}}{\Delta} \cdot e'_2 + \ldots + \dfrac{A_{nn}}{\Delta} \cdot e'_n. \end{cases} \qquad (1.9.3)$$

Бу тенгликлар $\overline{e_i}$ – эски базис векторларнинг $\overline{e'_i}$ – янги базис векторлари орқали ифодасини беради. Чунки янги базисларда аввалги базис векторлар оддий чизиқли боғлиқ вектор ҳисобланади.

Биз аввалги (1.9.2) боғланиш матрицасини $A = \{\alpha_{ij}\}$, яъни

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \det A \neq 0$$

шаклда белгилаган эдик.

Янги (1.9.3) боғланиш матрицаси эса, A матрицага тескари матрица бўлиб,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

бунда A_{ij} элемент α_{ij} элементнинг алгебраик тўлдирувчиси бўлади.

Тескари A^{-1} матрица элементлари A матрица элементлари алгебраик тўлдирувчилари ва йўл-устун элементлари ўрни алмаштирилган ҳолда ёзилганига эътибор қаратинг.

Чизиқли алмаштиришлар хоссасига кўра, алмаштиришнинг матрицаси хосмас матрица бўлганида, яъни матрицадан тузилган детерминант нольдан фарқли бўлган ҳолда бу системага тескари ягона система мавжуд бўлади. Демак, эски ва янги базислар бир-бири орқали ягона тарзда чизиқли ифодаланиши мумкин.

Биз эски ва янги базис векторлари бир-бири баилан қандай боғлиқ эканини ўрганиб чиқдик.

Энди эса янги базисга ўтганимизда фазодаги нуқтанинг аффин координаталари орасидаги боғланиш қандай бўлишини аниқлаймиз. Эслатиб ўтсак, A нуқтанинг эски координаталар системасидаги аффин координаталари $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва янги аффин координаталарини $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ билан белгилаган эдик.

Агар $OA = x_1' \cdot e_1' + x_2' \cdot e_2' + \dots + x_n' \cdot e_n'$ тенгликда (1.9.2) дан фойдаланиб e_i' ларни e_i билан алмаштирсак, у ҳолда

$$OA = x_1' \cdot e_1' + x_2' \cdot e_2' + \dots + x_n' \cdot e_n' =$$

$$= x_1' \cdot (\alpha_{11} \cdot e_1 + \alpha_{12} \cdot e_2 + \dots + \alpha_{1n} \cdot e_n) + x_2' \cdot (\alpha_{21} \cdot e_1 +$$

$$+\alpha_{22} \cdot e_2 + \dots + \alpha_{2n} \cdot e_n) + \dots + x_n' \cdot (\alpha_{n1} \cdot e_1 + \alpha_{n2} \cdot e_2 + \dots + \alpha_{nn} \cdot e_n) =$$

$$= (\alpha_{11} \cdot x_1' + \alpha_{21} \cdot x_2' + \dots + \alpha_{n1} \cdot x_n')e_1 + (\alpha_{12} \cdot x_1' + \alpha_{22} \cdot x_2' + \dots + \alpha_{n2} \cdot x_n')e_2 +$$

$$+ \dots + (\alpha_{1n} \cdot x_1' + \alpha_{2n} \cdot x_2' + \dots + \alpha_{nn} \cdot x_n') \cdot e_n = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n.$$

Базис векторлар чизиқли эркли эканлигидан

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} \cdot x_1' + \alpha_{12} \cdot x_2' + \dots + \alpha_{1n} \cdot x_n', \\ x_2 = \alpha_{21} \cdot x_1' + \alpha_{22} \cdot x_2' + \dots + \alpha_{2n} \cdot x_n', \\ \dots \\ x_n = \alpha_{n1} \cdot x_1' + \alpha_{n2} \cdot x_2' + \dots + \alpha_{nn} \cdot x_n' \end{cases}$$

тенгликлар системасини ҳосил қиламиз.

Агар системада қатнашган векторларнинг матрица шаклидан фойдалансак

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad X' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$$

ва $A = \{\alpha_{ij}\}$ дан

$$X = A \cdot X'$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу ердан векторлар ёки фазо нуқтасининг координаталри бир-бири билан худди базис векторлар сингари чизиқли боғлиқликка эга экан.

Юқорида келтирилган белгилашлардан фойдалансак, координаталар бошини бирор $\bar{B}\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ векторга кўчирганда эски ва янги координаталар системасидаги векторлар орасидаги боғланиш

$$X = X' + \bar{B}$$

шаклда бўлади.

Координаталар боши $\bar{B}$ векторга кўчирилиб, координаталр системасининг базиси ҳам алмаштирлса

$$X = A \cdot X' + \bar{B} \qquad (1.9.4)$$

тенгликни ҳосил қиламиз ва бу тенглик эски координаталар системасида нуқтани ифодаловчи векторни, янги координаталар системасидаги шу нуқтани ифодаловчи вектор орқали ифодасидир.

Бу ҳосил қилинган (1.9.4) тенглик умуман A_n фазосида координаталар алмаштирилишини кўрсатувчи тенглик бўлиб, ***аффин координаталар алмаштирилиши*** деб юритилади.

Хусусан, $A = \{\alpha_{ij}\}$ матрица E бирлик матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}$$

бўлган ҳолда алмаштириш ***айний алмаштириш*** деб аталади. Айний алмаштиришда матрица диагонали элементлари мусбат бирлардан иборат. Матрица диагонал элементларидан баъзилари манфий бўлган ҳолларга биз кейинроқ геометрик изоҳ берамиз.

Шунингдек, A матрицанинг махсус ҳолларини ўрганишга алоҳида қайтамиз. Таъкидланмаган алоҳида ҳоллардан бошқа қринда A матрица – хосмас матрица бўлиши етарлидир.

Аффин фазода тўғри чизиқ ва текислик

Бизни қизиқтирган нарсалар аффин фазога оид геометрик образлар ва уларнинг хоссаларидир.

Юқорида айтиб ўтилгандек, тўғри чизиқ – бир ўлчовли аффин фазосига, текислик – икки ўлчовли аффин фазосига мисол бўлар эди. Шунингдек, уч ўлчовли евклид фазоси уч ўлчовли аффин фазога мисол бўлишини кўрсатиш мумкин.

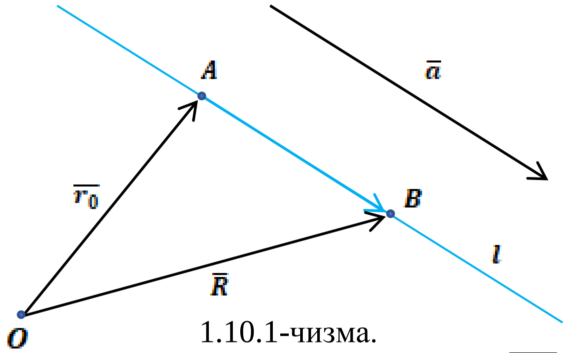
Демак, аффин фазосини ўрганишда $n > 3$ ҳоли муҳим аҳамият касб этади, яъни A_n да $n > 3$ бўлган ҳол.

Ўрганилаётган A_n фазода координаталар боши O белгиланган ва $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис векторлар берилган бўлсин. Координаталар боши O нуқтадан ўтувчи ва $\overline{e_i}$ базисга параллель тўғри чизиқни Ox_i координаталар ўқи деб атаймиз. Бу тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_n = 0$$

тенглик билан аниқланади. Чунки бу координаталар тўғри чизиғида ётувчи ҳар қандай нуқтанинг координаталари $(0,0,0, x_i, 0,0,0)$ бўлиб, $x_i \neq 0$ шаклда бўлади.

Энди A_n фазода $A(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқтадан $\bar{a}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ вектор йўналишида ўтувчи l тўғри чизиқ тенгламасини топамиз (1.10.1-чизма).



1.10.1-чизма.

Берилган A нуқтанинг радиус векторини $\overline{r_0} = \overline{OA}$ деб белгилайлик. Тўғри чизиққа тегишли A дан фарқли $B \epsilon l$ нуқта радиус векторини $\bar{R}$ билан белгилаймиз. У ҳолда тўғри чизиқ нуқталари учун $\bar{R} = \overline{r_0} + \overline{AB}$ тенглик ўринли бўлади. Бу ерда $\overline{AB}$ вектор $\bar{a}$ векторга коллинеар, яъни $\overline{AB} = t \cdot \bar{a}$ тенглик ўринли бўлади, $t \epsilon \mathbb{R}$ – параметр деб аталади.

Натижада A_n аффин фазосида берилган A нуқтадан $\bar{a}$ йўналишида ўтувчи тўғри чизиқнинг вектор тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$\bar{R} = \overline{r_0} + t \cdot \bar{a}. \qquad (1.10.1)$$

Бу (1.10.1) тенглик ***тўғри чизиқнинг вектор тенгласмаси***. Вектор тенгламадан базис векторларнинг чизиқли эркли эканлигидан фойдаланиб, ***тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси***ни ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t \cdot a_1, \\ x_2 = x_2^0 + t \cdot a_2, \\ \ldots \\ x_n = x_n^0 + t \cdot a_n. \end{cases}$$

x_i^0 – тўғри чизиққа тегишли нуқта координаталри, a_i – тўғри чизиққа параллель $\bar{a}$ вектор координаталари.

Маълумки, ҳар қандай икки нуқтадан ягона тўғри чизиқ ўтади. Бизга $A(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ ва $B(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$ нуқталар берилган бўлсин. Шу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз. Бунинг учун $\overline{AB}$ вектор изланаётган тўғри чизиққа параллель вектор бўлишини билиш етарлидир. Тўғри чизиққа параллель $\bar{a}$ вектор координаталари $\left(x_i^2 - x_i^1\right)$ лардан иборат бўлади. Агар тўғри чизиқни A нуқтадан ўтишини ҳисобга олсак,

$$\begin{cases} x_1 = x_1^1 + t \cdot (x_1^2 - x_1^1), \\ x_2 = x_2^1 + t \cdot (x_2^2 - x_2^1), \\ \ldots \\ x_n = x_n^1 + t \cdot (x_n^2 - x_n^1) \end{cases} \qquad (1.10.2)$$

тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини ҳосил қиламиз.

Агар (1.10.2) тенгликдан t параметрни топсак, у ҳолда

$$\frac{x_1 - x_1^1}{x_1^2 - x_1^1} = \frac{x_2 - x_2^1}{x_2^2 - x_2^1} = \ldots = \frac{x_n - x_n^1}{x_n^2 - x_n^1}$$

икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ҳосил қиламиз.

Демак, аффин фазосидаги ҳар қандай тўғри чизиқ тенгламасини ҳосил қилиш мумкин экан.

Маълумки, тўғри чизиқнинг ўзи бир ўлчовли аффин фазоси бўлар эди. Шу тушунчадан фойдаланиб, A_n аффин фазосининг $1 \leq m \leq n-1$ ўлчовли қисм фазоларини m-ўлчовли текисликлар деб қараймиз.

Таъриф. A_n аффин фазосининг m-ўлчовли $(1 \leq m \leq n-1)$ фазо остилари шу фазонинг $\boldsymbol{m}$ ***текислиги*** деб аталади.

Энди A_n фазода m-ўлчовли қисм фазо тенгламаларини шу фазодаги аффин координаталари орқали ифодасини келтириб чиқарамиз.

Биз A_n фазонинг m-ўлчовли қисм фазоси A_m ни аниқлашимиз керак. A_m қисм фазо m-ўлчовли фазо бўлгани учун, бу фазода m та чизиқли эркли векторлар мавжуд бўлади. Бу A_m фазонинг чизиқли эркли векторлари сифатида $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$ базис векторларига тегишли бирор m та векторни олиш мумкин. Аникроғи, ҳар қандай m-қисм фазога тегишли m та базис вектор мавжуд бўлади.

Соддалик учун координаталар боши изланаётган m текисликда бўлган ҳолни кўрайлик.

Фараз қилайлик, $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_m}\}$ векторлар m текисликнинг базис векторлари бўлсин. Бунда текисликка тегишли ҳар қандай нуқтанинг радиус вектори $\bar{r}\{\overline{b_\iota}\}$ базис векторлар орқали чизиқли ифодаланади

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{b_\iota}. \qquad (1.10.3)$$

Шунингдек, $\bar{r}$ ва $\overline{b_\iota}$ лар A_n фазо базис векторлари орқали ҳам чизиқли ифодаланади, яъни

$$\bar{r} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_m e_m, \qquad \overline{b_\iota} = \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2 + \ldots + \beta_{im} x_m.$$

Бу ифодаларни (1.10.3) тенгликка қўйиб, $\{e_i\}$ векторларнинг чизиқли эркли эканлиги шартидан қуйидаги бир жинсли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{(n-m)1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Бунда $a_{ij} = \alpha_i b_{ij}$ бўлиб, тенгламалар системасини қаноатлантирувчи нуқталар координаталар бошидан ўтувчи m-ўлчовли текисликка тегишли нуқталар бўлади.

$m = n-1$ бўлган ҳолда, $(n-1)$ текислик – ***гипертекислик.***

Координаталар бошидан ўтмайдиган m текислик тенгламасининг ***вектор ифодаси***

$$\bar{R} = \overline{r_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{b_\iota}$$

шаклда бўлиб, унинг ***координаталарга нисбатан тенгламаси***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots \\ a_{(n-m)1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = d_{n-m} \end{cases}$$

каби $(n - m)$ та чизиқли тенгламалар билан ифодаланади.

Хусусий ҳолда, $m = n - 1$ ***гипертекислик тенгламаси*** n-ўзгарувчига боғлиқ чизиқли тенглама бўлади, яъни

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d.$$

ЕВКЛИД ВА ПСЕВДОЕВКЛИД ФАЗОСИ

Бизга n-ўлчовли аффин фазоси берилган бўлиб, $\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$ – векторлар фазосининг базис векторлари ва $O(0,...,0)$ – нукта координаталар боши бўлсин. У холда, фазодаги ихтиёрий вектор $\vec{X}\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}$ аффин координаталарига эга бўлади.

Бизга иккита $\vec{X}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ва $\vec{Y}\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ векторлар берилган бўлса, бу векторлар ёрдамида ушбу бичизикли формани аниклаймиз

$$w\left(\vec{X} \cdot \vec{Y}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \qquad (2.1)$$

Бу форма иккала аргументга нисбатан чизикли бўлгани учун бичизикли форма деб аталади.

Қаралаётган (2.1) бичизиқли формаларга $a_{ij} = \left(e_i e_j\right)$ базис векторларнинг ўзаро кўпайтмаси.

Агар бу кўпайтмадаги $\left(e_i e_j\right)$ ларнинг аниқ қийматлари берилган бўлса, (2.1) бичизиқли форма тўлик аникланган бўлади.

Бу (2.1) бичизикли форма ушбу хоссаларга эга

$$w\left(\vec{X} \cdot \vec{Y}\right) = w\left(\vec{Y} \cdot \vec{X}\right).$$

Бу хосса бичизикли форманинг симметриклик шарти (хоссаси) деб аталади.

Одатда $\left(e_i e_j\right)$ базис векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб аталади ҳамда (1) форма икки $\vec{X}, \vec{Y}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб номланади ва $\left(\vec{X} \cdot \vec{Y}\right)$ шаклида ёзилади.

Умуман айтганда, (1) бизиқли форма мусбат аникланган ёки турли ишорали бўлиши мумкин, бу албатда a_{ij} катталикларни қандай эканига боғлик.

Таъриф. Берилган A_n аффин фазода векторларнинг скаляр кўпайтмаси мусбат аниқланган бичизиқли форма бўлса, бу аффин фазо *n-ўлчовли Евклид фазо* деб аталади ва R_n шаклида белгиланади.

Хақиқатдан хам, $n = 3$ холда $\vec{X}\{x_1, x_2, x_3\}$ ва $\vec{Y}\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасида $a_{ii} = 1, a_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ бўлса, векторларнинг (2.1) скаляр кўпайтмаси

$$\left(\vec{X} \cdot \vec{Y}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

бу уч ўлчовли Евклид фазо векторларнинг скаляр кўпайтмасидир.

Таъриф. *Векторларнинг нормаси* деб, векторнинг ўзини-ўзига скаляр кўпайтмасидан олинган квадрат илдизга айтилади

$$\left|\bar{X}\right| = \sqrt{\left(\bar{X} \cdot \bar{X}\right)}.$$

Бундан Евклид фазосида векторларнинг нормаси

$$\left|\bar{X}\right| = \sqrt{\left(\bar{X}\cdot\bar{X}\right)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

га тенг.

Икки нукта орасидаги масофа шу нукталарни туташтирувчи векторнинг нормасига тенг деб олинади.

Агар $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ нукталар берилган бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координаталари

$$\overrightarrow{AB} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n\}$$

унинг нормаси

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

ёки

$$d^2 = AB^2 = (y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2$$

га тенг бўлади.

Хақикатдан хам, бу n-ўлчовли Евклид фазода икки нукта орасидаги масофани хисоблаш формуласи. Бу формулани чексиз кичик микдорлар ёрдамида ёзсак

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$$

шаклида бўлади.

Агар (2.1) биквадратик форма мусбат аниқланмаган бўлса, қаралаётган A_n аффин фазо *псевдоевклид фазо* деб номланади.

Алгебра курсидан маълумки [ ], хар қандай бичизикли формани чизикли алмаштиришлар йўли билан каноник квадратик форма шаклига келтириш мумкин.

Бунда хосил бўладиган бичизикли форманинг шакли (a_{ij}) -матрица хосмас матрица бўлган ҳолда ҳадлари мусбат ва манфий ишорага эга бўлган бичизиқли форма шаклига келтирилади.

Аффин алмаштиришлар ёрдамида матрица бирлик диоганал шаклига келтирилиши мумкин.

Натижада скаляр кўпайтма ушбу шаклга келтирилсин

$$\left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right) = -x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ly_l + x_{l+1}y_{l+1} + \ldots + x_ny_n \qquad (2.2)$$

яъни l -та манфий ва $(n-l)$ та мусбат.

Таъриф. Икки $\vec{X}\{x_1, x_2, x_3\}$ ва $\vec{Y}\{y_1, y_2, y_3\}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси (2.2) шаклида аниқланган A_n аффин фазо, ${}^lR_n$ *псевдоевклид фазо* деб аталади.

Агар $l = 1$ бўлса, ${}^lR_n$ фазо Минковский фазоси деб номланади.

Псевдоевклид ${}^lR_n$ фазода икки нукта орасидаги масофа

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right)^2 = -(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2 - \ldots - (y_l - x_l)^2 + (y_{l+1} - x_{l+1})^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2$$

формула билан хисобланади.

Вектор нормаси эса

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \ldots + x_n^2} \qquad (2.3)$$

тенглик билан аниқланади.

Вектор нормаси $\left|\vec{X}\right|$ ҳақиқий, мавҳум ва нолга тенг қийматлар қабул қилиши мумкин экани (2.3) тенгликдан қелиб чикади.

Агар вектор нолдан фаркли бўлиб, унинг нормаси нолга тенг бўлса, изотроп вектор деб аталади. Изотроп векторлар ушбу

$$-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

тенгликни қаноатлантиради ва бу тенглик ${}^lR_n$ фазонинг *изотроп конуси* деб аталади. Чунки бу тенгликни қаноатлантирувчи векторлар тўплами A_n фазода конусни ташкил этади.

Изотроп конус ${}^lR_n$ фазода хақиқий ва мавҳум нормага эга бўлган векторларни ажратиб туради.

Умуман айтганда, Евклид фазосини псевдоевклид фазосининг $l = 0$ бўлган хусусий ҳоли деб аташ мумкин. Шу сабаб билан биз псевдоевклид фазо сфераси ва улар ёрдамида аникланадиган геометриялар ҳақида сўз юритамиз. Бунда $l = 0$ деб хисобланса, Евклид сферасига доир тушунчалар пайдо бўлади.

Псевдоевклид фазода икки нукта орасидаги масофа уч хил усул билан аниқланганлиги сабабли, бу фазода сфера хам уч хилда бўлади.

Бунда, Псевдоевклид фазода сферани берилган нуктадан тенг масофада ётувчи нукталарнинг геометрик ўрни сифатида аниқлаймиз.

Агар сфера маркази координалар бошида деб олинса, унинг тенгламаси

$$-x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_l^2 + x_{l+1}^2 + \ldots + x_n^2 = a^2 \qquad (2.4)$$

шаклда бўлади.

Аммо a^2 уч хил бўлиши мумкин. Агар

1) $a^2 > 0$ – ҳақиқий радиусли сфера;

2) $a^2 = 0$ – изотроп конус ёки ноль радиусли сфера;

3) $a^2 < 0$ – мавҳум радиусли сфера.

Умуман айтганда, псевдоевклид фазосидаги сферанинг нуқталари ўзининг радиус вектори билан аниқланади ва бу радиус вектор координаталари (2.4) тенгликни қаноатлантириши керак.

Агар сфера устида икки A ва B нуқталар берилган бўлса, координаталар боши хамда A, B нукталардан ягона икки ўлчамли текислик ўтказиш мумкин. Бу текислик сферани A ва B нуқталардан ўтувчи айлана ёйи бўйича кесиб ўтади. Биз бу ёйни учлари A, B нукталарда бўлган кесма сифатида қабул қиламиз. У холда A, B нукталар орасидаги масофа

$$ch\frac{\delta}{|a|} = \frac{\left(\overline{OA} \cdot \overline{OB}\right)}{\left|\overline{OA}\right| \cdot \left|\overline{OB}\right|}$$

тенглик билан ҳисоблаш мумкин. Бунда δ – кесма узунлиги. Гиперболик косинус шаклида олинишига сабаб, умуман айтганда тенгликни ўнг томони бирдан кичик бўлмаслиги мумкин. Аммо бу тенглик фақат ярим сфера учун бажарилади. Шу сабабдан, сфера диаметрининг қарама-қарши нукталари битта нукта деб ҳисобланади.

Таъриф. *Гиперболик фазо* деб, Псевдоевклид фазо сферасининг диаметрал қарама-қарши нуқталари битта нуқта деб олинган нуқталар тўпламига изометрик нуқталар тўпламига айтилади ва қуйидагича белгиланади ${}^{1}S_{n-1}$.

Хусусан, уч ўлчовли Минковиский ${}^{1}R_3$ фазосидаги сферанинг ярми ${}^{1}S_2$ Лобачевский геометрияси бўлади.

СИРТ ИЧКИ ВА ТАШҚИ ГЕОМЕТРИЯСИ

Дифференциал геометриянинг асосий тушунчалари

Аввал бошдан хаётий зуруратлар туфайли пайдо бўлган геометрия фани, умуман математика ривожи билан ҳамқадам ривожланиб келган ва хозирги вактда хам ўзининг янги кирраларини намоён этиб келмоқда. Декарт координаталар системасининг пайдо бўлиши (XVII аср) – аналитик геометрия фани ривожланишига сабаб бўлган бўлса, “чексиз кичик миқдорлар” назарияси ёки хозирги “математик анализ” усуллари “Дифференциал геометрия” фани асосида ётади.

Ўз моҳиятига кўра “Дифференциал геометрия” – геомертик шаклларни бирор нуқтасининг кичик атрофида ўрганади. Бу фаннинг асосий мақсади – чизиқ ва сиртлар хоссаларини функциялар ёрдамида, анализ усулларини қўллаб ўрганишдир.

Чизиклар хоссаларини ўрганишда энг мухим тушунчалардан бири чизикнинг уринма вектори, бош нормали ва бинормали ёрдамида, унинг иккинчи тартибли ҳосила векторларининг чизиқли ёйилмасини ифода этувчи Френе формуласидир:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\nu \\ \dot{\vec{\nu}} = -k\tau + \sigma\beta \\ \dot{\vec{\beta}} = \sigma\nu \end{cases}$$

Бу формуладаги k ва σ – лар чизиқнинг эгрилиги ва буралишидир.

Агар $k(s)$ ва $\sigma(s)$ – функциялар берилган бўлса, фазода эгрилиги $k(s)$ га ва буралиши $\sigma(s)$ функцияга тенг бўлган чизиқ ҳар доим мавжуд бўлади.

Дифференциал геометриянинг асосий усуллари чизик ва сирт назариясини вектор функция ёрдамида ўрганишдир. Албатта ўрганиш жараёнида вектор функциядан етарли даражада регуляр бўлиши талаб этилади.

Сиртлар назариясининг фундаментал асосини ташкил қиладиган тушунчалар

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

биринчи квадратик форма ва

$$(d^2\vec{r} \cdot \vec{n}) = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2$$

иккинчи квадратик формулалардир.

Бунда ds^2 – сирт устидаги чизик ёй дифференцияли бўлгани учун, бу квадратик формула ёрдамида, сирт устидаги чизиқ ёйи узунлигини, чизиқлар орасидаги бурчакни, сирт устидаги соҳани ва шунга ўхшаш кўплаб сирт билан боғлиқ катталикларни ҳисоблаш ва ўрганиш мумкин.

Сиртнинг иккинчи квадратик формаси эса қаралаётган нукта атрофида сирт ўзининг уринма текислигидан қанчалик четланган эканлигини билдирувчи катталикдир. Шунингдек, сирт устидаги чизиқнинг нормал эгрилиги, бош эгриликлар, тўла эгрилик ва ўрта эгриликларни аниқлашда иккинчи квадратик формадан фойдаланилади.

Дифференциал геометриянинг фундаментал асосини яратган олимлардан бири XX асрнинг буюк математиги Фридрих Гауссдир.

Шу ўринда баъзан кўпчилик томонидан бир хил маънода тушуниладиган аммо мазмунан ҳар хил бўлган ва Гаусс номи билан боғлик сиртлар назариясининг икки катталигига тўхталиб ўтамиз.

Улардан бири сиртнинг тўла эгрилиги.

Таъриф. Сиртнинг бош эгриликлари кўпайтмаси унинг *тўла эгрилиги* деб аталади

$$K = k_1 \cdot k_2 .$$

Иккинчиси эса Гаусс томонидан киритилган ва кейинчалик унинг номи билан аталадиган сиртга боғлиқ катталик.

Таъриф. Сиртнинг *Гаусс эгрилиги* деб, унинг бирор соҳасини сферик тасвири юзини шу соҳа юзига нисбатининг соҳа бир нуқтага интилгандаги лимитига айтилади

$$K = \lim_{S \to M} \frac{\Delta S^*}{\Delta S}$$

ΔS^* – сферик тасвир, ΔS – соҳа юзи.

Таърифдан кўриниб турибдики, тўла ва Гаусс эгриликлари сиртнинг икки хил геометрик характеристикаларидир.

Бу тушунчаларни бир хил деб қабул қилишгани сабаб хам, Гаусс номи билан боғлиқдир.

Теорема (Гаусс теоремаси). Регуляр сиртларнинг тўла эгрилиги уларнинг Гаусс эгрилигига тенгдир.

Ҳар қандай $C^2(D)$ синфга тегишли сиртлар учун Евклид фазосида, бу икки катталикнинг қийматлари тенгдир. Аммо регулярлик бундан кам бўлганда, яни кўпёқликлар учун тўла эгрилик тушунчаси йўқ, Гаусс эгрилик бор. Шуниндек, Гаусс теоремаси Евклид фазосида ўринли, ноевклид фазоларда ўринли эмас.

Гausснинг яна бир буюк теоремасини эслаб ўтамиз. Бу теорема Риман геометриясининг асоси бўлиб, дифференциал геометрияни механика, физика ва квант механикаси каби йўналишларига қўлланилишига сабаб бўлган.

Теорема (Гаусс теоремаси). Регуляр сиртнинг Гаусс эгрилиги унинг биринчи квадратик формаси коэффициентлари ва уларнинг ҳосилалари билан тўла аникланади.

Бу боғланишнинг аналитик ифодаси ҳам Гаусс томонидан келтирилган.

Сирт ички геометрияси. Риман геометрияси

Геометриянинг асосий объекти сифатида сиртлар қаралади. Бунда чизиқ бир ўлчамли ёки бир ўзгарувчининг “сирти” сифатида ўрганилади.

Геометриянинг энг мураккаб тушунчаларидан бири аслида шу сиртлардир. Сиртнинг замонавий математик жиҳатдан аниқ таърифини бериш анчагина қийин. Ўч ўловли фазоларда сирт деганда текисликдаги соҳанинг фазодаги узлуксиз акси тушунилди.

Агар $D \subset \pi$ текисликдаги соҳа бўлса,

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)i + y(u,v)j + z(u,v)k \tag{4.1}$$

бу шу $(u,v) \in D$ нуқтанинг $R_3\{i;j;k\}$ базисли фазодаги акси бўлиб, $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \subset C^2(D)$ бўлганда, (4.1) тенглама *сиртнинг вектор тенгламаси* деб аталади.

Бу вектор тенгламани қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни сирт бўлади.

Маълумки, сиртнинг тенгламаси (4.1) шаклда бўлса, унинг биринчи квадратик формаси деб аталган, сирт устидаги чизиқ ёки узунлигини ҳисоблаш имконини берувчи

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2$$

тенгликни ҳосил қилиш мумкин.

Аввалги бўлимда эслатиб ўтилгандек, сиртнинг биринчи квадратик формаси маълум бўлса, сирт устидаги чизиқлар орасидаги бурчак, соҳа юзи, тўла эгрилик, геодезик эгрилик, геодезик чизиқ ва шуларга ўхшаш сирт билан боғлиқ катталикларни ҳисоблаш имкони пайдо бўлар экан.

Сиртлар назариясида эгиш (изгибание) деган бир тушунча борки, у ҳам сиртнинг биринчи квадратик формаси билан боғлиқдир.

Эгиш – сиртни букмасдан, ертмасдан ва сирт устидаги икки нуқта орасидаги масофани сақлаган ҳолда сирт шаклини ўзгартиришдир.

Эгишга доир энг содда мисол сифатида бир варoқ қоғозни юқоридаги шартлар асосида шаклини ўзгартиришни кўриш мумкин.

Эътиборлиси шундаки, сиртни эгиш жараёнида биринчи квадратик форма ва унга боғлиқ бўлган катталиклар сақланиб қолар экан.

Шунинг учун сиртнинг биринчи квадратик формаси ва унга боғлиқ катталиклар *сиртнинг ички геометрияси* деб аталади.

Ички геометрияга доир катталикларни ўрганишда сиртнинг қандай фазода ва қайси шаклда берилганининг аҳамияти бўлмайди. Фақат биринчи квадратик форма коэффициентларини билишнинг ўзи етарли бўлади.

Сирт ички геометрияси, сиртларни эгиш масалалари XIX асрда Гаусс томонидан ўрганилган, асосан регуляр тенглама билан берилган сиртлар учун. XX асрнинг ўрталарида рус академиги А.Д. Александров бу тушунчаларни кўпёқликлар учун умумлаштирган. Бу тадқиқотларни А.Д. Александровнинг “Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей” монографиясида танишиш мумкин [1] (бу адабиёт 2006 йилда инглиз тилига таржима қилинди ва ҳозирда чет эл математиклари бу соҳада жуда кўплаб изланишлар олиб бормоқда).

Сирт ички геометриясининг энг равнақ топган қўлланишларидан бири “Риман геометрияси” деб номланган соҳанинг физика, механика, квант механикаси ва замонавий йўналишдаги кўплаб аниқ фанларга қўлланилишидир.

Риман геометрияси бўлими n-ўлчовли фазода сиртнинг биринчи квадратик формаси

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} du_i du_j$$

шаклда берилган деб ҳисобланади ва сиртнинг фазода қандай жойлашиши унинг шаклини ҳисобга олмаган ҳолда, унинг ички геометриясига доир катталикларни ўрганади.

Бу усул механика, айниқса, физика масалаларини ҳал қилишда самарали қўлланилади.

Бу усулнинг қулайликлари жуда кўп, аммо бир камчилиги бор, бу квадратик форма коэффициентлари g_{ij} га қўйиладиган регулярлик талаби, яъни уларни керакли тартибда узлуксиз ҳосилага эга бўлишини талаб этилишидир.

Охирги 30-40 йилларда А.Д. Александров назариясига эътибор кучайганлигининг асосий сабаби эса бу функциялардан фақат узлуксизликнинг талаб қилинишининг ўзи етарли эанидир.

Сирт ташқи геометрияси

Демак, сиртнинг ички геометрияси деганда унинг ички метрикаси билан боғлиқ катталиклар, яъни биринчи квадратик формаси билан боғлиқ хоссалар тушунилар экан.

Бундан ташқари сиртнинг иккинчи квадратик формаси деб номланадиган

$$II = (d^2\vec{r} \cdot \vec{n}) = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2$$

квадратик форма мавжуд бўлиб, у сиртни қаралаётган нуқтада ўзининг уринма текислигидан қанчалик узоқлашганини бидирувчи геометрик характеристикасидир.

Шу билан бирга сиртдаги чизиқнинг нормал эгрилиги, бош эгриликлар, ассимптотик йўналиш, эгрилик чизиқлари, ўрта эгрилик каби тушунчалар мавжуд-ки, улар иккинчи квадратик форманинг қандай экани билан боғлиқдир.

Сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формаларини боғловчи Бонне теоремаси мавжуд.

Теорема (Бонне теоремаси). Бизга

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 \tag{4.1}$$

$$II = L(u,v)du^2 + 2M(u,v)dudv + N(u,v)dv^2 \tag{4.2}$$

икки квадратик форма берилган бўлиб, улардан биринчиси мусбат аниқланган ва уларнинг коэффициентлари Петерсон-Кадаци ва Гаусс тенгламаларини қаноатлантирса, фазода биринчи квадратик формаси (4.1) тенглик билан ва иккинчи квадратик формаси (4.2) тенглик билан ҳисобланадиган ягона сирт мавжуддир.

Теорема мазмуни шундайки, теорема шарти бажарилганда, сиртнинг вектор тенгламасидаги $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \subset C^2(D)$ функцияларни ягона усулда топиш мумкин экан.

Бу эса сиртни тўлиқ аниқлаш, унинг шакли ва хоссалари ҳақида тўла маълумотга эга бўлиш демакдир.

Сиртнинг шакли ва фазодаги ҳолати унинг ички геометриясига таъсир қилмайди. Шу сабабдан геометрияда “Сиртнинг ташқи геометрияси” деб номланган бўлим мавжуд бўлиб, у сиртнинг ички геометриясига тегишли бўлмаган хоссаларини ўрганади.

Сиртнинг ташқи геометриясига доир асосий масалалар А.В. Погореловнинг “Внешняя геометрия выпуклых поверхностей” [4] деб номланган асарида келтирилган. Бу асарда сирт ташқи геометриясига доир кўплаб ечилган масалалар берилган. Шунингдек, бу масалаларни эллиптик ва гиперболик фазолардаги ечимлари ҳам келтирилган. Қатор ечилмаган масалалар ва муаммолар берилган.

Аҳамиятлилиги шунда-ки, бу монографияда Коши томонидан XIX аср бошида қўйилган муаммо тўлиқ ҳал қилинган.

Коши масаласи қуйидагича: *Тенг кўпбурчаклардан ташкил топган кўпёқликлар ўзаро тенгми?*

Бу масаладан кўплаб геометрик муаммолар келиб чиққан. Шулардан бири Г.Вейл томонидан қўйилган регуляр сиртлар учун қўйилган ушбу масаладир: *берилган биринчи квадратик формага эга бўлган неча хил сирт мавжуд?*

Г.Вейлнинг ўзи бу масалани биринчи квадратик форма сферада аниқланган бўлса, яъни (u,v) – сферик координаталар бўлиб, функциялар C^3 синфга тегишли ва Гаусс эгрилиги мусбат бўлган ҳолда уни қаноатлантирувчи ягона овалоид мавжуд эканини исбот қилган.

А.В. Погорелов сиртнинг биринчи квадратик формаси билан боғлиқ масалаларни ечишда сиртнинг шартли эгрилиги тушунчасидан фойдаланган.

Сирт шартли эгрилиги сиртнинг сферик тасвири билан боғлиқ бўлиб, у сирт уринма текислиги бирлик нормалини бирлик радиусли сферага йиғиш йўли билан ҳосил қилинади.

Ташқи геометрия масалалари кўпинча дифференциал тенгламалар ёки дифференциал тенгламалар системаси ечими билан боғлиқ.

Шунингдек, баъзи ҳолларда масаланинг геометрик ечими дифференциал тенглама ечимининг мавжудлик ёки ягоналик масалалари билан боғлиқ бўлади.

Сиртнинг қавариқ ёки эгарсимон сирт бўлиши унинг Гаусс эгрилигининг мусбат ёки манфий аниқланганлиги билан боғлиқдир.

Ташқи геометрияга боғлиқ масалалар кўпинча Гаусс эгрилиги мусбат бўлган ҳолларда аниқ ҳал қилинган. Аммо Гаусс эгрилиги манфий бўлган ҳолларда масала ечими мавжуд бўлмаслиги ёки мавжуд бўлса ҳам ягона бўлмаслиги мумкин.

Хусусан, Гаусс эгрилиги манфий бўлган биринчи квадратик формага эга сиртнинг мавжуд бўлиши шарти баъзи хусусий ҳоллардагина ҳал қилинган. Бу мураккабликка сабаб , Гаусс эгриликлари манфий бўлган сиртлар гиперболик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар билан боғлиқдир.

КЎПХИЛЛИКЛАР ГЕОМЕТРИЯСИ

Ф.Клейн XIX асрда геометрик шаклларнинг гомеоморф акслантиришда сақланадиган хоссаларини ўрганди ва буни геометриянинг янги бўлими деб эътироф этди. Хусусан, ҳаракатда, проектив ёки аффин алмаштиришларда сақланадиган хоссалар ҳам топологик хоссалар деб юритилган.

Кейинчалик эса геометриянинг бу бўлими тўлақонли топология деб номланадиган бўлди.

Бизга ихтиёрий X тўплам берилган бўлсин. Агар X тўплам тўпламостилари бўлган Ω лар учун қуйидаги шартлар бажарилса:

a) Ω га тегишли тўпламостиларнинг чекли сонининг йиғиндиси Ω га тегишли;

b) Ω га тегишли тўпламостиларнинг кесишмаси ҳам Ω га тегишли;

c) $\varnothing$ ва X тўплам ҳам Ω га тегишли бўлса, X тўпламда *топологик структура киритилган* ёки *топология аниқланган* деб аталади.

Бунда X тўплам киритилган Ω структура билан (X,Ω) – *топологик фазо* деб аталади, Ω – тўпламостилар *очиқ тўплам* дейилади.

Масалан, Евклид текислиги топологик фазога мисол бўлади. Бунда очиқ тўплам сифатида нуқта ва маркази нуқталарда бўлган очиқ айланаларни олиш мумкин.

Агар топологик фазони иккита бўш бўлмаган очиқ тўпламларга ажратиб бўлмаса, у *боғламли фазо* деб аталади.

Топологик фазода *чизиқ* деб $s:[0,1]\to X$ гомеоморф акслантиришга айтилади.

Агар топологик фазонинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи чизиқ мавжуд бўлса, фазо *чизиқли боғлиқ фазо* дейилади.

Топологик фазо таърифининг соддалиги, яъни (a), (b), (c) – талаблардан ташкил этилгани бу талабларни қаноатлантирувчи объектларнинг кўплигини таъминлайди.

Умуман, топологик фазоларда метрик топологик фазолар алоҳида ўрин тутади.

Топологик фазолар учун қўшимча шартлар киритиш йўли билан уларнинг сони камайтирилади. Шундай шартлардан бири Хаусдорфликдир.

Агар топологик фазонинг бир-биридан фарқли икки элементининг ўзаро кесишмайдиган атрофи мавжуд бўлса, бу фазо *Хаусдорф топологик фазо* деб аталади.

Энди топологик фазоларнинг кўп қўлланиладиган муҳим ҳолларидан бири бўлган кўпхиллик тушунчаси билан танишамиз.

Кўпхиллик тушунчасининг пайдо бўлишига сабаб бўлган асосий геометрик шакллар билан танишамиз. Чизиқ, сирт – энг содда кўпхилликларга мисол бўла олади.

Масалан, бизга бирор чизиқ берилган бўлса, унинг ихтиёрий нуқтаси учун уринма тўғри чизиқни ўтказсак, уриниш нуқтаси ва унинг кичик атрофида чизиқни шу тўғри чизиққа ўхшаш деб қарашимиз мумкин.

Шунингдек, сиртнинг нуқтаси учун уринма текисликни қарасак, уриниш нуқтаси атрофида сиртни текислик бўлаги сифатида деб қарашимиз мумкин. Бунда кичик атроф учун сирт нуқталари ва уринма текислик нуқталари орасида ўзаро бир қийматли акслантириш ўрнатиш мумкин.

Агар тўғри чизиқ ва текисликни мос равишда бир ва икки ўлчовли Евклид фазоси эканини ҳисобга олсак, ўзаро бир қийматли мосликдан чизиқ ва сирт нуқталари билан мос равишда бир ва икки ўлчовли Евклид фазолари ўртасида гомеоморфизм ўрнатилиши мумкин бўлади.

Шу ўринда айтиб ўтиш керак-ки, бу мослик ҳар доим уриниш нуқтасининг тўла атрофи билан бўлмай, унинг ярим атрофи билан ҳам бўлиши мумкин.

Таъриф (кўпхилликнинг таърифи). Агар топологик фазо

a) Хаусдорф фазо;

b) саноқли сондаги Евклид фазоси очиқ тўпламлари билан қопланган бўлса;

c) ихтиёрий нуқтаси атрофи n-ўлчовли Евклид фазосига гомеоморф бўлса, у n-ўлчовли топологик кўпхиллик деб аталади.

Мисоллар.

1. Ҳар қандай саноқли дискрет фазони 0-ўлчовли топологик кўпхиллик деса бўлади.

2. R_n – Евклид фазо n-ўлчовли топологик кўпхиллик бўлади.

3. R_{n+1} – Евклид фазоси сфераси S_n n-ўлчовли кўпхилликка мисол бўлади.

Кўпхилликларнинг баъзи хоссалари

Биз қуйида кўпхилликлар билан боғлиқ баъзи хоссаларни исботсиз келтирамиз.

Кўпхилликнинг муҳим хоссаларидан бири унинг ўлчамининг сақланишидир. Кўпхилликнинг бир вақтнинг ўзида n-ўлчовли ва m-ўлчовли бўла олмайди ($n \neq m$).

Агар n-ўлчовли кўпхилликнинг x_0 нуқтаси атрофи R_n фазога гомеоморф бўлса, бу нуқта *кўпхилликнинг ички нуқтаси* дейилади.

Агар x_0 нуқта атрофи R_n^+ фазога гомеоморф бўлса, x_0 – нуқта *четки нуқта* дейилади ва x_0 нуқтага R_n^+ кўпхилликнинг четки нуқтаси мос келади.

Кўпхилликнинг четки нуқталари тўплами кўпхилликнинг *чегарасини* ташкил этади.

Ҳамма нуқталари ички нуқталардан ташкил топган кўпхиллик *чегарасиз кўпхиллик* деб аталади.

Масалан, фазодаги сирт ва сирт бўлаклари чегарали кўпхилликка мисол бўлади.

Сфера, тор, крендель каби сиртлар чегараси йўқ икки ўлчовли кўпхилликка мисол бўлади.

Чегарага эга бўлган икки ўлчовли кўпхилликка Мёбиус листи мисол бўлади.

Бу тўғри тўртбурчак шаклидаги соҳани қарама-қарши чегараларини ёпиштириш йўли билан ҳосил бўладиган бир томонли сиртдир.

Кўпхилликни таърифи билан танишаётганда чизиқ ва сиртлардан фойдаландик. Бу тасодиф эмас, ҳар қандай n-ўлчовли Евклид фазосидаги сиртлар $(n-1)$-ўлчовли кўпхилликни ташкил этади, яъни, $(n-1)$-ўлчовли кўпхиллик бўлади. Шунингдек, R_n фазода чизиқ бир ўлчовли кўпхиллик бўлса, шунга ўхшаш $2 \leq m < n-1$-ўлчовли кўпхиллик бўлувчи m-ўлчовли сиртлар мавжуд.

Худди шунингдек, тескари масала ҳам ўрганилган. Агар M_n-ўлчовли кўпхиллик бўлса, уни бирор R_N Евклид фазосида сирт деб қараш мумкинми?

Бу масала Нэш томонидан ҳал қилинган ва кўпхилликлардан баъзи шартлар талаб қилинганда R_N фазода сирт бўлиши шартлари берилган. Бунда $N - n$ га боғлиқ ифода.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

Чизиқли ва Аффин фазо

Чизиқли фазо таърифи ва хоссалари

Чизқли фазоларга доир баъзи мисоллар билан танишамиз.

1. Чизиқли фазога доир энг содда мисол бу, ҳақиқий сонлар тўпламининг ўзидир, яъни $V = R = \Lambda$.

2. Ихтиёрий n-тартибли квадрат матрицалар тўплами чизиқли фазо ташкил қилади.

3. Бирор $[a, b]$ да аниқланган, узлуксиз функциялар $\{f(x)\}$ – тўплами чизиқли фазо ташкил қилади.

4. Квадрат учҳадлар тўплами чизиқли фазо ташкил қилади.

5. Вектор фазо чизиқли фазо ташкил қилади.

Келтирилган 1-5 чизиқли фазога оид мисоллар чизиқли фазонинг энг кўп ишлатиладиган, содда ва тасаввур қилиш осон бўлган намуналаридир. Шунинг учун бу тўпламларнинг ҳақиқатан ҳам чизиқли фазонинг барча шартларини бажарилишини кўрсатишни тингловчичининг ўзига ҳавола қиламиз.

Мустаҳкамлаш учун савол ва масалалар

1. Ушбу $ax^2 + bx + c \in W,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ тўплам чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

2. $V = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

3. $W = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{32} \end{pmatrix}, b_{ij} \in \mathbb{R}$ – тўплам чизиқли фазо бўладими?

4. Қатор $(a_1\ \ a_2\ \ a_3 \ldots .\, a_n)$ ва устун $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$ матрицалар тўплами чизиқли фазо бўладими?

5. Комплекс сонлар тўплами чизиқли фазо бўладими?

6. Ушбу $H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ матрицалар тўплами чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

7. Нол элемент битта элементли чизиқли фазо бўлишини кўрсатинг.

8. Интегралланувчи функциялар тўплами чизиқли фазо бўлишини исботланг.

9. Ушбу $W = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\}$ фазода нол элемент қандай бўлади?

10. Комплекс сонлар тўпламида нол элемент ва қарама-қарши элементлар қандай бўлади?

11. $V = \{(a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n)\}$ – чизиқли фазода нол, бир ва қарама-қарши элементларни кўрсатинг.

12. Берилган $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – кўпҳадлар тўплами чизиқли фазо бўладими?

13. Текисликда берилган $\vec{a}\{x_1, y_1\} \in W,\ \ x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ – векторлар тўплами чизиқли фазо ташкил этишини кўрсатинг. Йиғинди ва сонга кўпайтманинг координат ифодасини топинг, координаталар системасида кўрсатинг.

Чизиқли фазо ўлчами. Чизиқли фазога мисоллар

2.1. Чизиқли фазо ўлчами. Умуман айтганда, чизиқли фазо ўлчами чекли ва чексиз бўлиши мумкин. Биз геометрия фанида асосан чекли чизиқли фазолар билан шуғулланамиз.

Қуйида биз баъзи чизиқли фазоларнинг базиси ва ўлчамлари билан танишамиз:

1. Икки ўлчовли квадрат матрицалар $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Бу матрицалар чизиқли фазо ташкил қилиши билан маърузада танишган эдик. Энди биз $\Lambda = A_2$ нинг базиси ва ўлчами ҳақида фикр юритамиз. Бу чизиқли фазода

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицалар фазонинг базисини ташкил қилади. Буларни чизиқли эркли эканлиги

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 = 0$$

тенглик фақат $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ ҳол учунгина ўринли бўлишидан келиб чиқади. Шунингдек, A_2 тегишли ихтиёрий матрица учун

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{21}e_3 + a_{22}e_4$$

тенглик ўринлилиги, ҳар қандай бешинчи элементнинг булар билан чизиқли боғлиқлигини кўрсатади. Демак, A_2 да тўртта чизиқли эркли элемент мавжуд ва ҳар қандай бешта элемент ўзаро чизиқли боғлиқдир. Бу еса иккинчи тартибли матрицалар тўплами $A_2 = \Lambda_5$ беш ўлчовли чизиқли фазо эканлигини кўрсатади.

2. Берилган $[-a, a]$ – оралиқда аниқланган узлуксиз ва ихтиёрий тартибли узлуксиз ҳосилага эга функциялар тўплами. Бу тўплам чизиқли фазо бўлиши билан танишган эдик. Энди бу тўплам учун базис ва унинг ўлчамини аниқлаймиз. Қаралаётган тўпламда $1, x, x^2, ..., x^n$ даражали функциялар чизиқли эркли элементларга мисол бўлади. Шунингдек, ҳар қандай $[-a, a]$ оралиқда аниқланган узлуксиз ва ихтиёрий тартибли ҳосилага эга функцияни Маклорен қаторига ёйиш мумкинлиги, даражали функциялар ихтиёрий тартибли бўлиши, чизиқли фазонинг ўлчами чегараланмаган эканини кўрсатади.

2.2. Чизиқли фазога мисоллар. Бу бўлимда чизиқли фазо элементлари ихтиёрий нарсалар бўлиши мумкин эканлигини, фақат улардан чизиқли фазо аксиомаларини бажарилишинигина талаб этилишини кўрсатувчи мисоллар келтирамиз.

1. Ранглар фазоси. Бу ерда ранг – бўёқ ранги маъносида тушунилади.

Ҳаётий ранглар ҳақидаги мулоҳазаларни математик усулда баён этишга ҳаракат қиламиз. Табиатда асосий бўлган ранглар мавжуд. Масалан: оқ, қизил, қора, ... сингари. Кўпгина бошқа ранглар бу рангларнинг аралашмасидан иборат бўлади. Умуман айтганда, ҳар қандай рангни ҳам бир ёки бир нечта рангларнинг аралашмаси сифатида ҳосил қилиш мумкин. Аммо шундай ранглар борки, улар ўзининг аниқ номига эга ва уларнинг бирини фақат бошқа биридан ҳосил қилиш мумкин эмас.

Юқорида келтирилган A – оқ, B – қора, C – қизил рангларни стандарт ранглар деб ҳисобласак, мана шу учта рангни асос қилиб олиб ва улардан қандайдир ҳисса қўшиш йўли билан турли хил рангларни ҳосил қилиш мумкин. Табиийки, бундай уч хил рангларнинг ўзи ҳам ҳар хил бўлади, яъни асосий деб олишимиз мумкин бўлган уч хил ранглар ҳам турлича бўлади. Бошқа учлик эса янгича рангларни бериши аниқ.

Демак, биз A, B, C – рангларни асосий деб олдик. Унда A рангдан a ҳисса, B рангдан b ҳисса ва C рангдан c ҳисса қўшганимизда бирор G ранг ҳосил бўлсин. Шу айтилган жараённи ушбу тенглик билан ёзишимиз мумкин:

$$G = aA + bB + cC.$$

Энди биз $\{A, B, C\}$ – рангларни асосий ранглар, яъни базис ранглар деб қарасак, тенгликнинг ўнг томони бу базис рангларнинг чизиқли комбинацияси бўлади. Чизиқли комбинация коэффициентлари (a, b, c) – ларни G – рангнинг координаталари деб, ҳосил бўладиган G рангларни RF– ранглар фазоси деб атаймиз.

Демак, RF ранглар фазосида элементлар ранглардан иборат ва бу ранглар базис $\{A, B, C\}$ рангларнинг аралашмаси. Қайси рангдан қанча қўшилишини ифодаловчи (a, b, c) – сонлар шу рангнинг координаталари. Шу йўл билан биз уч ўлчовли фазо нуқталари ва ранглар тўплами орасида мослик ўрнатдик. Бу ранглар фазосининг ажойиб бир математик модели бўлади.

Бу моделдан рангларни ўрганувчи фан бўлган “колориметрия” соҳасида унумли фойдаланилади.

Ранглар фазосида асосий рангларнинг координаталарини кўрсак,

$$A = 1 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$$

кўринишида ёзиш мумкин эканлигидан, $A(1, 0, 0)$ эканлигини ва шунга ўхшаш $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ координаталарга эга эканлигини кўришимиз мумкин.

Баъзан асос бўлган рангдан баъзилари қўшилмай қолиши мумкин

$$D = a \cdot A + b \cdot B + 0 \cdot C.$$

Бунда D – ранг учун C – ранг қўшилмаяпти, у фақат A ва B ранглар аралашмасидан иборат.

Биз RF ранглар фазоси ҳақида бошланғич тушунчаларни келтирдик, қизиққан тингловчилар манбалардан бу ҳақида тўлароқ танишиши мумкин.

Бизнинг асосий мақсадимиз ҳозиргина танишган RF ранглар фазоси ҳам уч ўлчовли чизиқли фазога мисол бўлишини кўрсатиш эди.

2. Кимёвий элементлар чизиқли фазоси. Кимё фанидан бизга маълумки, табиатдаги ҳар қандай модда Менделеев даврий жадвалидаги элементлардан бири ёки уларнинг бир нечтасининг йиғиндисидан иборат бўлади. Ҳар бир элемент атом, молекула ёки бошқа ташкил этувчилардан иборат эканлигини ҳисобга олсак ва асосий ташкил этувчиларни $B_i(0,...,0,1,0,...,0)$ шаклида базис элемент сифатида n тасини танлаб олсак, ҳар қандай A_j элементни

$$A_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} B_i$$

шаклда ифода этиш мумкин. Бу ерда $B_j > 0$ бўлиб, A_j даги B_i атомлари сонини билдиради. Бунда B_i – чизиқли фазонинг базиси деб қаралади. A_j – элемент уларнинг чизиқли комбинацияси бўлади. Йиғинди ва сонга кўпайтириш амаллари бу элементлар чизиқли фазо ташкил этишини кўрсатади. Бунда кўпайтирилувчи сон бутун сонлар тўпламидан олинган бўлади.

Келтирилган фазони қуйидаги соддароқ ҳолда кўрайлик.

Мисол. Ушбу CO_2, H_2O, H_2CO_3 моддалар асосан H – водород, C – углерод, O – кислороддан ташкил топган. Бу элементлар орасидаги боғланишни қуйидаги матрица шаклида ёзиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} CO_2 \\ H_2O \\ H_2CO_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ C \\ O \end{pmatrix}.$$

Агар бу тенгликда қатнашган устун матрицаларни чизиқли фазо элементи деб ҳисобласак, бу чизиқли фазо чизиқли алмаштириш ёрдамида бир элементлардан иборат учликни бошқа элементлар билан алмаштиришни беради.

Бу масалага тўла алгебраик усулда ёндашсак, тенгликда қатнашаётган матрицанинг ранги иккига тенг еканини кўриш мумкин.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad rang\Delta = 2.$$

Демак, чап томондаги 3 та элемент ҳосил қилинган чизиқли фазонинг икки ўлчовли фазо остига тегишли эканини билдиради. Бу икки ўлчовли фазо ости эса ўзининг базис элементларига эга бўлади. Бу базисда қаралаётган учта элемент янгича ифодаланади:

$$\begin{pmatrix} CO_2 \\ H_2O \\ H_2CO_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2O \\ CO_3 \end{pmatrix}.$$

Бу тенгликлар чизиқли фазо элементлари орасидаги чизиқли алмаштиришларни ифода этади. Табиийки, бу тенгликлар аниқ бир кимёвий реакциядаги қонуниятни беради. Масаланинг кимё фанидаги ўрнини ўрганиш қизиқувчилар учун яхши машқ бўлади.

Бизни эса масаланинг математик томони қизиқтиради. Демак, чизиқли фазода ҳар қандай элементни базис элементлар ёрдамида, яъни, фазо ўлчовига тенг сондаги чизиқли эркли элементлар ёрдамида чизиқли ифодалаш мумкин экан.

Агар бирор $e(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ базисдан бошқа $e'(e_1', e_2', e_3', ..., e_n')$ базисга ўтилса, улар орасида

$$e = Ae'$$

шаклда чизиқли боғланиш мавжуд бўлар экан. Бунда A – матрица, e ва e' бирлик матрицалар. Бу боғланиш чизиқли фазода чизиқли алмаштириш деб аталади.

Чизиқли алмаштиришнинг хоссалари билан ихтиёрий “чизиқли алгебра” га тегишли адабиётлардан танишиш мумкин.

Аффин фазо

Мустаҳкамлаш учун савол ва масалалар

1. Аффин фазосининг биринчи аксиомаси ва Евклид фазоси аксиомалари орасида қандай боғлиқлик ёки ўхшашлик бор?

2. Аффин фазосининг иккинчи аксиомаси ва Евклид аксиомалари орасида қандай боғлиқлик ёки ўхшашлик бор?

3. Иккинчи тартибли матрицалар чизиқли фазо ташкил этади, у аффин фазоси бўладими?

4. Текислик икки ўлчовли аффин текислиги билан эквивалент эканини кўрсатинг.

5. Ихтиёрий Λ_n – n-ўлчовли чизиқли фазо A_n – аффин фазоси бўлиши мумкинми?

6. Аффин фазосида параллеллик тушунчаси мавжуд эканлиги исботлансин.

7. Бир ўлчовли аффин фазода векторлар комбинацияси қандай геометрик маънога эга?

8. Уч ўлчовли аффин фазосида $\{e_1, e_2, e_3\}$ – базис векторлар. Агар $\vec{a} = 2e_1 + e_2 - e_3$, $\vec{b} = e_1 + 2e_2 + e_3$, $\vec{c} = e_1 + e_2 - 2e_3$ бўлса, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – ни базис деб олса бўладими?

9. Аффин текислигида учлари $A(7,2)$, $B(-3,4)$ – нуқталарда бўлган векторнинг координаталарини топинг.

10. Текисликда $\vec{a}(2,4)$, $\vec{b}(3,7)$, $\vec{c}(5,4)$ – векторлар берилган. Агар $(\vec{a}, \vec{b})$ векторларни базис деб олинса, $\vec{c}$ – векторнинг бу базисдаги координаталарини топинг.

11. Аффин фазосида берилган $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ – векторларнинг бир текисликда ётиш шартини топинг.

12. Текисликда бир учи умумий бўлган $ABCD$ – параллелограмм ва $AKLN$ – квадрат берилган. Агар параллелограммнинг A учидан чиққан томонларида ётган векторларни базис деб олинса, квадрат томонларида ётган векторлар координаталарини топинг.

13. Текисликда $\vec{a}(3,4)$, $\vec{b}(2,4)$, $\vec{c}(1,9)$ – векторлар берилган. Агар $\vec{a}, \vec{b}$ –

векторларни базис деб олинса, $\vec{c}$ векторнинг координаталари қандай бўлади?

14. Текисликда $\vec{a}(2,5)$, $\vec{b}(6,15)$ векторлар базис ташкил қила оладими?

15. Аффин координаталар системасида $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини ёзинг.

16. Аффин координаталар системасида "даста" тенгламаси яъни, $A(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар тенгламасини ёзинг.

17. Умумий тенгламасидаги коэффициентлари қандай шартни бажарганда, икки тўғри чизиқ параллел бўлади?

18. Ушбу $\begin{cases} x' = 7x + 5y + 4 \\ y' = 4x + 3y - 2 \end{cases}$ аффин алмаштиришида 1) $A(1,-2)$, $B(5,-9)$ – нуқталар аксини; 2) $3x + 2y - 5 = 0$ – тўғри чизиқ аксини топинг.

19. Берилган $\vec{a}(3,4)$ вектор координаталарини параллел кўчирганда $\vec{b}(7,5)$ векторга ўтган. Бунда координаталар боши қайси нуқтага параллел кўчирилган?

Евклид ва Псевдоевклид фазо

Соддалик учун икки ўлчовли псевдоевклид фазоси билан, яъни, Минковский текислиги геометрияси билан танишамиз.

Агар текисликда бирор декарт координаталар системаси киритилган бўлса, текисликдаги ҳар бир нуқта ўзининг бир жуфт сондан иборат координаталарига эга бўлади. Бу тушунча сизга мактабдан маълум. Айтайлик, π текисликда Oxy декарт координаталар системаси киритилган бўлиб, $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ бўлсин. Энди $\overline{e_1}$ билан Ox ўқи бўйича йўналган, $\overline{e_2}$ билан Oy ўқи бўйича йўналган векторларни оламиз. Бу векторлар коллинеар эмас, шунинг учун уларни текисликда базис векторлар сифатида қабул қилиш мумкин.

Энди бу базис $\{\overline{e_1},\overline{e_2}\}$ – векторлардан ушбу шартларни қаноатлантиришини талаб этамиз:

$$\overline{e_1}^2=1, \overline{e_2}^2=-1,\ \overline{e_1}\cdot\overline{e_2}=\overline{e_2}\cdot\overline{e_3}. \qquad (4.1)$$

Маълумки, текисликдаги ҳар қандай вектор $\{\overline{e_1},\overline{e_2}\}$ – базислар ёрдамида чизиқли ифодаланади ва $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ векторларнинг чизиқли ифодаси ушбу шаклда бўлади:

$$\overline{OA}=x_1e_1+y_1e_2,\ \overline{OB}=x_2e_1+y_2e_2.$$

Агар $\overline{OA}$ векторнинг $\overline{OB}$ векторга кўпайтмасини алгебраик усулларда ҳисоблаб чиқсак,

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=(x_1e_1+y_1e_2)\cdot(x_2e_1+y_2e_2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Базис векторлар учун қўйилган (4.1) талабни эътиборга олсак,

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=x_1x_2-y_1y_2 \qquad (4.2)$$

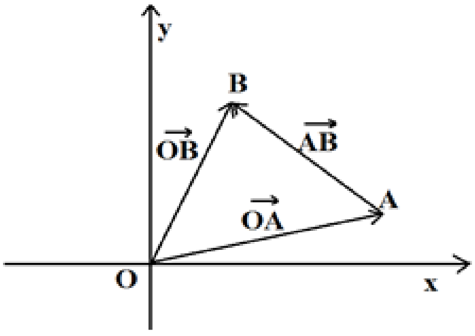
тенгликни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган бу (4.2) тенгликни $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб атаймиз ва $(\overline{OA}\cdot\overline{OB})$ шаклда белгилаймиз. Энди бу скаляр кўпайтма ёрдамида баъзи геометрик катталикларни аниқлаймиз.

Одатда, яъни Евклид геометриясида векторнинг узунлиги (нормаси) векторнинг ўзини-ўзига скаляр кўпайтиришдан ҳосил бўлган катталикдан олинган квадрат илдиз шаклида аниқланар эди, яъни,

$$|\bar{X}|=\sqrt{(X\cdot Y)}$$

тенглик билан.

Текисликда икки $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ нуқталар орасидаги масофани, учлари шу нуқталарда бўлган $\overline{AB}$ векторнинг нормасига тенг деб ҳисоблаймиз. Текисликдаги векторлар устидаги амалларга кўра $\overline{AB}$ вектор $\overline{OB}$ ва $\overline{OA}$ векторлар айирмасига тенг, яъни, $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$ (4.1-расм) векторнинг координаталардаги ифодаси



4.1-расм.

$\overline{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} = (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2.$

Бундан $|\overline{AB}|$ ни ҳисоблаш унча мураккаб эмас:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}.$$

Демак, геометрияга замонавий таъриф беришда киритилган (4.2) тенглик (4.1) шартни қаноатлантирувчи базислар учун берилган икки нуқтани туташтирувчи вектор нормаси, яъни, шу векторни ифода этувчи кесма узунлиги сифатида аниқланар экан.

Биз Минковский текислигидаги масофани векторлар алгебраси ёрдамида, геометрик йўл билан аниқлаш усули билан танишдик. Бу текисликдаги геометрик катталиклар орасида ҳосил бўладиган муносабатларни Минковский геометрияси деб атаймиз.

Минковский геометриясида айлана ва бурчак. Демак, Минковский геометриясидаги асосий тушунчалар, текисликдаги векторлар ва улар орасидаги муносабатлар Евклид геометриясидаги ҳолатидан фарқ қилмайди. Асосий фарқ базис векторларнинг ўзаро кўпайтмаси талаблари асосида ҳосил қилинган икки нуқта орасидаги масофа аниқланишидадир. Аммо бу ўзгариш масофа ёрдамида аниқланадиган геометрик тушунчаларнинг тубдан ўзгаришига сабаб бўлади.

Аввало масофа тушунчасида пайдо бўладиган ўзгаришлар билан танишиб чиқайлик.

Вектор нормасининг қандай катталик бўлишини аниқлаймиз. Маълумки, вектор нормаси ушбу тенглик билан аниқланади:

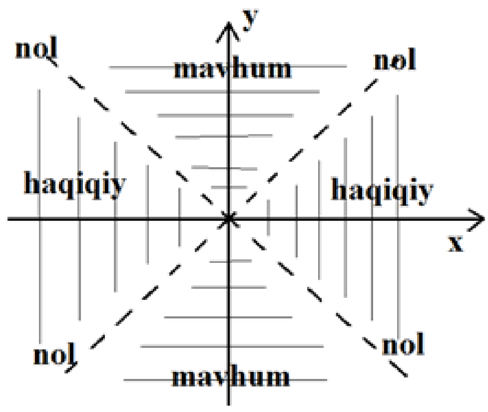
$$|\overline{OA}| = \sqrt{x_1^2 - y_1^2}.$$

Бундан,

$$|\overline{OA}| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 - y_1^2} - \text{ҳақиқий}, |x_1| > |y_1| \text{ бўлса}, \\ 0, \quad |x_1| = |y_1| \text{ бўлса}, \\ \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \cdot i - \text{мавҳум}, |x_1| < |y_1| \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Бу тенгликдан, координаталар бошидан текисликка йўналган векторлар, текисликни уч хил узунликка (нормага) эга векторлардан иборат бўлакларга ажратилишини кўриш мумкин (4.2-расм).

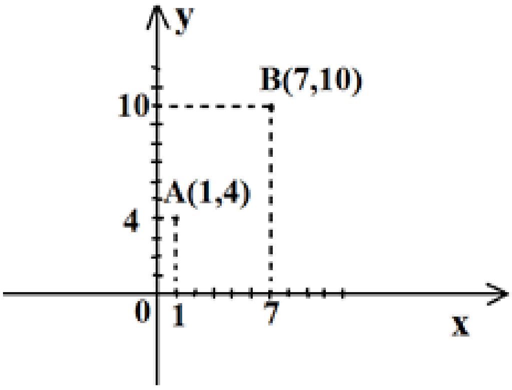
Одатда, векторлар нормасининг катталигига боғлиқ равишда ҳақиқий, мавҳум ва нол узунликдаги векторлар деб аталади. Физика фанида эса бу векторларни мос равишда фазовий, вақтга ўхшаш ва изотроп векторлар деб аташади. Шунинг учун биз ҳам нол векторларни изотроп векторлар деб атаймиз. Одатда, нол вектор деганда нуқта тушунилади, аммо Минковский геометриясида нол вектор фақат нуқтани ифода этмайди. Шу



4.2-расм.

сабабли, узунлиги нолга тенг векторни изотроп вектор деб аташ қулай бўлади. Бу ҳолни ушбу мисолда аниқ тасаввур қилиш мумкин.

Масалан, учлари $A(1,4)$ ва $B(7,10)$ нуқталарда бўлган вектор узунлиги топилсин. Масалани ҳал қилишдан аввал координаталар системасида A ва B нуқталарни топамиз. Бу нуқталар текисликнинг бир-биридан фарқли икки нуқтаси эканини кўриш мумкин (4.3-расм). Демак, учлари бу нуқталарда бўлган нол вектор бўлмаган $\overline{AB}$ вектор мавжуд. Энди $\overline{AB}$ векторнинг узунлигини ҳисоблаймиз:



4.3-расм.

$\overline{AB} = \sqrt{(7-1)^2 - (10-4)^2} = \sqrt{36-36} = 0.$

Демак, $\overline{AB}$ – вектор изотроп вектор.

Вектор изотроп бўлиши учун $|x_1| = |y_1|$ эканини ҳисобга олсак ва бу тенглик $y = \pm x$ тенгликка тенг кучли эканлигидан, изотроп векторлар координаталар системаси биссектрисасига коллинеар вектор эканлигини ҳосил қиламиз.

Шунинг учун координата ўқлари биссектрисаси текисликда изотроп конус деб аталади ва унинг тенгламаси,

$x^2 - y^2 = 0$

шаклда ёзилади.

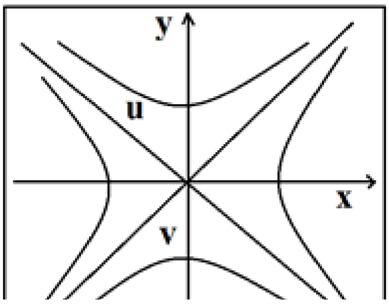
Изотроп конус текисликдаги ҳақиқий ва мавҳум узунликдаги векторлар тўпламини ажратиб туришини расмдан аниқлаш мумкин.

Текисликда нормалари (узунликлари) уч хил вектор мавжудлиги, текисликдаги нуқталар орасидаги масофанинг ҳам уч турга бўлинишига сабаб бўлади.

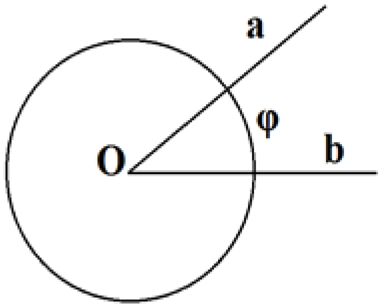
Худди Евклид геометриясида бўлгани сингари Минковский геометриясида айлана билан танишамиз.

Таъриф. Текисликда айлана деб, берилган нуқтадан тенг масофада ётган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

Минковский геометриясида ушбу таърифни қаноатлантирувчи нуқталарни аниқлашда масофанинг қиймати уч хил бўлишига аҳамият бериш зарур бўлади. Бу ҳоллар қуйидагича: агар айлана маркази координаталар боши $O(0,0)$ нуқта ва радиуси r га тенг бўлса, $x^2 - y^2 = r^2$ – ҳақиқий радиусли айлана, $x^2 - y^2 = 0$ – нол радиусли айлана, $x^2 - y^2 = -r^2$ – мавҳум радиусли айлана. Бу тенгликни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни (4.4-расм) да келтирилган.



Ҳақиқий ва мавҳум радиусли айланалар

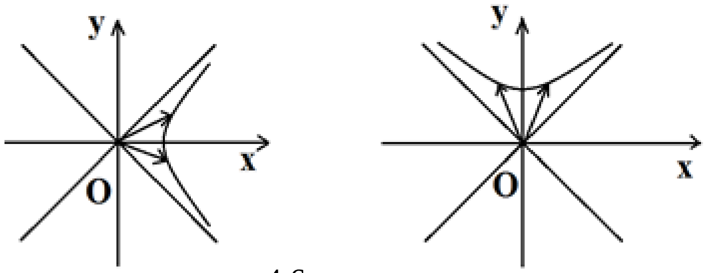


4.5-расм.

умумий асимптотага эга қўшма гипербола бўлса, нол радиусли айлана уларнинг асимптоталари ёки изотроп конусдан иборатдир.

Евклид геометриясида бурчак катталиги маркази бурчак учида бўлган бирлик айлана ёйи узунлигига тенг бўлган катталик ёрдамида аниқланар эди (4.5-расм). Минковский геометриясида ҳам бурчак катталиги худди Евклид геометриясидаги каби аниқланади. Аммо Минковский геометриясида бурчак фақат бир хил узунликка эга векторлар орасида аниқланиши мумкин. Чунки ҳар хил узунликка эга векторларни аниқлайдиган битта айлана мавжуд эмас.

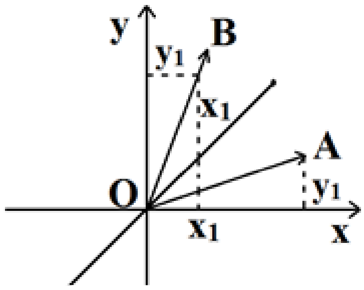
Таъриф. Минковский геометриясида иккита узунликлари бир хил катталикда аниқланадиган векторлар орасидаги бурчак, шу хил узунликдаги бирлик радиусли айлана ёйи узунлигига тенг (4.6-расм).



4.6-расм.

Гипербола ёйининг узунлиги чегараланмаганлиги Минковский геометриясида икки вектор орасидаги ψ бурчак $(-\infty, +\infty)$ интервалда бўлиши мумкин эканлигини билдиради. Бурчакнинг бу усулда аниқланиши *гиперболик бурчак* деб киритилади.

Маълумки, эллиптик бурчак $[0,2\pi]$ оралиққа тегишли бўлиб, ўзаро ортоганал йўналишларга $\frac{\pi}{2}$ қиймат ва ёпиқ бурчакка ёки π қиймат мос келар эди. Минковский геометриясида ҳам ортоганал йўналишлар скаляр кўпайтма ёрдамида аниқланади.



4.7-расм.

Таъриф. Скаляр кўпайтмалари нолга тенг, изотроп бўлмаган векторлар *ортоганал векторлар* деб аталади.

Ортоганал векторларнинг геометрик шакли қандай бўлиши билан танишамиз.

$\overline{\mathrm{OA}}\{\mathrm{x}_1, y_1\}$ ва $\overline{\mathrm{OB}}\{\mathrm{x}_2, y_2\}$ векторлар ортоганал векторлар бўлсин, яъни,

$$(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) = x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0.$$

Бундан $\frac{x_1}{y_1} = \frac{y_2}{x_2}$ эканлигини ҳосил қиламиз. Бу тенглик $\overline{OA}\{x_1, y_1\}$ ва $\overline{OB}\{x_2, y_2\}$ векторлар изотроп йўналишга нисбатан симметрик бўлгандагина ўринли бўлади. (4.7-расм).

Демак, Минковский геометриясида векторларнинг ортогаллиги уларни изотроп йўналишига нисбатан симметрик йўналганини билдирар экан. Хусусан, Ox ва Oy ўқлари ҳам ўзаро ортоганал экан.

Киритилган асосий тушунчалар ёрдамида Минковский геометриясида элементар геометриянинг асосий қонуниятларини ўрганиш мумкин. Бу илмий жиҳатдан қизиқ ва кўпгина амалий аҳамиятга эга бўлган машғулотни ўрганишни тингловчига қолдирамиз. Шунингдек, бу маълумотларни [8], [11] адабиётлардан топиш мумкин эканлигини ва бу геометрия Эйнштейн нисбийлик назариясининг геометрик талқини эканлигини таъкидлаб ўтамиз.

Мустаҳкамлаш учун савол ва масалалар

1. Минковский геометриясида икки нуқта орасидаги масофа қандай аниқланади?

2. Гиперболик синус ва косинус функцияларининг хоссаларини айтинг.

3. Ортоганаллик нима?

4. Базис нима? Текисликда нечта чизиқли эркли вектор бор?

5. Векторнинг чизиқли ёйилмаси нима?

6. Қандай векторлар коллинеар дейилади?

7. Нол ва изотроп векторларнинг фарқи нимада?

8. Минковский текислигида базис векторларга қандай шартлар қўйилади?

9. Минковский текислигида икки векторнинг нормаси қандай аниқланади?

10. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси қандай ифодаланади?

11. Геометрия фанига таъриф беришда қайси тенгликдан фойдаланилади?

12. Евклид ва Минковский геометрияларида икки нуқта орасидаги масофа формулаларида қандай фарқ бор?

13. Учбурчак томонлари бир хил ўлчовли бўлиши мумкинми?

14. Ихтиёрий икки нуқтани нол узунликка эга синиқ чизиқ билан бирлаштириш мумкинми?

15. $A(1,5)$ нуқтадан $y = 2x + 3$ тўғри чизиққа ортоганал тўғри чизиқ ўтказинг.

16. Ортоганал йўналишлар изотроп конусга нисбатан симметрик бўлишини кўрсатинг.

17. Минковский текислигида $X\{x_1, y_1\}$ ва $Y\{x_2, y_2\}$ векторлар скаляр кўпайтмаси $(X \cdot Y) = x_1 x_2 - y_1 y_2$ эканлигини кўрсатинг.

18. Минковский текислигида скаляр кўпайтманинг геометрик маъносини тушунтиринг.

19. $\bar{a}\{3,7\}$ векторга ортоганал бўлган вектор топинг ва чизмада кўрсатинг.

20. Минковский геометриясида векторлар узунликлари неча турга бўлинади?

21. Узунлиги нолга тенг вектор қандай номланади?

22. Изотроп конус нима?

23. Айлана таърифини келтиринг.

24. Минковский геометриясида неча хил айлана мавжуд?

25. Минковский геометриясида бурчак катталиги қандай аниқланади?

26. Қандай векторлар ортоганал векторлар деб аталади?

27. Ҳақиқий радиусли айланани чизинг.

28. Иккита ортогонал векторларни чизинг.

29. Гиперболик бурчак деганда нимани тушундингиз?

30. Маркази $A(x_0, y_0)$ нуқтада бўлган ҳолда айлана тенгламалари қандай бўлади?

31. Минковский текислигида айлана уринмасининг изотроп конус ичидаги бўлаги уриниш нуқтасида тенг иккига бўлинишини исботланг.

32. Минковский текислигида эллипснинг Евклид текислигидаги таърифини қаноанлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни топилсин.

33. Ихтиёрий нуқтасидан берилган $F(x_0, 0)$ нуқта ва $x = d$ тўғри чизиққача масофалар нисбати ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни топилсин.

34. Шундай $y = f(x)$ чизиқ топилсинки, унинг уринма вектори ҳар доим ҳақиқий қиймат қабул қилсин.

35. Минковский текислигида икки вектор орасидаги бурчак формуласини топинг, хоссасларини айтинг.

36. Ҳақиқий ва мавҳум радиусли айлана нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатса бўладими?

37. Минковский текислигида координаталар бошидан чиқувчи бир нурда ётадиган M ва M^* нуқталар учун $OM \cdot OM^* = r^2$ бўлса, улар r – радиусли айланага нисбатан қандай жойлашади?

Лобачевский текислиги

Маълумки 1826 йилда Н.И. Лобачевский ўзининг "Тасаввурдаги геометрия" асарида биринчи ноевклид, яъни Евклид геометриясидан фарқли геометрия ҳақида маъруза қилган. Бу сана ноевклид геометрияси вужудга келиш санаси ҳисобланади. Лобачевский геометриясининг вужудга келиш тарихи [11], [13] манбаларда баён этилган. Бу геометриянинг бир неча талқини пайдо бўлгандан сўнг фанда ўз ўрнига ва усулларига эга бўлди [14].

Биз ушбу амалий машғулотда Лобачевский текислигидаги асосий тушунчалар ҳақида Евклид фазосидаги сирт ёрдамида тасаввур ҳосил қилишига харакат қиламиз.

5.1. Лобачевский текислигидаги параллеллик. Маълумки, текисликда "нуқта" ва "тўғри чизиқ" асосий тушунчалар бўлади. Текисликдаги геометрияни ўрганиш учун асосий тушунчалар маълум бир нечта аксиомаларни қаноатлантириши зарур.

1^0. Хар қандай икки нуқтадан битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтади.

2^0. Тўғри чизиқ текисликни икки ярим текисликка ажратади (бўлади).

3^0. Текисликда берилган радиусли айлана чизиш мумкин.

4^0. Тўғри бурчаклар ўзаро тенг.

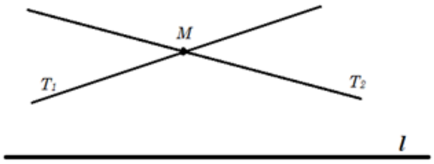
Ваниҳоят бешинчи параллеллик аксиомаси ёки V постулат. Бу аксиома тарихда жуда кўп мунозара ва тортишувга сабаб бўлган.

Н.И. Лобачевский V постулатни қуйидаги шаклда олишни таклиф қилган.

Аксиома. Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта берилган бўлсин. Бу нуқтадан берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган иккита тўғри чизиқ ўтказиш мумкин (5.1-расм).

Бунда $T_1\ va\ T_2$ тўғри чизиқлар l тўғри чизиқ билан кесишмайдиган тўғри чизиқлар.

Табиийки Евклид (мактаб) геометрияси доирасида бундай параллелликни тасаввур қилиш қийин.

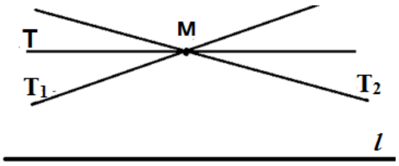


5.1-расм.

Ушбу амалий машғулотнинг асосий мақсади – Лобачевский аксиомасини Евклид геометрияси доирасида, яъни Евклид геометрияси элементлари ёрдамида тасаввур қила олиш имконини яратиш.

Аввало биз шу аксиомадан келиб чиқиши мумкин бўлган тасдиқлар билан танишамиз.

1-тасдиқ. Берилган нуқтадан тўғри чизиқ билан кесишмайдиган чексиз кўп тўғри чизиқ ўтказиш мумкин (5.2-расм).

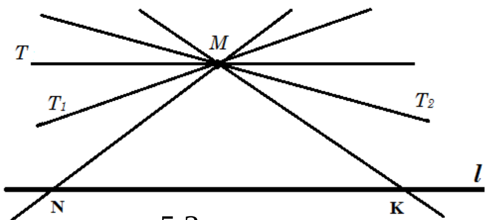


5.2-расм.

Бу тасдиқ исботини ушбу чизма орқали тушунтирамиз.

Аксиомага кўра $T_1\ va\ T_2$ – кесишмайдиган тўғри чизиқлар бўлсин. Бу тўғри чизиқлар ҳосил қилган вертикал бурчаклардан M нуқтадан ўтувчи ва l билан кесишмайдиган MT тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ l тўғри чизиқ билан кесиша олмайди. Чунки T тўғри чизиқ l билан кесишиши учун $T_1\ ёки\ T_2$ билан кесишиши керак бўлади. Бундай бўлиши мумкин эмас, чунки унинг кесишиши, аслида устма-уст тушишини кўрсатади. Бундай MT тўғри чизиқни чексиз кўп ҳолда ўтказиш мумкин.

Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта орқали тўғри чизиқ билан кесишадиган тўғри чизиқлар ҳам ўтади.



5.3-расм.

Масалан, 5.3-расмда MN ва MK тўғри чизиқлар l тўғри чизиқ билан кесишувчи тўғри чизиқлардир.

Демак, M нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасида l тўғри чизиқни кесувчи MN, MK ва l билан кесишмайдиган (MT) тўғри чизиқлар мавжуд экан.

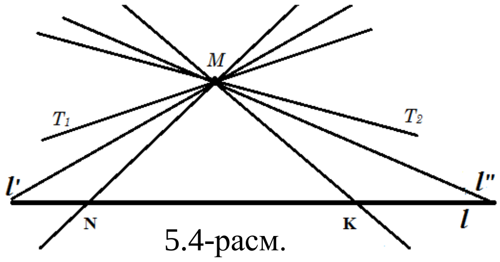
Таъриф. Берилган l тўғри чизиқда ётмаган M нуқтадан ўтувчи , тўғри чизиқлар дастасида l тўғри чизиқ билан кесишувчи ва l тўғри чизиқ билан кесишмайдиган тўғри чизиқлар тўпламини чегараловчи l' тўғри чизиқ l тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ деб аталади.

Бу Лобачевский текислигидаги тўғри чизиқларнинг параллеллиги таърифи, Евклид текислигидаги параллеллик тушунчасидан тубдан фарқ қилади. Лобачевский текислигида кесишмаслик тушунчаси ва параллеллик тушунчаси ҳар хил тушунчалардир.

Келтирилган таърифни қаноатлантирувчи тўғри чизиқ ягона бўлмайди.

2-тасдиқ. Тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта берилган бўлсин. Бу нуқтадан берилган тўғри чизиқга иккита параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Тасдиқни тўғри эканига N нуқтани чапга, K нуқтани ўнгга қўзғатиш йўли билан кўрсатиш мумкин. Бунда тўғри чизиқ M нуқта атрофида бурилади ва бурилиш жараёнида кесишувчи тўғри чизиқ кесишмайдиган тўғри чизиқлар тўпламига ўтади. Чегаравий ҳолат параллелликни беради (5.4-расм).



5.4-расм.

Бу текисликнинг Кэли-Клейн, яъни доира ичидаги талқини билан [15] да танишиш мумкин.

5.2. Лобачевский текислигининг Евклид фазосидаги талқини. Маълумки, гиперболани симметрия ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган шакл икки паллали гиперболоид деб аталади. Бунда гиперболанинг ассимптоталаридан айланма конус сирт ҳосил бўлади. Бу айланма конус гиперболоиднинг ассимптотик конуси деб аталади.

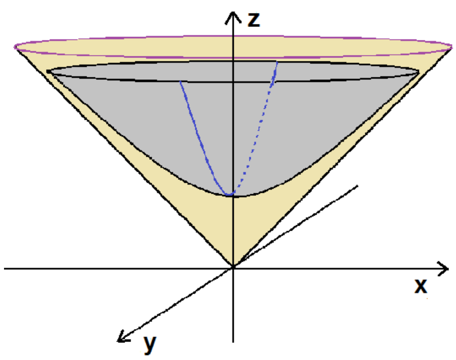
Биз Лобачевский текислиги талқинини ҳосил қилиш учун икки паллали гиперболоиднинг бир палласидан фойдаланамиз. Бундан сўнг гиперболоид деганда икки паллали гиперболоиднинг бир палласини тушунамиз. Тасаввур қилиш осон бўлиши учун, ассимптотик конус ва гиперболоид бирор координаталар системасида берилган бўлсин деб ҳисоблаймиз. Бунда координаталар боши конус учида, Oz ўқи эса конуснинг симметрия марказида бўлсин (5.5-расм).

Гиперболоидга тегишли бўлган нуқталарни Лобачевсгий текислиги “нуқта”лари деб қабул қиламиз.

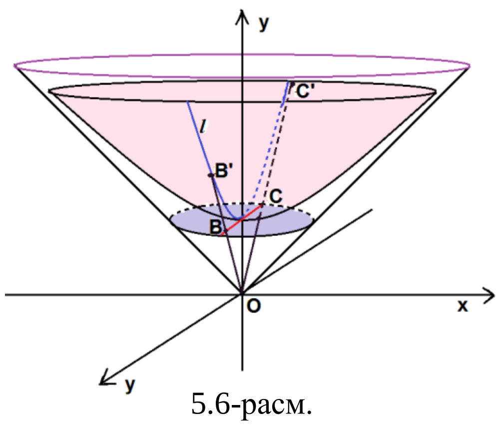
Конус учидан ва гиперболоидни кесувчи текисликларни ўтказамиз. Кесимда гипербола ҳосил бўлади. Шунингдек, бу текислик ассимптотик конусни икки ясовчиси бўйича кесиб ўтади. Бу ясовчилар кесимда ҳосил бўлган гипербола учун ассимптота бўлади.

Лобачевский текислигининг “тўғри чизиғи” – деб гиперболоидни конус учидан ўтувчи текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

Бу чизиқ гиперболоид устида ётувчи гипербола бўлади.



5.5-расм.



5.6-расм.

Маълумки, фазода берилган икки текислик ҳар доим бирор тўғри чизиқ (Евклид маъносида) бўйлаб кесишади.

Координаталар системасида π гиперболоид ва α ва β ассимптотик конус учидан ўтувчи текисликлар берилган бўлсин. Ҳар иккала текислик ассимптотик конус учидан ўтганлиги учун, улар албатта бирор l тўғри чизиқ бўйича кесишади. Бу кесишувчи тўғри чизиқ конусга нисбатан 3 ҳил жойлашиши мумкин:

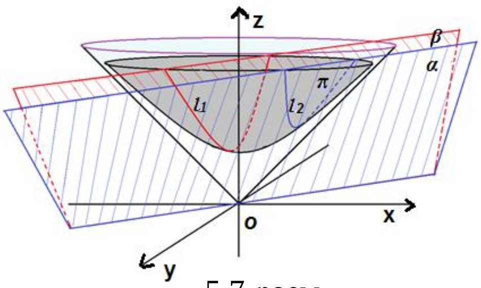
1. Конусдан ташқарида;

2. Конус ичида;

3. Конус устида.

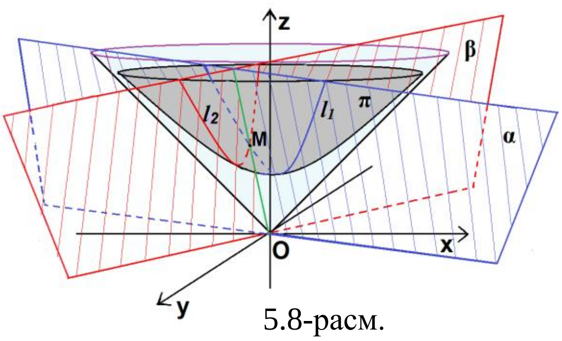
Берилган гиперболоид ва берилган текисликлар кесишишидан кесимида Лобачевский тўғри чизиқлари (яъни гиперболалар) ҳосил бўлади.

Берилган икки текислик гипербилоиддан ташқарида ва ассимптотик конуснинг учи орқали ўтувчи m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) бўйлаб кесишсин. Бу текисликлар гиперболоиддан ташқарида кесишганлиги учун бу икки текислик гиперболоид устида умумий нуқтага эга эмас. Шунинг учун текисликлар ва гиперболоид кесишишидан кесимида ҳосил бўлган Лобачевский тўғри чизиқлари умумий нуқтага эга бўлмайди. Умумий нуқтага эга бўлмаган тўғри чизиқлар кесишмайдиган тўғри чизиқлар деб аталади. (5.7-расм).



5.7-расм.

Берилган икки текислик гиперболоиднинг ичидан ва ассимптотик конус учи орқали ўтувчи m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) бўйлаб кесишсин. У ҳолда, бу икки текислик гиперболоид устида умумий нуқтага эга бўлади. Гиперболоид ва текисликлар кесишишидан кесимида ҳосил бўлган Лобачевский тўғри чизиқлари ҳам умумий нуқтага эга бўлади. Умумий нуқтага эга бўлган Лобачевский тўғри чизиқлари кесишадиган тўғри чизиқлар деб аталади (5.8-расм).

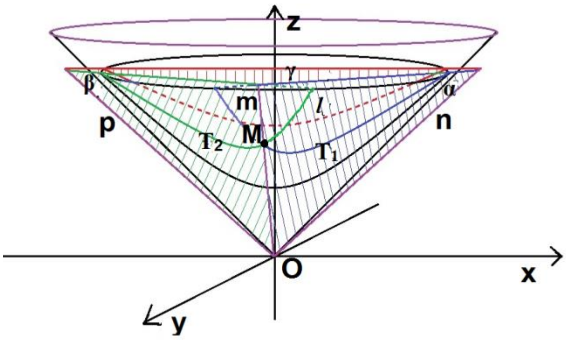


5.8-расм.

Энди гиперболоид устида киритилган “нуқта” ва “тўғри чизиқ” тушунчалари учун Лобачевский аксиомасининг бажарилишини кўрсатамиз.

Бизга юқоридаги гиперболоид ва α, β, γ учта ассимптотик конус учидан ўтувчи текисликлар берилган бўлсин. Бу учта текислик ўзаро кесишишидан учёқ ҳосил бўлади. Текисликлар кесишишидан ҳосил бўлган $\alpha \cap \beta = m$, $\alpha \cap \gamma = n$ ва $\beta \cap \gamma = p$ тўғри чизиқлар (Евклид маъносида) учёқнинг қирралади бўлсин. Ҳар учала текислик ҳам ассимптотик конуснинг учи орқали ўтганлиги учун учёқнинг учи ҳам ассимптотик конуснинг учида ётади.

Бу учёқнинг m қирраси гиперболоид ичида, қолган n ва p қирралари ассимптотик конусдан ташқарида ётсин. У ҳолда, учёқнинг m қирраси гиперболоид устида M нуқтани чизади. n ва p қирралари орқали ўтувчи γ текислик гиперболоид билан кесишиши натижасида кесимида l тўғри чизиқ ҳосил бўлади. m ва n қирралари орқали ўтувчи α текислик ва m ва p қирралари орқали ўтувчи β текисликлар гиперболоид билан кесишиши натижасида кесимида мос равишда T_1 ва T_2 тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Бу икки тўғри чизиқ M нуқтада кесишади ва l тўғри чизиқ билан кесишмайди (5.9-расм).



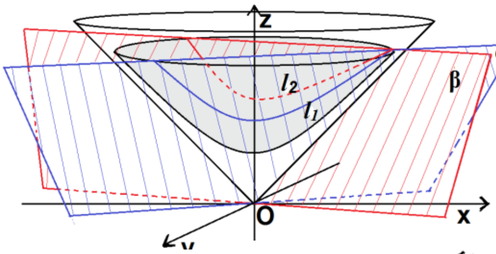
5.9-расм.

Демак, M нуқтадан ўтувчи ва l тўғри чизиқ билан кесишмайдиган иккита T_1 ва T_2 тўғри чизиқлар бор экан.

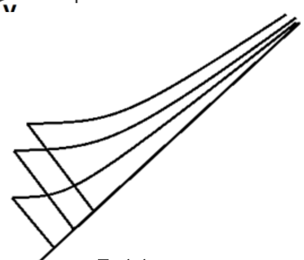
Бу текислик учун Лобачевский аксиомаси бажарилади.

Энди гиперболоид устидаги параллел тўғри чизиқларни кўрсатамиз.

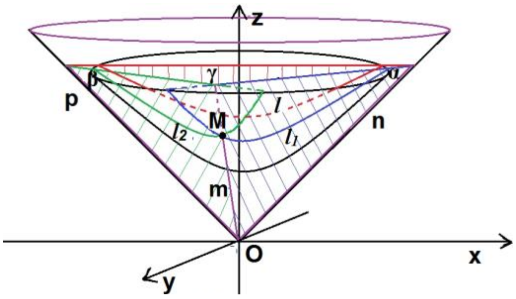
Бизга юқоридаги гиперболоид ҳамда α ва β ассимптотик конус учи орқали ўтувчи текисликлар берилган бўлсин. Бу текисликлар кесишишидан ҳосил бўлган m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) гиперболоиднинг ассимптотик конуси ясовчисида ётсин. Яъни, икки текислик ассимптотик конуснинг ясовчиси бўйлаб кесишсин. У ҳолда, m тўғри чизиқ (Евклид маъносида) текисликлар ва гиперболоид кесишишидан кесимида ҳосил бўлган икки l_1 ва l_2 Лобачевский тўғри чизиқлари умумий ассимптотага эга бўлган гиперболалар шаклида бўлади. Бу икки тўғри чизиқ кесишадиган ҳам кесишмайдиган ҳам тўғри чизиқлар синфига кирмайди. Шунинг учун бу икки тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқлар деб аталади (5.10-расм).



Ассимптотик конусда бирор ясовчини танлаб олайлик. Шу ясовчи орқали ўтувчи тўғри чизиқлар тўпламидан гиперболоид билан кесишувчи текисликларни қарайлик. Бу текисликларнинг ҳар бири гиперболоидни бир Лобачевский тўғри чизиғи бўйлаб кесади. Бу тўғри чизиқлар Лобачевский текислигининг ўзаро параллел тўғри чизиқларини ташкил этади (5.11-расм).


5.11-расм.

Бизга юқоридаги учта текисликлар ўзаро кесишишидан ҳосил бўлган учёқ берилган бўлсин. Бу учёқнинг m қирраси гиперболоид ичида ётсин. У ҳолда, бу m қирра гиперболоид устида M нуқтани ясайди. Қолган икки n ва p қирралари эса гиперболоиднинг ассимптотик конусининг ясовчисида ётсин. У ҳолда, n ва p қирралари орқали ўтувчи γ текислик гиперболоид билан кесишишидан кесимида l тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Шунингдек, m ва n қирралари орқали ўтувчи α текислик ва m ва p қирралари орқали ўтувчи β текисликлар гиперболоид билан кесишиши натижасида кесимда мос равишда l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар ҳосил бўлади. Бу икки тўғри чизиқ M нуқтада ўзаро кесишади ва l тўғри чизиқ билан кесишмайди (5.12-расм).



5.12-расм.

Келтирилган 5.12-расм тўғри чизиқдан ташқарида ётган M нуқтадан унга параллел икки тўғри чизиқ ўтишини кўрсатади. Бу эса Лобачевский аксиомасининг бажарилишини, яъни, бу текисликнинг гиперболоид устидаги талқинини кўрсатади.

Сирт ички ва ташқи геометрияси

Ушбу амалий машғулот материалида сиртнинг ички ва ташқи геометриясига доир назарий билимларни мустаҳкамлаш учун баъзи бир масалаларнинг ечилиши ва мустақил ечиш учун масалалар берилган.

Мисол 1. Сферанинг уринма тенгламасини тузинг.

Ечиш. Сферанинг сферик координаталардаги тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади

$$\vec{r} \ = \ R(\cos\varphi\cos\theta\,,\ \sin\varphi\cos\theta\,,\ \sin\theta).$$

Хусусий ҳосилаларини ҳисоблаймиз

$\vec{r}_\varphi = R(-\sin\varphi\cos\theta\,,\ \cos\varphi\cos\theta\,, 0);$

$\vec{r}_\theta = \ R(-\cos\varphi\sin\theta\,, -\sin\varphi\sin\theta\,,\ \cos\theta).$

Сферанинг ихтиёрий M_0 нуқтасидаги нормал векторини аниқлаймиз:

$$\overrightarrow{N_0} = \left[\overrightarrow{r_\varphi}\,\overrightarrow{r_\theta}\right] = \vec{R}r_0 \Rightarrow \vec{N} = \overrightarrow{r_0} -$$

– бунда сферанинг нормал вектори унинг радиус вектори билан устма-уст тушади. Сферанинг M_0 нуқтадаги уринма текислиги қуйидаги тенгламага эга бўлади:

$$\left(\overrightarrow{N_0}, \vec{r} \ - \ \overrightarrow{r_0}\right) = 0 \ \Rightarrow \ (\overrightarrow{r_0}\,,\ \vec{r} \ - \ \overrightarrow{r_0}) = 0.$$

Сфера тенгламаси $\left(\overrightarrow{r_0^2} \ = \ R^2\right)$ ни эътиборга олсак, уринма текислигининг тенгламасини ҳосил қиламиз:

$(\vec{r}, \overrightarrow{r_0}) = R^2.$

Мисол 2. Коник сиртнинг биринчи квадратик формасини топинг

$$x = av\cos u\,;\ y = bv\sin u\,;\ z = v.$$

Ечиш.

$$x_u = -av\sin u\,;\ y_u = bv\cos u\,;\ z_u = 0;\ x_v = a\cos u\,;$$
$$y_v = b\sin u\,;\ z_v = 1;$$

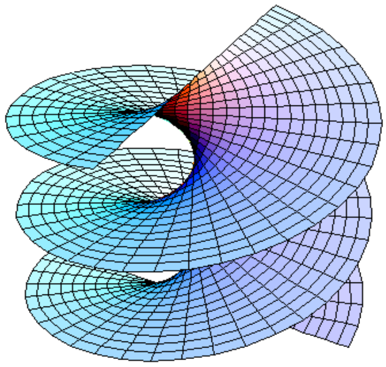
$$E = a^2v^2\sin^2 u + b^2v^2\cos^2 u\,;\ F = -a^2v\sin u\cos u + b^2v\sin u\cos u\,;$$
$$G = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1,$$

$$ds^2 = (a^2v^2\sin^2 u + b^2v^2\cos^2 u)du^2 + 2(-a^2v\sin u\cos u +$$
$$+b^2v\sin u\cos u)dudv + (a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + 1)dv^2.$$

Мустаҳкамлаш учун савол ва масалалар

1. Геликоиднинг биринчи квадратик формасини тузинг (5.1-расм)

$$\vec{r} = \vec{e}(\varphi)t \ + \ a\vec{\varphi}k.$$

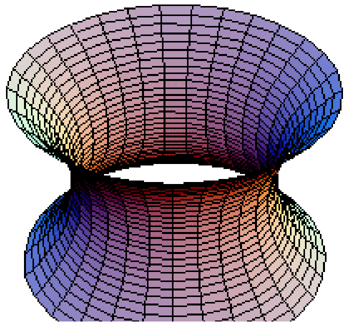


5.1-расм

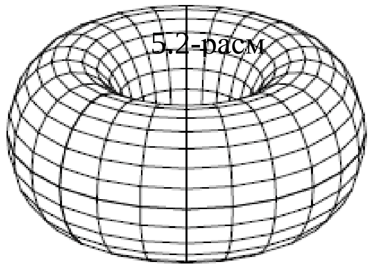
2. Катеноиднинг биринчи квадратик формасини тузинг (5.2-расм)

$$\vec{r} = a\vec{e}(\varphi)\operatorname{ch}\frac{t}{a} + kt.$$

3. Теоремани исботланг: Евклид текислигининг геодезик чизиқлари



5.2-расм



5.3-расм

фақат ва фақат тўғри чизиқлар бўлади.

4. Теоремани исботланг: Айланма цилиндрнинг геодезик чизиқлари фақат ва фақат винт чизиқлари бўлади.

5. Параметрик тенгламалари билан берилган тор сиртининг юзасини ҳисобланг (5.3-расм)

$$\vec{r} = \big((a + b\cos v)\cos u\,, (a + b\cos v)\sin u\,, b\sin v\big), 0 \le u, v \le 2\pi.$$

6. Геликоиднинг иккинчи квадратик формасини, бош эгриликларини, ўрта ва Гаусс эгриликларини ҳисобланг

$$\vec{r} = (t\cos\varphi\,, t\sin\varphi\,, a\varphi).$$

7. Бир паллали айланма гиперболоидининг Гаусс эгрилиги манфий эканлигини исботланг.

8. Сфера ўзгармас мусбат Гаусс эгрилиги эга сиртга мисол бўлишини исботланг.

9. Псевдосферанинг Гаусс эгрилиги манфий ва ўзгармас эканлигини исботланг.

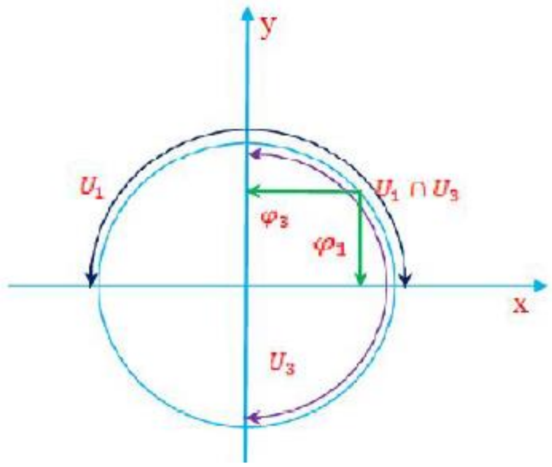
Кўпхилликлар геометрияси

Мисол 1. Бизга R^2 да $S^1 = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$ тўплам берилган бўлсин. S^1 ни ушбу

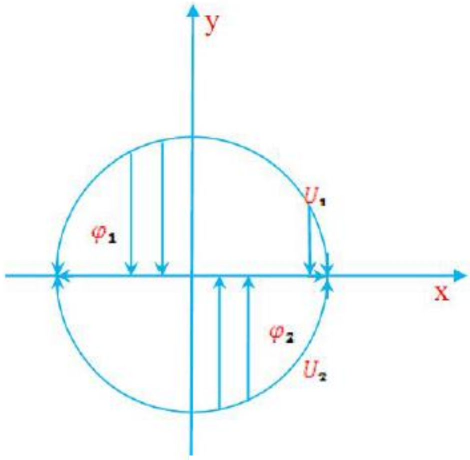
$U_1 = \{(x,y) \in S^1: y > 0\}$, $\quad U_2 = \{$

$U_3 = \{(x,y) \in S^1: x > 0\}$, $\quad U_4 = \{$

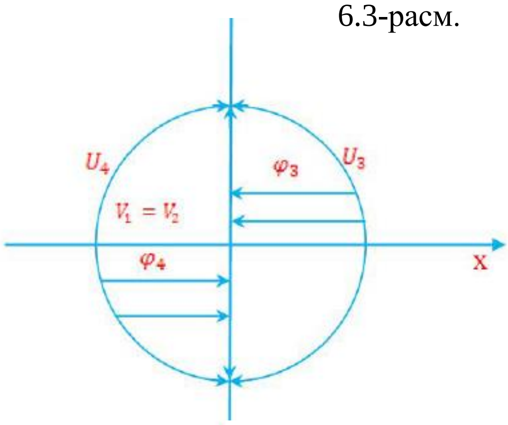
4 та харитадан иборат атлас билан қоплаймиз (6.1, 6.2-расмлар).



6.3-расм.



6.1-расм.



6.2-расм.

Кўриниб турибдики, ҳақиқий R^1 тўғри чизиқда уларга мос келувчи V_1, V_2, V_3, V_4 соҳалар устма-уст тушади ва $(-1,1)$ очиқ оралиққа тенг бўлади. Энди φ_1 ва φ_2 гомеоморфизмларни айлананинг абсциссалар ўқига проекцияловчи акслантириш сифатида, яъни, $\varphi_1(x,y) = \varphi_2(x,y) = x$ тенглик билан аниқлаймиз, φ_3, φ_4 гомеоморфизмларни эса айланани ординаталар ўқига проекциялар сифатида аниқлаймиз $\varphi_3(x,y) = \varphi_4(x,y) = y$. Бу φ_k $(k = \overline{1,4})$ акслантиришларни гомеоморфизм эканлигини кўрсатиш учун, уларнинг тескари акслантиришларини ошкор кўринишда тасвирлаб, уларни узлуксиз эканлигини кўрсатиш етарли. Бизга маълимки, φ_k $(k = \overline{1,4})$ ларнинг аниқланишига кўра бу акслантиришлар мос равишда U_k $(k = \overline{1,4})$ тўпламларни $V_k = (-1;1)(k = \overline{1,4})$ тўпламларга узликсиз ва бир қийматли акслантиради. Шунинг учун, қуйидагича φ_k^{-1} $(k = \overline{1,4})$ узликсиз акслантиришлар мавжуд

$$\begin{cases} \varphi_1^{-1}(x) = \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \in S^1; \\ \varphi_2^{-1}(x) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right) \in S^1; \\ \varphi_3^{-1}(y) = \left(\sqrt{1-y^2}, y\right) \in S^1; \\ \varphi_4^{-1}(y) = \left(-\sqrt{1-y^2}, y\right) \in S^1 \end{cases}$$

Шундай қилиб, бу айланада ҳар бири битта координаталардан иборат

$$x_1 = \varphi_1(x,y) = x, \qquad x_2 = \varphi_2(x,y) = x,$$

$$x_3 = \varphi_3(x, y) = y, \qquad x_4 = \varphi_4(x, y) = y$$

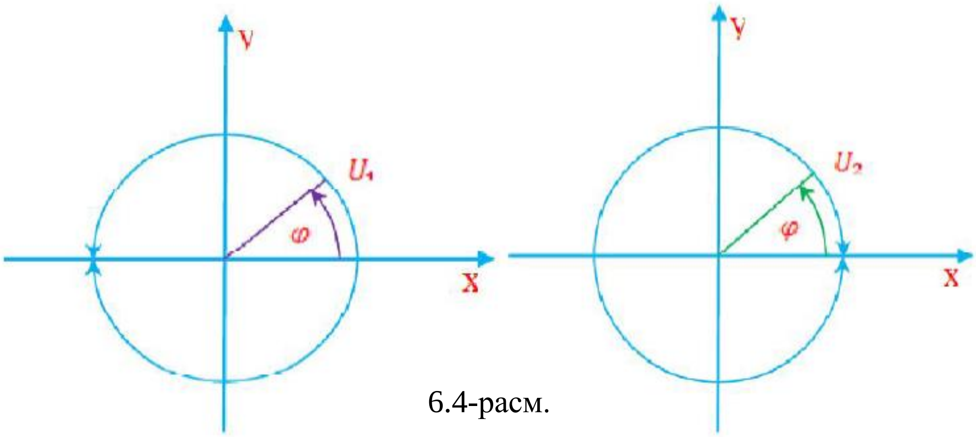
тўртта локал координаталар системаси ҳосил бўлади. Баъзи нуқталар бирданига иккита локал координаталар системаси билан таъминланади. Масалан, $U_1 \cap U_3$ кесишмадаги P нуқталар учун иккита $x_1(P)$ ва $x_2(P)$ координаталар аниқланган (6.3-расм). Айланада хариталар атласини киритишнинг бошқа усуллари ҳам мавжуд [8].

Бизга маълумки, (r, φ) қутб координаталар системасида айлана тенгламаси $r = 1$ тенглик билан аниқланади. Шуни айтиш мумкинки, тенгликдаги қутб координаталар, координаталар системаси бўла олмайди.

Шунинг учун, S^1 айланада қуйидагича иккита

$U_1 = \{(x, y) \in S^1 : x \neq 1\}$ ва $U_2 = \{(x, y) \in S^1 : x = 1\}$

хариталарни киритамиз (6.4-расм).



6.4-расм.

Фараз қилайлик, $\varphi_1(P) = \varphi_1(x, P)$ ни $(-\pi, \pi)$ оралиқда ётувчи φ бурчак қийматига тенг $\varphi_2(P) = \varphi_2(x, P)$ ни $(0{,}2\pi)$ оралиқда ётувчи φ бурчак қийматига деб оламиз, яъни, $V_1 = (-\pi, \pi)$, $V_2 = (0{,}2\pi)$. Кўриниб турибдики, айлананинг юқори ярим қисмидаги нуқталари учун $\varphi_1 = \varphi_1(P)$ ва $\varphi_2 = \varphi_2(P)$ локал координаталар устма-уст тушади, аммо айлананинг қуйи ярим қисмидаги нуқталари учун устма-уст тушмайди, яъни,

$y > 0$ да $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$,

$y < 0$ да $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) - 2\pi$,

бўлади (расмга қаранг).

Мисол 2. R^k $(k = 1{,}2)$ сон фазоси ажралувчан ва саноқли базага эга бўлади. (U, φ) k-ўлчовли картани қараш мумкин, бу ерда $U = R^k$. $\varphi - R^k$ фазони айнан алмаштириш бўлсин. У ҳолда, R^k k-ўлчовли кўпхилликдан иборат бўлади.

Худди шундай, A^k аффин фазо ва E^k евклид фазолар k-ўлчовли кўпхилликлар бўлишига ишонч ҳосил қиламиз. P_k проектив фазо ҳам k-ўлчовли кўпхиллилик бўлишини исботлаш мумкин.

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни.

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган холда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мустақил таълим мавзулари:

1.Экологик инновациялар ҳақида умумий тушунча.

2. Атроф муҳитни мухофаза қилиш ва табиатдан оқилона фойдаланишда инновацион технологиялар ва экологик новациялардан фойдаланиш.

3. “Яшил” технологиялар ва экологик таълим.

4. Экотизимларни баркарорлигини сақлашда инновацион экологик таълимнинг ўрни.

5.Экологиянинг предмети ва вазифаларини экологик таълимда ёритилиши.

6.Экотизимлар ҳақида тушунча ва уннг экологик таълимдаги ахамияти.

. 7. Экологик таълим ва тарбия орқали билиш керак бўлган асосий экологик омиллар.

8.Экологик таълим тарбиянинг методологик асослари ва ахамияти.

. 9. Барқарор тараққиёти учун таълим.

10. Экологик маданият.

11.Экологик таълимнинг асосий йўналишлари ва принциплари.

12. Узлуксиз экологик таълим.

13. Экологик тарбия ва уни шакиллантиришда жамоат ташкилотларининг роли.

14. Экологик таълимда атроф мухитни мухофаза қилиш ва табиатдан фойдаланишнинг иқтисодий механизмларини ўрни.

15. Экологик таълим ва тарбиянинг шакилланиш ва ривожланиш таърихи.

16. Экологик хуқуқ ва унинг экологик таълим тизимидаги ўрни.

17. Экологик таълимда жамоатчилик ва оммавий ахборот воситаларини роли.

18. Экологик таълим ва тарбиянинг долзарб масалалари.

19. XX1асирда экологик таълимнинг роли ва ўрни.

20. Экология ва бугунги кун таълимидаги экологик муаммолар.

21. Экологик таълим ва тарбияда инновацион педогогик технологияларнинг роли.

22. Қишлоқ аҳолисини экологик маданиятини оширишда ўз-ўзини бошқариш органларини роли.

23. Табиий ресурсларидан оқилона фойдаланишда экологик қонунчиликнинг ахамияти.

24. Талабаларнинг экологик маданиятини оширишда Ўзбекистон Ёшлар иттифоқининг роли.

VII. ГЛОССАРИЙ

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б.

2. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-жилд. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 592 б.

3. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-жилд. Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 507 б.

4. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.

5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тикланишдан – миллий юксалиш сари. 4-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2020. – 400 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.

7. Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда қабул қилинган “Таълим тўғрисида”ги ЎРҚ-637-сонли Қонуни.

8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.

9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.

10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз

малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонлиФармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонлиФармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2020 йил 25 январдаги Олий Мажлисга Мурожаатномаси.

17. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрь “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарори.

18. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 30-сентябрдаги “2030 йилгача бўлган даврда Ўзбекистон Республикасининг Атроф муҳитни муҳофаза қилиш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5863-сонли Фармони.

19. Ўзбекистон Республикасининг “Давлат кадастрлари тўғрисида”ги қонуни. // Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлис Ахборотномаси. – 2001. – № 1–2. – 18-модда.

20. Ўзбекистон Республикасининг “Ҳайвонот дунёсини муҳофаза қилиш ва ундан фойдаланиш тўғрисида”ги қонуни. // Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлис Ахборотномаси. -1998. -№1. -14-модда.

21. Ўзбекистон Республикасининг “Суғурта фаолияти тўғрисида”ги қонуни. // Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлис Ахборотномаси. - 2002. № 4-5. - 68-модда.

22. Ўзбекистон Республикасининг “Экологик назорат тўғрисида»ги қонуни// Ўзбекистон Республикаси қонун ҳужжатлари тўплами, 2013 й., 52-сон, 688-модда.

Ш. Махсус адабиётлар

23. By Roland W. Scholz. Environmental Literacy in Science and Society: From Knowledge to Decisions. Cambridge University. Press: New York, USA, 2011; Hardback, 631 pp; ISBN 978-0-521-19271-2; Paperback, ISBN 978-0-521-18333-8.

24. Calado, F.M.; Scharfenberg, F.-J.; Bogner, F.X. To What Extent do Biology Textbooks Contribute to Scientific Literacy? Criteria for Analysing Science-Technology-Society-Environment Issues. Educ. Sci. Press: New York, USA, 2015.

25. Dafius M. Dziuda/ Data mining for genomics and proteomics. Canada, 2010. ps-306.

26. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.

27. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010, 204.
28. H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.
29. H.Q. Mitchell, MarileniMalkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.
30. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.
31. Martin Kranert, Klaus Cord-Landwehr (Hrsg.) Einführung in die Abfallwirtschaft. 4., vollständig aktualisierte und erweiterte Auflage Mit 297 Abbildungen und 131 Tabellen. Germany, 2010.
32. Rediscovering Biology Online Textbook. Unit 2 Proteins and Proteomics. 1997-2006.
33. Sattorov Z.M. Ecologiya. – T.: Sano-standart, 2018. – 362 b.
34. Sattorov Z.M. Qurilishecologiyasi. – T.: Sano-standart, 2017. – 364 b.
35. Stevanovic, M. Digital media in education system-review of international practice. Models of creative teaching. R&S, Tuzla. Available from http://infoz.ffzg.hrINFuture. New York, USA, 2011.
36. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.
37. Systems Thinking: Managing Chaos and Complexity, Jamshid Gharajedaghi, Butterworth Heinemann, Oxford, 1999.
38. Twyman RM (2004). Principles of Proteomics (Advanced Text Series). Oxford, UK: BIOS Scientific Publishers. ISBN 1-85996-273-4.
39. W. Dubitzky, M. Granzow, D/ Berrar/Fundamentals of data mining in genomics and proteomics. New York, USA, 2007, ph -275.
40. Yormatova D. Sanoat ekologiyasi. – T.: 2007. – 256 b.
41. А.Э.Эргашев. Ҳозирги замоннинг экологик муаммолари ва табиат муҳофазаси. Тошкент 2012 й. 403 б.
42. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.
43. Гулобод Қудратуллоҳ қизи, Р.Ишмуҳамедов, М.Нормуҳаммедова. Анъанавий ва ноанъанавий таълим. – Самарқанд: “Имом Бухорий халқаро илмий-тадқиқот маркази” нашриёти, 2019. 312 б.
44. Ибраймов А.Е. Масофавий ўқитишнинг дидактик тизими. методик қўлланма/ тузувчи. А.Е.Ибраймов. – Тошкент: “Lesson press”, 2020. 112 бет.
45. Ишмуҳамедов Р.Ж., М.Мирсолиева. Ўқув жараёнида инновацион таълим технологиялари. – Т.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 б.
46. Муслимов Н.Ава бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: “Sano-standart”, 2015. – 208 б.
47. Образование в цифровую эпоху: монография / Н. Ю. Игнатова; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с.

48. Олийтаълимтизиминирақамлиавлодгамослаштиришконцепцияси. Европа ИттифоқиЭрасмус+ дастурининг кўмагида. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

49. Пачаури Р.К., Мейер Л.А. Иқлим ўзгариши, 2014 йил. Иқлим ўзгариши бўйича Ҳукуматлараро экспертлар гуруҳининг умумлаштирилган маърузаси. Женева, Швейцария, 2015 йил, 163 б.

50. Смоляр, И. М. Экологические основы архитектурного проектирования: учебное пособие / И. М. Смоляр, Е. М. Микулина, Н. Г. Благовидова. – Москва : Академия, 2010. – 157 с.

51. Современные образовательные технологии: педагогика и психология: монография. Книга 16 / О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бугакова и др. – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с.

52. Усмонов Б.Ш., Ҳабибуллаев Р.А. Олий ўқув юртларида ўқув жараёнини кредит-модуль тизимида ташкил қилиш.–Т.: “ТКТИ” нашриёти, 2019.

53. Шадиметов Ю. Ш. Экология. Учебник для вузов. 2016 й. 416 с.

54. Шодиметов Ю.Ш. Ижтимоий экология. Дарслик. Олий ўқув юртлари учун. (Тўлдирилган ва қайта ишланган.) 2016 й. 556 б.

55. Эгамбердиев Р., Рахимова Т., Аллабердиев Р. Экология. Тошкент. Университет нашриёти. 2019 й. 254 б.

IV. Интернет сайтлар

56. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

57. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси

58. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази

59. http://ziyonet.uz – Таълим портали ZiyoNET

60. http://natlib.uz–Алишер Навоий номидаги Ўзбекистон Миллий кутубхонаси

61. www.uznature.uz

62. www.uzgeolcom.uz

63. www.ygk.uz

64. www.ecovestnik.ru