O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

OLIY TA’LIM TIZIMI PEDAGOG VA RAHBAR KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISHNI TASHKIL ETISH BOSH ILMIY - METODIK MARKAZI

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARINI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI

“O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi” moduli bo‘yicha

O‘QUV –USLUBIY MAJMUA

Toshkent — 2021

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining 2020 yil 7 dekabrdagi 648-sonli buyrug‘i bilan tasdoiqlangan o‘quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi: V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti katta ilmiy xodimi, PhD O.N.Hakimov.

Taqrizchilar: Matematika instituti direktori o‘rinbosari, f.-m.f.d., professor O‘.A.Roziqov.
Matematika instituti “Algebra va uning tatbiqlari” laboratoriyasi mudiri f.-m.f.d. U.U.Jamilov.

O‘quv -uslubiy majmua O‘zbekiston milliy universiteti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan (2020 yil 24 dekabrdagi №3-sonli baènnomasi)

MUNDARIJA:

I. ISHCHI DASTUR

Kirish

Dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son, 2019 yil 9 iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-son, 2019 yil 27 avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-son, 2019 yil 8 oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-son, 2020 yil 7 maydagi “matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4708-son li Farmonlari hamda O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabrdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg‘or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o‘zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko‘nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta’lim sohasi bo‘yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo‘yiladigan umumiy malaka talablari va o‘quv rejalari asosida shakllantirilgan bo‘lib, uning mazmuni kredit modul tizimi va o‘quv jarayonini tashkil etish, ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish, pedagogning kasbiy professionalligini oshirish, ta’lim jarayoniga raqamli texnologiyalarni joriy etish, maxsus maqsadlarga yo‘naltirilgan ingliz tili, mutaxassislik fanlar negizida ilmiy va amaliy tadqiqotlar, o‘quv jarayonini tashkil etishning zamonaviy uslublari bo‘yicha so‘nggi yutuqlar, pedagogning kreativ kompetentligini rivojlantirish, ta’lim jarayonlarini raqamli texnologiyalar asosida individuallashtirish, masofaviy ta’lim xizmatlarini rivojlantirish, vebinar, onlayn, «blended learning», «flipped classroom» texnologiyalarini amaliyotga keng qo‘llash bo‘yicha tegishli bilim, ko‘nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo‘naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishining o‘ziga xos xususiyatlari hamda dolzarb masalalaridan kelib chiqqan holda dasturda tinglovchilarning mutaxassislik fanlar doirasidagi bilim, ko‘nikma, malaka hamda kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar takomillashtirilishi mumkin.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi: o‘lchovlar nazariyasi, integrallar nazariyasi va ularning turdosh sohalarda qo‘llanishi borasida oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarining bilim, ko‘nikma va kompetensiyalarini oshirish.

Modulning vazifalari:

- abstrakt to‘plamlardagi o‘lchovlar haqida umumiy tushunchalar, turli fazolarda ba’zi muhim o‘lchovlar, o‘lchovsiz to‘plam va o‘lchovlar haqidagi qo‘shimcha ma’lumotlar bilan tinglovchilarni tanishtirish va ularning amaliy bilimlarini shakllantirish.
- integrallar nazariyasiga kirish orqali o‘lchovli funksiyalar bilan tanishish, ularning muhim xossalarini o‘rganish va Lebeg integrali tushunchasini kiritib amaliy masalalarda ularni qo‘llashga doir ko‘nikmalarni hosil qilish.
- invariant o‘lchovlar, o‘lchovlar nazariyasi va integrallar nazariyasining matematik biologiya hamda statistik fizika masalalarida qo‘llanishini o‘rganish orqali oliy ta’lim pedagog kadrlarini matematikaning zamonaviy yutuqlari bilan tanishtirishdan iborat.

Modul bo‘yicha tinglovchilarning bilimi, ko‘nikmasi, malakasi va kompetensiyalariga qo‘yiladigan talablar

Modulni o‘zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida:

Tinglovchi:

- integral va o‘lchov tushunchalarini ***bilishi*** kerak.
- o‘lchovlar nazariyasidan matematika, fizika va biologiya masalalarida keng foydalanish ***ko‘nikmalariga*** ega bo‘lishi lozim.
- o‘lchovlar nazariyasi va uning tatbiqini turli fazolarda qo‘llay olish ***malakasiga*** ega bo‘lishi kerak.
- matematikani o‘qitishda foydalaniladigan zamonaviy (matlab, mathcad, maple, GeoGebra va boshqalar) matematik paketlarini o‘quv jarayoniga tatbiq etish ***kompetensiyalariga*** ega bo‘lishi lozim.

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

- Modulni o‘qitish ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.
- Modulni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va axborot-kommunikatsiya texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:
- ma’ruza darslarida zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida prezentatsion va elektron-didaktik texnologiyalardan;
- o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda texnik vositalardan, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari, aqliy hujum, guruhli fikrlash, kichik guruhlar bilan ishlash, kollokvium o‘tkazish, va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

Modulning o‘quv rejadagi boshqa modullar bilan bog‘liqligi va uzviyligi

“O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi” modulining mazmuni o‘quv rejadagi “Zamonaviy geometriya”, “Matematikaning sohalarga tatbiqlari” va “Matematikada informatsion texnologiyalar” o‘quv modullari bilan uzviy bog‘langan bo‘lib, pedagoglarning ta’lim jarayonida ushbu modullardagi mavzularni tushunishiga yordam beradi hamda ularning kasbiy pedagogik tayyorgarlik darajasi va ilmiy salohiyatini oshirishga xizmat qiladi.

Modulning oliy ta’limdagi o‘rni

Modulni o‘zlashtirish orqali tinglovchilar ta’lim jarayonida matematik analiz, haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va funksional analiz kabi fanlarda talabalarga darsni qiziqarli va mazmunli tarzda o‘tish, shuningdek, o‘z bilimlarini ilmiy faoliyatga yo‘naltirishga doir kasbiy kompetentlikka ega bo‘ladilar.

“O‘lchov nazariyasi va uning qo‘llanishi” moduli bo‘yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Auditoriya o‘quv yuklamasi		
		Jami	jumladan	
			Nazariy	Amaiy mashg‘ulot
1.	O‘lchov tushunchasi va xossalari	8	4	4
2.	O‘lchovli funksiyalar	6	2	4
3.	Invariant o‘lchovlar	6	2	4
	Jami:	**20**	**8**	**12**

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-mavzu. O‘lchov tushunchasi va xossalari (4 soat).

1.1. O‘lchov tushunchasi va xossalari.
1.2. σ – additivlik.
1.3. Lebeg o‘lchovlari. Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar sinfi.
1.4. O‘lchovsiz to‘plamlar. O‘lchovlarning ko‘paytmasi.
1.5. Biri yo‘q yarim halqada aniqlangan o‘lchovlarning Labeg bo‘yicha davomi.
1.6. O‘lchov va o‘lchovli to‘plamlar bo‘yicha qo‘shimcha ma’lumotlar.

2-mavzu. O‘lchovli funksiyalar (2 soat).

2.1. O‘lchovli funksiyalar.
2.2. Turli fazolar va ular ustidagi o‘lchovlarga misollar.
2.3. Integrallar.
2.4. Ehtimollik o‘lchovlar va ularning qo‘llanishi.
2.5. Deyarli yaqinlashish.
2.6. O‘lchov bo‘yicha yaqinlashish.
2.7. Sodda funksiya.

3-mavzu. Invariant o‘lchovlar (2 soat).

3.1. Invariant o‘lchovlar.
3.2. Ergodik teoremalar.
3.3. Gibbs o‘lchovlari (fizikada qo‘llanishi).

3.4. Biologik dinamik sitemalarni o‘rganishda o‘lchovlar nazariyasi.

3.5. Noarximed fazolarda o‘lchovlar va ularning tatbiqlari.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

O‘tilgan mavzularni chuqur tahlil qilish va o‘zlashtirilgan bilimlarni mustahkamlash uchun tashkil etiladigan amaliy mashg‘ulotlar mavzu doirasida berilgan tushunchalarga misollar keltirish, ba’zi muhim natijalarni tinglovchilar bilan muhokama tarzida isbotlash, mavzu doirasidagi ilmiy yangiliklarni tinglovchilarga oson usulda yetkazishga mo‘ljallangan.

1-amaliy mashg‘ulot. O‘lchov tushunchasi va xossalari (4 soat).

Yarim halqalarda berilgan to‘plam funksiyalarining o‘lchov bo‘lishini tekshirish, yarim halqadagi o‘lchovni davom ettirish, o‘lchovning muhim xossalarini isbotlash, sanoqli additiv o‘lchovlarga misol keltirish, shuningdek, o‘lchovlar bo‘yicha qo‘shimcha ma’lumotlar bilan tanishish.

2-amaliy mashg‘ulot. O‘lchovli funksiyalar (4 soat).

O‘lchovli va o‘lchovsiz funksiyalarga misollar keltirish, o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligini deyarli va o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishga tekshirish, o‘lchovli funksiyaga tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligini qurish, o‘lchovli funksiyalarning Lebeg integralini hisoblash, Lebeg va Riman integrallarini taqqoslash.

3-amaliy mashg‘ulot. Invariant o‘lchovlar (4 soat).

O‘lchovlarning invariantligini tekshirish, noergodik dinamik sistemaga oid bir ilmiy maqola tahlili, Gibbs o‘lchovlari va noarhimed o‘lchovlari bilan ishlash.

O‘QITISH SHAKLLARI

- Mazkur modul bo‘yicha quyidagi o‘qitish shakllaridan foydalaniladi:
- ma’ruzalar, amaliy mashg‘ulotlar (ma’lumotlar va texnologiyalarni anglab olish, aqliy qiziqishni rivojlantirish, nazariy bilimlarni mustahkamlash);
- davra suhbatlari (ko‘rilayotgan loyiha yechimlari bo‘yicha taklif berish qobiliyatini oshirish, eshitish, idrok qilish va mantiqiy xulosalar chiqarish);
- bahs va munozaralar (loyihalar yechimi bo‘yicha dalillar va asosli argumentlarni taqdim qilish, eshitish va muammolar yechimini topish qobiliyatini rivojlantirish).

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTREFAOL TA’LIM METODLARI

“Keys-stadi” metodi

“Keys-stadi”— inglizcha so‘z bo‘lib, (“case” – aniq vaziyat, hodisa, “stadi” – o‘rganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni o‘rganish, tahlil qilish asosida o‘qitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Mazkur metod dastlab 1921 yil Garvard universitetida amaliy vaziyatlardan iqtisodiy boshqaruv fanlarini o‘rganishda foydalanish tartibida qo‘llanilgan. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin. Keys harakatlari o‘z ichiga quyidagilarni qamrab oladi: Kim (Who), Qachon (When), Qayerda (Where), Nima uchun (Why), Qanday/ Qanaqa (How), Nima-natija (What).

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari

Ish bosqichlari	Faoliyat shakli va mazmuni
1-bosqich: Keys va uning axborot ta’minoti bilan tanishtirish	✓ yakka tartibdagi audio-vizual ish; ✓ keys bilan tanishish(matnli, audio yoki media shaklda); ✓ axborotni umumlashtirish; ✓ axborot tahlili; ✓ muammolarni aniqlash
2-bosqich:Keysni aniqlashtirish va o‘quv topshirig‘ni belgilash	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muammolarni dolzarblik iyerarxiyasini aniqlash; ✓ asosiy muammoli vaziyatni belgilash
3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali o‘quv topshirig‘ining yechimini izlash, hal etish yo‘llarini ishlab chiqish	✓ individual va guruhda ishlash; ✓ muqobil yechim yo‘llarini ishlab chiqish; ✓ har bir yechimning imkoniyatlari va to‘siqlarni tahlil qilish; ✓ muqobil yechimlarni tanlash
4-bosqich: Keys yechimini yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.	✓ yakka va guruhda ishlash; ✓ muqobil variantlarni amalda qo‘llash imkoniyatlarini asoslash; ✓ ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash; ✓ yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Assisment” metodi

Metodning maqsadi: mazkur metod ta’lim oluvchilarning bilim darajasini baholash, nazorat qilish, o‘zlashtirish ko‘rsatkichi va amaliy ko‘nikmalarini tekshirishga yo‘naltirilgan. Mazkur texnika orqali ta’lim oluvchilarning bilish faoliyati turli yo‘nalishlar (test, amaliy ko‘nikmalar, muammoli vaziyatlar mashqi, qiyosiy tahlil, simptomlarni aniqlash) bo‘yicha tashhis qilinadi va baholanadi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

“Assisment”lardan ma’ruza mashg‘ulotlarida talabalarning yoki qatnashchilarning mavjud bilim darajasini o‘rganishda, yangi ma’lumotlarni bayon qilishda, seminar, amaliy mashg‘ulotlarda esa mavzu yoki ma’lumotlarni o‘zlashtirish darajasini baholash, shuningdek, o‘z-o‘zini baholash maqsadida individual shaklda foydalanish tavsiya etiladi. Shuningdek, o‘qituvchining ijodiy yondashuvi hamda o‘quv maqsadlaridan kelib chiqib, assesmentga qo‘shimcha topshiriqlarni kiritish mumkin.

Har bir katakdagi to‘g‘ri javob 5 ball yoki 1-5 balgacha baholanishi mumkin.

Test

Yangilik — bu:

A) Xabar

V) Ma’lumot

S) Dalil

D) Ob-havo ma’lumoti

Qiyosiy tahlil

O‘zbekiston raqamli televideniyesi va an’anaviy televideniyeni qiyosiy taxlil qiling.

Tushuncha tahlili

Yangiliklarni izohlang...

Amaliy ko‘nikma

“O’zbekiston” telekanali informatsion dasturlarida yangiliklar foizini aniqlang

Venn Diagrammasi metodi

Metodning maqsadi: Bu metod grafik tasvir orqali o‘qitishni tashkil etish shakli bo‘lib, u ikkita o‘zaro kesishgan aylana tasviri orqali ifodalanadi. Mazkur metod turli tushunchalar, asoslar, tasavurlarning analiz va sintezini ikki aspekt orqali ko‘rib chiqish, ularning umumiy va farqlovchi jihatlarini aniqlash, taqqoslash imkonini beradi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar ikki kishidan iborat juftliklarga birlashtiriladilar va ularga ko‘rib chiqilayotgan tushuncha yoki asosning o‘ziga xos, farqli jihatlarini (yoki aksi) doiralar ichiga yozib chiqish taklif etiladi;
- navbatdagi bosqichda ishtirokchilar to‘rt kishidan iborat kichik guruhlarga birlashtiriladi va har bir juftlik o‘z tahlili bilan guruh a’zolarini tanishtiradilar;
- juftliklarning tahlili eshitilgach, ular birgalashib, ko‘rib chiqilayotgan muammo yohud tushunchalarning umumiy jihatlarini (yoki farqli) izlab topadilar, umumlashtiradilar va doirachalarning kesishgan qismiga yozadilar.

III. NAZARIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI.

1-MAVZU: O‘LCHOV TUSHUNCHASI VA XOSSALARI

To‘plamning o‘lchovi tushunchasi quyidagi tushunchalarning tabiiy umumlashmasi hisoblanadi:

- To‘g‘ri chiziqdagi Δ kesmaning uzunligi — $l(\Delta)$;
- Tekislikdagi F yassi shaklning yuzi — $S(F)$;
- Fazodagi G jismning hajmi — $V(G)$.

Bu tushuncha dastlab haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasida paydo bo‘ldi. Keyinchalik matematikaning ehtimollar nazariyasi, dinamik sistemalar nazariyasi, funksional analiz kabi bir qancha sohalarida keng qo‘llanila boshladi.

1.1. O‘LCHOV TUSHUNCHASI VA XOSSALARI.

Bo‘sh bo‘lmagan $\mathcal{G}$ to‘plamlar oilasida aniqlangan $f : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ akslantirishga to‘plam funksiyasi deyiladi. Berilgan oilada to‘plam funksiyasini ixtiyoriy aniqlash mumkin bo‘lsada, ularning hammasi ham amaliy ahamiyatga ega bo‘lavermaydi. To‘plam funksiyalarining biz o‘rganadigan sinfi esa o‘lchovdir. Quyida o‘lchovning ta’rifini keltiramiz.

1.1.1-Ta’rif. m to‘plam funksiyasi quyidagi xossalarga ega bo‘lsin.

1) m funksiyaning aniqlanish sohasi $\mathcal{G}$ yarim halqa;

2) m funksiyaning qiymatlari nomanfiy haqiqiy sonlar;

3) m funksiya additiv, ya’ni $A \in \mathcal{G}$ to‘plamning shu oiladagi ixtiyoriy (juft-jufti bilan kesishmaydigan) chekli yoyilmasi $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ uchun quyidagi tenglik o‘rinli

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

U holda m to‘plam funksiyasiga o‘lchov deyiladi.

1.1.1-Izoh. Har qanday o‘lchov uchun $m(\varnothing) = 0$ bo‘ladi. Haqiqatdan, $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ yoyilmadan o‘lchovning additivlik xossasiga ko‘ra $m(\varnothing) = 2m(\varnothing)$ kelib chiqadi. Bu esa $m(\varnothing) = 0$ ekanligini bildiradi.

1.1.1-Misol. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to‘plam va $\mathcal{G} = \{A \subset X : A \not\ni x_4\}$ oila berilgan bo‘lsin. Ravshanki, $\mathcal{G}$ yarim halqa. Har bir $A \in \mathcal{G}$ uchun shu to‘plamning elementlari sonini mos qo‘yamiz. Bu moslik o‘lchov bo‘lishini tekshirish qiyin emas.

Demak, o‘lchov deganda yarim halqada aniqlangan nomanfiy, additiv to‘plam funksiyasi tushunilar ekan. Masalan, tekislikdagi barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar oilasi yarim halqa bo‘ladi. Bu oilaning har bir elementiga uning yuzini mos qo‘yuvchi akslantirish esa ta’rifga ko‘ra o‘lchov bo‘lishini tekshirish qiyin emas. Shu o‘rinda tabiiy savol tug‘iladi: agar “yuza” ham o‘lchov bo‘lsa, to‘g‘ri to‘rtburchaklardan boshqa yassi shakllarning yuzini hisoblashni o‘rta maktab kursidan yaxshi bilganimiz holda nega o‘lchovni faqat yarim halqada aniqladik? Yoki “yuza” o‘lchov emasmi? Bobning avvalida aytdikki, yassi shakllar uchun yuza tushunchasi o‘lchovning bir ko‘rinishi xolos. O‘lchovni aynan yarim halqada aniqlashdan ko‘zlangan asosiy maqsad ham maktab matematika darsidan o‘zimiz yaxshi bilgan yuza tushunchasini bosqichma-bosqich kiritishdagi an’anaga rioya etishdir. Dastlab to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yuzalari aniqlanadi, keyin to'g'ri to'rtburchaksimon (cheklita qirqish orqali to'g'ri to'rtburchaklarga ajraladigan) shakllarning yuzalari aniqlanadi. Ta'kidlash joizki, to'g'ri to'rtburchaksimon shakllar oilasi halqa bo'ladi. Demak, bizning keyingi vazifamiz o'lchovni yarim halqadan halqagacha davom ettirish ekanligi oydinlashdi.

1.1.2-Ta'rif. μ va m o'lchovlar mos ravishda $\mathcal{G}_\mu$ va $\mathcal{G}_m$ yarim halqalarda berilgan bo'lsin. Agar $\mathcal{G}_m \subset \mathcal{G}_\mu$ va ixtiyoriy $A \in \mathcal{G}_m$ uchun

$$\mu(A) = m(A)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, μ o'lchov m o'lchovning davomi deyiladi.

1.1.2-Misol. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to'plamda quyidagi ikkita oilani qaraymiz: $\mathcal{G} = \{A \subset X : A \not\ni x_4\}$ va $\tilde{\mathcal{G}} = \{A \subset X : A \in \mathcal{G}$ yoki $A = \{x_4\}\}$. Bu oilalarning yarim halqa bo'lishini tekshirish qiyin emas. Har bir $A \in \mathcal{G}$ uchun $m(A) = |A|$ akslantirishning o'lchov bo'lishi 2.1.1-Misoldan ma'lum. Agar har bir $A \in \tilde{\mathcal{G}}$ uchun $\mu(A) = |A|$ akslantirishni qarasak, bu akslantirish $\tilde{\mathcal{G}}$ yarim halqada o'lchov bo'ladi. Shuningdek, μ o'lchov m o'lchovning $\mathcal{G}$ yarim halqadan $\tilde{\mathcal{G}}$ yarim halqaga davomidir.

Endi yarim halqadagi o'lchovni shu yarim halqadan hosil qilingan halqagacha davom ettirish mumkinligi haqidagi muhim teoremani keltiramiz.

1.1.1-Teorema. $\mathcal{G}$ yarim halqada m o'lchov aniqlangan bo'lsin. U holda bu o'lchovning $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ halqagacha davomi mavjud va yagona.

► Ixtiyoriy $A \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ to'plam 1.3.1-Teoremaga ko'ra biror chekli yoyilmaga ega

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \quad B_k \in \mathcal{G}, \quad B_k \cap B_l = \varnothing \ (k \neq l). \tag{0.1}$$

Endi (0.1) yoyilmadan foydalanib $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ halqada to'plam funksiyasini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k). \tag{0.2}$$

Bu to'plam funksiyasi (0.1) yoyilmaga bog'liq emasligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $A \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ to'plam (0.1) yoyilmadan boshqa quyidagi chekli yoyilmaga ham ega bo'lsin

$$A = \bigcup_{k=1}^{r} C_k, \quad B_k \in \mathcal{G}, \quad B_k \cap B_l = \varnothing \ (k \neq l). \tag{0.3}$$

$\mathcal{G}$ yarim halqa bo'lgani uchun barcha $B_i \cap C_i$ to'plamlar shu yarim halqaga tegishli. U holda μ o'lchovning additivligiga ko'ra quyidagi tenglik bajariladi

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} m(B_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^{r} m(C_j).$$

Bu esa μ to'plam funksiyasining berilgan to'plamning chekli yoyilmasiga bog'liq emasligini bildiradi. (0.2) tenglik bilan aniqlangan funksiyaning nomanfiyligi va additivligini tekshirish qiyin emas. Demak, μ to'plam funksiyasi $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ halqada o'lchov ekan. Shunday qilib, $\mathcal{G}$ yarim halqada aniqlangan m o'lchovni $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ halqaga davom ettirdik.

Endi m o‘lchovning davomi yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $\tilde{\mu}$ o‘lchov m o‘lchovning yana bitta davomi bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $A \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ to‘plamning (0.1) yoyilmasidan foydalanib, $\tilde{\mu}$ o‘lchovning additivlik xossasiga ko‘ra quyidagini topamiz

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mu}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = \mu(A).$$

Bu esa $\tilde{\mu}$ o‘lchov (0.2) tenglik bilan aniqlangan o‘lchov bilan bir xil ekanligini anglatadi. ▲

Shunday qilib, biz o‘lchovni yarim halqadan halqagacha davom ettirdik. Bu esa to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini hisoblashni o‘rganib, keyin to‘g‘ri to‘rtburchaksimon shakllarning yuzini hisoblashni o‘rganishdagi jarayonning umumlashtirilganidir.

Endi o‘lchovning additivligi va nomanfiyligidan kelib chiqadigan sodda, lekin muhim xossalarni isbotsiz keltiramiz.

1.1.2-Teorema. $\mathcal{R}$ halqada μ o‘lchov aniqlangan bo‘lsin. U holda $A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ to‘plamlar uchun quyidagilar o‘rinli:

I. agar $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ va ixtiyoriy $i \neq j$ indekslar uchun $A_i \cap A_j = \varnothing$ bo‘lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu(A)$$

tengsizlik bajariladi;

II. agar $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \supset A$ bo‘lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \geq \mu(A)$$

tengsizlik bajariladi.

Oxirgi teoremadan quyidagi muhim natija kelib chiqadi.

1.1.1-Natija. $\mathcal{R}$ halqada μ o‘lchov aniqlangan bo‘lsin. Agar $A, B \in \mathcal{R}$ to‘plamlar uchun $A \subset B$ munosabat bajarilsa, u holda $\mu(A) \leq \mu(B)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

1.1.2-Izoh. To‘plamlar oilasida $\subset$ munosabat qisman tartib ekanligi hisobga olinsa, 1.1.1-Natijadan halqadagi o‘lchov monoton deb xulosa qilish mumkin bo‘ladi. Biz 1.1.2-Teorema va uning natijasini halqadagi o‘lchovlar uchun berdik. Har qanday halqa yarim halqa bo‘lganidan bu xossalar yarim halqadagi o‘lchovlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Yarim halqadagi o‘lchovni kengroq sinfga davom ettirish mumkin bo‘lsa, odatda o‘sha kengroq sinfdagi o‘lchov uchun biror xossani isbotlash afzal.

1.2. σ-ADDITIVLIK.

Analizning ko‘plab masalalarida nafaqat to‘plamlarning chekli yig‘indisi, balki sanoqli yig‘indisini ham qarash talab qilinadi. Shu sababdan, o‘lchovning additivlik xossasini nisbatan kuchliroq shart — sanoqli additivlik bilan almashtirishga ehtiyoj tug‘iladi.

1.2.1-Ta’rif. $\mathcal{R}$ halqada μ o‘lchov berilgan bo‘lsin. Agar juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{R}$ to‘plamlar uchun $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$ o‘rinliligidan

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

tenglik bajarilishi kelib chiqsa, bu o‘lchovga sanoqli additiv yoki σ-additiv o‘lchov deyiladi.

1.2.1-Misol. $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ixtiyoriy sanoqli to‘plam bo‘lsin. $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ musbat sonlar ketma-ketligini quyidagi shartni qanoatlantirsin

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

$\mathcal{P}(X)$ σ-algebrada quyidagi to‘plam funksiyasini qaraymiz:

$$\mu(A) = \sum_{x_n \in A} p_n, \qquad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

Tekshirish qiyin emaski, bu funksiya σ-additiv o‘lchov bo‘ladi. Shuningdek, $\mu(X) = 1$.

1.2.2-Misol. $[0; 1]$ kesmadagi barcha ratsional sonlar to‘plamini X bilan belgilaylik. Bu to‘plamning ixtiyoriy $(a; b)$ interval, $[a; b]$ kesma yoki $[a; b)$ va $(a; b]$ yarim intervallar bilan kesishmasidan hosil bo‘lgan to‘plamlar oilasini qaraylik. Endi har bir $A_{ab} \in \mathcal{R}$ to‘plam uchun

$$\mu(A_{ab}) = b - a$$

to‘plam funksiyasini aniqlaymiz. Bu funksiyaning o‘lchov bo‘lishini tekshirish qiyin emas. Biz uning σ-additiv bo‘lmasligini ko‘rsatamiz. Ravshanki, $\mu(X) = 1$. Lekin, har bir $x \in X$ uchun $\{x\} = A_{xx}$ ekanligidan $\mu(\{x\}) = 0$ kelib chiqadi. Agar μ o‘lchovni σ-additiv deb faraz qilsak, X to‘plam sanoqli sondagi elementlarining yig‘indisi ekanligidan $\mu(X) = \sum_{x \in X} \mu(A_{xx}) = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa $\mu(X) = 1$ ekanligiga zid. Demak, bu o‘lchov σ-additiv emas.

1.2.1-Teorema. $\mathcal{G}$ yarim halqada m o‘lchov berilgan bo‘lsin. Agar bu o‘lchov σ-additiv bo‘lsa, u holda uning $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ halqagacha davomi bo‘lgan μ o‘lchov ham σ-additiv bo‘ladi.

► Aytaylik $A \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ to‘plam shu halqada quyidagi yoyilmaga ega bo‘lsin

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad B_i \cap B_j = \varnothing, \ i \neq j.$$

U holda $\mathcal{G}$ yarim halqada shunday A_j va B_{ni} to‘plamlar mavjudki,

$$A = \bigcup_j A_j, \quad B_n = \bigcup_i B_{ni}, \quad n = 1, 2, \dots$$

chekli yoyilmalar o‘rinli bo‘ladi. Bunda har bir yoyilmada qatnashgan to‘plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi. $C_{nij} = B_{ni} \cap A_j$ deb olaylik. Ravshanki, C_{nij} to‘plamlar o‘zaro kesishmaydi va quyidagi yoyilmalar o‘rinli bo‘ladi

$$A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_i C_{nij}, \quad B_{ni} = \bigcup_j C_{nij}.$$

U holda m o'lchovning σ-additivligidan quyidagilarni topamiz

$$m(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i} m(C_{nij}), \tag{0.4}$$

$$m(B_{ni}) = \sum_{j} m(C_{nij}). \tag{0.5}$$

Boshqa tomondan, $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ halqadagi μ o'lchovning aniqlanishiga ko'ra

$$\mu(A) = \sum_{j} m(A_j), \tag{0.6}$$

$$\mu(B_n) = \sum_{i} m(B_{ni}), \tag{0.7}$$

tengliklarni hosil qilamiz. (0.2)-(0.7) tengliklardan $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda i va j bo'yicha yig'indilarning chekliligini va n bo'yicha qatorning yaqinlashishini hisobga oldik. ▲

Endi σ-additiv o'lchovlarning asosiy xossalarini keltiramiz. Yanada aniqroq aytsak, 2.1.2-Teoremani umumiyroq shaklda isbotlaymiz. Bu yerda ham yarim halqadagi o'lchovning σ-additivligi uning halqagacha davomi uchun ham saqlanishiga ko'ra o'lchovni halqada aniqlangan deb aytishga asoslar yetarli.

1.2.2-Teorema. $\mathcal{R}$ halqada σ-additiv μ o'lchov va $A, A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{R}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda quyidagi tasdiqlar o'rinli:

I_σ. agar $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset A$ va ixtiyoriy $i \neq j$ indekslar uchun $A_i \cap A_j = \varnothing$ o'rinli bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu(A)$$

tengsizlik bajariladi;

II_σ. (`sanoqli yarim additivlik`) agar $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset A$ o'rinli bo'lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \geq \mu(A)$$

tengsizlik bajariladi.

► Agar barcha A_k to'plamlar juft-jufti bilan kesishmasa va A to'plamga qism bo'lsa, u holda o'lchovning monotonligiga ko'ra ixtiyoriy $n \geq 1$ uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu(A).$$

Bu tengsizlikdan $n \to \infty$ limitga o'tsak, I_σ tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi.

Endi ikkinchi tasdiqni isbotlaymiz. $\mathcal{R}$ halqa ekanligidan

$$B_n = \left(A_n \bigcap A\right) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

to‘plam ham shu halqaning elementi ekanligi kelib chiqadi. Shuningdek,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n \subset A_n$$

va ixtiyoriy $i \neq j$ uchun $B_i \cap B_j = \varnothing$ ekanligidan quyidagini hosil qilamiz

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bu esa II_σ tasdiq ham o‘rinli ekanligini bildiradi. ▲

1.2.1-Izoh. Ta’kidlash joizki, o‘lchovning I_σ xossasi σ-additivlikka bo‘gliq emas. Ya’ni, bu xossa har qanday o‘lchovga xosdir. II_σ xossa esa aynan σ-additivlikdan kelib chiqadigan xossadir. Masalan, 2.1.2-Misolda keltirilgan o‘lchov II_σ xossaga ega emasligini tekshirish qiyin emas. Boshqacha aytganda o‘lchovning II_σ xossaga egaligi uning σ-additivligiga teng kuchli. Buni o‘zingiz uchun tekshirib ko‘ring!

1.3.-1.4. LEBEG O‘LCHOVLARI. LEBEG MA’NOSIDA O‘LCHOVLI TO‘PLAMLAR SINFI.

Biri bor $\mathcal{G}$ yarim halqada σ-additiv m o‘lchov berilgan bo‘lsin. Qulaylik uchun bu yarim halqaning birlik elementini E deb belgilaymiz. E to‘plamning $\mathcal{P}(E)$ – barcha qism to‘plamlari oilasida tashqi o‘lchov tushunchasini kiritamiz.

1.3.1-Ta’rif. $A \subset E$ to‘plamning tashqi o‘lchovi deb quyidagi songa aytiladi

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_n m(B_n) : \bigcup_n B_n \supset A, \quad \forall \{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{G} \right\}. \tag{0.8}$$

Berilgan o‘lchovni Lebeg bo‘yicha davomini qurishda muhim ahamiyat kasb etadigan quyidagi xossani isbotsiz keltiramiz.

1.3.1-Teorema. (`sanoqli yarim additivlik`) Agar $A, A_1, \ldots, A_n, \cdots \in E$ to‘plamlar uchun

$$A \subset \bigcup_n A_n$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$$

tengsizlik bajariladi.

1.3.1-Izoh. 2.3.1-Teoremadagi $\{A_n\}_{n\geq 1}$ oila ko‘pi bilan sanoqli.

1.3.2-Ta’rif. $A \in E$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $B \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ topilib,

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A to‘plam Lebeg ma’nosida o‘lchovli deyiladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, $\mathcal{G}$ va $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ oilalarning har bir elementi Lebeg ma’nosida o‘lchovli bo‘ladi. Shuningdek,

$$A_1 \Delta A_2 = (E \setminus A_1) \Delta (E \setminus A_2)$$

tenglikdan, Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamning to‘ldiruvchisi ham Lebeg ma’nosida o‘lchovli bo‘lishi kelib chiqadi.

Bundan keyin alohida aytilmagan bo‘lsa, o‘lchovli to‘plam deganda faqat Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamni tushunamiz. Shuningdek, Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plam qaysi o‘lchovdan hosil qilingani ham ahamiyatli.

Endi o‘lchovli to‘plamlar va ularning Lebeg o‘lchovining asosiy xossalarini keltiramiz. Barcha (Lebeg ma’nosida) o‘lchovli to‘plamlar oilasini $\mathcal{M}$ bilan belgilaymiz.

1.3.2-Teorema. $\mathcal{M}$ halqa bo‘ladi.

► Isboti sodda bo‘lgan quyidagi

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2),$$

$$A_1 \cup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)]$$

tengliklardan teorema tasdig‘ini isbotlash uchun quyidagi tasdiqni isbotlash yetarli deb xulosa qilamiz:

$$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{M} \implies A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{M}.$$

Aytaylik, A_1 va A_2 to‘plamlar Lebeg ma’nosida o‘lchovli bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $B_1, B_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ to‘plamlar topiladiki,

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar bajariladi. $B = B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ deb olamiz va

$$(A_1 \setminus B_2)\Delta(B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

munosabatdan

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

tengsizlikni hosil qilamiz. $\varepsilon > 0$ sonining ixtiyoriyligidan ta’rifga ko‘ra $A_1 \setminus A_2$ to‘plamning ham Lebeg ma’nosida o‘lchovli ekanligi kelib chiqadi. ▲

1.3.2-Izoh. E to‘plamning o‘zi ham Lebeg ma’nosida o‘lchovli ekanligidan $E \in \mathcal{M}$ kelib chiqadi. Demak, $\mathcal{M}$ algebra ekan.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1.3.3-Teorema. $\mathcal{M}$ algebradagi μ^* tashqi o‘lchov additiv.

Demak, $\mathcal{M}$ algebradagi μ^* to‘plam funksiyasi o‘lchov ekan. μ^* funksiya Lebeg o‘lchovi deyiladi va μ kabi belgilanadi. Ravshanki, ixtiyoriy $A \in \mathcal{G}$ uchun $\mu(A) = m(A)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan, ta’rifga ko‘ra Lebeg o‘lchovi $\mathcal{G}$ yarim halqadagi m o‘lchovning $\mathcal{M}$ algebragacha davomi ekan.

1.3.4-Teorema. $\mathcal{M}$ algebradagi μ Lebeg o‘lchovi σ-additiv.

► $A \in \mathcal{M}$ to‘plam quyidagi sanoqli yoyilmaga ega bo‘lsin

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \ A_1, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{M},$$

bu yerda A_n to‘plamlar o‘zaro kesishmaydi. U holda 1.3.1-Teoremaga ko‘ra

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{0.9}$$

va 1.3.3-Teoremaga ko‘ra har bir N uchun

$$\mu(A) \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \tag{0.10}$$

tengsizliklar bajariladi. (0.10) tengsizlikdan $N \to \infty$ limitga o‘tib

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{0.11}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. (0.9) va (0.11) tengsizliklardan

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

tenglikni olamiz. Bu esa μ Lebeg o‘lchovining σ-additivligini bildiradi. ▲

Yana bir muhim teoremani isbotsiz keltiramiz.

1.3.5-Teorema. $\mathcal{M}$ — Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plamlar oilasi σ-algebra bo'ladi.

σ-algebrada aniqlangan σ-additiv o'lchovning yana bir muhim xossasi bu uning uzluksizligi deb ataluvchi quyidagi xossadir: agar $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \ldots$ o'lchovli to'plamlarning kamayuvchi zanjiri uchun

$$A = \bigcap_n A_n$$

bo'lsa, u holda quyidagi limit o'rinli

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Endi bu paragraf uchun o'lchovning Lebeg ma'nosidagi davomini qurishdan olgan xulosamizni keltiramiz.

Xulosa. Biri bor $\mathcal{G}$ yarim halqada berilgan σ-additiv m o'lchovni Lebeg bo'yicha davom ettirish orqali $\mathcal{G}$ yarim halqani o'zida saqlovchi σ-algebrada aniqlangan σ-additiv o'lchov hosil qilinar ekan.

Biri yo'q yarim halqada aniqlangan o'lchovning Lebeg bo'yicha davomi. Avvalgi paragrafda biz biri bor yarim halqadagi σ-additiv o'lchovni Lebeg bo'yicha davom ettirishni o'rgandik. Agar yarim halqaning birlik elementi bo'lmasa ham bunday davom ettirish ba'zi kichik o'zgarishlar bilan o'z kuchini saqlaydi. Ana shunday o'zgarishlar haqida to'xtalib o'tamiz.

- Tashqi o'lchovning ta'rifi $\mathcal{G}$ yarim halqadagi chekli sondagi to'plamlar oilasi bilan qoplash mumkin bo'lgan A to'plamlar uchun beriladi.

- O'lchovli to'plamning ta'rifi o'zgarmaydi.

- 1.3.2-Teoremaning isbotida birlik elementdan foydalanilgan edi. Biri yo'q yarim halqa holi uchun ham bu teoremaning tasdig'i to'g'ri, lekin uning isbotida quyidagicha o'zgarish qilamiz: dastlab ixtiyoriy to'plamlar uchun $(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ munosabatni isbotlaymiz, so'ng bu munosabatdan foydalanib $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ to'plamlar uchun $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$ deb xulosa qilamiz.

- 1.3.3-Teorema va 1.3.4-Teorema ham ularning isbotlari ham o'zgarmaydi.

- 1.3.5-Teorema quyidagi teoremaga o'zgaradi.

  1.3.6-Teorema. $\mathcal{M}$ Lebeg ma'nosida o'lchovli to'plamlar oilasi δ-halqa bo'ladi. $A_n \in \mathcal{M}$ to'plamlar oilasi uchun $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to'plam ham o'lchovli bo'lishi uchun shunday $C > 0$ topilib, har qanday N olinganda ham $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq C$ o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

  Bu teoremaning isbotini o'quvchilarga qoldiramiz. Shuni ta'kidlash kerakki, biz faqat chekli qiymatli o'lchovlarni qarayotganimiz uchun 1.4.1-Teoremaning ikkinchi qismidagi shartning talab qilinishi tabiiydir.

- 1.3.6-Teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

  1.3.1-Natija. $A \in \mathcal{M}$ to'plam uchun quyidagi oila σ-algebra bo'ladi:

  $$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M} : \ B \subset A\}.$$

Lebeg o'lchoviga xos yana bir xossa haqida so'z yuritamiz.

1.3.3-Ta'rif. μ Lebeg o'lchovi berilgan bo'lsin. Agar $\mu(A) = 0$ va $A' \subset A$ ekanligidan A' to'plamning ham o'lchovli bo'lishi kelib chiqsa, bunday o'lchovga to'la deyiladi.

Ravshanki, har qanday to'la o'lchov uchun o'lchovi nol bo'lgan to'plamning ixtiyoriy qism to'plami ham nol o'lchovli bo'ladi. Ko'rsatish qiyin emaski, har qanday o'lchovning Lebeg bo'yicha davomi to'la bo'ladi. Darhaqiqat, $\mu^*(C) = 0$ bo'lgan har qanday C to'plamning o'lchovli ekanligi $\mu^*(A\Delta\varnothing) = \mu^*(C)$ tenglikdan kelib chiqadi. Shuningdek, tashqi o'lchovi nol bo'lgan to'plamning qism to'plamining ham tashqi o'lchovi nolga teng.

1.3.3-Izoh. σ-algebradagi har qanday σ-additiv o'lchovni to'la o'lchovgacha davom ettirish mumkin. Buning uchun o'lchovi nol bo'lgan har qanday to'plamning ixtiyoriy qism to'plamiga ham nolni mos qo'yish yetarli.

O'lchovlarning ko'paytmasi. To'g'ri to'rtburchakning yuzi uning bo'yi va eni uzunliklarining ko'paytmasi ekanligini yaxshi bilamiz. Shuningdek, to'g'ri to'rtburchakning eni ham bo'yi ham kesma va ularning uzunliklari esa chiziqli o'lchov ekanligi yaxshi ma'lum. Ikkita kesmaning ko'paytmasidan hosil qilingan shaklning yuzi shu kesmalar uzunliklarining ko'paytmasiga teng bo'lmoqda. Demak, bob avvalida aytilganidek o'lchov uzunlik, yuza va hajmning umumlashmasi bo'lsa, hozircha biz umumlashtirmagan jihat aynan to'plamlar to'g'ri ko'paytmasining o'lchovini har bir to'plamdagi o'lchov orqali ifodalanishidir.

Aytaylik, $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n$ yarim halqalarda mos ravishda $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ o'lchovlar berilgan bo'lsin. Qulaylik uchun bu o'lchovlar chekli bo'lsin deb olamiz. Quyida keladigan barcha tushuncha va natijalarni esa qiyinchiliksiz σ-chekli o'lchovlar uchun ham yozish mumkin. $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \cdots \times \mathcal{G}_n$ yarim halqada quyidagi to'plam funksiyasini aniqlaymiz

$$\mu(A) = \mu_1(A) \ldots \mu(A_n), \qquad A = A_1 \times \cdots \times A_n. \tag{0.12}$$

Endi bu to'plam funksiyasi o'lchov bo'lishini ko'rsatamiz. $\mu(A) \geq 0$ ekanligi ravshan. Demak, additivlikni tekshiramiz. Qulaylik uchun $n = 2$ holni qaraymiz. Quyidagi yoyilma berilgan bo'lsin

$$A = A_1 \times A_2 = \bigcup_k B^{(k)}, \qquad B^{(i)} \cap B^{(j)} = \varnothing,$$

$$B^{(k)} = B_1^{(k)} \times B_2^{(k)}.$$

1.2.2-Lemmaga ko'ra quyidagi yoyilmalar mavjud

$$A_1 = \bigcup_m C_1^{(m)}, \qquad A_2 = \bigcup_p C_2^{(p)}.$$

U holda

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \sum_p \sum_m \mu_1(C_1^{(m)})\mu_2(C_2^{(p)}), \tag{0.13}$$

$$\mu(B^{(k)}) = \mu_1(B_1^k)\mu_2(B_2^{(k)}) = \sum_{\substack{p: \\ C_2^{(p)} \subset B_2^{(k)}}} \sum_{\substack{m: \\ C_1^{(m)} \subset B_1^{(k)}}} \mu_1(C_1^{(m)})\mu_2(C_2^{(p)}), \tag{0.14}$$

(0.13) va (0.14) tengliklardan

$$\mu(A) = \sum_k \mu(B^{(k)})$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, μ additiv ekan. Shunday qilib, $\mathcal{G}$ yarim halqada (0.12) bilan aniqlangan o'lchovni kiritdik. Odatda bu o'lchovga $\mu_1, \ldots, \mu_n$ o'lchovlarning ko'paytmasi deyiladi va $\mu = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ kabi yoziladi.

O‘lchovlar ko‘paytmasining quyidagi muhim xossasini isbotsiz keltiramiz.

1.3.7-Teorema. Agar $\mu_1, \dots, \mu_n$ o‘lchovlarning har biri σ-additiv bo‘lsa, u holda $\mu = \mu_1 \times \dots \mu_n$ o‘lchov ham σ-additiv bo‘ladi.

Demak, biz yarim halqalarning to‘g‘ri ko‘paytmasi bo‘lgan yarim halqada o‘lchovlar ko‘paytmasini aniqladik. Yarim halqadagi o‘lchovni Lebeg bo‘yicha davom ettirish jarayoni bilan tanishmiz. Shu bois bu haqda to‘xtalib o‘tirmaymiz.

Agar $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ oilalar σ-algebra bo‘lib, ulardagi $\mu_1, \dots, \mu_n$ o‘lchovlar ham σ-additiv bo‘lsa, bu o‘lchovlarning ko‘paytmasi deb $\mu_1 \times \dots \mu_n$ o‘lchovning Lebeg bo‘yicha davomiga aytamiz va hosil bo‘lgan o‘lchovni

$$\otimes \mu_k = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$$

kabi yozamiz.

Ta’kidlash joizki, $\mu_1, \dots, \mu_k$ o‘lchovlar to‘la bo‘lmasa-da, ularning ko‘paytmasi har doim to‘la bo‘ladi.

2-MAVZU: O'LCHOVSIZ TO'PLAMLAR. O'LCHOVLI FUNKSIYALAR

Ushbu bobda biz o'lchovli funksiyalar va ularning Lebeg integrallari bilan tanishamiz. Shuningdek, o'lchovli funksiyalar ketma-ketligining turli yaqinlashishlari va integralning xossalarini o'rganamiz.

2.1. O'LCHOVSIZ TO'PLAM.

Biz shu paytgacha o'lchov, o'lchovli to'plam haqida gapirdik. Lekin biror marta o'lchovsiz to'plam ham bormi degan savolni o'rtaga tashlamadik. Bu savolni berishga va unga javob berishga endi tayyormiz.

O'lchovsiz to'plamga misol qurish uchun aksariyat hollarda o'lchovli fazolar sifatida Borel algebralari qaralgani uchun Borel to'plami bo'lmagan to'plamni topish masalasi yuzaga chiqadi. Bu esa unchalik ham oddiy quriladigan to'plamlar toifasiga kirmaydi. Masalan, to'g'ri chiziqdagi ochiq intervallarning ko'pi bilan sanoqli yig'indisi yoki kesishmasi ko'rinishida tasvirlanmaydigan to'plamni qurish oson emas.

O'lchovsiz to'plamga misolni chiziqli Lebeg o'lchovi berilgan birlik aylanada qurish nisbatan osonroq. Aytaylik, C — uzunligi 1 bo'lgan aylana bo'lsin. Biror α irratsional sonni olamiz. Aylanadagi nuqtalarni ekvivalent sinflarga quyidagicha ajratamiz: $x \sim y \iff$ biror $n \in \mathbb{Z}$ mavjudki, aylanani $n\alpha\pi$ burchakka burish orqali x nuqtadan y nuqta hosil bo'ladi. Ravshanki, bunday sinflarning har biri sanoqli sondagi nuqtalardan tashkil topgan. Bu sinflarning har biridan bittadan nuqta olib Φ_0 to'plamni hosil qilamiz. Aylanani $n\alpha\pi$ burchakka burish orqali Φ_0 to'plamdan hosil bo'lgan to'plamni Φ_n deb belgilaymiz. Ko'rish mumkinki, $n \neq m$ uchun $\Phi_n \bigcap \Phi_m = \varnothing$ va $C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Phi_n$. Agar Φ_0 to'plam o'lchovli bo'lsa, u holda har bir Φ_n to'plam ham o'lchovli va ularning o'lchovlari teng bo'ladi. O'lchovning σ-additivligiga ko'ra quyidagi tenglik o'rinli

$$\mu(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(\Phi_n).$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi qatorning har bir hadi bir xil sondan iborat. Agar $\mu(\Phi_0) > 0$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi, agar $\mu(\Phi_0) = 0$ bo'lsa, qatorning yig'indisi 0. Har ikki holda ham $\mu(C) = 1$ ekanligiga zid. Demak, Φ_0 o'lchovsiz to'plam ekan.

2.2. O‘LCHOVLI FUNKSIYALAR.

Aytaylik, ixtiyoriy X va Y to‘plamlar hamda ularning ba’zi qism to‘plamlari oilasi $\mathcal{G}_X$ va $\mathcal{G}_Y$ berilgan bo‘lsin. $f : X \to Y$ akslantirishni qaraylik. Agar ixtiyoriy $A \in \mathcal{G}_Y$ uchun $f^{-1}(A) \in \mathcal{G}_X$ o‘rinli bo‘lsa, f akslantirishga $(\mathcal{G}_X, \mathcal{G}_Y)$-o‘lchovli funksiya deyiladi.

Eslatma. O‘lchovli funksiyaning ta’rifida $\mathcal{G}_X$ va $\mathcal{G}_Y$ oilalarning hech biri hatto yarim halqa bo‘lishi talab qilinmaganiga e’tibor bering! Bu ta’rif umumiy bo‘lib, biror X va Y to‘plamlar uchun o‘lchovli funksiyalar sinfi $\mathcal{G}_X$ va $\mathcal{G}_Y$ oilalarga bog‘liq ekan. Masalan, $\mathcal{G}_X$ va $\mathcal{G}_Y$ oilalar sifatida mos ravishda X va Y to‘plamlardagi topologiyalar (ochiq to‘plamlar sinfi) qaralsa, $(\mathcal{G}_X, \mathcal{G}_Y)$-o‘lchovli funksiyalar sinfi uzluksiz funksiyalardan iborat bo‘ladi. Agar $\mathcal{G}_X$ va $\mathcal{G}_Y$ oilalar sifatida barcha Borel to‘plamlarini olsak, Borel ma’nosida o‘lchovli funksiyalar deb nomlanuvchi akslantirishlar sinfini hosil qilamiz.

O‘lchovli funksiyaning umumiy ta’rifi o‘lchov bilan bog‘liq emasligini aytib o‘tdik. Lekin bizga o‘lchovli funksiyalar asosan integralni aniqlash uchun kerakligini hisobga olib, maxsus o‘lchovli funksiyalarni qaraymiz. Ya’ni, σ-additiv μ o‘lchov aniqlangan X to‘plam-dagi sonli funksiyalarni qaraymiz. Bunda $\mathcal{G}_X$ oila X to‘plamning barcha μ o‘lchovli qism to‘plamlaridan iborat va $\mathcal{G}_Y$ oila sonlar o‘qidagi barcha Borel to‘plamlaridan iborat deb hisoblay-miz. Har qanday σ-additiv o‘lchovni σ-algebragacha davom ettirish mumkinligidan umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $\mathcal{G}_X$ oilani σ-algebra deb hisoblash mumkin. U holda sonli funksiyalar uchun o‘lchovlilik ta’rifi quyidagicha aniqlanadi.

2.2.1-Ta’rif. X to‘plam va uning qism to‘plamlarining σ-algebrasi bo‘lgan $\mathcal{G}_\mu$ oilada σ-additiv μ o‘lchov berligan bo‘lsin. X to‘plamda aniqlangan f haqiqiy funksiya uchun sonlar o‘qidagi har qanday A Borel to‘plami olinganda ham $f^{-1}(A) \in \mathcal{G}_\mu$ o‘rinli bo‘lsa, bu funksiyaga μ-o‘lchovli deyiladi.

Xuddi shuningdek, f kompleks qiymatli funksiya uchun ham μ-o‘lchovlilik ta’rifini berish mumkin. Ta’kidlash joizki, kompleks qiymatli f funksiyaning o‘lchovli bo‘lishi uning haqiqiy va mavhum qismlarining alohida o‘lchovli bo‘lishiga teng kuchli.

Sonlar o‘qida aniqlangan f haqiqiy funksiya uchun har qanday Borel to‘plamining asli yana Borel to‘plami bo‘lsa, bunday funksiyaga Borel funksiyasi deyiladi.

2.2.1-Izoh. Bundan keyin alohida hollardagina qaysi o‘lchovga nisbatan o‘lchovli funksiya deyilayotganini eslatish uchun μ-o‘lchovli funksiya atamasini ishlatamiz. Qolgan barcha hollarda shunchaki o‘lchovli funksiya deb aytamiz.

O‘lchovli funksiyalarning quyidagi sodda xossalarini isbotsiz keltiramiz. f va g funksiyalar uchun $f \circ g = f(g)$ deb tushunamiz.

- Agar f va g o‘lchovli funksiyalar bo‘lsa, u holda $f \circ g$ va $g \circ f$ ham o‘lchovli;
- Agar f Borel funksiyasi va g o‘lchovli funksiya bo‘lsa, $f \circ g$ ham o‘lchovli;
- Agar f uzluksiz funksiya va g o‘lchovli funksiya bo‘lsa, $f \circ g$ ham o‘lchovli.

Endi haqiqiy funksiyaning o‘lchovli bo‘lishi uchun zarur va yetarli shartlarni keltiramiz.

2.2.1-Teorema. f haqiqiy funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun ixtiyoriy c haqiqiy soni olinganda ham $\{x : f(x) < c\}$ to‘plam o‘lchovli bo‘lishi zarur va yetarli.

► *Zarurligi.* f o‘lchovli bo‘lsin. U holda har qanday $c \in \mathbb{R}$ uchun $A_c = (-\infty; c)$ interval Borel to‘plami bo‘ladi. Demak, ta’rifga ko‘ra $f^{-1}(A_c) = \{x : f(x) < c\}$ o‘lchovli to‘plam.

Yetarliligi. Barcha A_c ko‘rinishdagi to‘plamlar oilasini Σ deb belgilaylik. Ma’lumki, Σ oiladan hosil qilingan σ-algebra barcha Borel to‘plamlarining σ-algebrasi bilan ustma-ust tushadi.

U holda ixtiyoriy A Borel to'plami uchun $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(f^{-1}(\Sigma))$ bo'ladi. Bu esa f funksiyaning o'lchovli ekanligini bildiradi. ▲

Avval ta'kidlab o'tganimizdek, biz X to'plamda aniqlangan o'lchovli haqiqiy funksiyalarni o'rganmoqdamiz. Demak, bunday funksiyalarni songa ko'paytirish va ular ustida arifmetik amallar ma'noga ega. Bunday funksiyalarning qo'shimcha xossalarini isbotsiz keltiramiz. Funksiyalar ustidagi arifmetik amallarni eslatib o'tamiz. X to'plamda f, g haqiqiy funksiyalar va $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun αf, $f \pm g$ va $f \cdot g$ funksiyalar quyidagicha aniqlanadi: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ va $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

- Agar f o'lchovli funksiya bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ uchun αf funksiya ham o'lchovli;
- Ixtiyoriy f va g o'lchovli funksiyalar uchun $f \pm g$ va $f \cdot g$ funksiyalar ham o'lchovli;
- Agar f o'lchovli funksiya ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(x) \neq 0$ shartni qanoatlantirsa, u holda $\frac{1}{f}$ funksiya ham o'lchovli;
- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi har bir $x \in X$ uchun f funksiyaga yaqinlashsa, f ham o'lchovli.

Deyarli yaqinlashish. Matematik analiz kursidan yaxshi ma'lumki, funksional ketma-ketlikning tekis yaqinlashishi ularning limit funksiyasi haqidagi asosiy xossalarni to'liq tasniflab beradi. Lekin, har doim ham yaqinlashishning bunday kuchli shartini qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar bilan emas, balki nisbatan kuchsizroq yaqinlashuvchi ketma-ketliklar bilan ishlashga to'g'ri keladi. Masalan, o'lchovli funksiyalar oilasida deyarli yaqinlashishning ahamiyati muhim hisoblanadi. Deyarli yaqinlashish haqida gapirishdan oldin biz tekis va nuqtada yaqinlashishni eslatib o'tamiz.

X to'plamda $\{f_n\}_{n\geq 1}$ funksional ketma-ketlik berilgan bo'lsin. $x \in X$ nuqta uchun

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, $\{f_n\}$ ketma-ketlik x nuqtada yaqinlashadi deyiladi. Agar bu ketma-ketlik har bir nuqtada yaqinlashsa, $\{f_n\}$ ketma-ketlik har bir nuqtada yaqinlashadi deyiladi va $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ funksiyaga bu ketma-ketlikning limit funksiyasi deyiladi. Odatda nuqtada yaqinlashish $f_n \longrightarrow f$ kabi yoziladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ son topilib, har qanday $n > n_0$ uchun $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik har bir $x \in X$ nuqtada bajarilsa, $\{f_n\}$ ketma-ketlik f funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi va $f_n \rightrightarrows f$ kabi yoziladi.

Demak, tekis yaqinlashishdan har bir nuqtada yaqinlashish kelib chiqadi. Aksi esa o'rinli emas.

O'lchovli funksiyalarni o'rganishda bunday funksiyalarning o'lchovi nol bo'lgan to'plamlardagi qiymatini hisobga olmasa ham bo'laveradi. Buni tushunish uchun quyidagi ta'rifni keltiramiz.

2.2.2-Ta'rif. X to'plamda f va g o'lchovli funksiyalar berilgan bo'lsin. Agar

$$\mu\left(\{x : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0$$

o'rinli bo'lsa, bu funksiyalar ekvivalent deyiladi.

2.2.2-Izoh. 2.2.1-Ta'rifdagi o'lchovli funksiyalarning ekvivalentligi X to'plamdagi o'lchovli funksiyalar sinfida ekvivalentlik munosabati (refleksiv, simmetrik va tranzitiv xossaga ega munosabat) bo'lishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Demak, X to'plamda aniqlangan o'lchovli funksiyaning o'lchovi nol bo'lgan to'plamlardagi qiymatini o'zgartirish bilan hosil bo'lgan funksiya o'lchovli bo'ladi va bu yangi funksiyani berilgan funksiyaning o'zi deb hisoblash mumkin.

Yuqoridagi ta'rifdan foydalanib, yangi tushunchani kiritamiz. X to'plam va uning qism to'plamlarining $\mathcal{G}_X$ σ-algebrasida σ-additiv μ o'lchov berilgan bo'lsin. Biror xossa X to'plamning o'lchovi nol bo'lgan qism to'plamlarida bajarilmay, qolgan barcha o'lchovli qism to'plamlarida bajarilsa, bu xossa X to'plamning *deyarli hamma yerida* bajariladi deyiladi. Demak, X to'plamdagi o'lchovli funksiyalar deyarli teng bo'lishi uchun ularning ekvivalent bo'lishi zarur va yetarli.

Quyidagi sodda xossani isbotsiz keltiramiz.

2.2.2-Teorema. X to'plamda f va g ekvivalent funksiyalar berilgan bo'lsin. U holda f o'lchovli bo'lishi uchun g funksiyaning o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli.

2.2.3-Izoh. Matematik analizda funksiyalarning ekvivalentligi muhim rol o'ynamaydi. Chunki, matematik analizning asosiy funksiyalari uzluksiz funksiyalardir. Ma'lumki, $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f va g funksiyalar ekvivalent (biz kiritgan Lebeg ma'nosida) bo'lsa, ular ustma-ust tushadi. Darhaqiqat, agar ular biror nuqtada farq qilsa, u holda uzluksizlikka ko'ra shu nuqtaning biror atrofida ham turli qiymatlarni qabul qiladi. Bunday atrofning Lebeg o'lchovi esa musbat! Demak, uzluksiz funksiyalar faqat ustma-ust tushsagina ekvivalent bo'ladi.

Ixtiyoriy o'lchovli funksiyalar uchun esa ekvivalentlik bu funksiyalar ustma-ust tushishini bildirmaydi. Masalan, sonlar o'qidagi Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$f(x) \equiv 0$ funksiya bilan ekvivalent.

2.2.3-Ta'rif. $(X, \mathcal{G}_X)$ o'lchovli fazoda σ-additiv μ o'lchov berilgan bo'lsin. Agar X to'plamda berilgan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funksiyalar ketma-ketligi va f funksiya uchun

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

tenglik X to'plamning deyarli hamma yerida o'rinli bo'lsa, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik f funksiyaga deyarli yaqinlashadi deyiladi va $f_n \xrightarrow{d.y.} f$ kabi belgilanadi.

2.2.1-Misol. $[0;1]$ kesmada berilgan $f_n(x) = (-x)^n$ ketma-ketlik $f(x) \equiv 0$ funksiyaga deyarli yaqinlashadi. Darhaqiqat, $\{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0\} = \{1\}$ va bitta nuqtaning Lebeg o'lchovi nol ekanligidan $f_n \xrightarrow{d.y.} f$ kelib chiqadi.

2.2.4-Izoh. Har bir nuqtada yaqinlashishdan deyarli yaqinlashish kelib chiqadi. Garchi bu tasdiqning aksi o'rinli bo'lmasa-da, o'lchovli funksiyalar sinfida deyarli yaqinlashish va har bir nuqtada yaqinlashishning ahamiyatli farqi yo'q deb hisoblanadi.

2.2.3-Teorema. X to'plamda $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlik f funksiyaga deyarli yaqinlashsa, f funksiya ham o'lchovli bo'ladi.

► Qulaylik uchun $A = \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$ deb olamiz. U holda $\mu(X \setminus A) = 0$. A to'plamda f funksiyaning o'lchovli ekanligi ma'lum. O'lchovi nol to'plamdagi qiymatlari funksiyaga o'lchovlilik nuqtai nazaridan ta'sir qilmasligiga ko'ra f funksiya X to'plamda ham o'lchovli bo'ladi. ▲

Deyarli yaqinlashish va tekis yaqinlashish o'rtasidagi bog'liqlik 1941 yilda D.F.Yegorov tomonidan isbotlangan.

Yegorov teoremasi. E chekli o'lchovga ega to'plam va $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'lchovli funksiyalar ketma-ketligi E to'plamda f funksiyaga deyarli yaqinlashsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday o'lchovli $E_\varepsilon \subset E$ to'plam mavjudki, quyidagilar o'rinli bo'ladi:

1) $\mu(E_\varepsilon) > \mu(E) - \varepsilon$;

2) E_ε to'plamda $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik f funksiyaga tekis yaqinlashadi.

► 2.2.2-Teoremaga ko'ra f funksiya E to'plamda o'lchovli bo'ladi. Quyidagi to'plamlarni qaraymiz:

$$E_n^m = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x : |f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\},$$

$$E^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m.$$

E_n^m to'plamlarning aniqlanishiga ko'ra har bir $m \geq 1$ uchun

$$E_1^m \subset \cdots \subset E_n^m \subset \ldots$$

σ-additiv o'lchovning uzluksizligiga ko'ra har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $n_0(m) \in \mathbb{N}$ son topiladiki,

$$\mu\left(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Endi

$$E_\varepsilon = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m$$

deb olamiz va bu to'plam aynan biz qidirayotgan to'plam ekanligini ko'rsatamiz.

Dastlab, $\{f_n\}$ ketma-ketlik E_ε to'plamda f funksiyaga tekis yaqinlashishini isbotlaymiz. Bu esa agar $x \in E_\varepsilon$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $m \geq 1$ uchun

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{m}, \qquad \forall i > n_0(m)$$

o'rinliligidan kelib chiqadi.

Endi $E \setminus E_\varepsilon$ to'plamning o'lchovini baholaymiz. Ta'kidlash joizki, har bir m uchun $\mu(E \setminus E^m) = 0$ bajariladi. Darhaqiqat, agar $x_0 \in E \setminus E^m$ bo'lsa, u holda $i \in \mathbb{N}$ sonining yetarlicha katta qiymati mavjudki,

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| \geq \frac{1}{m}$$

tengsizlik bajariladi. Ya'ni, $\{f_n\}$ ketma-ketlik x_0 nuqtada f funksiyaga yaqinlashmaydi. Shartga ko'ra $f_n \xrightarrow{d.y.} f$ ekanligidan $\mu(E \setminus E^m) = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$\mu\left(E \setminus E_{n_0(m)}^m\right) = \mu\left(E^m \setminus E_{n_0(m)}^m\right) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

kelib chiqadi. Demak,

$$\begin{aligned} \mu(E \setminus E_\varepsilon) &= \mu\left(E \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{n_0(m)}^m\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E_{n_0(m)}^m)\right) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(E \setminus E_{n_0(m)}^m\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon \end{aligned}$$

o‘rinli. ▲

Yegorov teoremasining amaliy ahamiyati shundan iboratki, E to‘plamda berilgan $\{f_n\}$ ketma-ketlik deyarli yaqinlashsa, o‘lchovi E to‘plamning o‘lchoviga istalgancha yaqin bo‘lgan qism to‘plam topiladiki, bu to‘plamda $\{f_n\}$ ketma-ketlik tekis yaqinlashadi. Teoremaning yana bir muhim jihati bunday qism to‘plamning qanday qurilishi ham ko‘rsatib berilganidadir.

O‘lchov bo‘yicha yaqinlashish. Biz funksional ketma-ketliklarning har bir nuqtada yaqinlashishi, tekis yaqinlashishi va deyarli yaqinlashishini bilamiz. Endi yaqinlashishning yana bir muhim turi bilan tanishamiz.

2.2.4-Ta’rif. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi uchun har qanday $\sigma > 0$ olinganda

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0$$

o‘rinli bo‘lsa, bu ketma-ketlik f funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi va $f_n \xrightarrow{\mu} f$ kabi yoziladi.

Ma’lumki, o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligining tekis yaqinlashishidan deyarli yaqinlashishi kelib chiqar edi. Tabiiy savol tug‘iladi: deyarli yaqinlashish va o‘lchov bo‘yicha yaqinlashish orasida ham bog‘liqlik bormi? Bu savolning javobini quyidagi teoremada beramiz.

2.2.4-Teorema. Agar $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi f funksiyaga deyarli yaqinlashsa, u holda bu ketma-ketlik o‘zining limit funksiyasiga o‘lchov bo‘yicha ham yaqinlashadi.

Teoremaning isbotini o‘quvchilarga mustaqil ish sifatida qoldiramiz. Lekin bu teoremaning teskarisi o‘rinli emasligiga misol keltiramiz. Ya’ni, o‘lchov bo‘yicha yaqinlashuvchi, ammo deyarli yaqinlashmaydigan ketma-ketlik quramiz.

2.2.2-Misol. $[0;1]$ kesmada har bir $k \in \mathbb{N}$ son uchun $f_1^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ funksiyalarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$f_i^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{agar } \frac{i-1}{k} \leq x \leq \frac{i}{k}, \\ 0, & \text{boshqa hollarda.} \end{cases}$$

Bu funksiyalarning har biri o‘lchovli. Ularni ketma-ket tartiblab hosil qilingan funksional ketma-ketlik $f(x) \equiv 0$ funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashishini tekshirish qiyin emas. Lekin bu ketma-ketlik hech bir nuqtada yaqinlashmaydi.

2.2.5-Izoh. Yuqorida keltirilgan misol 3.3.1-Teoremaning teskari tasdig‘i o‘rinli emasligiga isbot bo‘lsa-da, bu tasdiqni biroz boshqacharoq shaklda ifodalash mumkin.

2.3.5-Teorema. $\{f_n\}$ o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligi f funksiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashsa, bu ketma-ketlikdan f funksiyaga deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlik ajratib olish mumkin.

Teoremaning isboti o‘quvchilariga mustaqil ish sifatida qoldiriladi.

O‘lchovli funksiyaning bob avvalida berilgan umumiy ta’rifi ixtiyoriy to‘plamda berilgan funksiyalar uchun edi. Ya’ni, umuman olganda bu tushuncha uzluksiz funksiya bilan bog‘liqmas edi. Lekin, agar gap kesmada aniqlangan funksiyalar haqida ketsa, N.N.Luzin tomonidan olingan ajoyib natijani aytib o‘tish joiz bo‘ladi.

Luzin teoremasi. $[a;b]$ kesmada berilgan f funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun har qanday $\varepsilon > 0$ son olinganda ham $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan shunday φ funksiya topilib,

$$\mu\left(\{x : f(x) \neq \varphi(x)\}\right) < \varepsilon$$

tengsizlikning o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

Boshqacha aytganda, $[a;b]$ kesmadagi o‘lchovli funksiyani shu kesmadagi yetarlicha kichik o‘lchovli to‘plamdagi qiymatlarini o‘zgartirib, uzluksiz funksiyaga aylantirish mumkin. Bunday xossaga ega funksiyalarni C-xossali funksiyalar deyishni ham aynan N.N.Luzin kiritgan.

Luzin teoremasining yana bir xulosasi shuki, kesmada aniqlangan funksiya uchun C-xossaga ega bo'lishni o'lchovli funksiyaning ta'rifi sifatida qabul qilish mumkin.

Sodda funksiya. O'lhovli funksiyalarni tavsiflashda asosiy vazifani sodda funksiyalar amalga oshiradi. Sodda funksiyalar Lebeg integralini aniqlashda ahamiyatli ekanligi bilan ham ajralib turadi.

2.2.5-Ta'rif. X to'plamda μ o'lchov aniqlangan bo'lsin. Bu to'plamda berilgan f funksiya o'lchovli va ko'pi bilan sanoqlita qiymatga ega bo'lsa, sodda funksiya deyiladi.

Sodda funksiyalarni tavsiflovchi quyidagi teoremani keltiramiz.

2.2.6-Teorema. Qiymatlari $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ bo'lgan f funksiya sodda funksiya bo'lishi uchun $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$ to'plamlarning har biri o'lchovli bo'lishi zarur va yetarli.

► *Zarurligi.* f sodda funksiya, demak ta'rifga ko'ra o'lchovli. U holda har bir $\{y_n\}$ to'plamlarning asli Borel to'plamlari bo'ladi.

Yetarliligi. B ixtiyoriy Borel to'plami bo'lsin. U holda $f^{-1}(B) = \bigcup_{y_n \in B} A_n$ va A_n larning har biri o'lchovliligidan $f^{-1}(B)$ ham o'lchovli bo'lishi kelib chiqadi. Ya'ni, Borel to'plamining asli o'lchovli ekan. Demak, f sodda funksiya. ▲

Endi sodda funksiyalarning amaliy ahamiyatini ko'rsatib beruvchi quyidagi teoremani beramiz.

2.2.7-Teorema. f funksiya o'lchovli bo'lishi uchun unga tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligining mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

► *Zarurliligi.* f o'lchovli funksiya bo'lsin. Agar $m \in \mathbb{Z}$ va $n \in \mathbb{N}$ sonlari uchun $\frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n}$ bajarilsa, $f_n(x) = \frac{m}{n}$ deb olamiz. Ravshanki, har bir $n \geq 1$ uchun f_n sodda funksiya bo'ladi. Boshqa tomondan ketma-ketlikning aniqlanishiga ko'ra ixtiyoriy x uchun

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

tengsizlik o'rinli. Bu esa $f_n \rightrightarrows f$ demakdir.

Yetarliligi. O'lchovli funksiyalar ketma-ketligi tekis yaqinlashishidan ularning deyarli yaqinlashishi va limit funksiyasi ham o'lchovliligi kelib chiqadi. Bu esa f funksiyaning o'lchovli ekanligini bildiradi. ▲

2.3. TURLI FAZOLAR VA ULAR USTIDAGI O'LCHOVLARGA MISOLLAR.

Bu paragrafda ba'zi muxim o'lchovlarga misollar keltiramiz.

- S to'plam uchun uning quvvatini mos qo'yuvchi $\mu(S)$ o'lchov. Bu o'lchov sanash o'lchovi deyiladi.
- $(X, \mathcal{B})$ o'lchovli fazoda har bir $x \in X$ nuqta uchun quyidagicha funksiyani qaraylik:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \qquad \forall A \in \mathcal{B}.$$

  Bu funksiyaning ehtimollik o'lchovi bo'lishini tekshirib ko'rish qiyin emas. δ_x o'lchovga Dirak o'lchovi deyiladi. Dirak o'lchovining ehtimollar nazariyasida keng qo'llanilishini aytib o'tish darkor.

- (X, ρ) metrik fazo bo'lsin. Har bir $U \subset X$ to'plam uchun uning diametrini quyidagicha aniqlaymiz

$$diamU := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in U\}.$$

  Ixtiyoriy $S \subset X$ to'plam olamiz va $\delta > 0$ soni uchun funksiyani aniqlaymiz

$$H_\delta^d(S) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(diamU_i)^d : \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \supset S, diamU_i < \delta\right\}.$$

  Bu funksiya δ soniga nisbatan monoton kamayuvchi bo'lib, uning $\delta \to 0$ bo'lganda limiti cheksiz bo'lishi ham mumkin. Shu bois, $\lim_{\delta\to 0} H_\delta^d(S)$ mavjud bo'ladi (chekli bo'lishi shart emas).

$$H^d(S) := \sup_{\delta>0} H_\delta^d(S) = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^d(S).$$

  Tekshirish mumkinki, H^d tashqi o'lchov bo'ladi. Bu tashqi o'lchovga nisbatan barcha o'lchovli to'plamlar σ-algebrasida esa o'lchov deyiladi va S to'plamdagi d o'lchamli Hausdorf o'lchovi deyiladi. Bu o'lchov dinamik sistemalarda, fraktal to'plamlarni tavsiflovchi mezondir.

2.4. INTEGRALLAR.

Matematik analiz kursidan yaxshi ma'lum bo'lgan Riman integrali tushunchasini faqat uzluksiz yoki uzilish nuqtalari "unchalik ko'p bo'lmagan" funksiyalar uchun qo'llash mumkin. Aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida uzilishga ega bo'lgan o'lchovli funksiyalar uchun Riman integrali umuman yaramaydi. Agar o'lchovli funksiya abstrakt to'plamda aniqlangan bo'lsa, bunday funksiya uchun uzluksizlik tushunchasining o'zi ham ma'noga ega bo'lmasligi mumkin. Shu bois bunday funksiyalar uchun integral tushunchasini boshqa usulda aniqlash zarurati tug'iladi. Biz o'lchovli funksiyalar uchun Lebeg integralini o'rganamiz.

Lebeg integralini qurishning Riman integralidan farqi shundaki, x nuqtalar sonlar o'qidagi yaqinligiga qarab emas, balki bu nuqtalardagi funksiyaning qiymatlarining yaqinligi bo'yicha guruhlanadi. Bu esa o'z navbatida integralni funksiyalarning kengroq sinfi uchun qo'llash imkonini beradi.

Bundan tashqari o'lchov aniqlangan har qanday fazodagi funksiya uchun Lebeg integrali bir xil kiritiladi. Ya'ni, Riman integraliga o'xshab, dastlab bir o'zgaruvchili keyin ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun integralni aniqlash shart emas. Shuningdek, o'lchov aniqlangan abstrakt fazodagi funksiyalar uchun Riman integrali umuman ma'noga ega emas.

Bu bobda alohida aytib o'tilmasa, har doim $(X, \mathcal{B})$ o'lchovli fazoda σ-additiv μ o'lchov berilgan deb qaraladi. Shuningdek, qaralayotgan barcha $A \subset X$ to'plamlar o'lchovli va berilgan f funksiya ham o'lchovli deb hisoblanadi.

Lebeg integralini dastlab, sodda funksiyalar uchun aniqlaymiz. So'ng ixtiyoriy o'lchovli funksiya uchun Lebeg integrali tushunchasini kiritamiz.

Sodda funksiyalar uchun Lebeg integrali. X to'plamda berilgan f sodda funksiya quyidagi turli qiymatlarga ega bo'lsin

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

$A \subset X$ o'lchovli to'plam uchun quyidagi qatorni aniqlaymiz

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n), \quad A_n = \{x \in A : f(x) = y_n\}. \tag{0.1}$$

2.4.1-Ta'rif. X to'plamda berilgan f sodda funksiya uchun (0.1) qator absolyut yaqinlashsa, bu funksiya A to'plamda (μ o'lchov bo'yicha) integrallanuvchi yoki jamlanuvchi deyiladi, aks holda f funksiya A to'plamda integrallanmaydi yoki jamlanmaydi deyiladi. Agar f sodda funksiya integrallanuvchi bo'lsa, (0.1) qatorning yig'indisiga f funksiyaning A to'plamdagi integrali deyiladi va $\int_A f d\mu$ kabi yoziladi.

2.4.1-Izoh. Bu ta'rifda barcha y_n qiymatlar turli deb tushunish kerak. Lekin, sodda funksiyaning integralini $c_k \mu(B_k)$ ko'paytmalarning yig'indisi ko'rinishida ham yozish mumkinki, bunda c_k sonlarning turli bo'lishi umuman olganda shart emas. Bu esa sodda funksiya integrallanuvchiligini quyidagicha ifodalash imkonini beradi.

2.4.1-Lemma. Aytaylik $A \subset X$ to'plam juft-jufti bilan keishmaydigan to'plamlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalansin, ya'ni $A = \bigcup_k B_k$. X to'plamda berilgan f sodda funksiya har bir B_k to'plamda faqat bitta c_k qiymatni qabul qilsin. U holda f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lishi uchun

$$\sum_k c_k \mu(B_k) \tag{0.2}$$

qator absolyut yaqinlashuvchi bo'lishi zarur va yetarli. Agar f integrallanuvchi bo'lsa,

$$\int_A f d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k)$$

tenglik o'rinli.

► Ravshanki, har bir $A_n = \{x \in A : f(x) = y_n\}$ to'plam $c_k = y_n$ bo'lgan B_k to'plamlarning yig'indisidan iborat. Shu bois

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k)$$

o'rinli. O'lchovning qiymati nomanfiy bo'lgani uchun

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k = y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \mu(B_k)$$

tengliklar ham o'rinli. Bundan $\sum_n y_n \mu(A_n)$ va $\sum_k c_k \mu(B_k)$ qatorlar bir vaqtda yoki absolyut yaqinlashadi yoki uzoqlashadi. ▲

Sodda funksiyalarning Lebeg integralining asosiy xossalarini isbotsiz keltiramiz.

2.4.1-Teorema. X to'plamda f va g sodda funksiyalar berilgan bo'lsin.

A) Agar $A \subset X$ to'plamda f va g funksiyalar integrallanuvchi bo'lsa, $f + g$ funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi va quyidagi tenglik o'rinli

$$\int_A [f + g] d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

B) Agar f funksiya $A \subset X$ to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ uchun αf funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi va quyidagi tenglik o'rinli

$$\int_A \alpha f d\mu = \alpha \int_A f d\mu.$$

C) Agar f funksiya $A \subset X$ to'plamda chegaralangan bo'lsa, bu funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'ladi. Shuningdek, ixtiyoriy $x \in A$ uchun $|f(x)| \leq M$ o'rinli bo'lsa, quyidagi tengsizlik bajariladi

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq M \mu(A).$$

Chekli o'lchovli to'plamda Lebeg integrali.

2.4.2-Ta'rif. X to'plamda o'lchovli f funksiya berilgan bo'lsin. Agar $A \subset X$ to'plamda f funksiyaga tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi mavjud bo'lsa, f funksiya A to'plamda integrallanuvchi yoki jamlanuvchi deyiladi, aks holda f funksiya A to'plamda integrallanmaydi yoki jamlanmaydi deyiladi. Agar f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, quyidagi

$$I = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu \tag{0.3}$$

limitga f funksiyaning A to'plam bo'yicha integrali deyiladi va $\int_A f d\mu$ kabi yoziladi.

2.4.2-Ta'rif korrekt bo'lishi uchun (0.3) limit har qanday tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligi uchun mavjud bo'lishi, bu limit berilgan f o'lchovli funksiya uchun unga tekis yaqinlashuvchi integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligining tanlanishiga bog'liq bo'lmasligi va integrallanuvchilikning bu ta'rifi sodda funksiyalar uchun 2.4.1-Ta'rif bilan ustma-ust tushishi kerak.

Ta'kidlash joizki, yuqorida sanalgan uchchala shart ham bajariladi. Darhaqiqat, 2.4.1-Teoremaga ko'ra quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi

$$\left|\int_A f_n d\mu - \int_A f_m d\mu\right| \leq \mu(A) \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)|.$$

Bundan birinchi shartning bajarilishi kelib chiqadi. Ikkinchi shartning bajarilishi tekshirish uchun f funksiyaga tekis yaqinlashuvchi $\{f_n\}$, $\{\tilde{f}_n\}$ integrallanuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligini olamiz va bu ketma-ketliklar uchun (0.3) turlicha bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda quyidagicha aniqlangan sodda funksiyalar ketma-ketligi

$$\varphi_n = \begin{cases} f_{\frac{n}{2}}, & \text{agar } n \text{ juft bo'lsa,} \\ \tilde{f}_{\frac{n+1}{2}}, & \text{agar } n \text{ toq bo'lsa,} \end{cases}$$

ham integrallanuvchi va f funksiyaga tekis yaqinlashadi. Lekin bu ketma-ketlik uchun (0.3) mavjud emas. Bu esa birinchi shartga zid. Uchinchi shartning bajarilishini tekshirish uchun har bir $n \geq 1$ natural sonda $f_n = f$ deb olish yetarli.

2.4.2-Izoh. Lebeg integrali ikki bosqichda kiritildi. Birinchi bosqich integralni funksiyalarning nisbatan sodda sinfi (sodda funksiyalar) uchun absolyut yaqinlashuvchi qator ko'rinishida kiritishdan iborat bo'lgan bo'lsa, ikkinchi bosqichda integral kengroq sinf uchun limitga o'tish orqali kiritildi. Shu bois Lebeg integralining xossalari asosan sodda funksiyalar uchun tekshirilib, so'ng limitga o'tish yordamida isbotlanadi.

Lebeg integralining ta'rifidan bevosita kelib chiqadigan xossalarini isbotsiz keltiramiz.

1°. $\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A)$.

2°. Ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ uchun

$$\int_A \alpha f d\mu = \alpha \int_A f d\mu$$

tenglik o'rinli. Shuningdek, tenglikning o'ng tomonidagi integral mavjud bo'lsa, chap tomonidagi integral ham mavjud.

3°. `Additivlik:`

$$\int_A [f+g] d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

Bu yerda ham tenglikning o'ng tomonidagi har bir integral mavjud bo'lsa, chapdagi integral ham mavjud bo'ladi.

4°. A to'plamda chegaralangan to'plam integrallanuvchi.

5°. `Monotonlik:` agar f nomanfiy funksiya integrallanuchi bo'lsa, u holda

$$\int_A f d\mu \geq 0$$

o'rinli.

6°. Agar $\mu(A) = 0$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy funksiya uchun $\int_A f d\mu = 0$ o'rinli.

7°. Agar deyarli hamma yerda $f = g$ bo'lsa, u holda

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$$

bajariladi. Bu har ikki funksiya A to'plamda bir vaqtda yoki integrallanuvchiligini yoki integrallanmasligini bildiradi.

8°. Agar φ funksiya A to'plamda integrallanuvchi va deyarli hamma yerda $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi bo'ladi.

9°. f va $|f|$ funksiyalar A to'plamda bir vaqtda yoki integrallanuvchi bo'ladi yoki integrallanmaydi.

Lebeg integralining σ-additivligi va absolyut uzluksizligi.
Lebeg integralining sodda xossalari isbotsiz keltirib o'tilgan edi. Endi quyidagi

$$F(A) = \int_A f d\mu \tag{0.4}$$

to'plam funksiyasi orqali Lebeg integralining boshqa muhim xossalarini o'rganamiz.

Ba'zi xossalarni isbotsiz keltiramiz.

2.4.2-Teorema. $\{A_n\}$ juft-jufti bilan kesishmaydigan o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi bo'lsin. U holda

$$\int_A f d\mu = \sum_n \int_{A_n} f d\mu \tag{0.5}$$

tenglik o'rinli. Bunda (0.5) tenglikning chap tomonidagi integralning mavjudligidan o'ng tomonidagi har bir integrallarning mavjudligi va qatorning absolyut yaqinlashishi kelib chiqadi.

2.4.1-Natija. Agar f funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya ixtiyoriy $A' \subset A$ o'lchovli to'plamda ham integrallanuvchi.

2.4.3-Teorema. $\{A_n\}$ juft-jufti bilan kesishmaydigan o'lchovli to'plamlar ketma-ketligi bo'lsin. Agar quyidagi

$$\sum_n \int_{A_n} |f| d\mu \tag{0.6}$$

qator yaqinlashsa, u holda f funksiya $A = \bigcup_n A_n$ to'plamda integrallanuvchi va

$$\int_A f d\mu = \sum_n \int_{A_n} f d\mu$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

2.4.4-Teorema.(`Chebishev tengsizligi`) Agar A to'plamda $\varphi(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda har qanday $c > 0$ soni uchun

$$\mu\{x \in A : \varphi(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A \varphi d\mu \tag{0.7}$$

tengsizlik o'rinli.

2.4.5-Teorema. Agar $\int_A |f| d\mu = 0$ bo'lsa, u holda A to'plamning deyarli hamma yerida $f(x) = 0$ bo'ladi.

Avvalgi paragrafda aytilgan Lebeg integralining 6° xossasini quyidagi teoremaning limitga oʻtilgan koʻrinishi deb tushunish mumkin.

2.4.6-Teorema. (`Lebeg integralining absolyut uzluksizligi`) f funksiya A toʻplamda integrallanuvchi boʻlsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ soni topiladiki, $\mu(A') < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $A' \subset A$ oʻlchovli toʻplam uchun

$$\left| \int_{A'} f d\mu \right| < \varepsilon$$

tengsizlik oʻrinli boʻladi.

► Ta'kidlash joizki, agar f chegaralangan boʻlsa, teoremaning tasdigʻi oʻrinli ekanligi ravshan. A toʻplamda ixtiyoriy integrallanuvchi f funksiya olamiz. Quyidagi toʻplamlarni aniqlaymiz

$$A_n = \{x \in A : n \leq f(x) < n+1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

U holda 2.4.1-Teoremaga koʻra

$$\int_A |f| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu$$

tenglikka egamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun $N \in \mathbb{N}$ sonni shunday tanlaymizki,

$$\sum_{n>N} \int_{A_n} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajarilsin. Qulaylik uchun belgilash kiritamiz

$$B_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n, \quad C_N = A \setminus B_N,$$

va $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$ sonni olamiz. Agar $A' \subset A$ toʻplam uchun $\mu(A') < \delta$ oʻrinli boʻlsa, u holda quyidagini topamiz

$$\left| \int_{A'} f d\mu \right| \leq \int_{A'} |f| d\mu = \int_{A' \cap B_N} |f| d\mu + \int_{A' \cap C_N} |f| d\mu.$$

Lebeg integralining 5° xossasiga koʻra

$$\int_{A' \cap B_N} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik bajariladi. Boshqa tomondan quyidagi oʻrinli

$$\int_{A' \cap C_N} |f| d\mu \leq \int_{C_N} |f| d\mu = \sum_{n>N} \int_{A_n} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demak,

$$\int_{A'} |f| d\mu < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. ▲

2.4.3-Izoh. Isbot qilingan teoremaning ma'nosi quyidagicha: f nomanfiy funksiya X to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda (0.4) to'plam funksiyasi barcha $A \subset X$ o'lchovli to'plamlarda aniqlangan, nomanfiy va σ-additiv bo'ladi. Boshqacha aytganda nomanfiy funksiya uchun (0.4) X to'plamda σ-additiv o'lchov bo'ladi va μ o'lchovga nisbatan absolyut uzluksizdir.

Lebeg integrali ostidan limitga o'tish. Matematikaning turli sohalarida integral ostidan limitga o'tish yoki yaqinlashuvchi qatorni hadlab integrallash masalalari tez-tez uchrab turadi. Matematik analiz kursidan yaxshi ma'lumki, bunday limitga o'tish imkonini beruvchi yetarli shartlardan biri bu berilgan ketma-ketlikning tekis yaqinlashuvchiligidir. Integral ostidan limitga o'tish imkonini beruvchi bunday usullarning umumlashmasi bo'lgan teoremalarni isbotlaymiz.

Lebeg teoremasi. $\{f_n\}$ ketma-ketlik A to'plamda f funksiyaga yaqinlashsin. Agar A to'plamning har bir nuqtasida

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tengsizlik bajarilsa va φ funksiya A to'plamda integrallanuvchi bo'lsa, u holda f funksiya ham A to'plamda integrallanuvchi va

$$\int_A f_n d\mu \to \int_A f d\mu$$

o'rinli bo'ladi.

► Teorema shartidan $|f(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlikning bajarilishi kelib chiqadi. U holda Lebeg integralining 7° xossasiga ko'ra f ham integrallanuvchi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonini olamiz. Integralning absolyut uzliksizligiga ko'ra shunday $\delta > 0$ soni topiladiki, $\mu(B) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday $B \subset A$ o'lchovli to'plam uchun

$$\int_B \varphi d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \tag{0.8}$$

o'rinli. Yegorov teoremasiga ko'ra B to'plmani shunday tanlash mumkinki, $C = A \backslash B$ to'plamda $f_n \rightrightarrows f$ bo'ladi. Ya'ni, shunday $N \in \mathbb{N}$ mavjudki, har qanday $n > N$ va ixtiyoriy $x \in C$ uchun quyidagi tengsizlik bajariladi

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}.$$

U holda

$$\int_A f d\mu - \int_A f_n d\mu = \int_C [f - f_n] d\mu + \int_B f d\mu - \int_B f_n d\mu$$

tenglikdan $|f(x)| \leq \varphi(x)$ va $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ ekanligini hisobga olib, (0.8) tengsizlikka ko'ra quyidagini hosil qilamiz

$$\left| \int_A f d\mu - \int_A f_n d\mu \right| < \varepsilon.$$

▲

2.4.4-Izoh. Funksiyaning o'lchovi nol bo'lgan to'plamdagi qiymatlarini o'zgartirish funksiyaga ta'sir qilmasligini hisobga olib, Lebeg teoremasidagi shartlarni $f_n \xrightarrow{d.y.} f$ va $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ tengsizlikning deyarli hamma yerda o'rinli bo'lishiga almashtirish mumkin.

2.4.2-Natija. Agar $\{f_n\}$ ketma-ketlik A to'plamda tekis chegaralangan va $f_n \longrightarrow f$ bo'lsa, u holda

$$\int_A f_n d\mu \longrightarrow \int_A f d\mu$$

o'rinli bo'ladi.

Levi teoremasi. A to‘plamda integrallanuvchi $\{f_n\}$ ketma-ketlik quyidagi shartlarni qanoatlantirsin.

1) Ixtiyoriy $x \in A$ uchun $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$ o‘rinli;

2) Shunday $K > 0$ son mavjudki, har bir $n \geq 1$ uchun $\int_A f_n d\mu \leq K$ o‘rinli.

U holda A to‘plamning deyarli hamma yerida $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ mavjud va chekli. Shuningdek, f funksiya A to‘plamda integrallanuvchi va

$$\int_A f_n d\mu \longrightarrow \int_A f d\mu$$

o‘rinli.

2.4.5-Izoh. Bu yerda $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ chekli bo‘lmasa, shu nuqtalarda $f(x) = 0$ deb olish mumkin.

2.4.3-Natija. Agar A to‘plamda $\phi_n(x) \geq 0$ va $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \phi_n(x) d\mu < \infty$ bo‘lsa, u holda A to‘plamning deyarli hamma yerida $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$ qator yaqinlashuvchi va

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \phi_n(x) d\mu$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Fatu teoremasi. $\{f_n\}$ o‘lchovli nomanfiy funksiyalar ketma-ketligi A to‘plamda deyarli f funksiyaga yaqinlashsin. Agar

$$\int_A f_n d\mu \leq K, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda f funksiya ham A to‘plamda integrallanuvchi va

$$\int_A f d\mu \leq K$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

► Quyidagi ketma-ketlikni aniqlaymiz

$$\varphi_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

Ravshanki, har bir $n \geq 1$ uchun φ_n o‘lchovli. Shuningdek, $0 \leq \varphi_n(x) \leq f_n(x)$ tengsizlikdan, φ_n ham A to‘plamda integrallanuvchi bo‘lishi va

$$\int_A \varphi_n(x) d\mu \leq \int_A f_n(x) d\mu \leq K$$

kelib chiqadi. $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlikning aniqlanishiga ko‘ra $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots \leq \varphi_n(x) \leq \dots$ munosabat va

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

deyarli hamma yerda o‘rinli. Endi $\{\varphi_n\}$ ketma-ketlik uchun Levi teoremasini qo‘llab, kerakli natijaga erishamiz.

▲

Cheksiz o‘lchovli to‘plamda Lebeg integrali. Ushbu bobning avvalgi paragraflar-ida Lebeg integrali va uning xossalarini chekli o‘lchovli to‘plamda berilgan funksiyalar uchun o‘rgandik. Lekin, amaliy masalalar har doim ham chekli o‘lchovli to‘plamlar ustida qaralmasligini hisobga olsak, Lebeg integralini o‘lchovi cheksiz to‘p-lamlarda berilgan funksiyalar uchun ham aniqlash zarurati tug‘iladi. Buning uchun biz $(X, \mathcal{B})$ o‘lchovli fazoda σ-chekli μ o‘lchov berilgan hol bilan cheklanamiz. Ya’ni, shunday $\{X_n\}$ o‘lchovli ketma-ketlik mavjudki,

$$X = \bigcup_n X_n, \quad \mu(X_n) < \infty. \tag{0.9}$$

Ta’kidlash joizki, (0.9) yoyilmadagi X_n o‘lchovli to‘plamlar juft-jufti bilan kesishmasligi umuman olganda shart emas. Aslida σ-chekli o‘lchov uchun kamida bitta juft-jufti bilan kesishmaydigan X_n o‘lchovli to‘plamlar ketma-ketligi ta’rifga ko‘ra har doim mavjud. Lekin biz (0.9) yoyilmaning tashkil etuvchilarini $X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \ldots$ kengayuvchi ketma-ketlik deb qaraymiz. Bunday yoyilma har doim mavjud. Darhaqiqat, agar X_n to‘plamlar juft-jufti bilan kesishmasa, $\tilde{X}_n = \bigcup_{k=1}^n X_n$ kengayuvchi ketma-ketlik bo‘ladi.

2.4.3-Ta’rif. X to‘plamda σ-chekli μ o‘lchov va f o‘lchovli funksiya berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $A \subset X$ chekli o‘lchovli to‘plamda f funksiya integrallanuvchi va har qanday $\{X_n\}$ kengayuvchi ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X_n} f d\mu \tag{0.10}$$

limit mavjud va $\{X_n\}$ ketma-ketlikning tanlanishiga bog‘liq bo‘lmasa, f funksiya X to‘plamda integrallanuvchi deyiladi. Agar f funksiya X to‘plamda integrallanuvchi bo‘lsa, (0.10) limitga bu funksiyaning X to‘plamdagi integrali deyiladi va $\int_X f d\mu$ kabi belgilanadi.

2.4.6-Izoh. Agar f funksiya $\mu(A) < \infty$ bo‘lgan $A \subset X$ to‘plamning tashqarisida nolga teng bo‘lsa, yuqoridagi integralning ta’rifi A to‘plamdagi integralning ta’rifi bilan ustma-ust tushadi. Sodda funksiya uchun integralning ta’rifini cheksiz o‘lchovli to‘plam uchun o‘tkazish mumkin. Bunda sodda funksiyaning integrallanuvchili bo‘lishi uchun bu funksiya noldan farqli qiymatlarni faqat chekli o‘lchovli to‘plamlarda qabul qilishi zarur. Ixtiyoriy funksiya uchun 4.2.1-Ta’rif esa aynan chekli o‘lchovli to‘plamlar uchun xosdir. Ya’ni, agar $\mu(X) = \infty$ bo‘lsa, $\{f_n\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligining tekis yaqinlashishidan ularning integrallari ketma-ketligi ham yaqinlashishi umuman olganda kelib chiqmaydi.

Chekli o‘lchovli to‘plamda kiritligan Lebeg integralining ko‘plab xossalari cheksiz o‘lchovli hol uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Ba’zi xossalar esa biroz o‘zgaradi. Quyida ana shunday xossalar haqida aytib o‘tamiz.

- 4.2-Paragrafdagi xossalardan chegaralangan funksiyaning integrallanuvchi bo‘lishi haqidagi xossa $\mu(X) = \infty$ uchun umuman olganda to‘g‘ri emas. Xususan, noldan farqli o‘zgarmas funksiya cheksiz o‘lchovli to‘plamda integrallanuvchi emas.

- Lebeg, Levi va Fatu teoremalari $\mu(X) = \infty$ bo‘lganda ham o‘rinli.

Lebeg va Riman integrallarini taqqoslash. Bu paragrafda integralning bu ikki turi orasidagi bog‘liqlik va farqlarni aytib o‘tamiz.

- Agar $[a; b]$ kesmada berilgan f funksiya Riman ma’nosida integrallanuvchi bo‘lsa, bu funksiya Lebeg ma’nosida ham integrallanuvchi va

$$(R)\int_a^b f(x)dx = \int_{[a;b]} f d\mu$$

o‘rinli.

- Ma’lumki, $[a;b]$ kesmada chegaralangan har qanday funksiya Riman ma’nosida integrallanuvchi bo‘lishi shart emas. Lekin bunday funksiyalar $[a;b]$ kesmada har doim Lebeg ma’nosida integrallanuvchi bo‘ladi.

- $[a;b]$ kesmada chegaralanmagan funksiya Riman ma’nosida integrallanuvchi emas. Lekin ularning aksariyati Lebeg ma’nosida integrallanuvchi bo‘ladi. Masalan, $f(x) \geq 0$ funksiya uchun har qanday $\varepsilon > 0$ olinganda

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

integral mavjud va bu integrallar $\varepsilon \to 0$ bo‘lganda chekli limitga ega bo‘lsa, f funksiya $[a;b]$ kesmada Lebeg ma’nosida integrallanuvchi bo‘ladi va bu integral uchun

$$\int_{[a;b]} f d\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

o‘rinli.

- $[a;b]$ kesmada berilgan f chegaralanmagan funksiya uchun Riman ma’nosidagi xosmas integral shartli yaqinlashsa, ya’ni

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx < \infty, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|dx = \infty$$

bo‘lsa, bu funksiya Lebeg ma’nosida integrallanuvchi emas.

- Agar f funksiya butun to‘g‘ri chiziqda yoki cheksiz intervalda qaralsa, uning Riman integrali faqat xosmas ma’noda mavjud bo‘lishi mumkin. Bu holda ham bunday integral absolyut yaqinlashsa, f funksiyaning Lebeg integrali mavjud bo‘ladi.

2.5. EHTIMOLLIK O‘LCHOVLARI VA ULARNING QO‘LLANILISHI.

Biz avvalgi boblarda ehtimollik o‘lchovi bu o‘lchovning xususiy holi bo‘lib, unda butun fazoning o‘lchovi 1 deb olinishini aytib o‘tgan edik. Endi ehtimollik o‘lchovining ba’zi bir fizik masalalarda ham qo‘llanishiga doir misollarni qarab o‘tamiz.

$\Gamma = (V, L)$ – graf berilgan bo‘lsin. Bunda V sanoqli to‘plam grafning uchlaridan iborat va L barcha qirralardan iborat to‘plamdir. Odatda bitta qirraning uchlariga qo‘shni uchlar deyiladi. V to‘plamning barcha qism to‘plamlaridan iborat oilani $\mathcal{P}(V)$ deb belgilaylik. $\mathcal{P}(V)$ to‘plam kontinuum quvvatli bo‘lgani uchun agar biz unda o‘lchov aniqlamoqchi bo‘lsak, unda qo‘shimcha struktura kiritish lozim bo‘ladi. $\mathcal{P}(V)$ to‘plamni $\{0, 1\}$ diskret fazolarning $|V|$ kontinuumta ko‘paytmasining Hausdorf kompakt fazosi deb qaraymiz. $\mathcal{O}(V)$ bilan V to‘plamning chekli qism to‘plamlari oilasini belgilaymiz. Ixtiyoriy $A \subset B \subset V$ uchun

$$[A, B] = \{E \in \mathcal{P}(V) : E \cap B = A\}$$

to‘plamni aniqlaymiz. Agar $B \in \mathcal{O}(V)$ bo‘lsa, u holda $[A, B]$ chekli o‘lchamli silindr deyiladi. Barcha chekli silindrlar to‘plami $\mathcal{P}(V)$ topologiyada ochiq to‘plamlar bazisini tashkil qiladi.

$\mathcal{B}(V)$ bilan $\mathcal{P}(V)$ topologiyadagi Borel to‘plamlari oilasini belgilaymiz. U holda $\mathcal{B}(V)$ chekli silindrlardan hosil qilingan σ-algebra bo‘ladi. $(V, \mathcal{B}(V))$ fazodagi barcha nomanfiy o‘lchovlar sinfini $\mathcal{M}$ va barcha ehtimollik o‘lchovlari sinfini esa $\mathcal{E}$ kabi belgilaymiz.

Quyidagi $c : V \times V \to \{0, 1\}$ akslantirishni aniqlaymiz:

$$c(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{agar x va y qo‘shni bo‘lsa,} \\ 0, & \text{aks holda.} \end{cases}$$

Shuningdek, $A \subset V$ uchun

$$\partial A = \{y \in V \setminus A : \exists x \in A, c(x, y) = 1\}$$

to‘plamni aniqlaymiz. Har bir $x \in A$ uchun $\partial x \in \mathcal{O}(V)$ deb faraz qilamiz. Ya’ni, biz qarayotgan cheksiz grafning har bir qirrasidan cheklita qirra chiqadi.

$\mu \in \mathcal{E}$ o‘lchov quyidagi xossalarga ega bo‘lsin:

1. Barcha $[A, \Lambda]$ chekli silindr uchun $\mu([A, \Lambda]) > 0$ bo‘ladi;
2. Agar $\Lambda, \Lambda' \in \mathcal{O}(V)$ to‘plamlar uchun $\Lambda \cup \partial\Lambda \subset \Lambda'$ va $A \subset \Lambda$, $B \subset \Lambda' \setminus \Lambda$ o‘rinli bo‘lsa, u holda
$$\frac{\mu([A \cup B, \Lambda'])}{\mu([B, \Lambda' \setminus \Lambda])} = \frac{\mu([A \cup (B \cap \partial\Lambda), \Lambda'])}{\mu([B \cap \partial\Lambda, \Lambda' \setminus \Lambda])}$$
tenglik bajariladi.

Bunday ehtimollik o‘lchoviga Markov tasodifiy maydoni deyiladi.

Bunday o‘lchovlar nafaqat ehtimollar nazariyasida balki, statistik fizikada katta ahamiyatga egaligini aytish joiz. Markov tasodifiy maydoni va yaqin qo‘shnilik holatidagi Gibbs o‘lchovlari ekvivalent tushunchalar bo‘lib, ularning har ikkisi o‘z o‘rnida amaliyotda qo‘llaniladi. Biz Gibbs o‘lchovlari haqida keyinroq yana batafsil to‘xtalib o‘tish uchun hozircha shu ma’lumotlar bilan cheklanamiz.

3-MAVZU: INVARIANT O‘LCHOVLAR

Dinamik sistemalar nazariyasi o‘z ichiga fizika, biologiya, kimyo va boshqa ko‘plab fan tarmoqlarida paydo bo‘ladigan masalalarni qamrab olgan matematikaning yo‘nalishi hisoblansada, uning asosiy masalalari o‘lchovlar nazariyasi obyektlariga qurilganini eslatib o‘tish joiz. Ushbu bobda biz dinamik sistemaning ta’rifi, uning asosiy masalalari, invariant o‘lchov, ergodiklik xossasi kabi tushunchalar bilan tanishamiz.

3.1. INVARIANT O‘LCHOVLAR.

Dinamik sistemaga ta’rif berishdan oldin, uning ikki turi: diskret vaqtli va uzluksiz vaqtli dinamik sistemalar mavjudligini aytib o‘tamiz.

Diskret vaqtli dinamik sistema $X \neq \varnothing$ to‘plam va $f : X \to X$ akslantirishdan iborat. Ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun f akslantirishning n marta o‘z-o‘ziga ta’sir qildirish orqali hosil qilingan akslantirishni aniqlaymiz, ya’ni $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$. Shuningdek, f^0 deb Id – ayniy akslantirish tushuniladi. Agar f teskarilanuvchi bo‘lsa, u holda $f^{-n} = \underbrace{f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n}$ akslantirishni aniqlash mumkin. Demak, $f^{n+m} = f^n \circ f^m$ ekanligidan f akslantirishning barcha iteratsiyalari yarim gruppa bo‘ladi. Agar f teskarilanuvchi bo‘lsa, bu gruppa bo‘ladi.

Shunday qilib, diskret dinamik sistemani ixtiyoriy abstrakt to‘plam uchun aniqladik. Lekin, amaliy masalalar qaralayotganda X to‘plam f akslantirish natijasida saqlanadigan ba’zi qo‘shimcha strukturalarga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, (X, f) o‘lchovli fazo va o‘lchovni saqlaydigan akslantirish, topologik fazo va uzluksiz akslantirish, metrik fazo va izometriya yoki silliq ko‘pxillik va differensiallanuvchi operator bo‘lishi mumkin.

Uzluksiz vaqtli dinamik sistema esa X fazo va bir parametrli $f^t : X \to X$, $t \in \mathbb{R}$ yoki $t \in \mathbb{R}_+$ akslantirishlar oilasidan iborat bo‘ladi. Bunda ham bir parametrli akslantirishlar oilasi yarim gruppa bo‘ladi. Agar parametr $\mathbb{R}$ bo‘yicha o‘zgarsa, bunday dinamik sistemaga oqim, agar parametr $\mathbb{R}_+$ bo‘yicha o‘zgarsa, yarim oqim deyiladi. Ta’kidlash joizki, oqim uchun har bir t sonda f^t akslantirish teskarilanuvchi, ya’ni $f^{-t} = (f^t)^{-1}$. Shuningdek har bir t_0 parametr uchun $(f^{t_0})^n = f^{t_0 n}$ ko‘rinishdagi iteratsiyalar diskret vaqtli dinamik sistemani hosil qiladi.

Biz dinamik sistemalarni alohida diskret yoki uzluksiz vaqtli deb ajratmasdan umumiy tushuncha va xossalarini keltiramiz. Shu bois berilgan X fazodagi dinamik sistema deganda f^t akslantirishlar oilasini tushunamizki, t parametr $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$ yoki $\mathbb{Z}_+$ to‘plamlarning faqat bittasida o‘zgaradi. Ixiyoriy $x \in X$ nuqta uchun uning musbat orbitasini $\mathcal{O}_f^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} f^t(x)$ kabi aniqlaymiz. Agar f teskarilanuvchi bo‘lsa, $x \in X$ nuqtaning manfiy orbitasini $\mathcal{O}_f^-(x) = \bigcup_{t<0} f^t(x)$ kabi aniqlaymiz. Shuningdek, orbita $\mathcal{O}_f(x) = \bigcup_t f^t(x)$ kabi aniqlanadi. Ravshanki, orbita musbat va manfiy orbitalarning yig‘indisiga teng. Agar $x \in X$ nuqta uchun $f^T(x) = x$ o‘rinli bo‘lsa, bu nuqtaga T-davriy nuqta deyiladi. Davriy nuqtaning orbitasi esa davriy orbita deyiladi. Agar har qanday t uchun $f^t(x) = x$ bo‘lsa, x nuqtaga qo‘zg‘almas nuqta deyiladi. Agar $x \in X$ nuqta davriy nuqta bo‘lib, qo‘zg‘almas nuqta bo‘lmasa, $f^T(x) = x$ tenglikni qanoatlantiruvchi eng kichik $T > 0$ songa x nuqtaning eng kichik davri deyiladi. Agar biror $s > 0$ soni uchun $f^s(x)$ davriy nuqta bo‘lsa, x nuqtaga maxsus davriy nuqta deyiladi. Ravshanki, f teskarilanuvchi bo‘lsa, maxsus davriy nuqta davriy nuqta bo‘ladi.

Dinamik sistemalarning eng muhim xossasi bo‘lgan ergodiklik tushunchasini berishdan oldin o‘lchovni saqlovchi akslantirish haqida so‘z yuritamiz.

3.1.1-Ta'rif. $(X, \mathcal{B})$ o'lchovli fazoda $T : X \to X$ o'lchovli funksiya va μ ehtimollik o'lchovi berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $A \in \mathcal{B}$ uchun $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ o'rinli bo'lsa, T funskiya μ *o'lchovni saqlovchi* funksiya, μ o'lchovga esa T funksiyaga nisbatan invariant deyiladi.

3.1.1-Misol. $X = \{x_1, x_2\}$ va $\mathcal{P}(X)$ algebrani olaylik. Agar $T = Id$ akslantirish qaralsa, har qanday $\mu : X \to \mathbb{R}_+$ ehtimollik o'lchovi T akslantirishga nisbatan invariant bo'ladi. Agar T akslantirish $T(x_1) = x_2$, $T(x_2) = x_1$ kabi aniqlangan bo'lsa, bu akslantirishga nisbatan invariant bo'lgan ehtimollik o'lchovi yagona.

3.1.2-Misol. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ to'plamda $\mathcal{P}(X)$ algebrani qaraymiz. Ehtimollik o'lchovi sifatida ixtiyoriy $A \subset X$ uchun $\mu(A) = \frac{|A|}{n}$ o'lchovni olamiz. U holda μ o'lchov $T : X \to X$ o'lchovli funksiyaga nisbatan invariant bo'lishi uchun bu funksiyaning biyeksiya bo'lishi zarur va yetarli.

3.1.3-Misol. $\mathbb{R}$ to'g'ri chiziqda $\mathcal{B}$ Borel σ-algebrasini qaraymiz. Biror $a \in \mathbb{R}$ uchun $T_a : X \to X$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz

$$T_a(x) = x + a.$$

Bu funksiya o'lchovli ekanligi ma'lum. Agar o'lchov sifatida chiziqli Lebeg o'lchovini olsak, T_a funksiya bu o'lchovni saqlaydi.

3.1.4-Misol. Tekislikda determinanti 1 bo'lgan 2×2 matritsa olinsa, bu akslantirish ham tekislikdagi yassi shakl yuzasiga mos keluvchi Lebeg o'lchovini saqlashini tekshirish qiyin emas.

O'lchovni saqlaydigan dinamik sistemaning orbitasi haqida quyidagi muhim teoremani keltiramiz.

3.1.1-Teorema. (`Puankarening rekurrentlik teoremasi`) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ehtimollik fazosida o'lchovni saqlovchi T akslantirish berilgan bo'lsin. Agar A o'lchovli to'plam bo'lsa, u holda deyarli barcha $x \in A$ nuqtalar uchun shunday $n \in \mathbb{N}$ son mavjudki, $T^n(x) \in A$ o'rinli bo'ladi. Shuningdek, deyarli barcha $x \in A$ nuqtalar uchun cheksiz ko'p $k \in \mathbb{N}$ sonlar topiladiki, $T^k(x) \in A$ o'rinli bo'ladi.

3.2. ERGODIK TEOREMALAR.

Ergodiklik o'zgaruvchi dinamik sistemaning shunday xossasiki, sistema evolyutsiyasi jarayonida sistemaning deyarli har bir nuqtasi ma'lum aniqlik bilan sistemaning boshqa ixtiyoriy nuqtasiga yaqin bo'ladi. Boshqacha aytganda sistema o'zining dastlabki holatini "unutib", tartibsiz harakat qiladi. Ergodiklik xossasiga ega dinamik sistemalarning afzalligi shundaki, kuzatuvning yetarli vaqti davomida bunday sistemalarni statistik usulda tavsiflash mumkin.

Aslida ergodiklik g'oyasi dastlab termodinamikada gaz molekulasining alohida holatini gaz harorati va uning vaqt davomidagi evolyutsiyasi bilan bog'lash zarurati yuzasidan paydo bo'ldi. Shu bois gazlarni yaxshilab aralashtirib ularning termodinamik muvozanatda bo'lishini qat'iy matematik ta'riflashda nimani tushunish kerakligini aniqlab olish zarur bo'ldi. Bu esa dinamik sistemalar nazariyasida ergodik nazariyaning paydo bo'lishiga turtki bo'ldiki, natijada statistik fizika masalalariga yangicha matematik qarashlar rivojlandi.

Dastlab diskret dinamik sistema uchun ergodiklik ta'rifini keltiramiz.

3.2.1-Ta'rif. $(X, \mathcal{B})$ o'lchovli fazoda μ ehtimollik o'lchovi berilgan bo'lsin. Shuningdek $T : X \to X$ o'lchovli funksiya bo'lib, T funksiya μ o'lchovga nisbatan quyidagi xossalarga ega bo'lsin.

1) T funksiya μ o'lchovni saqlaydi, ya'ni ixtiyoriy $A \in \mathcal{B}$ uchun $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ o'rinli.

2) $T^{-1}(A) \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $A \in \mathcal{B}$ to'plam uchun yoki $\mu(A) = 0$ yoki $\mu(A) = 1$ bo'ladi.

U holda T funksiyaga μ-ergodik deyiladi.

3.2.1-Misol. Yuqorida ko'rilgan 5.1.2-Misolni qaraymiz. $T : X \to T$ biyektiv akslantirishni olamiz. U holda T ergodik bo'lishi uchun har bir $x \in X$ nuqtaning eng kichik davri n bo'lishi zarur va yetarli.

Endi μ o'lchovni saqlovchi T o'lchovli funksiyaning ergodiklik ta'rifiga ekvivalent ta'riflarni keltiramiz. Ya'ni, 3.2.1-Ta'rifdagi 2) xossani quyidagi xossalardan ixtiyoriy bittasiga almashtirish mumkin.

- $\mu(T^{-1}(A)\Delta A) = 0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $A \in \mathcal{B}$ uchun $\mu(A) = 0$ yoki $\mu(A) = 1$ bo'ladi.
- Musbat o'lchovli ixtiyoriy $A \in \mathcal{B}$ uchun $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 1$ bo'ladi.
- Musbat o'lchovli har qanday $A, B \in \mathcal{B}$ to'plamlar uchun shunday $n > 0$ son topiladiki, $\mu\left((T^{-n}(A)) \cap B\right) > 0$ bo'ladi.
- $f \circ T = f$ bo'lgan har qanday $f : X \to \mathbb{R}$ o'lchovli funksiya o'zgarmas bo'ladi.

Endi uzluksiz vaqtli dinamik sistemaning ergodikligi ta'rifini beramiz.

3.2.2-Ta'rif. $(X, \mathcal{B})$ fazoda μ ehtimollik o'lchovi berilgan bo'lsin. $T^t : X \to X$, $t \in \mathbb{R}$ o'lchovli funksiyalar oilasi bo'lsin. Bu oila uchun quyidagilar bajarilsin.

1) μ o'lchov har bir $t \in \mathbb{R}$ uchun T^t funksiyaga nisbatan invariant.

2) Har bir $t \in \mathbb{R}$ uchun $T^{-t}(A) \subset A$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $A \in \mathcal{B}$ to'plamning o'lchovi yoki 0 yoki 1.

U holda $\{T_t\}$ oilaga μ-ergodik deyiladi.

3.2.1-Izoh. Biz yuqorida ergodiklikning ekvivalent ta'riflaridan ba'zilarini keltirdik. Aslida ergodiklikning sodda ma'nosi shundan iboratki, biror nuqta trayektoriyasining vaqt bo'yicha o'rtachasi butun sistemaning o'rta qiymatiga teng bo'lishidir. Masalan, narda toshini tashlash kuzatuvini qaraylik. Bir kishi toshni 100 marta tashladi. Har bir tosh tashlanganda tushgan natijalar qayd qilib borildi va bu natijalarning o'rta arifmetigi hisoblandi. Endi 100 kishi bir martadan toshni tashlaganda tushgan natijalarning o'rtachasini hisoblaymiz. Har ikki holda o'rtacha qiymat bir xil bo'lsa, bu ergodiklik, turli bo'lsa, noergodiklikdir.

3.3. GIBBS O‘LCHOVLARI.

Statistik fizikada keng qo‘llanuvchi ehtimollik o‘lchovlaridan biri bu Gibbs o‘lchovidir. Atrof-muhit bilan issiqlik muvozanatida bo‘lgan sistema uchun taqsimot qonunini birinchi bo‘lib amerikalik olim J.Gibbs kiritdi. Bunday taqsimotlar Gibbs o‘lchovlari nomini oldi va turli sistemalar uchun uning holatini tasvirlab berishga xizmat qiladigan Gibbs o‘lchovlari nazariyasining yaratilishiga sabab bo‘ldi. Bunda berilgan fizik sistemaning energiyasi deb ataluvchi funksiya — Hamiltoninanga mos taqsimotni, ya’ni Gibbs o‘lchovini aniqlash masalasi tushuniladi. Gibbs o‘lchovlari nazariyasining asosiy masalalari berilgan sistema uchun haroratning o‘zgarishi va uning taqsimoti orasidagi bog‘liqlikni topishdan iborat. Bu esa berilgan Hamiltonianga mos Gibbs o‘lchovlari to‘plamini tasvirlash, bu to‘plamda faza almashishlari mavjudligini tekshirish va energiyasi eng katta konfiguratsiyalarni qurish kabi masalalarni o‘z ichiga oladi. Gibbs o‘lchovlarini ixtiyoriy sistema uchun kiritish mumkin bo‘lsa-da, asosan $\mathbb{Z}^d$ — butun sonlar to‘ri va Γ^k — Keli daraxtida ko‘proq o‘rganilgan. Bu turdagi masalalarning mohiyatini yaxshi anglash uchun biz Γ^k daraxtda berilgan Izing modeli uchun Gibbs o‘lchovining qurilishini ko‘rsatib beramiz.

Γ^k har bir uchidan $k+1$ ta qirra chiqadigan cheksiz graf bo‘lsin. Uning uchlari to‘plamini V, qirralari to‘plamini esa L kabi belgilaymiz. Odatda $\Gamma^k = (V, L)$ grafga k-tartibli Keli daraxti deyiladi. $x, y \in V$ uchlar bitta qirraning uchlari bo‘lsa, qo‘shni uchlar deyiladi va $\langle x, y\rangle$ kabi belgilanadi. Berilgan $x, y \in V$ uchlar uchun cheklita $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ uchlar topilib, $\langle x, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_n, y\rangle$ bo‘lsa, u holda bu qirralar (yozilgan tartibdagi) ketma-ketligiga x va y uchlarni tutashtiruvchi yo‘l deyiladi. Keli daraxtining uchlari orasida masofa quyidagicha kiritiladi: $d(x, y)$ — x va y uchlarni tutashtiruvchi eng qisqa yo‘ldagi qirralar soni. Keli daraxti har bir nuqtasiga nisbatan simmetrik bo‘lganidan, uning biror $x^{(0)}$ uchini darxtning asosi deb olamiz. Natijada quyidagi muhim to‘plamlarni aniqlash imkoniga ega bo‘lamiz.

$$W_n = \{x \in V : d(x, x^{(0)}) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m, \quad L_n = \{\langle x, y\rangle \in L : x, y \in V_n\}.$$

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : \langle x, y\rangle \in V_{n+1}\}, \quad \forall x \in W_n.$$

Odatda W_n va V_n to‘plamlar mos ravishda n radiusli sfera va shar deyiladi. $S(x)$ to‘plam esa x nuqtaning birinchi avlodlari to‘plami deyiladi.

$\sigma : V \to \{-1; 1\}$ funksiyaga spin qiymatlari ± 1 bo‘lgan konfiguratsiya deyiladi. V to‘plamdagi barcha konfiguratsiyalar to‘plamini Ω_V kabi belgilaymiz. Ta’kidlash joizki, bu holda Ω_V to‘plam V to‘plamning barcha qism to‘plamlari oilasi deb qarash mumkin. Darhaqiqat $A \subset V$ uchun bu to‘plamdagi har bir uchga 1 sonini, bu to‘plamning to‘ldiruvchisidagi har bir uchga esa -1 sonini mos qoyib, $\sigma \in \Omega_V$ konfiguratsiya hosil qilimiz. Aksincha, har bir konfiguratsiyaning 1 qiymat qabul qiladigan uchlari V to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi. Shuningdek ixtiyoriy $A \subset V$ bu to‘plamda konfiguratsiya aniqlash mumkin. A to‘plamdagi barcha konfiguratsiyalar to‘plamini Ω_A kabi belgilaymiz.

Endi har qanday $A \subset V$ chekli to‘plam va $\sigma \in \Omega_A$ uchun quyidagi to‘plamni aniqlaymiz

$$\{\tilde{\sigma} \in \Omega_V : \tilde{\sigma}(x) = \sigma(x), \ \forall x \in A\}. \tag{0.1}$$

Bunday to‘plamga silindrik to‘plam deyiladi. Boshqacha aytganda asosi A to‘plamdagi berilgan σ konfiguratsiya bo‘lgan barcha konfiguratsiyalar oilasiga silindrik to‘plam deyiladi. Demak, silindrik to‘plam Ω_V to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi. Ω_V to‘plamdagi barcha silindrik to‘plamlar oilasidan hosil qilingan σ-algebrani $\mathcal{B}$ deb olamiz. Shunday qilib, $(\Omega_V, \mathcal{B})$ o‘lchovli fazoni hosil qildik. Bu fazoda kiritiladigan o‘lchovlardan biri bu Izing modeli uchun Gibbs o‘lchovidir.

Izing modeli quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y), \qquad \forall \sigma \in \Omega_V, \tag{0.2}$$

bu yerda $J \in \mathbb{R}$ o‘zgarmas son.

Umuman olganda (0.2) qator yaxshi aniqlanmagan. Ya’ni, qator uzoqlashuvchi bo‘lishi ham mumkin. Buning fizik nuqtai nazaridan unchalik ahamiyati yo‘q. Biz mana shu formal ko‘rinishda yozilgan Hamiltonianga mos keluvchi Gibbs o‘lchovini qurish jarayonida faqat chekli yig‘indi bilan ishlaymiz.

Asosiy masala (0.2) Hamiltonianga mos keluvchi $(\Omega_V, \mathcal{B})$ fazoda aniqlangan Gibbs o‘lchovini qurishdan iborat. Buning uchun biz dastlab, $(\Omega_{V_n}, \mathcal{B}_n)$ chekli fazolarda ehtimollik o‘lchovlarini aniqlab, keyin bu o‘lchovlarni Kolmogorov teoremasi bo‘yicha davom ettirishga harakat qilamiz.

Har bir $n \geq 1$ uchun $(\Omega_{V_n}, \mathcal{B}_n)$ fazoda quyidagi ehtimollik o‘lchovini aniqlaymiz

$$\mu^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_{n,\mathbf{h}}} \exp\left\{-\beta H(\sigma) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\right\}, \tag{0.3}$$

bu yerda $\beta = \frac{1}{T}$, T — harorat, har bir $x \in V$ uchun $h_x \in \mathbb{R}$ va

$$Z_n = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \exp\left\{-\beta H(\sigma) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\right\} \tag{0.4}$$

Agar $(\Omega, \mathcal{B})$ fazoda aniqlangan σ-additiv μ o‘lchov uchun har bir $n \geq 1$ va $\sigma \in \Omega_{V_n}$ olinganda ham

$$\mu\left(\{\tilde{\sigma} \in \Omega_V : \tilde{\sigma}(x) = \sigma(x),\ \forall x \in V_n\}\right) = \mu^{(n)}(\sigma) \tag{0.5}$$

o‘rinli bo‘lsa, μ o‘lchovga Izing modeli uchun Gibbs o‘lchovi deyiladi. Demak, berilgan ehtimollik o‘lchovining Gibbs o‘lchovi ekanligini tekshirish oson ish emas. Lekin, (0.3) o‘lchovlar ketma-ketligi yordamida Gibbs o‘lchovini hosil qilish mumkin. Buni esa yuqorida eslatganimizdek, o‘lchovlarni davom ettirish haqidagi Kolmogorov teoremasidan foydalanib amalga oshiramiz.

Agar $\{\mu^{(n)}\}_{n\geq 1}$ ehtimollik o‘lchovlari ketma-ketligi har bir $n \geq 1$ uchun quyidagi

$$\sum_{\substack{\tilde{\sigma} \in \Omega_{V_{n+1}}: \\ \tilde{\sigma}|_{V_n} \equiv \sigma}} \mu^{(n+1)}(\tilde{\sigma}) = \mu^{(n)}(\sigma), \quad \forall \sigma \in \Omega_{V_n} \tag{0.6}$$

shartni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik muvofiqlashgan deyiladi. Ma’lumki, muvofiqlashgan ehtimollik o‘lchovlari ketma-ketligi uchun Kolmogorov teoremasiga ko‘ra butun fazoda aniqlangan yagona ehtimollik o‘lchovi mavjud va bu o‘lchov uchun (0.5) shartni qanoatlantiradi.

Demak, Izing modeli uchun $(\Omega_V, \mathcal{B})$ fazoda aniqlangan Gibbs o‘lchovining mavjudligini tekshirish masalasi (0.3) kabi aniqlangan ketma-ketlik uchun muvofiqlik shartini tekshirishga keltirildi.

Quyidagi teorema (0.3) kabi aniqlangan ketma-ketlikning muvofiqlik shartini qanoatlantirishi uchun mezon bo‘lib xizmat qiladi.

3.3.1-Teorema. (0.3) ko'rinishida aniqlangan $\{\mu^{(n)}\}_{n\geq 1}$ ehtimollik o'lchovlari muvofiqlashgan bo'lishi uchun har qanday $x \in V \setminus \{x^{(0)}\}$ nuqtada quyidagi

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta) \tag{0.7}$$

tenglik o'rinli bo'lishi zarur va yetarli. Bu yerda $\theta = \tanh(J\beta)$ va $f(h, \theta) = arctanh(\theta \tanh h)$.

Bu teoremaning asl kuchi shundaki, (0.7) funksional tenglamaning yechimi bo'lgan har qanday $\{h_x\}_{x\in V}$ funksiya Gibbs o'lchovini aniqlaydi. Statistik fizikada berilgan sistema uchun Gibbs o'lchovlari sonining haroratga nisbatan o'zgarishini bilish muhim hisoblanadi. Gibbs o'lchovlari soni o'zgaradigan haroratlarni aniqlash yordamida biz bu sistemada holatlarning o'zgarishini, ya'ni faza almashishlar mavjudligini aytishimizi mumkin. Buni suvning uch holati haqidagi mashhur misol yordamida tushuntirish mumkin. Ma'lumki, suv uch holatda: suyuq, muz va bug' holatida bo'ladi. Harorat 100°C darajadan oshsa, suv o'z holatini bug'ga, harorat 0°C darajadan pasaysa, suv muz holatiga o'tadi. Shuningdek, fizik sistema uchun o'lchovlar sonining keskin o'zgarishi bir holatdan ikkinchi holatga o'tishni anglatadi.

3.4. BIOLOGIK DINAMIK SISTEMALARNI O'RGANISHDA O'LCHOVLAR NAZARIYASI.

Matematikaning turli yo'nalishlari biologiyaning masalalari uchun qat'iy asoslangan matematik apparatni qurishga harakat qilgan va ayni vaqtda ham shunday urinishlarni har kuni uchratish mumkin. Shuni alohida ta'kidlash joizki, biologiya masalalarini tavsiflashga bo'lgan urinishlarda matematikaning har qanday yo'nalishi muvvaffaqiyatga erishgan deb bo'lmaydi. Masalan, algebraik yondoshuv matematik biologiya masalalariga hanuz o'zining sezilarli hissasini qo'shgani yo'q. O'lchovlar nazariyasi, uning ehtimollar nazariyasi va dinamik sistemalardagi tatbiqlari esa bu borada ancha yutuqlarga erishganini aytish lozim. Ana shunday yondoshuvlardan biri populyatsion genetika masalalarining matematik apparati haqida biroz ma'lumot berib o'tamiz.

Populyatsiya deb ko'payishga nisbatan yopiq bo'lgan organizmlarning jamlanmasiga aytiladi. Populyatsion genetikaning sodda masalalaridan biri bu m ta turdan iborat biologik sistemaning evolutsiya davrida qaysi xususiyatlari dominant, qaysilari esa yo'qolib ketishini bashorat qilishdan iborat. Bunday masalalarda har bir tur biror xususiyatga ega deb olinadi. Populyatsiyada ketma-ket keluvchi $F_1, F_2, \dots$ avlodlar turli deb qaraladi va turli avlodlar o'rtasida qo'shilish bo'lmaydi deb qaraladi. Ikkita i va j turlarning qo'shilishidan biror ehtimollik bilan k avlod paydo bo'ladi va bu ehtimollik $P_{ij,k}$ kabi belgilanadi. Agar turlar jinsga bog'liq bo'lmasa, u holda quyidagi tabiiy shartlar olinadi:

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1, \qquad P_{ij,k} = P_{ji,k}. \tag{0.8}$$

Populyatsiyaning holati $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – ehtimollik turlari tanlanmasi bilan beriladi. Ravshanki,

$$x \in S^{m-1} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : y_k \geq 0, \sum_{k=1}^{m} y_k = 1 \right\}.$$

S^{m-1} to'plamga $m-1$-o'lchamli simpleks deyiladi. Agar $x \in S^{m-1}$ dastlabki avlodning to'la ehtimolligi bo'lsa, u holda ixtiyoriy qo'shilishda (panmiksiya) kelgusi avlodning to'la ehtimolligi quyidagicha aniqlanadi

$$x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j, \qquad k = \overline{1,m} \tag{0.9}$$

(0.9) bilan aniqlangan $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ akslantirishga kvadratik stoxastik operator deyiladi. Demak, populyatsiyaning biror avlodi x holatda bo'lsa, keyingi avlod (0.9) yordamida $x' = Vx$ holat bilan topiladi. Shunday qilib, populyatsion genetikaning masalasi (S^{m-1}, V) dinamik sistemani o'rganish masalasiga keltirildi. Populyatsion genetikaning asosiy masalalaridan biri trayektoriyaning o'zgarish qonuniyatini aniqlashdan ya'ni, har bir boshlang'ich $x^{(0)} \in S^{m-1}$ nuqta uchun $\mathcal{O}_V(x^{(0)})$ orbitaning limit to'plamini o'rganishdan iborat. Shuni alohida aytib o'tish joizki, simpleks kompakt to'plam bo'lgani uchun orbitaning limit nuqtalari to'plami bo'sh bo'lmaydi. Mendel qonuniga asoslanib G.Hardi va Vaynberglar Hardi-Vaynberg qonuni deb ataluvchi $V^2 = V$ tenglikni kiritishgan. S.N. Bernshteyn Hardi-Vaynberg qonunini qanoatlantiruvhi barcha akslantirishlarni $m \leq 3$ bo'lgan hol uchun aniqlagan. Keyinchalik bu ishlarni Yu.I. Lyubich davom ettirdi.

Kvadratik stoxastik operatorlarning dinamikasini o'rganishda uning ehtimollik koeffitsiyentlariga ba'zi shartlarni qo'yish masalani birmuncha yengillatadi. Kvadratik stoxastik operatorlarning eng yaxshi o'rganilgan sinflaridan biri Volterra tipidagi operatorlar bo'lib, unda $k \notin \{i, j\}$ bo'lgan (i, j, k) uchliklar uchun $P_{ij,k} = 0$ deb qaraladi. Volterra kvadratik stoxastik operatorlarining sodda biologik ma'nosi quyidagicha: ota-onasidan birortasining xususiyatini takrorlamaydigan farzand tug'ilishi mumkin emas. Ya'ni, populyatsiyada mutatsiya bo'lishi mumkin emas deb qaraladi. Yana shunday sinflardan biri qat'iy no Volterra operatorlari bo'lib, unda aksincha $k \in \{i, j\}$ bo'lgan barcha (i, j, k) uchliklar uchun $P_{ij,k} = 0$ deb olinadi. Buning biologik ma'nosi esa avlod ajdodlarining hech bir xususiyatini takrorlamasligi kerak. Bu ayniqsa yangi hosildor nav olish uchun seleksiyada keng qo'llaniladi. Qat'iy no Volterra operatorini tavsiflovchi kimyoviy misollar ham bor. Masalan, Kislorod va Vodorodning birikishidan Suv hosil bo'ladi. Kislorod ham Vodorod ham yonish xususiyatiga ega bo'lsa-da, ularning farzandi – Suv yonmaydi.

3.5. NOARHIMED O'LCHOVLAR VA ULARNING TATBIQLARI.

O'lchovlar nazariyasi doirasidagi ehtimollar nazariyasini aksiomatik qurishda Kolmogorov fon Mizesning chastotali ehtimollar nazariyasini asos qilib olgan edi. Fon Mizesning chastotali ehtimollar nazariyasining asosiy jihatlaridan birini eslatib o'tamiz.

Ixtiyoriy S tajribani qaraymiz. Bu tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha holatlar to'plamini $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ bilan belgilaymiz. Soddalik uchun Ω chekli bo'lgan holni oldik. Ω to'plamga elementar hodisalar to'plami deyiladi. S tajribani N marta o'tkazishdagi j-tajriba natijasini x_j bilan belgilaymiz. U holda kuzatuvlarning chekli ketma-ketligini hosil qilamiz:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad x_j \in \Omega. \tag{0.10}$$

(0.10) tanlanmaning cheksiz idealizatsiyasi

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N, \ldots), \quad x_j \in \Omega. \tag{0.11}$$

uchun fon Mizesning ikkita prinsipi bajariladi. Ulardan biri (0.11) ketma-ketlikdagi har bir $\omega_i \in \Omega$ elementar hodisa ro'y berishining nisbiy chastotasi statistik turg'unlashganligi qonunidir. Ya'ni, dastlabki N ta kuzatuv natijasida ω_i hodisaning ro'y berishlari soni n_i bo'lsa, $\nu(\omega_i) = \frac{n_i}{N}$ nisbiy chastotaning $N \to \infty$ bo'lganda limiti chekli deb qaraladi va chastotali ehtimollar nazariyasida bu limitga ω_i hodisaning ehtimoli deyiladi.

Demak, nisbiy chastotaning limiti mavjud bo'lmasa, bunday hodisalarni va umuman kuzatuvlarni biz bilgan ehtimollar nazariyasi yordamida tushuntirib bo'lmaydi. Buning sababi nimada? Javob quyidagicha.

Nisbiy chastota bu ratsional son. Ratsional sonlar ketma-ketligining limiti odatdagi absolyut qiymatga nisbatan mavjud bo'lmasa, boshqa norma aniqlash kerakki, bu normada kuzatuv natijalariga ma'no berish mumkin bo'lsin.

Bu esa ratsional sonlar maydonida boshqa norma kiritish zaruratini paydo qiladi. Ana shunday normalardan biri p-adik normadir. Biz p-adik norma haqida biroz to'xtalib o'tamiz.

Aytaylik, p tub son bo'lsin. U holda har qanday $x \neq 0$ ratsional sonni $x = p^r \frac{m}{n}$ ko'rinishda yagona ravishda tasvirlash mumkinki, bunda $r, m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ va $(m, n) = (m, p) = (n, p) = 1$ bo'ladi. Endi ratsional sonlarning bunday yagona ifodasidan foydalanib, $\mathbb{Q}$ maydonida quyidagi akslantirishni qaraymiz

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ p^{-r}, & x \neq 0. \end{cases} \tag{0.12}$$

Tekshirish qiyin emaski, (0.12) akslantirish $\mathbb{Q}$ maydonda norma bo'ladi va bu normaga p-adik norma deyiladi. p-adik norma kuchli uchburchak tengsizligi deb ataluvchi quyidagi

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu tengsizlik esa o'z navbatida $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ normalangan maydonning noarhimed maydoni bo'lishini ko'rsatadi. Ta'kidlash kerakki, $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ maydon to'la emas. Ratsional sonlar maydonini p-adik normaga nisbatan to'ldirishdan hosil bo'lgan maydon p-adik sonlar maydoni deyiladi va $\mathbb{Q}_p$ kabi belgilanadi. Demak, $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ maydon to'la va noarhimed maydonidir. Shu o'rinda ratsional sonlar maydonidagi normalarni tasniflovchi Ostrovski teoremasini eslatib o'tish joiz. Ostrovski teoremasiga ko'ra ratsional sonlar maydonidagi har qanday notrivial norma yoki $|\cdot|$ – absolyut qiymatga yoki biror p tub son uchun $|\cdot|_p$ — p-adik normaga ekvivalent. Boshqacha aytganda ekvivalentlik nuqtai nazaridan ratsional sonlar maydonida trivial norma (bu norma umuman ahamiyatga ega emas), absolyut qiymat va p-adik normalargina bor ekan. Bu esa ratsional sonlar maydonidagi ketma-ketlikning qaysidir ma'noda yaqinlashishi biz uchun muhim bo'lsa, odatdagi absolyut qiymat yoki p-adik normalarga nisbatan tekshirish kerakligini bildiradi. Natijada p-adik ehtimollar nazariyasini qurish zarurati oydinlashdi.

O'lchovlar bobida ehtimollik o'lchovi bu o'lchovning xususiy holi ekanligini aytib o'tgan edik. Demak, p-adik ehtimollik o'lchovidan oldin p-adik o'lchov tushunchasini aniqlab olish zarur. Biz o'lchovni aniqlanish sohasi yarim halqa va qiymatlari $\mathbb{R}_+$ bo'lgan to'plam funksiyasi sifatida kiritgan edik. Shu kabi p-adik o'lchovni kiritish mumkin.

$X \neq \varnothing$ to'plamda $\mathcal{G}$ yarim halqa berilgan bo'lsin. $f : \mathcal{G} \to \mathbb{Q}_p$ to'plam funksiyasi additiv bo'lsa, ya'ni juft-jufti bilan kesishmaydigan ixtiyoriy $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{G}$ to'plamlar uchun $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{G}$ ekanligidan $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ kelib chiqadi. Bunday to'plam funksiyasiga yarim halqada berilgan p-adik o'lchov deyiladi. Tabiiyki, yarim halqadagi p-adik o'lchovni shu yarim halqadan hosil qilingan halgacha (algebragacha ham) yagona ravishda davom ettirish mumkin. Shu o'rinda p-adik va haqiqiy o'lchovlarni ajratuvchi asosiy jihatlarni sanab o'tamiz.

- Haqiqiy o'lchovning qiymati nomanfiy edi, p-adik o'lchovning qiymati esa ixtiyoriy p-adik son bo'lishi mumkin. Bu $\mathbb{Q}_p$ maydonda undagi arifmetik amallar va limitga o'tishga nisbatan yopiq bo'lgan chiziqli tartib kiritish mumkin emasligi bilan bog'liq.

- Haqiqiy o'lchov oxir oqibat σ-algebragacha davom ettirilar edi. p-adik o'lchov uchun bu jarayon biroz boshqacha. Ya'ni, agar p-adik o'lchovning σ-additivlik xossasiga ega bo'lishi talab qilinsa, diskret qiymatli o'lchov hosil bo'ladi. Bunday o'lchovlarning amaliy ahamiyati kamligi nuqtai nazaridan p-adik o'lchovlarda bu xossa deyarli qaralmaydi. Tabiiyki, o'lchovning bu xossasisiz σ-algebrani qarash ham o'z zaruratini yo'qotadi. Shu bois, p-adik o'lchovlar asosan algebrada qaraladi. Agar p-adik o'lchov bilan ishlash uchun fazo qaralayotgan bo'lsa, boshidanoq $(X, \mathcal{B})$ o'lchovli fazo deganda $\mathcal{B}$ oilaning faqat algebra bo'lishi talab qilinadi.

- $(X, \mathcal{B})$ o'lchovli fazoda μ p-adik o'lchov berilgan bo'lib, $\mu(X) = 1$ bo'lsa, bu o'lchovga p-adik ehtimollik o'lchovi deyiladi.

IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI

1-MAVZU: O‘LCHOV TUSHUNCHASI VA XOSSALARI

1. X to‘plamning barcha chekli qism to‘plamlari oilasida o‘lchov aniqlang.

2. X chekli to‘plamda $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ shartni qanoatlantiruvchi yarim halqalar quring. Bu yarim halqalarda mos ravishda m va μ o‘lchovlarni shunday aniqlangki, μ o‘lchov m o‘lchovning davomi bo‘lsin.

3. $[a; b]$ kesmadagi barcha ochiq, yopiq, yarim ochiq intervallar oilasida o‘lchov aniqlang. Bu o‘lchovni yarim halqadan hosil qilingan halqagacha davom ettiring.

4. 1.1.2-Teoremani isbotlang.

5. 1.1.1-Natijani isbotlang.

6. $\mathbb{Q}$ uchun $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ oilada σ-additiv o‘lchov aniqlang.

7. Sanoqli yarim additivlik sanoqli additivlikka ekvivalent ekanligini isbotlang.

8. 1.3.1-Teoremani isbotlang.

9. 1.3.3-Teoremani isbotlang.

10. 1.3.5-Teoremani isbotlang.

11. $[0; 1]$ kesmadagi barcha ochiq, yopiq, yarim ochiq intervallar oilasida o‘lchovni quyidagicha kiritamiz: $m([a; b]) = m((a; b)) = m((a; b]) = m(([a; b))) = (b - a)^2$. Shu o‘lchovni Lebeg bo‘yicha davom ettiring. Hosil bo‘lgan Lebeg ma’nosida o‘lchovli to‘plamlar oilasi $[0; 1]$ kesmadagi Borel algebrasi bilan ustma-ust tushadimi?

12. $[0; 1]$ kesmada μ — chiziqli Lebeg o‘lchovini qaraymiz. μ o‘lchovga nisbatan Kantor mukammal to‘plamining o‘lchovi topilsin.

13. $[0; 1]$ kesmada chiziqli o‘lchovi $0,9$ bo‘lgan hech qayerda zichmas mukammal to‘plam quring.

Endi o‘lchovlar bo‘yicha qo‘shimcha ma’lumotlarni o‘rganamiz. Bu tasdiqlarning har birini alohida tahlil qilib chiqish tavsiya etiladi.

- Nima uchun o‘lchov tushunchasi aynan yarim halqada berildi. Buning birinchi sababi sifatida bobning avvalida o‘lchov biz bilgan kesmaning uzunligi, yassi shaklning yuzasi va fazoviy jismning hajmi kabi tushunchalarning umumlashmasi ekanligini hamda bu tushunchalar dastlab eng sodda holda yarim halqada berilgani bilan bog‘liq. Ikkinchi asosiy sababini esa o‘lchov ixtiyoriy to‘plamlar oilasida ta’riflanganda nima o‘zgarar edi?, degan savolning javobida ko‘ramiz. Haqiqatdan, biz har qanday to‘plamlar oilasini, halqaga yoki algebragacha hatto σ-algebragacha to‘ldirish mumkinligini bilamiz. Demak, zarur holda o‘lchovni kengroq oilagacha davom ettirish zarurati paydo bo‘lganda yana o‘sha jarayonni bemalol takrorlaymiz deyishingiz mumkin. Lekin bu xato fikr. Chunki, agar to‘plamlar oilasi halqa bo‘lmasa, bu oiladagi o‘lchovning davomi yagona bo‘lmasligi mumkin. Bunga ishonch hosil qilish uhun quyidagi misolni keltiramiz. Birlik kvadratda vertikal yoki gorizontal joylashgan shunday to‘g‘ri to‘rtburchaklar oilasini qaraylikki, bu to‘g‘ri to‘rtburchaklarning yoki bo‘yi yoki eni birga teng. Bunday to‘plamlarning har biriga uning yuzini mos qo‘yamiz. Bu moslikni oiladigi μ o‘lchov deb qabul qilamiz. Bu o‘lchovning nomanfiy va additivligini tekshirish qiyin emas. Biz bilgan o‘lchovdan yagona farqi uning aniqlanish sohasi yarim halqa emas. Endi bu oiladan hosil qilingan algebragacha o‘lchovni davom ettiramiz. Tekshirish mumkinki, μ o‘lchovning davomi yagona emas.

- O‘lchovni Lebeg bo‘yicha davom ettirish jarayoni va metrik fazoni to‘ldirish jarayoni orasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatamiz. Ta’kidlash joizki, $\mathcal{R}$ halqadagi m o‘lchovni metrika deb hisoblash mumkin. Ya’ni, ixtiyoriy $A, B \in \mathcal{R}$ uchun $\rho(A, B) = m(A\Delta B)$ metrika bo‘ladi. Demak, $(\mathcal{R}, m)$ metrik fazo ekan. Bu fazo to‘la emas. Uni to‘ldirishdan hosil bo‘lgan fazo aynan Lebeg ma’nosidagi barcha o‘lchovli to‘plamlardan iborat. Faqat bu yerda $\mu(A\Delta B) = 0$ bo‘lgan A va B to‘plamlar metrik fazodagi bir xil elementlar deb qabul qilinadi.

- Agar biri yo‘q yarim halqada m o‘lchov berilgan bo‘lsa, yuqorida kiritilgan o‘lchovli to‘plam tushunchasi juda tor sinf uchun o‘rinli ekanligini ko‘rish mumkin. Masalan, X tekislik uchun bu tekislikning o‘zi, doiraning tashqarisi, ikki parallel chiziqlar orasidagi soha va boshqa barcha yuzasi cheksiz bo‘lgan to‘plamlar bu ma’noda o‘lchovli bo‘lmaydi. Demak, o‘lchovning qiymati cheksiz bo‘lishi ham mumkin deyilisa, o‘lchov tushunchasini kengaytirish zarurati tug‘ilar ekan.

  O‘lchovni kengaytirishni amaliy ahamiyati katta bo‘lgan maxsus hol uchun qisqacha aytib o‘tamiz. X to‘plamning qism to‘plamlarining $\mathcal{G}$ yarim halqasida σ-additiv m o‘lchov berilgan bo‘lsin. Agar X to‘plamni $\mathcal{G}$ yarim halqadagi sanoqli sondagi (chekli emas!) to‘plamlarning yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin bo‘lsa, m o‘lchovga σ-chekli o‘lchov deyiladi. Masalan, tekislikdagi barcha to‘g‘ri to‘rtburchaklar yarim halqasidagi yuza aynan σ-chekli o‘lchov bo‘ladi. σ-chekli bo‘lmagan to‘plamga misol keltiramiz. $[0; 1]$ kesmada biror $f(x)$ nomanfiy funksiya berilgan bo‘lsin. Bu kesmaning barcha chekli to‘plamlari oilasi yarim halqa bo‘ladi. Bu yarim halqadagi har bir A to‘plamga $\mu(A) = \sum_{x\in A} f(x)$ akslantirishni mos qo‘yamiz. Bu moslik o‘lchov bo‘lishini tekshirish qiyin emas. Agar $\{x \in [0; 1] : f(x) \neq 0\}$ to‘plam sanoqsiz bo‘lsa, μ o‘lchov σ-chekli bo‘lmaydi.

  X to‘plamning qism to‘plamlarining $\mathcal{G}$ yarim halqasida σ-additiv va σ-chekli m o‘lchov berilgan bo‘lsin. U holda shunday juft-jufti bilan kesishmaydigan sanoqlita $B_n \in \mathcal{G}$ to‘plamlar mavjudki, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ va ixtiyoriy $n \geq 1$ uchun $m(B_n) < \infty$. Endi $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ halqada $\tilde{B}_1 = B_1$ va $\tilde{B}_n = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$ to‘plamlarni qaraylik. Bu to‘plamlar ham juft-jufti bilan keshishmaydi va $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n$ o‘rinli. m o‘lchovni Lebeg bo‘yicha davom ettirib, δ-halqada μ o‘lchovga ega bo‘lamiz, Odatdagidek bu δ-halqani $\mathcal{M}$ deb belgilaylik. Ixtiyoriy $B \in \mathcal{M}$ to‘plam uchun

  $$\mathcal{M}_B = \{C \in \mathcal{M} : \ C \subset B\}$$

  biri B bo‘lgan σ-algebrani hosil qilamiz. Endi quyidagi oilani qaraymiz:

  $$\mathcal{U} = \{A : \ A \cap \tilde{B}_n \in \mathcal{M}_{\tilde{B}_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

  Boshqacha aytganda $A \in \mathcal{U}$ bo‘lishi uchun uning juft-jufti bilan kesishmaydigan $A_n \in$

$\mathcal{M}_{\tilde{B}_n}$ to'plamlarning sanoqli yoyilmasi ko'rinishida ifodalanishi zarur va yetarli, ya'ni

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{M}_{\tilde{B}_n}. \tag{0.1}$$

$\mathcal{U}$ oila σ-algebra bo'ladi va u $\mathcal{M}_{\tilde{B}_n}$ algebralarning to'g'ri yig'indisi deb ataladi. Ixtiyoriy $A \in \mathcal{U}$ to'plam esa o'lchovli deyiladi va (0.1) to'plam uchun $\tilde{\mu}$ o'lchovni quyidagicha aniqlaymiz

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Tenglikning o'ng tomonidagi har bir o'lchov nomanfiyligidan bu qator biror nomanfiy songa yoki $+\infty$ ga yaqinlashadi. Ta'kidlash joizki, $\mathcal{U}$ σ-algebra va $\tilde{\mu}$ o'lchov B_n to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas. Shuningdek, $\tilde{\mu}$ o'lchov σ-additiv va

$$\{A \in \mathcal{U} : \; \tilde{\mu}(A) < \infty\} = \mathcal{M}.$$

$\tilde{\mu}$ va μ o'lchovlar $\mathcal{M}$ halqada ustma-ust tushadi.

- O'lchovni yarim halqada aniqlab, uni Lebeg bo'yicha σ-algebragacha davom ettirdik va bunday o'lchovlarni Lebeg o'lchovi deb atadik. Tabiiy savol tug'iladi: yarim halqada berilgan o'lchovni davom ettirishning boshqa usullari ham bormi? Ha, bor. Masalan, Jordan yoki Karateodori bo'yicha davom ettirish. Biz o'lchovning Jordan yoki boshqa ma'noda davomi haqida to'liq ma'lumot bermaymiz. Qiziquvchilarga o'zlari bu borada ma'lumot topib o'rganishi tavsiya etiladi. Faqat shuni aytishimiz mumkinki, Jordan ma'nosida o'lchovli bo'lgan to'plamlar albatta Lebeg ma'nosida ham o'lchovli bo'ladi va bunday to'plamlarning har ikki o'lchovi teng. Demak, Lebeg o'lchovi Jordan o'lchovidan kengroq ekan.

- Avvalgi bobda $X \neq \varnothing$ to'plam va unda biror $\mathcal{B}$ σ-algebra aniqlangan bo'lsa, $(X, \mathcal{B})$ juftlik o'lchovli fazo deyilishini va bu tushuncha hali o'lchov tushunchasi kiritilmasdan oldin aytilayotgani biroz g'alatidek ko'rinishini aytib o'tgan edik. Aslida ham shundaymi? Gap shundaki, matematikaning ko'plab sohalarida o'lchovli fazolar bilan ishlashga to'g'ri keladi. Bunda o'lchovni biz odatlanganimizdek, abstrakt to'plam uchun avval yarim halqada aniqlab, keyin uni Lebeg yoki boshqa usulda σ-algebragacha davom ettirish nuqtai nazaridan emas, balki oldindan berilgan σ-algebrada σ-additiv o'lchov aniqlash nuqtai nazaridan deb qarash kerak bo'ladi. Bunday teskari masalalar ehtimollar nazariyasining asosi bo'lib xizmat qiladi. Shuningdek, integral operatorlar nazariyasi va dinamik sistemalar nazariyasining asosiy masalalari ham shu prinsipga qurilganini esdan chiqarmaslik lozim.

- Ixtiyoriy $(X, \mathcal{B})$ o'lchovli fazoda har doim σ-additiv o'lchov aniqlash mumkinmi? Bu ancha murakkab masala hisoblanadi. Biz to'g'ri chiziqda chiziqli Lebeg o'lchovidan boshqa qanday o'lchov aniqlash mumkinligiga doir qiziqarli ma'lumot beramiz. To'g'ri chiziqda kamaymaydigan, chapdan uzluksiz F funksiya berilgan bo'lsin. Quyidagi to'plam funksiyasini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} m_F(a;b) &= F(b) - F(a+0), \\ m_F[a;b] &= F(b+0) - F(a), \\ m_F(a;b] &= F(b+0) - F(a+0), \\ m_F[a;b) &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Bunday aniqlangan to'plam funksiyasining nomanfiy va additivligini tekshirish qiyin emas. Shuningdek, to'g'ri chiziqdagi barcha ochiq, yopiq, yarim ochiq intervallar oilasi yarim halqa ekanligidan m o'lchov bo'ladi. Bu o'lchovni Lebeg bo'yicha davom ettirib, μ_F o'lchovni hosil qilamiz. μ_F o'lchovga nisbatan o'lchovli to'plamlar oilasini $\mathcal{M}_F$ bilan belgilaymiz. Ravshanki, $\mathcal{M}_F$ σ-algebra va μ_F σ-additiv o'lchov. Bunda μ_F ham $\mathcal{M}_F$ ham albatta F funksiyaga bog'liq bo'ladi. Demak, F o'zgarsa, turli o'lchovlar hosil bo'ladi. Bunday o'lchovlarga Lebeg-Stiltes o'lchovlari deyiladi. Biz bilgan chiziqli Lebeg o'lchovi $F(t) = t$ funksiyadan hosil qilingan. Shu o'rinda tabiiy savol tug'iladi: agar bir to'plamda turli o'lchovlar aniqlash mumkin bo'lsa, bu o'lchovlarning bir-biri bilan bog'liqligi bormi? Bu savolga javob berish uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

μ berilgan bo'lsin. Agar har bir Lebeg o'lchovi nol bo'lgan A to'plam uchun $\mu(A) = 0$ kelib chiqsa, u holda μ o'lchov absolyut uzluksiz deyiladi. Agar μ o'lchov noldan farqli qiymatlarga ko'pi bilan sanoqli to'plamda erishsa, u holda μ diskret o'lchov deyiladi. Agar har qanday bir nuqtali to'plamning μ o'lchovi nol bo'lib, Lebeg o'lchovi nol bo'lgan biror to'plam to'ldiruvchisining μ o'lchovi nol bo'lsa, μ o'lchovga singulyar o'lchov deyiladi.

- $(X, \mathcal{B})$ o'lchovli fazoda σ-additiv μ o'lchov berilgan bo'lib, $\mu(X) = 1$ bo'lsa, bunday o'lchov ehtimollik o'lchovi deyiladi. Demak, ehtimollar nazariyasining asosiy elementlari o'lchovlar nazariyasidagi umumiy tushunchalardan kelib chiqadi. Masalan, o'lchovli fazodagi o'lchovli funksiya (keyingi bobda o'rganamiz) tasodifiy miqdor deyiladi. O'lchovli funksiyaning Lebeg integrali esa matematik kutilmani anglatadi va hokazo.

2-MAVZU: O'lchovli funksiyalar

1. X to‘plamda $\mathcal{G}_X$ oila va Y to‘plamda $\mathcal{G}_Y = \{\varnothing, X\}$ oila berilgan. $f : X \to Y$ akslantirish $(\mathcal{G}_X, \mathcal{G}_Y)$-o‘lchovli bo‘lishi uchun f ustiga akslantirish bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

2. O‘lchovli funksiyalarning superpozitsiyasi uchun berilgan sodda xossalarni isbotlang.

3. f funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ olinganda ham $\{x \in X : f(x) > c\}$ to‘plamning o‘lchovli bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang. Ushbu tasdiq ixtiyoriy $c \in \mathbb{Q}$ uchun ham o‘rinli bo‘ladimi?

4. O‘lchovli funksiyalarning arifmetik amallarga doir xossalarini isbotlang.

5. O‘lchovsiz funksiyaga misol keltiring.

6. Agar $[f(x)]^3$ funksiya o‘lchovli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya ham o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

7. Agar $[f(x)]^2$ funksiya o‘lchovli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya ham o‘lchovli bo‘ladimi?

8. $[0; 1]$ kesmada f funksiya berilgan. Agar $0 < \alpha < \beta < 1$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy sonlar uchun f funksiya $(\alpha; \beta)$ intervalda o‘lchovli bo‘lsa, bu funksiya $[0; 1]$ kesmada ham o‘lchovli bo‘lishini isbotlang.

9. Har bir nuqtada yaqinlashuvchi, lekin tekis yaqinlashmaydigan funksional ketma-ketlikka misol keltiring.

10. Quyidagi tasdiqni isbotlang:
$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n\to\infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

11. Yegorov teoremasida 1-shartni $\mu(E_\varepsilon) = \mu(E)$ shartga almashtirish mumkin emasligiga misol quring.

12. Deyarli yaqinlashishdan o‘lchov bo‘yicha yaqinlashish kelib chiqishini isbotlang.

13. O‘lchov bo‘yicha yaqinlashuvchi ketma-ketlikning deyarli yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketligi mavjudligini isbotlang.

14. 3.3.1-Misoldagi ketma-ketlikdan deyarli yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajrating.

15. $\mathbb{R}$ da berilgan $f(x) = x^2$ funskiyaga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashuvchi (statsionar emas, ya’ni hadlari takrorlanmaydigan) o‘lchovli funksiyalar ketma-ketligini quring.

16. Luzin teoremasini isbotlang.

17. $[a; b]$ kesmada aniqlangan funksiya o‘lchovli bo‘lishi uchun uning C-xossaga ega bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini isbotlang.

18. Sodda funksiyaga misol keltiring.

19. Sodda funksiyalar arifmetik amallarga nisbatan yopiqmi?

20. $f(x) = x^2$ funksiyaga tekis yaqinlashuvchi sodda funksiyalar ketma-ketligini quring.

21. $\mathbb{R}$ to'plamda quyidagi sodda funksiya berilgan: ixtiyoriy $n \in \mathbb{Z}$ uchun har bir $x \in (n; n+1]$ nuqtada $f(x) = y_n$. Bu sodda funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ketma-ketlik qanday bo'lishi kerak?

22. $f(x) = sign(x)$ sodda funksiya integrallanuvchimi?

23. $\{f_n\}$ sodda funksiyalar ketma-ketligining har bir hadi integrallanuvchi va bu ketma-ketlik f sodda funksiyaga deyarli yaqinlashsa, f ham integrallanuvchi bo'ladimi?

24. $1° - 9°$ xossalarni isbotlang.

25. $[0; 1]$ kesmada quyidagi funksiyani qaraymiz

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Bu funksiyaning Lebeg integralini hisoblang.

26. A to'plamda nomanfiy, chegaralangan, o'lchovli f funksiya berilgan. Agar

$$\mu\left(\{x \in A : f(x) \geq 1\}\right) = a$$

bo'lsa, $\int_A f d\mu \geq a$ tengsizlikni isbotlang.

27. $[1; 2]$ kesmada berilgan $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ funksiyaning Lebeg integralini hisoblang.

28. $f(x)$ funksiya $[0; 1]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, har qanday $c > 0$ uchun $f(kx)$ funksiya $[0; 1/k]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishini isbotlang.

3-MAVZU: INVARIANT O‘LCHOVLAR

Kvadratik stoxastik operatorlarning tatbig‘ini nafaqat populyatsion genetika masalalarida, balki o‘yinlar nazariyasining iqtisodiy masalalarida prognozlashda keng qo‘llanishini ta'kidlash joiz. Kvadratik stoxastik operatorlarni umumiy holda o‘rganishning hozirgacha imkoni bo‘lmagan bo‘lsa-da, ularning bir qancha sinflari to‘liq o‘rganilganini ta'kidlab o‘tamiz. Maqsadimiz kvadratik stoxastik operator misolida ergodiklik xossani o‘rganishdan iborat. Shu bois bu borada o‘z vaqtida keng jamoatchilikning e'tirofiga sabab bo‘lgan M.I.Zaxarevich misolini tanladik.

Hisoblash mashinasi yordamida olingan natijalarga ko‘ra S.Ulam o‘zining “Matematikaning yechilmagan masalalari” deb nomlangan kitobida har qanday kvadratik stoxastik operator ergodik teoremani qanoatlantiradi degan gipotezani aytgan. Ya'ni, ixtiyoriy $x \in S^{m-1}$ uchun $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} V^k(x)$ limit mavjud bo‘ladi degan g‘oyani ilgari surgan edi. Lekin, M.I.Zaxarevich 1978 yilda bu gipoteza to‘g‘ri emasligiga misol qurdi.

S^2 simpleksda quyidagi operatorni qaraymiz:

$$V: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2 + 2x_2x_3, \\ x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3. \end{cases}$$

Bu operator to‘rtta qo‘zg‘almas nuqtaga ega: $M_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$, $M_1 = (1, 0, 0)$, $M_2 = (0, 1, 0)$ va $M_3 = (0, 0, 1)$. V operator S.S.Vallanderning ishida ham qaralgan bo‘lib, u simpleksning ichidagi ixtiyoriy $a \neq M_0$ nuqta uchun uning musbat orbitasining limit nuqtalari to‘plami cheksiz va simpleksning chegarasida yotishini isbotlagan. Shuningdek, Vallander a nuqtaning trayektoriyasi asosiy vaqtini M_1, M_2 va M_3 nuqtalarning ε atrofida o‘tkazishini ham ko‘rsatgan. Quyidagi to‘plamlarni aniqlaymiz.

$$G_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_1 \geq x_2 \geq x_3\}, \quad G_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_1 \geq x_3 \geq x_2\},$$

$$G_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 \geq x_1 \geq x_2\}, \quad G_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_3 \geq x_2 \geq x_1\},$$

$$G_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_2 \geq x_3 \geq x_1\}, \quad G_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_2 \geq x_1 \geq x_3\}.$$

$$H_1 = G_1 \cup G_2, \quad H_2 = G_3 \cup G_4, \quad H_3 = G_5 \cup G_6.$$

Endi M_0 nuqtaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi U_0 atrofini olamiz:

1) $U_0 \subset S^2$;

2) $U_1 = H_1 \setminus U_0$, $U_2 = H_2 \setminus U_0$, $U_3 = H \setminus U_0$ to‘plamlarning har biri qavariq;

3) $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \varnothing$.

S^2 simpleksning ichi deb quyidagi to‘plamni tushunamiz

$$intS^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : x_1x_2x_3 > 0\}.$$

3.4.1-Lemma. $a = (a_1, a_2, a_3) \in intS^2$ va $U \in \{U_1, U_2, U_3\}$ bo‘lsin. Agar $a \notin U$, $V^k(a) \in U$ $(k = 1, \ldots, n)$ va $V^{n+1}a \notin U$ bo‘lsa, u holda $n > A \log \frac{B}{\varphi(V(a))}$, bu yerda A, B musbat sonlar va $\varphi(a) = a_1a_2a_3$.

► Dastlab $x_1+x_2+x_3=1$ ekanligini hisobga olib V operatorning ko‘rinishini o‘zgartiramiz. Ya’ni,

$$V:\begin{cases} x_1' = x_1(1+x_2-x_3), \\ x_2' = x_2(1+x_3-x_1), \\ x_3' = x_3(1+x_1-x_2). \end{cases}$$

Bundan ko‘rinadiki, ixtiyoriy $a=(a_1,a_2,a_3)\in G_1$ uchun $a_1'\geq a_1$, $a_2'\leq a_2$ va $a_3'\geq a_3$ o‘rinli. Demak, bir nechta qadamdan keyin a nuqtaning trayektoriyasi G_2 to‘plamga tushadi va hokazo. Shunday qilib, berilgan nuqta harakatining marshruti quyidagicha ekan

$$G_1\to G_2\to G_3\to G_4\to G_5\to G_6\to G_1. \tag{0.1}$$

Lemma tasdig‘ini $U=U_1$ uchun isbotlaymiz. Qolgan hollar ham shu kabi isbotlanadi. U holda quyidagini topamiz

$$a\notin U_1\Longrightarrow a\in G_6\Longrightarrow a_2\geq a_1\geq a_3;\quad a'\in U\Longrightarrow a_1'\geq a_2'\geq a_3'.$$

a) $a_2'=a_2(a_2+2a_3)\geq\frac{a_1(a_2+2a_2)}{3}\geq\frac{a_1(a_1+2a_2)}{3}=\frac{a_1'}{3}$.

b) $a^{(n)}=V^n(a)$, $a^{(n+1)}\notin U\Longrightarrow a_3^{(n+1)}\geq a_1^{(n+1)}\geq a_2^{(n+1)}\geq\Longrightarrow a_3^{(n+1)}\geq\frac{1}{3}$.

c) $\frac{a_3^{(n+1)}}{a_3'}=\prod_{k=1}^n\frac{a_3^{(k+1)}}{a_3^{(k)}}=\prod_{k=1}^n(1+a_1^{(k)}-a_2^{(k)})<2^n$.

Natijada quyidagini hosil qilamiz

$$2^n>\frac{a_3^{(n+1)}}{a_3'}>\frac{1}{3z_1}=\frac{a_1'a_2'}{3\varphi(a')}\geq\frac{(a_1')^2}{9\varphi(a')}\geq\frac{1}{81\varphi(a')},$$

$$n>\log_2\frac{1}{81\varphi(a')}>A\log\frac{B}{\varphi(a')}.$$

▲

3.4.1-Teorema. $U\in\{U_1,U_2,U_3\}$ va $a\in intS^2\setminus\{M_0\}$ bo‘lsin. $\{n_i\}_{i\geq1}$ va $\{m_i\}_{i\geq1}$ natural sonlarning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi ketma-ketligi bo‘lsin:

I) $n_{i+1}>n_i+m_i$;

II) $V^{n_i}(a)\notin U$;

III) har bir $k<m_i$ natural son uchun $V^{n_i+k}(a)\in U$;

IV) $V^{n_i+m_i}(a)\notin U$.

U holda $n_i\to\infty$ va ixtiyoriy c olinganda ham yetarlicha katta $i\in\mathbb{N}$ indekslarda $n_i>cm_i$ o‘rinli.

► Lemmaning isbotidagi φ funksiyani qaraylik. U holda $\varphi(V(a))<\varphi(a)$ ekanligini tekshirish qiyin emas. Bundan

$$\varphi(V^n(a))\to 0 \tag{0.2}$$

kelib chiqadi.

Ixiyoriy $\alpha\in(0;1)$ son uchun M_0 nuqtaning shunday U' atrofi topiladiki, har qanday $a\in S^2\setminus U'$ uchun $\alpha\varphi(V(a))<\alpha\varphi(a)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. U holda (0.2) limitga ko‘ra yetarlicha katta $n \in \mathbb{N}$ indekslarda $V^n(a) \notin U'$ kelib chiqadi. Bundan (0.1) marshrutga ko‘ra $n_i \to \infty$ deb xulosa qilamiz. Nihoyat isbot qilingan lemmaga ko‘ra yetarlicha katta i indekslar uchun

$$m_i > A \log \frac{B}{\varphi(V^i(a))} > A' \log \frac{B}{\alpha^{n_i}\varphi(a)} > cn_i$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. ▲

3.4.2-Teorema. Ixtiyoriy $a \in intS^2 \backslash \{M_0\}$ nuqta uchun $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} V^k(a)$ ketma-ketlik limitga ega emas.

► Faraz qilaylik $\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} V^k(a)$ bo‘lsin. Qulaylik, uchun $\overline{a} \notin U_1$ deb olamiz. $\{n_i\}$ va $\{m_i\}$ ketma-ketliklar 1-Teoremadagi barcha shartlarni qanoatlantirsin. ρ Yevklid metrikasiga nisbatan $\delta = \rho(\overline{a}, U_1)$ sonni aniqlaymiz. U holda $n_0 \in \mathbb{N}$ sonni shunday tanlaymizki,

$$\rho\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} V^k(a), \overline{a}\right) < \frac{\delta}{3}$$

tengsizlik barcha $n > n_0$ sonlarda o‘rinli bo‘lsin. Shuningdek, $m_i > 3n_i$ deb hisoblashimiz mumkin. U holda

$$\tilde{a} = \frac{1}{n_i + m_i}\sum_{k=0}^{n_i+m_i} V^k(a)$$

soni uchun $\rho(\tilde{a}, \overline{a}) < \frac{\delta}{3}$ tengsizlik bajariladi. Boshqa tomondan

$$\tilde{a} = \frac{n_i}{n_i + m_i}\left(\frac{1}{n_i}\sum_{k=0}^{n_i} V^k(a)\right) + \frac{m_i}{n_i + m_i}\left(\frac{1}{m_i}\sum_{k=n_i+1}^{n_i+m_i} V^k(a)\right) \tag{0.3}$$

tenglikdagi oxirgi qo‘shiluvchi U_1 to‘plamga tegishli. Bundan yetarlicha katta i indekslarda $\rho(\tilde{a}, \overline{a}) > \frac{\delta}{3}$ tengsizlikning o‘rinliligi kelib chiqadi. Bu esa $\rho(\tilde{a}, \overline{a}) < \frac{\delta}{3}$ tengsizlikka zid. Demak, faraz noto‘g‘ri. Ya’ni, $\overline{a}$ soni mavjud emas. ▲

S^2 simpleksda qurilgan Zaxarevichning misoli Ulam tomonidan aytilgan gipotezaning to‘g‘ri emasligini ko‘rsatib berish bilan birgalikda, yuqori o‘lchamli simplekslarda ham noergodik kvadratik stoxastik operatorlar sinfini qurish imkonini berganligini ta’kidlab o‘tish zarur. Shuningdek, ergodiklik xossasiga ega kvadratik stoxastik operatorlar ham qisman o‘rganilgan.

V. KEYSLAR BANKI

VI. MUSTAQIL TA’LIM MAVZULARI

VII. GLOSSARIY

O`lchovlarning ko`paytmasi	To`g`ri to`rtburchakning yuzi uning bo`yi va eni uzunliklarining ko`paytmasi ekanligini yaxshi bilamiz. Shuningdek, to`g`ri to`rtburchakning eni ham bo`yi ham kesma va ularning uzunliklari esa chiziqli o`lchov ekanligi yaxshi ma'lum. Ikkita kesmaning ko`paytmasidan hosil qilingan shaklning yuzi shu kesmalar uzunliklarining ko`paytmasiga teng bo`lmoqda. Demak, bob avvalida aytilganidek o`lchov uzunlik, yuza va hajmning umumlashmasi bo`lsa, hozircha biz umumlashtirmagan jihat aynan to`plamlar to`g`ri ko`paytmasining o`lchovini har bir to`plamdagi o`lchov orqali ifodalanishidir.
Luzin teoremasi.	[a; b] kesmada berilgan f funksiya o`lchovli bo`lishi uchun har qanday $\varepsilon > 0$ son olinganda ham [a; b] kesmada uzluksiz bo`lgan shunday $\phi$ funksiya topilib, $\mu(\{x : f(x) \neq \phi(x)\}) < \varepsilon$ tengsizlikning o`rinli bo`lishi zarur va yetarli.
Gibbs o`lchovi	Statistik zikada keng qo`llanuvchi ehtimollik o`lchovlaridan biri bu Gibbs o`lchovidir. Atrofmuhit bilan issiqlik muvozanatida bo`lgan sistema uchun taqsimot qonunini birinchi bo`lib amerikalik olim J.Gibbs kiritdi. Bunday taqsimotlar Gibbs o`lchovlari nomini oldi va turli sistemalar uchun uning holatini tasvirlab berishga xizmat qiladigan Gibbs o`lchovlari nazariyasining yaratilishiga sabab bo`ldi. Bunda berilgan zik sistemaning energiyasi deb ataluvchi funksiya | Hamiltoninanga mos taqsimotni, ya'ni Gibbs o`lchovini aniqlash masalasi tushuniladi. Gibbs o`lchovlari nazariyasining asosiy masalalari berilgan sistema uchun haroratning o`zgarishi va uning taqsimoti orasidagi bog`liqlikni topishdan iborat.
Populyatsiya	Populyatsiya deb ko`payishga nisbatan yopiq bo`lgan organizmlarning jamlanmasiga aytiladi. Populyatsion genetikaning sodda masalalaridan biri bu m ta turdan iborat biologik sistemaning evolutsiya davrida qaysi xususiyatlari dominant, qaysilari esa yo`qolib ketishini bashorat qilishdan iborat.
Nisbiy chastota	Nisbiy chastota bu ratsional son. Ratsional sonlar ketma-ketligining limiti odatdagi absolyut qiymatga nisbatan mavjud bo`lmasa, boshqa norma aniqlash

	kerakki, bu normada kuzatuv nati- jalariga ma'no berish mumkin bo`lsin.
Ergodiklik o`zgaruvchi	Ergodiklik o`zgaruvchi dinamik sistemaning shunday xossasiki, sistema evolyutsiyasi jarayonida sistemaning deyarli har bir nuqtasi ma'lum aniqlik bilan sistemaning boshqa ixtiyoriy nuqtasiga yaqin bo`ladi. Boshqacha aytganda sistema o`zining dastlabki holatini \unutib", tartibsiz harakat qiladi. Ergodiklik xossasiga ega dinamik sistemalarning afzalligi shundaki, kuzatuvning yetarli vaqti davomida bunday sistemalarni statistik usulda tavsiash mumkin.
sodda funksiya	X to`plamda _ o`lchov aniqlangan bo`lsin. Bu to`plamda berilgan f funksiya o`lchovli va ko`pi bilan sanoqlita qiymatga ega bo`lsa, sodda funksiya deyiladi
sanash o`lchovi	S to`plam uchun uning quvvatini mos qo`yuvchi μ(S) o`lchov. Bu o`lchov sanash o`lchovi deyiladi.

VIII. ADABIYOTLAR RO‘YXATI

I. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 488 b.
2. Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo‘limizni qat’iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko‘taramiz. 1-jild. – T.: “O‘zbekiston”, 2017. – 592 b.
3. Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O‘zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug‘ xalqning ishi ham ulug‘, hayoti yorug‘ va kelajagi farovon bo‘ladi. 3-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoyev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O‘zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O‘zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O‘zbekiston, 2018.
7. O‘zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda qabul qilingan “Ta’lim to‘g‘risida”gi O‘RQ-637-sonli Qonuni.
8. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015 yil 12 iyun “Oliy ta’lim muasasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-4732-sonli Farmoni.
9. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi 4947-sonli Farmoni.
10. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 aprel "Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2909-sonli Qarori.
11. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 21 sentabr “2019-2021 yillarda O‘zbekiston Respublikasini innovatsion rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5544-sonli Farmoni.
12. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2018 yil 19 fevral “Axborot texnologiyalari va kommunikatsiyalari sohasini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5349-sonli Farmoni.
13. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 may “O‘zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-5729-son Farmoni.
14. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 17 iyun “2019-2023 yillarda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida talab yuqori bo‘lgan malakali kadrlar tayyorlash tizimini tubdan takomillashtirish va ilmiy salohiyatini rivojlantiri chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4358-sonli Qarori.
15. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 27 avgust “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi PF-5789-sonli Farmoni.
16. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktabr “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
17. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019 yil 23 sentabr “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada

takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida”gi 797-sonli Qarori.

18. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyul “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387-sonli Qarori.

19. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 may “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

20. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

21. Bauer, H. Measure and Integration Theory, Berlin: de Gruyter, ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

22. Bear, H.S. A Primer of Lebesgue Integration, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.

23. Bobenko A.I. (Ed.) Advances in Discrete Differential Geometry// Springer, 2016. — 439 p. — (Mathematics). — ISBN: 3662504464

24. Bogachev, V. I. Measure theory, Berlin: Springer, 2006.

25. David Spencer “Gateway”, Students book, Macmillan 2012.

26. English for Specific Purposes. All Oxford editions. 2010. 204.

27. Evan M. Glazer, John W. McConnell Real-Life Math: Everyday Use of Mathematical Concepts//2013, ISBN-13: 978-0313319983

28. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

29. H.Q. Mitchell “Traveller” B1, B2, MM Publiciations. 2015. 183.

30. H.Q. Mitchell, Marileni Malkogianni “PIONEER”, B1, B2, MM Publiciations. 2015. 191.

31. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

32. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

33. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

34. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

35. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.

36. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

37. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.

38. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

39. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.

40. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

41. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

42. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и

линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.

43. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672 с.

44. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.

45. Gulobod Qudratulloh qizi, R.Ishmuhamedov, M.Normuhammedova. An’anaviy va noan’anaviy ta’lim. – Samarqand: “Imom Buxoriy xalqaro ilmiy-tadqiqot markazi” nashriyoti, 2019. 312 b.

46. Ibraymov A.YE. Masofaviy o‘qitishning didaktik tizimi. metodik qo‘llanma/ tuzuvchi. A.YE. Ibraymov. – Toshkent: “Lesson press”, 2020. 112 bet.

47. Ishmuhamedov R.J., M.Mirsoliyeva. O‘quv jarayonida innovatsion ta’lim texnologiyalari. – T.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 b.

48. Kiryanov D. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - SPb.: BXV-Peterburg, 2012. — 432 c.

49. Muslimov N.A va boshqalar. Innovatsion ta’lim texnologiyalari. O‘quv-metodik qo‘llanma. – T.: “Sano-standart”, 2015. – 208 b.

50. Образование в цифровую эпоху: монография / Н. Ю. Игнатова; М-во образования и науки РФ; ФГАОУ ВО «УрФУ им. первого Президента России Б.Н.Ельцина», Нижнетагил. технол. ин-т (фил.). – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

51. Oliy ta’lim tizimini raqamli avlodga moslashtirish konsepsiyasi. Yevropa Ittifoqi Erasmus+ dasturining ko‘magida. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

52. Современные образовательные технологии: педагогика и психология: монография. Книга 16 / О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бу-гакова и др. – Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

53. Usmonov B.SH., Habibullayev R.A. Oliy o‘quv yurtlarida o‘quv jarayonini kredit-modul tizimida tashkil qilish.–T.: “TKTI” nashriyoti, 2019.

54. Kolmogorov A.N., Fomin S.V., Elementi teorii funksiy i funksionalnogo analiza, “Nauka”, 1976.

55. Oxtobi J., Measure and category, “Springer”, 1971.

56. Kadets V.M., Kurs funksionalnogo analiza, Xarkov-2006.

57. Katok S., P-addic analysis in comparision with real}, AMS-2003.

58. Koblits N., P-adic numbers, p-adic analysis and Zeta-functions, “Springer”, 1984.

59. Khrennikov A.Yu., Nearximedov analiz i yego prilojeniya, FizMatLit-2003.

60. Preston J., Giibs states on countable sets, Campridge University Press - 1974.

61. Rozikov U.A., Gibbs measures on Cayley trees, World Scientific - 2013.

62. Brin M., Stuck G., Introduction to dynamical systems, Campridge University Press - 2003.

63. Arnold V.I., Avets A., Ergodicheskiye problemi klassicheskoy mexaniki, R&C dynamics -1998.

IV. Интернет сайтлар

64. O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi: www.edu.uz.

65. Bosh ilmiy-metodik markaz: www.bimm.uz

66. www. Ziyonet. Uz
67. Открытое образование. https://openedu.ru/
68. https://www.ucl.ac.uk/ioe/courses/graduate-taught/mathematics-education-ma
69. https://www.onlinestudies.com/Courses/Mathematics/Europe/
70. https://online-learning.harvard.edu/catalog?keywords=mathematics-&op=Search
71. https://www.msu.ru/en/projects/proekt-vernadskiy/news/math-teachers-advanced-training.html
72. https://english.spbu.ru/education/graduate/master-in-english/90-program-master/2455-advanced-mathematics.
73. http:// www.mitc.uz - Ўзбекистон Республикаси ахборот технологиялари ва коммуникацияларини ривожлантириш вазирлиги
74. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси
75. http:// www.tuit.uz - Муҳаммад ал-Хоразмий номидаги Тошкент ахборот технологиялари университети
76. http://www.mathnet.ru/ej.phtml?option_lang=rus
77. https://www.youtube.com/watch?v=6ad9V8gvyBQ&t=39s – Фридрих Шулернинг ўлчовлар назарияси бўйича видео дарслари
78. https://www.youtube.com/watch?v=ZCcok7HAUCw&t=1557s - ICTP профессори С.Лузаттонинг эрогодик назария деб номланган видео дарслари.