ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“МЕХАНИКА ва МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ” ЙЎНАЛИШИ УЧУН

“ҲИСОБЛАШ МЕХАНИКАСИ” МОДУЛИ БЎЙИЧА

ЎҚУВ–УСЛУБИЙ МАЖМУА

Тошкент – 2021

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Дастур Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда тасдиқланган “Таълим тўғрисида”ги Қонуни, Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сон, 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сон, 2019 йил 8 октябрдаги “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармонлари ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарорларида белгиланган устувор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини такомиллаштиришни мақсад қилади.

Дастур доирасида берилаётган мавзулар таълим соҳаси бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш мазмуни, сифати ва уларнинг тайёргарлигига қўйиладиган умумий малака талаблари ва ўқув режалари асосида шакллантирилган бўлиб, унинг мазмуни кредит модул тизими ва ўқув жараёнини ташкил этиш, илмий ва инновацион фаолиятни ривожлантириш, педагогнинг касбий профессионаллигини ошириш, таълим жараёнига рақамли технологияларни жорий этиш, махсус мақсадларга йўналтирилган инглиз тили, мутахассислик фанлар негизида илмий ва амалий тадқиқотлар, ўқув жараёнини ташкил этишнинг замонавий услублари бўйича сўнгги ютуқлар, педагогнинг креатив компетентлигини ривожлантириш, таълим жараёнларини рақамли технологиялар асосида индивидуаллаштириш, масофавий таълим хизматларини ривожлантириш, вебинар, онлайн, «blended learning», «flipped classroom» технологияларини амалиётга кенг қўллаш бўйича тегишли билим, кўникма, малака ва компетенцияларни ривожлантиришга йўналтирилган.

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналишининг ўзига хос хусусиятлари ҳамда долзарб масалаларидан келиб чиққан ҳолда дастурда тингловчиларнинг мутахассислик фанлар доирасидаги билим, кўникма, малака ҳамда компетенцияларига қўйиладиган талаблар такомиллаштирилиши мумкин.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

Модулининг мақсади: Ҳисоблаш механикаси модули механика ва математик модуллаштириш қонунлари ва постулатлари асосида ўрганиладиган жараёнларни ўрганиш ва татбиқ этиш жараёнида юзага келадиган математик моделларни ҳисоблаш усуллари ёрдамида сонли ечиш, олинган натижаларни хисоблаш эксперименти асосида тахлил этиш ва замонавий информацион технологиялардан фойдаланган холда график усулда тасвирлаш ва визуаллаштириш бўйича педагог кадрларда билим, кўникма ва компетенцияларини ошириш.

Модулнинг вазифалари:

- механиканинг фундаментал қонуниятлари, постулатлари асосида турли жароёнларни математик моделлаштириш ва юзага келадиган оддий ва хусусий ҳосилали чизиқли ва чизиқсиз дифференциал тенгламалар ва интеграл тенгламаларни тузиш ва классификациялаш кўникмасига эга бўлиш,

- чекли элементлар усули, чекли-айирмали вариацион усул, чегаравий элементлар усули, чекли хажмлар усули ва чекли-айирмали усулларидан фойдаланиш, уларни ечиш алгоритмини аниқлаш, ҳисоблаш тажрибаларини ташкил қилиш, олинган натижаларни тахлил қилиш бўйича назарий ва амалий билимлар, кўникма ва малакаларни шакллантиришдан иборат.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

Модулни ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

- Механика фани ривожининг замонавий босқичларини;
- Динамик тизимларга тегишли асосий қонунлар, принциплар ва тадқик қилиш усулларини:
- Динамик тизимларни сифат тадқиқи натижаларининг замонавий талқинини;
- Илмий изланишлар олиб боришда программалаш пакетларидан фойдаланишни;
- Табиий ва аниқ фанларда фойдаланиладиган замонавий амалий дастурлар мажмуаларини *билиши* керак.
- табиий ва аниқ фанларни ўқитиш бўйича янги технологияларни амалиётда қўллаш;
- ахборот технологияларининг замонавий воситаларидан фойдаланиб илмий-тадқиқотларни ўтказиш;
- экспериментал тадқиқотлар натижаларига ишлов бериш, уларни таҳлил қилиш ва акс эттириш, хулосалар чиқариш, илмий мақолалар тайёрлаш, тавсияларини ишлаб чиқиш;
- инновацион фаолиятни ташкил этиш;
- илғор тажрибалардан фойдаланиш;
- ўз устида ишлаб, фаннинг янги тадқиқотларини ўқитиш тизимини қўллаш;
- Бошқариладиган тизимлар механикаси, классик механикага замонавий қараш, механиканинг замонавий йўналишлари бўйича маъруза, амалий машғулот ва назорат ишларини ташкил этиш;
- педагогик жараёнда мулоқот услубларини тўғри қўллай олиш

кўникмаларига эга бўлиши лозим.

- ахборот коммуникацион технологиялари ва уларни қўллашнинг илмий-назарий ва амалий аҳамиятини билиш;
- Бошқариладиган тизимлар механикаси, классик механикага замонавий қараш, компьютер инжиниринги фанларининг замонавий йўналишларини ишлаб чиқиш;
- табиий ва аниқ фанларни турли соҳаларга татбиқ қилиш;
- табиий ва аниқ фанларни дастурлар пакети ёрдамида ечиш ва қўллаш

малакаларига эга бўлиши лозим.

- табиий ва аниқ фанларнинг дастурлар пакетини ўқув жараёнига татбиқ этиш;
- табиий ва аниқ фанларни дастурлар пакети ёрдамида ечишнинг замонавий масалаларини таҳлил қила олиш;
- Механикага оид масалаларни ечишда замонавий технологиялар ва усуллардан фойдалана олиш;
- табиий ва аниқ фанлар соҳасида касбий фаолият юритиш учун зарур бўлган билим, кўникма, малакага эга бўлиш;
- илғор ахборот-технологияларида ишлаш;
- видеодарсларни тайёрлаш;
- эгалланган тажрибани танқидий кўриб чиқиш қобилияти, зарур бўлганда ўз касбий фаолиятининг тури ва характерини ўзгартира олиш;
- табиий ва аниқ фанларда тизимли таҳлил усулидан фойдаланиш йўлларини ишлаб чиқиш;
- Бошқариладиган тизимлар механикаси, классик механикага замонавий қараш, компьютер инжинирингига оид замонавий манбалардан фойдалана олиш *компетенцияларига* эга бўлиши лозим.

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

Модулни ўқитиш маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Модулни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, педагогик технологиялар ва ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Ҳисоблаш механикаси” модули мазмуни ўқув режадаги “Механикада математик моделлаштириш”, “Бошқариладиган тизимлар механикаси” ўқув модуллари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг таълим жараёнида математик моделлаштириш, ҳисоблаш усуллари ва бошқариладиган тизимлар механикасидан фойдаланиш бўйича касбий педагогик тайёргарлик даражасини оширишга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар таълим жараёнида механикада математик моделлаштириш, бошқариладиган тизимлар, мехатроника ва робототехника тизимларида ҳисоблаш усулларидан фойдаланиш ва амалда қўллашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти

№	Модуль мавзулари	Аудитория укув юкламаси			
		Жами	жумладан		
			Назарий	Амалий машғулот	Кўчма машғулоти
1.	Классик механиканинг замонавий ҳолати. Назарий механика ва туташ муҳитлар механикасининг асосий математик моделларининг таҳлили.	6	2	4	
2.	Чекли айирмали усул. Чекли ва чегаравий элементлар усуллари.	6	2	4	
3.	Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари, ҳамда амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш.	6	2	4	
	Жами:	**18**	**6**	**12**	

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-мавзу. Классик механиканинг замонавий ҳолати. Назарий механика ва туташ муҳитлар механикасининг асосий математик моделларининг таҳлили (2 соат).

1. Кириш.
2. Классик механиканинг замонавий ҳолати. Назарий механика ва туташ муҳитлар механикасининг асосий математик моделларининг таҳлили.

2-мавзу. Чекли айирмали усул. Чекли ва чегаравий элементлар усуллари (2 соат).

1. Механикада учрайдиган чегаравий масалаларни сонли моделлаштириш усуллари. Чекли айирмали усул.
2. Чекли элементлар усули.
3. Чегаравий элементлар усули.

3-мавзу. Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари, ҳамда амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш. (2 соат).

1. Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари.
2. Амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-амалий машғулот. Классик механиканинг замонавий ҳолати. Назарий механика ва туташ муҳитлар механикасининг асосий математик моделларининг таҳлили. *Бошланғич шартли масаларни сонли ечиш усуллари. Чекли айирмали муносабатлар. 1,2 ва аралаш ҳосилаларни чекли айирмалар билан алмаштириш ва уларнинг аппроксимация хатоликлари. 2-тартибли ОДТ учун қўйилган чегаравий масала учун чекли айирмали тенгламалар.* **(4 соат).**

2-амалий машғулот. Чекли айирмали усул. Чекли ва чегаравий элементлар усуллари. *Ламе тенгламаси учун чекли айирмали тенгламалар. Стержень хақидаги масалани сонли ечиш. Динамик чегаравий масалалар учун ошкор ва ошкор бўлмаган схемалар. Тўлқин тарқалиши тенгламаси учун ошкор ва ошкормас схемаларни сонли* **(4 соат).**

3-амалий машғулот. Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари, ҳамда амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш. (4 соат).

Амалий машғулотларни ташкил этиш бўйича кўрсатма ва тавсиялар

Амалий машғулотларда тингловчилар ўқув модуллари доирасидаги ижодий топшириқлар, кейслар, ўқув лойиҳалари, технологик жараёнлар билан боғлиқ вазиятли масалалар асосида амалий ишларни бажарадилар.

Амалий машғулотлар замонавий таълим услублари ва инновацион технологияларга асосланган ҳолда ўтказилади. Бундан ташқари, мустақил ҳолда ўқув ва илмий адабиётлардан, электрон ресурслардан, тарқатма материаллардан фойдаланиш тавсия этилади.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (кўрилаётган лойиҳа ечимлари бўйича таклиф бериш қобилиятини ошириш, эшитиш, идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);
- баҳс ва мунозаралар (лойиҳалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ.

“Тушунчалар таҳлили” методи

Методнинг мақсади: мазкур метод талабалар ёки қатнашчиларни мавзу буйича таянч тушунчаларни ўзлаштириш даражасини аниқлаш, ўз билимларини мустақил равишда текшириш, баҳолаш, шунингдек, янги мавзу буйича дастлабки билимлар даражасини ташҳис қилиш мақсадида қўлланилади.

Методни амалга ошириш тартиби:

- иштирокчилар машғулот қоидалари билан таништирилади;
- ўқувчиларга мавзуга ёки бобга тегишли бўлган сўзлар, тушунчалар номи туширилган тарқатмалар берилади (индивидуал ёки гуруҳли тартибда);
- ўқувчилар мазкур тушунчалар қандай маъно англатиши, қачон, қандай ҳолатларда қўлланилиши ҳақида ёзма маълумот берадилар;
- белгиланган вақт якунига етгач ўқитувчи берилган тушунчаларнинг тугри ва тулиқ изоҳини уқиб эшиттиради ёки слайд орқали намойиш этади;
- ҳар бир иштирокчи берилган тугри жавоблар билан узининг шахсий муносабатини таққослайди, фарқларини аниқлайди ва ўз билим даражасини текшириб, баҳолайди.

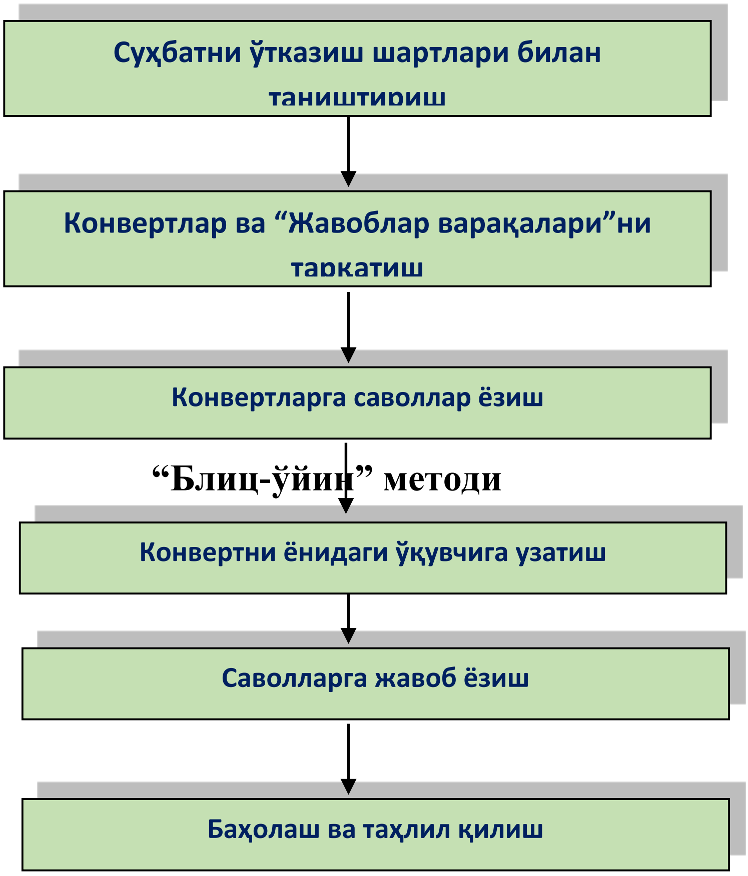
“Давра суҳбати” методи

Айлана стол атрофида берилган муаммо ёки саволлар юзасидан таълим олувчилар томонидан ўз фикр-мулоҳазаларини билдириш орқали олиб бориладиган ўқитиш методидир.

“Давра суҳбати” методи қўлланилганда стол-стулларни доира шаклида жойлаштириш керак. Бу ҳар бир таълим олувчининг бир-бири билан “кўз алоқаси”ни ўрнатиб туришига ёрдам беради. Давра суҳбатининг оғзаки ва ёзма шакллари мавжуддир. Оғзаки давра суҳбатида таълим берувчи мавзуни бошлаб беради ва таълим олувчилардан ушбу савол бўйича ўз фикр-мулоҳазаларини билдиришларини сўрайди ва айлана бўйлаб ҳар бир таълим олувчи ўз фикр-мулоҳазаларини оғзаки баён этадилар. Сўзлаётган таълим олувчини барча диққат билан тинглайди, агар муҳокама қилиш лозим бўлса, барча фикр-мулоҳазалар тингланиб бўлингандан сўнг муҳокама қилинади. Бу эса таълим олувчиларнинг мустақил фикрлашига ва нутқ маданиятининг ривожланишига ёрдам беради.

Давра столининг тузилмаси

Ёзма давра суҳбатида стол-стуллар айлана шаклида жойлаштирилиб, ҳар бир таълим олувчига конверт қоғози берилади. Ҳар бир таълим олувчи конверт устига маълум бир мавзу бўйича ўз саволини беради ва “Жавоб варақаси”нинг бирига ўз жавобини ёзиб, конверт ичига солиб қўяди. Шундан сўнг конвертни соат йўналиши бўйича ёнидаги таълим олувчига узатади. Конвертни олган таълим олувчи ўз жавобини “Жавоблар варақаси”нинг бирига ёзиб, конверт ичига солиб қўяди ва ёнидаги таълим олувчига узатади. Барча конвертлар айлана бўйлаб ҳаракатланади. Якуний қисмда барча конвертлар йиғиб олиниб, таҳлил қилинади. Қуйида “Давра суҳбати” методининг тузилмаси келтирилган



“Блиц-ўйин” методи

Методнинг мақсади: ўқувчиларда тезлик, ахборотлар тизмини таҳлил қилиш, режалаштириш, прогнозлаш кўникмаларини шакллантиришдан иборат. Мазкур методни баҳолаш ва мустаҳкамлаш мақсадида қўллаш самарали натижаларни беради.

Методни амалга ошириш босқичлари:

1. Дастлаб иштирокчиларга белгиланган мавзу юзасидан тайёрланган топширик, яъни тарқатма материалларни алоҳида-алоҳида берилади ва улардан материални синчиклаб ўрганиш талаб этилади. Шундан сўнг, иштирокчиларга тўғри жавоблар тарқатмадаги «якка баҳо» колонкасига белгилаш кераклиги тушунтирилади. Бу босқичда вазифа якка тартибда бажарилади.

2. Навбатдаги босқичда тренер-ўқитувчи иштирокчиларга уч кишидан иборат кичик гуруҳларга бирлаштиради ва гуруҳ аъзоларини ўз фикрлари билан гуруҳдошларини таништириб, баҳслашиб, бир-бирига таъсир ўтказиб, ўз фикрларига ишонтириш, келишган ҳолда бир тўхтамга келиб, жавобларини “гуруҳ баҳоси” бўлимига рақамлар билан белгилаб чиқишни топширади. Бу вазифа учун 15 дақиқа вақт берилади.

3. Барча кичик гуруҳлар ўз ишларини тугатгач, тўғри ҳаракатлар кетма-кетлиги тренер-ўқитувчи томонидан ўқиб эшиттирилади, ва ўқувчилардан бу жавобларни “тўғри жавоб” бўлимига ёзиш сўралади.

4. “Тўғри жавоб” бўлимида берилган рақамлардан “якка баҳо” бўлимида берилган рақамлар таққосланиб, фарқ булса “0”, мос келса “1” балл қуйиш сўралади. Шундан сўнг “якка хато” бўлимидаги фарқлар юқоридан пастга қараб қўшиб чиқилиб, умумий йиғинди ҳисобланади.

5. Худди шу тартибда “тўғри жавоб” ва “гуруҳ баҳоси” ўртасидаги фарқ чиқарилади ва баллар “гуруҳ хатоси” бўлимига ёзиб, юқоридан пастга қараб қўшилади ва умумий йиғинди келтириб чиқарилади.

6. Тренер-ўқитувчи якка ва гуруҳ хатоларини тўпланган умумий йиғинди бўйича алоҳида-алоҳида шарҳлаб беради.

7. Иштирокчиларга олган баҳоларига қараб, уларнинг мавзу бўйича ўзлаштириш даражалари аниқланади.

“SWOT-таҳлил” методи.

Методнинг мақсади: мавжуд назарий билимлар ва амалий тажрибаларни таҳлил қилиш, таққослаш орқали муаммони ҳал этиш йўлларни топишга, билимларни мустаҳкамлаш, такрорлаш, баҳолашга, мустақил, танқидий фикрлашни, ностандарт тафаккурни шакллантиришга хизмат қилади.

S – (strength)	• кучли томонлари
W – (weakness)	• заиф, кучсиз томонлари
O – (opportunity)	• имкониятлари
T – (threat)	• тўсиқлар

Ламе тенгламасини чекли-айирмали усулда сонли ечишни SWOT таҳлилини ушбу жадвалга туширамиз.

S	Ламе тенгламасини чекли-айирмали усулда сонли ечишнинг бошқа усуллардан афзалликлари	2 -тартибли ва аралаш ҳосиларни мос чекли айирмали муносабатлар билан алмаштиришғ яни Ламе тенгламасини дискрет холга келтириш
W	Ламе тенгламасини чекли-айирмали усулни қўллашда юзага келадиган ноқулайликлар ва камчиликлар	Ламе тенгламаси призматик кўринишга эга булган соҳалар учуг қўллаш мақсадга мувофиқ.
O	Чекли айирмали усулнинг имкониятлари ва қўлланинилиш соҳаси (ички)	Чекли айирмали усулда кучларда берилган яни табиий чегаравий шартларни қаноатлантириш алохида эътиборни талаб қилади.
T	Тўсиқлар (ташқи)	Динамик масалаларни ечишда бу усулни қўллаб бўлмайди

“Ассисмент” методи.

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур техника орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташҳис қилинади ва баҳоланади.

“Давра суҳбати” методининг афзалликлари:

- ўтилган материалининг яхши эсда қолишига ёрдам беради;
- барча таълим олувчилар иштирок этадилар;
- ҳар бир таълим олувчи ўзининг баҳоланиши масъулиятини ҳис этади;
- ўз фикрини эркин ифода этиш учун имконият яратилади.

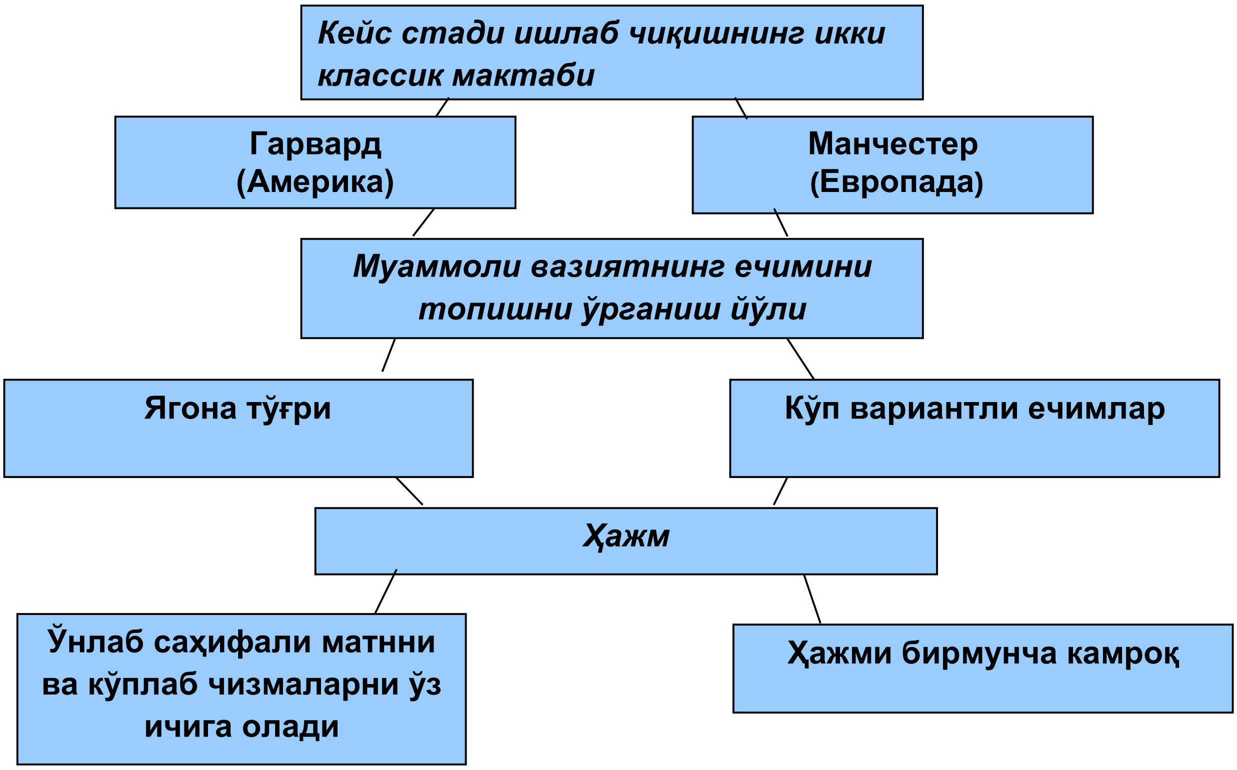
Методни амалга ошириш тартиби:

“Ассисмент”лардан маъруза машғулотларида талабаларнинг ёки қатнашчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, семинар, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассисментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

Ҳар бир катакдаги тўғри жавоб 5 балл ёки 1-5 балгача баҳоланиши мумкин.

ТЕСТ **Чекли айирмали схема нима?** а) Асосий дифференциал тенглама ёки тенгламалар системасини ва қўшимча (бошлангғич ва чегаравий) шартларни аппроксимация қилувчи айирмали тенгламалар системаси; б) Барча ечимлар тўпламидан ягона ечимни ажратиб олиш усули; с) Ўрганилаётган масаланинг дифференцал тенгламасининг тақрибий ифодаси; д) Ўрганилаётган масалани тақрибий ечиш усули	**Қиёсий таҳлил** Дифференциаль тенгламаларда ва чегаравий шартларда учрайдиган ҳосилаларни чекли айирмали муносабатлар билан алиштириш

Амалий кўникма $(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+X=0, \quad X=\sin\frac{2\pi x}{l}$ $u\big\|_{x=0}=0, \quad u\big\|_{x=l}=0$ $\lambda=1, \ \mu=0.5$ стержень хақида масала учун чекли айирмали тенгламалар тузилсин	**Тушунча таҳлили** Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси



Кейс-стадининг мактаблари

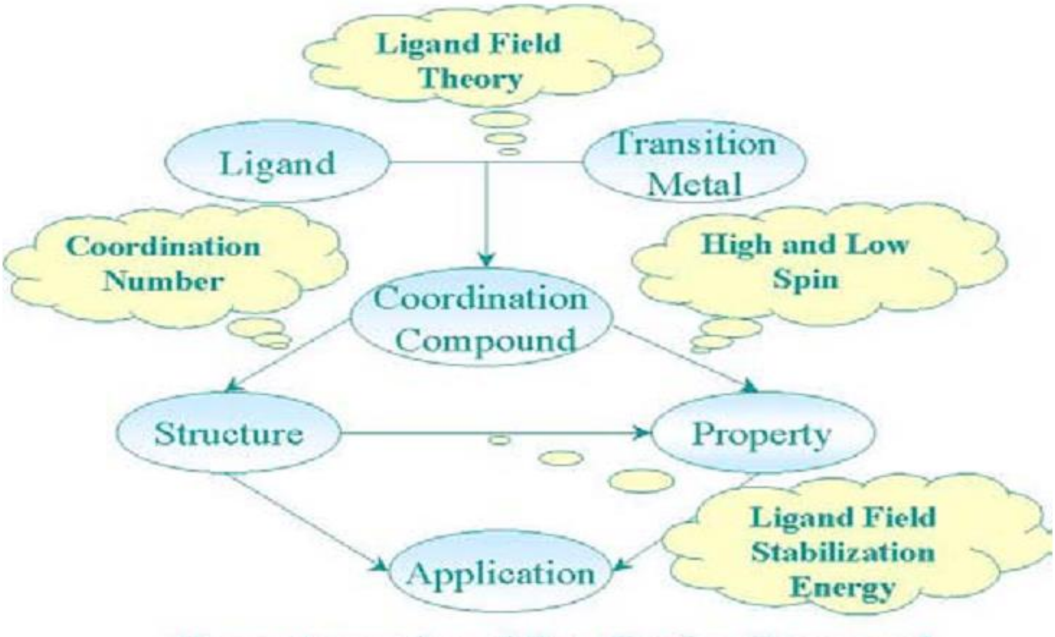
Кейсда муаммони бериш усуллари

1-усул – муаммони кейсолог ифодалайди.

2-усул – вазиятдаги муаммо яққол ифодаланади, лекин бунда вазиятнинг зарур элементларидан бири (масалан, шериклар ҳақидаги) ахборот бўлмайди.

3-усул – матнда вазият субъектлари ўртасидаги зиддият мавҳум ифодаланади**.**

Демак, кейс-стади усули талабаларда муаммо ечишда фанлараро билимлар олишни ўргатади. Бу усул талабаларда когнитив структураларни ривожлантиришига олиб келади. Шунингдек, талаба ақлига сезиларли ҳисса қўшади. Масалан, 1-расмда координацион бирикма келтирилган. Лиганд ўтиш металли билан бирикма ҳосил қилиш мумкин. Бу жараёнда "лиганд назарияси" тушунчаси бор. Бу назария координацион бирикма ҳосил қиладиган реакция механизмини тушунтириш мумкин. "Координацион сон" тушунчаси бирикмани структураси билан боғлайди. Агар марказий атом ҳар хил координацион сонга эга бўлса, бирикманинг тузилиши бошқа бўлади. бирикма ва унинг хоссалари ўртасида "юқори ва қуйи спин" рангли оралиқ маҳсулотни ҳосил қилади ва магнетизм хоссасини белглайди[1].



Concept mapping of Coordination Compound

Замонавий кимё фанининг йўналишларидан бири бўлган нанокимё

[1]Baodi Gou. Contemporary teaching strategies in general chemistry. TheChinaPapers, July 2003.P.40

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-МАВЗУ: Классик механиканинг замонавий холати. Назарий механика ва туташ мухитлар механикасининг асосий математик моделларининг тахлили.

РЕЖА:

1.1. Кириш
1.2. Классик механиканинг замонавий ҳолати. Назарий механика ва туташ муҳитлар механикасининг асосий математик моделларининг таҳлили.

Таянч сўзлар: *Назарий механикаси, туташ мухитлар механикаси, қаттиқ жисм, суюқлик ва газлар, математик моделлар, Гук қонун, Навье-Стокс муносабатлари, Эйлер ва Навье-Стокс тенгламалари, изотроп, трансверсаль изотроп ва ортотроп жисмлар, Сонли усуллар, Чекли айирмали усул, чекли элементлар усули, Чегаравий элементлар усули.*

1.1. Кириш

Назарий ва туташ мухитлар механикаси масалалари турли хил математик модел тенгламалар орқали ифодаланади. Одатда, бу тенгламалар оддий ёки хусусий хосилали дифференциаль тенгламалар кўринишида ёзилади. Назарий маханикада, моддий нуқта ёки моддий нуқталар системаси каралиб, улар одатда иккинчи тартибли чизиқли ва чизиқсиз оддий дифференциаль тенгламаларга қўйилган бошланғич шартли масалаларга(Коши масаласи) келтирилади. Туташ муҳитлар механикаси эса деформацияланувчи қаттиқ жисмлар, суюқлик ва газларда кечадиган жароёнларни ўрганишга ва уларни математик моделлаштиришга бағишланган. Одатда, бу масалалар, вақтга боғлиқлигига нисбатан, гиперболик, параболик ва эллиптик типдаги хусусий ҳосилали дифференциаль тенгламалар билан ифодаланади.

Бу курснинг асосий мақсади, назарий механика ва тутиш мухит механикасида учрайдиган математик моделларнинг яни чегаравий масалаларни (бошланғич ва чегаравий шартли) масалаларни замонавий компьютер технологияларидан фойдаланилган холда сонли ечиш усулларини баён этишдан иборат.

Хозирги кунда, назарий механика ва туташ мухит механикаси масалаларини сонли ечишнинг асосий усуллари сифатида

1. Чекли айирмали усул
2. Чекли элементлар усули
3. Чегаравий элементлар усулларини

санаб ўтиш мумкин. Бошланғич шартли масалаларни (Коши масаласи) ечишда, одатда Эйлер, Эйлер-Коши ва Рунге-Кутта усуллари кенг фойдаланилади.

Бу сонли усуллар, туташ мухит механикасининг асосий қисмини ташкил этувчи деформацияланувчи қаттиқ жисм механикаси масалалари мисодида баён этилади. Математик моделларни қуриш, яни чегаравий масаларни қўйилиши ва уларни сонли ечиш усуллари баёнига. Хамда бу чегаравий масалаларни   1-2 ўлчовли холларда сонли ечишга ва C++ тилида содда программаларни тузишга алохида эътибор берилган.

Хозирги кунда, механика масалаларини ечишда “Чекли элементлар усули” жуда кенг фойдаланилади. Чекли элементлар усулига асосланган Ansys, Cosmosm, Abaqus, FEM, Solidworks каби қатор амалий дастурий пакетлар мажмуалари мавжуд. Бу дастурлар амалиётда учрайдиган мухим масалаларни ечиш   инженер мухандислар учун жуда мухимдир. Шунинг учун, техник олий ўқув юртларида мухандис кадрларни таёрлашда уларни замонавий информацион технологияларга асосланган дастурий воситалар фойдалана олиш кўникмалари билан қуроллантириш жуда мухимдир.

1.2. Классик механиканинг замонавий ҳолати. Назарий механика ва туташ муҳитлар механикасининг асосий математик моделларининг таҳлили

Туташ мухит механикаси турли ташқи таъсирлар остида қаттиқ жисм, суюқлик ва газларда кечадиган жароёнларни математик моделлаштиришга бағишланган.

Деформациянувчи каттиқ жисмларда кечадиган жароёнларни математик моделлаштиришда, кучланиш ва деформация тензорлари орасидаги чизиқли ва ночизиқли(пластик) боғланишларни топиш туташ мухит механикасининг мухим муаммоларидан биридир. Маълумки, кучланиш ва деформация орасидаги боғланиш чизиқли бўлган холда Гук қонунига эга бўламиз. Чизиқсиз боғланишлар сифатида, Ильюшиннинг деформацион назариясини, пластикликнинг оқиш назарияларини келтириш мумкин.

Хозирги кунда, ани композицион материаллар соҳасининг ривожланиши билан, анизотроп жисмлар учун деформацион ва оқиш назарияларининг янги турлари яратилган. Бу ерда R.Hill ва Б.Е. Победрялар томонидан яратилган пластиклик назарияларини эслаб ўтиш мумкин. Шу билан биргаликда, охирги пайтларда, температура ва деформацияланиш тезликларини хисобга олган холда қатор назариялар яратилди. Суюқлик ва газлар учун хам, Гук қонунига ўхшаш, Навье-Стокс муносабатлари ва улар асосида хосила қилинадиган Эйлер ва Навье-Стокс тенгламалари бўйича ва сонли ечиш усуллари бўйича хам жадал изланишлар олиб борилмоқда.

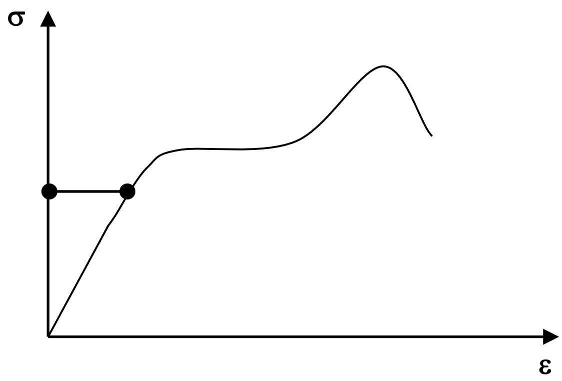
Курсимизда хозирги кунда, ишлаб чиқаришда, айниқса машинасозлик ва қурилиш кенг фойдаланиладиган замонавий композицион материаллар соҳасига асосий эътиборни қаратамиз.

Композицион материаллар охирги йилларда авиасозик, машинасозлик соҳаларида кенг фойдаланимоқда. Маълумотларга кўра, замонавий самолетларда 70-75% миқдорида композицон материаллар фойдаланилади.

Шу билан биргаликда медицинада турли хил биоматериаллар яратиш масалалариги катта эътибор берилмоқда. Айниқча, нанотехнологияларнинг ривожланиши билан, наноматераллар яратиш масаласида дунё олимлари томонидан илмий изланишлар олиб борилмоқда.

Композицион материалларнинг хоссалари, одатдаги изотроп жисмлардан фарқли равишда йўналишга боғлиқ бўлади ва анизотроп жисмлар деб аталади. Анизотроп жисмларни ортотроп ва трансверсаль изотроп каби турларга ажратиш мумкин.

Тажриба-синовлардан маълумки, кучланиииш ва деформация орасидаги боғланишни ифодаловчи чизиқ одатда эгри чизиқ кўринида бўлади ва деформацияланиш диаграммаси деб аталади(1-расм). Деформацияланиш диаграммаси жисмга таъсир этувчи кучнинг эластиклик чегараси деб аталувчи даражасигача тўғри чизикли кўринишида бўлади(1-расм).



1-расм

Умумий холда кучланиш σ_{ij} ва деформация ε_{ij} тензорлари орасидаги боғланишни қуйидаги чизиқсиз функция кўринишида ифодалаш мумкин, яъни

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) \tag{1}$$

Бу ифодани деформациялар диаграммасининг чизиқли қисми учун қуйидаги кўринишда чизиқли тензор функция(умумлашган Гук қонуни) кўринида ёзиб олиш мумкин

$$\sigma_{ij} = C_{ijke}\varepsilon_{ke} \tag{2}$$

бу ерда C_{ijke} - 4-рангли симметрик тензор бўлиб, умумий холда $3^4=81$ компонентага эга ва анизотроп жисмни ифодалайди. Одатда, бу компоненталар, жисмларнинг симметриклик хоссаларига боғлиқ равишда тажрибалардан аниқланади.

Агар қуйидаги симметриклик шартлари ўринли бўлса

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \tag{3}$$

Компонентлар сони 36 тагача камаяди. Яна қуйидаги симметриклик шартлари ҳисобга олинса

$$C_{ijkl} = C_{klij} \tag{4}$$

компонентлар сони 21 та бўлади. Энди, жисмларнинг эластиклик хоссалари 3 та ўзаро ортогональ текисликларга нисбатан симметрик бўлса, компоненталар сони 9 та бўлади ва бундай жисм ортотроп материал деб аталади. Ортотроп жисмлар учун C_{ijke} тензор қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1212} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313} & 0 \\ & & & & & C_{2323} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Тензор компонентларига нисбатан, яна қуйидаги симметриклик шартлари бажарилса,

$$C_{1133} = C_{2233}, \quad C_{1313} = C_{2323}, \quad C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{2211}) \tag{6}$$

Бу шартларнинг бажарилиши, қаралаётган жисмнинг хоссалари OX_3 ўқига нисбатан айланишларга ва шу ўқ ётувчи текисликка нисбатан симметрик эканлигини ифодалайди ва жисмнинг транверсаль изотроп эканлигини англатади.

Агар куйидаги шартлар бажарилган бўлса

$$C_{1133} = C_{2233} = C_{1122} = \lambda, \quad C_{1313} = C_{2323} = C_{1212} = \mu \tag{7}$$

C_{ijke} қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$C_{ijkl} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix} \tag{8}$$

ва материалнинг хоссаоари хамма йўналишда бир хиллигини яни жисм изотроп эканлигини англатади.

(8) - ифодани C_{ijke} тензорни қуйдагича ёзиб олиш мумкин

$$C_{ijke} = \lambda\delta_{ij}\delta_{ke} + \mu(\delta_{ik}\delta_{je} + \delta_{ie}\delta_{jk}) \tag{9}$$

(9) ифодани (2) - тенгликка қўйиб

$$\sigma_{ij} = C_{ijke}\varepsilon_{ke} = \left[\lambda\delta_{ij}\delta_{ke} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{je} + \delta_{ie}\delta_{jk}\right)\right]\varepsilon_{ke} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{10}$$

ёки

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\theta + 2\mu\varepsilon_{ij}, \qquad \theta = \varepsilon_{kk} \tag{11}$$

бу ерда μ , λ- изотроп эластик жисм учун ўзгармаслар. (11)-ифоданинг ёйилмаси куйидаги кўринишни олади

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}\\
\sigma_{22} &= \varepsilon_{11}\lambda + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{33}\\
\sigma_{33} &= \lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{33}\\
\sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12}\\
\sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23}\\
\sigma_{13} &= 2\mu\varepsilon_{13}
\end{aligned} \tag{12}$$

μ , λ техник ўзгармаслар E, ν билан қуйидагича боғланган

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Статик масаланинг қўйилиши. Шундай қилиб эластиклик назариясининг чегаравий масаласи:

мувозанат тенгламаси

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \tag{I}$$

Гук қонуни

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{II}$$

Коши муносабати

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{III}$$

ва мос кўчишларга

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0 , \tag{IV}$$

ва кучларга нисбатан қўйилган чегаравий шартлардан ташкил топади

$$\sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2} = S_i^0 \tag{V}$$

(I-V) масалани 2 ўлчовли холда қараймиз: У холда, мувозанат тенгламаси

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 = 0$$

$$\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+X_2=0 \qquad (13)$$

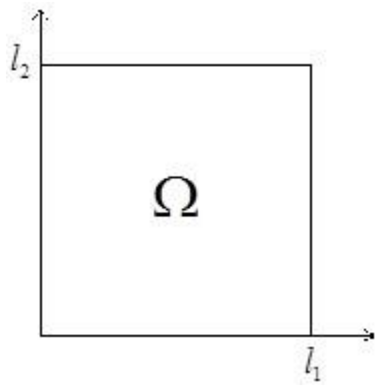
Гук қонуни

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+2\mu\varepsilon_{11}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}\\
\sigma_{22}&=\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+2\mu\varepsilon_{22}=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{11} \qquad (14)\\
\sigma_{12}&=2\mu\varepsilon_{12}
\end{aligned}$$

Коши муносабати

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\
\varepsilon_{22}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \qquad (15)\\
\varepsilon_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)
\end{aligned}$$

ва тўртбурчак соҳа чегаралари $\Gamma_1=(x_1=0,l_1:0\le x_2\le l_2)$ ва $\Gamma_2=(x_2=0,l_2:0\le x_1\le l_1)$ ларга



Расм. 1. Тўғри тўртбурчакли соҳа

қўйилган куйидаги чегаравий шартлардан ташкил топади

$$\begin{aligned}
&u_1\big|_{\Gamma_1}=u_1^o, \quad u_2\big|_{\Gamma_1}=u_2^o,\\
&(\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2)\big|_{\Gamma_2}=S_1,\ (\sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2)\big|_{\Gamma_2}=S_2. \qquad (16)
\end{aligned}$$

(I-V) масалани кўчишларга нисбатан ёзиб куйдаги кўринишга келтириш мумкин

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+X_1=0\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}+X_2=0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

(I-V) масалада II муносабат ўрнига умумлашган Гук қонунини олиб, а анизотроп жисмлар учун эластиклик назариясининг статик масаласини хосил қилиш мумкин:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sigma_{ij,j}+X_i=0,\\
&\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl},\\
&\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right),\\
&u_i\Big|_{\sum_1}=u_i^0, \qquad \sigma_{ij}n_j\Big|_{\sum_2}=S_i
\end{aligned}\right\}
\tag{18}
$$

Изотроп жисмлар учун учун эса қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sigma_{ij,j}+X_i=0 \tag{19}$$

$$\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\,\varepsilon_{ij} \tag{20}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{21}$$

$$u_i\Big|_{\sum_1}=u_i^0, \qquad \sigma_{ij}n_j\Big|_{\sum_2}=S_i \tag{22}$$

(19-22) чегаравий масалани кўчиш векторига нисбатан ёзиб олиш мумкин. Бунинг учун (21) ифодани (20) га қўйиб

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)=\lambda u_{k,k}\delta_{ij}+\mu\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{23}$$

Бу ифодадан x_j ,бўйича ҳосила оламиз, яъни

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij,j}=\lambda u_{k,kj}\delta_{ij}+\mu\left(u_{i,jj}+u_{j,ij}\right)=\lambda u_{j,ji}+\mu u_{i,jj}+\mu u_{j,ij}\\
&=\left(\lambda+\mu\right)u_{i,ji}+\mu u_{i,jj}=\mu\Delta u_i+\left(\lambda+\mu\right)\theta_{,i} \quad , \ \theta=u_{j,j}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

(24) - ифодани (19)- га қўйиб, (19-22) чегаравий масаланинг кўчишларга нисбатан ёзилган кўринишини ҳосил қиламиз. Одатда бу тенглама Ламе тенгламаси деб аталади.

$$\mu\Delta u_i+\left(\lambda+\mu\right)\theta_{,i}+X_i=0 \tag{25}$$

(23) ифодадан фойдаланиб (22)-чегаравий шартларни хам кўчишларга нисбатан ёзиб олиш мумкин

$$u_i\Big|_{\sum_1}=u_i^0, \quad [\lambda u_{k,k}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})]n_j\Big|_{\sum_2}=S_i \tag{26}$$

Изотроп жисмлардагидек, анизотроп жисмлар учун (18) –чегаравий масалани кўчишларга нисбатан қуйдаги кўринишда ёзиш олиш мумкин:

$$\sum_{j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l})+X_i=0, \ \ \textit{ёки} \quad (C_{ijkl}u_{k,l})_{,j}+X_i=0 \tag{27}$$

$$u_i\big|_{\sum_1} = u_i^0,$$

$$(C_{ijkl}u_{k,l})n_j\big|_{\sum_2} = S_i \qquad (28)$$

(27-28) тенгламалар ортотроп жисмлар учун эластиклик назариясининг чегаравий масаласини ташкил этади ва тенгламани кўчишни компоненталаирга нисбатан қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин

$$\begin{cases} C_{1111}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{1212}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{1313}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{1122} + C_{1212})\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (C_{1133} + C_{1313})\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mathrm{X}_1 = 0 \\ C_{1212}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{2222}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{2323}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{2211} + C_{1212})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (C_{2233} + C_{2323})\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + X_2 = 0 \\ C_{1313}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{2323}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{3333}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{3311} + C_{1313})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (C_{3322} + C_{2323})\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + X_3 = 0 \end{cases} \qquad (29)$$

(29) тенгламани ва (28) чегаравий шартларни, бир ўлчовли холда, l узунликдаги стерженнинг деформацияланишини ифодалайдиган, 2-тартибли хусусий хосилали дифференциал тенгламага келтириш мумкин, яни

$$C_{1111}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{X} = 0 \qquad (30)$$

$$u\,\big|_{x=0} = u^0, \quad C_{1111}\frac{\partial u}{\partial u}\bigg|_{x=l} = S \qquad (31)$$

(17) тенгламани бир ўлчовли холда куйидагича ёзиб олиш мумкин.

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{X} = \sin\frac{2\pi x}{l}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \qquad (27)$$

$$\lambda = 1, \ \ \mu = 0.5$$

Назорат саволлари

1. Механиканинг чизиқли моделлар
2. Анизотроп жисмлар. Ототроп ва трансверсаль изотроп жисмлар.
3. Умумлашган Гук қонуни.
4. Ламе тенгламаси изотроп ва Анизотроп жисмлар учун.
5. Деформацияланиш диаграммаси.
6. Коши муносабати.
7. Жисмларнинг мувозанат шартлари.Мувозанат тенгламаси.
8. Стержень хақидаги масала қўйилиши. Аниқ ечими.
9. Чекли айирмали тенгламани ечишнинг итерация усули.

2-МАВЗУ: Чекли айирмали усул. Чекли ва чегаравий элементлар усуллари.

РЕЖА:

2.1. Механикада учрайдиган чегаравий масалаларни сонли модуллаштириш усуллари. Чекли айирмали усул .

2.2. Чекли элементлар усули.

2.4. Чегаравий элементлар усули.

Таянч сўзлар: *чекли айирмали муносабатлар, чекли айирмали тенглама, чекли элемент, интерполяция шарти, вариацион масала, ўрталашган қолдиқлар усули, чегаравий интеграл тенглама, пуассон тенгламаси.*

2.1. Механикада учрайдиган чегаравий масалаларни сонли модуллаштириш усуллари. Чекли айирмали усул

Чекли айирмали усулнинг асосий моҳияти, қаралаётган сохани тўр соҳа билан алмаштириш ва қаралаётган дифференциал тенгламаларни хосил бўлган тўр соҳанинг тугун нуқтарига нисбатан ёзиб чиқишдан иборат. Дифференциаль тенгламаларни тугун нуқталарга нисбатан ёзиш учун, аввал 1-2 тартибли ҳосилаларни тугун нуқталарга нисбатан, чекли айирмали муносабатлар кўринишида ёзиб олиш керак.

Фараз қилайлик, $u(x)$ $[0,l]$ кесмада берилган бўлсин. Кесмани N бўлакка бўламиз, яни $h=\frac{l}{N}$ у холда $x_i=h\cdot i$, $i=\overline{0,N}$ ва $u(x_i)=u_i$ га эга бўлиў мумкин.

Энди $u(x_i)$ функцияни Тейлор қаторига ёямиз

$$u(x_i+h)=u(x_i)+\frac{h}{1!}u'(x_i)+\frac{h^2}{2!}u''(x_i)+\frac{h^3}{3!}u'''(x_i)+\frac{h^4}{4!}u''''(x_i)+\dots \quad (1)$$

$$u(x_i-h)=u(x_i)-\frac{h}{1!}u'(x_i)+\frac{h^2}{2!}u''(x_i)-\frac{h^3}{3!}u'''(x_i)+\frac{h^4}{4!}u''''(x_i)+\dots \quad (2)$$

1-ифодадан биринчи тартибли ҳосила учун, ўнг чекли айирмали муносабатни топиш мумкин

$$u'(x_i)=\frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h}+O(h)=\frac{u_{i+1}-u_i}{h}+O(h) \qquad (3)$$

2-ифодадан, худди юқоридагидек, биринчи тартибли хосила учун, чап чекли айирмали муносабатни топиш мумкин

$$u'(x_i)=\frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h}+O(h)=\frac{u_i-u_{i-1}}{h}+O(h) \qquad (4)$$

1-ифодадан 2-ифодани хадма-хад айириш орқали, биринчи тартибли хосила учун, марказий чекли айирмали муносабатни топиш мумкин

$$u'(x_i)=\frac{u(x_{i-1})-u(x_i-h)}{2h}+O(h^2)=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+O(h^2) \qquad (5)$$

1-ифодага 2-ифодани хадма-хад қўшиш орқали, 2-тартибли хосила учун, фуйидаги чекли айирмали муносабатни топиш мумкин

$$\begin{aligned} u''(x_i)&=\frac{u(x_i+h)-2u(x_i)+u(x_i-h)}{h^2}+O(h^2)=\\ &=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+O(h^2) \end{aligned} \qquad (6)$$

Икки ўзгарувчили *u(x,y)* функция тўртбурчакли соҳада берилган бўлсин. Тўғри тўртбурчакнинг l_k тамонларини N_k га бўлиб, қадамларни топиш мумкин

$$h_k=\frac{l_k}{N_k} \quad , \quad k=1,2 \qquad (8)$$

Бу ҳолда тугун нуқталарни қуйидагича аниқлаш мумкин

$$x_i=h_1\cdot i\,,\quad y_j=h_2\cdot j\,,\ i=\overline{0,N_1},\ \ j=\overline{0,N_2}\,. \qquad (9)$$

У холда функциянинг тугун нукталардаги қийматларини қуйидагича ёзиб олиш мумкин

$$u(x_i,\text{y}_j)=u_{ij}$$

Икки ўзгарувчили *u(x,y)* функциянинг тугун нуқталардаги хосилалари учун қуйидаги чекли-айирмали нисбатларни топиш мумкин:

$$u_x^{'}=\frac{u_{i+1,j}-u_{ij}}{h_1},\ u_y^{'}=\frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{h_2}$$ ўнг ва чап ҳосилалар

$$u_x^{'}=\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h_1}$$ марказий ҳосила

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} \quad \text{2-тартибли ҳосила} \qquad (10)$$

$$u_{xy} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} \quad \text{аралаш ҳосила}$$

Энди, икки ўлчовли Ламе тенгламаси учун чекли айирмали тенгламаларни қуришга ўтамиз:

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + X_1 = 0 \\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + X_2 = 0.
\end{aligned} \qquad (11)$$

(11) тенгламалардаги ҳосилаларни, (10) формулалардан фойдаланган холда, мос чекли-айирмали муносабатлар билан алмаштириб, қуйидаги чекли-айирмали тенгламаларни топиш мумкин

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + (\lambda+\mu)\frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \\
&+\mu\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + X_1 = 0 \\
&(\lambda+2\mu)\frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} + (\lambda+\mu)\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \\
&+\mu\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + X_2 = 0.
\end{aligned} \qquad (12)$$

(12) тенгламаларни $u_{i,j}$ ва $v_{i,j}$ кўчишларга нисбатан ечамиз, яъни

$$\begin{aligned}
u_{i,j} &= (4h_2^2(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 4h_1^2\mu(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + h_1h_2(\lambda+\mu) * \\
&* (v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}) + X_1) / (8h_2^2(\lambda+2\mu) + 8h_1^2\mu) \\
v_{i,j} &= (4h_1^2(\lambda+2\mu)(v_{i,j+1} + v_{i,j-1}) + 4h_2^2\mu(v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + h_1h_2(\lambda+\mu) * \\
&* (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) + X_2) / (8h_1^2(\lambda+2\mu) + 8h_2^2\mu).
\end{aligned} \qquad (13)$$

(11)- муносабатлар асосида $k = 0,1,2,...$ индекс бўйича қуйидаги итерацион жараённи ташкил қиламиз

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{(k+1)} &= (4h_2^2(\lambda+2\mu)(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)}) + 4h_1^2\mu(u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)}) + h_1h_2(\lambda+\mu) * \\
&* (v_{i+1,j+1}^{(k)} - v_{i-1,j+1}^{(k)} - v_{i+1,j-1}^{(k)} + v_{i-1,j-1}^{(k)}) + X_1) / (8h_2^2(\lambda+2\mu) + 8h_1^2\mu) \\
v_{i,j}^{(k+1)} &= (4h_1^2(\lambda+2\mu)(v_{i.j+1}^{(k)} + v_{i,j-1}^{(k)}) + 4h_2^2\mu(v_{i+1,j}^{(k)} + v_{i-1,j}^{(k)}) + h_1h_2(\lambda+\mu) * \\
&* (u_{i+1,j+1}^{(k)} - u_{i-1,j+1}^{(k)} - u_{i+1,j-1}^{(k)} + u_{i-1,j-1}^{(k)}) + X_2) / (8h_1^2(\lambda+2\mu) + 8h_2^2\mu).
\end{aligned} \qquad (14)$$

чегаравий шартлар тугун нуқталарга нисбатан қуйидагича ёзиб олиш мумкин

$$u_{i0}^{(0)} = 0, \quad v_{i0}^{(0)} = \sin\frac{\pi x_i}{l_1},\ u_{iN_2}^{(0)} = 0,\ v_{iN_2}^{(0)} = -\sin\frac{\pi x_i}{l_1},$$

$$u_{0j}^{(0)} = \sin\frac{\pi y_j}{l_2},\ v_{0j}^{(0)} = 0,\ u_{N_1 j}^{(0)} = -\sin\frac{\pi y_j}{l_2},\ v_{N_1 j}^{(0)} = 0. \qquad (15)$$

Нолинчи яқинлашишда, яъни $k=0$ бўлганда қидирилаётган $u_{ij}^{(0)}$ ва $v_{ij}^{(0)}$ катталикларнинг Ω соҳанинг чегарасидаги тугун нуқталардаги қийматлари (13) чегаравий шартларга асосан аниқланади. Ички тугун нуқталарда эса, нолинчи $(k=0)$ яқинлашишда кўчишларнинг қийматлари нолга тенг деб ҳисобланади. Итерацион жараённи давом эттириб, қидирилаётган u_{ij} ва v_{ij} кўчишларнинг қийматларини ε аниқликда топиш мумкин.

Қуйидаги функциялар

$$u = \cos\frac{\pi x}{l_1}\sin\frac{\pi y}{l_2}\ , \quad v = \sin\frac{\pi x}{l_1}\cos\frac{\pi y}{l_2} \qquad (16)$$

чегаравий шартларни ва ҳажмий кучлар қуйидагича бўлганда (11) тенгламаларини қаноатлантиради

$$X_1 = -(\lambda+2\mu)\frac{\pi^2}{l_1^2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2} - (\lambda+\mu)\frac{\pi^2}{l_1 l_2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2} - \mu\frac{\pi^2}{l_2^2}\cos\frac{\pi x_i}{l_1}\sin\frac{\pi y_j}{l_2}$$

$$X_2 = -(\lambda+2\mu)\frac{\pi^2}{l_2^2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2} - (\lambda+\mu)\frac{\pi^2}{l_1 l_2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2} - \mu\frac{\pi^2}{l_1^2}\sin\frac{\pi x_i}{l_1}\cos\frac{\pi y_j}{l_2}. \qquad (17)$$

Модель масала параметрларнинг қуйидаги қийматларида ечилган $\lambda=0.8$, $\mu=0.5$, $l_1=l_2=1$, $N1=N2=10$.

1-жадвал

***u(x,y)* кўчишнинг $\varepsilon = 0.001$ бўлгандаги тақрибий қийматлари**

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
y=0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0.3090	0.2939	0.2499	0.1816	0.0955	0
y=0.2	0.5877	0.5593	0.4754	0.3451	0.1813	0
y=0.3	0.8090	0.7706	0.6554	0.4757	0.2498	0
y=0.4	0.9510	0.9068	0.7717	0.5603	0.2943	0

2-жадвал

***u(x,y)* аниқ ечимнинг қийматлари**

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5
y=0	0	0	0	0	0	0
y=0.1	0.3090	0.2938	0.2500	0.1816	0.0954	0
y=0.2	0.5877	0.5590	0.4755	0.3454	0.1816	0
y=0.3	0.8090	0.7694	0.6545	0.4755	0.2500	0
y=0.4	0.9510	0.9045	0.7694	0.5590	0.2938	0

Чегаравий масаланинг сонли натижаларини аниқ ечим билан солиштириш кўчишларнинг қийматлари етарлича яқинлигини кўрсатди, бу эса олинган натижаларнинг ишончлилигини ва таклиф қилиган сонли ечиш методининг тўғрилигини таъминлайди.

Шундай қилиб, методнинг моҳияти дастлабки тенгламалар ва чегаравий шартлар учун марказий тугун нуқталардаги асосий кўчишларга нисбатан ечилган чекли-айирмали схемалар қуриш ва итерацион жараённи ташкил қилишдан иборат. Бунда, нолинчи яқинлашишда ички нуқталардаги кўчишларнинг қийматлари нолга тенг деб ҳисобланади.

2.2. Чекли элементлар усули.

Чекли элементлар усули, хозирги амалий масалаларни ечишда энг кўп фойдаланиладиган усуллардан бири бўлиб, эластик назарисида Ритц методига асосланган. Хозир бу методни, эластиклик назарисининг статик масаласи мисолида кўриб ўтамиз. Маълумки, қаттиқ жисмларнинг чизиқли деформацияланиш жароёнини ифодалайдиган чегаравий масала қуйидаги тенгламалардан ташкил топади:

$$\sigma_{ij,i} + X_i = 0 \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijke}\varepsilon_{ke} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3}$$

$$u_i\Big|_{\Sigma_1} = \tilde{u}_0 \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_2} = S_i^0 \tag{5}$$

Маълумки, (1-5) масалани ечишни, қуйидаги функционал-Лагранжиянга минимум қиймат берувчи u_i функцияни топиш масаласига, яъни вариацион масалага келтириш мумкин

$$L = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dv - \int_V X_i u_i dv - \int_{\Sigma_2} S_i u_i dv \tag{6}$$

(1-5) чегаравий масала бир ўлчовли холда қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + X = 0 \\ \sigma = C\varepsilon \\ \varepsilon = \frac{du}{dx} \\ u\big|_{x=0} = \tilde{u}_0 \\ \sigma \;\big|_{x=e} = S^0 \end{cases} \qquad (7)$$

(7) тенгламаларни кўчишга нисбатан ёзиб оламиз

$$E\frac{d^2u}{dx^2} + X = 0, \qquad 0 \le x \le l \qquad (8)$$

$$u\big|_{x=0} = u^0, \qquad E\frac{du}{dx}\Big|_{x=l} = S^0 \qquad (9)$$

(9) –масалага мос келувчи функционал-Лагранжиан қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$L = \frac{1}{2}\int_0^l E\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l Xudv + Su\big|_{x=l} \qquad (10)$$

(8) тенгламани, чегарада ноль кийматга эга бўлган v га кўпайтириб ва (9)-чегаравий шартларни ҳисобга олган холда кесма бўйича бўлаклаб интеграллаб, қуйидаги интеграл ифодани топиш мумкин

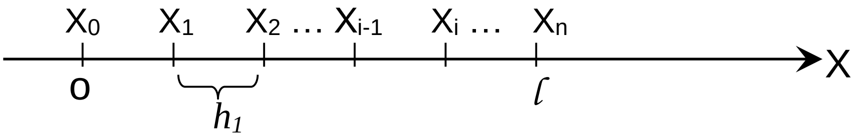
$$E\int_0^l \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}dx = \int_0^l Xvdx - Sv\big|_{x=l} \qquad (11)$$

(11) ифода биквадратик форма бўлиб, интеграль айният деб юритилади ва унда $v = u$ бўлса, ундан (10) – функционал келиб чиқади.

Энди масала қаралаётган $[0,\ell]$ кесмани хар хил

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 0,\overline{N} \qquad (12)$$

узунликдаги сегментларга ажратамиз. Бу сегментлар одатда, “чекли элемент” лар деб аталади.



Тугун нуқталардаги функциянинг қийматларини $u(x_i)$ деб белгилаб оламиз, яни

$$u_0, u_1, ..., u_{i-1}, u_i, ...u_N$$

Хар бир чекли элементда $[x_{i-1}, x_i]$ масаланинг ечимини чизиқли функция кўринишида излаймиз:

$$u(x) = ax + b \tag{13}$$

ва бу функциянинг тугун нуқталарда берилган $u(x_i)$ қийматлар билан устма-уст тушиш (интерполяция) шартидан фойданиб, a,b ноъмалумларга нисбатан, қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қилиш мумкин:

$$\begin{cases} u(x_i) = ax_i + b \\ u(x_{i-1}) = ax_{i-1} + b \end{cases} \tag{14}$$

Тенгламаларни бир-биридан хадма-хад айириб a коэффициентни топиш мумкин

$$a = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \tag{15}$$

(14) тенгламанинг 1-сини x_{i-1} га 2-сини эса x_i га кўпайтириб,

$$\begin{cases} u_i x_{i-1} = ax_i x_{x-1} + bx_{i-1} \\ u_{i-1} x_i = ax_{i-1} x_i + bx_i \end{cases}$$

ва уларни бир-биридан хадма-хад айириб b коэффициентни топиш мумкин:

$$b = \frac{u_i x_{i-1} - u_{i-1} x_i}{x_{i-1} - x_i} = \frac{u_{i-1} x_i - u_i x_{i-1}}{h_i} \tag{16}$$

(15-16) коэффициентларни (13) ифодага қўйиб, “чекли элемент”да аниқланган функцияни (функция формы) топиш мумкин

$$u(x) = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} x + \frac{u_{i-1} x_i - u_i x_{i-1}}{h_i}$$

ёки

$$u(x) = u_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} + u_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} \tag{17}$$

Энди (11) – формани ёки (10)- Лагражиян функционалини чекли элементлар бўйича йиғинди кўринишида ёзиб оламиз:

$$\sum_{i=1}^{N} E\int_{i-1}^{x_i} \frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}dx - \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} Xvdx + Sv_N = 0 \qquad (18)$$

Энди (17) функциядан фойдаланган холда $\frac{du}{dx}$ ва $\frac{dv}{dx}$ ларни топиб (18) ифодага қўйиб қуйидаги ифодани топишимиз мумкин:

$$\sum_{i=1}^{N} E\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}\right)\left(\frac{v_i-v_{i-1}}{h_i}\right)dx + \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} X\left(v_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i}+v_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}\right)dx - Sv_N = 0 \quad (19)$$

Энди бу ифодадан v_i, $i=1,2,\ldots N-1$ бўйича ҳосила оламиз, яни

$$E\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i}dx + E\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{u_{i+1}-u_i}{-h^2{}_{i+1}}dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} X\frac{x-x_{i-1}}{h_i}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} X\frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}dx = 0 \quad {}_{i} \qquad (20)$$

Агар қуйидаги белгилашлар киритилса

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} E(x)dx = I_i, \quad R_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} X\frac{x-x_{i-1}}{h_i}dx \qquad (21)$$

(20) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин

$$I_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h_i^2} - I_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}{}^2} = R_i + R_{i+1}$$

ёки

$$\frac{I_{i+1}}{h_{i+1}{}^2}u_{i+1} + \left(\frac{I_i}{h_i^2}+\frac{I_{i+1}}{h_{i+1}{}^2}\right)u_i + \frac{I_i}{h_i^2}u_{i-1} = R_i + R_{i+1} \qquad (22)$$

$$u_0 = \bar{u}^0, \qquad (23)$$

$$I_N\frac{u_N-u_{N-1}}{h_N{}^2} = R_N + S_N \qquad (24)$$

Тенг оралиқлар учун вариацион усул:

(10) –функционалдан фойдаланиб, тенг оралиқлар учун, трапециялар формуласидан фойдаланиб

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1} f_i + \sum_{i=1}^{N} f_i\right] \qquad h = \frac{b-a}{N} = \frac{l}{N}$$

$$x_i = h\cdot i, \quad i=\overline{0,N} \qquad (25)$$

(10) – функционални йиғинди кўринишида ёзиб оламиз, яни

$$L^h=\frac{1}{2}\cdot\frac{hE}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{du}{dx}\right)_i^2 x_i+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{du}{dx}\right)_i^2\right]-\frac{h}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}X_iu_i+\sum_{i=1}^{N}X_iu_i\right]-Su_N \tag{26}$$

Ҳосилаларни ўрнига, мос равишдва ўнг ва чап чекли айирмаларни қўйиб

$$\frac{du}{dx}=\frac{u_{i+1}-u_i}{h},\qquad \frac{du}{dx}=\frac{u_i-u_{i-1}}{h} \tag{27}$$

(12) ифодани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$L^h=\frac{1}{2}\cdot\frac{hE}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)^2\right]-\frac{h}{2}\left[\sum_{i=0}^{N-1}X_iu_i+\sum_{i=1}^{N}X_iu_i\right]-Su_N \tag{28}$$

Бу ерда

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)^2=\left(\frac{u_1-u_0}{h}\right)^2+\left(\frac{u_2-u_1}{h}\right)^2+\ldots+\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)^2+\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)^2\ldots+\left(\frac{u_n-u_{n-1}}{h}\right)^2 \tag{29}$$

Энди функциональнинг стационарлик шартидан фойдаланамиз, яни

u_i бўйича хосила олиб нольга тенглаймиз

$$\frac{\partial L^h}{\partial u_i}=0,\qquad i=0,N \tag{30}$$

ёки

$$\frac{\partial L^h}{\partial u_i}=\frac{Eh}{4}\left[2\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)\left(-\frac{1}{h}\right)+2\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right)+2\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\left(\frac{1}{h}\right)+2\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right)\left(-\frac{1}{h}\right)\right)\right]-hX_i=0$$

$$\frac{Eh}{4}\left[-2\frac{u_{i+1}-u_i}{h^2}\cdot 2+2\cdot\frac{u_i-u_{i-1}}{h^2}\cdot 2\right]-hX_i=0,\ i=1,N-1 \tag{31}$$

(31) ифодани соддалаштириб фуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$-E\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}=X_i,\qquad i=\overline{1,N-1} \tag{32}$$

$$\frac{2E}{h}\frac{u_N-u_{N-1}}{h}=X_N+\frac{2S}{h},\qquad i=N \tag{33}$$

$$u_0 = \tilde{u}^0 \qquad i=0 \qquad (34)$$

Шундай қилиб, (32-34) чекли айирмали тенгламалар вариацион усул ёрдамида тузилди. Чекли айирмали тенгламалар чегаравий масаланинг ўзи учун яни (8-9) –масала учун тузилганида чекли айирмали тенгламалар қуйидаги кўринишга эга бўларди

$$-E \cdot \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{l^2} = X_i, \qquad i = 1, \overline{n-1} \qquad (35)$$

$$E \cdot \frac{u_N - u_{N-1}}{h} = S, \qquad i = N \qquad (36)$$

$$u_0 = \tilde{u}, \qquad i = 0 \qquad (37)$$

(32-34) ва (35-37) тенгламаларни таққослаб уларнинг фарқини сезиш мумкин. Чекли айирмали вариацион усулда чегаравий шартда хажмий кучнинг хам пайдо бўлганлигини кўриш мумкин. Агар хажмий куч нолга тенг бўлса, бу тенгламаларининг айнан бир хил бўлиб қолишлигини кўриш мумкин.

2.3. Чегаравий элементлар усули.

Чегаравйи элементлар усулининг(ЧЭУ) асосий мохияти, соҳада берилган чегаравий масалани ечишни, соҳанинг чегарасида аниқланган интнграл тенгламага келтириб ечишдан иборат. Масаланинг ўлчами бир ўлчамга камаяди. Масалан, хажмда қаралаётган масала, соҳанинг сирти бўйича аниқланган интеграл тенгламаларга келтирилади. Бу усул хам, эластик назарияси масаларини классик усулларидан бири хисобланади. Лекин, охирги йилларда информацион технологиялаининг ривожаниши билан унга бўлган эътибор яна кучайди.

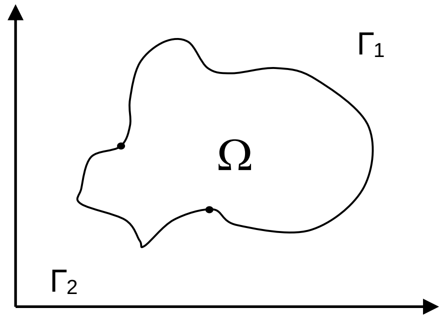
Бу усулни баён этиш бизга “Ўрталашган қолдиқлар усули” зарур бўлади. Фараз килайлик, бизга қуйидаги оператор кўринида ёзилган чегаравий масала берилган бўлсин

$$Lu = f \qquad x \in \Omega \qquad (1)$$

$$S_u\big|_{\Gamma_1} = S \qquad (2)$$

$$G_u\big|_{\Gamma_2} = g \qquad (3)$$

бу ерда $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1, Γ_2 соҳанинг чегаралари, *f, S, g*- берилган функциялар.



Бу ерда L, S_u, G - берилган операторлар.

Масала ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$\tilde{u}(x) = \varphi_o(x) + \sum_{i=1}^{h} C_i \varphi_i(x), \qquad (4)$$

Бу ерда $C_i - const$, $\varphi_o, \ldots \varphi_h$ чизиқли боғлиқмас функциялар, φ_o (2) ва (3) чегаравий шартларни, қоганлари эса бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантиради деб фараз қилайлик.

(4) ни (1) тенгламага қўямиз. У холда

$$R = L\tilde{u} - f \qquad (5)$$

қолдиқни (невязка) топиш мумкин. (4) ни чегаравий шартларга қўйиб, мос равишда қуйидаги қолдиқларни топиш мумкин:

$$R_1 = S\tilde{u} - 1 \qquad (6)$$

$$R_2 = G\tilde{u} - g \qquad (7)$$

(5-7) ифодалардан фойдаланган холда қуйидаги интеграль ифодани хосил қилиш мумкин

$$\int_{\Omega} Rwd\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 wd\Gamma - \int_{\Gamma_1} R_1 \frac{dw}{dn} d\Gamma \qquad (8)$$

бу ерда w- оғирлик функция(весовая функция), n- Ω соҳанинг сиртига ўтказилган ташқи нормаль.

Соотношение (8) - ифода ўрталашган қолдиқлар усули(метод невязок) деб аталади. Қўриниб турибдики бу ифода, қолдиқ хадларни оғирлик функцияси W га кўпайтириш орқали ҳосил қилинган. (8)- интеграль муносабат эластиклик назариясидаги, коллокации, Галеркин -Бубнов ва Ритц усулларининг умумлашмасидир.

Масалан, Галеркин усули пайтида $\int_{\Omega} RWd\Omega = 0$ бўлади, ва W ва R функцияларнинг ортогоналлигидан c_i коэффициентларни топиб олиш мумкин. Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема: Фараз қилайлик [a,b] оралиқда ўзаро ортогональ бўлган $\psi_k(x)$ тўла функциялар системаси берилган бўлсин. [a,b] оралиқда узлуксиз бўлган $f(x)$ - функция учун қуйидаги муносабат

$$\int_a^в f(x)\psi_i dx = 0, \qquad (9)$$

$f(x) \equiv 0$ бўлгандагина ўринли бўлади.

Мисол сифатида қуйидаги чегаравий масала берилган бўлсин

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \qquad x \in [0,1] \qquad (10)$$

$$u(0) = \bar{u}\,, \qquad (11)$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \bar{q} \qquad (12)$$

Умножим (10) ни оғирлик функцияси w га кўпайтирамиз ва [0,1] оралиқ бўйича интеграллаймиз

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + u + x\right) wdx = 0 \qquad (13)$$

Бу ифодани икки марта бўлаклаб интеграллаб топамиз

$$\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} Wdx = W\left.\frac{du}{dx}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} = W\left.\frac{du}{dx}\right|_0^1 - \frac{dw}{dx}u\Big|_0^1 + \int_0^1 u\frac{d^2w}{dx^2}dx. \qquad (14)$$

Чегаравий шартларни ҳисобга олиб қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$[w\bar{q}]_0^1 - \left[\frac{dw}{dx}\bar{u}\right]_0^1 + \int_0^1 u\frac{d^2w}{dx^2}dx = w\bar{q}\,|_1 - wq|_0 - \frac{-dw}{dx}u\Big|_1 + \frac{dw}{dx}\bar{u} + \int_0^1 u\frac{d^2w}{dx^2}dx$$

Бу ифоданияна икки марта бўлаклаб интеграллаб топамиз

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{dx^2} + u + x\right) wdx = \left[(q-\bar{q})w\right]_0^1 - \left[(u-\bar{u})\frac{dw}{dx}\right]_0^1, \qquad (15)$$

ёки

$$\int_0^1 Rwdx = R_2 wdx\Big|_0^1 - R_1\left.\frac{dw}{dx}\right|_0^1$$

бу ерда

$$R = \frac{\partial^2 u}{dx^2} + u + x\,, \quad R_2 = q - \bar{q}\,, \quad R_1 = u - \bar{u}$$

Бу эса биз топмоқчи бўлган қуйидаги фоданинг бир ўлчовли холда ёзилишини ташкил этади:

$$\int_\Omega Rwd\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 wd\Gamma - \int_{\Gamma_2} R_1 \frac{dw}{dx} d\Gamma$$

Энди, ўрталашган қолдиқлар усули ёрдамида, чегаравий интеграл тенгламалар тузиш учун, мисол сифатида қуйидаги чегаравий масалани кўрамиз

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0 \qquad x \in [0,1] \qquad (16)$$

$$u(0) = 0\,, \qquad (17)$$

$$u(1) = 0 \qquad (18)$$

Бу масала учун ўрталашган қолдиқлар усули ёрдамида қуйидаги ифодани топиб олиш мумкин

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{dx^2} + u + x \right) w dx + \left(u - \bar{u} \right) \frac{dw}{dx} \bigg|_0^1 = 0 \qquad (19)$$

Бу ифодани икки марта бўлаклаб интеграллаб топамиз

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + w \right) u dx + \int_0^1 x \cdot dx + wq \big|_0^1 + u \frac{du}{dx} \bigg|_0^1 = 0 \qquad (20)$$

Оғирлик функцияси w қуйидаги тенгламани ечиш орқали топилади

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + w = \delta \left(x - x_i \right) \qquad (21)$$

бу ерда

$$\delta \left(x - x_i \right) = \begin{cases} 1, & x = x_i \\ 0, & x \neq x_i \end{cases}$$

(21) тенгламадан фойдаланган холда қуйидаги ифодани топиш мумкин

$$u(x_i) = -\int_0^1 x \cdot w dx - wq \big|_0^1 \qquad (22)$$

Бу ерда

$$w = \frac{1}{2} \sin \left| x - x_i \right| \qquad (23)$$

(22) тенгламани соҳанинг (кесма) четки нуқталарига нисбатн қараб, $q = \frac{du}{dx}$ нинг x=0 ва x=1 нуқталаридаги қийматларига нисбатан тенгламалар ситемасига келамиз. Уни ечиб қуйидаги ифодаларни топиш мумкин.

$$q_0 = \frac{1}{\sin 1} - 1, \; q_1 = \frac{\cos 1}{\sin 1} - 1 \qquad (24)$$

Бу қийматлардан фойдаланган холда, (22) фоhмуладан фойдаланган холда [0,1] кесманинг ихтиёрий ички x_i нуқтасида ечимнинг қийматини ҳисоблаш мумкин.

Масалан, (22) формулада $x_i = 0.5$ топиш мумкин

$$\mathrm{u}(0.5) = -\frac{1}{2} \int_0^{0.5} x \sin(0.5 - x) dx - \frac{1}{2} \int_{0.5}^1 x \sin(x - 0.5) dx - q_1 \sin(0.5) + q_0 \sin(0.5) =$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\cos 1 - 1}{\sin 1} \sin 0.5 - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \sin 0.5) - \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + \sin 0.5 - \cos 0.5) = 0.06974$$

Назорат саволлари

1. Чекли айирмали муносабатлар
2. Ўнг, чап ва марказий чекли айирмали муносабатлар.
3. Аралаш ҳосила учун чекли айирмали муносабатлар
4. Чекли айирмали усул
5. Икки ўлчовли Ламе тенгламасини сонли ечиш
6. Вариацион масала. Лагранжиян функционали
7. Чекли элементлар усули
8. Интерполяция шарти,
9. Интеграль айният
10. Чизиқли интерполяцион функция,
11. Ўрталашган қолдиқлар усули.
12. Чегаравий элементлар усулининг моҳияти

3-МАВЗУ: Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари, ҳамда амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш.

РЕЖА:

3.1. Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари
3.2. Амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш.

Таянч сўзлар: *математик модель, сонли моделлаштириш, мухитларда температура тарқалиши, сонли усуллар, прогонка усули, рекуррент формула, чекли-айирмали тенглама, ошкор-ошкормас схемалар, объектга йўналтирилган дастурлаш, C# дастурлаш тили, визуаллаштириш, ANSYS, Cosmosm, Lira, SolidWorks, Mathlab*

3.1. Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари

Бу бўлимда, амалий пакетлар мажмуасига мисол сифатида эластиклик назарияси масалаларини сонли ечишга мўлжаллан дастурлар мажмуаси келтирилган. У Delphi7 мухитида яратилган бўлиб, Mathlab пакети билан биргаликда 3D графикларни ёрдамида жароённи визуаллаштириш ва тахлил этиш имконини беради. Бу программа таъминотини яратиш ва қўллаш учун, аввал математик моделларни, яни термоэластик деформацияланиш жароёнини ифодаловчи чегаравий масаланинг қўйилиши ва унга мос чекли-айирмали тенгламаларини тузиш ва уни сонли ечишга имкон берадиган ва дастурлаш учун қулай бўлган самарали алгоритмларни танлаш ёки таклиф этиш мухимдир. Шу фикрларга таянган холда, аввал термоэластик масаланинг қўйилишидан бошлаймиз.

Термоэластикликнинг боғланган динамик масаласи ҳаракат тенгламаларидан

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+X_i=\rho\ddot{u}_i \tag{3.1.1}$$

Дюгамел-Нейман муносабатидан

$$\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha(T-T_0)\delta_{ij} \tag{3.1.2}$$

Коши муносабати

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \tag{3.1.3}$$

ва иссиқлик оқими тенгламасидан

$$c_\varepsilon\dot{T}=\lambda_0T_{,ii} \tag{3.1.4}$$

мос бошланғич

$$u_i\big|_{t=t_0}=\phi_i,\quad \dot{u}_i\big|_{t=t_0}=\psi_i\ ,\quad T\big|_{t=0}=f \tag{3.1.5}$$

ва чегаравий шартлардан ташкил топган

$$u_i\big|_{\Sigma_1}=u_i^0,\qquad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j\big|_{\Sigma_2}=S_i^o,\quad T\big|_{\Sigma}=\varphi(t) \tag{3.1.6}$$

Бу ерда λ_0 - иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти, c_ε - иссиқлик сиғими.

(3.1.1)-(3.1.6) чегаравий масала бир ўлчовли холда куйидаги кўринишга эга бўлади

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+X=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2} \tag{3.1.7}$$

$$\sigma=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{11}-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha(T-T_0) \tag{3.1.8}$$

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.1.9}$$

$$c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_0\frac{\partial^2T}{\partial x^2} \tag{3.1.10}$$

Қуйидаги бошланғич ва чегаравий шартлар билан

$$u\big|_{t=t_0}=\phi,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_0}=\psi\ ,\quad T\big|_{t=t_0}=f \tag{3.1.11}$$

$$u\big|_{x=0}=u^0\,,\quad u\big|_{x=l}=u'$$

$$T\big|_{x=0}=\varphi_1\quad,\quad T\big|_{x=l}=\varphi_1\,. \tag{3.1.12}$$

(3.1.7)-(3.1.10) тенгламаларни куйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\left.\begin{aligned}\left(\lambda+2\mu\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda_0\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\end{aligned}\right\} \tag{3.1.13}$$

мос бошланғич ва чегаравий шартлар билан

$$\left.\begin{aligned}u\big|_{t=t_0}=\phi\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial t}_i\bigg|_{t=t_0}=\psi\quad,\quad T\big|_{t=t_0}=f\\ u\big|_{x=0}=u^0\,,u\big|_{x=l}=u'\,,T\big|_{x=0}=\varphi_1\,,T\big|_{x=l}=\varphi_1\end{aligned}\right\} \tag{3.1.14}$$

l кесмани N га бўлиб, яни $h=\dfrac{l}{N}$ ва вақт t бўйича қадамни τ билан белгилаб тугун нукталарни топамиз

$$x_i=h\cdot i\,,\quad i=\overline{0,N},$$
$$t_j=\tau\cdot j\,,\quad j=\overline{0,M}.$$

(3.1.13) тенгламада хосилаларни мос чекли айирмали нисбатлар билан алмаштириб топамиз

$$(\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2h_1}=\rho\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\tau^2} \tag{3.1.15}$$

$$c_\varepsilon\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\tau}=\lambda_0\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h^2} \tag{3.1.16}$$

Бу тенгламаларни мос равишда $u_{i,j+1}$ ва $T_{i,j+1}$ га нисбатан ечиб рекуррент формулаларга эга бўламиз

$$u_{i,j+1}=\frac{\tau^2}{\rho}\left((\lambda+2\mu)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h_1^2}-(3\lambda+2\mu)\alpha\frac{T_{i+1,j}-T_{i-1,j}}{2h_1}\right)+2u_{i,j}-u_{i,j-1} \tag{3.1.17}$$

$$T_{i,j+1}=\frac{\tau\lambda_0}{c_\varepsilon}\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{h^2}+T_{i,j}\,. \tag{3.1.18}$$

куйидаги бошланғич ва чегаравий шартлар билан

$$\left.\begin{array}{l} u_i^0 = \phi_i\,, \quad \dfrac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi_i\,, \quad T_i^0 = f_i, \quad i = \overline{0,N} \\ u_0^j = \bar{u}^j, \; u_N^j = \tilde{u}^j\,, \; T_0^j = \varphi_1^j\,, \; T_N^j = \varphi_2^j\,, \quad j = \overline{0,M} \end{array}\right\}. \tag{3.1.19}$$

Энди (3.1.13-3.14) динамик чегаравий масалани итерацион усулда ечиш усулини кўриб ўтамиз. Қуйидаги чекли айирмали ёзиб оламиз

$$(\lambda + 2\mu)\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h} = \rho\frac{u_{ij} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{\tau^2} \tag{3.1.20}$$

$$c_\varepsilon\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\tau} = \lambda_0\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2}\,. \tag{3.1.21}$$

(3.1.20)-(3.1.21) тенгламаларни u_{ij} ва $T_{i,j}$ га нисбатан ечиб қуйидаги ифодаларни топиш мумкин

$$u_{ij} = \frac{(\lambda + 2\mu)\dfrac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \gamma\dfrac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h} + \rho\dfrac{2u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{\tau^2}}{\dfrac{2(\lambda + 2\mu)}{h^2} + \dfrac{\rho}{\tau^2}} \tag{3.1.22}$$

$$T_{i,j} = \frac{\lambda_0\tau}{c_\varepsilon}\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} + T_{i,j-1}\,. \tag{3.1.23}$$

(3.1.22)-(3.1.23) асосида хар бир j-қатлам учун k индекси бўйича итерацион жароён ташкил этамиз

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{(\lambda + 2\mu)\dfrac{u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)}}{h^2} - \gamma\dfrac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h} + \rho\dfrac{2u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{\tau^2}}{\dfrac{2(\lambda + 2\mu)}{h^2} + \dfrac{\rho}{\tau^2}} \tag{3.1.24}$$

$$T_{i,j}^{(k+1)} = \frac{\lambda_0\tau}{c_\varepsilon}\frac{T_{i+1,j}^{(k)} - 2T_{i,j}^{(k)} + T_{i-1,j}^{(k)}}{h^2} + T_{i,j-1} \tag{3.1.25}$$

Масала қуйидаги бошланғич ва чегаравий шартларда

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad T\big|_{t=0} = T_0\sin\frac{\pi x_i}{l},$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad T\big|_{x=0} = 0, \quad T\big|_{x=l} = 0$$

ва ўзгармасларда ечилган

$$\lambda = 0.8,\ \ \mu = 0.5,\ \ \alpha = 0.05,\ \ \rho = 0.9,\ \ c_{\varepsilon} = 3.2,$$
$$\lambda_0 = 0.04, T_0 = 15,\ \ l = 1, N = 10,\ \ h = 0.1,\ \ \tau = 0.01.$$

Жадвал 3.1. *u(x,t)* (итерация усули) $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t=0.01	0	-0.00042	-0.00035	-0.00026	-0.00014	0	0.00014	0.00026	0.00035	0.00042	0
t=0.02	0	-0.00163	-0.00141	-0.00102	-0.00054	0	0.00054	0.00102	0.00141	0.00163	0
t=0.03	0	-0.00358	-0.00316	-0.00230	-0.00121	0	0.00121	0.00230	0.00316	0.00358	0
t=0.04	0	-0.00623	-0.00559	-0.00407	-0.00214	0	0.00214	0.00407	0.00559	0.00623	0
t=0.05	0	-0.00949	-0.00869	-0.00633	-0.00333	0	0.00333	0.00633	0.00869	0.00949	0
t=0.06	0	-0.01328	-0.01243	-0.00907	-0.00477	0	0.00477	0.00907	0.01243	0.01328	0
t=0.07	0	-0.01753	-0.01678	-0.01228	-0.00646	0	0.00646	0.01228	0.01678	0.01753	0
t=0.08	0	-0.02213	-0.02171	-0.01594	-0.00839	0	0.00839	0.01594	0.02171	0.02213	0
t=0.09	0	-0.02700	-0.02717	-0.02004	-0.01055	0	0.01055	0.02004	0.02717	0.02700	0
t=0.1	0	-0.03208	-0.03313	-0.02459	-0.01295	0	0.01295	0.02459	0.03313	0.03208	0

Жадвал 3.2. *u(x,t)* (Ошкор схема)

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t=0.01	0	-0.00042	-0.00035	-0.00026	-0.00014	0	0.00014	0.00026	0.00035	0.00042	0
t=0.02	0	-0.00165	-0.00142	-0.00103	-0.00054	0	0.00054	0.00103	0.00142	0.00165	0
t=0.03	0	-0.00369	-0.00318	-0.00231	-0.00121	0	0.00121	0.00231	0.00318	0.00369	0
t=0.04	0	-0.00646	-0.00564	-0.00410	-0.00216	0	0.00216	0.00410	0.00564	0.00646	0
t=0.05	0	-0.00992	-0.00880	-0.00640	-0.00336	0	0.00336	0.00640	0.00880	0.00992	0
t=0.06	0	-0.01399	-0.01263	-0.00919	-0.00483	0	0.00483	0.00919	0.01263	0.01399	0
t=0.07	0	-0.01858	-0.01712	-0.01247	-0.00656	0	0.00656	0.01247	0.01712	0.01858	0
t=0.08	0	-0.02359	-0.02225	-0.01625	-0.00854	0	0.00854	0.01625	0.02225	0.02359	0
t=0.09	0	-0.02892	-0.02799	-0.02049	-0.01078	0	0.01078	0.02049	0.02799	0.02892	0
t=0.1	0	-0.03449	-0.03430	-0.02520	-0.01326	0	0.01326	0.02520	0.03430	0.03449	0

Жадвал 3.3. Температура *T(x,t)* (итерация усули) $\varepsilon = 0.001$

	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	0	4.63525	8.81678	12.13525	14.26585	15	14.26585	12.13525	8.81678	4.63525	0
t=0.01	0	4.62958	8.80599	12.12041	14.24839	14.98165	14.24839	12.12041	8.80599	4.62958	0
t=0.02	0	4.62392	8.79523	12.10559	14.23098	14.96333	14.23098	12.10559	8.79523	4.62392	0
t=0.03	0	4.61827	8.78448	12.09079	14.21358	14.94504	14.21358	12.09079	8.78448	4.61827	0
t=0.04	0	4.61263	8.77374	12.07601	14.19621	14.92677	14.19621	12.07601	8.77374	4.61263	0
t=0.05	0	4.60699	8.76301	12.06125	14.17885	14.90853	14.17885	12.06125	8.76301	4.60699	0
t=0.06	0	4.60136	8.75230	12.04651	14.16152	14.89030	14.16152	12.04651	8.75230	4.60136	0
t=0.07	0	4.59573	8.74160	12.03178	14.14421	14.87210	14.14421	12.03178	8.74160	4.59573	0
t=0.08	0	4.59011	8.73092	12.01708	14.12692	14.85392	14.12692	12.01708	8.73092	4.59011	0
t=0.09	0	4.58450	8.72024	12.00239	14.10965	14.83577	14.10965	12.00239	8.72024	4.58450	0
t=0.1	0	4.57890	8.70958	11.98771	14.09240	14.81763	14.09240	11.98771	8.70958	4.57890	0

Жадвал 3.4. Температур *T(x,t)* (Ошкор схема)

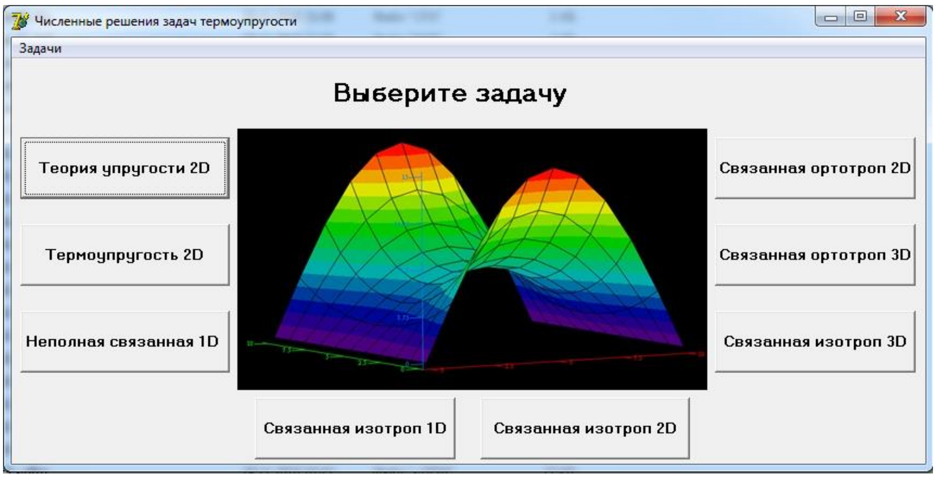
	x=0	x=0.1	x=0.2	x=0.3	x=0.4	x=0.5	x=0.6	x=0.7	x=0.8	x=0.9	x=1
t=0	0	4.63525	8.81678	12.13525	14.26585	15	14.26585	12.13525	8.81678	4.63525	0
t=0.01	0	4.62958	8.80599	12.12041	14.24839	14.98165	14.24839	12.12041	8.80599	4.62958	0
t=0.02	0	4.62392	8.79522	12.10558	14.23096	14.96331	14.23096	12.10558	8.79522	4.62392	0
t=0.03	0	4.61826	8.78445	12.09076	14.21355	14.94501	14.21355	12.09076	8.78445	4.61826	0
t=0.04	0	4.61261	8.77371	12.07597	14.19615	14.92672	14.19615	12.07597	8.77371	4.61261	0
t=0.05	0	4.60697	8.76297	12.06119	14.17878	14.90846	14.17878	12.06119	8.76297	4.60697	0
t=0.06	0	4.60133	8.75225	12.04644	14.16143	14.89021	14.16143	12.04644	8.75225	4.60133	0
t=0.07	0	4.59570	8.74154	12.03170	14.14411	14.87199	14.14411	12.03170	8.74154	4.59570	0
t=0.08	0	4.59008	8.73084	12.01697	14.12680	14.85380	14.12680	12.01697	8.73084	4.59008	0
t=0.09	0	4.58446	8.72016	12.00227	14.10951	14.83562	14.10951	12.00227	8.72016	4.58446	0
t=0.1	0	4.57885	8.70949	11.98758	14.09225	14.81747	14.09225	11.98758	8.70949	4.57885	0

3.2. Амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш.

Қуйида амалий пакетлар мажмуасига мисол сифатида эластиклик назарияси масаларини ечишга мўлжаллан дастурлар мажмуаси келтирилган. У Delphi7 мухимтида яратилган бўлиб, Mathlab пакети билан биргаликда 3D графикларни яратиш имкрнини беради.

Бу дастурий мажмуа ердамида қуйидаги қатор эластик типдаги масалаларни ечиш мумкин.

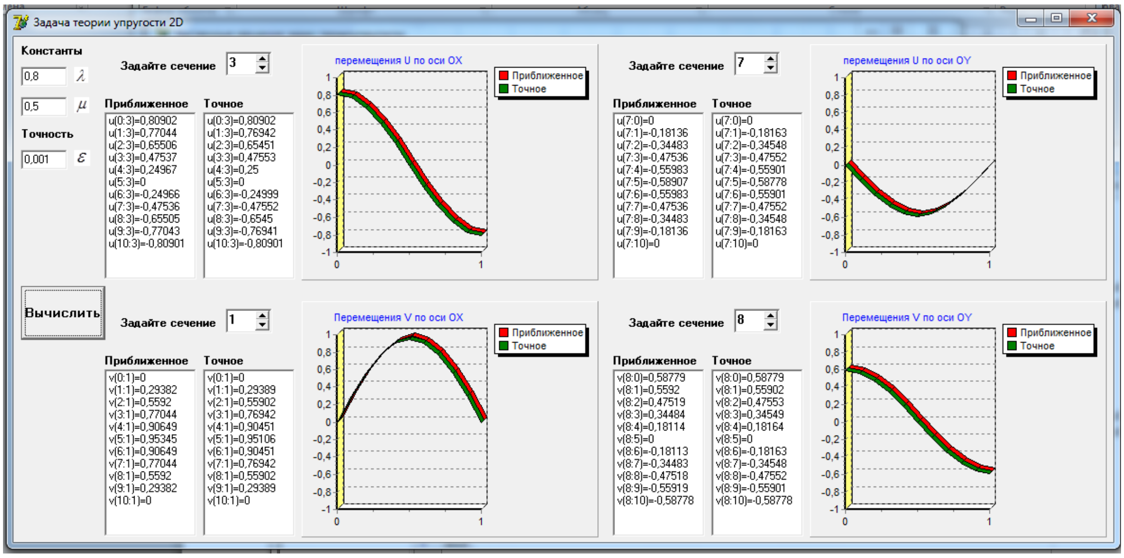
Мисол 3.2.1. Масалани танлаш имконияти



Расм. 3.2.1.

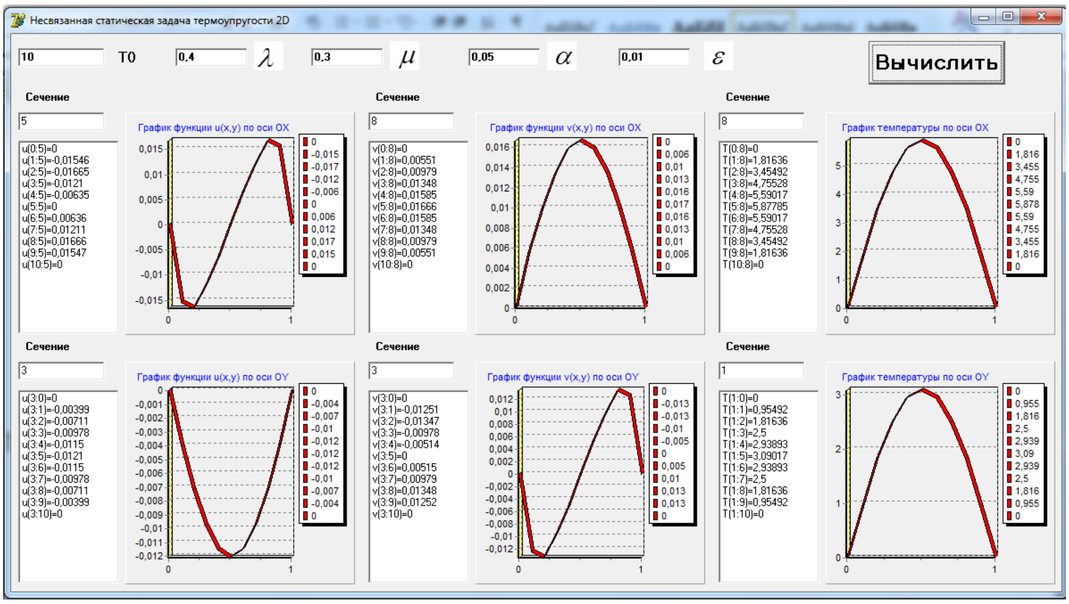
Асосий формада «Теория упругости 2D» ни танлаганимизда материалнинг техник ўзгармасларини ва итерация аниқлигини киритиш учун имконияти туғилади

Мисол 3.2.2. Эластик тақрибий ва аниқ ечимларни таққослаш намоиш этилган



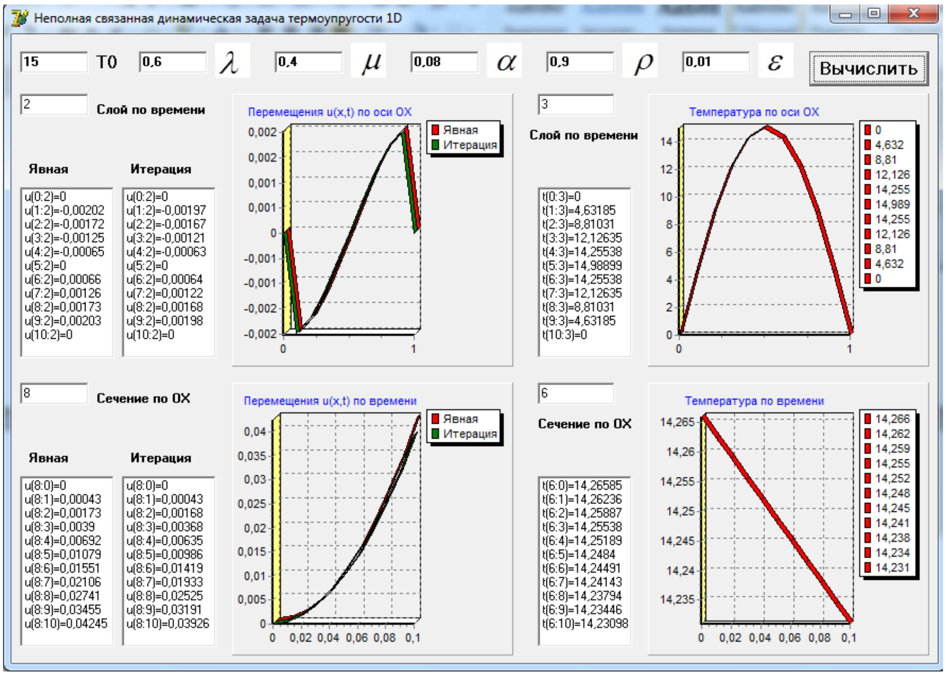
Расм. 3.2.2.

Мисол 3.2.3. Икки ўлчовли боғлиқмас масалани сонли ечиш



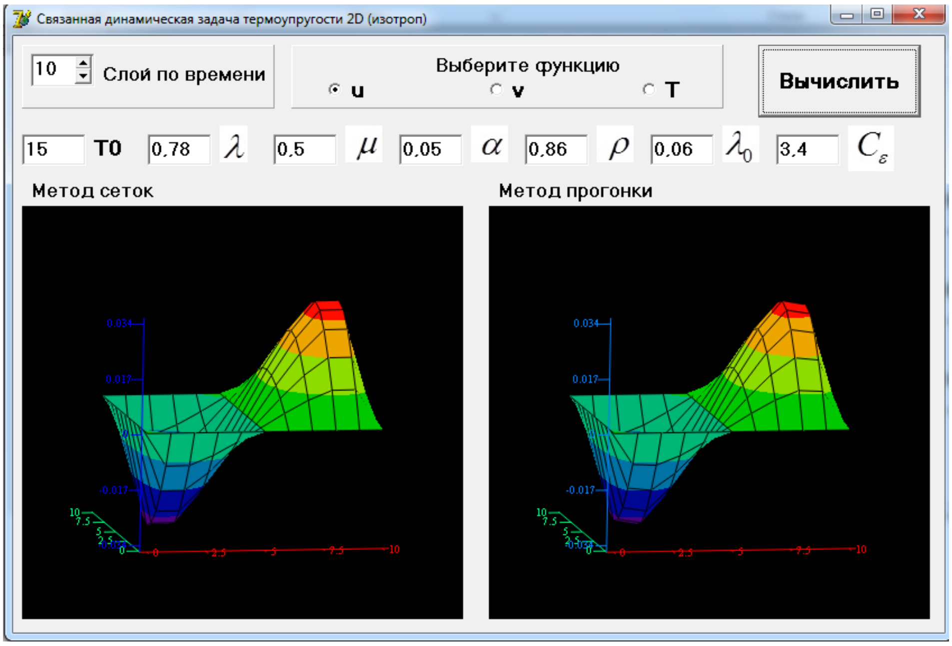
Расм 3.2.3.

Мисол 3.2.4. Бир ўлчовли боғлиқ масалани икки усулда сонли ечиш



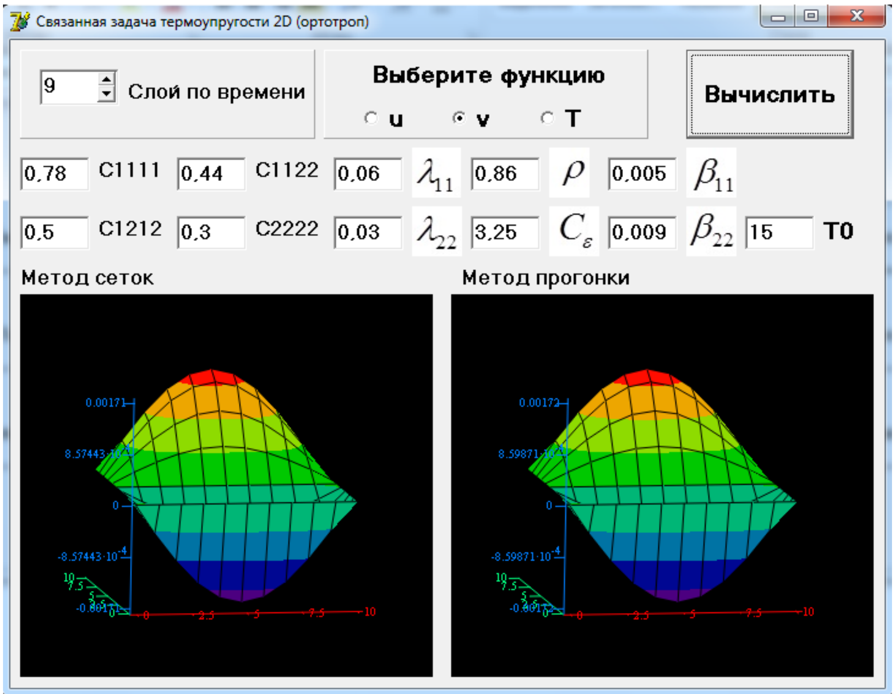
Расм. 3.2.4.

Мисол 3.2.5 Изотроп жисмлар учун кўчиш компоненталари ва температуранинг тақсимланиши



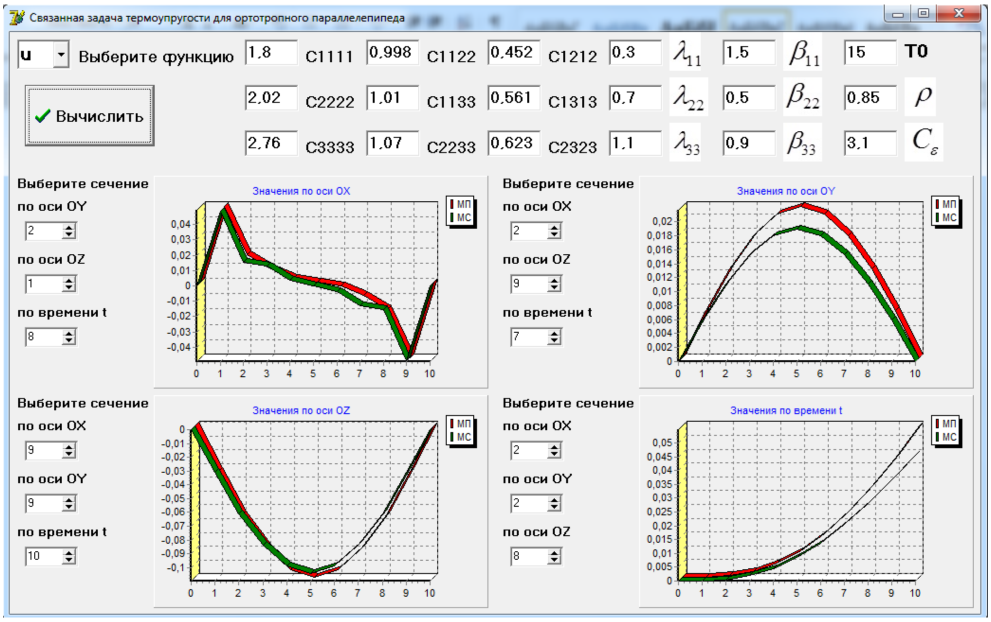
Расм. 3.2.5.

Мисол.3.2.6. Ортотроп жисм ҳақидаги икки ўлчовли масала натижалвари намоиши.



Расм. 3.2.6.

Мисол 3.2.7. Ортотроп параллелепипед ҳақидаги боғлиқ термоэластик масалани сонли ечиш


Связанная задача термоупругости для ортотропного параллелепипеда
u
Выберите функцию
Вычислить
1,8 C1111 0,998 C1122 0,452 C1212 0,3 λ_{11} 1,5 β_{11} 15 T0
2,02 C2222 1,01 C1133 0,561 C1313 0,7 λ_{22} 0,5 β_{22} 0,85 ρ
2,76 C3333 1,07 C2233 0,623 C2323 1,1 λ_{33} 0,9 β_{33} 3,1 C_ε
Выберите сечение
по оси OY
по оси OZ
по времени t
Значения по оси OX
Значения по оси OY
Значения по оси OZ
Значения по времени t
МП
МС

Расм. 3.2.7.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-МАВЗУ: Классик механиканинг замонавий ҳолати. Назарий механика ва туташ муҳитлар механикасининг асосий математик моделларининг таҳлили.

Назарий механика ва туташ мухитлар механикасининг математик моделларини тахлили, уларнинг асосан оддий ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар кўринишида ифодаланишини кўрсатади. Назарий механикада, моддий нуқта ва нуқталар системаси холатларини ўрганиш пайтида, асосан бошланғич шартли дифференциаль тенгламалар ва тенгламалар системалари пайдо бўлади. Улар одатда Коши масалари деб аталади ва уларнинг аналитик ечимларини, фақат баъзи бир хусусий холлардагина топиш имкони бўлади. Уларни сонли ечиш зарурати туғилади. Шу нуқтаи назардан келиб чиқиб, Коши масалаларини сонли ечишнинг Эйлер, Эйлер-Коши ва Рунге-Кутта каби усулларни кўриб ўтамиз.

Фараз қилайлик бизга 1-тартибли оддий дифференциаль тенглама учун қуйидаги Коши масаласи қўйилган бўлсин

$$\frac{du}{dx} = f(x,u) \qquad (1)$$

$$u(x_0) = u^0 \qquad (2)$$

(1-2) масаласини сонли ечишнг Эйлер, Эйлер-Коши ва Рунге-Кутта каби усуллари мавжуд. (1-2) мисол сифатида қуйидаги битта (I)ёки иккита (II) тенгламалар системаларини қараш мумкин

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2+y^2}{x-1} \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{x}{y} \\ z' = \dfrac{1}{y-x} \\ y(0) = 1; \;\; z(0) = -1 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

(1)- масалани сонли ечиш учун x_0 нуқтадан бошлаб h қадам билан қуйидаги тугун нуқталарни аниқлаб оламиз

$$x_i = x_0 + h \cdot i,\ i = \overline{0, N} \qquad (3)$$

(1)-тенгламанинг чап томонидаги ҳосилани ўнг хосила билан алмаштириб қуйидаги чекли айирмали тенгламани топиш мумкин

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = f(x_i, u_i) \qquad (4)$$

Бошланғич шартни (2) эса қуйидагича ёзиб олиш мумкин

$$u_0 = u^0 \qquad (5)$$

У холда, Эйлер усулининг асосий ифодалари ушбу кўринишга келади:

$$\begin{aligned} &u_{i+1} = u_i + h \cdot f(x_i, u_i) \\ &u_0 = u^0 \end{aligned} \qquad (6)$$

Мисол тариқасида юқорида келтирилган (I) –масалани Эйлер усули ёрадамида ечамиз. (6) ифодалардан фойданиб (I) –масала учун қуйидаги ифодаларни ёзиб олиш мумкин

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{x_i^2 + y_i^2}{x_i - 1}, \quad i = \overline{0, N} \qquad (7)$$

$$y_0 = 2, \qquad (8)$$

$h = 0{,}1$ бўлсин. У холда $y_0 = 2,$ бошланғич шартидан $i = 0,$ да y_1 ни топиш мумкин, яни

$$y_1 = y_0 + h \cdot \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 - 1}$$

$i = 1$ да y_1 дан фойданиб y_2 ни топиш мумкин

$$y_2 = y_1 + h \cdot \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1 - 1}$$

қолган нуқталарда хам, худди юқоридагидек y_i ларни ҳисоблаб олиш мумкин.

(1-2) бошланғич масалани Эйлер-Коши усули бўйича ечиш учун асосий формулаларини топиш учун (1) тенгламани x_i, x_{i+1} оралиқ бўйича интеграллаймиз, яни

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du}{ux} dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(x, u\right) dx \ , \quad x_i = x_0 + h \cdot i, \quad i = \overline{0, N} \qquad (9)$$

ва, трапеция форомуласидан фойданаб қуйидаги ифодани топиш мумкин

$$u\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{f_{i+1} + f_i}{2} \cdot h$$

ёки

$$u_{i+1} = u_i + h \cdot \frac{f\left(x_{i+1}, u_{i+1}\right) \cdot f\left(x_i, u_i\right)}{2} \qquad (10)$$

(10) ифодани, Эйлер формуласи (6) ни инобатга олган холда, Эйлер-Кошининг асосий фоомулаларни топиш мумкин

$$\begin{cases} \tilde{u}_{i+1} = u_i + h \cdot f\left(x_i, u_i\right) \\ u_{i+1} = u_i + h \cdot \dfrac{f\left(x_{i+1}, \tilde{u}_{i+1}\right) + f\left(x_i, u_i\right)}{2} \\ u_0 = u^0 \end{cases} \qquad (11)$$

Эйлер-Коши асосий ифодаси $i = 0$ да қуйидаги кўринишни олади

$$\tilde{u}_1 = u_0 + h \cdot f\left(x_0, u_0\right)$$

$$u_1 = u_0 + h \cdot \frac{f\left(x_1, \tilde{u}_1\right) + f\left(x_0, u_0\right)}{2}$$

Эйлер усулининг аппроксимация хатолиги *O(h)*, Эйлер-Коши усулиники эса $O(h^2)$.

Аппроксимация хатолиги $O(h^4)$ бўлган Рунге-Кутта усулининг асосий формулаларини келтирамиз

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}\left[k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right] \qquad (12)$$

бу ерда

$$k_1^{(i)} = h \cdot f\left(x_i, u_i\right)$$

$$k_2^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$$

$$k_4^{(i)} = h \cdot f\left(x_i + h, u_i + k_3^{(i)}\right), \qquad x_i = a + h \cdot i,\ i = \overline{0, N}$$

2-тартибли оддий дифференциаль тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалалар ва уларни сонли ечиш усуллари.

Механика ва туташ механикаси математик моделларини масалаларини ечиш давомида 2-тартибли оддий дифференциаль тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалалар кўп холларда ечиш зарурати туғилади. Шундан келиб чиқиб, 2-тартибли оддий дифференциаль тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалалар сонли ечишнинг чекли айирмали усули ва прогонка усулларини кўриб ўтамиз.

Иккинчи даражали оддий дифференциал тенглама қуйидаги умумий кўринишда берилган бўлсин

$$A(x)\frac{d^2u}{dx^2}+B(x)\frac{du}{dx}+C(x)u(x)=f(x) \qquad (a,b) \qquad (1)$$

чегаравий шартлар билан

$$\alpha_1 u(a)+\beta_1\frac{du(a)}{dx}=\gamma_1 \qquad x=a \qquad (2)$$

$$\alpha_2 u(b)+\beta_2\frac{du(b)}{dx}=\gamma_2 \qquad x=b \qquad (3)$$

[a, b] кесмани N кисмга ажратайлик,

$$h=\frac{b-a}{N}, \qquad x_i=a+hi \qquad (4)$$

$$u(x_i)\equiv u_i$$

У хола чекли айирмали тенгламани топиш мумкин

$$A_i\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+B_i\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}+C_iu_i=f_i \qquad i=1.,N\text{-}1 \qquad (5)$$

$$\alpha_1u_0+\beta_1\frac{u_1-u_0}{h}=\gamma_{01} \qquad i=0 \qquad (6)$$

$$\alpha_2u_N+\beta_2\frac{u_N-u_{N-1}}{h}=\gamma_{02} \qquad i=N \qquad (7)$$

(5-7) тенгламалари куйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\begin{cases} a_iu_{i+1}+b_iu_i+c_iu_{i-1}=f_i, & (8)\\ \alpha_{01}u_0+\beta_{01}u_1=\gamma_{01}, & (9)\\ \alpha_{02}u_{N-1}+\beta_{02}u_N=\gamma_{02}, & (10)\end{cases}$$

Бу ерда

$$a_i=\frac{A_i}{h^2}+\frac{B_i}{2h}, \qquad b_i=\frac{-2A_i}{h^2}+C_i, \qquad c_i=\frac{A_i}{h^2}-\frac{B_i}{2h} \qquad (11)$$

$$\alpha_{01}=\alpha_1-\frac{\beta_1}{h}, \quad \alpha_{02}=-\frac{\beta_2}{h}, \quad \beta_{01}=\frac{\beta_1}{h}, \quad \beta_{02}=\alpha_2+\frac{\beta_2}{h} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} a_iy_{i+1}+b_iy_i+c_iy_{i-1}=f_i, & (8)^1\\ \alpha_{01}y_0+\beta_{01}y_1=\gamma_{01}, & (9)^1\\ \alpha_{02}y_{N-1}+\beta_{02}y_N=\gamma_{02}, & (10)^1\end{cases}$$

(8) ни ечимини ушбу кўринишда излаймиз

$$y_{i-1}=X_iy_i+Z_i \qquad (13)$$

(13) ни (8) га қўямиз

$$a_i y_{i+1} + b_i y_i + c_i X_i y_i + c_i Z_i = f_i \ , \ i = 1, N-1 \qquad (14)$$

ва y_i га нисбатан ечиб оламиз

$$y_i(b_i + c_i X_i) = f_i - a_i y_{i+1} - c_i Z_i$$
$$y_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i X_i} y_{i+1} + \frac{f_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i} \qquad (15)$$

(13) да i ни $i + 1$ га алмаштирамиз

$$y_i = X_{i+1} y_{i+1} + Z_{i+1} \qquad (16)$$

(15) ва (16) ларни таққослаб топиш мумкин

$$X_{i+1} = -\frac{a_i}{b_i + c_i X_i}$$
$$Z_{i+1} = \frac{f_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i} \qquad (17)$$

(9)- ифодадан топамиз

$$y_0 = -\frac{\beta_{01}}{\alpha_{01}} y_1 + \frac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}} \qquad (18)$$

(13) дан i = 1 холда топамиз

$$y_0 = X_1 y_1 + Z_1 \qquad (19)$$

(18) билан таққослаб топамиз

$$X_1 = -\frac{\beta_{01}}{\alpha_{01}}, \qquad Z_1 = \frac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}} \qquad (20)$$

(13) ни i=N учун ёзиб оламиз

$$y_{N-1} = X_N y_N + Z_N \qquad (21)$$

ва (10) -ифодага қўямиз

$$\alpha_{02} X_N y_N + \alpha_{02} Z_N + \beta_{02} y_N = \gamma_{02}$$
$$y_N(\beta_{02} + \alpha_{02} X_N) = \gamma_{02} - \alpha_{02} Z_N \qquad (22)$$

Охирги ифодадан топамиз

$$y_N = \frac{\gamma_{02} - \alpha_{02} Z_N}{\beta_{02} + \alpha_{02} X_N} \qquad (23)$$

Прогонка усулини алгоритми:

1). Коэффициентлар топилади

$$\alpha_{01}, \beta_{01}, \gamma_{01}$$
$$\alpha_{02}, \beta_{02}, \gamma_{02}$$

2). Шарт текширилади

$$|\alpha_{01}| > |\beta_{01}| \qquad (24)$$

У холда ўнг рпрогонка усулиги эга бўламизі:

I). $X_1 = -\dfrac{\beta_{01}}{\alpha_{01}}, \; Z_1 = \dfrac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}}$

II). $X_{i+1} = -\dfrac{a_i}{b_i + c_i X_i}, \; Z_{i+1} = \dfrac{f_i - c_i Z_i}{b_i + c_i X_i}, \quad i = 1..N-1$

III). $y_N = \dfrac{\gamma_{02} - \alpha_{02} Z_N}{\beta_{02} + \alpha_{02} X_N}$

IV). $y_{i-1} = X_i\, y_i + Z_i\,, \quad i = N, N-1, ...1$

Қуйидаги шарт бажарилса

$$|\alpha_{02}| \le |\beta_{02}| \qquad (25)$$

Чап прогонка усулини алгоритмини хосил қилиш мумкині:

I). $X_{N-1} = -\dfrac{\alpha_{02}}{\beta_{02}}, \; Z_{N-1} = \dfrac{\gamma_{02}}{\beta_{02}}$

II). $X_{i-1} = -\dfrac{c_i}{b_i + a_i X_i}, \quad Z_{i-1} = \dfrac{f_i - a_i Z_i}{b_i + a_i X_i}, \quad i = N-1,..1$

III). $y_0 = \dfrac{\gamma_{01} - \alpha_{01} Z_0}{\alpha_{01} + \beta_{02} X_0}$

IV). $y_{i+1} = X_i\, y_i + Z_i\,, \quad i = 0,.., N-1$

Назорат саволлари

1. Бошланғич шартли чегаравий масала-Коши масаласи
2. Эйлер усули
3. Эйлер-Коши усули
4. Рунге Кутта усули
5. 2-тартибди оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масала
6. Чекли айирмали тенглама
7. 3 диагоналли матрица тенламалар системаси
8. Прогонка усули, унг ва чап холлари
9. Прогонка усулини яқинлашиш шарти

2-МАВЗУ: Чекли айирмали усул. Чекли ва чегаравий элементлар усуллари.

2.1 Чекли айирмали усул

Одатда, туташ мухитлар механикасида қаттиқ жисм, суюқлик ва газларда кечадиган жароёнлар хусусий ҳосилали дифференциаль тенгламалар ифодаланувчи чегаравий масалаларга келтирилади. Улар гиперболик, эллиптик ва параболик типга тегишли бўлади. Уларни сонли ечиш усуллари хам, қайси типга тегишлилига қараб турлича бўлади. Бу бўлимда, хусусий ҳосилали дифференциаль тенгламаларнитсонли ечишнинг чекли айирмали усулини эластиклик назариясининг динамик чегаравий масаласи мисолида кўриб ўтамиз: маълумки, мазкур масала харакат тенгламисидан

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (1)$$

умумлашган Гук қонунидан

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad (2)$$

Коши муносабати

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right), \qquad (3)$$

мос равишда, бошланғич

$$u_i\big|_{t=t_0} = \phi_i, \quad \dot{u}_i\big|_{t=t_0} = \psi_i \qquad (4)$$

ва, чегаравий шартлардан

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^0 \quad , \qquad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}\, n_j\big|_{\Sigma_2} = \mathrm{S}_i^0 \qquad (5)$$

ташкил топади. Бу ерда σ_{ij} –кучланиш тензори, ε_{ij} – деформация тензори, u_i –кўчишвектори. X_i – хажмий куч,. C_{ijkl} –4-ранли тензор, ρ –зичлик.
(2) ифодани (2) тенгламага қўйиб қуйидаги ифодани топиш мумкин

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \qquad (6)$$

Охирги ифодани эътиборга олган холда, анизотроп жисмлар учун эластиклик назариясининг кўчишларга нисбатан ёзилган динамик масаласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\sum_{j,k,l,=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right) + \rho X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad x_i \in V \qquad (7)$$

бошланғич шартлар

$$u_i\big|_{t=t_0} = \phi_i \;,\; \dot{u}_i\big|_{t=t_0} = \psi_i \,, \qquad (8)$$

чегаравий шартлар

$$u_i\big|_{\Sigma_1} = u_i^o\,, \qquad x_i \in \Sigma_1 \qquad (9)$$

$$\sum_{k,l,j=1}^{3} C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} n_j\bigg|_{\Sigma_2} = S_i^0 \quad , \quad x_i \in \Sigma_2 \,. \qquad (10)$$

(7) тенгламани компонентларга нисбатан куйидаги кўринишга эга бўлади

$$\begin{cases} C_{1111}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{1212}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{1313}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (C_{1122} + C_{1212})\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + (C_{1133} + C_{1313})\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} + \rho X_1 = \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ C_{1212}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{2222}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{2323}\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (C_{2211} + C_{1212})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + (C_{2233} + C_{2323})\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} + \rho X_2 = \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ C_{1313}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{2323}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_{3333}\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (C_{3311} + C_{1313})\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} + (C_{3322} + C_{2323})\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial z} + \rho X_3 = \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \qquad (11)$$

Бир ўлчовли холда (11) тенглама ушбу кўринишга эга бўлади

$$C_{1111}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho X_1=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (12)$$

ва қуйидаги бошланғич

$$u\big|_{t=t_0}=\varphi\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_0}=\psi \qquad (13)$$

ва чегаравий шартлар

$$u_i\big|_{\Sigma_1}=u_i^o,\quad C_{1111}\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=S \qquad (14)$$

асосида стерженда тўлқин тарқалиш жароёнини ифодалайди.

(12)- тенгламани зичликка бўлиб

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{C_{1111}}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+X_1/\rho \qquad (15)$$

қуйидаги белгилашларни киритсак

$$a^2=\frac{C_{1111}}{\rho},\quad q=X_1/\rho$$

(12)– тенгламауb қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+q(x,t),\quad 0\le x\le l,\ 0\le t\le T \qquad (16)$$

voc равишда қуйидаги бошланғич

$$\begin{aligned}&\mathrm{u}(x,t)\big|_{t=0}=f(x)\\&\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\Phi(x)\end{aligned} \qquad (17)$$

da чегаравий шартлар билан

$$\begin{aligned}&\mathrm{u}(x,t)\big|_{x=0}=\varphi(t)\\&\mathrm{u}(x,t)\big|_{x=l}=\psi(t)\end{aligned} \qquad (18)$$

Ошкор чекли айирмали схема

Берилган кесма l ни N та бўлакка бўламиз. Берилган T вақтни M га буламиз. У холда томонлари OX ва OУ ўқларига таянган тўртбурчак соҳани қарашимиз мумкин.

$$h=\frac{l}{N},\quad \tau=\frac{T}{M} \qquad (19)$$

Қадамлардан фойдаланган холда тугун нуқталарнинг координаталари куйдагича аниқланади

$$x_i = a + h \cdot i, \ \ i = \overline{0, N}$$
$$t_j = \tau \cdot j, \ \ j = \overline{0, M} \qquad (20)$$

Бу нукталарда аниқланган функцияни $u(x,t)$ ни тугун нукталарга нисбатан қуйидаги кўринишни олади

$$u(x_i, t_j) = u_{i\,j} = u_i^j \qquad (21)$$

Маълумки тугун нуқтларга нисбатан $u(x,t)$ функциядан олинган ҳосилалар қуйиданича

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + q_i^j, \ \ i = \overline{1, N-1}, \ \ j = \overline{1, M-1} \qquad (22)$$

$$u_i^0 = f_i, \ \ i = \overline{0, N} \qquad (23)$$

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \Phi_i, \ \ i = \overline{0, N} \quad \text{ёки}$$
$$u_i^1 = u_i^0 + \tau\Phi_i = f_i + \tau\Phi_i \qquad (24)$$

$$u_0^j = \phi_1^j, \ \ j = \overline{0, M-1}$$
$$u_N^j = \phi_2^j, \ \ j = \overline{0, M-1} \qquad (25)$$

$$u_i^{j+1} = \left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + \tau^2 q_i^j + 2u_i^j - u_i^{j-1},$$
$$i = \overline{1, N-1}, \ \ j = \overline{0, M-1} \qquad (26)$$

$$u_i^0 = f_i, \qquad i = \overline{0, N}$$
$$u_i^1 = f_i + \tau\Phi_i, \qquad i = \overline{0, N} \qquad (27)$$

$$u_0^j = \varphi^j, \quad u_N^j = \psi^j, \qquad j = \overline{0, M-1} \qquad (28)$$

(26) – рекуррент формула. (22) чекли айирмали схема ошкор схема деб аталади. Унинг шартли яқинлашиш шарти қуйидагидан иборат

$$\frac{\tau^2}{h^2} << 1$$

Ошкормас схема**:** (22) ифода ёрдамида қуйдаги ошкормас чекли айирмали схемани ёзиб олиш мумкин

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} + q_i^j, \ \ i = \overline{1, N-1}, \ \ j = \overline{1, M-1} \qquad (27)$$

$$u_i^0 = f_i, \qquad i = \overline{0, N}$$
$$u_i^1 = f_i + \tau\Phi_i, \qquad i = \overline{0, N} \qquad (28)$$

$$u_0^j=\varphi^j, \quad u_N^j=\psi^j, \quad j=\overline{0,M-1} \qquad (29)$$

(27) схемани шакл алмаштиришлардан кейин қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\begin{cases} a_i u_{i+1}^{j+1}+b_i u_i^{j+1}+c_i u_{i-1}^{j+1}=\tilde{f}_i^{\,j}, \ i=1..N-1, \ \ j=1..M-1 \\ \alpha_{01}u_0^j+\beta_{01}u_1^j=\gamma_{01}^j, \ i=0 \\ \alpha_{02}u_{N-1}^j+\beta_{02}u_N^j=\gamma_{02}^j, \ i=N \end{cases} \qquad (30)$$

$$\begin{aligned} & a_i=\frac{\tau^2a^2}{h^2}, \ b_i=-\frac{2\tau^2a^2}{h^2}-1, \ c_i=\frac{\tau^2a^2}{h^2}, \ \tilde{f}_i^{\,j}=u_i^{j-1}-2u_i^j-\tau^2q_i^j \\ & \alpha_{01}=1, \ \beta_{01}=0, \ \gamma_{01}^j=\varphi^j \\ & \alpha_{02}=0, \ \beta_{02}=1, \ \gamma_{02}^j=\psi^j \end{aligned} \qquad (31)$$

Қуйида (30-31) масаланинг прогонка усули асосида ечиш алгоритми ва унга дастур келтирилган:

1) $u[\mathrm{N},\mathrm{M}], a[\mathrm{N}], b[\mathrm{N}], c[\mathrm{N}], \ x[\mathrm{N}], t[\mathrm{M}]$

$h, \tau, l, T, N, M, i, j$

2) Бошланғич ва чегаравий шартлар.

3) $\alpha, \beta, \ldots$ лар киритилади

4) j – бўйича цикл

$$X_1^j=-\frac{\beta_{01}}{\alpha_{01}}, \ Z_1^j=\frac{\gamma_{01}}{\alpha_{01}}$$

5) $X_{i+1}^{j+1}=-\dfrac{a_i}{b_i+c_iX_i}, \ Z_{i+1}^{j+1}=\dfrac{f_i^{\,j}-c_iZ_i}{b_i+c_iZ_i^j}, \quad i=1..N-1$

6) $u_N^j=\dfrac{\gamma_{02}-\alpha_{02}Z_N^j}{\beta_{02}+\alpha_{02}X_N^j}$

7) $u_{N-1}^j=X_i^ju_i^j+Z_i^j, \quad i=N, N-1, \ldots .1$

Келтирилган алгортм асосида C++ тилида ёзилган дастур қуйидаги кўринишга эга бўлади.

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
main()
{
   float u[30][30],x[30],t[30];
   //float Bx0[30][30], By0[30][30], Tau0[30][30];
   float h, tau, a,pi;

   h=0.1; tau=0.001;
```

```
a=1; pi=3.14;
int n, m, i,j;
 n=10; m=5;

for (int i=0; i<=n; i++)
{
x[i]=h*i;
}

for (int j=0; j<=m; j++)
{
t[i]=tau*j;
}
//  Boshlangich shartlar
for (int i=1; i<=n-1; i++)
    {
        u[i][0]=0;    //x[i]*(x[i]+1);
        u[i][1]=u[i][0]+tau*pi*sin(pi*x[i]);
    }

// chegaraviy shart
for (int j=0; j<=n; j++)
{
    u[0][j]=0;          u[n][j]=0; //2*(t[j]+1);
}

for (int j=1; j<=m-1; j++)
{
    for (int i=1; i<=n-1; i++)
    {

u[i][j+1]=(a*tau/h)*(a*tau/h)*(u[i+1][j]-2*u[i][j]+u[i-1][j])+2*u[i][j]-u[i][j-1];
    }
}

// pechatga chiqarish
for (int j=0; j<=m; j++)
    {
        for (int i=0; i<=n; i++)
        {
            cout << setprecision (3) << u[i][j] << " ";
        }
        cout << endl;
    }
 }
```

2.2. Чекли элементлар усули

Туташ мухитлар механикасида қаттиқ жисм, суюқлик ва газларда кечадиган жароёнларнинг математик моделларни сонли ечишда, хозирги кунда энг мухим ва таниқли усулларидан бири чекли элементлар усулидир. Чекли элементлар усули хозирги кунда жуда кенг тарқалган бўлиб, амалий масаларни хал этишда мухим ахамиятга. Унинг асосида қатор Ansys, Nastran, Cosmosm, Abaqus, FEM, Lira каби дастурий махсулотлар яратилган. Биз бу бўлимда, юқорида санаб ўтилган дастурий маъсулотларнинг асосини ташкил этувчи чекли элементлар усули билан танишиб ўтамиз.

Декарт координаталар тизимида уч ўлчовли изотроп эластик жисм ташқи кучлар таъсирида турғун холатда бўлсин. Мувозанат тенгламарини ва юзада берилган чегаравий шартларни қаноатлантирувчи силжишларни аниқлаш керак бўлсин. Бу масалани ечиш учун унга тенг кучли бўлган вариацион масаланинг қўйилишини кўрамиз. У жисмнинг тўлиқ потенциал энергиясини минимизациялаш (Лагранж принципи)га асосланади ва масалани ечиш учун тақрибий усулларни қўллаш имконини беради. Улардан бири бўлиб чекли элементлар усули хисобланади.

Масаланинг вариацион кўриниши қўйидагича тасвирланиши мумкин

$$\int_V \delta\{\sigma^T\}\{\varepsilon\}dV - \int_S \delta\{U\}^T\{P\}dS = 0 \qquad (1)$$

бу ерда

V-жисмнинг ҳажми;

S-жисмнинг юзаси;

$\{U\} = \{u, v, w\}$ - силжиш векторининг компонентлари;

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \ \varepsilon_{yy}, \ \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$ - деформация векторининг компонентлари;

$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ – кўчиш векторининг компонентлари.

Гук қонунига асосан кучланиш ва деформация векторлар компонентлари қўйидаги муносабат билан боғланган:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \qquad (2)$$

бу ерда $[D]$-жисмнинг эластиклик матрицаси.

Изотроп жисмнинг қаттиқлик матрицаси атиги иккита боғланмаган параметрга эга ва унинг кўриниши қуйидагича:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

бунда

μ – Пуассон коэффициенти;

E – эластиклик модули;

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$ - силжиш модули.

Юқоридаги барча холларда $[D]^{-1}$ – матрицанинг детерминанти нолга тенг бўлмаганлиги учун унинг $[D]$ – матрицаси албатта мавжуд ва қўйидаги кўринишларга эга:

$$\begin{bmatrix} \frac{E(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & \frac{E(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & -\frac{E\mu}{2\mu^2+\mu-1} & \frac{E(\mu-1)}{2\mu^2+\mu-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{4}$$

Деформация вектори $\{\varepsilon\}$ ўз навбатида силжиш вектори билан қўйидаги муносабат билан боғланган:

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U\} \tag{5}$$

Бу ерда $[B]$ - градиентлар матрицаси бўлиб, қўйидаги кўринишга эга:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Қўйилган масала чекли элементлар усули билан ечилади. Бу усулда жисм эгаллаб тўрган соҳа кичик хажмга эга бўлган чекли элементларга бўлакланади. U, V, W - силжишларнинг аппроксимация функциялари ҳар бир чекли элементлар учун келтирилади. Асосий ноъмалумлар сифатида тугун нуқталар силжиши олинади, чунки кичик соҳа ичидаги силжишларнинг аппроксимацияси учун содда функцияларни ишлатиш имкони бор.

Кўрилаётган жисмнинг хусусиятларини ўрганиш чекли ўлчовларга эга бўлган элементларнинг хусусиятларини ўрганишдан бошланади.

е-чи чекли элементининг силжиш вектори компоненталари қўйидаги кўринишда тасвирланади:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \left[I\ N_1, \quad I\ N_2, \ldots, I\ N_n\right]\{g\}^e \tag{7}$$

бу ерда

N_i- чекли элементнинг форма (кўриниш) функцияси;

n – чекли элементдаги тугун нуқталар сони;

I –ўлчами 3x3 бўлган бирлик матрица;

$\{g\}^e = \{U_1\, V_1\, W_1,\quad U_2\, V_2\, W_2, \ldots, U_n\, V_n\, W_n\}$– чекли элемент тугун нуқталарининг силжиш вектори.

Хар бир чекли элемент учун деформация вектори (1) ва кучланиш вектори ўзаро қуйидагича боғланади:

$$\{\varepsilon\}^e = [B]\{g\}^e \tag{8}$$

$$\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e \tag{9}$$

бу ерда $[B]$- градиентлар матрицаси бўлиб, у қуйидаги кўринишга эга:

$[B] = [B_1, B_2, \ldots, B_n]$ ва

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Хар бир чекли элемент учун Лагранж вариация тенгламасини қуйидаги кўринишда тасвирлаш мумкин:

$$\left(\int_{V^\ell} [B]^T [D][B] dV\right)\{g\}^e - \int_{S^e} [N]^T \{P\} dS = 0 \tag{11}$$

Қуйидаги ифодалашларни киритамиз:

$$[K]^e = \int_{V^e} [B]^T [D][B]\, dV \tag{12}$$

ва

$$\{F\}^e = \int_{S^e} [N]^T \{P\}\, dS \tag{13}$$

У ҳолда юқоридаги (7) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$[K]^e \{g\} - \{F\}^e = 0 \tag{14}$$

бу ерда

$[K]^e$ - **е-**чи чекли элементнинг қаттиқлик матрицаси;

$\{F\}^e$ -тугун нуқталарга келтирилган кучлар вектори.

Ҳал қилувчи чизиқли алгебраик тенгламалар системасини қуриш жараёнини кўриб чиқилади. Жисмнинг чекли-элементли моделидаги ҳар бир тугун нуқта бир неча чекли элементнинг таркибида иштирок этганлиги сабабли, шу тугун нуқтанинг мувозанат ҳолатини тасвирловчи тенгламанинг сатри шу чекли элементлар мос коэффициентлари йиғиндисини ўз ичига олади. Мисол учун ***i***-чи тугун нуқтага мос келувчи қаттиқлик матрицаси ва унга мос келувчи тугун нуқталаридаги ташқи кучлар вектори қўйидаги муносабат билан аниқланади:

$$\left(\sum_e [K_{i1}]\right)^e \{g_1\} + \left(\sum_e [K_{i2}]\right)^e \{g_2\} + \ldots + \left(\sum_e [K_{im}]\right)^e \{g_m\} - \sum_e \{F_i\}^e = 0 \qquad (15)$$

бу ерда $\sum_e \{F_i\}^e$ - *i*-чи тугун нуқтага келтирилган ташқи кучлар компоненталарининг йиғиндиси.

Табиийки бу йиғиндига фақат *i*-чи тугун нуқтани ўз таркибига олган чекли элементлар ҳисса қўшади.

Барча дискрет моделдаги тугун нуқталар учун (10) кўринишдаги тенгламаларни бирлаштирганда бошланғич жисм дискрет моделининг умумий тенгламалар системаси қўйидаги кўринишга эга бўлади:

$$[K]\{G\} - \{F\} = 0 \qquad (16)$$

бу ерда $[K]$-қаттиқлик матрицасининг глобал системаси;

$\{G\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\} -$ жами чекли элементларнинг тугун нуқталари силжишларининг умумий вектори;

$\{F\} -$ ҳар бир тугун нуқталарга келтирилган кучлар йиғиндисининг вектори;

m - жисмни хосил қилувчи чекли элементларнинг умумий сони.

2.3. Чегаравий элементлар усули.

Туташ мухитлар механикаси математик моделларини сонли ечишга мўлжалланган усуллардан бири чегаравий интеграл тенгламалар усули(ЧИТУ) ёки чегаравий элементлар усулидир. ЧИТУ нинг асосий моҳияти, соҳада қаралаётган масалан, соҳани чегараси бўйича аниқланган интеграл тенгламага келтиришдан ва уни ечишдан иборат. Юқорида, бу усул бир ўлчовли чегаравий масала мисолида баён этилган эди. Бу бўлимда, биз чегаравий элементлар усулини икки ўлчовли Пуассон ва Лаплас тенгламалари мисолида кўриб ўтамиз.

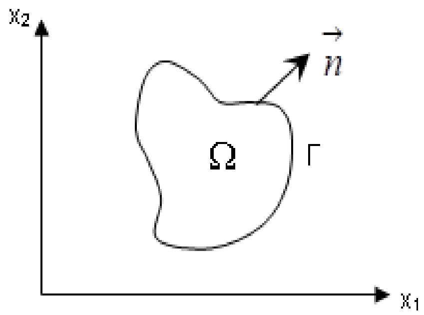
Бизга Лаплас тенгламаси учун чегаравий масала қўйилган бўлсин:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

$$u\Big|_{\Gamma_1} = \bar{u}, \ x \in \Gamma_1 \tag{2}$$

$$q\Big|_{\Gamma_2} \equiv \frac{du}{dh}\Bigg|_{\Gamma_2} = \bar{q}, \quad x \in \Gamma_2 \tag{3}$$

2-маърузада кўрилган ўрталашга қолдиқлар усулига асосан (1-3) чегаравий масала қуйидаги ифодага эквивалент



$$\int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) w ds - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{dw}{dn} ds \tag{4}$$

Икки марта бўлаклаб интеграллаб топиш мумкин:

$$\int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot u d\Omega = \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{dw}{dn} ds + \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_1} qwds - \int_{\Gamma 2} \bar{q} wds \tag{5}$$

ёки умумий холда қуйидаги кўринишга келтириш мумкин

$$\int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot u d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{dw}{dn} ds - \int_{\Gamma} qwds \tag{6}$$

бу ерда

$$q = \begin{cases} q, & x \in \Gamma_1 \\ \bar{q}, & x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} \bar{u}, & x \in \Gamma_1 \\ u, & x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Чегаравий интеграл тенгламани ҳосил қилиш учун оғирлик функцияси w қуйидаги тенгламани ечишдан топамиз

$$\Delta^2 w = -\delta(x - \xi_i), \qquad \xi_i \in \Omega \tag{7}$$

Бу ерда $\delta(x - \xi_i)$-Дирак функцияси

Маълумки, (7) ни қаноатлантирувчи ечим қуйидаги кўринишга эга

$$w^* = \frac{1}{2\pi}\ell n\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{\left(x_i - \xi^{(1)}\right)^2 + \left(x_2 - \xi^{(2)}\right)^2} \tag{8}$$

бу ерда $\xi^{(1)}$ ва $\xi^{(2)}$ - ξ_i тугун нуқтанинг компоненталари.

(8) ни (6) тенгламага қўйиб топамиз

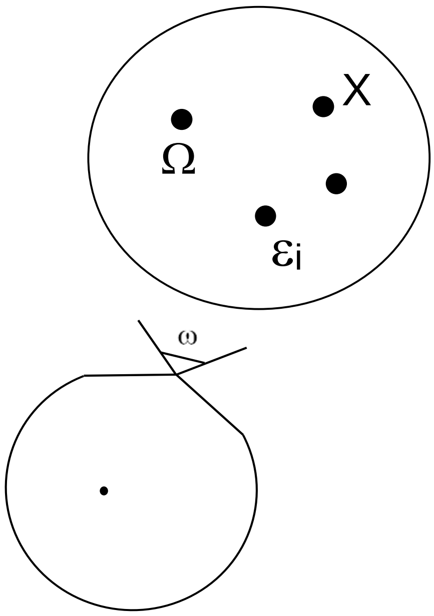
$$u(\xi) + \int_\Gamma u(x)\frac{dw\ (\xi,x)}{dn}ds(x) = \int_\Gamma q(x)w(\xi,x)ds(x) \tag{9}$$

(9) асосий интеграл ифода бўлиб, унинг ёрдамида основное чегаравий интеграл тенгламани топиш мумкин. $\xi \to x$ да (9) тенгламадан топамиз

$$\mathrm{C}(\xi)u(\xi) + \int_\Gamma u(x)\frac{dw\ (\xi,x)}{dn}ds(x) = \int_\Gamma q(x)w(\xi,x)ds(x) \tag{10}$$

бу ерда

$$C(\xi) = 1 - \frac{\omega}{2\pi},$$



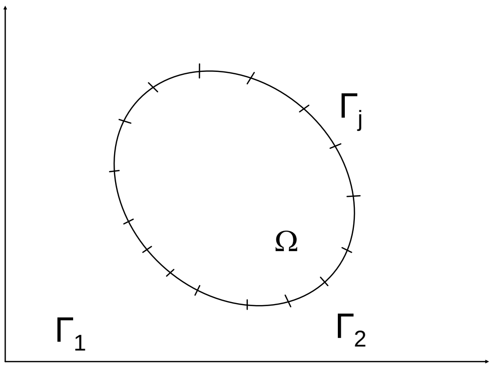
Агар соҳанинг чегараси силлиқ бўлса, $\omega = \pi$, нуқта соҳанинг ичида эса $\omega = 0$. Агар соҳанинг чегараси синиқ нуқталарга эга бўлса, ω синиқ чизиққа ўтказилган нормаллар орасидаги бурчакни ифодалайди. Агар чегара силлиқ бўлиб, ξ_i чизиқнинг устида бўлса, $\omega = \pi$ бўлиб $C(\xi_i) = \frac{1}{2}$.

Чегаравий интеграл тенгламадан чекли айирмали тенламаларга ўтиш учун, соҳа чегарасини N бўлакка-чегаравий элементларга бўламиз.

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} u(x) \frac{dw\ (\xi_i, x)}{dn} ds(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} q(x) w(\xi_i, x) ds(x) \qquad (11)$$

Хар бир чегаравий Γ_j элементда u ,q ларни ўзгармас деб ва сегментнинг ўртасидаги қийматга тенг деб фараз қиламиз. У холда $\omega = \pi$ эканлигини инлбатга олиб (11) қуйидагича ёзиб олиш мумкин

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^{N} u_j \int_{\Gamma_j} \frac{dw\ (\xi_i, x)}{dn} ds(x) = \sum_{j=1}^{N} q_j \int_{\Gamma_j} w(\xi_i, x) ds(x) \qquad (12)$$



(12)- ифодани қуйидагича ёзиб олиш мумкин

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^{N} u_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^{N} q_j G_{ij} \qquad (13)$$

бу ерда

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{dw}{dx} d\Gamma, \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} w d\Gamma$$

Қуйидаги ифодадан фойдаланиб

$$\frac{1}{2} u_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} u_j \delta_{ij}$$

(13) тенгламани бошқа кўринишга келтириш мумкин

$$\sum_{j=1}^{N} H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij} q_j \qquad (14)$$

бу ерда

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}, & i = j \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасида коэффициентлар сифатида қатнашаетган интегоралларни Гаусс типидаги увадратур формулалар орқали ҳисоблаш мумкин.

(14) нинг ечимлари бўйича, (10) формуладан фойдаланган холда, ноъмалум функция *u(x)* нинг ихтиёрий ички нуқтадаги қиймати қуйидаги ифода орқали топиш мумкин

$$u_i = \int_\Gamma q(x) w(\xi, x) ds(x) - \int_\Gamma u(x) \frac{dw\ (\xi, x)}{dn} ds(x) \qquad (15)$$

ёки дискрет холдаги қуйидаги ифодани топамиз

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^{N} u_j \hat{H}_{ij} \qquad (16)$$

Назорат саволлари

1. Чекли айирмали усул
2. Динамик масаланипг куйилиши
3. Тор тебраниши тенгламаси,
4. Ошкор ва ошкормас схемалар
5. Чекли айирмали тенглама шаблони,
6. Рекуррент формула,
7. Прогонка усули,
8. Чекли элементлар усули,
9. Чегаравий элементлар усули
10. Чекли элементлар кўринишлари
11. Ўрталашган қолдиқлар усули,
12. Фундаменталь ечим,
13. Бўлаклаб интеграллаш,
14. Чегаравий интеграль тенглама,

3-Мавзу: Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари, хамда амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш.

Замонавий сонли усуллар, дастурлаш технологиялари ва воситалари

Бу бўлимда, аввалги дарсларимизда қаралган математик моделлар асосида, замонавий сонли усуллардан ва дастурлаш технологияларидан фойдаланган холда яратилган дастурий таъминот асосида конкрет чегаравий масалалар сонли ечилган ва олинган натижалар тахлил этилган. Чизиқсиз деформацияланиш жароёни температурани ҳисобга олган холда икки модел тенгламалар, айнан деформацион ва оқим назариялари асосида моделлаштирилган. Масалаларни дискрет холлари чекли-айирмали усул ёрдамида ошкор ва ошкормас схемалар кўринишида ифодаланган. Чекли-айирмали тенгламаларни ечиш, ошкор схема пайтида рекуррент формулалар бўйича ҳисоблашга, ошкормас схемалар холида эса, йўналишлар бўйича ўзгарувчи прогонка усули ёрдамида қўллаб ечишга келтирилган. Дастурий таъминот объектга йўналтирилган дастурлаш технологиялари асосида C# дастурлаш тилида яратилган ва натижаларни визуаллаштириш MATLAB амалий пакети билан интеграллашган холда амалга оширилган.

Деформацион назария асосида тўғри тўртбурчак учун боғлиқ термопластик чегаравий масала қуйидаги бошланғич

$$u(x,y,t)\big|_{t=0} = \sin(\pi y)\cdot\sin(\pi x), \qquad v(x,y,t)\big|_{t=0} = \sin(\pi y)\cdot\sin(\pi x),$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad T(x,y,t)\big|_{t=0} = T_0; \tag{3.1.1}$$

ва чегаравий шартларда

$$u(x,y,t)\big|_{x=0} = 0, \qquad v(x,y,t)\big|_{x=0} = 0,$$

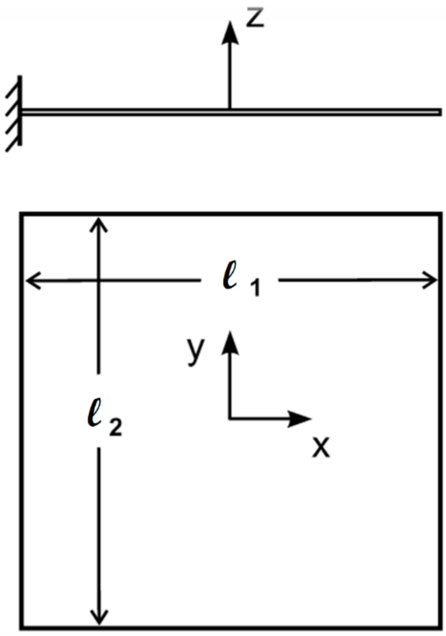
$$u(x,y,t)\big|_{x=l_1} = 0, \qquad v(x,y,t)\big|_{x=l_1} = 0,$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=0}=0, \qquad v(x,y,t)\big|_{y=0}=0,$$

$$u(x,y,t)\big|_{y=l_2}=0, \quad v(x,y,t)\big|_{y=l_2}=0, \qquad (3.1.2)$$

$$T(x,y,t)\big|_{x=0}=T_0, \qquad T(x,y,t)\big|_{x=l_1}=T_0,$$

$$T(x,y,t)\big|_{y=0}=T_0, \qquad T(x,y,t)\big|_{y=l_2}=T_0,$$



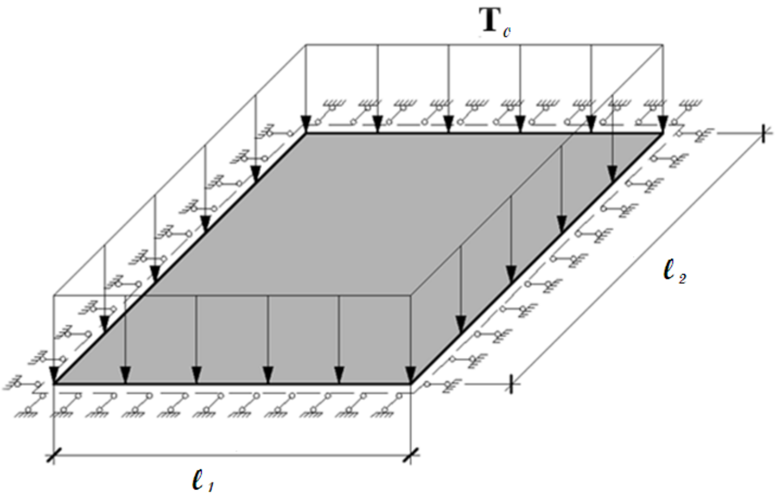
Расм.3.1.1

сонли ечилган. Ўзгармаслар қуйидагича танланган

$$\lambda=1.2, \quad \lambda_0=0.8, \quad \alpha=0.05, \quad \mu=0.5, \quad \rho=0.9, \quad C_\varepsilon=3.5,$$

$$T_0=90, \quad n=10, \quad h=0.1, \quad \tau=0.01, \quad \ell_i=1, \; i=1,2.$$

Бошланғич ва чегаравий шартларга асосан, бошланғич температураси $T_0=90$ бўлган ва томонлари бўйича маҳкамланган (защемленный) тўғри тўртбурчак, $t=0$, вақт моментида кўчиш компонентлари қубба кўринишидаги функция берилган. Масала икки пластиклик назариялари ва икки- прогонка усули ва рекуррент формулалар ёрдамида сонли ечилган.



Расм.3.1.2

Прогонка усулида олинган u(x, y, t_n) кўчишнинг қийматлар Жадвал 3.1.1а.

y \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	0	0,1387	0,2120	0,2570	0,2748	0,2659	0,2309	0,1764	0,1030	0,0304	0
0,02	0	0,2061	0,3502	0,4510	0,5043	0,5089	0,4644	0,3785	0,2519	0,1083	0
0,03	0	0,2486	0,4503	0,5975	0,6854	0,7061	0,6577	0,5448	0,3842	0,1805	0
0,04	0	0,2695	0,5027	0,6853	0,7968	0,8302	0,7822	0,6576	0,4746	0,2411	0
0,05	0	0,2650	0,5084	0,7060	0,8301	0,8729	0,8301	0,7060	0,5175	0,2696	0
0,06	0	0,2345	0,4649	0,6576	0,7822	0,8302	0,7968	0,6853	0,5092	0,2716	0
0,07	0	0,1805	0,3788	0,5448	0,6577	0,7061	0,6854	0,5975	0,4503	0,2460	0
0,08	0	0,1083	0,2519	0,3837	0,4757	0,5194	0,5114	0,4510	0,3502	0,2061	0
0,09	0	0,0304	0,1030	0,1764	0,2374	0,2701	0,2764	0,2544	0,2120	0,1387	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рекуррент формула бўйича u(x, y, t_n) кўчишнинг қийматлари Жадвал 3.1.1б.

y \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	0	0,1394	0,2123	0,2562	0,2743	0,2657	0,2313	0,1759	0,1026	0,0298	0
0,02	0	0,2054	0,3497	0,4508	0,5049	0,5100	0,466	0,3774	0,2525	0,1081	0
0,03	0	0,2471	0,4498	0,5975	0,6857	0,7066	0,6582	0,5454	0,3845	0,1800	0
0,04	0	0,2681	0,5027	0,6855	0,7972	0,8307	0,7828	0,6582	0,4745	0,2401	0
0,05	0	0,2638	0,509	0,7064	0,8307	0,8734	0,8307	0,7064	0,5171	0,2683	0
0,06	0	0,2337	0,4662	0,6582	0,7828	0,8307	0,7972	0,6855	0,5085	0,2701	0
0,07	0	0,1800	0,3784	0,5454	0,6582	0,7066	0,6857	0,5975	0,4498	0,2447	0
0,08	0	0,1081	0,2525	0,3840	0,4757	0,5193	0,5112	0,4508	0,3497	0,2054	0
0,09	0	0,0298	0,1026	0,1759	0,2377	0,2703	0,2761	0,2537	0,2123	0,1394	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Прогонка усулида олинган v(x, y, t_n) кўчишнинг қийматлари Жадвал 3.1.2а.

y \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	0	0,1387	0,2061	0,2486	0,2694	0,2648	0,2343	0,1804	0,1083	0,0303	0
0,02	0	0,2121	0,3502	0,4503	0,5028	0,5086	0,4651	0,3789	0,2520	0,1030	0

0,03	0	0,2571	0,4510	0,5975	0,6854	0,7061	0,6577	0,5448	0,3839	0,1764	0
0,04	0	0,2750	0,5044	0,6855	0,7968	0,8302	0,7822	0,6577	0,4757	0,2379	0
0,05	0	0,2661	0,5090	0,7061	0,8302	0,8729	0,8302	0,7061	0,5194	0,2704	0
0,06	0	0,2312	0,4645	0,6577	0,7822	0,8302	0,7968	0,6855	0,5115	0,2765	0
0,07	0	0,1764	0,3785	0,5448	0,6577	0,7061	0,6854	0,5975	0,4510	0,2543	0
0,08	0	0,1030	0,2520	0,3842	0,4748	0,5177	0,5093	0,4503	0,3502	0,2121	0
0,09	0	0,0303	0,1083	0,1804	0,2408	0,2693	0,2715	0,2459	0,2061	0,1387	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рекуррент формулалар ёрдамида ҳисобланган $v(x, y, t_n)$ кўчишнинг қийматлари

Жадвал 3.1.2б.

y \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,01	0	0,1394	0,2054	0,2471	0,2681	0,2637	0,2336	0,1800	0,1081	0,0298	0
0,02	0	0,2123	0,3497	0,4498	0,5028	0,5091	0,4662	0,3783	0,2525	0,1026	0
0,03	0	0,2562	0,4508	0,5975	0,6855	0,7064	0,6582	0,5454	0,3842	0,1759	0
0,04	0	0,2744	0,5049	0,6857	0,7972	0,8307	0,7828	0,6582	0,4757	0,2381	0
0,05	0	0,2659	0,5101	0,7066	0,8307	0,8734	0,8307	0,7066	0,5193	0,2705	0
0,06	0	0,2315	0,4661	0,6582	0,7828	0,8307	0,7972	0,6857	0,5112	0,2761	0
0,07	0	0,1759	0,3775	0,5454	0,6582	0,7064	0,6855	0,5975	0,4508	0,2536	0
0,08	0	0,1026	0,2525	0,3844	0,4747	0,5173	0,5086	0,4498	0,3497	0,2123	0
0,09	0	0,0298	0,1081	0,1800	0,2399	0,2682	0,2701	0,2447	0,2054	0,1394	0
0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Прогонка усулида олинган $T(x, y, t_n)$ температуранинг қийматлари Жадвал 3.1.3а.

t \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
0,01	90	90,052	90,433	90,721	90,869	90,899	90,825	90,647	90,355	90,001	90
0,02	90	90,427	90,904	91,164	91,197	91,063	90,803	90,449	90,005	89,704	90
0,03	90	90,703	91,153	91,287	91,161	90,864	90,465	90,004	89,613	89,413	90
0,04	90	90,832	91,166	91,144	90,877	90,473	90,002	89,573	89,254	89,234	90
0,05	90	90,847	91,015	90,834	90,459	89,999	89,54	89,165	88,984	89,152	90
0,06	90	90,765	90,745	90,426	89,997	89,526	89,122	88,855	88,833	89,167	90
0,07	90	90,586	90,386	89,995	89,534	89,135	88,838	88,712	88,846	89,296	90
0,08	90	90,295	89,994	89,55	89,196	88,936	88,802	88,835	89,095	89,572	90
0,09	90	89,998	89,644	89,352	89,174	89,1	89,13	89,278	89,566	89,947	90
0,1	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Рекуррент формулалар ёрдамида ҳисобланган $T(x, y, t_n)$ температуранинг қийматлари

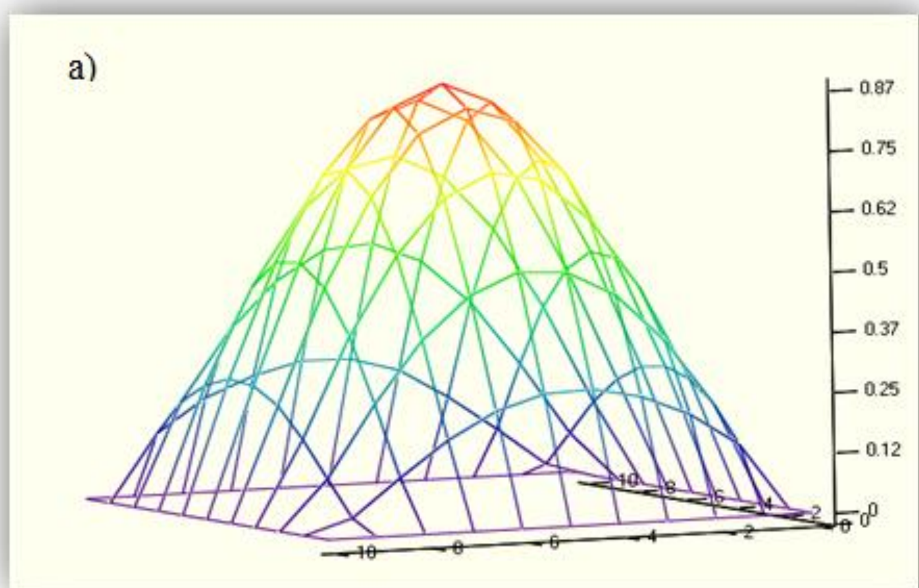
Таблица 3.1.3б.

y \ x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
0,01	90	90,1	90,792	91,318	91,576	91,621	91,475	91,14	90,593	90	90
0,02	90	90,792	91,643	92,111	92,16	91,903	91,421	90,768	90	89,406	90
0,03	90	91,318	92,111	92,346	92,102	91,552	90,816	90	89,231	88,859	90

0,04	90	91,576	92,16	92,102	91,601	90,851	90	89,183	88,578	88,524	90
0,05	90	91,621	91,903	91,552	90,851	90	89,148	88,447	88,096	88,378	90
0,06	90	91,475	91,421	90,816	90	89,148	88,398	87,897	87,839	88,423	90
0,07	90	91,14	90,768	90	89,183	88,447	87,897	87,653	87,888	88,681	90
0,08	90	90,593	90	89,231	88,578	88,096	87,839	87,888	88,356	89,207	90
0,09	90	90	89,406	88,859	88,524	88,378	88,423	88,681	89,207	89,899	90
0,1	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Қуйида келтирилган .3.1.1.а, б-3.1.3а, б расмлар орқали кўчишлар, температура ва пластик зоналар тарқалишларини кўриш мумкин. Хар хил усуллар билан сонли натижаларни таққослаш эса, қўлланилган усуллар ва модел тенгламаларнинг ўринли эканнлигини кўрсатади.

а) прогонка усули



б) рекуррент формулалар

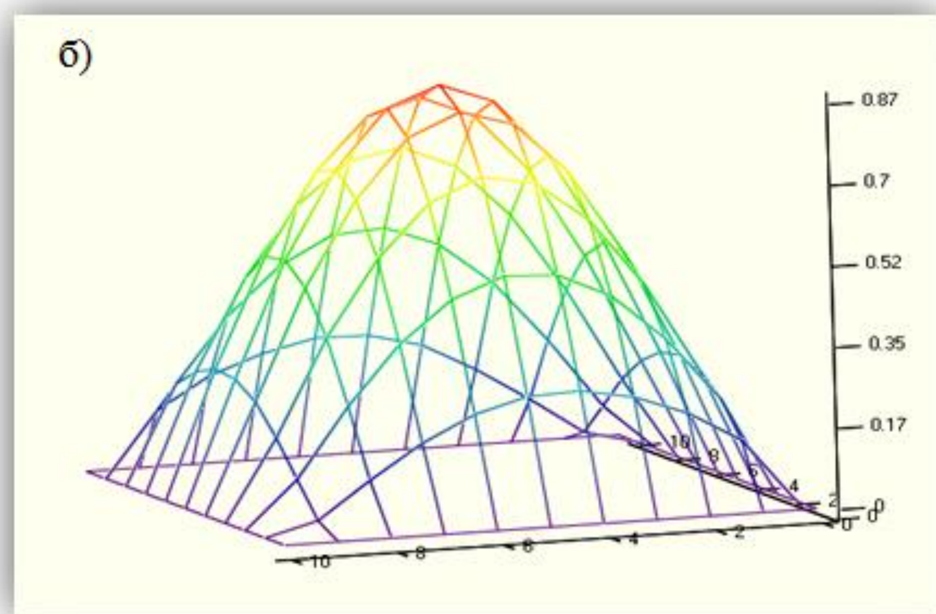
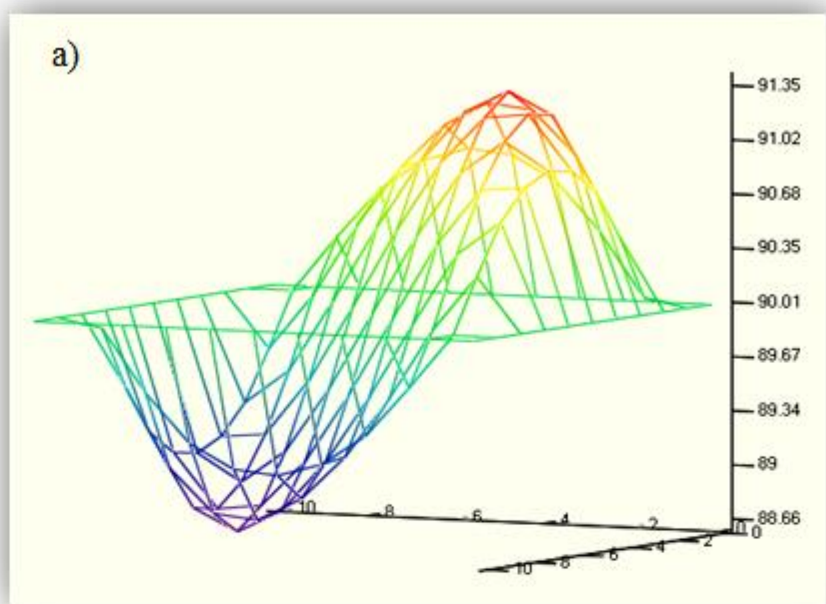
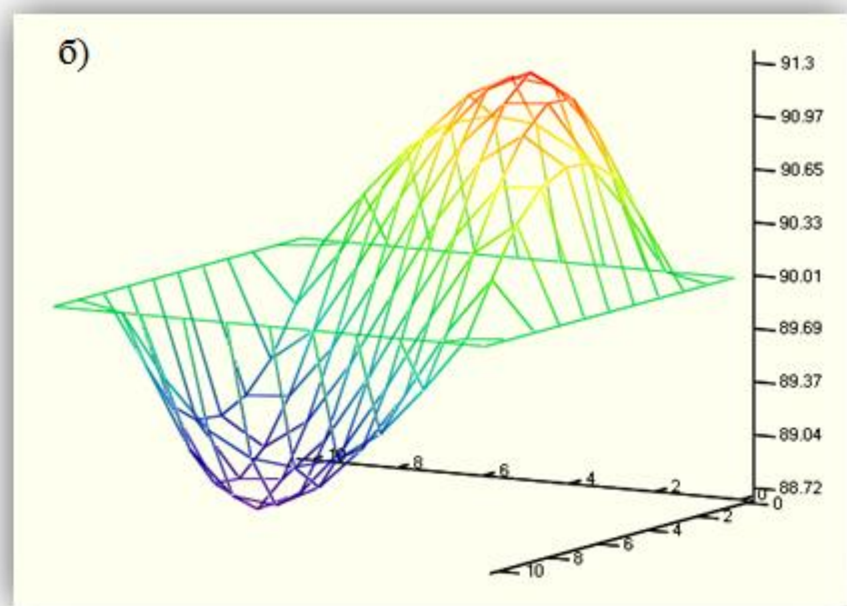


Рис.3.1.1. Распределение значения компоненты перемещения u(x, y, t_n)
в прямоугольнике по методу прогонки (а) и рекуррентным соотношениям (б)

а) прогонка методи

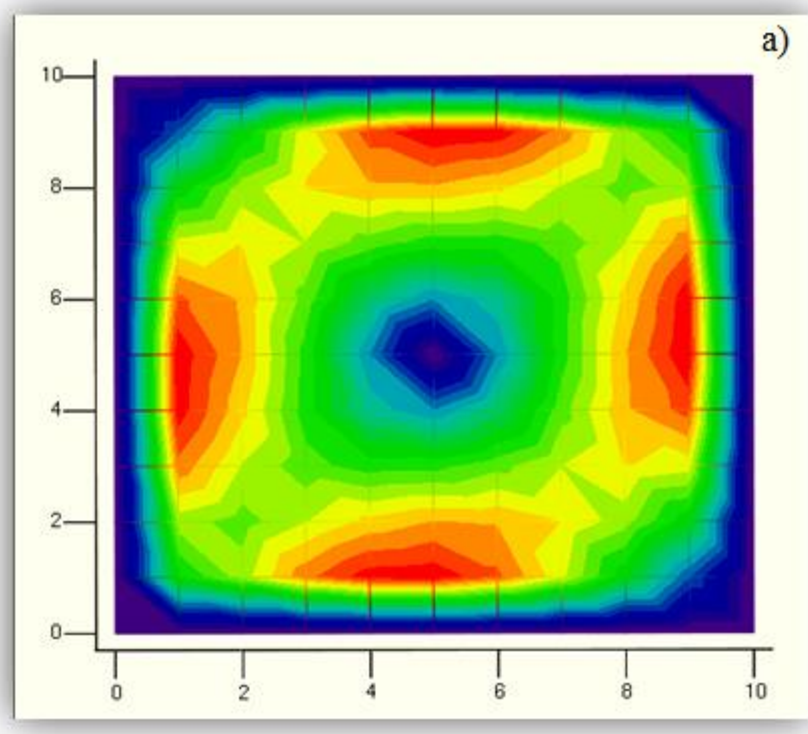


б) рекуррент формулалар

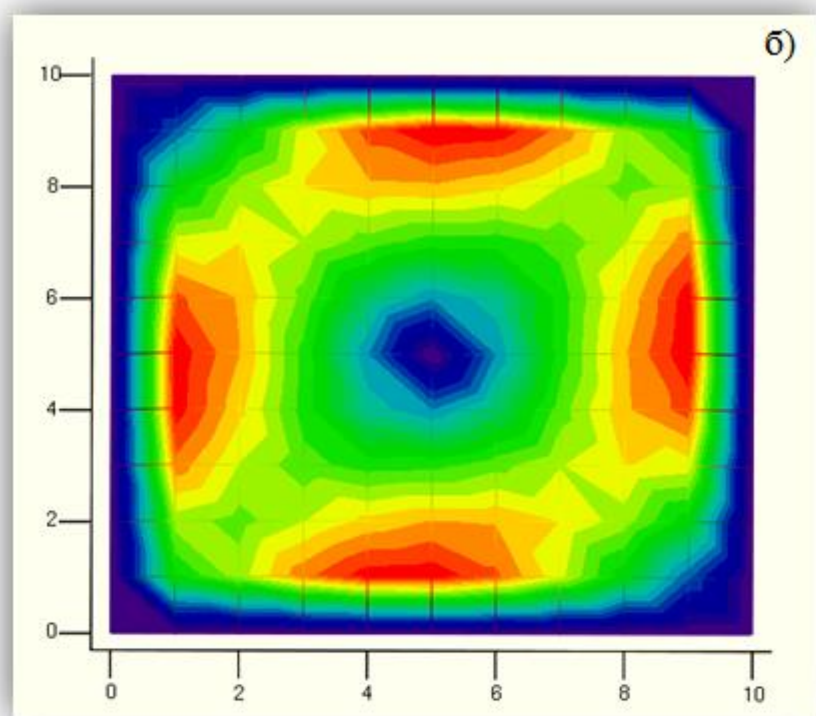


Расм. 3.1.2. Температуранинг T(x, y, t_n) тўғри тўртбурчакдаги тақсимланиши: прогонка усули(а) ва рекуррент формулалар бўйича (б)

а) прогонка усули.



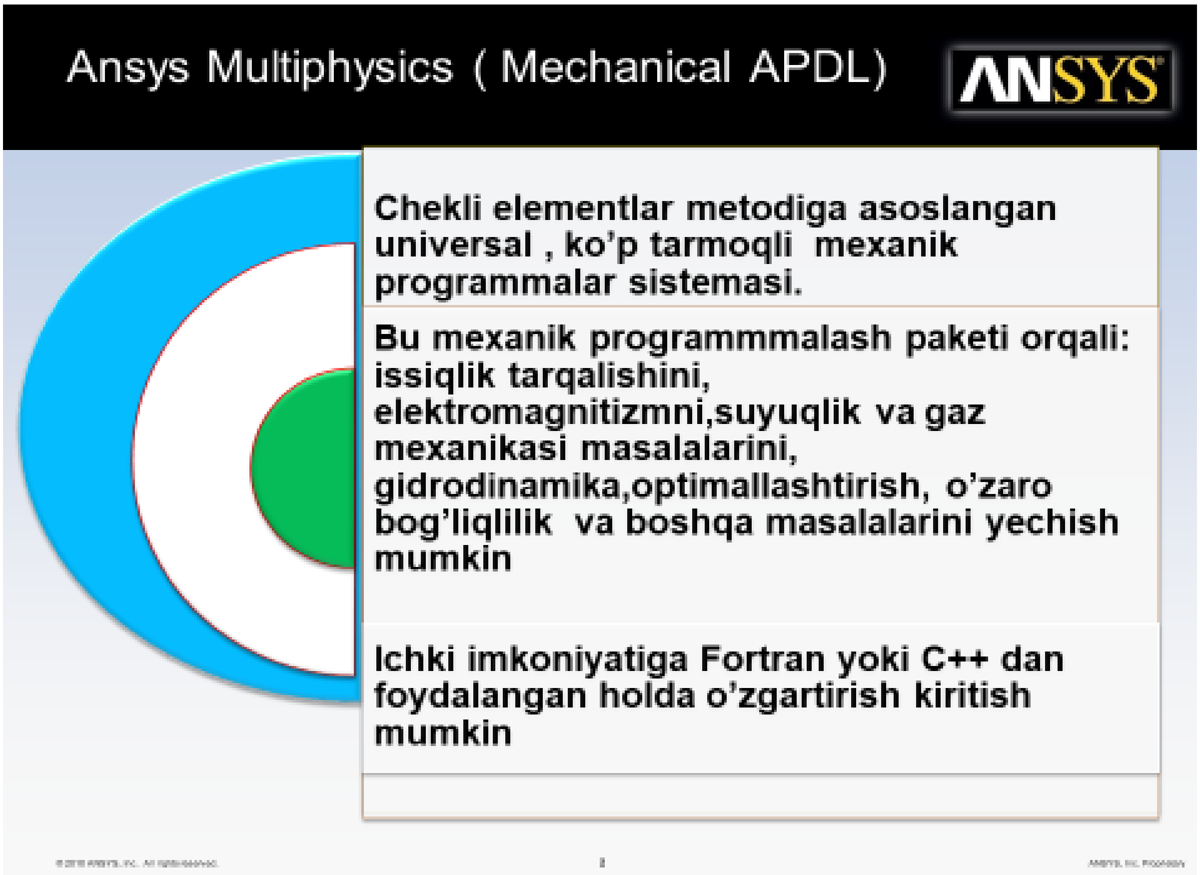
б) рекуррент формулалар.

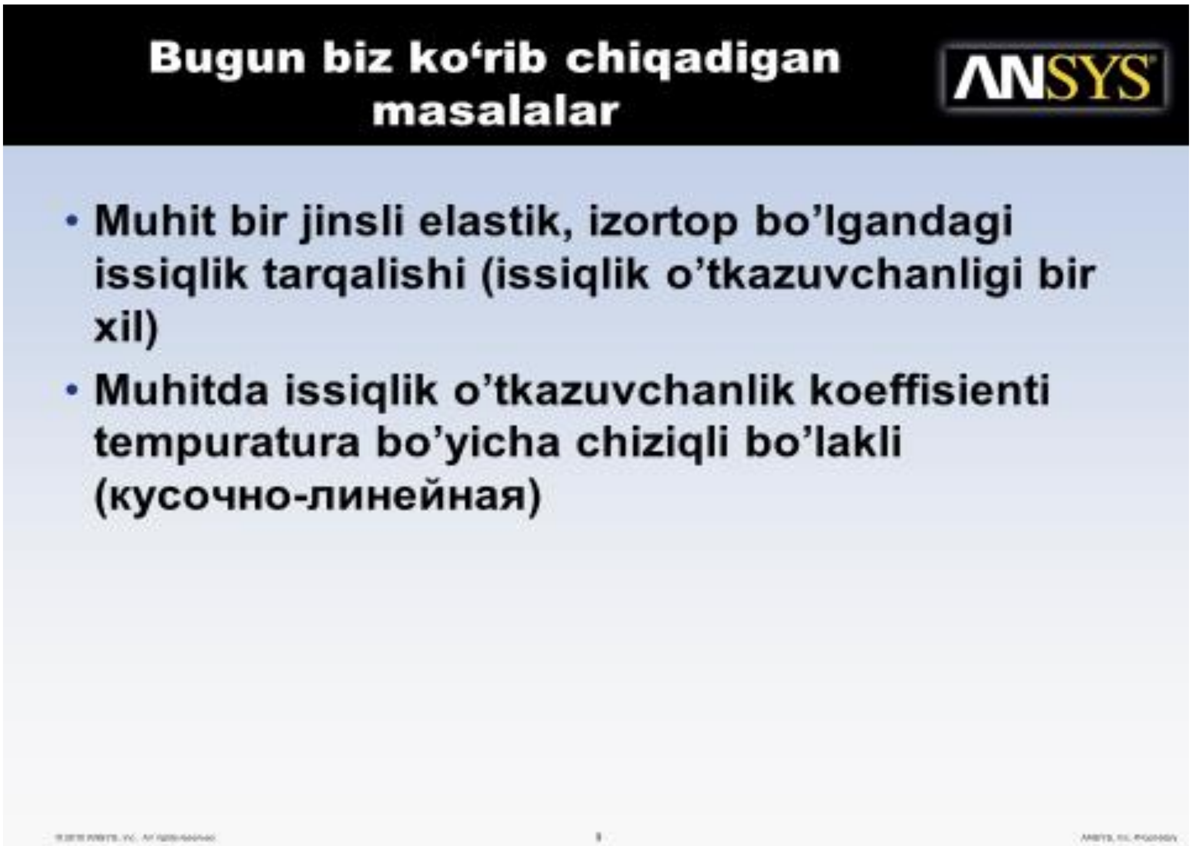


Расм. 3.1.3. Пластик зоналарнинг пайдо бўлиши: прогонка усули (а) ва рекуррент формулалар бўйича(б).

Амалий дастурлар пакетларидан илмий-тадқиқот натижаларини 2D ва 3D визуаллаштириш ва таҳлил қилишда фойдаланиш

Хозирги кунда “Чекли элементлар усули” асосида ANSYS, NASTRSAN, COSMOSM, Abaqus, FEM, Lira каби қатор амалий дастурлар яратилган. Бу дастурлар жуда кенг тарқалган бўлиб, амалий масалаларни ечишда мухим ахамиятга эга. Бу бўлимда мухитларда температура тарқалишига доир масалани ечиш намоиш этилган.


Ansys Multiphysics (Mechanical APDL)
ANSYS
Chekli elementlar metodiga asoslangan universal , ko'p tarmoqli mexanik programmalar sistemasi.
Bu mexanik programmmalash paketi orqali: issiqlik tarqalishini, elektromagnitizmni,suyuqlik va gaz mexanikasi masalalarini, gidrodinamika,optimallashtirish, o'zaro bog'liqlilik va boshqa masalalarini yechish mumkin
Ichki imkoniyatiga Fortran yoki C++ dan foydalangan holda o'zgartirish kiritish mumkin


Bugun biz ko'rib chiqadigan masalalar
ANSYS
• Muhit bir jinsli elastik, izortop bo'lgandagi issiqlik tarqalishi (issiqlik o'tkazuvchanligi bir xil)
• Muhitda issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisienti tempuratura bo'yicha chiziqli bo'lakli (кусочно-линейная)

Asosiy tenglamalar

ANSYS

- Uzluksizlik tenglamasi
- $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + div(\rho \vartheta_i) = 0$
- Fur'e - Kirxgofning issiqlik tarqalish tenglamasi.
- $\frac{\partial T}{\partial \tau} + \vartheta_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vartheta_z \frac{\partial T}{\partial z} = \mathbf{c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$
- $c = \frac{\lambda}{c_\rho \rho}$
- Qattiq jismda $w_i = 0$ uchun
- $\frac{\partial T}{\partial \tau} = \mathbf{c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$

4

Asosiy tenglamalar

ANSYS

- *Statsionar holat uchun:*
- $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ Laplas tenglamasi
- Ichki energiyani inobatga olsak
- $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{q_v}{\lambda}$ Puason tenglamasi

 5

Chegaraviy shartlar va uning programmadagi ko'rinishi

ANSYS

- Dirixle masalasi:

$$T(x, y, z, \tau) = \varphi(x, y, z, \tau)$$

Sohani ma'lum bir qismidagi temperatura o'zgarishini "Apply Temp " orqali programmada ifodalaymiz.

Neyman masalasi:

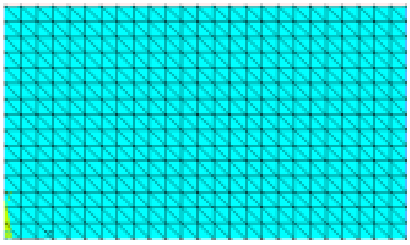
$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \psi(x, y, z, \tau)$$

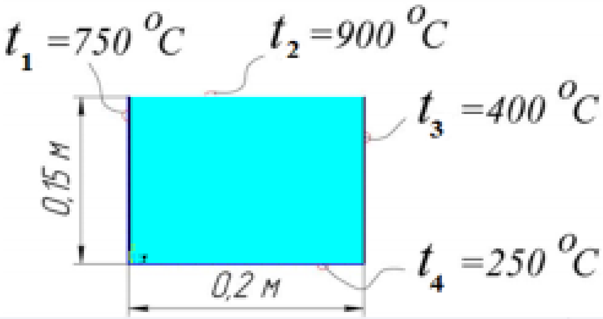
Sohani ma'lum bir qismidagi temperatura o'zgarishini "Apply HFLUX" orqali programmada ifodalaymiz.

 6 ANSYS, Inc. Proprietary

Masalani qo'yilishi: Ko'ndalang kesimi quyidagi ko'rinishdagi temir uchun.

ANSYS





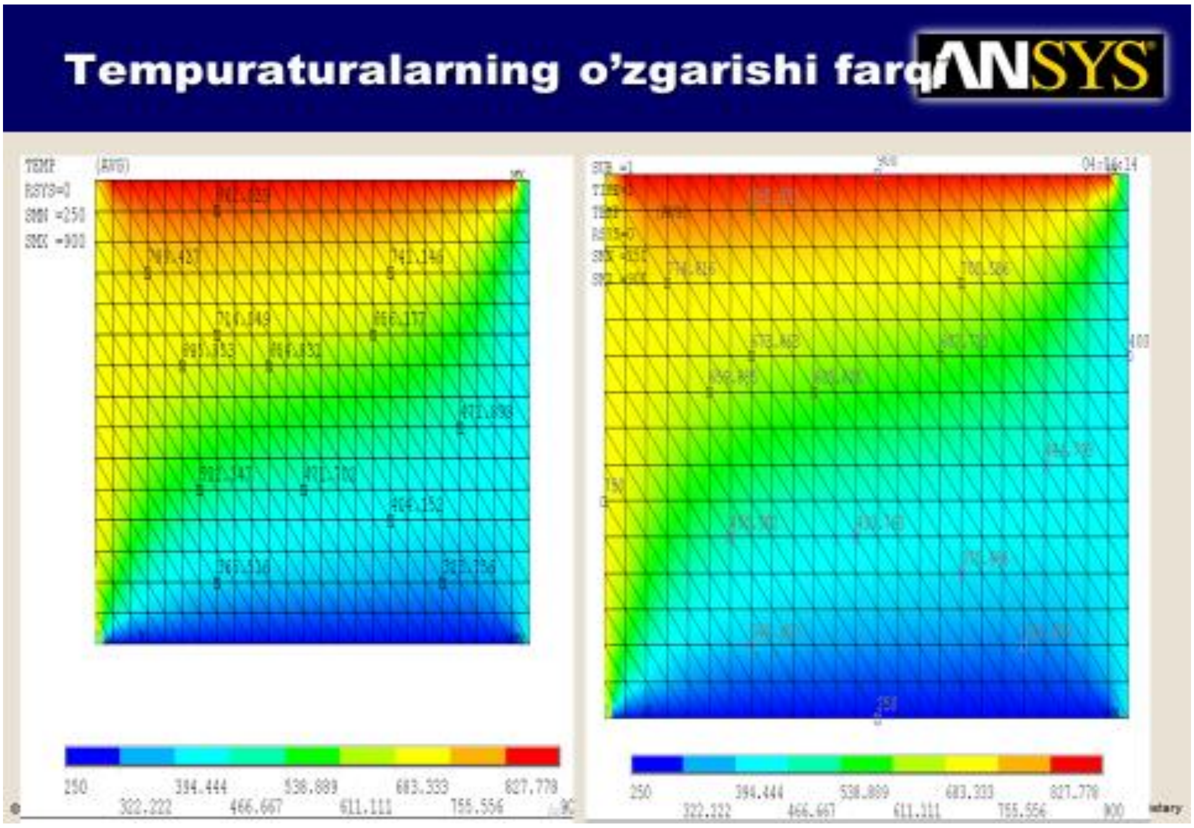
O'zgarmas issiqlik o'tkazuvchanlikga ega bo'lsin

- $k = 39{,}4 \frac{Vt}{m \cdot ℃}$.

O'zgaruvchan issiqlik o'tkazuvchanlikga ega bo'lsin

Temperatura , ℃	0	250	800	1000
Issiqlik o'tkazuvchanlik , $\frac{Vt}{m \cdot ℃}$	51, 9	46,9	24,8	26,9

7



Назорат саволлари

1. **С**онли усуллар,
2. Чекли айирмали тенгламалар
3. Чекли элементлар усули
4. Дастурлаш технологиялари,
5. Объектга йўналтирилган дастурлаш технологияси,
6. C# дастурлаш тили,
7. Амалий пакетлар мажмуаси
8. ANSYS амалий пакети,
9. MATHLAB амалий пакети
10. Визуаллаштириш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади: маърузалар, амалий машғулотларида ҳисоблаш усуллари фанларни ўқитиш методикаси соҳасидаги янги маълумотлар, замонавий техника ҳамда технологиялар билан таништириш, назарий билимларини мустаҳкамлаш.

Ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, график органайзерлардан, кейслардан фойдаланиш, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, блиц-сўровлардан, синквейн ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

1-кичик-кейс. "Термоэластик масалаларни сонли ечишга доир мулоҳаза".

Муаммонинг қўйилиши: Чекли айирмали тенгламаларни итерация усули ёрдамида сонли ечиш усулини тушинтиринг.

1. Тингловчилардан олинган жавоблар қуйидагича:

Тенглама ва чегаравий шартлардаги ҳосилаларни чекли айирмали муносабатлар билан алмаштириш керак. Уларни Гаусс методи ёрдамида сонли ечиш зарур ва олинган натижалар тенгламани қаноатлантиради.

2. Тингловчилардан олинган жавоблар қуйидагича:

Чекли айирмали муносабатлар ёрдамида дифференциаль тенглама изланувчи функциянинг тугун нуқталардаги қийматларига нисбатан алгебраик тенгламалар системасига келтирилади. Хосил бўлган чекли айирмали тенгламалар изланувчи функциянинг марказий тугун нуқталарига нисбатан ечиб олинади ва бу ифода асосида кетма-кет яқинлашиш жароёни ташкил этилади.

Нима учун бундай жавоблар келиб чиқди ва унинг сабабини, вазиятдан чиқиш йўлини кўрсатинг.

2-кичик-кейс. “Эластик-пластик маслаларни сонли ечишда кетма-кет яқинлашиши усулини қўллаш бўйича мулоҳаза”.

Муаммонинг қўйилиши: Чизиқли бўлмаган пластик масалларни ечишга ўрганилган итерация усули билан ечиш термоэластик масалани сонли ечишдан нима билан фарқ қилади қилади?

1. Тингловчилардан олинган жавоблар қуйидагича:

Чизиқли дифференциаль тенгламаларни ечиш усулини чизиқсиз тенгламаларга хам қўллаш мумкин. Бунинг учун, тенгламанинг чизиқсиз қисмини ажратиб олиш зарур ва уни тенгламанинг ўнг томони сифадида қараб, итерация жароёнини ташкил этиш мумкин.

2. Тингловчилардан олинган жавоблар қуйидагича:

Пластик масаларни ечишни, термоэластик масалани сонли ечиш усулига ўхшаш усул ёрдамида амалга ошириш мумкин. Фарқи, пластик масаларда чизиқсиз қисм, пластик зонага ўтиш шарти асосида тенгламада инобатга олинади.

Нима учун бундай жавоблар келиб чиқди ва унинг сабаби нимада? Вазиятдан чиқиш йўлини кўрсатинг.

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ.

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни.

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган холда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
-тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ.

1. Туташ муҳит механикаси масалаларининг қўйилиши ҳақида. Бошланғич ва чегаравий шартлар.

2. Эйлер харакат тенгламасини чекли айирмали усул ёрдамида сонли ечиш.

3. Навье-Стокс тенгламасини чекли айирмали усул ёрдамида сонли ечиш

4. Деформацион назария асосида пластик масаланинг қўйилиши.

5. Оқим пластиклик назарияси

6. Юкланиш сирти деформациялар фазосида бўлган оқиш назариялари.

7. Толали композитларни чизиқли деформацияланиш жароёнини сонли моделлаштири ш

8. Туташ муҳитнинг ноклассик моделлари.

9. Эластик-пластик муҳитлар**.**

МУСТАҚИЛ ИШ ТОПШИРИҚЛАРИ

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни.

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган холда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мустақил таълим мавзулари:

1. Лаплас тенгламасини чекли айирмали усул ёрдамида сонли ечиш
2. Иссиқлик тарқалиши масаласини сонли ечиш
3. Термоэластик масала учун чекли айирмали тенгламалар қуриш.
4. Боғлиқ термоэластик масаланинг қўйилиши.(1 ўлчовли хол)
5. Изотроп жисмлар учун деформацион назария
6. Трансверсаль изотроп жисмлар учун деформацион назария

VII. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
Чекли айирмали усул	Тўрган нисбатан ҳосилаларни чекли айирмалар билан алиштириш	Finite difference relations, derivatives replaces with a finite differences
Чекли элементлар усули	Соҳани учбурчак, туртбурчак, тетраэдр ва параллелепипедлар кўринишидаги чекли элементлар билан зич бўлакларга ажратиш ва хосил бўлган тугун нуқталарга нисбатан алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қилиш	Cover the considered area with finite elements in the form of triangle, rectangle, tetrahedron and parallelepipeds.
Чегаравий элементлар усули.	Соҳада қаралаётган дифференциаларни соҳанинг чегарасида берилган интеграл тенгламалар билан алмаштириш ва сонли ечиш	The considered differencial equations replaces with a integral equatins defined on the boundaru of the domain in with given differencial equation
анизотроп жисмлар	хусусиятлари барча йўналишларда турлича бўлган муҳит	Proporties depend on the considered directions in the body.
Эластик жисмлар	Чизиқли деформацияланувчи жисмлар	Solids with linear strains. time
Аппроксимация, турғунлик ва яқинлашиш	Чекли айирмали тенгламаларни(схемаларни) ечимларининг аниқ ечимга интилишини таминовчи шартлар	Approxiation, stability and convergence rovides approximation to the exact solution

Умумлашган Гук қонуни	анизотроп жисмлартнинг чизиқли деформацияланиш жароёнини ифодалайдиган қонун	The Hooks love describe the linear deformation process of anisotropic materials
Пластик деформация	Чизиқсиз деформацияланиш жароёнида хосил бўладиган қолдиқ деформация.	Residual deformation occurs during plastic deformation process

VI. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ:

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-жилд. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 592 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-жилд. Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 507 б.
4. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.
5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тикланишдан – миллий юксалиш сари. 4-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2020. – 400 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.
7. Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда қабул қилинган “Таълим тўғрисида”ги ЎРҚ-637-сонли Қонуни.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.
9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.
10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.
11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.
12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.
13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.
14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 29 октябрь “Илм-фанни 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-6097-сонли Фармони.

17. Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2020 йил 25 январдаги Олий Мажлисга Мурожаатномаси.

18. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрь “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарори.

Ш. Махсус адабиётлар

1. Bruce R. Munson, Alric P. Rothmayer, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 2017. 792p.

2. Charlie Brau Notes on Analytical Mechanics. 2005. 12. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. 3-изд. М.: Физматмех, 2005. 17

3. Chung T.J. Computational Fluid Dynamics. - Cambridge University Press, 2002 (1012p).

4. Grant R. Fowles and George L. Cassiday. Analytical Mechanics. Brooks Cole. USA, 2014.

5. Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko. Classical Mechanics. Classical Mechanics. USA, 2013.

6. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

7. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

8. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

9. Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation Butterworth, Washington, D.C. 2013.

10. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

11. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.

12. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

13. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.

14. Massey B., Ward-Smith J. Mechanics of Fluids. Solutions Manual Eighth edition. - Taylor &. Francis, 2016.

15. N.A.Korshunova and D.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics», (AIAA, USA), 2014, V.37, №5, P.1716-1719

16. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.
17. Robert D. Zucker, Oscar Biblarz Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, 2002. 512p.
18. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.
19. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
20. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.
21. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.
22. Азимов Д.М., Коршунова Н.А Ҳаракатнинг устуворлик назарияси бўйича танланган маърузалар. - Учебное пособие. - Ташкент, Университет, 2005.
23. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.
24. Гулобод Қудратуллоҳ қизи, Р.Ишмуҳамедов, М.Нормуҳаммедова. Анъанавий ва ноанъанавий таълим. – Самарқанд: “Имом Бухорий халқаро илмий-тадқиқот маркази” нашриёти, 2019. 312 б.
25. Ибраймов А.Е. Масофавий ўқитишнинг дидактик тизими. методик қўлланма/ тузувчи. А.Е. Ибраймов. – Тошкент: “Lesson press”, 2020. 112 бет.
26. Ишмуҳамедов Р.Ж., М.Мирсолиева. Ўқув жараёнида инновацион таълим технологиялари. – Т.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 б.
27. Кирянов Д. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.
28. Муслимов Н.А ва бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: “Sano-standart”, 2015. – 208 б.
29. Игнатова Н. Ю. Образование в цифровую эпоху: монография. М-во образования и науки РФ. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf
30. Олий таълим тизимини рақамли авлодга мослаштириш концепцияси. Европа Иттифоқи Эрасмус+ дастурининг кўмагида. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf
31. О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бу-гакова и др. М – Книга 16 / Современные образовательные технологии: педагогика и психология: Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf
32. Тураев Х. Ҳаракатнинг турғунлик назарияси. - СамГУ, 2004.
33. Усмонов Б.Ш., Ҳабибуллаев Р.А. Олий ўқув юртларида ўқув жараёнини кредит-модуль тизимида ташкил қилиш. Ўқув қўлланма. Т.: “Tafakkur” нашриёти, 2020 й. 120 бет.

IV. Интернет сайтлар

34. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим

вазирлиги
35. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси
36. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази
37. http://ziyonet.uz – Таълим портали ZiyoNET
38. http://natlib.uz – Алишер Навоий номидаги Ўзбекистон Миллий кутубхонаси

I.