ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“Механикада математик моделлаштириш” модули бўйича

Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тошкент – 2021

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 7 декабрдаги 648-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: ЎзМУ, Механика ва математик моделлаштириш кафедраси мудири, ф.-м.ф.д., профессор А.Б.Ахмедов

Тақризчилар: Кимё ва технология институти профессори ф.-м.ф.д. И.Сафаров
ЎзМУ, Механика ва математик моделлаштириш кафедраси профессори, ф.-м.ф.д., А.Холжигитов

Ўқув -услубий мажмуа Ўзбекистон миллий университети Кенгашининг қарори билан нашрга тавсия қилинган (2020 йил 24 декабрдаги № 3 -сонли баѐнномаси)

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Дастур Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда тасдиқланган “Таълим тўғрисида”ги Қонуни, Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сон, 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сон, 2019 йил 8 октябрдаги “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармонлари ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарорларида белгиланган устувор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини такомиллаштиришни мақсад қилади.

Дастур доирасида берилаётган мавзулар таълим соҳаси бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш мазмуни, сифати ва уларнинг тайёргарлигига қўйиладиган умумий малака талаблари ва ўқув режалари асосида шакллантирилган бўлиб, унинг мазмуни кредит модул тизими ва ўқув жараёнини ташкил этиш, илмий ва инновацион фаолиятни ривожлантириш, педагогнинг касбий профессионаллигини ошириш, таълим жараёнига рақамли технологияларни жорий этиш, махсус мақсадларга йўналтирилган инглиз тили, мутахассислик фанлар негизида илмий ва амалий тадқиқотлар, ўқув жараёнини ташкил этишнинг замонавий услублари бўйича сўнгги ютуқлар, педагогнинг креатив компетентлигини ривожлантириш, таълим жараёнларини рақамли технологиялар асосида индивидуаллаштириш, масофавий таълим хизматларини ривожлантириш, вебинар, онлайн, «blended learning», «flipped classroom» технологияларини амалиётга кенг қўллаш бўйича тегишли билим, кўникма, малака ва компетенцияларни ривожлантиришга йўналтирилган.

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналишининг ўзига хос хусусиятлари ҳамда долзарб масалаларидан келиб чиққан ҳолда дастурда тингловчиларнинг мутахассислик фанлар доирасидаги билим, кўникма, малака ҳамда компетенцияларига қўйиладиган талаблар такомиллаштирилиши мумкин.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

Модулининг мақсади: педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси тингловчиларини тажрибавий натижалар ва назарий маълумотлар асосида олинган қонунлар, постулатлар, гипотезалар ва формулаларни техника ва ишлаб чиқариш объектларида ишлата олишни ўргатиш, турли техникавий масалаларда жисмларнинг мустаҳкамлиги, устиворлиги ва бикирлигини аниқлаш усулларини, ёпишқоқлик ҳусусиятини ҳисобга олган ҳолда суюқлик оқимини газ ҳолатларини ўрганиш ҳисобланади

Модулнинг вазифалари:

мазкур дастур доирасида тингловчиларга туташ муҳитлар механикасининг долзарб муаммоларини аниқлаш, таҳлил қилиш ва уларни ечиш усуллари бўйича назарий билим бериш ва муайян кўникмалар ҳосил қилиш ҳисобланади

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

Модулни ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

- Механика фани ривожининг замонавий босқичларини, курснинг асосий гипотезалари, моделлари, қонунлари, натижалари, туташ муҳитларнинг хусусиятлари, уларда ҳосил бўладиган механик жараёнларни ***билиши*** керак.
- экспериментал тадқиқотлар натижаларига ишлов бериш, уларни таҳлил қилиш ва акс эттириш, хулосалар чиқариш, илмий мақолалар тайёрлаш, тавсияларини ишлаб чиқиш, инновацион фаолиятни ташкил этишб илғор тажрибалардан фойдаланиш, ўз устида ишлаб, фаннинг янги тадқиқотларини ўқитиш тизимини қўллаш;
- классик механикага замонавий қараш, механиканинг замонавий йўналишлари бўйича маъруза, амалий машғулот ва назорат ишларини ташкил этиш, махсус курсни ўзлаштириш жараёнида идеал, ёпишқоқ суюқликлар ва эластик жисмлар, уларнинг ҳаракат тенгламаларини, чегаравий ва бошланғич шартларни билишлари ва шу асосда қўйилган муайян механик масалани еча билиш **кўникмаларига эга бўлишлари керак.**
- Тажрибавий натижалар асосида олинган, амалиётда кенг қўлланиб келинаётган формулаларни техник объектларда ҳисоблашга қўллаш, табиий ва аниқ фанларни турли соҳаларга татбиқ қилиш, механика масалаларини ечишга сонли ҳисоблаш усулларни қўллаш **малакасига эга бўлиши керак**.

- Механикага оид масалаларни ечишда замонавий технологиялар ва усуллардан фойдалана олиш, табиий ва аниқ фанлар соҳасида касбий фаолият юритиш учун зарур бўлган билим, кўникма, малакага эга бўлиш, илғор ахборот-технологияларида ишлаш, видеодарсларни тайёрлаш, эгалланган тажрибани танқидий кўриб чиқиш қобилияти, зарур бўлганда ўз касбий фаолиятининг тури ва характерини ўзгартира олиш, табиий ва аниқ фанларда тизимли таҳлил усулидан фойдаланиш йўлларини ишлаб чиқиш, классик механикага замонавий қараш, компьютер инжинирингига оид замонавий манбалардан фойдалана олиш ***компетенцияларига*** эга бўлиши лозим.

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“Механикада математик моделлаштириш” курси маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий (семинар) машғулотларда техник воситалардан, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

- “Механикада математик моделлаштириш” модули мазмуни ўқув режадаги “Таълимда ахборот-коммуникацион технологиялар” ўқув модули билан узвий боғланган ҳолда механиканинг долзарб муаммолари бўйича педагогларнинг касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

- Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар суюқлик ва газ моделлари, гидротехник иншоотлар, экспериментал аэродинамика, атмосферада ва техниканинг бошқа соҳаларида учрайдиган муаммоларни тадқиқ қилиш йўлларини ўрганиш, уларни таҳлил қилиш ва амалда қўллашга касбий компетентликка эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти

№	Модуль мавзулари	Аудитория укув юкламаси			
		Жами	Жумладан		
			Назарий	Амаий машғулот	Кўчма машғулоти
1.	Замонавий механикада математик моделлаштиришнинг фундаментал асослари.	6	2	4	
2.	Туташ мухитларнинг турли моделлари.	6	2	4	
3	Термодинамика. Туташ мухитларда тўлқин тарқалиши ва акустикада ва астрофизикада қўлланилиши Термогидравлика. Электромагнит эластиклик. Максвел тенгламалари. Атмасфера ва океан динамикаси.	6	2	4	
	Жами:	**18**	**6**	**12**	

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-мавзу. Замонавий механикада математик моделлаштиришнинг фундаментал асослари (2 соат).

1.1. Асосий постулатлар ва гипотезалар. Массанинг сақланиш қонуни. Узуликсизлик тенгламаси. .

1.2. Деформация тензори компоненталарини кўчиш орқали ифодалаш. Грин ва Альманси тензорлари

1.3. Сирт ва ҳажмий кучлар. Кучланиш тензори. Ҳаракат микдорининг сақланиш қонуни.

2-мавзу. Туташ мухитларнинг турли моделлари (2 соат).

2.1. Идеал суюқлик (газ) модели. Эйлер тенгламалари.Громеке-Лемб тенгламаси

2.2 Ёпишқоқ суюқлик ва эластик жисм моделлари. Гук ва Навье-Стокс қонунлари. Навье-Стокс ва Ламе тенгламалари.

2.3 Композитлар механикасида моделлаштириш. Эффектив модуллар тушунчаси.

3-мавзу. Термодинамика.Туташ мухитларда тўлқин тарқалиши ва акустикада ва астрофизикада қўлланилиши Термогидравлика. Электромагнит эластиклик. Максвел тенгламалари. Атмасфера ва океан динамикаси (2 соат).

3.1. Туташ мухитларда тўлқин тарқалиши ва акустикада ва астрофизикада қўлланилиши.

3.2. Магнитогидродинамика. Термогидравлика. Магнитогидродинамика. Электромагнитэластиклик. Максвел тенгламалари

3.3. Композитлар механикасида моделлаштириш.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-амалий машғулот. Замонавий механикада математик моделлаштиришнинг фундаментал асослари. *Туташ муҳит ҳаракатини тавсифлашда Лагранж ва Эйлер координаталари. Муҳитнинг ҳаракат тенгламаси.Деформация тензори, унинг бош ўқлари ва бош қийматлари. Жисм ҳажмини ўзгариш тезлиги* (4 соат).

2-амалий машғулот. Туташ мухитларнинг турли моделлари. *Идеал суюқлик (газ) модели. Эйлер тенгламалари. Ёпишқоқ суюқлик ва эластик жисм моделлари. Навье-Стокс ва Ламе тенгламалари Туташ идишлардаги суюқликлар механикаси Композитлар механикасида моделлаштириш. Эффектив модуллар тушунчаси* (4 соат).

3-амалий машғулот. Туташ мухитларда тўлқин тарқалиши ва акустикада ва астрофизикада қўлланилиши Термогидравлика. Электромагнит эластиклик. Максвел тенгламалари. Атмасфера ва океан динамикаси (4 соат).

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (кўрилаётган лойиҳа ечимлари бўйича таклиф бериш қобилиятини ошириш, эшитиш, идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);
- баҳс ва мунозаралар (лойиҳалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

Хулосалаш (Резюме, Веер) методи

Методнинг мақсади: Бу метод мураккаб, кўптармоқли, мумкин қадар, муаммоли характеридаги мавзуларни ўрганишга қаратилган. Методнинг моҳияти шундан иборатки, бунда мавзунинг турли тармоқлари бўйича бир хил ахборот берилади ва айни пайтда, уларнинг ҳар бири алоҳида аспектларда муҳокама этилади. Масалан, муаммо ижобий ва салбий томонлари, афзаллик, фазилат ва камчиликлари, фойда ва зарарлари бўйича ўрганилади. Бу интерфаол метод танқидий, таҳлилий, аниқ мантиқий фикрлашни муваффақиятли ривожлантиришга ҳамда ўқувчиларнинг мустақил ғоялари, фикрларини ёзма ва оғзаки шаклда тизимли баён этиш, ҳимоя қилишга имконият яратади. “Хулосалаш” методидан маъруза машғулотларида индивидуал ва жуфтликлардаги иш шаклида, амалий машғулотларида кичик гуруҳлардаги иш шаклида мавзу юзасидан билимларни мустаҳкамлаш, таҳлили қилиш ва таққослаш мақсадида фойдаланиш мумкин.

Методни амалга ошириш тартиби:

тренер-ўқитувчи иштирокчиларни 5-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратади;

тренинг мақсади, шартлари ва тартиби билан иштирокчиларни таништиргач, ҳар бир гуруҳга умумий муаммони таҳлил қилиниши зарур бўлган қисмлари туширилган тарқатма материалларни тарқатади;

ҳар бир гурух ўзига берилган муаммони атрофлича таҳлил қилиб, ўз мулоҳазаларини тавсия этилаётган схема бўйича тарқатма материалга ёзма баён қилади;

навбатдаги босқичда барча гуруҳлар ўз тақдимотларини ўтказадилар. Шундан сўнг, тренер томонидан таҳлиллар умумлаштирилади, зарурий ахборотлр билан тўлдирилади ва мавзу якунланади.

Намуна:

Таҳлил турларининг қиёсий таҳлили					
Тизимли таҳлил		**Сюжетли таҳлил**		**Вазиятли таҳлил**	
Афзаллиги	**камчилиги**	**афзаллиги**	**камчилиги**	**афзаллиги**	**камчилиги**
Муммони келиб чиқиш сабабли ва кечиш жараёнини алоқадорлиги жиҳатидан ўрганиш имкониятига эга	Алоҳида тайёргарликка эга бўлишни, кўп вақт ажратишни талаб этади	Ўз вақтида муносабат билдириш имкониятини беради	Муносабат бошқа бир сюжетга нисбатан қўлланишга яроқсиз	Вазият иштирокчи-ларининг (объект ва субъект) вазифаларини белгилаб олиш имконини беради	Динамик хусусиятни белгилаб олиш учун қўллаб бўлмайди
Хулоса: Таҳлилнинг барча турлари ҳам ўзининг афзаллиги ва камчилиги билан бир биридан фарқланади. Лекин, улар қаторидан педагогик фаолият доирасида қарор қабул қилиш учун					

тизимли таҳлилдан фойдаланиш жорий камчиликларни бартараф этишга, мавжуд ресурслардан мақсадли фойдаланишда афзалликларга эгалиги билан ажралиб туради.

“ФСМУ” методи

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади;
- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

Намуна.

Фикр: *“Тизим атроф муҳитдан ажралган, у билан яхлит таъсирлашувчи, бир-бири билан ўзаро боғланган элементлар мажмуаси бўлиб, тадқиқотлар объекти саналади”.*

Топшириқ: Мазкур фикрга нисбатан муносабатингизни ФСМУ орқали таҳлил қилинг.

“Ассесмент” методи

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур техника орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташхис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби:

“Ассесмент” лардан маъруза машғулотларида тингловчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассесментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

Намуна. Ҳар бир катакдаги тўғри жавобни баҳолаш мумкин.

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-МАВЗУ. ЗАМОНАВИЙ МЕХАНИКАДА МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШНИНГ ФУНДАМЕНТАЛ АСОСЛАРИ.

1.4. Асосий постулатлар ва гипотезалар. Массанинг сақланиш қонуни. Узуликсизлик тенгламаси. .

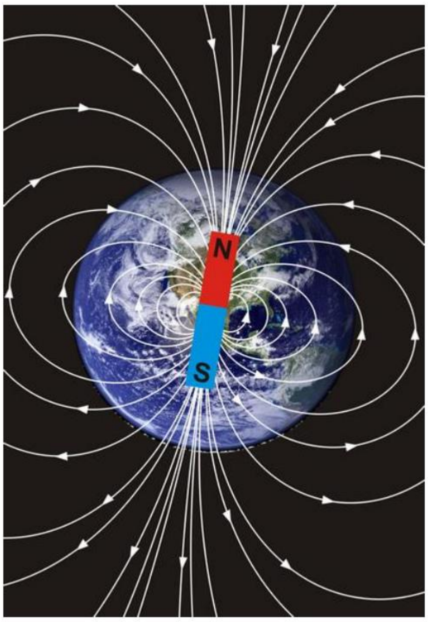
1.5. Сирт ва ҳажмий кучлар. Ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни.

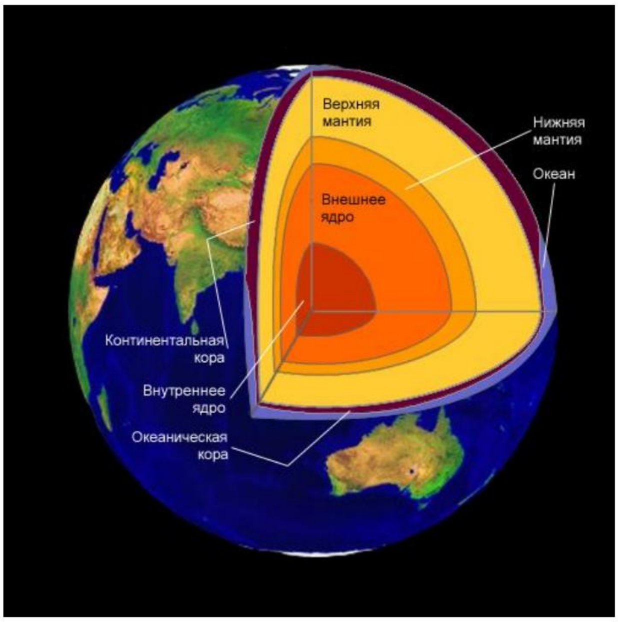
1.6. Деформация тензори компоненталарини кўчиш орқали ифодалаш. Грин ва Альманси тензорлари.

Таянч сўзлар: *Туташ муҳит , газ, суюқлик, механика, постулат, узуликсизлик, масса, зичлик, Эйлер ўзгарувчилари, Лагранж координаталари, ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни, мувозанат тенгламалари.*

1.1. Асосий постулатлар ва гипотезалар. Массанинг сақланиш қонуни. Узуликсизлик тенгламаси

Туташ муҳит механикаси (ТТМ) да газ, суюқлик ва деформацияланувчи қаттиқ жисмларнинг макроскопик ҳаракати ўрганилади. Ушбу фан фундаментал тушунчалар, постулатлар ва қонунлар асосида моделлаштирилган. ТММ асосида қаралаётган турли жисмлар фазонинг бирор чекли ёки чексиз қисмини туташ ҳолатида эгаллаган деб ҳисобланади, бошқача қилиб айтганда ТТМ молекуляр даражада жисмнинг физик ҳолатини ўрганмайди. Бу эса ўрганилаетган жароёнларни тавсифловчи функциялар узиликсизлигини таъминлайди. Жисм фазонинг эгаллаган қисмини тўла қоплаши ҳақидаги фикр ТММнинг асосий тушунчаси ҳисобланади.





Жисмлар ташқи таъсир натижасида ўз ўлчами ва шаклини ўзгартиради ва фикран ажратиб олинган элементар ҳажмда кучлар, зўриқишлар, босимлар, чўзилишлар, сиқилашлар ва силжишлар каби механик миқдорлар пайдо бўлади. Ушбу миқдорлар фақат ташқи таъсиргагина боғлиқ бўлмай балки, жисмнинг шаклига, унинг физик ҳоссаларига ҳам боғлиқ бўлади. Ушбу қонуниятларни очиш, ўзаро боғланишини аниқлаш ТММнинг асосий вазифаси ҳисобланади.

Туташ муҳитлар турли сабаблар билан фазода ҳаракатланиши мумкин, ушбу ҳаракатланиш моддий нуқталар орасидаги масофани ўзгариши билан аниқланади. Бу ерда шуни яққол кўриш мумкинки, туташ муҳит тушунчасини киритмай яхлит жисмни тассавур этиш мумкин эмас, лекин моддий нуқта ташқи таъсир натижасида ҳаракатланганда улар орасидаги масофа ўзгаради, яъни муайян “бўшлиқ” ҳосил бўлади. Иккинчи томондан микроскопик даражада муайян “бўшлиқ”лар ҳамиша мавжуд, лекин улар макроскопик даражада сезилмайди.

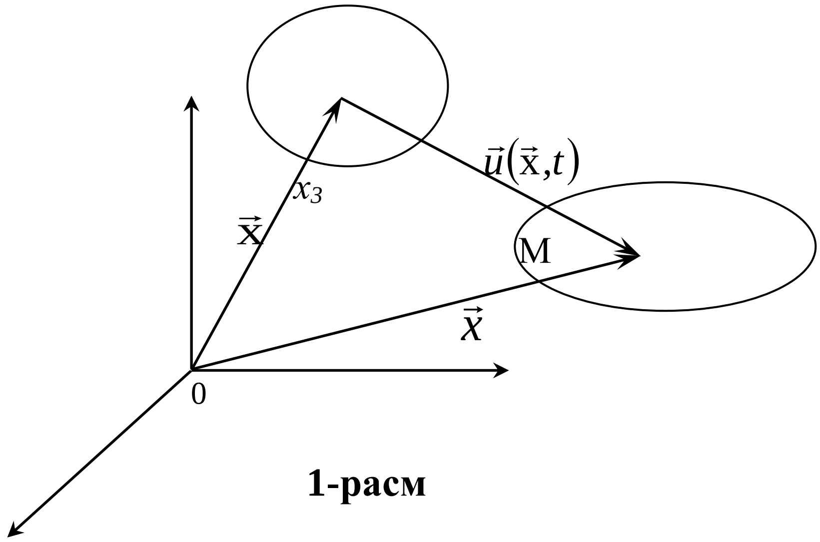
Туташ муҳитдаги муайян вақт оралигида нуқталар ҳаракати фазода амалга ошиpалади. Фазони координаталар деб аталувчи нуқталар тўплами аниқлайди. Агар фазода икки нуқта орасидаги масофа аниқланган бўлса ушбу фазо метрик фазо деб аталади. Метрик фазода икки нуқта орасидаги масофа $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ бўлса, Евклид фазоси ҳосил бўлади. Евклид фазосида Декарт координата системасини муомилага киритиш мумкин. Ушбу фазода биз Ньютон механикасини ўрганамиз. Евклид фазосинининг ихтиёрий геометрик нуқтасида туташ муҳит мавжуд бўлади.

ТММда ихтиёрий координата системалари учун бир хил бўлган абсолют вақт билан иш кўрамиз. Шундай қилиб ТММнинг континиум ҳаракати Евклид фазосида абсолют вақтда ўрганилади.

ТММ да математик-тахлил усулари ўринлидир, яъни механик масала маълум математик масалани ечишга келтирилади ва олинган ечим тажрибаларда текширилади. Назария билан тажриба бир-бирини тўлдиради.

1.2. Лагранж ва Эйлер координаталарида туташ муҳит ҳаракатини тавсифлаш*;*

Туташ муҳит ихтиёрий нуқталарининг t_0 - дастлабки пайтдаги ҳолатини $\vec{X}(X^1, X^2, X^3)$ координаталар орқали ва ихтиёрий $t \geq t_0$ моментидаги координаталар $\vec{x}\{x^1, x^2, x^3\}$ лар билан белгилайлик. Туташ муҳитнинг t_0 моментда эгаллаган τ_0 ҳажми $t \geq t_0$ моментда τ ҳажмга ўзгаради (1-расм).



1-расм

x_1

x_2

Шундай қилиб:

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}\{X^1, X^2, X^3, t\}, \ (\alpha = 1,2,3) \qquad (1.3)$$

ёки вектор кўринишида :

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t) \qquad (1.4)$$

бошланғич $\vec{X}$ координаталари орқали ифодаланган моддий нуқтанинг ҳаракат қонунига эга бўламиз. Лекин бу қонуният жисм бирга ҳаракатланаётган ҳамроҳ $ox_1x_2x_3$ координаталари орқали ифодаланди. Агар биз ушбу қонуниятни бошланғич ва қўзғолмас координаталар $OX_1X_2X_3$

орқали ифодалашимиз зарур бўлса, $\vec{x}$ ва $\vec{X}$ лар ўртасида ҳар бир $t \geq t_0$ учун бир қийматли акслантиришни таъминлаш шарти бажарилиши зарур, яъни қуйидаги якобиан нолдан фарқли бўлиши зарур:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial X^1} & \frac{\partial x^1}{\partial X^2} & \frac{\partial x^1}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial X^1} & \frac{\partial x^2}{\partial X^2} & \frac{\partial x^2}{\partial X^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial X^1} & \frac{\partial x^3}{\partial X^2} & \frac{\partial x^3}{\partial X^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

У ҳолда, (1.4) ўрнига: $\vec{X} = \vec{X}(\vec{x}, t)$ яъни:

$$\begin{aligned} X^1 &= X^1\{x^1, x^2, x^3, t\} \\ X^2 &= X^2\{x^1, x^2, x^3, t\} \\ X^3 &= X^3\{x^1, x^2, x^3, t\} \end{aligned} \qquad (1.5)$$

эга бўламиз, ва аксинча (1.5) дан (1.4) га ўтиш учун, вақтнинг қаралаётган $t = t_0$ моментида:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \frac{\partial X^1}{\partial x^2} & \frac{\partial X^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^2}{\partial x^1} & \frac{\partial X^2}{\partial x^2} & \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^3}{\partial x^1} & \frac{\partial X^3}{\partial x^2} & \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

шарт бажарилиши зарур.

Туташ муҳит моддий нуқталарининг ихтиёрий траекториядаги ҳаракатлари учун юқорида келтирилган якобианлар вақтнинг айрим $t \geq t_0$онларида нолга ҳам тенг бўлиши мумкин. Бундай нуқталар критик нуқталар ёки киритик нуқталар тўплами деб аталади. Туташ муҳитлар механикасида якобианлар нолдан фарқли деб ҳисобланади. Якобианлар нолга тенг бўлган ҳусисий ҳоллар алоҳида ўрганилади. Шаклга кўра (2-расм):

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \qquad (1.6)$$

ва $\vec{u}(X^1, X^2, X^3, t)$ кўчиш вектори дейилади. Ихтиёрий M модий нуқта ҳаракатланаётган пайтда, $\vec{X}$ координаталари вақтга боғлиқ эмас, демак моддий нуқта тезлиги вақтнинг t моментида қуйидагича аниқланади:

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \qquad (1.7)$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \tag{1.8}$$

$$\vec{W} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} \tag{1.9}$$

Шундай қилиб $\vec{u}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ лар $\vec{X}$ ва t ларга боғлиқ бўлди:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}\left\{X^1, X^2, X^3, t\right\} \\ \vec{V} &= \vec{V}\left\{X^1, X^2, X^3, t\right\} \\ \vec{W} &= \vec{W}\left\{X^1, X^2, X^3, t\right\} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Юқорида фойдаланилган $\vec{X}$, t лар Лагранж координаталари дейилади. Ушбу координата системасида моддий нуқтанинг вақтнинг ихтиёрий моментида ги ҳолати унинг дастлабки ҳолати орқали аниқланади.

1.2 Муҳитнинг массаси ва зичлиги. Массанинг сақланиш қонуни. Узиликсизлик тенгламаси.

Берилган координата системасида вақт бўйича ҳаракатланувчи ва инерцияси билан характерланувчи жисмга моддий жисм деб аталади. Жисм инерцияси унинг массаси орқали характерланади. Жисмнинг умумий массаси элементар ҳажмда жойлашган жисм бўлаги массаларининг йиғиндиси сифатида қаралади. Ихтиёрий жисм вақтнинг исталган моментида масса ўзгармасдир – бу **массанинг сақланиш қонунидир**. Агар бирор жисм массасини m десак,

$$m = const \text{ ёки } \frac{dm}{dt} = 0$$

тенгламага эга бўламиз.

Туташ муҳит $\Delta\tau$ ҳажмда Δm массага эга бўлсин. У ҳолда ушбу жисм учун ўртача зичлик $\rho_{o'rt.}$ тушунчасини киритишимиз мумкин:

$$\rho_{o'rtacha} = \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$$

Жисмнинг ихтиёрий моддий нуқтасининг зичлиги қуйидагича аниқланади:

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}.$$

Чексиз кичик ҳажм учун масса қуйидагича аниқланиши мумкин: $\Delta m \approx \rho \cdot \Delta\tau$. Умумий ҳажм учун масса қуйидагича аниқланади:

$$m = \int_{\tau} \rho\left(x^1, x^2, x^3, t\right) d\tau$$

Эйлер координатасида аниқланган ҳажм учун массанинг сақланиш қонуни қуйидаги муносабатни ҳосил қилади:

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{\upsilon})\right) d\tau$$

Бундан ихтиёрий нуқта учун

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{\upsilon}\right) = 0$$

Ёки вақт бўйича тўла дифференциал кўринишида

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div\vec{\upsilon} = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ушбу тенглама Эйлер координаталаридаги узуликсизлик тенгламаси деб аталади. Массанинг сақланиш қонунинг қуйидаги хусусий ҳолларини қараймиз:

1. Зичлик вақтга боғлиқ эмас:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,\ div\left(\rho\vec{\upsilon}\right) = 0.$$

2. $\rho = const$:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,\ div\vec{\upsilon} = 0.$$

Охирги тенглама сиқилмайдиган муҳит учун узиликсизлик тенгламасидир.

1.3. Деформациялар тензори Грин ва Альманси тензорлари

Ихтиёрий нуқта атрофи деформацияси маълум бўлиши учун шу нуқтада олинган ихтиёрий йўналишдаги чексиз кичик $\vec{X}_N(\vec{X}+\vec{\xi})-\vec{X}_M(\vec{X})$ $=d\vec{X}=\vec{\xi}$ нинг қиймати маълум бўлиши зарур ва етарлилиги геометрик нуқтаи назардан равшандир. Яъни $t=t_0$ да

$$(d\vec{X})^2=(\vec{\xi})^2=\xi^i\xi^j\cdot\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\dot{g}_{ij}\,dX^i\cdot dX^j$$

Лекин $t=t_0$ да тўғрибурчакли Декарт координаталар системаси учун $\dot{g}_{ij}=\delta_{ij}$ бўлгани туфайли $(d\vec{X})^2=\xi^i\xi^j\cdot\delta_{ij}$ бўлади. Маълумки:

$$(\vec{x})_M=\vec{x}(X^i,t)$$
$$(\vec{x})_N=\vec{x}(X^i+\xi^i,t)$$

Лекин $\vec{\rho}=(\vec{x})_N-(\vec{x})_M$ ни X^i нуқта атрофида қаторга ёйсак, қуйидагини топамиз:

$$\vec{\rho}=\frac{\partial\vec{x}}{\partial X^k}\xi^k=\frac{\partial\vec{x}}{\partial X^i}dX^i+.....$$

Кўп нуқталар билан кўрсатилган ҳадлар биринчи ҳадга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик ўзгарувчилар деб олсак ва $\vec{Э}_k=\frac{\partial\vec{x}}{\partial X^k}$ Лагранж координаталарига боғлиқ ифодалигини эслаб ёза оламиз:

$$\vec{\rho}=\vec{Э}\cdot dX^k=\vec{Э}_k\cdot\xi^k$$

Демак, $t=t_0$ даги $\vec{\xi}=\xi^k\cdot\vec{e}_k$ тола $t\geq t_0$ да $\vec{\rho}=\xi^k\cdot\vec{Э}_k$ бўлади.

$\vec{\rho}=\frac{\partial\vec{x}}{\partial X^k}\xi^k$ дан $\rho^i=\frac{\partial x^i}{\partial X^k}\cdot\xi^k$ орқали бу алмаштиришда $A_k^i=\frac{\partial x^i}{\partial X^k}$ матрица $\vec{\xi}$ ни $\vec{\rho}$ га кўрилаётган нуқта атрофида аффин (чизиқли) алмаштиради. Уни $\vec{\rho}=\tilde{A}\vec{\xi}$ сифатида ёзиш мумкин.

Юқоридаги хоссалар асосида кўриш қийин эмаски, $\vec{\xi}$ тола (вектор) $\vec{\rho}$ толага (векторга) ўтади. Масалан, $\xi^i\cdot\xi^i=R^2$ сфера $B_k^i\cdot B_j^i\cdot\rho^k\cdot\rho^j=R^2$ эллипсоидга ўтади.

Шундай қилиб, биз юқорида

$$\vec{\xi} = \xi^k \cdot \vec{e}_k \to \vec{\rho} = \xi^k \cdot \vec{э}_k \quad \left(\vec{э}_k = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^k} \right)$$

ифодаларни ҳосил қилдик. Ёза оламиз:

$$\vec{\xi}^2 = \vec{\xi} \cdot \vec{\xi} = \xi^2 = \delta_{ij} \cdot \xi_i \cdot \xi_j, \ \left(\delta_{ij} = g_{ij}\Big|_{t=t_0} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \right)$$

$$\vec{\rho}^2 = \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} = g_{ij} \cdot \xi_i \xi_j, \qquad \left(g_{ij} = \vec{э}_i \cdot \vec{э}_j \right)$$

$$\rho^2 - \xi^2 = \left(g_{ij} - \delta_{ij} \right) \cdot \xi^i \cdot \xi^j$$

Энди тола учун қуйидаги нисбий ўзгаришни характерловчи миқдорни

$$e_\xi = \frac{\rho - \xi}{\xi} = \frac{\rho}{\xi} - 1$$

ва

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - \delta_{ij} \right) \qquad (1.11)$$

ранги иккидан иборат тензор элементлари ифодасини киритайлик. У ҳолда:

$$\rho^2 - \xi^2 = 2\varepsilon_{ij} \cdot \xi^i \cdot \xi^j$$

ва

$$\frac{\xi^i}{\left| \vec{\xi} \right|} = l^i$$

десак,

$$\frac{\rho^2 - \xi^2}{\left| \vec{\xi} \right|^2} = 2\varepsilon_{ij} \cdot l^i \cdot l^j$$

бўлади.

У ҳолда

$$e_\xi = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ij} \cdot l^i \cdot l^j} - 1$$

га эга бўламиз.

ε_{ij} метрик тензорлар элементлари орқали ифодаланганлиги туфайли, шубҳасиз тензор элементлари бўла олади ва уни э билан белгилаймиз:

$$E = \varepsilon_{IJ}\left(\vec{\text{Э}}^{I} \otimes \vec{\text{Э}}^{j}\right) \qquad (1.12)$$

(1.12) билан бирга кўрилаётган Лагранж координаталарида ушбу $E = \varepsilon^{ij}\left(\vec{\text{Э}}_i \otimes \vec{\text{Э}}_j\right)$, $E = \varepsilon^{i}_{\cdot j}(\vec{\text{Э}}_i \otimes \vec{\text{Э}}^{j})$ ларга ҳам эга бўламиз.

Бу тензор деформация тензори дейилади ва туташ муҳит нуқтаси атрофи деформациясини аниқлайди.

Шундай қилиб, (1.11) формула Лагранж координаталарида аниқланди ва ихтиёрий дастлабки $t = t_0$ да олинган $\vec{X} = X^k \cdot \vec{e}_k$ нуқтадаги чексиз кичик $\vec{\xi}$ тола (ўзаро ортогонал координаталар системасида аниқланган) $\vec{\rho} = \xi^i \cdot \vec{\text{Э}}_i$ тола бўлиб ўзгаради. Ўзаро ортогонал бирлик базис e_i векторлар умумий ҳолда $\left|\vec{\text{Э}}_i\right| \neq 1$ га мос равишда ўтади. Ихтиёрий $t \geq t_0$ учун $\vec{\text{Э}}_i$ лар Лагранж координаталарида аниқланади ва нуқта кўчган янги ҳолат учун ўзаро ортогонал бўлиши шарт бўлмаган базис векторларни ташкил этади. Агар дастлабки $\left(t = t_0\right)$ да нуқта атрофида олинган тола учун $\vec{e}_i$ базислар ўзаро ортогоналлиги $t \geq t_0$ да ҳам сақланса ва уларнинг узунликлари (улар бирга тенг) ҳам сақланса, кўрилаётган туташ муҳит зарраси деформацияланмайди ва у абсолют қаттиқ жисм учун олинган $\vec{\xi}$ тола каби фазода Лагранж координаталарида илгарилама ва айланма ҳаракатни (ёки улар йиғиндиси бўлган винт ҳаракатини) содир этиши мумкин. У ҳолда $t = t_0$ да олинган $\dot{g}_{ij}$ (бу ифода хусусий ҳолда, биз кўргандек $\dot{g}_{ij} = \delta_{ij}$ бўлиши мумкин ва бундай олиниши Евклид фазосида умумийликка зид эмас) $\dot{g}_{ij}$ га тенг бўлганича (ёки δ_{ij} бўлганича) қолади ва деформация содир бўлмайди.

Тўғри бурчакли Декарт координаталар системаси амалда кўп ишлатилиши туфайли деформация тензори E нинг ε_{IJ} элементларини кўчиш вектори $\vec{u}(\vec{X},t)$ орқали ифодасини келтириш мақсадга мувофиқдир. ε_{IJ} ларнинг кўчиш вектори компоненталари орқали Лагранж координаталарда ифодалаймиз. Бунинг учун олдинги параграфда келтирилган формулаларда $\dot{g}_{ij} = \delta_{ij}$ эканлигини назарда тутиб, изланаётган ифодалар формулаларини хусусий ҳол сифатида ёза олишимиз мумкин. Лекин биз бу ерда изланаётган формулаларни оддий ҳисоблашлар орқали келтирамиз. Маълумки:

$$\varepsilon_{IJ} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \delta_{ij})$$

$$g_{ij} = (\vec{\text{э}}_i \cdot \vec{\text{э}}_j),\ \vec{\text{э}}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i}\left\{\frac{\partial x^1}{\partial X^i}, \frac{\partial x^2}{\partial X^i}, \frac{\partial x^3}{\partial X^i}\right\}$$

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u},\ \vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

Ёза оламиз:

$$\frac{\partial x^k}{\partial X^i} = \frac{\partial X^k}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k(X^1, X^2, X^3, t)}{\partial X^i} = \delta_{ki} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i}$$

Бундан:

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i}\frac{\partial \vec{x}}{\partial X^j}\right) = \left(\frac{\partial x^k}{\partial X^i}\frac{\partial x^k}{\partial X^j}\right) =$$

$$= \delta_{ki} \cdot \delta_{kj} + \delta_{ki} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j} + \delta_{kj} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j} =$$

$$= \delta_{ij} + \frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j}$$

Бу ифодани ε_{IJ} ифодасига қўйиб топа оламиз:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u^i}{\partial X^j} + \frac{\partial u^j}{\partial X^i} + \frac{\partial u^k}{\partial X^i} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial X^j}) \qquad (1.13)$$

(1.12) формула кўчиш векторининг Лагранж координаталари орқали ифодалаш орқали олинганлиги туфайли уни Гриннинг чекли деформация тензори деб ҳам аталади. Чекли деформациянинг Эйлер координаталаридаги ифодаси (1.11) асосида олинади ва унинг ифодаси Декарт координаталарида қуйидагича бўлади:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}) \qquad (1.14)$$

Ушбу тензор Алмансининг чекли деформация тензори. (1.13) ва (1.14) формулалар туташ муҳит ихтиёрий нуқтасидаги мазмун жиҳатдан ягона бўлган деформация ўлчовларининг мос равишда Лагранж ва Эйлер координаталаридаги ифодаларидир, уларни, юқорида таъкидлангандек, L_{ij} va E_{ij} деб ҳам белгиланади.

Туташ муҳит гипотезасига асосланган ҳаракатда мужассамланган кучлар тушунчаси, аслида, айрим сирт бўлаги ёки маълум ҳажмдаги туташ муҳитга таъсир этади, деб қараш ўринлидир.

Δm массали элементга таъсир этувчи куч бош вектори $\Delta\overrightarrow{F}$ бўлсин дейлик. У ҳолда

$$\Delta\vec{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{F}}{\Delta m}$$

олинган нуқтадаги ***массавий куч зичлиги*** дейилади (лимит олинганда нуқта ҳамма вақт Δm ни ўз ичига олган ҳажмга тегишлидир).

$$\Delta\vec{\Phi} = \lim_{\Delta \tau \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{F}}{\Delta \tau}$$

ҳажмий куч зичлиги дейилади.

Чексиз кичик $\Delta\tau$ ҳажмдаги Δm массали муҳит учун $\Delta\overrightarrow{F} = \vec{\Phi}\Delta\tau$ ва $\Delta\overrightarrow{F} = \vec{F}\Delta m$ бўлади.

Бундан $\vec{\Phi} = \rho\vec{F}$ бўлади.

Юқорида айтганимиздек, ТММда сирт кучлари ҳам кўрилади ва у асосий тушунчалардан бири ҳисобланади. Туташ муҳитга тегишли сиртни олайлик. Бу сирт туташ муҳит айрим зарралари геометрик ўрни ёки муҳитни чегараловчи сирт ҳам бўлиши мумкин. Шу сирт орқали ҳар бир он учун сиртнинг бир томонидаги муҳит иккинчи томонига таъсир этади. Агар бу таъсир ички Σ сирти учун кўрилаётган бўлса, бундай таъсир ички кучланишлар тушунчасига олиб келади.

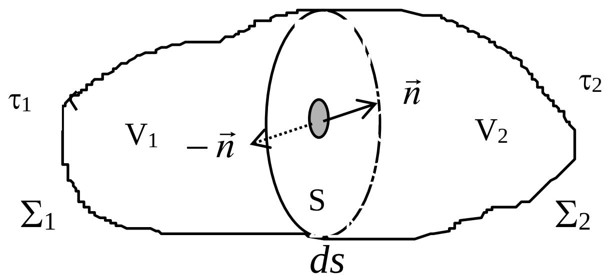
Энди Σ сиртнинг $d\sigma$ элементи учун $d\vec{P} = \vec{p} \cdot d\sigma$ элементар кучни киритамиз. Бунда

$$\vec{p} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta\tau}$$

бўлсин. У ҳолда $\vec{p}$ - сирт кучлари зичлиги дейилади. Равшанки, $\vec{p}$ сиртнинг турли нуқталарида турлича ва $\Delta\sigma$ элемент олинган нуқтадан ўтувчи ихтиёрий бошқа Σ сиртлар учун ҳам бир-биридан фарқ қилади.

Сўнгги фикрни равшанлаштириш учун қуйидагича иш кўрайлик. Туташ муҳитга тегишли бўлган V ҳажмни фикран Σ кесим билан V_1 ва V_2 ҳажмларга ажратайлик (2-расм).

Бу Σ кесимга тегишли *M* нуқта ва уни ўз ичига олган $d\sigma$ элементар юза бўйлаб V_1 ва V_2 ҳажмдаги туташ муҳитларнинг ўзаро таъсири кучини ўрганайлик. Кўриш қийин эмаски, ихтиёрий танланган *M* нуқтадан бошқа турлича жойлашган Σ сиртларни ва уларда жойлашган чексиз кўп элементар $d\sigma$ юзаларни тасаввур қилиш мумкин. Олинган ҳар бир конкрет ҳол учун V_1 ҳажмдаги V_2 ҳажмга турли *C* юзалар ва улардаги турлича жойлашган элементар юзачалар орқали сирт кучлари таъсир этади. Бу юзачаларни бир-биридан фарқлаш йўлини тузишдан бири - шу юзачаларга тик бўлган бирлик $\vec{n}$ векторлар олишдир. Демак, олинган *M* нуқта ўз координаталари билан ва улардан ўтувчи Σ юзаларга тегишли элементар юзалар бирлик $\vec{n}$ векторлари билан бир қийматли фарқланади.



2-расм

V_2 ҳажмдаги туташ муҳитнинг V_1 ҳажмдаги туташ муҳитга $d\sigma$ сирти орқали таъсир кучини $d\vec{P}$, сўнгра $d\vec{P} = \vec{P}_n d\sigma$ дейлик. $\vec{P}_n$ M нуқтага, яъни $d\sigma$ нинг ҳолатига боғлиқдир. У ҳолда $\vec{n}$ йўналишининг шаклдаги V_2 нинг V_1 га $d\sigma$ орқали таъсири $\vec{P}_n d\sigma$ га тенг бўлиб, $\vec{n}$ V_1 га нисбатан ташқи томонга йўналган бўлсин. У ҳолда $\vec{P}_n = -\vec{P}_{-n}$ лигини кўриш қийин эмас. Бу формула ички кучланишларнинг асосий хоссаси деб ҳам юритилади.

Ички кучланиш $\vec{P}_n$ чекли миқдор ва уни $d\sigma$ элементар юзага нормал бўлган $\vec{n}$ ва унга бирор тик йўналишда бўлган ва шу юза бўйлаб таъсир этадиган уринма йўналиши $\vec{\tau}$ га проекциялаш мумкин:

$$\vec{P}_n = P_{nn} \cdot \vec{n} + P_{n\tau} \cdot \vec{\tau}$$

$P_{nn} \cdot \vec{n}$ - нормал кучланиш, $P_{n\tau} \cdot \vec{\tau}$ - уринма кучланиши дейилади.

Энди туташ муҳит ҳаракат миқдори билан танишайлик. Назарий механикадан маълумки, массалари m_i, тезликлари $\vec{\upsilon}_i$ бўлган $н$ та моддий нуқталар системаси учун ҳаракат миқдори

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i$$

дир. Бу тушунчани Σ сиртли, V ҳажмда жойлашган ва тезлик майдони $\vec{\upsilon}$ ҳамда ρ маълум бўлган туташ муҳит учун умумлаштирайлик.

Туташ муҳит ҳаракат миқдори деб, таърифга кўра, ушбу миқдорга айтилади:

$$\vec{Q} = \int_V \vec{\upsilon} \cdot \rho d\tau .$$

2.2 Туташ муҳитга таъсир этувчи сирт ва ҳажмий кучлар. Ҳаракат миқдори тенгламалари *;*

Туташ муҳит ҳаракати давомида ўзгарувчан, лекин чекли V ҳажмда жойлашган бўлиб, уни чегараловчи сирт Σ дан иборат бўлсин, дейлик. Ҳаракат миқдори

$$\vec{Q} = \int_{V(t)} \vec{\upsilon} \cdot \rho d\tau$$

бўлади.

Ҳаракат миқдорининг ўзгариши тенгламаси худди моддий нуқталар системаси учун ёзиладиган муносабатга ўхшаш бўлиб, қуйидагича ёзилади:

$$\frac{d}{dt}\int_{V} \vec{\upsilon} \cdot \rho d\tau = \int_{V(t)} \vec{F} \cdot \rho d\tau + \int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma$$

Ҳажми V бўлган туташ муҳит ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган ҳосила таъсир этувчи барча массавий ва сирт кучларининг йиғиндисига тенгдир. Бу ерда В ҳажм ихтиёрий, лекин унга жойлашган туташ муҳит ўз моддий зарраларини жараёнда чегараланган Σ сирт ичида сақлайди деб тушунилади.

Агар туташ муҳитда ҳажми V ва сирти Σ да тақсимланган кучлардан ташқари кучлар бўлса, уларни тенгламанинг ўнг томонига қўшиб ёзиш керак.

Келтирилган тенглама ҳаракат миқдорининг ўзгаришини интеграл формасидаги ифодасидир. Шунинг учун бу формула ҳаракат жараёнини характерловчи параметрлар узилишларга эга бўлганда ҳам ўринли бўлаверади. Умуман айтганда, бу тенглама ихтиёрий туташ муҳит учун ўринли бўлишдан ташқари, назарий механикада Нютоннинг иккинчи қонуни қанчалик аҳамиятли бўлса, ТММда ҳам бу тенглама шу қадар кенг ишлатилади ва катта аҳамиятга эга.

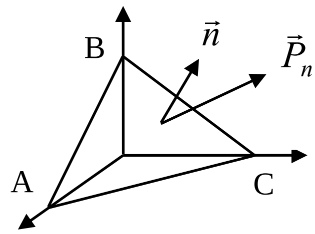
Ҳаракат миқдори тенгламасини ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$d\int_{V} \vec{\upsilon} \cdot \rho d\tau = \int_{V} \vec{F} \cdot \rho d\tau \cdot dt + \int_{\Sigma} \vec{p}_n \cdot dt \cdot d\sigma$$

Бу тенгламани ***импулслар тенгламаси*** ҳам дейилади.

Равшанки, келтирилган интеграл ифодали тенгламалар узлуксиз ва узлуксиз ҳосилали жараёнларга ишлатилганда, дифференциал тенгламаларга келтирилиши мумкин.

Энди $\vec{P}_n = -\vec{P}_{-n}$ билан бирга, ушбу формулаларнинг ўринлилигини ёзайлик:



3-расм

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \vec{\upsilon}\cdot\rho d\tau\right) = \frac{d}{dt}\int_M \vec{\upsilon}dm = \int_M \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}dm = \int_V \frac{d}{dt}(\vec{\upsilon}\rho d\tau)$$

Туташ муҳит ихтиёрий M нуқтасида қирралари мос равишда чексиз кичик dx^1, dx^2, dx^3 лардан иборат бўлган ва улар Декарт координаталари ўқлари x^1, x^2, x^3 лар бўйлаб йўналган тетраэдр олайлик (3-расм). Унинг ҳажми В *АБС* томонига туширилган баландлиги ҳ ва *АБС* юзасига тик равишда тетраэдр ташқи томонига йўналган бирлик векторни $\vec{n}$, унга таъсир этувчи кучланишни $\vec{p}_n$ дейлик. Тетраедр қолган уч томонларига тик бўлган бирлик векторларни координата ўқлари бўйлаб йўналган базис векторлар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лар билан бериш мумкин. Бу майдончалардаги кучланишларни мос равишда $\vec{p}^1, \vec{p}^2, \vec{p}^3$ дейлик. У ҳолда:

$$\vec{n} = n_i \cdot \vec{e}_i = cos\left(\vec{n},^{\wedge} x^i\right)\cdot \vec{e}_i$$

Агар *АБС* томонининг юзаси *С* бўлса, равшанки, *ОБС, ОАБ, ОАС* томонлари юзалари мос равишда $S\,cos\left(\vec{n}^{\wedge}x^1\right)$, $S\,cos\left(\vec{n},^{\wedge} x^2\right)$, $S\,cos\left(\vec{n},^{\wedge} x^3\right)$ га тенг бўлади. Кўрилаётган тетраэдр учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши тенгламасини ишлатайлик:

$$\int_V \vec{F}\rho d\tau + \int_\Sigma \vec{P}_n d\sigma - \int_V \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\rho d\tau = 0$$

Тетраедр чексиз кичик бўлганлиги учун:

$$-\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\rho\right)_M\cdot\frac{S\cdot h}{3}+(\vec{F}\cdot\rho)_M\cdot\frac{S\cdot h}{3}+\vec{P}_n\cdot S-\vec{p}^1\cdot S\cdot cos(\vec{n},x^1)-$$

$$-\vec{p}^2\cdot S\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2)-\vec{p}^3\cdot S\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3)+$$

$h\to 0$ да

$$\vec{P}_n=\vec{p}^1\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1)+\vec{p}^2\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2)+\vec{p}^3\cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3)$$

муҳим формулага эга бўламиз. Биз бу формулани чиқарганда *O* нуқта туташ муҳит ички нуқтаси ва тетраедр ўз ҳажми билан ҳаракатланиш жараёнида туташ муҳит зарраларидан иборат деган тушунчага асосландик. Олинган формула туташ муҳитни чегараловчи сирт нуқталари учун ҳам ишлатилиши мумкинлигини кўриш қийин эмас.

Туташ муҳит харакат тенгламалари.

Ҳаракат миқдорининг чекли V ҳажмдаги туташ муҳит учун ўзгариши тенгламасида ушбу

$$\int_\Sigma \vec{p}_n d\sigma=\int_V\left(\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x^2}+\frac{\partial\vec{p}}{\partial x^3}\right)d\tau$$

алмаштириш бажарайлик:

$$\int_V\vec{F}\cdot\rho d\sigma+\int_V\left(\frac{\partial\vec{P}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\vec{P}^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\vec{P}^3}{\partial x^3}\right)d\tau-\int_V\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot\rho d\tau=0$$

Бундан ёза оламиз:

$$\rho\cdot\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\rho\cdot\vec{F}+\frac{\partial\vec{p}^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\vec{p}^2}{\partial x^2}+\frac{\partial\vec{p}^3}{\partial x^3}.$$

Бу вектор кўринишидаги дифференсиал тенглама ***ихтиёрий туташ муҳит ҳаракати дифференциал тенгламаси*** дейилади. Бу тенглама узлуксиз ва узлуксиз дифференциалли параметрлари билан характерланувчи туташ муҳит учун ҳосил қилинди ва узлуксизлик бажарилганда чекли ҳажм учун келтирилган ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги тенгламага эквивалентдир. Демак, чекли ҳажми учун олинган ҳаракат миқдори ўзгариши тенгламаси умумийроқ ва ундан хусусий ҳолда юқорида келтирилган дифференциал тенгламани олиш мумкин. Декарт координаталари системасида

$$\vec{P}^i = p^{ki} \cdot \vec{e}_k \qquad \vec{\upsilon} = \upsilon^k \cdot \vec{e}_k$$

$$\vec{F} = F^k \cdot \vec{e}_k \; , \qquad \vec{p}_n = p_n^{\;i} \cdot \vec{e}_i$$

деб олсак, ушбу тенгламаларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} p_n^{\;1} = p^{11} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{12} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{13} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \\ p_n^{\;2} = p^{21} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{22} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{23} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \\ p_n^{\;3} = p^{31} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{32} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{33} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\upsilon^1}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^1 + \dfrac{\partial p^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{12}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{13}}{\partial x^3} \\ \rho \dfrac{d\upsilon^2}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^2 + \dfrac{\partial p^{21}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{22}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{23}}{\partial x^3} \\ \rho \dfrac{d\upsilon^3}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^3 + \dfrac{\partial p^{31}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{32}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{33}}{\partial x^3} \end{cases}$$

Назорат саволлари

1. Эйлер ва Лагранж ўзгарувчиларида узлуксизлик тенгламаси.
2. Ички кучланиш. Чекли ҳажмдаги туташ муҳит учун ҳаракат миқдори тенгламаси.
3. Кучланиш вектори. Кучланиш вектори учун асосий муносабат. Кучланиш тензори.
4. Туташ муҳит ҳаракат тенгламаси (Декарт координата системаси ва ихтиёрий чизиқли координата системаси).
5. Ҳаракат миқдори моменти тенгламаси. Классик ҳол.
6. Тензорнинг бош йўналишлари ва хос векторлари.
7. Тензорнинг каноник кўриниши. Асосий инвариантлар. Тензор сирти.
8. ТММ фанини ўрганишнинг Лагранж ва Эйлер усуллари.

9. Деформация. Нисбий узайиш коэффициенти. Деформация тензори, тензорнинг ковариант компоненталарининг физик маъноси.
10. Деформация тензорини кўчиш вектори орқали ҳисоблаш формулалари.

2-МАВЗУ. ТУТАШ МУХИТЛАРНИНГ ТУРЛИ МОДЕЛЛАРИ.

2.1. Термодинамика. Идеал суюқлик (газ) модели. Эйлер тенгламалари.Громеке-Лемб тенгламаси

2.2 Ёпишқоқ суюқлик ва эластик жисм моделлари. Гук ва Навье-Стокс қонунлари. Навье-Стокс ва Ламе тенгламалари.

2.3 Композитлар механикасида моделлаштириш. Эффектив модуллар тушунчаси

Таянч сўзлар *Туташ муҳит , газ, суюқлик, механика, постулат, узиликсизлик, масса, зичлик, Эйлер ўзгарувчилари, Лагранж координаталари, ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни, мувозанат тенгламалари, кучланишлар тензори, бош ўқлар ва бош кучланишлар*

2.1. Термодинамика. Идеал суюқлик ҳаракатининг тўла тенгламалари системаси;

Жисмларнинг туташ муҳитларга мансублигини тажрибалар асосида текшириш мумкин. Суюқликлар, газлар ва деформацияланадиган қаттиқ жисмлар туташ муҳит сифатида энг умумий физик хусусиятларга эга бўлишларидан ташқари, уларнинг ҳар бирларига хос фарқлари мавжудки, уларни эътиборга олган ҳолда таҳлил этиш ҳам туташ муҳит механикасининг асосий вазифаларидандир. Ички ва ташқи кучларга, кучланишларга туташ муҳит зарралари реаксиялари турлича бўлиши табиийдир. Масалан, сув ва темир бўлаклари оғирлик майдонида бир-биридан ниҳоятда катта фарқ қила оладиган механик кўчишларга, силжишларга эга бўлиши кундалик ҳаётда маълум: суюқлик зарраларида ҳар бир элементар майдончага тегишли уринма кучланишлар темирдагига қараганда ниҳоятда кичик ёки нолга тенглигини элементар физика курси асосида, оддий тажриба асосида таъкидлаш мумкин. Албатта, туташ муҳитлар сифатида фақатгина суюқлик ва газлар, маълум қонуниятлар асосида деформацияланадиган қаттиқ жисмларгина эмас, балки мураккаб ички кучланганлик, у билан боғлиқ бўлган ва вақт ўтишига ҳам боғлиқ бўлган жараёнлар текширилиши мумкин.

Бу бобда туташ муҳитнинг энг содда моделлари сифатида тан олинган ва шунинг учун ҳам классик моделлар деб аталувчи туташ муҳит моделлари билан иш кўрамиз. Ҳар бир модел учун таъриф бериш асосида уларнинг бошқа туташ муҳит моделларидан фарқи ва таъсир доираси ажратилади, улар учун механика қонунлари татбиқи асосида асосий тенгламалари келтириб чиқарилади. Олинган тенгламалар массанинг сақланиш қонуни, ҳаракат миқдори, унинг моменти ўзгариши тенгламалари ва, умуман олганда, кейинги бобларда ўрганиладиган термодинамика қонунларидан келиб чиқадиган муносабатлар асосидаги тенгламалар системасидан иборат бўлиб, бу тенгламалар реал физик жараёнларга мос келувчи чегаравий ва бошланғич шартларни ифодаловчи тенгламалар билан биргаликда ягона системани ташкил этади.

Бу бобда термодинамик жараёнлар ўзгармас бўлган ҳол учун туташ муҳитнинг энг содда моделлари - классик моделлари ўрганилади. Бу моделларни тузиш ёпиқ тенгламалар системасини тузишдан иборатдир.

Идеал суюқлик ва газлар

Идеал суюқлик ва газлар учун ушбу таърифни бериш мумкин: мувозанат ва ҳаракат жараёни учун ҳар бир кўрилаётган $\vec{P}_n$ кучланиш вектори шу кучланиш аниқланган бирлик нормали $\vec{n}$ бўлган ихтиёрий юзага нормал чизиғи йўналишида бўлган туташ муҳитга ***идеал суюқлик (газ)*** дейилади.

Таърифдан идеал суюқлик ва газларда $\vec{P}_n$ кучланишнинг $\vec{n}$ га тик йўналишга проекцияси - урунма ташкил этувчиси нолга тенг бўлади. Таърифдан $\vec{P}_n = \lambda \cdot \vec{n}$ лиги келиб чиқадики, бу ерда λ скаляр миқдор ва у нолдан фарқли деб олиниши керак. Умуман олганда, λ мусбат ва манфий бўлиши мумкин. Лекин идеал суюқлик (газлар) одатда сиқилган ҳолда учрашини эътиборга олсак $\lambda < 0$ бўлади ва уни $\lambda = -P$ (P>0 - босим деб аталади) деб белгиланади. Бундай туташ муҳит ихтиёрий нуқтасида ҳаракат ва мувозанат онларида кучланиш сирти сферадан иборат бўлиб, бош кучланишлар узаро тенг ва $p_1 = p_2 = p_3 = -p$ бўлади.

Шундай қилиб, кучланиш тензори ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix} \qquad (3.1)$$

Бундай тензорга шар тензори дейилади, кўриш қийин эмаски, ушбу формулалар ўринли бўлади:

$$P^{ij} = -p \cdot \delta^{ij},\ P_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} \qquad (3.3)$$

Идеал суюқлик ва газларнинг Декарт координаталари системасидаги ҳаракат дифференсиал тенгламаларини чиқарайлик. Бунинг учун ихтиёрий туташ муҳитнинг эйлер координаталаридаги ушбу тенгламасини олайлик:

$$\rho \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} \qquad (3.4)$$

(3.3) ни (3.4) га қўйиб, топамиз:

$$\rho \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \qquad (3.5)$$

(3.5) ни бирлик $\vec{e}_i$ базис векторга кўпайтириб қўшсак ушбу вектор тенгламага эга бўламиз:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} - grad p \qquad (3.6)$$

(3.5) ёки (3.6) тенглама идеал суюқлик (газ) лар учун э***йлернинг ҳаракат дифференсиал тенгламаси*** дейилади. Бу тенглама эйлер координаталаридаги ушбу дифференсиал тенгламалар системасидан иборатдир:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \upsilon_1}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3}=F_1-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1}\\
&\frac{\partial \upsilon_2}{\partial t}+\upsilon_2\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3}=F_2-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2}.\\
&\frac{\partial \upsilon_3}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}=F_3-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_3}
\end{aligned}\qquad(3.7)$$

<u>**Масала.**</u> эйлер координаталарида $\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+grad\frac{\upsilon^2}{2}+2[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}]$ бўлиши исботлансин. Бу ерда $\vec{\omega}=\frac{1}{2}rot\vec{\upsilon}$ - уюрма векторидир.

Агар бу масаладан фойдалансак, (3.6) тенглама ўрнига ушбу тенгламани ҳам олиш мумкин:

$$\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\frac{1}{2}grad\upsilon^2+\left[rot\vec{\upsilon}\times\vec{\upsilon}\right]=\vec{F}-\frac{1}{\rho}gradp \qquad (3.8)$$

(3.8) тенглама идеал суюқлик (газ) ҳаракати тенгламасининг Лемб-Громеко шаклидаги вектор дифференсиал тенгламаси дейилади.

Идеал суюқлик ва газлар ҳаракати ўрганилганда (3.6) ёки (3.7) тенгламалардан мақсадга мувофиқ ҳолда фойдаланиш мумкин.

Юқоридаги тенгламалар қаторига массанинг сақланиш қонуни тенгламасини қўшиб қарайлик. У ҳолда тенгламалар системаси учта (7) тенглама ва ушбу тўртинчи тенгламадан иборат бўлади:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{\upsilon})=0 \qquad (3.9)$$

Массавий кучлар зичлиги $\vec{F}$ маълум десак, (3.7) ва (3.9) тенгламалар системасида *в1, в2, в3, п* ва ρ лар номаълумлардан иборат бўлиб, тенгламалар сони тўртта, номаълумлар сони эса бешта бўлади. Тенгламалар системаси ёпиқ системадан иборат бўлиши учун, равшанки, яна битта тенглама этишмайди.

Энди идеал суюклик ва газ тенгламалари системаси ёпиқ бўлган айрим ҳолларни кўрайлик:

а) босим ва зичликлар ўртасида ҳар бир муҳит зарраси учун функционал муносабат ўрнатилган ҳол - $p = f(\rho)$. Агар бу муносабат юқорида келтирилган тенгламалар системаси сафига келтирилса, у ҳолда тенгламалар системаси ёпиқ бўлади. Бундай муносабат мавжуд бўлган жараён ***баротроп жараён*** дейилади. $p = R \cdot \rho \cdot T$ тенгламасига бўйсинувчи элементар физика курсидан маълум бўлган газ ҳолати тенгламаси бунга мисол бўла олади (бу ерда *P* ва *T* лар ўзгармас миқдорлар).

б) $\frac{dp}{dt} = 0$ бўлган ҳол. Бу ҳолда массанинг сақланиш тенгламаси $div\vec{\upsilon} = 0$ бўлади. Бу икки тенгламани эйлер тенгламалари билан биргаликда олинганда ёпиқ тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бундай ҳолат ҳар бир физик зарра зичлиги вақт ўтиши билан ўзгармас, деб олинишини билдиради.

Юқорида келтирилган ёпиқ тенгламалар системаси чекли ёки чексиз соҳаларда кўрилади ва уларни интеграллашда соҳа чегарасидаги шартлар ва изланувчи функцияларни топиш учун бошланғич шартлар берилиши талаб этилади.

2.2. . Ёпишқоқ суюқлик ва эластик жисм моделлари;

Туташ муҳитнинг классик моделларидан яна бири чизиқли эластик жисм деб қараладиган деформацияланувчи туташ муҳит моделидир. Чизиқли эластик жисм умумий ҳолда таъриф бериш мумкин бўлган эластик жисмларнинг хусусий ҳоли бўлиб, туташ муҳит айрим зарраси ёки кўрилаётган муҳит зарраларидан ташкил топган узлуксиз соҳа физик нуқталари учун кучланиш тензори элементлари деформация тензори ва бошқа ўзгарувчиларнинг чизиқли функцияси бўлади. эластик жисм модели таърифини беришдан илгари деформацияланувчи қаттиқ жисмлар ҳақида умумий тасаввуримизни кенгайтиришга ҳаракат қилайлик. Жисм бўлаги қўйилган ташқи ва ички кучлар таъсирида ўзининг ҳажми ва шаклини ўзгартириши ва бу таъсирлар йўқотилса, у ўзининг дастлабки ҳолатига қайтиши мумкин. Бундай жисм э***ластик жисм*** дейилади. Жисмларнинг унинг деформацияланишига сабаб бўлган таъсирлари олиб ташланиши билан, ўзининг дастлабки шакли ва ҳажмига қайта олиши хоссаси жисм эластиклик хоссаси дейилади, йўқотилган деформация эса эластик деформацияни ифодалайди. Турли муҳитларда ташқи кучлар олиб ташланганда ўз ҳолатига тўла қайта олмайдиган жараёнлар ҳам мавжудлигини кузатиш мумкин, бундай жисм эластик жисм бўла олмайди: юксизланиш жараёнида ҳосил бўлган деформация қолдиқ деформация бўлади ва бундай деформация пластик деформация дейилади ва жисмни эластик жисм модели билан ифодалаб бўлмайди.

Эластик жисм моделининг таърифини берайлик: кучланиш тензори элементлари жисм заррасида ушбу $p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n)$ бир қийматли муносабат билан аниқланса, бундай муҳит эластик жисм дейилади. Бу эрда $g^{\alpha\beta}$ - метрик тензор элементлари, T - ҳарорат, χ_i лар жисмни характерловчи параметрлар.

Тажрибалар шуни кўрсатадики, кўпгина қаттиқ жисмлар учун кучланиш тензори элементлари деформация тензори элементлари ва ҳароратнинг ўзгариши билан чизиқли муносабатда бўлади. Бундай чизиқли муносабат Гук қонуни дейилади. Формал нуқтайи назардан деформацияланиш бошланишидан олдин, яъни дастлабки пайтда жисм ҳарорати кўрилаётган зарра учун ўзгармас ва ўз қийматини сақлайди ва шу пайтда $p^{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ дейлик. У ҳолда $p^{ij} = f^{ij}(\varepsilon_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta})$ ни тейлор қаторига ёйиб, ε_{ij} лар чексиз кичик микдорлар деб олиб, ушбу муносабатни - умумлашган Гук қонуни деб аталувчи формулани ёза оламиз:

$$p^{ij} = A^{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} \qquad (3.10)$$

(3.10) формула эластик жисм бирор зарраси учун ёзилган бўлиб, муҳит турли нуқталарида $A^{ij\alpha\beta}$ лар ўзгариши мумкин. $A^{ij\alpha\beta}$ лар T ва χ_i ларга ҳам боғлиқ бўлиши, T ва χ_i лар турли зарралар учун турлича ўзгариши ёки турли ўзгармас миқдорларга тенг бўлиши мумкин. Шундай қилиб, $A^{ij\alpha\beta}$ лар муҳит турли қисмлари (зарралари) учун турлича ўзгармасларни бериши мумкин. Бундай эластик жисм бир жинсли бўлмаган эластик жисм дейилади, акс ҳолда жисм бир лжинсли эластик жисм дейилади.

Умумлашган *Гук қонунини* ифодаловчи (3.10) ифодадаги $A^{ij\alpha\beta}$ ранги 4 га тенг тензорлиги $n^{иж}$ ва ε_{ij} лар тензорлигидан равшандир ва бу тензор элементлари сони 81 тадир. $n^{иж}=n^{жи}$ ва $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$ лигидан (3.10) ифодада $A^{ij\alpha\beta}$ лар сони 36 тадан иборатлигини кўриш қийин эмас.

Барча йўналишлар бўйича жисм хоссалари бир хил бўлса бу жисм изотроп, акс ҳолда анизотроп дейилади. Ушбу муносабатларни ёза оламиз:

$$\begin{gathered} p^{ij} = A^{ij11}\cdot\varepsilon_{11} + A^{ij22}\cdot\varepsilon_{22} + A^{ij33}\cdot\varepsilon_{33} + (A^{ij12} + A^{ij21})\cdot\varepsilon_{12} + \\ +(A^{ij13} + A^{ij31})\cdot\varepsilon_{13} + (A^{ij23} + A^{ij32})\cdot\varepsilon_{23} \end{gathered} \tag{3.11}$$

$$\begin{gathered} p^{ji} = A^{ji11}\cdot\varepsilon_{11} + A^{ji22}\cdot\varepsilon_{22} + A^{ji33}\cdot\varepsilon_{33} + (A^{ji12} + A^{ji21})\cdot\varepsilon_{12} + \\ +(A^{ji13} + A^{ji31})\cdot\varepsilon_{13} + (A^{ji23} + A^{ji32})\cdot\varepsilon_{23} \end{gathered} \tag{3.12}$$

(3.11) ва (3.12) муносабатларда чап ва ўнг томонлари ўзаро тенглигидан ушбу муносабатларни келтириб чиқарамиз:

$$A^{ij11} = A^{ji11},\ A^{ij22} = A^{ji22},\ A^{ij33} = A^{ji33} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered} A^{ij12} + A^{ij21} = A^{ji12} + A^{ji21} \\ A^{ij13} + A^{ij31} = A^{ji13} + A^{ji31} \\ A^{ij23} + A^{ij32} = A^{ji23} + A^{ji32} \end{gathered} \tag{3.14}$$

(3.13) ва (3.14) асосида, умумиятга чек қўймаган ҳолда, ушбу муносабатларни оламиз:

$$A^{ij\alpha\beta} = A^{ji\alpha\beta}, A^{ij\alpha\beta} = A^{ij\beta\alpha} \tag{3.15}$$

Шундай қилиб, энг умумий ҳолдаги анизотроп чизиқли эластик жисм учун $A^{ij\alpha\beta}$ лар сони 36 та бўлади.

Изотроп муҳит учун Гук қонуни

Декарт координаталар системасини ихтиёрий равишда ўзгартирганда эластик жисм хоссаларини аниқловчи $A^{ij\alpha\beta}$ лар ўзгармасдан қолса, бундай жисм изотроп эластик жисм дейилади ва $A^{ij\alpha\beta}$ изотроп тўртинчи рангли тензор дейилади. энди δ_{ij}-бирлик изотроп тензорлиги асосида олинган ушбу ранги тўртга тенг бўлган $\delta_{ij}\cdot\delta_{kl}$ ва $\delta_{ik}\cdot\delta_{jl}+\delta_{il}\cdot\delta_{kj}$ изотроп тензорларни олайлик. Ихтиёрий изотроп тензор $A^{ij\alpha\beta}$ ни уларнинг чизиқли комбинатсияси сифатида, яъни

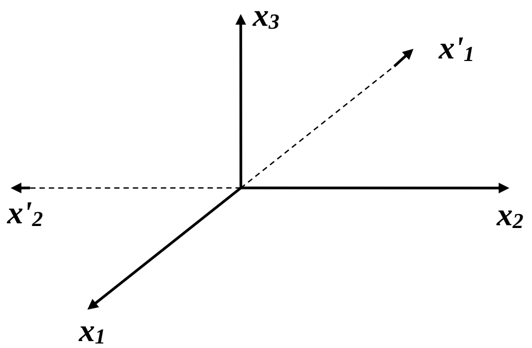
$$A^{ij\alpha\beta}=\lambda\cdot\delta_{ij}\cdot\delta_{kl}+\mu\cdot(\delta_{ik}\cdot\delta_{jl}+\delta_{il}\cdot\delta_{jk}) \qquad (3.16)$$

кўринишида ёзиш мумкинлигини исботлайлик. (3.11) да *и* ва *ж* индексларни *1, 2, 3* лар бўйича қўйиб ўқларни алмаштиришдан $n^{иж}$ лар ўзгармас бўлиши кераклигини эътиборга олсак, масалан, ушбу муносабатларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}A^{1122}&=A^{1133}=A^{2211}=A^{2233}=A^{3311}=A^{3322}\\A^{1212}&=A^{1313}=A^{2121}=A^{2323}=A^{3131}=A^{3232}\end{aligned} \qquad (3.17)$$

Энди x_1,x_2,x_3 ўрнига акслантириб ҳосил қилинган $x_1ъ=-x_1$, $x_2ъ=x_2$, $x_3ъ=x_3$ янги координаталар системасини олайлик. $A^{ij\alpha\beta}$ тензорнинг $x_и$ координаталаридан $x_иъ$ координаталарига ўтишда $A'^{ij\alpha\beta}$ бўлиб ўзгариши тензор таърифидан ушбу формулага кўра алмашади:

$$A'^{ij\alpha\beta}=\frac{\partial x'_i}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial x'_j}{\partial x_q}\cdot\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x^\lambda}\cdot\frac{\partial x'_\beta}{\partial x^\mu}\cdot A^{pq\lambda\mu} \qquad (3.18)$$



4-расм

Тензор изотроп бўлса

$$A^{ij\alpha\beta}=A^{ij\alpha\beta}$$

(3.19)

бўлади.

Агар тўгри бурчакли координаталар системасини -ўқ атрофида 180^0 га бурсак (масалан *и=3* да $x_1ъ=-x_1$, $x_2ъ=-x_2$, $x_3ъ=x_3$ бўлади):

$$A'^{ij\alpha\alpha} = -A^{ij\alpha\alpha} \ (i \neq j) \qquad (3.20)$$

бўлади. (3.18) ва (3.19) асосида $i \neq j$ да

$$A^{ij\alpha\alpha} = 0 \qquad (3.21)$$

келиб чиқади. Агар тўғри бурчакли координаталар системасини и ўққа нисбатан акслантирсак (масалан *и=1* да *x₁ъ=-x₁, x₂ъ=x₂, x₃ъ=x₃),*

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_q} = \delta_q^j$$

$$A'^{1j\alpha\beta} = -\delta_q^j \cdot \delta_\lambda^\alpha \cdot \delta_\mu^\beta \cdot A^{iq\lambda\mu} = -A^{1j\alpha\beta} \qquad (3.22)$$

Иккинчи томондан $A'^{1j\alpha\beta} = A^{1j\alpha\beta}$

Бу муносабатлар асосида *и=1* ўқ тескари йўналишга алмаштиришдан

$$A^{11\alpha\beta} = A^{12\alpha\beta} = A^{13\alpha\beta} = 0, \ (\alpha \neq \beta) \qquad (3.23)$$

екани келиб чиқади. Худди шундай акслантиришни *и=2* ва *и=3* учун ҳам кўриш мумкин ва тегишли $A^{ij\alpha\beta}$ лар нолга тенг экани келиб чиқаси. Натижада нолдан фарқли элементлар A^{1111}, A^{1122} ва A^{1212} дан иборат бўлади.

Энди ушбу чизиқли алмаштиришни кўрайлик:

$$x'_j = (\delta_{ij} + d\theta \cdot \varepsilon_{3ij}) \cdot x_i \qquad (3.24)$$

(3.24) алмаштириш янги *хъж* координаталар системасини эски координаталар системаси *xи* ни *x₃* ўқи атрофида чексиз кичик $d\theta$ бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинишини кўрсатади. У ҳолда

$$A'^{pqrs} = A^{pqrs} + d\theta \cdot \left[\varepsilon_{3ip} \cdot A^{iqrs} + \varepsilon_{3iq} \cdot A^{pirs} + \varepsilon_{3ir} \cdot A^{pqis} + \varepsilon_{3is} \cdot A^{pqri}\right] \qquad (3.25)$$

(3.22) ифодани қисқартирганди $d\theta$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдорлар ташлаб юборилган A^{pqrs} изотроп тензорлигидан $A'^{pqrs} = A^{pqrs}$ бўлади. У ҳолда (3.22) дан

$$-A^{2222} + A^{1122} + A^{1212} + A^{1221} = 0$$

(3.15) нинг иккинчи ифодасини эътиборга олсак

$$A^{2222} = A^{1122} + 2A^{1212}$$

бўлиб, $A^{1122} = \lambda$, $A^{1212} = \mu$ белгилаш киритсак $A^{2222} = \lambda + 2\mu$ бўлади ва демак,

$$A^{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + \mu \cdot (\delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk}) \qquad (3.26)$$

деб ёзиш мумкин.

Ихтиёрий эгри чизиқли координаталар системасида (3.26) формула қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$A^{ijkl} = \lambda \cdot g^{ij} \cdot g^{kl} + \mu \cdot (g^{ik} \cdot g^{jl} + g^{il} \cdot g^{jk}) \qquad (3.27)$$

Шундай қилиб, Декарт координаталари системасида изотроп чизиқли эластик жисм учун ***Гук қонуни*** қуйидаги кўринишда бўлади:

$$p^{ij} = \lambda \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \cdot \delta_{ij} + 2\mu \cdot \varepsilon_{ij} \qquad (3.28)$$

Еластик жисм учун (3.28) муносабат ва чексиз кичик деформация назарияси асосидаги $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ ўринли бўлсин дейлик. (3.28) ни Декарт координаталари системаси а ёзилган ушбу ҳаракат дифференсиал тенгламалар системасига қўямиз:

$$\frac{\partial p^{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2} \qquad (3.29)$$

У ҳолда эластик жисмнинг кўчиш вектори компоненталарига нисбатан ушбу дифференсиал тенгламалар системасини ёзиш мумкин:

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) + \mu \cdot \Delta u_i + \rho \cdot F_{\mathrm{i}} \qquad (3.30)$$

(3.30) тенглама (*u=1,2,3*) 3 та тенгламадан иборат система бўлиб, бу тенгламаларга Ляме тенгламалари дейилади. Бу тенгламани $\vec{e}_i$ бирлик базис векторга кўпайтириб қўшилса, Ламенинг ушбу вектор кўринишдаги тенгламаси ҳосил бўлади:

$$(\lambda + \mu) \cdot graddiv\vec{u} + \mu \cdot \Delta \vec{u} + \rho \cdot \vec{\mathrm{F}} = \rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad (3.31)$$

(3.28), (3.29) ва (3.31) тенгламалар тўғрибурчакли Декарт координаталар системасида ёзилган бўлиб, ихтиёрий эгри чизиқли координаталар системасида ҳам ёзиш мумкин. эластиклик назарияси чизиқли масалаларида жисм зичлигини ўзгармас деб олиш мумкин. Агар дастлабки зичлик ρ_0 бўлса, деформацияланиш жараёнидаги зичлик $\rho = \rho_0 + \rho'$ ва $\rho' << \rho_0$ дейиш мумкин. (3.31) тенгламадаги $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ тезланиш ифодаси аниқланса, тенглама ёпиқ тенгламадан иборат бўлади. Бу тенгламада чексиз кичик деформация ва $\rho = \rho_0$ учун олинса ҳам, кўчиш вектори, тезлик ва тезланишлар чекли бўла олади. Одатда эластиклик назариясининг кўпгина масалаларида ε_{ij} билан бирга кўчиш вектори $\vec{u}$, тезлик ва тезланишлар ҳам кичик миқдорлар деб қаралса Эйлер ва Лагранж координаталарининг фарқи йўқолади. Тезланиш учун индивидуал зарра тезланиши $\left(\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right)_{x_i = const}$ олинади ва у ҳолда (3.31) чизиқли эластиклик назариясида ушбу кўринишдаги тенгламадан иборат бўлади:

$$(\lambda + \mu) \cdot graddiv\vec{u} + \mu \cdot \Delta\vec{u} + \rho_0 \cdot \vec{F} = \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{dt^2} \qquad (3.32)$$

(3.31) тенглама бир инерциал координаталар системасидан иккинчисига ўтганда инвариант бўлса, (3.32) тенглама инвариант бўла олмаслигини кўриш қийин эмас.

Шундай қилиб, (3.32) тенглама эластиклик назарияси чизиқли масалалари учун, агар у координата ўқларига проексияланса, $y_u(x_1,x_2,x_3,m)$ ларга нисбатан ёпиқ тенгламалар системасини беради ва бу тенгламалар - Ляме тенгламалари кўчиш вектори проексиялари учун ёпиқ тенгламалар системасини беради.

1-Масала.

Изотроп чизиқли эластик жисм учун бош кучланишлар йўналишлари бош деформация ўқлари билан бир бўлиши исботлансин.

2-Масала.

(3.27) формуладан фойдаланиб, эгри чизиқли координаталар системасида Гук қонунини

$$p^{ij} = \lambda \cdot J_1(\varepsilon) \cdot g^{ij} + 2\mu \cdot g^{i\alpha} \cdot g^{j\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги исботлансин. Бу ерда $J_1(\varepsilon)$ - деформация тензори биринчи инварианти.

2.3. Навье-Стокс ва Ламе тенгламалари .

Табиатда суюқ ва газ ҳолатида учрайдиган барча муҳитлар ўрнатилган идеал суюқлик ёки газ модели доирасида бўла олмаслигига кузатиш ва тажрибалар асосида ишонч ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, «қуюқ» ёки «суюқ» суюқликлар ҳақида фикр юритиш мумкин. Дистирланган сув ва глицеринларда уларнинг ҳаракати давомида бирлик нормали $\vec{n}$ бўлган юзачадаги кучланиш векторининг шу юзачага проексиялари миқдори сув учун глитсеринга қараганда ниҳоятда кичиклигига ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бу кучланишлар суюқликлар мувозанат ҳолатида бирлик нормал $\vec{n}$ бўйича (ёки унга тескари) бўлишига ҳам ишонч ҳосил қилиш мумкин. Бундан суюқлик зарралари ўртасида уринма кучланишлар ҳам мавжуд бўлишига ва уларнинг миқдори суюқлик моддасининг ички хоссаларига боғлиқлиги ва бу хоссалар уринма кучланишлар мавжудлиги ва унинг миқдорига таъсир этувчи асосий омиллардан бири эканлигига ҳам ишонч ҳосил қилиш мумкин. Яна шуни кузатиш мумкинки, бирор координаталар системасига нисбатан мувозанатда бўлган «қуюқ» суюқлик ва «суюқ» суюқликлар (масалан, кўрилган глицерин ва сув) учун кучланиш вектори бирлик вектор $\vec{n}$ га пропорционал бўлади ва бу кучланиш векторининг $\vec{n}$ дан оғиши ҳаракат жараёнидагина вужудга келади, яъни бундай туташ муҳит зарралари ўртасида уринма кучланишлар пайдо бўлади. Бундай реал ҳоссали туташ муҳитлар учун ёпишқоқ суюқлик модели олинади

$$p^{ij} = -p \cdot g^{ij} + \tau^{ij} \qquad (3.33)$$

кўринишдаги кучланиш тензорига эга бўлган туташ муҳитга ***ёпишқоқ суюқлик*** дейилади. Бу ерда

$$p^{ij} = p(\rho, T, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \qquad (3.34)$$

$$\tau^{ij} = \varphi^{ij}(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \qquad (3.35)$$

бўлиб,

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \cdot (\nabla_\beta v^\alpha + \nabla_\alpha v^\beta)$$

Деформация тезлиги тензори элементлари. Туташ муҳит классик моделининг бу таърифидаги (3.34) ва (3.35) боғланишларда Т ва χ_i ларни ўзгармаслар, деб қараш билан чегараланамиз.

(3.35) муносабат учун, умумлашган Гук қонуни олиниши каби, ушбу чизиқли муносабатни ёзиш мумкин

$$\tau^{ij} = B^{ij\alpha\beta} \cdot e_{\alpha\beta} \qquad (3.36)$$

Бу ерда $B^{ij\alpha\beta}$ ўзгармаслар кўрилаётган ёпишқоқ суюқлик хоссасини аниқловчи параметрлар бўлиб, (3.36) устида умумлашган Гук қонуни формуласи устида бажарилган амалиётларни бажариш мумкин (бу ерда $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ўрнига $e_{\alpha\beta}$ иштирок этмоқда). Чизиқли эластик жисм учун бажарилган тензорлар устидаги амалиётларни (3.36) учун қўллаш мумкин. Ёпишқоқлик хоссаси барча йўналишлар бўйича бир хил бўлган жисм изотроп, акс ҳолда, бу ерда ҳам, жисм анизотроп бўлади.

Изотроп чизиқли ёпишқоқ суюқлик учун ушбу формулани ёзайлик:

$$p^{ij} = -p \cdot g^{ij} + \lambda_1 \cdot div\vec{v} \cdot g^{ij} + 2 \cdot \mu \cdot g^{i\alpha} \cdot g^{j\beta} \cdot e_{\alpha\beta} \qquad (3.37)$$

(3.37) формула ***Наве-Стокс формуласи*** деб аталади. Бу ерда $div\vec{v}$ - деформация тезлиги тензори 1-инварианти, λ_1 ва μ_1 ёпишқоқлик коэффициентлари дейилади. (3.37) ни Декарт координаталар системасида ёзайлик:

$$p_{11} = -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1}$$

$$p_{22} = -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\upsilon v_2}{\partial x_2} \qquad (3.38)$$

$$p_{33} = -p + \lambda_1 \cdot div\vec{\upsilon} + 2 \cdot \mu_1 \cdot \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}$$

$$p_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot e_{ij} = \mu_1 \cdot \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \right), \ (i \neq j)$$

Ёпишқоқ суюқликларнинг ихтиёрий эгри чизиқли эйлер координаталари системасидаги тенгламаси (3.37) ни ушбу тенгламага - туташ муҳит ҳаракат дифференциал тенгламасига қўйиш орқали топилади:

$$p \cdot \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho \cdot F_{\text{i}} + \nabla_j p^{ij} \qquad (3.39)$$

Агар Декарт координаталарида иш кўрилса, эластик жисм учун Ляме тенгламаси олингани каби, ушбу кўринишдаги Наве-Стокс тенгламалари деб аталувчи тенгламалар ҳосил бўлади:

$$p \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} - gradp + (\lambda_1 + \mu_1)graddiv\vec{\upsilon} + \mu_1 \Delta \vec{\upsilon} \qquad (3.40)$$

Чизиқли эластик жисмлардан фарқли равишда ρ зичлик функсияси асосий номаълумлар қаторидан ўрин олади. Агар $\vec{F}$ берилган бўлса, (3.40) тенглама тезлик вектори проекциялари $в_1$, $в_2$, $в_3$, зичлик ρ ва босим функцияси *п* лар қатнашадиган скаляр равишда ёзилган учта тенгламани беради.

Ёпишқоқ суюқлик учун тенгламалар системаси (3.40) тенглама ва узлуксизлик тенгламаси $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{\upsilon}) = 0$ лардан иборат бўлиб, тенгламалар сони номаълумлар сонидан битта камдир. Тенгламалар системаси ёпиқ тенгламалар системасидан иборат бўлиши учун номаълум функциялар қатнашадиган қўшимча тенглама зарурдир.

Қуйидаги хусусий ҳолда, $div\vec{\upsilon}=0$ яъни муҳит сиқилмас бўлса, тенгламалар системаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\cdot gradp+\frac{\mu}{\rho}\cdot\Delta\vec{\upsilon} \qquad (3.41)$$

$$div\vec{\upsilon}=0$$

(3.41) да μ ўзгармас сон бўлиб, агар суюқлик ёпишқоқлик коэффициенти $\nu=\frac{\mu}{\rho}$ деб белгиланса, бу ўзгармас миқдор кинематик ёпишқоқлик коэффициенти дейилади.

Бир жинсли бўлмаган сиқилмас ёпишқоқ суюқлик учун тўгри бурчакли Декарт координаталари системасида ушбу ёпиқ тенгламалар системаси ўринлидир:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\upsilon_1\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_1}+\upsilon_2\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_2}+\upsilon_3\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}=0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\upsilon_1}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_1}{\partial x_3}=F_1-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_1}+\upsilon\cdot\Delta\upsilon_1\\
&\frac{\partial\upsilon_2}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_2}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}=F_2-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_2}+\upsilon\cdot\Delta\upsilon_2 \qquad (3.42)\\
&\frac{\partial\upsilon_3}{\partial t}+\upsilon_1\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_1}+\upsilon_2\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_2}+\upsilon_3\frac{\partial\upsilon_3}{\partial x_3}=F_3-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x_3}+\upsilon\cdot\Delta\upsilon_3
\end{aligned}$$

$\Delta\upsilon_i$ - *$в_и$* дан олинган Лаплас оператори.

Туташ муҳит классик масаласини қўйилиши хақида

«Содда масалалар» деб аталувчи туташ муҳит масалалари ўз ичига туташ муҳит зарралари учун температура ўзгармас ($T=T_0$), иссиқлик энергияси, кимёвий ва электродинамик майдон ва унинг ўзгаришлари эътиборга олинмаган ҳолда кўриш мумкин бўлган жараёнларни ўз ичига олади. Бундай жараёнлар ва улар билан боғлиқ равишда туташ муҳитнинг энг содда моделлари – идеал суюқликлар (газлар), чизиқли эластик жисмлар ва ёпишқоқ суюқликлар моделлари-классик моделлар туташ муҳитнинг энг ривож топган ва амалий масалалар ечишда кенг қўлланиладиган соҳаларидир. Маълумки, классик моделлар учун $p^{ij} = p^{ji}$ кучланиш тензори симметрик ва бу натижа зарралар учун ички моментлар нолга тенг, деб олиниши туфайли, ҳаракат миқдори моменти ўзгариши теоремасидан келиб чиқади. Бу ерда эластиклик назарияси эса чексиз кичик деформация назарияси асосида кўрилади, Лагранж ва эйлер координаталари фарқи йўқолади.

Классик моделга киритиладиган туташ муҳит масалалари асосий тенгламалари массанинг сақланиш қонуни, ҳаракат миқдори ва ҳаракат миқдори моменти ўзгариши теоремаси (унинг натижаси $p^{ij} = p^{ji}$) асосида олиниши билан бирга, экспериментларга асосланган ва ҳар бир туташ муҳит таърифидан келиб чиқадиган физик муносабатлари системаси олинишини юқорида кўрган эдик. Бу тенгламалар системаси бўлгандагина уларни ечиш учун уриниш мумкин. Фараз қилайлик, ёпиқ тенгламалар ихтиёрий турдаги классик туташ муҳит учун тузилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир аниқ ҳол учун бу тенгламалар системаси сони нечта бўлишидан қатъий назар, бу тенгламалардаги номаълумлар ва эркли ўзгарувчилар (масалан, фазовий координаталар ва вақт) ўзгариш соҳалари аниқланган бўлиши керак.

Кўрилаётган соҳада махсус нуқта ёки нуқталар тўплами мавжуд бўлишлиги мумкин. Бу нуқталарда изланаётган функсиялар узилишга эга бўлиши, уларнинг мазмуни эса, масалан, нуқтавий масса манбалар, нуқтага қўйилган мужассамланган кучлар ва ҳ.к. лар бўлиши мумкин. Туташ муҳитга таъсир этувчи ташқи сабаблар ҳам махсус нуқталар орқали тенгламалар системасидан алоҳида ҳолда берилиши мумкин.

Туташ муҳитнинг Евклид фазоси чекли ва чексиз соҳасидаги ҳаракати ва мувозанати ўрганилади. Изланаётган функсиялар учун соҳа чегараларида аввалдан қўйилган механик муносабатлар бажарилиши талаб қилиниши мумкин. Агар соҳа ўз ичига чексиз узоқ нуқталарни олса, бу нуқталарда ҳам масала қўйилишидаги механик мазмунни акслантирувчи шартлар қўйилиши керак. Шуни таъкидлаш жоизки, математик ифодаларда ёзиладиган бу шартлар механика қонунларига ва улар асосида ёзилган ҳар бир туташ муҳит моделлари тенгламалари системасига зид бўлмаслиги керак. Иккинчи томондан, ҳар бир туташ муҳит ёпиқ тенгламалари системаси интегралланишида ихтиёрий функция ва ўзгармаслар пайдо бўладики, бу ўзгармаслар қўшимча шартлар ва жумладан, бошланғич шартлар асосида аниқланиши мумкин (масалан $t = t_0$ бошланғич онда туташ муҳит зарралари ҳолати ва уларнинг тезликлари берилиши керак). Туташ муҳит тенгламалари системаси аниқланадиган соҳанинг ўзи ҳам ўзининг ўзгарувчан чегараларига эга бўлиб, бу чегаралар номаълум бўлиши ва уларни ҳам аниқлаш талаб этилиши мумкин. Бу чегараларда механик жараённи акслантирувчи муносабатлар ёзилиши мумкин. Умумий ҳолда деформацияланадиган ёки ўзгармас умумий чегараларга эга бўлган турли туташ муҳит моделлари тенгламалари системаси биргаликда кўрилиши ва туташ муҳитларнинг ўзаро динамик ёки статик ўзаро механик таъсирлари долзарб масалалардан иборат бўлишлиги мумкин. Бундай ҳолда, масалан, суюқлик ва эластик жисмлар ўзаро таъсири масалаларида чегаранинг ҳар икки томонидан масала ечилишидан илгари, умуман олганда, номаълум бўлган кучланишлар ўзаро тенглиги, кўчиш вектори ёки зарралар ўзаро тезлиги шартлари ёзилиши мумкин. Айрим ҳолларда булардан анча мураккаб бўлган математик муносабатлар ҳам ёзилиши мумкин. Табиийки, бу муносабатлар ўз мазмунига эга, кузатиш ва қонуниятларга асосланган бўлиши керак.

Энди идеал суюқлик ва газларга хос бўлган энг содда масалалар қўйилишини кўрайлик. Биринчи навбатда тенгламалар системасини (массанинг сақланиш қонуни ва эйлер тенгламалари-уларнинг сони 4 та бўлиб) 5 та номаълумларни (тезлик вектори 3 та компоненталари, босим ва зичлик) ўз ичига олади. Агар бешинчи тенглама ҳам мавжуд бўлса (масалан, баротропик муносабат ёки сиқилмас суюқлик деб олинадиган хусусий ҳоллар), у ҳолда ёпиқ тенгламалар системасига-тенгламалар сони номаълумлар сонига тенг бўлган ҳолат вужудга келади. Бу моделга тегишли ихтиёрий мувозанат ва ҳаракат тенгламалари, агар ташқи массавий кучлар берилган бўлса, кўрилаётган ёпиқ тенгламалар системасини интеграллашга келтирилади. Ҳар бир аниқ масалада чегаравий ва бошланғич шартлар берилган бўлиши керак. Идеал суюқлик ёки газлар учун уринма кучланишлар барча зарраларда нолга тенглиги ва бу хосса чегаравий сиртларда ҳам сақланишини эътиборга олиш керак: газ ва суюқлик зарралари деформацияланувчи ёки абсолют қаттиқ сиртларда уларга ўтказилган ҳар бир ондаги уринма текисликларда қаршиликка учрамаган ҳолда бемалол ҳаракатлана олиши ва бу текисликларга нормал йўналиши бўйича олинган тезликлар жисм нормал йўналиши бўйича олинган тезликларга тенг бўлиши керак:

$$(v_n)_{suyuqlik} = (v_n)_{chegara}$$

$$(v_\tau)_{suyuqlik} \neq (v_\tau)_{chegara}$$

Агар идеал суюқлик потенциалли тезлик майдонига эга, яъни $\vec{\upsilon} = grad\vec{\varphi}$ бўлса,

$$(v_n)_{suyuqlik} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = (v_n)_{chegara}$$

бўлади.

Агар идеал суюқлик тезлик майдони олинаётган координаталар системасига нисбатан қўзғалмас чегаравий сиртларга эга бўлса, чегарадаги шарт

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

га алмашади.

Агар идеал суюқлик ёки газ учун соҳа эркин сиртларга эга бўлса, ва бу сиртларнинг фазодаги ҳолати номаълум бўлса, масала қўйилишида бу сиртларни аниқлаш масаласи ҳам қўйилиши мумкин. Одатда бундай номаълум ва ўзгариши мумкин бўлган сиртларда суюқлик ва газ зарралари учун босим чегарадаги иккинчи бир маълум(масалан, атмосфера босимига тенг) босимга тенг қилиб олиниши мумкин. Бу ҳолда чегаравий шарт, масалан, қуйидаги кўринишда бўлади: $p_{nn} = -p_0$, $p_{n\tau} = 0$-нормали $\vec{n}$ бўлган юзадаги кучланишнинг нормалга проексияси $-p_0$, уринма йўналишга проексияси нолга тенг бўлади дейиш мумкин.

Чизиқли эластик жисм моделига кирувчи туташ муҳит масалалари қўйилиши ва Сен-Венан принципи деб аталувчи принцип билан танишайлик.

Чизиқли эластик жисм ташқи ва ички кучлар таъсирида кучланганлик-деформацияланиш ҳолати унинг эгаллаган ҳажми ва динамик жараён билан боғланган бўлиши мумкин. Чексиз кичик деформация назариясига асосан деформация тензори элементлари кўчиш вектори компоненталари ҳосилалари Коши муносабатлари орқали боғланган ва одатда газ, суюқликлардан фарқли равишда жисм зарралари зичлиги ўзгармас, ва уни маълум дейиш мумкин. Жисмнинг деформацияланмаган ҳолда фазодаги кўчишига чек қўйиш ҳам мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун эластик жисм бирор нуқтасида кўчиш вектори ва бу нуқтада олинган ўзаро тик ўқлар атрофида айланиш миқдорлари нолга тенг деб олиниши керак. эластик жисм эгаллаган ҳажм ва унинг чегараси Лагранж ва Эйлер координаталари ўртасидаги фарқ бўлмаганлиги туфайли чегаравий шартлар эластик жисм дастлабки эгаллаган чегараларида берилади ва бу чегаралар ҳолати фазода ўзгариши чексиз кичик бўлганлиги учун чегаравий шартлар жисм дастлабки ҳолати чегарасига нисбатан қаралади.

Чизиқли эластик жисм учун тенгламалар системаси қуйидаги тенгламалардан иборат:

1. Ламе тенгламалари (3 та тенглама);
2. Коши муносабатлари (6 та тенглама);
3. Гук қонуни (6 та тенглама);

4. Сен-Венан айниятлари ёки Белтрами-Митчелл тенгламалари (6 та тенглама).

Масала қўйилишида бу тенгламалар ўзаро зид бўлмаган ҳолда ечимга эга бўлишини ва бу ечимлар жисм чегаравий шартлари ва динамик масалалар учун бошланғич шартларни бажарилишини таъминлаган ягона ечимга эга бўлишимиз керак.

Классик эластиклик назарияси масалалари қўйилишида чегаравий шартларни шартли равишда ушбу учта гуруҳга ажратган ҳолда кўриш мумкин:

1) Чегарада кўчиш вектори компоненталари берилади;

2) Чегарада кучланиш тензори элементларига нисбатан бажарилиши талаб этиладиган шартлар берилади;

3) Чегаранинг айрим қисмларида кўчишлар ва бошқа қисмларида эса кучланишларга нисбатан бажарилиши керак бўлган шартлар берилиши мумкин.

Сўнгги ҳолда берилган чегаравий шартлар вақтга боғлиқ равишда ўзгаришлари ёки ўзгармас бўлиб қолишлари мумкин.

Масалалар вақтга боғлиқ равишда ўрганиладиган бўлса, табиий равишда, бошланғич шартлар берилган бўлиши (масалан, $t = t_0$ бошланғич онда кўчиш ва тезлик векторлари) керак бўлади.

Назорат саволлари

1. Қандай жисмга эластик жисм дейилади?
2. Умумлашган қонунини ифодаловчи формулани ёзинг.
3. Изотроп чизиқли эластик жисм учун Гук қонуни қандай кўринишда бўлади?
4. Ёпишқоқ суюлиқ моделини кучланиш тензори орқали ифодасини ёзинг.
5. Изотроп чизиқли ёпишқоқ суюқлик учун Навье-Стокс формуласи қандай кўринишда бўлади?

6. Навье-Стокс тенгламасининг Декарт координалар системасидаги ифодасини ёзинг.

7. Тенгламалар **система**си **ёпиқ** тенгламалар **система**си қачон **ёпиқ** тенгламалар ситемасини ташкил қилади?

8. Суюқликнинг динамик ва кинематик ёпишқоқлик **коэффициент**лари орасидаги муносабатни аниқланг.

9. Деформация тензорини кўчиш вектори орқали ҳисоблаш формулалари.

10. Ҳаракат қонуни берилганда деформация тензорини ҳисоблаш формулалари (Грин ва Альманси тензорлари).

11. Идеал суюқлик модели. Эйлер тенгламалари.

12. Эластик жисм ва ёпишқоқ суюқлик. Изотроп муҳитлар учун Гук ва Навье-Стокс қонунлари.

13. Ламе тенгламалари. Юнг модули ва Пуассон коэффициентлари.

14. Навье-Стокс тенгламалари. Динамик ва кинематик ёпишқоқлик коэффициентлари.

чекли V ҳажмдаги туташ муҳит учун ўзгариши тенгламасида ушбу

$$\int_{\Sigma} \vec{p}_n d\sigma = \int_V \left(\frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x^2} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial x^3} \right) d\tau$$

алмаштириш бажарайлик:

$$\int_V \vec{F} \cdot \rho d\sigma + \int_V \left(\frac{\partial \vec{P}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \vec{P}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \vec{P}^3}{\partial x^3} \right) d\tau - \int_V \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \cdot \rho d\tau = 0$$

Бундан ёза оламиз:

$$\rho \cdot \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \rho \cdot \vec{F} + \frac{\partial \vec{p}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \vec{p}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \vec{p}^3}{\partial x^3}.$$

Бу вектор кўринишидаги дифференсиал тенглама ***ихтиёрий туташ муҳит ҳаракати дифференциал тенгламаси*** дейилади. Бу тенглама узлуксиз ва узлуксиз дифференциалли параметрлари билан характерланувчи туташ муҳит учун ҳосил қилинди ва узлуксизлик бажарилганда чекли ҳажм учун келтирилган ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги тенгламага эквивалентдир. Демак, чекли ҳажми учун олинган ҳаракат миқдори ўзгариши тенгламаси умумийроқ ва ундан хусусий ҳолда юқорида келтирилган дифференциал тенгламани олиш мумкин. Декарт координаталари системасида

$$\vec{P}^i = p^{ki} \cdot \vec{e}_k \qquad \vec{\upsilon} = \upsilon^k \cdot \vec{e}_k$$
$$\vec{F} = F^k \cdot \vec{e}_k \; , \qquad \vec{p}_n = p_n{}^i \cdot \vec{e}_i$$

деб олсак, ушбу тенгламаларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} p_n{}^1 = p^{11} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{12} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{13} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \\ p_n{}^2 = p^{21} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{22} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{23} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \\ p_n{}^3 = p^{31} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^1) + p^{32} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^2) + p^{33} \cdot cos(\vec{n},^\wedge x^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\upsilon^1}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^1 + \dfrac{\partial p^{11}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{12}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{13}}{\partial x^3} \\ \rho \dfrac{d\upsilon^2}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^2 + \dfrac{\partial p^{21}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{22}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{23}}{\partial x^3} \\ \rho \dfrac{d\upsilon^3}{dt} = \rho \cdot \mathrm{F}^3 + \dfrac{\partial p^{31}}{\partial x^1} + \dfrac{\partial p^{32}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial p^{33}}{\partial x^3} \end{cases}.$$

Кучланиш тензори. Бош нормал ва уринма кучланишлар.

Ташқи ва ички кучлар таъсирида туташ муҳит деформацияланиши билан бирга унинг ҳар бир нуқтасида мос зарраларда кучланганлик ҳолати вужудга келади.

$\vec{P}_n$ кучланиш вектори, умуман олганда, нуқта координаталари бўйича ва олинган ҳар бир бирлик вектор $\vec{n}$ нинг йўналишига боғлиқ равишда ўзгаради. Туташ муҳит кучланганлик ҳолатида бўлганида, унинг ҳар бир нуқтасида ушбу жадвални киритиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} p^{11} & p^{12} & p^{13} \\ p^{21} & p^{22} & p^{23} \\ p^{31} & p^{32} & p^{33} \end{pmatrix}$$

Кучланиш вектори $\vec{P}_n$ нинг ихтиёрий Декарт координаталар системасида ушбу формуласини ёза оламиз:

$$\vec{p}_n = \vec{p}^{\,i} \cdot n_i = p^{ki} \cdot \vec{\text{э}}_k \cdot n_i = \vec{p}^{\,i} \cdot (\vec{\text{э}}_i \cdot \vec{n}) = p^{ki} \cdot \vec{\text{э}}_i \cdot (\vec{\text{э}}_i \cdot \vec{n})$$

Бу ифода $\vec{P}_n$ ва $\vec{n}$ векторлари ўртасидаги муносабатдир ва у ихтиёрий эгри чизиқли координаталар системасида ҳам ўринли бўлади. У ҳолда p^{ki} контравариант ташкил этувчиларига эга

$$P = p^{ki} \cdot \vec{\text{э}}_k \otimes \vec{\text{э}}_i$$

тензорни киритиш мумкин. Бу тензор ички кучланишлар тензори дейилади ва ушбу

$$p_n = \vec{p}^{\,i} \cdot n_i$$

ихтиёрий координаталар системасида ўринли бўлади. Биз

$$p^{ki} = p^{ik}$$

бўлган ҳолни кўриш билан чегараланамиз.

Кучланиш тензори учун тензор сирти деб Декарт координаталар системасида олинган

$$p^{ki} \cdot x_k \cdot x_i = 2\phi(x_1, x_2, x_3) = const$$

иккинчи тартибли сиртга айтилади.

Бу сиртни кучланганлик ҳолатидаги ихтиёрий нуқтада тузиш учун шу нуқтада ихтиёрий $\vec{n}$ нормалли юзачага таъсир этувчи $\vec{P}_n$ кучланишни олайлик ва унинг учун қуйидаги ифодалар ўринли бўлишини осонлик билан кўриш мумкин:

$$\vec{p}_n \cdot \vec{n} = p_{nn} = (\vec{p}^{\,i} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}_i = p^{ki} \cdot n_k \cdot n_i \,.$$

Агар тўғри бурчакли координаталар системасида текширилаётган нуқтада олинган радиус-вектори

$\vec{r} = x_i \cdot \vec{e}_i$ ва $n_i = \dfrac{x_i}{r}$

десак, юқоридаги квадратик формани тузиб тензор сиртини ҳосил қила оламиз. Бу сирт учун шундай ўзаро тик учта $\vec{r}$ йўналишларни кўрсатиш мумкинки, бу йўналишларга тик бўлган майдончаларда уринма кучланишлар нолга тенг бўлади ва бу йўналишлар кучланиш тензорининг бош ўқлари бўлади. Бу ўқларга нисбатан, равшанки, сирт тенгламаси каноник кўринишга эга бўлиб, бу сирт бош қийматларини ҳам топиш мумкин. Бош ўқларга тик бўлган элементар майдончага (олинган нуқта шу майдончададир) тегишли $\vec{P}_n$ кучланиш $\vec{n}$ нормал йўналишида бўлишидан, ёза оламиз:

$$\vec{p}_n = \lambda \cdot \vec{n},$$
$$\vec{p}_n = \lambda \cdot n_i \cdot \vec{e}_i,$$
$$p^{ki} \cdot n_i \cdot \vec{e}_k - \lambda n_i \cdot \vec{e}_i = 0$$
$$p^{ki} \cdot n_i \cdot \vec{e}_k - \lambda \cdot \delta_k^i \cdot n_i \cdot \vec{e}_k = 0$$
$$(p^{ki} - \lambda \cdot \delta_k^i) \cdot n_i \cdot \vec{e}_k = 0$$

Бундан $(p^{ki} - \lambda \cdot \delta_k^i) \cdot n_i = 0$. Бу тенгламадан $\left| p^{ki} - \lambda \cdot \delta_k^i \right| = 0$ ни топамиз. Агар бу детерминантни λ га нисбатан ёзсак, қуйидаги ҳақиқий илдизга эга бўлган кубик тенгламани ҳосил қила оламиз:

$$-\lambda^3 + J_1' \cdot \lambda^2 - J_2' \cdot \lambda + J_3' = 0$$

Бу ердан

$$J_1' = p^{11} + p^{22} + p^{33} = p^1 + p^2 + p^2$$
$$J_2' = \begin{vmatrix} p^{11} & p^{12} \\ p^{21} & p^{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p^{11} & p^{13} \\ p^{31} & p^{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p^{22} & p^{23} \\ p^{32} & p^{33} \end{vmatrix}$$
$$J_3' = det\left\| p^{ki} \right\|$$

J_1', J_2' va J_3' лар ***кучланиш тензори инвариантлари*** дейилади ва бу миқдор ихтиёрий координаталар системасида ўз қийматини ўзгартирмайди.

Уларнинг қиймати муайян пайт учун олинган туташ муҳит кучланганлигини белгиловчи p^{ki} ларгагина боғлиқдир. Улар туташ муҳит турли нуқталарида турли кучланганлик ҳолати мавжуд бўла олиши ва улар вақтга ҳам боғлиқ бўла олиши туфайли инвариантлар p^{ki} лар орқали олинган нуқта ва вақтга боғлиқдир. Берилган кубик тенглама $p^{ki} = p_{ki}$ бўлганлиги учун 3 та ҳақиқий илдизга эга, улар ***кучланиш тензорининг бош қийматлари*** дейилади ва уларни қуйидагича ёзамиз:

$$\lambda_1 = p_{n1} = p_1, \lambda_2 = p_{n2} = p_2, \lambda_3 = p_{n3} = p_3.$$

Назорат саволлари

1. Идеал суюқлик модели. Эйлер тенгламалари.
2. Эластик жисм ва ёпишқоқ суюқлик. Изотроп муҳитлар учун Гук ва Навье-Стокс қонунлари.
3. Ламе тенгламалари. Юнг модули ва Пуассон коэффициентлари.
4. Навье-Стокс тенгламалари. Динамик ва кинематик ёпишқоқлик коэффициентлари.

3-МАВЗУ: ТЕРМОДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

РЕЖА:

1. Термодинамиканинг асосий тушунчалари ва тенгламалари. Ички энергия.
2. Термодинамик ҳолат параметрлари
3. Термодинамиканинг биринчи қонуни

Таянч сўзлар: гидрология, метеорология, гидрометеорология хизмати, гидрометеорология маркази, гидрометеорология илмий текшириш институти, бошқармалар, хизмат соҳалари, бўлимлар, бўлинмалар.

Термодинамиканинг асосий тушунчалари ва тенгламалари.

Ички энергия.

Туташ муҳит термодинамикаси асосий тушунчалари ва қонуниятларини ўрганишдан аввал ихтиёрий туташ муҳит кинетик энергияси тушунчаси ва унинг ҳаракат жараёнида ўзгаришини кўрайлик. Агар туташ муҳит эгаллаган ҳажмни τ билан белгилаб, уни чексиз кичик ҳажмларга ва улардаги туташ муҳит бўлакларига ажратсак, ҳар бир ажралган элементар дτ бўлаклар учун кинетик энергия тушунчасини, моддий нуқталар учун аниқлагандек, ушбу ифода асосида ҳисоблаш мумкин:

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} d\tau .$$

Бу ерда $\rho(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{\upsilon}(x_1,x_2,x_3)$-зичлик ва тезликлар олинган элементар ҳажм нуқталарига тегишли ва туташ муҳит барча зарралари учун олинган бирор умумий т онда аниқланади ва элементар дτ ҳажмдаги туташ муҳит кинетик энергияси дейилади. Бу элементар кинетик энергиялар йиғиндиси интеграл йиғиндини ифодалайди ва таърифга кўра

$$K = \int_{\tau} \frac{\rho \vec{\upsilon}^2}{2} d\tau$$

миқдор кўрилаётган туташ муҳит кинетик энергияси дейилади. Моддий нуқталар системаси кинетик энергияси таърифига ўхшаш, туташ муҳит учун унинг элементар бўлаклари кинетик энергиялари йиғиндиси аддитивлик хоссасига эга деб фараз қилинади.

1. Энди Σ сиртга эга чекли τ ҳажмдаги туташ муҳит кинетик энергияси ўзгариши теоремасини ихтиёрий эгри чизиқли координаталар системасида кўрайлик.

Бунинг учун ҳаракат миқдори ўзгариши теоремасини ёзамиз:

$$\rho \vec{w} = \rho \vec{F} + \nabla_j \vec{P}^j \qquad (5.1)$$

(5.1) нинг ҳар икки томонини $d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot dt$ га кўпайтириб, $\sum$ сиртга эга τ ҳажм бўйича интеграллаймиз:

$$\int_\tau \rho\vec{w} \cdot \vec{\upsilon} \cdot dt \cdot d\tau = \int_\tau \rho\vec{F} \cdot d\vec{r} \cdot d\tau + \int_\tau (\nabla_j P^{ij})\upsilon_i \cdot dt \cdot d\tau \qquad (5.2)$$

Лекин:

$$\vec{w} \cdot \vec{\upsilon} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{\upsilon}^2}{dt} \quad \text{ва} \quad \int_\tau \rho\vec{w} \cdot \vec{\upsilon} \cdot \rho \cdot dt \cdot d\tau = d\left(\int_\tau \rho\frac{\upsilon^2}{2}d\tau\right)$$

бўлгани учун ёза оламиз:

$$dK = \int_\tau \rho\vec{F} \cdot d\vec{r} \cdot d\tau + \int_\tau (\nabla_j \mathrm{P}^{ij})\upsilon_i \cdot dt \cdot d\tau \qquad (5.3)$$

(5.2) ифодадаги сўнгги ҳадни алоҳида кўрайлик. Бу ерда

$$\left(\nabla_j P^{ij}\right)\upsilon_i = \nabla_j\left(P^{ij} \cdot \upsilon_i\right) - P^{ij}\nabla_j\upsilon_i = \nabla_j\left(P^{ij} \cdot \upsilon_j\right) - P^{ij} \cdot e_{ij} - P^{ij} \cdot \omega_{ij}$$

бўлиб, буерда

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j\upsilon_i + \nabla_i\right)\upsilon_j, \; \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j\upsilon_i - \nabla_i\upsilon_j\right)$$

У ҳолда

$$\int_\tau \nabla_j(P^{ij}) \cdot \upsilon_i \cdot dt \cdot d\tau = \int_\tau \nabla_j(P^{ij} \cdot \upsilon_i) \cdot dt \cdot d\tau - \int_\tau P^{ij} \cdot e_{ij} \cdot dt \cdot d\tau - \int_\tau P^{ij} \cdot \omega_{ij} \cdot dt \cdot d\tau =$$

$$= \int_\Sigma P^{ij} \cdot \upsilon_i \cdot n_j \cdot d\sigma \cdot dt - \int_\tau P^{ij}e_{ij} \cdot dt \cdot d\tau - \int_\tau P^{ij}\omega_{ij} \cdot dt \cdot d\tau \qquad (5.4)$$

Агар кучланиш тензори симметрик бўлса, сўнгги интеграл нолга тенг бўлишини исботлайлик:

ω_{ij} антисимметрик, яъни $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ бўлганлиги ва $\omega_{11}=\omega_{22}=\omega_{33}= 0$ бўлганлиги учун ёза оламиз:

$$P^{ij} \cdot \omega_{ij} = \left(P^{ij} - P^{ji}\right)\omega_{ij} \quad (\text{и} < \text{ж}).$$

(5.4) да ҳажм интегралдан сирт интегралга ўтиш формуласи ишлатилган ва бу ишлатилган ҳад учун ёза оламиз:

$$\int_{\Sigma} P^{ij} \cdot \upsilon_i \cdot n_j \cdot d\sigma \cdot dt = \int_{\Sigma} \vec{P}_n \cdot d\vec{r} \cdot d\sigma \qquad (5.5)$$

(5.4) ва (5.5) ни (5.3) га қўйиб, $P^{ij}=P^{ji}$ бўлган ҳол учун ёза оламиз:

$$dK = dA_m^{(e)} + dA_m^{(i)} + dA_c^{(e)} + dA_c^{(i)} \qquad (5.6)$$

бу ерда

$$dA_m^{(e)} = \int_{\tau} \rho(\vec{F}^{(e)} \cdot d\vec{r}\,) \cdot d\tau\,,\ dA_m^{(i)} = \int_{\tau} \rho(\vec{F}^{(i)} \cdot d\vec{r}\,) \cdot d\tau \qquad (5.7)$$

$$dA_c^{(e)} = \int_{\Sigma} (\vec{P}_n \cdot d\vec{r}\,) d\sigma\,,\ dA_c^{(i)} = -\int_{\tau} P^{ij} \cdot e_{ij} \cdot dt \cdot d\tau$$

д$A^{(e)}_м$-τ ҳажмдаги туташ муҳитнинг $d\vec{r} = \vec{\upsilon} \cdot dt$ элементар кўчишидаги ташқи массавий кучлар зичлиги бажарган иши, д$A^{(и)}_м$-ички массавий кучлар бажарган иши, д$A^{(e)}_с$-ташқи сирт кучларининг бажарган иши ва д$A^{(и)}_с$-ички сирт кучларининг бажарган иши дейилади.

Эслатма.

Агар кучланиш тензори симметрик бўлмаса, ички сирт кучлари бажарган иш формуласи қуйидагича бўлади:

$$dA_c^{(i)} = -\int_{\tau} P^{ij} \cdot e_{ij} \cdot dt \cdot d\tau - \int_{\tau} P^{ij} \cdot \omega_{ij} \cdot dt \cdot d\tau \qquad (5.8)$$

Шундай қилиб, чекли ҳажмдаги туташ муҳит ҳаракат жараёнида чексиз кичик кўчиш туфайли кинетик энергиянинг ўзгариши (5.6) формулага кўра ўзгаради.

2. Чексиз кичик ҳажмдаги туташ муҳит учун кинетик энергиянинг ўзгариши теоремасини кўрайлик.

Энди (5.3) формулани $\rho \cdot d\tau = dm$ элементар массага эга туташ муҳит зарраси учун ёзайлик. Бунинг учун (5.3) формулага ўрта қиймат ҳақидаги формулани қўллайлик ва дм массага бўлиб, $\tau \to 0$ учун ёза оламиз:

$$d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla_j\left(P^{ij}\right) \cdot \upsilon_i \cdot dt \qquad (5.9)$$

бу ерда

$$\frac{1}{\rho}\nabla_j\left(\mathrm{P}^{ij}\right) \cdot \upsilon_i \cdot dt = \frac{1}{\rho}\nabla_j\left(\mathrm{P}^{ij} \cdot \upsilon_i\right) \cdot dt - \frac{1}{\rho}\mathrm{P}^{ij} \cdot \nabla_j \cdot \upsilon_i \cdot dt$$

бўлиб, биринчи ҳад ташқи сирт кучлари бажарадиган иш зичлиги, иккинчиси эса ички сирт кучлари бажарадиган иш зичлиги дейилади.

Ички сирт кучлари бажарадиган иш зичлиги ифодасини кўрайлик:

$$\frac{1}{\rho d\tau} dA_c^{(i)} = -\frac{1}{\rho} P^{ij} \cdot \nabla_j \cdot \upsilon_i \cdot dt = -\frac{1}{\rho} P^{ij} e_{ij} \cdot dt - \frac{1}{\rho} P^{ij} \cdot \omega_{ij} \cdot dt$$

Агар туташ муҳит абсолут қаттиқ жисм сифатида ҳаракат қилса, Гелмголс теоремаси асосида, яъни

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right] + grad\Phi$$

га кўра Ф≡0 бўлганлиги учун ва демак $э_{иж} = 0$ бўлиб, ички сирт кучлари бажарган иш зичлиги $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{\upsilon} \neq 0$ бўлган ҳолда

$$\frac{1}{\rho d\tau} dA_c^{(i)} = -\frac{1}{\rho}(P^{ij} - P^{ji}) \cdot \omega_{ij}$$

бўлади.

Агар кучланиш тензори симметрик бўлса:

$$\frac{1}{\rho d\tau} dA_c^{(i)} = -\frac{1}{\rho} P^{ij} e_{ij} \cdot dt \qquad (5.10)$$

бўлади.

4.2 Термодинамик ҳолат параметрлари.

Суюқликлар, газлар ва деформацияланувчи қаттиқ жисмлар классик моделлари айрим ўзгармас ички ва ташқи шароитлардагина ўз таърифлари бўйича аниқланган чегаралар доирасида ўринли бўла олишини тасаввур қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, масалан температура ўзгариши билан суюқликлар музлаши ва ҳатто оддий статик кучлар таъсирида ҳам бу муҳит ички уринма кучлар ишлари нолдан фарқли бўлишини кўриш мумкин. Ҳудди шунингдек, температура ўзгариши изотроп эластик жисмларнинг сиқилиши ёки чўзилишига, ва демак, ички кучланишларнинг ўзгаришига олиб келиши мумкин. Биринчи мисол туташ муҳит бир турдаги моделидан бошқа турга ўтиши-суюқлик ўрнига қаттиқ жисм билан иш кўриш кераклигини тақозо этса, иккинчиси эса классик эластик жисм моделидаги кучланиш тензори ва деформация тензорлари ўртасидаги функционал муносабатни кенгроқ доирада таҳлил қилишга, яъни температура ўзгаришининг бу муҳитни характерловчи p^{ij} ва ε^{ij} лар қаторида бўлиши зарурлигини тақозо этади. Албатта, температуранинг ўзгариши ҳамма вақт бизга маълум бўлган суюқлик ва газлар моделларидан воз кечишга олиб келмайди: температуранинг ўзгариши суюқлик ва газлар ҳолатини аниқловчи функсионал муносабатда ўз аксини топиши ва демак, масалан босим функцияси П, муҳитнинг зичлиги ρ лар қаторида бўлиши кераклиги эътиборда бўлишлигини тушиниш керак бўлади.

Туташ муҳит термодинамикаси асосларида туташ муҳит чексиз кичик зарраси учун “ҳолат параметрлари” деб аталувчи термодинамик ҳолат параметрлари киритилади. Бу параметрлар кўрилаётган туташ муҳитнинг ихтиёрий зарраси учун механик жараёнда уни тўла аниқлаб бера оладиган ўзгарувчан ва ўзгармас миқдорларга айтилади. Туташ муҳит зарраси тушунчаси макроскопик нуқтаи назардан кўрилади. Макроскопик нуқтаи назардан зарра бир томондан чекли ҳажмдаги муҳитга тегишли бўлса, иккинчи томондан шу ҳажм ичра ҳолат параметрлари ўзгариши эътиборга олинмайдиган даражада кичик, деб қаралиши билан характерланади ва шунинг учун ҳам ҳолат параметрлари ҳар бир индивидуал зарра ва унинг маркази сифатида қараладиган геометрик нуқтага тегишли деб олиниши мумкин. Шунинг учун ҳам туташ муҳитлар механикасида макроскопик ҳолат параметрлари билан иш кўрилади ва бу параметрлар ажратилган айрим «физик заррага» тегишли деб қаралади. Масалан, газлар учун ρ ва п лар ҳолат параметрлари бўла олади. Ўзгарувчи ҳолат параметрларини $\mu^1, \mu^2, \ldots\ldots, \mu^n$, ўзгармасларини $k^1, k^2, \ldots\ldots, k^m$ билан белгилайлик.

Туташ муҳит зарраси ҳолатини акслантириш учун ҳолат параметрлари сонига тенг бўлган n ўлчовли фазони киритайлик ва бу фазонинг ҳар бир М нуқтаси n та координаталар билан бир қийматли аниқланишидан фойдаланайлик. Бу фазога ҳолат фазоси дейилади ва μ^i ларнинг ўзгариши шу фазо учун маълум чизиқ траекторияларни беради: ҳар бир чизиқ бўйлаб силжиш "физик зарра" учун унинг механик жараён давомида ўзгаришини беради. Газлар учун ҳолат параметрлари сифатида, масалан, $\mu^1 = \mathrm{p}, \mu^2 = \dfrac{1}{\rho}$ олиниши (босим ва зичликлар ҳолат параметрлари сифатида олиниши), классик эластик жисмлар учун $\mu^1 = \mathrm{p}^{11}, \mu^2 = p^{22}$, $\mu^3 = \mathrm{p}^{33}, \mu^4 = \mathrm{p}^{12}, \mu^5 = \mathrm{p}^{23}, \mu^6 = \mathrm{p}^{31}, \mu^7 = T$-температура олиниши мумкин. Биринчи ҳолда n=2 бўлиб, ҳолат фазоси текисликдан, иккинчи ҳолда n=7 бўлиб, ҳолат фазоси етти ўлчовли ҳолат фазосидан иборатдир.

Агар ҳолат фазоси параметрлари механик жараён давомида ўзгариши ўзаро боғланишда бўлса, ҳолат параметрлари учун эркин ҳолат параметрлари тушунчасини киритиш мумкин. Бу боғланишлар m та интегралланмайдиган дифференсиал муносабатлардан иборат бўлса, назарий механикадаги система эркинлик даражаси аниқлангани сингари аниқланади, яъни эркинлик даражаси n-m та бўлиб, ўзаро боғлиқ бўлмаган μ^i лар орқали ифодаланади, қолган м та μ^i лар дифферцисиал муносабатлар асосида аниқланиши мумкин. Бундай механик система голоном бўлмаган термодинамик система дейилади.

Ҳолат фазосида μ^i ларнинг $d\mu^i$ ларга ўзгартириш ҳисобига олдинги ҳолатга нисбатан янги термодинамик ҳолатга ўтиш мумкин. Бу кўчишни турли туташ муҳитлар учун реал вақт ўзгариши давомида содир бўлади, деб қараш керак. Бу кўчиш термодинамик жараён дейилади. Ҳолат фазосида бирор М нуқтадан икки n нуқтага узлуксиз равишда ўтиш турли чизиқлар билан бажарилиши мумкин. Умуман айтганда, кўчиш жараёнида айрим ҳолат параметрлари ўзгармас сондан иборат бўлган тарзда содир бўлиши ҳам мумкин.

Термодинамик жараёнларда μ^i лар узилишга эга бўлган ҳолда ҳам содир бўлиши мумкин. Агар узлуксиз термодинамик жараёнда механик система ўз ҳолатидан бошқа ҳолатларга μ^i лар ўзгариши (айрим μ^i лар ўзгармасдан иборат бўлиб қолиши ҳам мумкин) туфайли узлуксиз чизиқ чизиб ўз ҳолатига қайтиб келса, бундай ёпиқ чизиқ цикл дейилади.

Туташ муҳит ҳолат параметрлари ўзгариши табиий ҳолда ўз-ўзидан бўла олмайди. Бунинг учун кўрилаётган «макроскопик элементар зарра» ўзига нисбатан ва умуман, кўрилаётган чекли ҳажмдаги туташ муҳит зарралари ва ташқи муҳит туфайли таъсир сабабларига эга бўлади. Булар механик энергия, иссиқлик миқдори ўзгаришига боғлиқ иссиқлик энергияси, электродинамик майдон ва кимёвий реаксиялар билан боғлиқ энергия ва ниҳоят, турли куч майдонларидан иборат бўлиши мумкин. Чекли τ ҳажмдаги Σ сирт билан ажратилган туташ муҳит устида фикр юритилганда ҳам, массавий ва сирт кучларидан ташқари бу туташ муҳит турли бўлакларида энергия алмашинуви ва ички ўзгаришлар ҳам кўрилаётган туташ муҳит турли қисмларидаги «макроскопик элементар зарра» лар ҳолат параметрлари ўзгаришига олиб келиши мумкин ва буларнинг траекториялари ҳолат фазосида турли чизиқларни «чизиши» мумкин. Механик кучлар билан бирга, системага иссиқлик ўтказувчанлик сабабли, иссиқлик энергиясининг келиши ва бошқа турдаги энергия оқимларини ҳисобга олиш зарурати ҳам пайдо бўлиши мумкин.

Термодинамиканинг биринчи қонуни

Биз юқорида энергиянинг турли кўринишлари мавжудлигини таъкидладик.Тажрибалар асосида энергия ўз-ўзидан ҳосил бўлмаслиги ва йўқолмаслиги энергия миқдори ўзгармас бўлиб қолиши ва бир формадан бошқа формага ўта олишини кузатиш мумкин. Тажрибалар асосида ўрнатилган бу ҳақиқат XIX аср ўрталарида немис олими, маълумоти бўйича врач Р. Маер (1814-1878), инглиз олими Д.Джоул (1818-1889) томонидан очилган бўлиб, немис олими Г.Гелмьголц (1821-1894) асарларида энергиянинг сақланиш қонуни сифатида етарли даражада ўз ифодасини топди.

Иссиқлик ҳодисалари билан боғлиқ равишда энергиянинг бир турдан иккинчи турга ўтиши ва ҳар бир туташ муҳит зарраси учун унинг ҳолат фазосидаги кўчишига бу қонуннинг татбиқи туташ муҳит механикасида термодинамиканинг биринчи қонуни ифодаланишига, яъни энергия сақланиш қонуни ўрнатилишига олиб келади.

Фараз қилайлик, туташ муҳит «физик зарраси» дастлаб бирор онда ҳолат фазоси $A(\mu_0^1,\mu_0^2,.....,\mu_0^n)$ нуқтаси билан аниқлансин. Сифат жиҳатидан турли кўринишда бўлган энергияларнинг бу зарра томонидан қабул қилиниши(ёки сарфланиши-манфий ишорага эга ҳолда қабул қилиниши) туташ муҳит зарраси ҳолат параметрлари μ^i ларнинг ўзгаришига олиб келиши мумкин. Бошқача айтганда, туташ муҳит кучланганлик-деформацияланганлик ҳолати, унинг механик нуқтайи назардан кўчиши фақат массавий ва сирт кучларининггина эмас, балки хусусан механик энергияга айланиши мумкин бўлган бошқа турдаги энергиялар таъсири туфайли маълум жараёнлар ҳолат фазосида узлуксиз траекториялар чизишини тасаввур этайлик. А нуқтадан ҳолат фазосининг $B(\mu^1, \mu^2, ..., \mu^n)$ нуқтасига турли чизиқлар билан ўтиш мумкин, яъни кўчиш жараёни ташкил этувчи чексиз кичик $d\mu^i$ лар, агар улар ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳолат параметрлари сифатида қабул қилинса, ихтиёрий равишда ўзгариши мумкин. Тушуниш қийин эмаски, $\mu^и$ ларнинг айримлари кўчиш жараёнида ўзгармасдан қолиши мумкин.

Энди кўрилаётган жараён ҳолат фазосида ихтиёрий ёпиқ контур С бўйича олинса, барча маълум бўлган тажрибалар асосида ушбу интеграл нолга тенг бўлади:

$$\oint (P_i + Q_i) d\mu^i = 0 \qquad (5.11)$$

(5.11) муносабат термодинамиканинг биринчи қонуни дейилади.

Агар С ёпиқ контурни $Z = Z_1 + Z_2$-икки контур йиғинди сифатида олсак:

$$\int_{Z_1} (P_i + Q_i) d\mu^i = -\int_{Z_2} (P_i + Q_i) d\mu_i \qquad (5.12)$$

А ҳолатдан В ҳолатга ўтганда туташ муҳит зарраси қабул қилган тўла энергия

$$A^{(e)} + Q^* = \int_{Z_1} (P_i + Q_i) d\mu^i \qquad (5.13)$$

га тенг бўлади.

(5.11), (5.12) ва (5.13) асосида туташ мухит ҳолати А нуқтада аниқланган бўлса, В ҳолатга ўтганда унинг энергияси А ва В ларни туташтирувчи ихтиёрий эгри чизиқлар қандай бўлишидан қатъий назар, зарра қабул қилинган энергия миқдори бир хил бўлганлиги учун шундай э$(\mu^1, \mu^2, ..., \mu^n)$ функция киритиш мумкинки, натижада ушбу формулани ёзиш мумкин:

$$A^{(e)}+Q^{*}= э(\mu^1,\mu^2,.....,\mu^n) - э(\mu_0^1,\mu_0^2,.....,\mu_0^n) \qquad (5.14)$$

$$дE = дA^{(e)} + дQ^{*} = (П_и+Q_и)д\mu^и \qquad (5.15)$$

Е = э$(\mu^1,\mu^2,.....,\mu^n)$ функция кўрилаётган туташ муҳит зарраси тўла энергияси дейилади. Бу функция, (5.14) асосида тасдиқлаш мумкинки, ўзгармас сон катталигида аниқланади.

Таққослаш учун назарий механикадаги массаси м бўлган моддий нуқтанинг оғирлик майдонидаги ҳаракати ўрганилгандаги тўла энергия тушунчасини кўрайлик. Тўла кинетик энергия $T=\frac{m\upsilon^2}{2}$ ва потенциал энергия (В=мгҳ+const кўринишидаги ифодани олайлик) лар йиғиндиси Т+В=const га тенг бўлиб, ва бу миқдор ўзгармас сон катталигида аниқланади.

Агар $П_и$ ва $Қ_и$ лар берилган бўлса, тўла энергияни ҳисоблаш мумкин. (5.15) асосида $П_и$ ва $Қ_и$ лар ихтиёрий функциялар бўла олмаслиги ва булар учун, агар барча $d\mu^i$ ўзаро боғланиш тенгламаларига эга бўлмаса, ушбу муносабатлар ўринли бўлади:

$$(П_и+Қ_и) = \frac{\partial E}{\partial \mu^i} \qquad (5.16)$$

Чексиз кичик $\Delta\tau$ ҳажмда туташ муҳит учун ички энергиясини икки қисмга ажратиб қарайлик: биринчиси $\Delta\tau\cdot\rho\cdot\frac{\upsilon^2}{2}$ ва иккинчиси $E - \Delta\tau\cdot\rho\cdot\frac{\upsilon^2}{2} = U\cdot\Delta m$. Бу ерда киритилган $U(\mu^1,\mu^2,.....,\mu^n)$ функция бирлик массага мос келувчи ички энергияни ифодалайди.

Агар туташ муҳит τ ҳажмни эгаллаган чекли соҳага тегишли бўлса, кўриш қийин эмаски, унинг тўла энергияси учун ушбу формулани келтириш мумкин:

$$E=\int_{\tau}\rho\left(\frac{\upsilon^2}{2}+U\right)d\tau \qquad (5.17)$$

(5.14) асосида ушбу тенгликни ёза оламиз:

$$дE+дУ_м=дA^{(e)}+дҚ^{*} \qquad (5.18)$$

ёки барибир:

$$дE+дУ_м=дA^{(e)}+дҚ^{(e)}+дҚ^{**} \qquad (5.19)$$

(5.19) да $дУ_м$-жисм ички энергияси ўзгариши.

Иссиқлик оқими тенгламаси

(5.19) ва (5.16) тенгликлар бир хил ҳажмда жойлашган чекли массага эга туташ муҳит учун ҳолат фазосида бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтиш жараёнлари учун ёзилган дейлик. У ҳолда бу тенгликлардан ёза оламиз:

$$дУ_м=дA^{(e)}-(dA_m^{(e)}+dA_n^{(i)}+dA_c^{(e)}+dA_c^{(i)})+dQ^{(e)}+dQ^{**}$$

$$дУ_м=-дA^{(и)}+dQ^{(e)}+dQ^{**} \qquad (5.20)$$

бу ерда $dA^{(e)}=dA_m^{(e)}+dA_c^{(e)}$-барча ташқи массавий ва сирт кучлари иши, $dA^{(i)}=dA_m^{(i)}+dA_c^{(i)}$-барча ички массавий ва сирт кучлари иши.

(5.20) тенглама **иссиқликнинг оқиши тенгламаси** дейилади.

Агар жараён жуда секинлик билан рўй берадиган бўлса, дE=0 дейиш мумкин бўлса,

$$dA^{(i)}=-dA^{(e)}$$

бўлади.

У ҳолда иссиқликнинг оқиш тенгламаси ушбу кўринишга эга бўлади.

дУ$_м$=дА$^{(е)}$ +дҚ* (5.21)

Бу тенглама (5.18) тенгламадан ҳам келиб чиқади.

(5.19), (5.20) ва (5.21) тенгламалар чекли τ ҳажмдаги туташ муҳит учун ёзилган эди. энди бу тенгликлар ихтиёрий чексиз кичик ҳажмдаги туташ муҳит учун кўрайлик. Бу тенгликлар ихтиёрий чексиз кичик ҳажмдаги туташ муҳит учун ҳам ўринли эканлиги ва интеграл остидаги ифодалар узлуксиз бўлган ҳолни кўрайлик. энди бирлик массалар учун ушбу муносабатлар ўринли деб фараз қилайлик:

$$\lim_{\Delta m\to 0}\frac{V_{\Delta m}}{\Delta m}=U\,,\ \lim_{\Delta m\to 0}\frac{dQ^{(e)}}{\Delta m}=dq^{(e)},$$

$$\lim_{\Delta m\to 0}\frac{dQ^{**}}{\Delta m}=dq^{**}.$$

У ҳолда

$$dU=\frac{1}{\rho}\rho^{ij}\nabla_j\upsilon_i dt+dq^{(e)}+dq^{**} \qquad (5.22)$$

Агар чексиз кичик деформация назарияси доирасида иш кўрилса, классик туташ муҳитлар учун п^{иж} = п^{жи} ни ҳисобга олинган ҳол учун иссиқликнинг оқиш дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$dU=\frac{1}{\rho}\rho^{ij}d\varepsilon_{ij}+dq^{(e)}+dq^{**} \qquad (5.23)$$

бу ерда

$$d\varepsilon_{ij}=e_{ij}dt.$$

Назорат саволлари

1. Тирик куч теоремаси. Ташқи ва ички кучлар иши.
2. Термодинамиканинг биринчи қонуни.
3. Адиабатик, изотермик ва политроп жараенлар. Пуассон адиабатаси.
4. Термодинамиканинг 2нчи қонуни. Карно теоремаси.
5. Ёпишқоқ суюқлик ҳаракати математик модели. Гиббс формуласи.
6. Термоэластик жисм ҳаракати математик модели.
7. Термоэластик жисм учун Гук қонуни.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ. ТУТАШ МУҲИТ ҲАРАКАТИНИ ТАВСИФЛАШДА ЛАГРАНЖ ВА ЭЙЛЕР КООРДИНАТАЛАРИ.

.

1.1 Муҳитнинг ҳаракат тенгламаси. Моддий нуқта ҳаракатини тавсифлашда Эйлер усули. Эйлер ва Лагранж координаталари ўртасидаги боғланиш

1.2 Деформация тензори, унинг бош ўқлари ва бош қийматлари. Жисм ҳажмини ўзгариш тезлиги .

Туташ муҳит ҳаракатини вақтнинг ихтиёрий моментида Декарт координаталар системасида қараймиз. Фазонинг $\vec{x}$ - радиус векторини ҳаракат давомида ўзгармас қилиб оламиз. У ҳолда радиус-вектор орқали белгиланган фазодаги моддий нуқта турли параметрлар билан тавсифланиши мумкин. Фазонинг танлаб олинган $\vec{x}$ нуқтасидан вақтнинг турли моментида турли моддий нуқталар ўтиб туради. Бошқача қилиб айтганда, ҳамрох Декарт координата системасининг маълум нуқтасидан, ўтиб бораётган моддий нуқталарга тегишли параметрлар ўрганилади. Масалан $\vec{V}(\vec{x},t)$- тезлик Эйлер майдонини ҳосил қилади ва $\vec{x}$ - Эйлер координатасидир. Ҳар бир $\vec{x} = const$ учун моддий нуқта ўз траекториясини “чизиб” ўтади. Агар ушбу майдонда $\vec{V}(\vec{x},t)$тезлик маълум бўлса вақтнинг dtбўлагида $\vec{V}(\vec{x},t)dt$ кўчишга эга бўлишини кўриш қийин эмас. Ушбу кўчишни $d\vec{x}$ десак:

$$d\vec{x} = \vec{V}(\vec{x},t)dt$$

бўлади. Бундан

$$\frac{dx^k}{dt} = V^k(x^1, x^2, x^3, t) \qquad (1.11)$$

Фараз қилайлик, (1.11) дифференциал тенгламалар системаси интеграллари аниқланган бўлсин:

$$x^k = x^k(c_1, c_2, c_3, t) \tag{1.12}$$

Бошланғич ҳолатда моддий нуқталар ҳолати X^k лар билан аниқланади:

$$x^k\Big|_{t=t_0} = X^k$$

c_1, c_2, c_3 лар X^k лар орқали ифодаланади.

Демак, x^1, x^2, x^3, t Эйлер координаталаридан $V^k(x^1, x^2, x^3, t)$маълум бўлса X^1, X^2, X^3, t Лагранж координаталарига ўтиш мумкин. Худди шунингдек Лагранж координаталаридан Эйлер координаталарига ҳам ўтиш мумкин. Масалан, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{X}, t)$ маълум бўлса $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x}, t)$ топиш зарур бўлсин:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t)$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{V}(\vec{X}, t)$$

Бундан

$$\vec{V} = \vec{V}\left\lfloor \vec{X}(\vec{x}, t), t \right\rfloor = \vec{V}(\vec{x}, t)$$

келиб чиқди.

Эйлер координата системасида тезлик ва тезланиш. Ихтиёрий нуқталар тезлиги $\vec{V} = \vec{V}(x^1, x^2, x^3, t)$ ва $\vec{x} = \vec{x}(\vec{X}, t)$ маълум бўлса у ҳолда, $\vec{V} = \vec{V}(x^1(\vec{X}, t), x^2(\vec{X}, t), x^3(\vec{X}, t), t)$ $\vec{X}$ нуқтада аниқланади.

$$V^k = V^k(x^i, t)$$

ифода учун

$$\frac{\partial V^k}{\partial t}$$

тезланиш бўла олмайди, чунки

$$W^i = \frac{dV^i}{dt} = \frac{\partial V^i}{\partial t} + \frac{\partial V^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial t} = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^j \cdot \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$$

Умуман олганда ҳар икки усул бўйича моддий нуқта ҳаракатини тавсифлаш эквивалент ҳисобланади. Туташ муҳит ҳолатига мувофиқ у ёки бу координата системасини қўллаш мумкин. Одатда суюқлик муҳитида Эйлер координатасини қўллаш мақсадга мувофиқ. Қаттиқ жисмлар учун Лагранж координатасини қўллаш мақсадга мувофиқдир.

Деформация тензори унинг бош ўқлари ва бош компоненталари

Биз кўрдикки, деформация тензори-симметрикдир. Шунинг учун $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ тензор элементлари билан туташ муҳитнинг ҳар бир нуқтасида $\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j = C$ квадратик формани тузиш мумкин. Маълумки, агар $\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j$ квадратик форма туташ муҳит бирор нуқтасига тегишли бўлса, алгебрадан маълумки, шу нуқтада уни каноник кўринишга келтириш мумкин, яъни

$$\varepsilon_1 \left(d\eta^1\right)^2 + \varepsilon_2 \left(d\eta^2\right)^2 + \varepsilon_3 \left(d\eta^3\right)^2 = C_1$$

Бу ерда ўзаро ортогонал η^1, η^2, η^3 координата ўқлари ўқларидир. Бунда ε_{ij} лар координата ўқлари ўзгаришига қараб ўзгаради ва η^1, η^2, η^3 ларга нисбатан $\varepsilon_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ бўлади. Ўзаро ортогонал η^1, η^2, η^3 лар маълум бўлса, квадратик форма $\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j$ каноник кўринишга келади.

Шундай қилиб, деформацияланувчи туташ муҳит исталган нуқтаси атрофи деформацияси ε_{ij} билан бериладиган бўлса, шу нуқтада деформация жараёни давомида ўзаро ортогонал бўлган узлуксиз ҳаракатлананувчи 3 та ўқларни тузиш мумкин. Бу ўқларга нисбатан $\varepsilon_{ij}\, dx^i dx^j$ квадратик форма қурилганда, у энг содда ҳолда бўлиб, деформацияни характерловчи тензор элементларидан тузилган матрица диагонал матрицадан иборат бўлади.

Шундай қилиб, бош ўқларга нисбатан ушбу матрицаларга эга бўламиз:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon^{1.}_{.1}, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon^{2.}_{.2}, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon^{3.}_{.3} \end{pmatrix}$$

Тушуниш қийин эмаски, бу ҳолда ўқлар бўйлаб олинган тола учун фақат чўзилиш ёки сиқилиш деформациясигина мавжуд бўлиши мумкин.

Энди деформация тензорининг бош компоненталари ҳақида фикр юритайлик. Дастлабки $t = t_0$ моментда, яъни бошланғич пайтда туташ муҳит ҳолати маълум деб қабул қиламиз. Бу пайтда, асосан, энг табиий ҳолат сифатида туташ муҳит деформацияланмаган ва унинг ҳолатини уч ўлчовли Декарт координата системасида бериш мумкин.

Деформация тензори сирти

Шундай қилиб, деформацияланган туташ муҳит ҳар бир нуқтасида шу нуқтанинг функциялари сифатида 6 та ε_{ij} га эгамиз. Улар нуқтадан нуқтага ўтишда, умуман олганда, ўзгариши билан бирга вақтга ҳам боғлиқ бўлиши мумкин. Деформация тензори бош ўқлари ва бош қийматлари устида фикр юритилганда ҳар бир ондаги йўналиш ва қийматлар назарда тутилади. Олинган ҳар бир нуқта учун тўғри бурчакли Декарт координата системаси киритиб, ушбу $\varepsilon_{ij}\, x^i \cdot x^j = c^2$ квадратик форма орқали тузилган иккинчи тартибли сирт деформация тензори сирти дейилади. Деформация тензори бош ўқлари ва бош қийматлари шу сиртнинг бош ўқлари ва бош қийматлари билан бир хил қилиб олиниши мумкин. Аналитик геометриядан маълумки, иккинчи тартибли сиртлар ўз инвариантларига эга бўладилар, яъни шу сиртни характерловчи шундай 3 та скаляр миқдор кўрсатиш мумкинки, деформацияланган туташ муҳит ҳар бир нуқтадаги тўғри бурчакли координаталар системасини алмаштирганда бу миқдорлар ўзгармайдилар ва улар, табиий ҳолда, ε_{ij} лар орқали аниқланадилар.

Агар бош ўқларни x^i лардан фарқлаш учун $\eta^и$ лар билан белгиласак, уларга нисбатан деформация тензори сирти қуйидагича бўлади:

$$\varepsilon_1(\eta^1)^2 + \varepsilon_2(\eta^2)^2 + \varepsilon_3(\eta^3)^2 = c_1^2 \qquad (3.21)$$

Энди юқорида айтилган бош қийматлар ва бош ўқларни топиш билан шуғулланамиз.

Агар $2F(x^1, x^2, x^3) = \varepsilon_{ij} x^i x^j = c^2$ десак, бош йўналишлар учун $gradF = \lambda\vec{x}$ бўлиши керак. Бу ерда λ -скаляр миқдор.

Агар $\vec{e}_i$ - бирлик базис векторлар киритсак, ёза оламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \vec{e}_i = \lambda x^j \, \vec{e}_j$$

$$(\varepsilon_{ij} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_j) \cdot x^j = 0$$

Бундан

$$(\varepsilon_{i1} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_1) = 0$$

$$(\varepsilon_{i2} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_2) = 0$$

$$(\varepsilon_{i3} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_3) = 0$$

$\vec{e}_i$ лар ўзаро тик бирлик базислар бўлганлиги туфайли

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

бўлиши керак. Бундан

$$-\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0$$

Бу ерда

$$J_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

$$J_2 = \left(J_1^2 - \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}\right) \cdot \frac{1}{2} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

$$J_3 = det\left|\varepsilon_{ij}\right|$$

Бу миқдорлар - деформация тензори сиртининг инвариантларидир.

Бу тенгламанинг ҳақиқий, ўзаро тенг бўлмаган $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ илдизлари бош миқдорларни белгилайди. Масалан, хусусий ҳолда, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ бўлса, деформация тензори сирти сферадан иборат бўлади ва барча ўзаро тик қилиб олинган (текширилаётган нуқта учун) йўналишлар бош йўналишлар бўлади ва бош миқдорлар ўзаро тенг бўлади.

Деформация тензори сиртининг бош йўналишларини топайлик. Бунинг учун юқоридаги

$$\left(\varepsilon_{ij} \cdot \vec{e}_i - \lambda \cdot \vec{e}_j\right) \cdot x^j = 0$$

ифоданинг ҳар иккала томонини бирлик базис вектор $\vec{e}_i$ га скаляр равишда кўпайтирамиз:

$$\left(\varepsilon_{ij} - \lambda \cdot \delta_{ij}\right) \cdot x^j = 0$$

Агар

$$l^i = \frac{x^i}{|\vec{x}|} = cos\left(\vec{l} \cdot \vec{e}_i\right) \qquad \text{киритсак}$$

$$\left(\varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}\right) \cdot l^j = 0 \tag{3.23}$$

ва $(l^1)^2 + (l^2)^2 + (l^3)^2 = 1$ ифодаларга эга бўламиз ва булардан ҳар бир λ_i га мос равишда тўғри келадиган 3 та бош йўналишларни топа оламиз.

Тензор. Тензорлар устида амаллар. Тензорнинг инвариантлари. Хос сон ва хос векторларни аниклаш

Ҳар қандай тензор ҳамма вақт симметрик ва антисимметрик тензорлар йиғиндиси шаклида езиб олиниши мумкин:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right),$$

бу ерда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right), \qquad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right),$$

симметрик ва антисимметрик тензорлар эканлигини текшириб кўриш мумкин.

Мисол:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 2 & 5\\3 & 1 & 6\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+1 & 2+4 & 3+3\\4+2 & 2+2 & 5+1\\3+3 & 1+5 & 6+6\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-1 & 2-4 & 3-3\\4-2 & 2-2 & 5-1\\3-3 & 1-5 & 6-6\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\3 & 2 & 3\\3 & 3 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

.

σ_{ij} тензор учун $\sigma = \sigma_{ii}$ ўринли эканлигидан

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

иккинчи тартибли тензорнинг

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma\delta_{ij}$$

девиатори, σ – эса унинг шарли қисми деб аталади. Девиатор учун
$\tau_{ii} = 0$ ўринли бўлади.

Берилган a_{ij} матрица элементларини вектор компоненталарига мос равишда кўпайтирсак, бирор b_i вектор компонеталарини аниқлашимиз мумкин. Натижада номаълум x_j аниқлаш қуйидаги чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз $a_{ij}\, x_j = b_i$.

Мисол 1. Ушбу квадрат матрицани қараймиз

$$A = \begin{pmatrix}-1 & -6\\2 & 6\end{pmatrix}$$

ва уни

$$\bar{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

вектрга кўпайтирамиз.

Натижада

$$A\bar{b} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot (-1) - 6 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \bar{c}$$ яъни янги $\bar{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ вектор ҳосил бўлди. Биз учун маълум бўлган оддий амални бажардик. Энди ушбу матрицани $\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ векторга кўпайтирамиз.

$$A\bar{u} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Натижада биз берилган векторга пропоцианал векторни ҳосил қилдик. Бундан, ҳосил бўлган тенгламалар системасини ўнг томони изланаетган номаълум векторга пропорцианал бўлиши ҳам мумкин экан, яъни

$$a_{ij}\, x_j = \gamma x_i$$

У ҳолда, биз бир жинсли алгебраик тенгламалар системасига келамиз:

$$\left(a_{ij} - \gamma \delta_{ij}\right) x_j = 0$$

Тривиал бўлмаган ($x_j \neq 0$) базис вектор компоненталари учун, қуйидаги характеристик тенгламага эга бўламиз

$$\left| a_{ij} - \gamma \delta_{ij} \right| = 0$$

Шундай қилиб охирги тенгламадан хос сонни , ушбу қийматларга мос келувчи базис функцияларни олдинги бир жинсли тенгламалар системасидан аниқланади.

Мисол 2.

1 мисолда берилган матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ учун хос сон ва базис функцияларни аниқлаймиз:

$\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ орқали номаълум векторни белгилаб оламиз.У ҳолда қуйидаги матрицавий тенгламага келамиз

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Бир жинсли нолдан фарқли ечимини топиш

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Шартидан хос сонларни аниқлаймиз

$$(-1-\lambda)(6-\lambda)-2\cdot(-6)=0$$

$$\lambda^2-5\lambda-6+12=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$D=25-24=1;\ \sqrt{D}=1$$

$$\lambda_1=\frac{5-1}{2}=2$$

$$\lambda_2=\frac{5+1}{2}=3$$

Ушбу хос сонларга мос базис функцияларни аниқлаш учун қуйидаги тенгламалар системасини қараймиз:

1) $\lambda=\lambda_1=2$ хос сонга мос хос векторларни аниқлаймиз. Бунинг ушбу сонни қуйидаги бир жисли тенгламага қўямиз $\begin{cases}(-1-\lambda)x-6y=0\\ 2x+(6-\lambda)y=0\end{cases}$

Натижада 2 та бир хил тенглама ҳосил бўлди:

$$\begin{cases}-3x-6y=0\\ 2x+4y=0\end{cases} \Rightarrow x=-2y$$

Шундай қилиб, $x=-2y$,тенгламадан у қиймат бериб мос хос векторни аниқлашимиз мумкин: масалан $y=-1$ учун: $x=-2\cdot(-1)=2$

Шундай қилиб биринчи хос вектор аниқланди $\bar{u}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$.

2) Энди $\lambda=\lambda_2=3$ хос сонга мос келувчи хос векторни аниқлаймиз::

$$\begin{cases}-4x-6y=0\\ 2x+3y=0\end{cases}$$

Тенгламалар ечими $x=-\frac{3}{2}y$.

Агар $y=-2$, бўлса: $x=-\frac{3}{2}\cdot(-2)=3$.

В результате: $\bar{u}_2=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ – второй собственный вектор.

$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3$ хос сонлар учун : $\bar{u}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{u}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ хос векторларни ҳосил қилдик ва уни текшириб кўришимиз мумкин.

Мустақил иш. Қуйидаги матрица учун хос сон ва хос вектор аниқлансин

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Хос сон ва хос векторлар ёрдамида матрицани каноник кўринишини ёзиб олишимиз мумкин, яъни $A=UDU^{-1}$, бу ерда U – хос векторлар координаталаридан ҳосил қилинган матрица, D – хос қийматлардан ҳосил қилинган диогонал матрицаи.

$A=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ матрицани хос векторлари $\bar{u}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{u}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ орқали

$$U=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Матрицани ҳосил қиламиз. Диогонал матрица хос сонлар орқали

$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ – кўринишда ҳосил бўлади.

U матрицага мос тескари матрицани аниқласак $U^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб хос векторлардан ғосил қилинган матрицани тескариси ўзига тенг бўлар экан. Демак

$A=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ушбу ёйилма ўринли экан $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Ҳосил бўлган $A = UDU^{-1}$ матрицавий тенгламани диогонал матрицага нисбатан ечиб олиш мумкин:

$$D = U^{-1}AU$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

машғулот

2-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ: НАВЬЕ-СТОКС ТЕНГЛАМАСИНИНГ АНИҚ ЕЧИМЛАРИ.

Режа:

1. Навье-Стокс тенгламасини ечишга чизиқли масалалар.
2. Каналдаги Куэтт оқими.
3. Стокс масалалари, иккита коаксал айланувчи цилиндрлар орасидаги оқим.

Таянч сўз ва иборалар: *потенциалли оқим, Навье-Стокс тенгламасининг аниқ ечимлари, Куэтт оқими, соф силжишли оқим, қатламли ностационар оқим, коакциал айланувчи цилиндрлар*.

3.1 Навье-Стокс тенгламасини ечишга чизиқли масалалар.

Навье-Стокс тенгламасининг аниқ ечимларини қидириш умумий ҳолда бартараф этиб бўлмайдиган математик қийинчиликларга олиб келади. Бу қийинчиликлар, аввало Навье-Стокс тенгламасининг чизиқсиз эканлиги ва идеал суюқликларнинг потенциалли оқимини ўрганишдаги принципларни қўллаш мумкин эмаслиги таъсирида юзага келади. Шунга қарамасдан Навье-Стокс тенгламасининг аниқ ечимларини хусусий ҳолларда топиш мумкин. Бундай ҳолларда тенгламалардаги квадратик ҳадлар ўз-ўзидан йўқолиб кетади.

Сиқилмайдиган суюқлик учун Навье-Стокс тенгламаси []:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
&\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
&\rho(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})=Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad (3.1)$$

Узлуксизлик тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (3.2)$$

Тезлиги фақат битта ташкил этувчиси мавжуд бўлган қатламли деб аталувчи оқимлар - аниқ ечимларнинг оддий синфини тасвирлайди.

Айтайлик, тезликнинг u ташкил этувчиси нолдан фарқли, v ва w ташкил этувчилари нолга тенг бўлсин. Бу ҳолда узлуксизлик тенгламасидан $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ келиб чиқади ва тезлик ташкил этувчиси x координатага боғлиқ бўлмайди.

Кўриниб турибдики, бундай оқим учун

$$u=u(y,z,t),\ v\equiv 0, w\equiv 0\,,$$

(3.1) дан

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \frac{\partial p}{\partial z}=0\,.$$

Бундай оқим учун босим фақат x ва t ларга боғлиқлиги келиб чиқади. x йўналиши учун Навье-Стокс тенгламасида барча конвектив ҳадлар тушиб қолади ва анча оддий кўринишга ўтади:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (3.3)$$

(3.3) тенглама $u(y,z,t)$ ўзгарувчига нисбатан чизиқли дифференциал тенглама ҳисобланади.

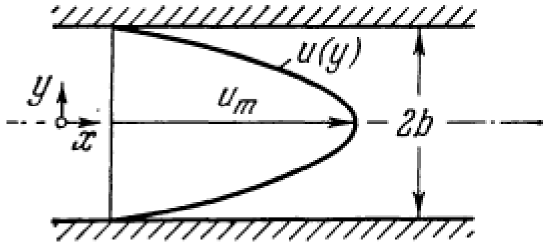
1.1 Куэттнинг каналдаги оқими.

Иккита параллел текис девор билан чегараланган каналдаги стационар текис оқим учун (3.3) тенглама жуда содда ечилади (14-расм). Бу ҳолда (3.3) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} \;, \qquad (3.4)$$

Агар деворлар орасидаги масала $2b$ га тенг бўлса, чегаравий шартлар қуйидагича бўлади:

$$y = \pm b \;\; \text{да} \;\; u = 0 .$$



14-расм.

$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ эканлиги учун (3.4) тенгламадан босимлар фарқи бўйлама йўналишда ўзгармаслиги келиб чиқади, яъни $\frac{dp}{dx} = const$. Шу сабабли (4) тенгламани интеграллаб,

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(b^2 - y^2) .$$

(3.5)

Бундан кўринадики, каналда тезликлар параболик тақсимотга эга бўлади.

Энди иккита параллел текис девор билан чегараланган каналдаги стационар текис оқим қаралади, бунда улардан биттаси тинч ҳолатда, иккинчиси эса ўз текислигида ўзгармас тезлик U билан ҳаракат қилади. Бундай оқим **Куэтт оқими** дейилади. Бу ҳолда (3.4) тенглама жуда оддий ечилади.

Деворлар орасидаги масофа h га тенг бўлсин. У ҳолда чегаравий шарт қуйидагича:

$$y = 0 \;\text{да}\;\; u = 0$$

$$y = h \;\text{да}\;\; u = U$$

ва (3.4) тенгламанинг ечими

$$u = \frac{y}{h}U - \frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}(1 - \frac{y}{h}) . \qquad (3.6)$$

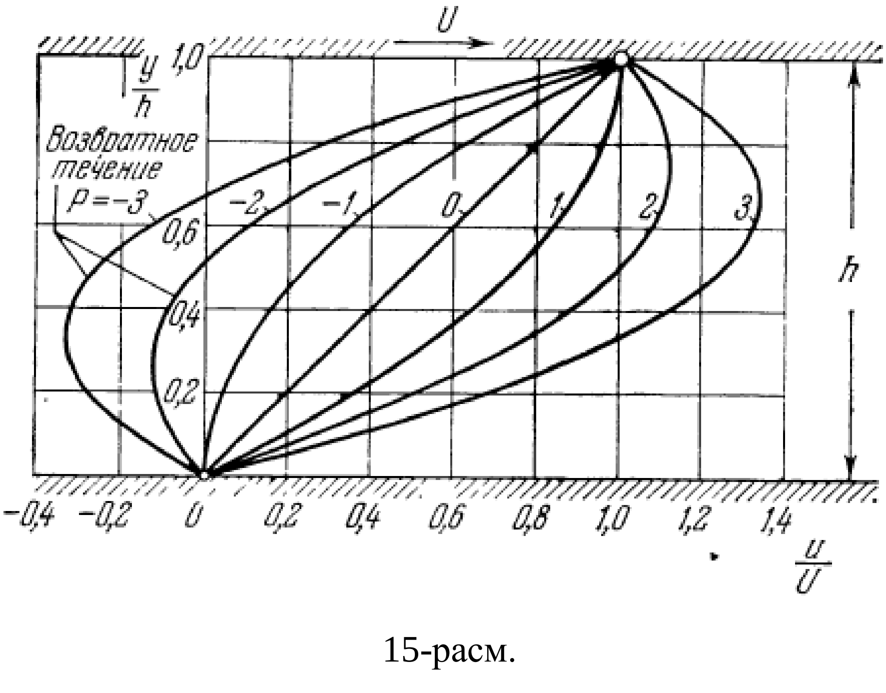
Босимлар фарқининг ҳар хил қийматлари учун тезликлар тақсимоти 2-расмда кўрсатилган. Хусусан, нолинчи босимлар фарқи учун тезликлар тақсимоти чизиқли кўринишда бўлади:

$$u = \frac{y}{h}U . \qquad (3.7)$$

Бундай тезликлар тақсимоти ўринли бўлган оқимни **Куэттнинг оддий** ёки **соф силжишли оқими** дейилади.

Тезликлар тақсимоти чизиқлари кўриниши Куэтт оқимида ўлчамсиз босим градиенти билан аниқланади:

$$P = -\frac{h^2}{2\mu U}\frac{dp}{dx}$$



15-расм.

1.2 Стокс масалалари, иккита коаксал айланувчи цилиндрлар орасидаги оқим.

Стокснинг 1-масаласи. Қатламли ностационар оқимлар ҳаракатини қараймиз. Бундай оқимларда тезланишнинг конвектив ташкил этувчилари айнан нолга тенг, у ҳолда Навье-Стокс тенгламасида фақат тезланишнинг локал ташкил этувчилари ва ишқаланиш кучлари қатнашган ҳадлари қолади.

Айтайлик, текис девор тинч ҳолатдан тўсатдан ўз текислигида ўзгармас U_0 тезлик билан ҳаракат қила бошлайди. Девор яқинида қандай оқим юзага келишини аниқлаймиз. Девор xz текислик билан устма-уст тушсин.

Текисликдаги масала учун Навье-Стокс тенгламасида қуйидаги кўринишни келади [2,474-477,]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \qquad (3.8)$$

Оқим соҳасида босим ўзгармас. Қуйидаги бошланғич шартлар ўринли

$$\begin{aligned} &t \le 0 \text{ да} \quad u = 0, \text{ барча } y \text{ учун} \\ &t > 0 \text{ да} \quad u = U_0, \quad y = 0 \text{ учун} \\ &\qquad\qquad u = 0, \quad y = \infty \text{ учун.} \end{aligned} \qquad (3.9)$$

(3.8) дифференциал тенглама $y > 0$ ярим фазода иссиқлик тарқалишини тасвирловчи иссиқлик тарқалиш тенгламаси билан устма-уст тушади, бу ҳолда $t = 0$ вақтда $y = 0$ девор атроф-муҳит температурасидан юқори бўлган қандайдир температурагача етказилади.

Агар янги ўлчовсиз ўзгарувчи киритсак,

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \qquad (3.10)$$

у ҳолда (3.8) хусусий ҳосилали тенгламани оддий дифференциал тенгламага келтириш мумкин.

Сўнгра, u ни

$$u = U_0 f(\eta), \qquad (3.11)$$

кўринишда олсак, у ҳолда $f(\eta)$ учун оддий дифференциал тенглама олинади:

$$f'' + 2\eta f' = 0 \qquad (3.12)$$

чегаравий шартлар

$\eta = 0$ да $f = 1$ ва $\eta = \infty$ да $f = 0$.

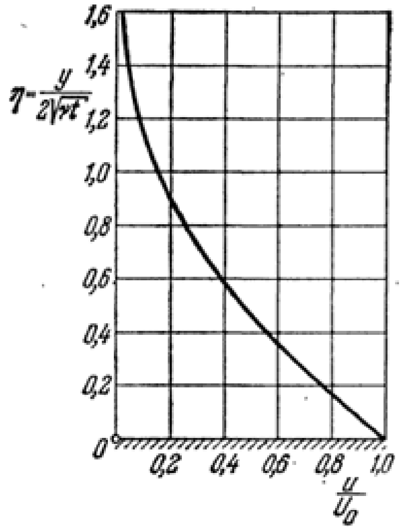
Бу тенгламанинг ечими

$$u = U_0 \, erf \, \eta, \qquad (3.13)$$

бунда

$$erf \, \eta = \frac{\sqrt{2}}{\sum \pi} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta$$

эҳтимоллик интеграли қийматлари жадвалда келтирилади.Тезликлар тақсимоти 16-расмда тасвирланган. (3.13) тенгликка кирувчи эҳтимоллик интеграли $\eta = 2$ да 0,01 қийматга эга бўлади.



16-расм

Иккита коакциал айланувчи цилиндрлар орасидаги оқим.

Ҳар хил, лекин ўзгармас бурчак тезлик билан айланувчи иккита коакциал цилиндрлар орасидаги оқими Навье-Стокс тенгламасининг оддий аниқ ечимига олиб келинади.

r_1 ва r_2 - цилиндрнинг ички ва ташқи радиуслари, ω_1 ва ω_2 - уларнинг бурчак тезликлари. Қаралаётган оқимни текис деб ҳисоблаш мумкинлиги сабабли, Навье-Стокс тенгламалар системасининг қутб координаталар системасида ифодасида фақат биринчи иккитаси қолади:

$$\rho \frac{u^2}{r} = \frac{dp}{dr} \qquad (3.14)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d}{dr}(\frac{u}{r}) = 0 \qquad (3.15)$$

Чегаравий шартлар

$$r = r_1 \text{ да } u = \omega_1 r_1$$

$$r = r_2 \text{ да } u = \omega_2 r_2$$

(3.15) тенгламани берилган чегаравий шартларда интегралласак:

$$u(r) = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2}\left[r(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) - \frac{r_2^2 r_1^2}{r}(\omega_2 - \omega_1) \right] \qquad (3.16)$$

Радиал йўналишда босим тақсимоти (3.14) тенглама билан аниқланади.

Ички цилиндр тинч ҳолатда, ташқи цилиндр айланаётган ҳол амалий аҳамиятга эга. Ташқи цилиндрдан суюқликка узатилувчи айлантирувчи момент

$$M_2 = 4\pi\mu h \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\omega_2 \qquad (3.17)$$

бу ерда h - цилиндр баландлиги.

Худди шундай катталикка тинч ҳолатдаги ички цилиндрга узатилётган M_1 айлантирувчи момент эга бўлади. Бундай қурилма икки ўқли цилиндрдан иборат бўлиб, баъзан ёпишқоқлик коэффициентини аниқлашда қўлланилади.

(3.17) тенглик ёрдамида ёпишқоқлик коэффициентини ҳисоблаш мумкин.

Назорат саволлари

1. Текисликдаги сиқилмайдиган суюқлик оқими учун Навье-Стокс тенгламасини ёзинг.
2. Қатламли оқим деганда нимани тушунасиз?
3. Навье-Стокс тенгламаси аниқ ечимга эгами?
4. Куэттнинг каналдаги оқимида босимлар фарқи қайси шартни қаноатлантиради?

5. Каналдаги стационар оқим учун тезликлар тақсимоти қандай кўринишда бўлади?

6. Куэттнинг каналдаги оқими масаласи учун чегаравий шартни изоҳланг.

7. Стокснинг 1-масаласи қайси турдаги оқимлар учун ўринли?

8. Иккита коаксиал айланувчи цилиндрлар орасидаги оқим масаласида Навье-Стокс тенгламасининг қайси кўринишидан фойдаланилади?

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-жилд. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 592 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-жилд. Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 507 б.
4. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.
5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тикланишдан – миллий юксалиш сари. 4-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2020. – 400 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.
7. Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда қабул қилинган “Таълим тўғрисида”ги ЎРҚ-637-сонли Қонуни.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.
9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.
10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.
11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.
12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.
13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.
14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 29 октябрь “Илм-фанни 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-6097-сонли Фармони.

17. Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2020 йил 25 январдаги Олий Мажлисга Мурожаатномаси.

18. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрь “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарори.

Ш. Махсус адабиётлар

1. Bruce R. Munson, Alric P. Rothmayer, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 2017. 792p.

2. Charlie Brau Notes on Analytical Mechanics. 2005. 12. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. 3-изд. М.: Физматмех, 2005. 17

3. Chung T.J. Computational Fluid Dynamics. - Cambridge University Press, 2002 (1012p).

4. Grant R. Fowles and George L. Cassiday. Analytical Mechanics. Brooks Cole. USA, 2014.

5. Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko. Classical Mechanics. Classical Mechanics. USA, 2013.

6. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

7. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

8. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

9. Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation Butterworth, Washington, D.C. 2013.

10. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

11. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.

12. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

13. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.

14. Massey B., Ward-Smith J. Mechanics of Fluids. Solutions Manual Eighth edition. - Taylor &. Francis, 2016.

15. N.A.Korshunova and D.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics», (AIAA, USA), 2014, V.37, №5, P.1716-1719

16. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.

17. Robert D. Zucker, Oscar Biblarz Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, 2002. 512p.

18. Steve Taylor “Destination” Vocabulary and grammar”, Macmillan 2010.

19. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.

20. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

21. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.

22. Азимов Д.М., Коршунова Н.А Ҳаракатнинг устуворлик назарияси бўйича танланган маърузалар. - Учебное пособие. - Ташкент, Университет, 2005.

23. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.

24. Гулобод Қудратуллоҳ қизи, Р.Ишмуҳамедов, М.Нормуҳаммедова. Анъанавий ва ноанъанавий таълим. – Самарқанд: “Имом Бухорий халқаро илмий-тадқиқот маркази” нашриёти, 2019. 312 б.

25. Ибраймов А.Е. Масофавий ўқитишнинг дидактик тизими. методик қўлланма/ тузувчи. А.Е. Ибраймов. – Тошкент: “Lesson press”, 2020. 112 бет.

26. Ишмуҳамедов Р.Ж., М.Мирсолиева. Ўқув жараёнида инновацион таълим технологиялари. – Т.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 б.

27. Кирянов Д. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.

28. Муслимов Н.А ва бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: “Sano-standart”, 2015. – 208 б.

29. Игнатова Н. Ю. Образование в цифровую эпоху: монография. М-во образования и науки РФ. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf

30. Олий таълим тизимини рақамли авлодга мослаштириш концепцияси. Европа Иттифоқи Эрасмус+ дастурининг кўмагида. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf

31. О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бу-гакова и др. М – Книга 16 / Современные образовательные технологии: педагогика и психология:

Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

32. Тураев Х. Ҳаракатнинг турғунлик назарияси. - СамГУ, 2004.

33. Усмонов Б.Ш., Ҳабибуллаев Р.А. Олий ўқув юртларида ўқув жараёнини кредит-модуль тизимида ташкил қилиш. Ўқув қўлланма. Т.: “Tafakkur” нашриёти, 2020 й. 120 бет.

IV. Интернет сайтлар

34. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

35. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси

36. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази

37. http://ziyonet.uz – Таълим портали ZiyoNET

38. http://natlib.uz – Алишер Навоий номидаги Ўзбекистон Миллий кутубхонаси