ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“Бошқариладиган тизимлар механикаси” модули бўйича Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тошкент – 2021

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 7 декабрдаги 648-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: Россия Миллий технологик тадқиқотлар университети, Олмалиқ филиали, ф.-м.ф.н., М.Н. Сидиқов

Тақризчилар: Ўзбекистон Миллий университети “Механика ва математик моделлаштириш” кафедраси профессори, ф.-м.ф.д. Н.А. Коршунова

Ўқув -услубий мажмуа Ўзбекистон миллий университети Кенгашининг қарори билан нашрга тавсия қилинган (2020 йил 24 декабрдаги № 3 -сонли баѐнномаси)

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Дастур Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда тасдиқланган “Таълим тўғрисида”ги Қонуни, Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сон, 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сон, 2019 йил 8 октябрдаги “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сон ва 2020 йил 29 октябрдаги “Илм-фанни 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-6097-сонли Фармонлари ҳамда Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарорларида белгиланган устувор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини такомиллаштиришни мақсад қилади.

Дастур доирасида берилаётган мавзулар таълим соҳаси бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш мазмуни, сифати ва уларнинг тайёргарлигига қўйиладиган умумий малака талаблари ва ўқув режалари асосида шакллантирилган бўлиб, унинг мазмуни кредит модул тизими ва ўқув жараёнини ташкил этиш, илмий ва инновацион фаолиятни ривожлантириш, педагогнинг касбий профессионаллигини ошириш, таълим жараёнига рақамли технологияларни жорий этиш, махсус мақсадларга йўналтирилган инглиз тили, мутахассислик фанлар негизида илмий ва амалий тадқиқотлар, ўқув жараёнини ташкил этишнинг замонавий услублари бўйича сўнгги ютуқлар, педагогнинг креатив компетентлигини ривожлантириш, таълим жараёнларини рақамли технологиялар асосида индивидуаллаштириш, масофавий таълим хизматларини ривожлантириш, вебинар, онлайн, «blended learning», «flipped classroom» технологияларини амалиётга кенг қўллаш бўйича тегишли билим, кўникма, малака ва компетенцияларни ривожлантиришга йўналтирилган.

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналишининг ўзига хос хусусиятлари ҳамда долзарб масалаларидан келиб чиққан ҳолда дастурда тингловчиларнинг мутахассислик фанлар доирасидаги билим, кўникма, малака ҳамда компетенцияларига қўйиладиган талаблар такомиллаштирилиши мумкин.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

Модулининг мақсади: Бошқариладиган тизимлар механикаси модулига қўйилган боғланиш турларига кўра бошқарилувчи механик система ҳаракат тенгламаларини тузиш, уларнинг турлари, экстремал траекторияларни аниқлашга тегишли вариацион масалани қўйилиши ва етарлилик шартлари ҳамда экстремал ҳаракатни устуворликка текшириш, оптимал ҳаракатни стабиллаш муаммоларини ҳал қилиш ҳақида олий таълим муассасалари педагог кадрларининг билим, кўникма ва компетенцияларини ошириш.

Модулнинг вазифалари:

- Бошқариладиган тизимлар механикаси модулида боғланишларни ҳисобга олган ҳолда асосий принциплар ёрдамида ҳаракат тенгламаларини тузиш ва бошқариш параметрларини аниқлаш ва ҳаракатни устуворликка текшириш,
- Ньютон тортиш майдонида ҳаракатланадиган массаси ўзгарувчи моддий нуқта учун вариацион масаланинг оптимал ечимларини аниқлаш ва олинган натижаларни механик тахлил қилиш, устуворлик муаммосини ҳал қилиш ва амалиётда қўллаш усуллари ҳақида назарий ва амалий билимларни, кўникма ва малакаларни шакллантиришдан иборат.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

Модулни ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

– Механика фани ривожининг замонавий босқичларини;

– Бошқариладиган тизимлар механикасига тегишли асосий қонунлар, принциплар ва тадкик қилиш усулларини;

– Динамик тизимларни сифат тадқиқи натижаларининг замонавий талқинини;

– Табиий ва аниқ фанларда фойдаланиладиган замонавий амалий дастурлар мажмуаларини ***билиши*** керак.

– ахборот технологияларининг замонавий воситаларидан фойдаланиб илмий-тадқиқотларни ўтказиш;

– экспериментал тадқиқотлар натижаларига ишлов бериш, уларни таҳлил қилиш ва акс эттириш, хулосалар чиқариш, илмий мақолалар тайёрлаш, тавсияларини ишлаб чиқиш;

– Бошқариладиган тизимлар механикаси, классик механикага замонавий қараш, механиканинг замонавий йўналишлари бўйича маъруза, амалий машғулот ва назорат ишларини тўғри қўллай олиш ***кўникмаларига*** эга бўлиши лозим.

– ахборот коммуникацион технологиялари ва уларни қўллашнинг илмий-назарий ва амалий аҳамиятини билиш;

– Бошқариладиган тизимлар механикаси, классик механикага замонавий қараш, компьютер инжиниринги фанларининг замонавий йўналишларини ишлаб чиқиш;

– табиий ва аниқ фанларни турли соҳаларга татбиқ қилиш;

– табиий ва аниқ фанларни дастурлар пакети ёрдамида ечиш ва қўллаш ***малакаларига*** эга бўлиши лозим.

– Механикага оид масалаларни ечишда замонавий технологиялар ва усуллардан фойдалана олиш;

– табиий ва аниқ фанлар соҳасида касбий фаолият юритиш учун зарур бўлган билим, кўникма, малакага эга бўлиш;

– илғор ахборот-технологияларида ишлаш;

– эгалланган тажрибани танқидий кўриб чиқиш қобилияти, зарур бўлганда ўз касбий фаолиятининг тури ва характерини ўзгартира олиш;

– Бошқариладиган тизимлар механикаси, классик механикага замонавий қараш, компьютер инжинирингига оид замонавий манбалардан фойдалана олиш ***компетенцияларига*** эга бўлиши лозим.

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

Модулни ўқитиш маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Модулни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, педагогик технологиялар ва ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

-маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион технологиялардан;

-ўтказиладиган амалий машғулотларда экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Бошқариладиган тизимлар динамикаси” модули мазмуни ўқув режадаги “Ҳисоблаш механикаси”, “Механикада математик моделлаштириш” ўқув модуллари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг таълим жараёнида модулда кўрилган усуллар ва теоремаларни аниқ масалаларни ечишда қўллаш, фойдаланиш бўйича касбий педагогик тайёргарлик даражасини оширишга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар таълим жараёнида аниқ бошқарилувчи механик системаларда оптимал бошқаришни амалга ошириш, хусусий ҳаракатларни устуворликка текшириш ва олинган натижаларни тахлил қилиш ва амалда қўллашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти

№	Модуль мавзулари	Аудитория ўқув юкламаси			
		Жами	жумладан		
			Назарий	Амаий машғулот	Кўчма машғулоти
1.	Бошқарилувчи механик тизимнинг ҳаракат тенгламалари. Бошқарувчанлик ва кузатувчанлик	4	2	2	
2.	Оптимал ҳаракатни аниқлашга доир вариацион масала. Оптимал ҳаракатни аниқлашнинг зарурий шартлари.	4	2	2	
3.	Гравитация майдонларида ҳаракатланадиган массаси ўзгарувчи моддий нуқтанинг оптимал траекторияларини аниқлаш	4	4	2	
4.	Хусусий ҳаракатни устуворликка текширишга тегишли асосий теоремалар ва усуллар. Maple ва MetCat программалаш пакетлари ёрдамида бошқариш масалаларини сонли ечиш.	8	2	2	4
	Жами:	**22**	**10**	**8**	**4**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-мавзу. Бошқарилувчи механик тизимнинг ҳаракат тенгламалари. Бошқарувчанлик ва кузатувчанлик (2 соат).

1.1. Бошқарилувчи механик системаларга тегишли аниқ масалалар.
1.2. Бошқарилувчи механик система ҳаракат тенгламалари.
1.3. Бошқарувчанлик ва кузатувчанлик.
1.4. Боғланишларга нисбатан параметрик бўшатилган ҳаракат.

2-мавзу. Оптимал ҳаракатни аниқлашга доир вариацион масала. Оптимал ҳаракатни аниқлашнинг зарурий шартлари (2 соат).

2.1. Оптимал ҳаракатни аниқлашга доир вариацион масалани қўйилиши.
2.2. Оптимал ҳаракатни аниқлашнинг зарурий шартлари.
2.2. Зарурий шартлар.Вейерштрасс шартлари.

3-мавзу. Гравитация майдонларида ҳаракатланадиган массаси ўзгарувчи моддий нуқта учун оптимал траекторияларини аниқлаш (4 соат).

3.1. Гравитация майдонларида ҳаракатланадиган массаси ўзгарувчи моддий нуқта учун. *Мешчерский тенгламаси. Гамильтон тенгламаси.*

3.2. Ўтиш функцияси ва унинг механик тахлили.

3.3 Оптимал траекториянинг қисмлари. *Нол, ўрта ва максимал тортиш қисмлар.*

3.4. Оптимал траектория қисмларига тегишли биринчи интеграллар.

4-мавзу. Хусусий ҳаракатни устуворликка текширишга тегишли асосий теоремалар ва усуллар. Maple ва MetCat программалаш пакетлари ёрдамида бошқариш масалаларини сонли ечиш. (2 соат).

4.1 Хусусий ҳаракатни устуворликка текширишга тегишли асосий теоремалар ва усуллар.

4.2. Maple ва MetCat программалаш пакетлари ёрдамида бошқариш масалаларини сонли ечиш.

4.3. Асосий тушунчалар ва таърифлар. Оғдирилган ҳаракат тенгламалари.

4.3. Ляпунов функцияси ва унинг хоссалари.

4.3. Устуворлик хақида Ляпунов теоремалари.

4.4. Автоном системалар учун биринчи яқинлашиш бўйича ҳаракат устуворлиги. Характеристик тенгламаларни ечишда программалаш пакетларидан фойдаланиш.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-амалий машғулот. Бошқарилувчи механик тизимнинг ҳаракат тенгламалари. Бошқарувчанлик ва кузатувчанлик (2 соат).

2-амалий машғулот. Оптимал ҳаракатни аниқлашга доир вариацион масала. Оптимал ҳаракатни аниқлашнинг зарурий шартлари (2 соат).

3-амалий машғулот. Гравитация майдонларида ҳаракатланадиган массаси ўзгарувчи моддий нуқтанинг оптимал траекторияларини аниқлаш (2 соат).

4-амалий машғулот. Хусусий ҳаракатни устуворликка текширишга тегишли асосий теоремалар ва усуллар. Maple ва MetCat программалаш пакетлари ёрдамида бошқариш масалаларини сонли ечиш (2 соат).

КЎЧМА МАШҒУЛОТ МАЗМУНИ

Мавзу: Хусусий ҳаракатни устуворликка текширишга тегишли асосий теоремалар ва усуллар. Maple ва MetCat программалаш пакетлари ёрдамида бошқариш масалаларини сонли ечиш (4 соат).

Тингловчиларни замонавий лабараториялар ва уларда олиб борилаётган бошқарилувчи механик системаларга тегишли лойихалар билан таништириш (Турин политехника институти Тошкент филали, Ўзбекистон миллий университети, РМТТУ(Олмалиқ филиали)

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);
- баҳс ва мунозаралар (муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

-

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

Хулосалаш (Резюме, Веер) методи

Методнинг мақсади: Бу метод мураккаб, кўптармоқли, мумкин қадар, муаммоли характеридаги мавзуларни ўрганишга қаратилган. Методнинг моҳияти шундан иборатки, бунда мавзунинг турли тармоқлари бўйича бир хил ахборот берилади ва айни пайтда, уларнинг ҳар бири алоҳида аспектларда муҳокама этилади. Масалан, муаммо ижобий ва салбий томонлари, афзаллик, фазилат ва камчиликлари, фойда ва зарарлари бўйича ўрганилади. Бу интерфаол метод танқидий, таҳлилий, аниқ мантиқий фикрлашни муваффақиятли ривожлантиришга ҳамда ўқувчиларнинг мустақил ғоялари, фикрларини ёзма ва оғзаки шаклда тизимли баён этиш, ҳимоя қилишга имконият яратади. “Хулосалаш” методидан маъруза машғулотларида индивидуал ва жуфтликлардаги иш шаклида, амалий машғулотларида кичик гуруҳлардаги иш шаклида мавзу юзасидан билимларни мустаҳкамлаш, таҳлили қилиш ва таққослаш мақсадида фойдаланиш мумкин.

Методни амалга ошириш тартиби:

тренер-ўқитувчи иштирокчиларни 5-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратади;

тренинг мақсади, шартлари ва тартиби билан иштирокчиларни таништиргач, ҳар бир гуруҳга умумий муаммони таҳлил қилиниши зарур бўлган қисмлари туширилган тарқатма материалларни тарқатади;

ҳар бир гуруҳ ўзига берилган муаммони атрофлича таҳлил қилиб, ўз мулоҳазаларини тавсия этилаётган схема бўйича тарқатма материалга ёзма баён қилади;

навбатдаги босқичда барча гуруҳлар ўз тақдимотларини ўтказадилар. Шундан сўнг, тренер томонидан таҳлиллар умумлаштирилади, зарурий ахборотлр билан тўлдирилади ва мавзу якунланади.

Намуна:

<table>
<tr><th colspan="6">Таҳлил турларининг қиёсий таҳлили</th></tr>
<tr><th colspan="2">Тизимли таҳлил</th><th colspan="2">Сюжетли таҳлил</th><th colspan="2">Вазиятли таҳлил</th></tr>
<tr><th>Афзаллиги</th><th>камчилиги</th><th>афзаллиги</th><th>камчилиги</th><th>афзаллиги</th><th>камчилиги</th></tr>
<tr><td>Муммони келиб чиқиш сабабли ва кечиш жараёнини алоқадорлиги жиҳатидан ўрганиш имкониятига эга</td><td>Алоҳида тайёргарликка эга бўлишни, кўп вақт ажратишни талаб этади</td><td>Ўз вақтида муносабат билдириш имкониятини беради</td><td>Муносабат бошқа бир сюжетга нисбатан қўлланишга яроқсиз</td><td>Вазият иштирокчиларининг (объект ва субъект) вазифаларини белгилаб олиш имконини беради</td><td>Динамик хусусиятни белгилаб олиш учун қўллаб бўлмайди</td></tr>
<tr><td colspan="6">Хулоса: Таҳлилнинг барча турлари ҳам ўзининг афзаллиги ва камчилиги билан бир биридан фарқланади. Лекин, улар қаторидан педагогик фаолият доирасида қарор қабул қилиш учун тизимли таҳлилдан фойдаланиш жорий камчиликларни бартараф этишга, мавжуд ресурслардан мақсадли фойдаланишда афзалликларга эгалиги билан ажралиб туради.</td></tr>
</table>

“ФСМУ” методи

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади;
- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

Намуна.

Фикр: *“Тизим атроф муҳитдан ажралган, у билан яхлит таъсирлашувчи, бир-бири билан ўзаро боғланган элементлар мажмуаси бўлиб, тадқиқотлар объекти саналади”.*

Топшириқ: Мазкур фикрга нисбатан муносабатингизни ФСМУ орқали таҳлил қилинг.

“Ассесмент” методи

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур техника орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташхис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби:

"Ассесмент" лардан маъруза машғулотларида тингловчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассесментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

Намуна. Ҳар бир катакдаги тўғри жавобни баҳолаш мумкин.

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-МАВЗУ. БОШҚАРИЛУВЧИ МЕХАНИК ТИЗИМНИНГ ҲАРАКАТ ТЕНГЛАМАЛАРИ. БОШҚАРУВЧАНЛИК ВА КУЗАТУВЧАНЛИК

Режа:

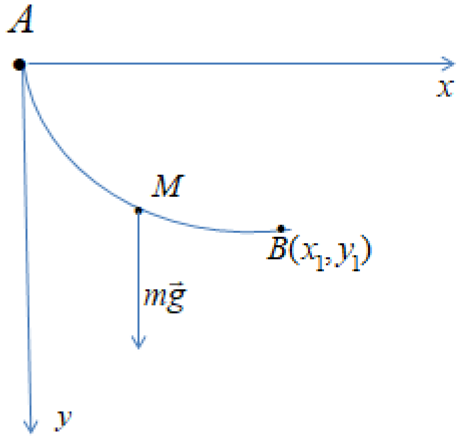
1. Бошқарилувчи механик системаларга тегишли аниқ масалалар.
2. Бошқарилувчи механик система ҳаракат тенгламалари.
3. Боғланишларга нисбатан параметрик бўшатилган ҳаракат.
4. Бошқарувчанлик ва кузатувчанлик.

Таянч сўзлар: *боғланиш, идеал, ноидеал боғланишлар, реаном, умумлашган координата, умумлашган куч. Бошқарувчанлик ва кузатувчанлик.*

1. Бошқарилувчи механик системаларга тегишли аниқ масалалар.

Амалиётда ҳар қандай бошқариш имконияти мавжуд бўлган масалаларни ечишда, ечимлар орасидан бизни маълум бир талабларимизни қаноатлантирадиган, яъни оптимал ечимни топишга ҳаракат қилинади. Бунинг учун маълум бир миқдорни (функционал) минимум ёки максимумга эришиши тўғрисидаги математик масалани ҳал қилишга (оптималлаштириш масаласини) тўғри келади. Тарихий маълумки, биринчи бўлиб бундай масалани 1696 йилда И. Бернулли кўриб чиққан.

1. Вертикал текисликда иккита A, B нуқта берилган. Массаси m бўлган моддий нуқта бошланғич тезликсиз A нуқтадан B нуқтага оғирлик кучи $m\vec{g}$ таъсирида энг кам вақт сарфлаб етиб келадиган траекториясини аниқланг.



Масаланинг бошланғич шартига кўра $t = 0, x(0) = 0, y(0) = 0, v(0) = 0$. Моддий нуқтанинг ҳаракатига тегишли кинетик энергиясини ўзгариши хақидаги теоремага кўра ҳаракат давомида энергия интеграли ўринли:

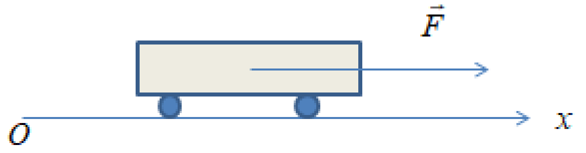
$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgy$, бундан бошланғич шартларга кўра $v = \sqrt{2gy(x)}$. Агар $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}$ эканлигини ҳисобга олсак, траектория бўйлаб ds масофани босиб ўтиш учун $dT = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy(x)}} = \frac{\sqrt{1+(y_x^{/})^2}}{\sqrt{2gy(x)}}dx$ ва текисликда A нуқтадан B нуқтага ўтиши учун эса

$$T(y(x)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y_x^{/})^2}}{\sqrt{2gy}}dx \qquad (1)$$

вақт сарфланади, яъни ҳаракат вақти минималлаштирилувчи функционалдан иборат бўлади. Бунда $y(0) = 0, y(x_1) = y_1$.

2. Тез таъсир хақидаги масала

Массаси m бўлган тележка горизонтал тўғри чизиқ бўйлаб горизонтал йўналган F куч таъсирида ҳаракатланмоқда. Бошланғич шартлар қуйидагича: $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0$.



Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра $\ddot{x} = \frac{F}{m}$, ёки

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = u \qquad (2)$$

Тележкага таъсир қиладиган шундай $u(x_0, v_0, t)$ кучни топиш талаб қилинадики, тележка минимал t_1 вақтда тўхтасин, $x(t_1), \dot{x}(t_1) = 0$. Бу масалада таъсир қилаётган горизонтал кучни амалга ошириш имконияти чегараланган бўлса, у ҳолда бошқариш параметри учун $u_1 \le u \le u_2$ муносабат ўринли бўлади ва минималлаштирилувчи функционал

$$J = t_1 - t_0,$$

кўринишда бўлади.

3. Космик аппарат оптимал траекториясини аниқлаш масаласи.

Қуйида гравитация майдонида ҳаракатланадиган массаси ўзгарувчи космик аппарат масса марказини ҳаракатига тегишли экстремал траекторияларни аниқлаш масаласини кўриб чиқамиз. Мешчерский тенгламасига кўра, космик аппарат масса маркази ҳаракат дифференциал тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = M\vec{g}(\vec{r}) + \vec{\Phi}, \qquad (3)$$

бунда $M(t)$ – космик аппарат массаси, $\vec{g}(\vec{r})$ -гравитацион тезланиш, $\vec{\Phi}$ – реактив куч. Агар гравитация майдони Ньютон тортиш майдонидан иборат бўлса,

$$\vec{g} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\,, \qquad (4)$$

реактив куч(тортиш кучи) эса

$$\vec{\Phi} = \vec{v}_r \frac{dM}{dt}\,, \qquad (5)$$

$$\vec{v}_r = -c\vec{e}\,, \qquad (6)$$

кўринишда бўлади. Бунда $\vec{v}_r$-сарф қилинаётган ёқилғининг нисбий тезлиги, $\vec{e}$ – реактив куч йўналишидаги бирлик вектор, $c = /\vec{v}_r/$-нисбий тезлик миқдори бўлиб, ўзгармас деб қабул қилинади, μ – тортиш марказига тегишли Гаусс доимийси.

Космик аппарат массаси ёқилғи сарфи ҳисобига камайгани учун $\frac{dM}{dt} < 0.$ Бунга кўра, $m = -\frac{dM}{dt}$ вақт бирлиги орасидаги масса сарфини киритамиз. Агар масса сарфини амалга ошириш жиҳатидан чегараланганини ҳисобга олсак, $0 \le m \le \tilde{m}$, яъни вақт бирлиги оралиғидаги масса сарфи қуйи ва юқоридан чегараланган. Юқорида келтирилган белгилашларга кўра, ҳаракат тенгламасини биринчи тартибли дифференциал тенгламалар кўринишида ёзиш мумкин.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}(\vec{r}) - \frac{cm}{M}\bar{e},$$
$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \qquad (7)$$
$$\dot{M} = m.$$

Масала қўйилишига кўра, вақт бирлиги оралиғидаги масса сарфи m ва тортиш кучи йўналиши $\vec{e}$ бошқариш параметрлари ҳисобланади, яъни бу миқдорларни танлаб олиш имконияти мавжуд.

Бу масала учун қуйидаги вариацион масалани қўйиш мумкин:

Нуқта фазода бошланғич ҳолатидан кейинги ҳолатига шундай ўтсинки, бу ўтишда нуқта ҳолатига боғлиқ бўлган маълум бир функционал ўзининг минимал қийматига эга бўлсин. Мисол учун нуқта бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтганда масса сарфи энг кам бўлсин (минимал). Бу ҳолда минималлаштилувчи функционал

$$J = -M_1, \qquad (8)$$

кўринишда бўлади. Бунда M_1-космик аппаратни кейинги ҳолатдаги массаси. Бу масала массаси ўзгарувчи моддий нуқта динамикасига тегишли

$$J = c\ln\frac{M_0}{M} \qquad (9)$$

характеристик тезликни минималлаштириш масаласига эквивалент.

Шундай қилиб, космик аппаратни гравитация майдонидаги ҳаракатида вақт бирлиги оралиғидаги масса сарфи m ва тортиш кучи йўналиши $\vec{e}$ бошқариш параметрлари ҳисобланади.

2. Бошқарилувчи механик система ҳаракат тенгламалари.

Одатда механик система нуқталарига қўйилган боғланишлар пассив кучлар ёрдамида амалга оширилади ва бу боғланишлар трос, стержен, сирт, ҳар-хил шарнирлар кўринишида бўлади. Боғланишлар остидаги системаларни бошқариш масаласи эса кўпгина ҳолларда ташқи актив кучлар ёрдамида амалга оширилада. Аммо шундай системалар мавжудки, бу системаларда боғланишлар махсус йўллар билан амалга оширилади ёки бошқача қилиб айтганда, реакция кучлари ёрдамида системада маълум ҳаракатлар амалга оширилади. Адабиётларга эътибор берадиган бўлсак, бошқарилувчи системалар назариясида асосан экстремал траекторияларни аниқлаш мухим ўрин тутада. Қуйида классик механикага тегишли ноидеал боғланишли системалар назариясига асосланган ҳолда шартли боғланишларнинг реакция кучлари ёрдамида механик системаларда асимптотик турғун ҳаракатни амалга ошириш масаласини кўриб чиқамиз. Бунда бошқариш параметрлари сифатида реакция кучлари қатнашади. Бундай масала биринчи бўлиб француз механиги А.Беген томонидан Сперри гироскопларини ўрганишда кўриб чиқилган. Масала моҳиятига кўра, асоси ҳаракатланадиган гироскопик ускуна ўзининг ишлатилиш мақсадидан оғишини бартараф қилишдан иборат. Бу масалани ҳал қилишда А.Беген системага қушимча, яъни оғишларни нолга тенг бўлиш шартини қўйган ва бошқариш параметрлари сифатида реакция кучларини олган. Хозирда ишлаб чиқилган бошқарилувчи механик системалар назариясига эътибор берадиган бўлсак, шартли боғланишлар механик система учун инвариант муносабатлар сифатида қаралади, яъни вақтнинг бошланғич вақтида ўринли бўлган муносабат бутун ҳаракат давомида бажарилиши талаб қилинади. Биринчи навбатда ноидеал боғланишларга тегишли П.Пенлеве томонидан ишлаб чиқилган асосий натижалар устида тўхталамиз.

Маълумки, А. Беген томонидан ишлаб чиқилган назарияга кўра системага қўйилган биринчи тур боғланишлар орасида, иккинчи тур боғланиш реакция кучларининг бажарган ишлари нолга тенг бўладиган кўчишлар мавжуд, яъни иккинчи тур боғланишлар идеал боғланишлардан иборат. Бунга кўра, бундай системалар учун Даламбера – Лагранжа принципи барча мумкин бўлган кўчишлар учун ўринли эмас. Ўз ўзидан туғиладиган савол, бу ноидеал боғланишли системаларга тегишли натижалар шартли боғланишли системалар учун ҳам ўринлими. Агар бизга n моддий нуқтадан иборат S механик система берилган бўлса, системага қўйилган боғланишлар идеал дейилади, агар система нeқталарининг мумкин бўлган кўчишларидаги реакция кучларининг бажарган ишларини йиғиндиси нолга тенг бўлса. Агар виртуал кўчишлардаги бажарилган иш нолга тенг бўлмаси, $\overline{R}$ реакция кучини доимо иккита ташкил этувчига ажратса бўлади. Бунда $\overline{R}_1$ – реакция кучининг ташкил этувчиси бўлиб, ишқаланиш йўқ бўлган ҳалдагиси ва $\overline{R}-\overline{R}_1=\overline{\rho}$ ишқаланиш кучи. Системага таъсир қилаётган реакция кучларининг ташкил этувчилари қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

1. Система нуқталарининг ҳар қандай виртуал кўчишларида.

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} R_\gamma^n\,\delta x_\gamma=0$$

2. $\vec{\rho}\delta t$ **векторлар системанинг мумкин бўлган кўчишлари тўпламида ётади ва**

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} R^\tau{}_\gamma\delta\, x_\gamma=\tau\neq 0$$

Бошқача қилиб айтганда, боғланиш реакция кучн $\overline{R}$ни доимо иккита $\overline{\rho}$ ва $\overline{R}_1$ ташкил этувчилрга ажратиш мумкинки, бунда $\overline{\rho}$ ишқаланиш кучи ва $\overline{R}_1$ ташкил этувчи эса боғланиш кучидан иборат.

Қуйида шартли боғланишларни ноидеаллиги ва бўшатилиши ҳисобга олинган ҳолда динамик системаларнинг ҳаракатини кўриб чиқамиз. Аниқ масалада шартли боғланишга нисбатан стабиллаш муаммосини ҳал қиламиз.

Фараз қиламиз, бизга ҳолати $q_i\left(\, i=1,2,\ldots,n\right)$ умумлашган координаталар билан аниқланадиган геометрик боғланишли механик система берилган бўлсин. Бунда система системага таъсир қилаётган умумлашган кучлар Q_i ва система ҳаракати қуйидаги бир-бирини инкор қилмайдиган

$$f_\alpha(q_j,t)=0\ \ (f_\alpha\in C_2;\ \alpha=1,2,...,a) \qquad (10)$$

геометрик ва

$$\varphi_\beta(q_i,q_i^\bullet,t)=0\ \ (\varphi_\beta\in C_1;\ \beta=1,2,...,b) \qquad (11)$$

умумий ҳолда чизиқсиз кинематик боғланишлар остида бўлсин.

Боғланишларга кўра, системанинг мумкин бўлган кўчишлари қуйидаги муносабатларни қаноатлантиради:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\delta q_i=0, \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_i^\bullet}\delta q_i=0$$

ва системанинг ҳолатини қуйидаги, ўзаро боғлиқ бўлмаган ўзгарувчилар орқали аниқлаш мумкин:

$$q_i=a_i(q_j,t),\ q_i^\bullet=b_i(q_j,p_s,t)\ (a_i\in C_2,\ b_i\in C_1) \qquad (12)$$

Бунда $q_j\,(j=1,2,...,p)$- ўзаро боғлиқ бўлмаган Лагранж координаталари, $p_s\,(s=1,2,...,r)$ - ўзаро боғлиқ бўлмаган тезлик параметрлари. Кинематик боғланишли системалар назариясига кўра, δq_i координаталарнинг вариацияларини $\delta\pi_s$ эркин вариациялар орқали ифодалаш мумкин.

$$\delta q_i=\sum_{s=1}^{r}\frac{\partial b_i}{\partial p_s}\delta\pi_s \qquad (13)$$

Фараз қиламиз, (1) боғланишлар ичида биринчи c, таса биринчи тур боғланишлардан иборат бўлсин. Агар биринчи тур боғланиш реакция кучларини $\vec{N}_i$ ва $\vec{\Phi}_i$ -билан шартли боғланишлар реакия кучларини белгиласак $\vec{R}_i=\vec{N}_i+\overline{\Phi}_i$. Бунга кўра, ноидеал боғланишли система учун

$$\sum_{i=1}^{n}N_i\delta q_i=0,\ \ \sum_{i=1}^{n}\Phi_i\delta q_i=\tau\neq 0.$$

ўринли ва шартли боғланишларнинг реакция кучларини шундай иккита Φ_i^n,Φ_i^nташкил этувчига ажратиш мумкинки, бунда $\Phi_i^n\delta t$ векторлар системанинг мумкин бўлган кўчишлар тўпламида ётади. Ноидеал боғланишли системалар назариясига кўра, бу ташкил этувчиларнинг компоненталари учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\Phi_i^n = \sum_{\alpha=c+1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=c+1}^{b} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\Phi_i^\tau = \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \frac{\partial b^*}{\partial p_\nu}$$

Бунда $\lambda_\alpha, \mu_\beta$ -Лагранж кўпайтувчилари, u_ν -пропорционаллик коэффициентлари.

Системанинг ҳаракат тенгламалари эса қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + N_t + \Phi_i .$$

Бунда T -система кинетик энергияси боғланишларни ҳисобга олинмаган ҳолда тузилган.

Реакция кучларининг структураси эса

$$N_i = \sum_{\alpha=1}^{c} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=1}^{d} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\Phi_i = \sum_{\alpha=c+1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=c+1}^{b} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \frac{\partial b^*}{\partial p_\nu} .$$

3. Боғланишларга нисбатан параметрик бўшатилган ҳаракат.

Энди системага қўйилган биринчи ва иккинчи тур боғланишлар билан биргаликда шартли боғланишларга нисбатан қуйидаги

$$t_{c+\gamma}(q_i, t) = \eta_\gamma \quad (\gamma = 1,2,....,e) \qquad (14)$$

$$\varphi_{d+\rho}(q_i, \dot{q}_i, t) = \zeta_\rho \quad (\rho = 1,2,...., f)$$

муносабатларни киритамиз. Бунда η_γ ва ζ_ρ - геометрик ва кинематик шартли боғланишлардан узлуксиз оғиш параметрларини билдиради. Бу оғишлар сифатида кўпгина ҳолларда шартли боғланишларнинг чап томонлари олинади. Бунга кўра системанинг кинематик мумкин бўлган ҳолатлари учун қуйидаги муносабатларга эга бўламиз:

$$q_i = A_i^*(q_\mu, \eta_\gamma, t) \quad (A_i^* \in C_1)$$

$$\dot{q}_i = B_i^*(q_\mu, \eta_\gamma, p_\nu, \zeta_\rho, \dot{\eta}_\gamma, t) \quad (B_i^* \in C_1)$$

Бу муносабатлар шундай танлаб олинадики $\eta_\gamma = \dot{\eta}_\gamma = \zeta_\rho = 0$ да бўшатилмаган система ҳолатини бериши керак.

(10) ва (11) геометрик ва кинематик боғланишларни ҳисобга олиш учун система ҳолатини аниқлайдиган муносабатларни умумлашган $q_{p+1}, q_{p+2}, ..., q_k$, координаталарга ва $p_{r+1}, p_{r+2}, ..., p_m$ тезлик параметрларига нисбатан ечиб оламиз. Бунга кўра, системанинг мумкин бўлган ҳолатлари қуйидагича аниқланади:

$$q_i = A_i(q_j, \eta_\gamma, t)$$

$$\dot{q}_i = B_i(q_j, \eta_\gamma, p_s, \zeta_\rho, \dot{\eta}_\gamma, t) \qquad (15)$$

Системага тегишли умумлашган координаталарнинг вариациялари учун

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial B_i}{\partial p_s} \delta \pi_s + \sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial B_i}{\partial \zeta_\rho} \delta \sigma_\rho + \sum_{\gamma=1}^{e} \frac{\partial B_i}{\partial \eta_\gamma} \delta \eta_\gamma$$

муносабат ўринли.

Бизга маълумки, шартли боғланишлардан озод қилинган система учун Даламбер – Лагранж принципи $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - \Phi_i \right) \delta q_i = 0$ ўринли.

Шуни таъкидлаш керакки, ўзгарувчиларнинг вариациялари оддий боғланишларни тўлиқ қаноатлантиради

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{c+\gamma}}{\partial q_i} \delta q_i = \delta \eta_\gamma, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{d+\rho}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \delta \sigma_\rho$$

Лагранж кўпайтувчилари усулидан фойдаланиб принципни

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - \Phi_i^\tau \right) \delta q_i = \sum_{\alpha=1}^{e} \lambda_{c+\alpha} \delta \eta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{f} \mu_{d+\beta} \delta \sigma_\beta$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ёки система тезланишлар энергияси S орқали бўшатилган система ҳаракат тенгламаларини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{p}_s} = Q_s^p + \Phi_s^p, \; Q_s^p = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial B_i}{\partial p_s}, \; \Phi_s^p = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\tau \frac{\partial B_i}{\partial p_s}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}_\alpha} = Q_a^\eta + \Phi_a^\eta + \lambda_{c+\alpha}, \; Q_a^\eta = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial B_i}{\partial \dot{\eta}_\alpha}, \; \Phi_a^\eta = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\tau \frac{\partial B_i}{\partial \dot{\eta}_\alpha}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\zeta}_\beta} = Q_\beta^\zeta + \Phi_\beta^\zeta + \mu_{d+\beta},\ Q_\beta^\zeta = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial B_i}{\partial \zeta_\beta},\ \Phi_\beta^\zeta = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\tau \frac{\partial B_i}{\partial \zeta_\beta}$$

Бу тенгламалар системаси оғишларга мос муносабатлар билан биргаликда ёпиқ $p_s, q_i, \eta_\alpha, \zeta_\beta$ ўзгарувчиларга нисбатан тенгламалар системасини ташкил қилади. Бу тенгламалар системасида $\lambda_{c+1}, \lambda_{c+2}, ..., \lambda_a$; $\mu_{d+1}, \mu_{d+2}, ..., \mu_b$; $u_1, u_2, ..., u_m$ бошқариш параметрлари ролини бажаради. Кўриш қийин эмаски, системани шартли боғланишлардан озод қилиш натижасида боғланишларга нисбатан оғдирилган тенгламалар системасини ҳосил қилдик. Олинган тенгламалар системаси учун одатда стабиллаш ёки боғланишларга нисбатан оптимал стабиллаш масалалари кўрилади, яъни бошқариш параметрлари қўшимча шартлар аосида аниқланади.

Масала. Текисликда жойлашган Σ пластинка цилиндрик шарнир ёрдамида уланган Σ_1диск ёрдамида ҳаракатланади. Бунда диск электродвигателга уланган бўлиб, злектродвигател моменти шундай таъсир кўрсатидики, диск маркази билан шарнир уланган нуқтадан ўтказилган радиус, шарнир билан пластинка масса марказини бирлаштирувчи тўғри чизиқ орасидаги бурчак ҳаракат давомида $\pi/2$ га тенг бўлади.

Системанинг ҳаракат ва шартли боғланишдан узлуксиз бўшатилган тенгламаларини тузинг.

Биринчи навбатда $\alpha - \beta - \pi/2 = 0$ шартли боғланиш аниқ бажарилган ҳолни кўриб чиқамиз. Шартли боғланишни бажарилган деб ҳисобласак, система кинетик энергияси

$$T = T(\Sigma) + T(\Sigma_1) = \frac{1}{2}\{M[R^2\dot{\alpha}^2 + (b^2 + k^2)\dot{\beta}^2 +$$

$$+ 2bR\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha - \beta)] + I_1\dot{\alpha}^2\},$$

кўринишга эга бўлади. Умумлашган координатларга мос умумлашган кучлар учун

$$Q_\alpha = -RF\sin\alpha,\ \ Q_\beta = -aF\sin\beta,$$

$$\Phi_\alpha^n = -\Phi_\beta^n = \lambda,\ \Phi_\alpha^\tau = \Phi_\beta^\tau = u$$

ўринли.

Бунга кўра система ҳаракат тенгламалари қуйидаги кўринишга эга бўлади:,

$$M\left[\left(b^2+k^2\right)\ddot{\beta}-bk\dot{\beta}^2\right]+aF\sin\beta=0$$

$$\left[M\left(b^2+k^2+R^2\right)+I_1\right]\ddot{\beta}+F\left(a\sin\beta+R\cos\beta\right)=2u$$

Фараз қиламиз, шартли боғланиш аниқ бажарилмайди, яъни бошланғич шартлар боғланишлрн аниқ қаноатлантирмайди. Бу ҳолда умумий назарияга кўра

$$\alpha=x+\eta+\pi/2,\ \beta=x$$

оғишлар киритамиз.

$$\alpha-\beta-\pi/2=\eta$$

ва ўзаро боғлиқ бўлмаган χ ва η ўзгарувчиларга нисбатан динамиканинг умумий тенгламаси

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}-\frac{\partial T}{\partial\alpha}-Q_\alpha-\Phi_\alpha^\tau\right)\delta\alpha+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}-\frac{\partial T}{\partial\beta}-Q_\beta-\Phi_\beta^\tau\right)\delta\beta=\lambda\,\delta\eta$$

ва бу системага нолга тенг бўлган ечими асимптотик турғун бўлган системани қўшиб

$$\ddot{\eta}=V(\eta,\dot{\eta}),\ V(0,0)=0,\ \eta(0)=\eta^\circ,\ \dot{\eta}(0)=\dot{\eta}^\circ$$

$$\left[M\left(b^2+k^2+R^2-2bR\sin\gamma\right)+I_1\right]\ddot{\beta}+\left[MR(R-b\sin\gamma)+I_1\right]V(\eta,\dot{\eta})-$$
$$-MbR\dot{\eta}\left(\dot{\eta}+2\dot{\beta}\right)\cos\eta+F\left[a\sin\beta+R\cos(\beta+\eta)\right]=2u$$

$$\left[MR(R-b\sin\eta)+I_1\right]\ddot{\beta}+\left(MR^2+I_1\right)V(\eta,\dot{\eta})+MbR\dot{\beta}^2\cos\eta+RF\cos(\beta+\eta)=2u$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системасида системанинг ҳаракатини ва системани шартли боғланишга нисбатан асимптотик турғунлигини таъминловчи бошқариш параметрини аниқлаш мумкин.

2-МАВЗУ. ОПТИМАЛ ҲАРАКАТНИ АНИҚЛАШГА ДОИР ВАРИАЦИОН МАСАЛА. ОПТИМАЛ ҲАРАКАТНИ АНИҚЛАШНИНГ ЗАРУРИЙ ШАРТЛАРИ.

Режа:

1. Вариацион масаланинг қўйилиши.
2. Стационарликнинг зарурий шартлари
3. Бошқариш параметрлари узилишга эга бўлган t^* нуқтадаги шартлар (Эрдман-Вейерштрасса шартлари).

Таянч сўзлар: *вариация**,** умумлашган импульс, хақиқий ҳаракат, мумкин бўлган ҳаракат.*

1. Вариацион масаланинг қўйилиши.

Фараз қиламиз, объектнинг ҳаракати қуйидаги

$$\dot{x}_i = f_i(x_j, u_s, t), \ \ (i, j = 1,2,3,...,n; s = 1,2,3,...,r) \qquad (1)$$

Бунда x_i – узлуксиз, бўлакли силлиқ ва система ҳолатини аниқловчи координаталар; u_s – бошқарувчи параметрлар бўлиб, бўлакли узлуксиз функциялар синфига тегишли; t – вақти ($t_0 \le t \le t_1$); f_i -аниқланиш соҳасида етарлича тартибли хусусий ҳосилалари мавжуд бўлган функциялар. Кўпгина ҳолларда системага тегишли координаталар ва бошқариш параметрларига қўшимча

$$\psi_\kappa(x_i, u_s, t) = 0, \ (1,2,3,..., p < r) \qquad (2)$$

қўшимча боғланишлар қўйилади. Бунда ψ_k – функциялар учун ҳам f_i функциялар қаноатлантирадиган шартлар бажарилади.

Фараз қиламиз, системанинг ҳолати учун қуйидагилар ўринли бўлсин:

$$t = t_0; x_i(t_0) = x_{i0}, \ \ (i = 1,2,3,...,n); \qquad (3)$$

$$t = t_1; x_l(t_1) = x_{l1}, \ \ (l = 1,2,3,..., q \le n) \qquad (4)$$

Вариацион масалани қўйилиши қуйидагича: $t_0 \le t \le t_1$ вақт интервалида (1) ҳаракат тенгламаларини, (2) боғланишларни. (3) ва (4) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ва аргументларига нисбатан хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлган

$$J = J(x_{q+1}, x_{q+2}, ..., x_n, t_1) \qquad (5)$$

функционални минималловчи x_i координаталарни ва u_s бошқариш параметрларини топинг.

Масала қўйилишига кўра, функционални минимум қийматини аниқлаш шартли экстремум масаласига келади, яъни функционалда қатнашувчи ўзгарувчиларга (1) ва (2) кўринишдаги дифференциал ва чекли боғланишлар қўйилган. Бизга назарий механика фанидан маълумки, бундай ҳолларда ўзаро боғлиқ бўлмаган Лагранж кўпайтувчилари λ_i ва μ_k $(i = 1,2,3,...n; k = 1,2,3,...p)$

киритиш усулидан фойдаланилади ва масала шартсиз экстремумни аниқлашга келтирилади.

$$I = J + \int_{t_0}^{t_1} F dt, \tag{6}$$

функционални кўриб чиқамиз.

Бунда $$F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\dot{x}_i - f_i) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k \psi_k$$

(7)

Лагранж функцияси.

Кўриш қийин эмаски, J функционални мумкин бўлган траекториялардаги экстремумини аниқлаш I функционални экстремумини аниқлашга эквивалент, чунки экстремал траекторияларда $F=0$. Бундан $I=J$ эканлиги келиб чиқади.

Қўйилган масалани ечишда, худди аналитик механикага тегишли принципларда кўрилганидек хақиқий таектория кинематик мумкин бўлган траекториялар билан солиштирилади. Бунда ўзгарувчиларни вариациялаш усулидан фойдаланамиз. Кўрилаётган ҳолда ҳаракат вақти ва чегара ўзгарувчан бўлгани учун, системага тегишли координаталар ва бошқариш параметрларининг вариацияларини ҳисоблашда

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t \tag{8}$$

тўлиқ вариациядан фойдаланамиз. Бунда δf -изохрон вариация (фақат функциянинг кўринишини ўзгариши ҳисобга олинади); $\dot{f}\,\Delta t$ -вақт ўзгариши ҳисобига ҳосил бўладиган вариация. Бундан ташқари, бошқариш параметрлари бўлакли узлуксиз бўлгани учун, вақтнинг маълум қийматларида биринчи тартибли узулиш нуқталари мавжуд. Шунинг учун, (6) функционални тўлиқ вариациясини ҳисоблашда қуйидаги формуладан фойдаланамиз:

$$\Delta I = \Delta J + \Delta \int_{t_0}^{t_-^*} F dt + \Delta \int_{t_+^*}^{t_1} F dt, \tag{9}$$

$$\Delta \int_{t_0}^{t_-^*} F dt = \int_{t_0}^{t_-^*} \delta F dt + [F \Delta t]_{t_0}^{t_-^*}, \tag{10}$$

бунда t^* –узулиш вақти. Бунга кўра

$$\int_{t_0}^{t_-^*} \delta F dt = \int_{t_0}^{t_-^*} [\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i + \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial \mu_k} \delta \mu_k + \sum_{s=1}^{q} \frac{\partial F}{\partial u_s} \delta u_s] dt. \tag{11}$$

Агар интеграл остидаги иккинчи йиғиндини бўлаклаб интеграллсак,

$$\int_{t_0}^{t_-^*} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i dt = \int_{t_0}^{t_-^*} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \frac{d}{dt} \delta x_i dt = (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i)_{t_0}^{t_-^*} - \int_{t_0}^{t_-^*} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}) \delta x_i dt.$$

Олинган натижани (30) муносабатга олиб бориб қўйсак

$$\int_{t_0}^{t_-^*} \delta F dt = \int_{t_0}^{t_-^*} [(\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})) \delta x_i + \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \delta \lambda_i) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial F}{\partial \mu_k} \delta \mu_k + \sum_{s=1}^{q} \frac{\partial F}{\partial u_s} \delta u_s] dt + (\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i) I_{t_0}^{t_-^*}.$$

Оптимал траектория бўйлаб $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}=0,\ \frac{\partial F}{\partial \mu_k}=0,$ бўлгани учун

$$\int_{t_0}^{t_-^*}\delta F dt=\int_{t_0}^{t_-^*}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\ \frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i)I_{t_0}^{t_-^*}. \qquad (12)$$

келиб чиқади. Агар охирги йиғиндидаги изохрон вариациялар учун $\delta x_i=\Delta x_i-\dot{x}_i\Delta t$ муносабатлар ўринлилигини ҳисобга олсак, (29) формула қуйидаги кўринишга келади:

$$\Delta\int_{t_0}^{t_-^*}Fdt=\int_{t_0}^{t_-^*}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\ \frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Delta x_i)I_{t_0}^{t_-^*}+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)\Delta t]I_{t_0}^{t_-^*}$$

(1.32)

$$\Delta\int_{t_+^*}^{t_1}Fdt=\int_{t_+^*}^{t_1}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\ \frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Delta x_i)I_{t_+^*}^{t_1}+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)\Delta t]I_{t_+^*}^{t_1}$$

(13)

формула келтириб чиқариш мумкин. Система ҳолатига тегишли x_i координаталар (нуқта траекторияси узлуксиз) ва вақт узлуксиз бўлгани учун

$$x_i(t_-^*)=x_i(t_+^*)=x_i(t^*),\ \Delta t_-^*=\Delta t_+^*=\Delta t^*.$$

Бу муносабатларни ҳисобга олиб, (32) ва (33) формулаларни қўшамиз.

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}Fdt=\Delta\int_{t_0}^{t_-^*}Fdt+\Delta\int_{t_+^*}^{t_1}Fdt=\int_{t_0}^{t_1}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\ \frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\Delta x_i)I_{t_0}^{t_1}+$$

$$+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)\Delta t]I_{t_0}^{t_1}+\sum_{i-1}^{n}[(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_-^*}-(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_+^*}]\Delta x_i(t^*)+ \qquad (14)$$

$$+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)_{t_-^*}-(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)_{t_+}]\Delta t^*.$$

Ҳисоблашларни охирга етказиш учун J функционални вариациясини ҳисоблаш қолди.

$$\Delta J=\frac{\partial J}{\partial t}\Delta t_1+\sum_{l=q+1}^{n}\frac{\partial J}{\partial x_{l,1}}\Delta x_{l,1} \qquad (15)$$

Ҳаракат бошланишига тегишли t_0 онда $\Delta x_i=0,\ \Delta t=0$ ва t_1 онда зса чегаравий шартларга кўра $\Delta x_j\ (j=1,2,3,...,q)$, яъни координаларнинг бир қисми қўзғалмас. Буни ҳисобга олган ҳолда, юқорида олинган (13) ва (14) формулаларни қўшиб, (9) функционалнинг тўлиқ вариациясини ҳосил қиламиз.

$$\Delta I=\int_{t_0}^{t_1}[\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}))\delta x_i+\sum_{s=1}^{q}\ \frac{\partial F}{\partial u_s}\delta u_s]dt+$$

$$+\sum_{i-1}^{n}[(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_-^*}-(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_+^*}]\Delta x_i(t^*)+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_-^*}-(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i})_{t_+}]\Delta t^*+ \qquad (16)$$

$$+\sum_{l=q+1}^{n}\ (\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{l1}}+\frac{\partial J}{\partial x_{l1}})\Delta x_{l1}+[(F-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\dot{x}_i)_{t=t_1}+\frac{\partial J}{\partial t}]\Delta t_1=0.$$

2. Стационарликнинг зарурий шартлари

Экстремумнинг зарурий шартлари бу оптимал траектория бўйлаб функционал-ни тўлиқ вариациясини

$$\Delta I = 0 \tag{17}$$

нолга тенг бўлишдир. Бунга кўра, ўзаро боғлиқ бўлмаган ўзгарувчиларга нисбатан вариациялар олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши зарур. Бундан келиб чиқадики:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \ (i = 1,2,3,...,n), \tag{18}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_s} = 0, \ (s = 1,2,3,...,r) \ . \tag{19}$$

(18) ва (19) биргаликда Эйлер-Лагранж тенгламалари деб аталади ва (18) система

$$\dot{\lambda}_ш = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \ (i = 1,2,3,...,n) \tag{20}$$

тенгламалар системасига эквивалент бўлади.

Трансверсаллик шартлари.

Бу шартлар ўзгарувчиларни чегарадаги қийматларига тегишли бўлиб, қуйидагича аниқланади:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{l1}} + \frac{\partial J}{\partial x_{l1}} = 0, \ l = q+1, q+2,...,n \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_{i1}} \dot{x}_{i1} = \frac{\partial J}{\partial t_1}, \tag{22}$$

ёки

$$\lambda_{l1} = -\frac{\partial I}{\partial x_{l1}}; \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i1} \dot{x}_{i1} = \frac{\partial I}{\partial t_1}, \ (l = q+1,...,n) \tag{23}$$

Шуни эслатиб ўтиш керакки, бу зарурий шартларни келтириб чиқаришда оптимал траектория бўйлаб Лагранж функцияси $F = 0$ нолга тенг деб олинади.

3. Бошқариш параметрлари узилишга эга бўлган t^* нуқтадаги шартлар (Эрдман-Вейерштрасса шартлари).

(16) формулага кўра

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t_-^*} = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\right)_{t_+^*}; \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i\right)_{t_-^*} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i\right)_{t_+^*}, \tag{24}$$

ёки Лагранж кўпайтувчиларида

$$(\lambda_i)_{t_-^*} = (\lambda_i)_{t_+^*}; \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i\right)_{t_-^*} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dot{x}_i\right)_{t_+^*}. \tag{25}$$

Бундан келиб чиқадики, Лагранж кўпайтувчилари бошқариш параметрларининг узилиш нуқталарида узлуксиз функциялардан иборат бўлар экан.

Шундай қилиб, $x_i, u_s, \lambda_i, \mu_k$ $(2n + r + p)$ та номаълумларга нисбатан (18),(19),(22) ва (25) $2n + r + p$ та шартлар келтириб чиқардик. Координаталар ва Лагранж кўпайтувчиларига нисбатан тенгламалар системасини интеграллаш жараёнида $2n$ та интеграллаш доимийлари келиб чиқади. Бу доимийларни аниқлаш учун юқорида келтирилган шартлардан фойдаланамиз ва уларнинг сони $2n+1$ га тенг, яъни битта ортиқча шарт ёрдамида эркин бўлган ҳаракат вақти t_1 ни топиш мумкин.

3-МАВЗУ. ГРАВИТАЦИЯ МАЙДОНЛАРИДА ҲАРАКАТЛАНАДИГАН МАССАСИ ЎЗГАРУВЧИ МОДДИЙ НУҚТАНИНГ ОПТИМАЛ ТРАЕКТОРИЯЛАРИНИ АНИҚЛАШ

Режа:

1. Масаланинг қўйилиши.
2. Оптимал траектория қисмлари. Ўтиш функцияси.
3. Базис вектор годографи. Биринчи интеграллар.

Таянч сўзлар: *реактив куч, базиз вектор, ўтиш функцияси, биринчи интеграл, тўлиқ интеграл, тортиш қисмлари.*

1. Масаланинг қўйилиши

Фараз қиламиз, массаси $M(t)$ қонунга кўра ўзгарувчи моддий нуқта (космик аппарат масса маркази) гравитация майдони кучи $\vec{g}(\vec{r})$ ва массаси ўзгариши ҳисобига ҳосил бўладиган $\vec{F}=-\frac{c}{M}\frac{dM}{dt}\vec{e}$ реактив кучлар таъсирида $Ox_1x_2x_3$ Декарт координата системасига нисбатан ҳаракатланаётган бўлсин. Бунда $\vec{e}(e_1,e_2,e_3)$-реактив куч йўналишидаги бирлик вектор, $m=\frac{dM}{dt}$-реактив двигателни бирлик вақт оралиғидаги масса сарфи, $c-$двигателдан чиқаётган ёнган ёқилғининг нисбий тезлиги бўлиб, ўзгармас деб қабул қилинади..

Моддий нуқта массаси ўзгарувчи бўлгани учун, Мешчерский тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\dot{\vec{v}}=\frac{cm}{M}\vec{e}+\vec{g}(\vec{r}),$$
$$\dot{\vec{r}}=\vec{v},\ \dot{M}=-m. \qquad (.1)$$

Бу системага тегишли вақт бирлиги орасидага масса сарфи учун $0\le m\le\tilde{m},$ яъни масса сарфи чегараланган ҳолни кўриб чиқамиз. Масалада реактив куч йўналиши $\vec{e}(e_1,e_2,e_3)$ ва масса сарфи m бошқарувчи параметрлар ҳисобланади. Бунга кўра, боғланиш тенгламаларини киритамиз:

$$\vec{e}^{\,2}-1=0,$$
$$m(\tilde{m}-m)-\alpha^2=0. \qquad (2)$$

Бунда α -қўшимча бошқариш параметри.

Бошланғич шартлар

$$t-0,\vec{v}(0)=\vec{v}_0,\vec{r}(0)=\vec{r}_0,M(0)=M_0 \qquad (3)$$

Фараз қиламиз, вақтни чегаравий қиймати $t = t_1$ да нуқта ҳолати ва ҳаракатига тегишли координаталарнинг айримлари ва Майер масаласига тегишли J функционал берилган бўлсин. Юқорида берилган муносабатларга асосланган ҳолда вариацион масала қуйидагича қўйилади:

Ҳаракат тенгламаси (1) ни қаноатлантирадиган, бошқариш параметрлари учун (2.3) шартлар бажариладиган, J фунционални минимумини таъминлаган ҳолда нуқтани бошланғич (2.3) ҳолатдан бошқа кейинги ҳолатга ўтказувчи траекторияни аниқланг.

Базис вектор учун тенглама.

Умумий назарияга кўра, қўйилган масала учун Лагранж функциясини тузамиз:

$$F = (\dot{\vec{v}} - \frac{cm}{M}\vec{e} - g)\vec{\lambda}_v + (\dot{\vec{r}} - \vec{v})\vec{\lambda}_r + (\dot{M} + m)\lambda_m + (\vec{e}^{\,2} - 1)\mu_1 + (m(\tilde{m} - m) - \alpha^2)\mu_2 .$$

Бунга кўра, Эйлер-Лагранж тенгламалар системаси учун

$$\dot{\vec{\lambda}}_v = \frac{\partial F}{\partial \vec{v}},\ \dot{\vec{\lambda}}_r = \frac{\partial F}{\partial \vec{r}},\ \dot{\lambda}_m = \frac{\partial F}{\partial M},\ \frac{\partial F}{\partial \vec{e}} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial m} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0\ , \tag{4}$$

ёки ўрнига қўйиб

$$\dot{\vec{\lambda}}_v = -\vec{\lambda}_r,\ \dot{\vec{\lambda}}_r = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}}\vec{\lambda}_v,\ \dot{\lambda}_m = \frac{cm}{M^2}\vec{e}\vec{\lambda}_v, \tag{4}$$

$$\frac{cm}{M}\vec{\lambda}_v - 2\mu_1\vec{e} = 0, \tag{5}$$

$$\lambda_M - \frac{c}{M}\vec{e}\vec{\lambda}_v + \mu_2(\tilde{m} - 2m) = 0, \tag{6}$$

$$\mu_2\alpha = 0\ , \tag{7}$$

тенгламалар системасига эга бўламиз.

Кейинги ҳисоблашларда $\vec{\lambda}_v$ векторни $\vec{\lambda}$ билан белгилаймиз ва уни базис вектор деб атаймиз. (2.4) вектор тенгламаларнинг биринчи иккитасига кўра базис векторга нисбатан тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\ddot{\vec{\lambda}} = -\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{r}}\vec{\lambda}\ . \tag{8}$$

2. Оптимал траектория қисмлари. Ўтиш функцияси.

Ушбу прараграфда траектория бўйлаб реактив кучни ишлаш тартибига тегишли мухим бўлган шартлар устида тўхталамиз. (2.7) тенгламадан:

агар
$$\alpha = 0,\ \mu_2 \neq 0 \Rightarrow m = 0\ \textit{ёки}\ \ m = \tilde{m};$$
$$\alpha \neq 0,\ \mu_2 = 0 \Rightarrow\ 0 < m < m;$$

келиб чиқади.

Шундай қилиб, α, μ_2 ларга боғлиқ ҳолда оптимал траекториялар учта қисмдан иборат бўлар экан: нол тортиш қисми (НТ), бунда масса сарфи учун $m = 0$; максимал тортиш қисми (МТ), бунда $m = \tilde{m}$ ва ўрта тортиш (ПТ) қисми $0 < m < \tilde{m}$. (5) шартдан, агар $m \neq 0, \textit{ва}\ \mu_1 \neq 0$ шартлар бажарилса, $\vec{\lambda}\ \textit{ва}\ \vec{e}$ векторлар колленеар векторлардан иборат эканлиги келиб чиқади ва $\mu_1 = 0$ бўлса у ҳолда $\vec{\lambda} = 0$, яъни ҳаракат $\vec{e}$ нинг қийматига боғлиқ бўлмайди.. Бундан келиб чиқадики, реактив кучни баъзис вектор бўлаб йўналтириш зарур ($\mu_1 > 0$).

Ўтиш функциясини келтириб чиқариш учун, Вейерштрасса шартига мурожат қиламиз. Унга кўра

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i^*$$

ёки

$$\vec{\lambda}(\frac{cm}{M}\vec{e}+\vec{g})+\vec{\lambda}_r\vec{v}-\lambda_M m \geq \vec{\lambda}(\frac{cm}{M}\vec{e}^*+\vec{g})+\vec{\lambda}_r\vec{v}-\lambda_M m* . \quad (9)$$

Бунда $\vec{e}$ *ва* m - функционални минимумини таъминловчи бошқариш параметрлари, $\vec{e}*$ *ва* $m*$ (2.1) ва (2.2) тенгламаларни қаноатлантирувчи мумкин бўлган бошқа-риш параметрлари. Оддий қисқартиришлардан сўнг (9) қуйидаги кўринишга келади:

$$(\frac{c}{M}\vec{e}\vec{\lambda}-\lambda_M)m \geq (\frac{c}{M}\vec{e}^*\vec{\lambda}-\lambda_M)m* . \quad (10)$$

Бу зарурий шартни ҳар бир тортиш қисми учун кўриб чиқамиз.
Нол(НТ) тортиш қисмида $m=0$. Бу ҳолда мумкин бўлган бошқариш параметри $m^*>0$ бўлгани учун (10) дан

$$(\frac{c}{M}\vec{e}^*\vec{\lambda}-\lambda_M)\leq 0$$

ёки

$$\frac{c}{M}\vec{e}^*\vec{\lambda}\leq\lambda_M . \quad (11)$$

Бу тенгсизлик ҳар доим бажарилишини ҳисобга олсак, чап томонидаги скаляр кўпайтма максимумга эга бўлганда ҳам бажарилади ва бу максимум $\vec{\lambda}$ *ва* $\vec{e}^*$ векторлар коллинеар бўлганида ўринли. Шунинг учун, (НТ) нол тортиш қисмида

$$\lambda_M \geq \frac{c}{M}\lambda , \quad (12)$$

тенгсизлик ўринли ва бунда $\lambda=\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$.

Максимал тортиш қисми (МТ) $m=\tilde{m}.\Rightarrow m^*\leq\tilde{m}$.

1) Агар $m^*=\tilde{m}$ бажарилса, (10) дан $\vec{e}\vec{\lambda}\geq\vec{e}^*\vec{\lambda}$.
   (13)

Бу шарт ихтиёрий $\vec{e}^*$ учун бажарилади қачонки, $\vec{e}\vec{\lambda}$ скаляр кўпайтма максимал қийматга эга бўлса, яъни $\vec{e}$ *ва* $\vec{\lambda}$ векторлар коллинеар векторлардан иборат бўлса, яъни

$$\vec{e}=\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} \text{ ёки } e_i=\frac{\lambda_i}{\lambda}(i=1,2,3) \quad (14)$$

бажарилса.

Агар $\vec{e}^*=\vec{e}$ бажарилса, бу ҳолда (10) дан $(\frac{c}{M}\vec{e}\vec{\lambda}-\lambda_M)(\tilde{m}-m*)\geq 0$ ва $\tilde{m}\geq m^*$ доимо ўринли бўлишини ҳисобга олсак

$$\frac{c}{M}\vec{e}\vec{\lambda}\geq\lambda_M . \quad (15)$$

Бундан кўринадики, (10) шартни бажарилиши учун (13) ва (15) шартларни бажарилиши етарли ва (15) дан (14) муносабатга кўра

$$\frac{c}{M}\lambda \geq \lambda_M \qquad (16)$$

шарт келиб чиқади.

Ўрта ($0 < m < \tilde{m}$) тортиш қисми (ПТ) . Бу ҳолда $m*$ масса сарфи ихтиёрий $0 < m^* < \tilde{m}$ интервалдаги қийматга эга бўлиши мумкин, яъни $m^* < m, m^* = \tilde{m}$ ёки $m^* > m$. Агар $\vec{e}^* = \vec{e}$ бажарилса, (2.10) дан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$(\frac{c}{M}\vec{e}\vec{\lambda} - \lambda_M)(m - m*) \geq 0\,. \qquad (17)$$

Аммо $(m - m*)$ миқдор ихтиёрий ишорага эга бўлишини ҳисобга олсак, (17) бажарилишининг зарурий шарти қуйидагича бўлади:

$$\lambda_M = \frac{c}{M}\vec{e}\vec{\lambda}\,. \qquad (18)$$

Хусусий ҳолда $m^* = m$ га тенг бўлса, (10) дан (13) келиб чиқади ва бу тенгсизлик ихтиёрий $\vec{e}^*$ векторлар учун ўринли бўлади, агар $\vec{e}$ *ва* $\vec{\lambda}$ векторлар ўзаро коллинеар бўлса.

Бунга кўра

$$\lambda_M = \frac{c}{M}\lambda\,. \qquad (19)$$

Қуйидаги $\chi = \frac{c}{M}\lambda - \lambda_M$ ўтиш функциясини киритадаган бўлсак, Вейерштрасса шартидан қуйидаги хулосаларга келамиз:

Траекториянинг нол тортиш қисмида (НТ) қисмида $\chi < 0,\ m = 0$, максимал тортиш қисмида (МТ) $\chi \geq 0,\ m = \tilde{m}$, ва ўрта тортиш қисмида (ПТ) $\chi = 0,\ 0 < m < \tilde{m}$.

3. Базис вектор годографи. Биринчи интеграллар.

Қўйилган масалада Эрдман-Вейерштрасса шартларидан $\lambda_i\ (i = 1,2,...,7)$ Лагранж кўрайтувчилари бошқариш параметрлари ўзилишга эга бўлган нуқталарда узликсиз эканлигини келиб чиқади. Бунга кўра (4) системанинг биринчи тенгламасидан базис вектордан олинган ҳосила $\dot{\vec{\lambda}}$ ҳам узликсиз эканлиги келиб чиқади. Агар координата бошидан базис вектор ўтказадиган бўлсак, у ҳолда бу вектор учидаги нуқтани координата системасида қолдирган изи годограф деб аталади ва бу чизиқ силлиқ чизиқдан иборат бўлади. Оптимал траекторияга нисбатан тортиш кучи базис вектор бўйлаб йўналгани учун, тортиш кучининг йўналиши $\vec{e} = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}$ ҳам ($\vec{\lambda} \neq 0$ фарқли бўлган нуқталарда) узликсиз бўлади. Бундан келиб чиқадики, координата бошида тортиш кучи йўналишини қарама-қарши томонга ўзгартиради (реверс). Бизга маълумки, бошқариш параметрлари узилишга эга бўлган нуқталарда $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \dot{x}_i = \vec{\lambda}(\frac{cm}{M}\vec{e} + \vec{g}) + \vec{\lambda}_r\vec{v} - \lambda_M m$ йиғинди узлуксиз функциядан иборат. Бу йиғиндидага $\vec{\lambda}, \vec{g}, \lambda_r, \vec{v}$ катталиклар узликсиз бўлгани учун, $(\frac{c}{M}\vec{e}\vec{\lambda} - \lambda_M)m$ *ёки* χm ҳам узликсиз функциядан иборат бўлади. Бундан келиб чиқадики, ўтиш функцияси узликсиз бўлгани учун вақт бирлиги орасидаги масса сарфи m узиладиган нуқталарда ўтиш функцияси учун

$$\chi = 0 \tag{21}$$

бажарилади. Бундай нуқталар ўтиш нуқталари деб аталади, яъни двигателни ишлаш режими ўзгаради.

Энди ўтиш χ функциясидан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\dot{\chi} = \frac{c}{M}\dot{\lambda} + \frac{c}{M^2}\lambda m - \dot{\lambda}_M .$$

Агар (4) га кўра $\dot{\lambda}_M = \dfrac{cm}{M^2}\lambda$ муносабат ўринли эканлигини ҳисобга олсак, нол тортиш қисми (НТ) учун

$$\dot{\chi} = \frac{c}{M}\dot{\lambda} \tag{22}$$

формула келиб чиқади. Бунга кўра траекториянинг нол тортиш (НТ) қисмида $M = const$ ва (22) ни интеграллаб қуйидаги

$$\chi = \frac{c}{M}\lambda + const \tag{23}$$

биринчи интегралга эга бўламиз.

Ўрта тортиш (ПТ) қисмида $\chi = 0,\ \dot{\chi} = 0$ (22) дан $\dfrac{c}{M}\dot{\lambda} = 0$ ва бундан

$$\dot{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = const\ . \tag{24}$$

Шундай қилиб, траекториянинг ўрта тортиш қисмида базис векторнинг қиймати ўзгармасдан қолади. Агар гравитацион майдон $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$ стационар майдондан иборат бўлса, бу ҳолда энергия интеграли

$$\vec{\lambda}\vec{g} + \vec{\lambda}_r\vec{v} + m(\frac{c}{M}\lambda - \lambda_M) = const ,$$

ёки

$$\vec{\lambda}\vec{g} + \vec{\lambda}_r\vec{v} + m\chi = h . \tag{25}$$

Юқорида кўрилганидек, нол ва ўрта тортиш қисмларида $\chi = 0$ бўлгани учун (25) интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\vec{\lambda}\vec{g} + \vec{\lambda}_r\vec{v} = h \tag{26}$$

Агар майдон бир жинсли $\vec{g} = const$ гравитация майдонидан иборат бўлса, ҳаракатланаётган массаси ўзгарувчи моддий нуқтани оптимал тректориялари кўпгина ҳолларда аниқланган. Бунда ҳаракат фазовий деб қаралиб, мухит қаршилик кучи ҳисобга олинмайди. Тортиш кучини миқдори ва йўналишини аниқлаш кўриладиган аниқ масалада минимуми таъминланиши талаб қилинадаган функционалга боғлиқ бўлади. Бу ҳолда $\vec{g} = const$ бўлгани учун, базис векторга тегишли тенглама қуйидаги кўринишга келади: $\ddot{\vec{\lambda}} = 0$ ва тенгламани икки марта интеграллаб

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{a};\ \vec{\lambda} = \vec{a}t + \vec{b}, \tag{27}$$

натижага келамиз. Бунда $\vec{a},\vec{b}$ -интеграллаш доимийлари.

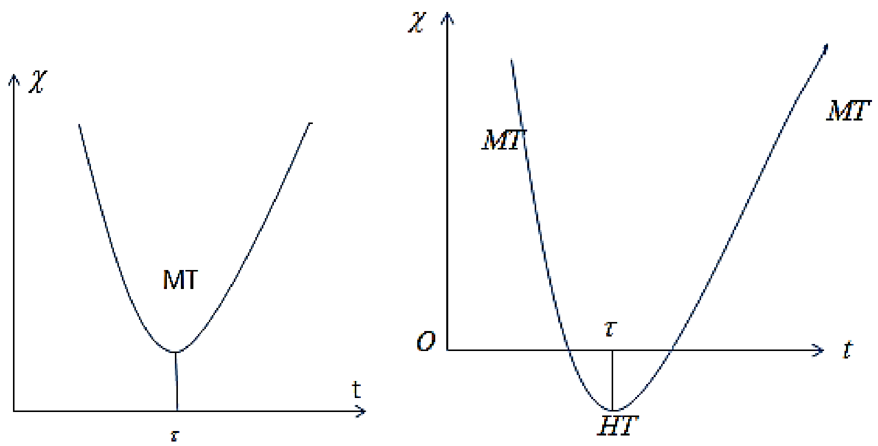
Шундай қилиб, базис вектор учидаги нуқта ўзгармас тезлик билан ҳаракатланиб, тўғри чизиқдан иборат бўлган годограф чизар экан. $\vec{\lambda}$ *ва* $\dot{\vec{\lambda}}$ векторлар узлуксиз бўлгани учун $\vec{a},\vec{b}$ векторлар траекториянинг ихтиёрий қисмида бир хил қийматга эга. Қуйида базис векторга тегишли бўлган ҳар хил ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. $$\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0 \Rightarrow \vec{\lambda} \neq 0$$

Бу ҳолда базис вектор координата марказидан ўтмайди ва маълум бир τ вақтгача камаяди ($\dot{\lambda} < 0$), кейин эса манатон ўсади, яъни (22) дан

$$\dot{\lambda} < 0,\ \ \dot{\chi} > 0 \Rightarrow t < \tau,$$
$$\dot{\lambda} > 0,\ \ \dot{\chi} < 0 \Rightarrow t > \tau.$$

Бундан келиб чиқадики, ўтиш функцияси бошида манатон камаяйиб боради, кейин эса манатон ўсади. Ўтиш функциси ва унинг ҳосиласи узлуксиз функция-лардан иборат бўлгани учун $\chi(t)$ нинг графиги t ўқни икки мартадан кўп кесиб ўтолмайди (-расм), яъни оптимал траекторияда ўтиш нуқтаси иккига тенг бўлади.
Бундан келиб чиқадики, ҳаракат қисмлари учта бўлади, яъни: МТ-НТ-МТ



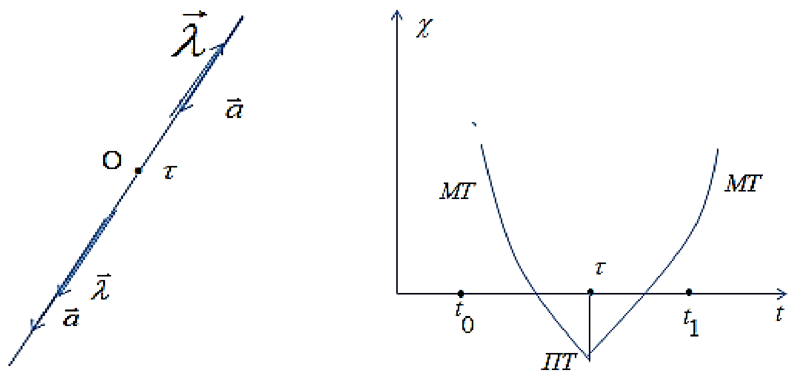
2. $a \neq 0,\ b = 0$. Базис вектор годографи координата марказидан ўтади.

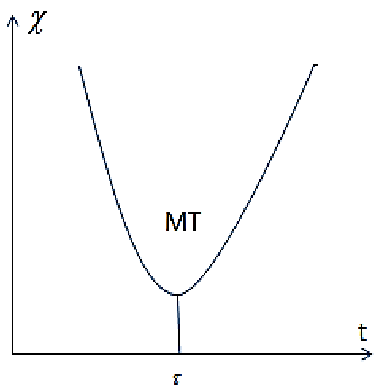
$$t < \tau;\ \ \dot{\lambda} = -a \Rightarrow камаювчи\ ,$$
$$t < \tau;\ \ \dot{\lambda} = a \Rightarrow ўсувчи\ ,$$
$$t = \tau;\ \ \dot{\lambda} = 0 \Rightarrow биринчи\ \ тур\ узилиш\ .$$

$\dot{\chi} = \dfrac{\mu}{M}\dot{\lambda}$ муносабатга кўра, $t = \tau$ да ўтиш функцияси ҳам биринчи тур узулишга эга бўлади:

$$\dot{\chi} = -\frac{\mu}{M}a < 0 \Rightarrow t < \tau,$$
$$\dot{\chi} = \frac{\mu}{M}a > 0 \Rightarrow t > \tau\ .$$

Олинган тенгсизликлардан келиб чиқадиган хулоса шундан иборатки, $\dot{\chi}$ хеч качон нолга тенг бўлмайди, аммо $t=\tau$ да ўзилишга эга. Худди юқорида базис векторга нисбатан кўрилганидек ўтиш функцияси $t<\tau$ да камаяди ва акси $t>\tau$ да ўсувчи функциядан иборат бўлади. Ўтиш функциясининг графиги устида тўхталадиган бўлсак, график t ўқини кўпи билан икки нуқтада кесиб ўтади. Бу ҳолда ҳам траектория учта қисмдан иборат бўлади: МТ-НТ-МТ





3. $a=0, b\neq 0 \Rightarrow \vec{\lambda}=\vec{b}$.. Бу ҳолда базис вектор годографи нуқтага айланади ва реактив тортиш кучи йўналиши ҳаракат даврида ўзгармайди. Бунга кўра, $\lambda=const, \dot{\lambda}=0, \dot{\chi}=0$ ва траекториянинг қисми, ўрта тортиш (ПТ) қисмга тўғри келади.

4-МАВЗУ. ХУСУСИЙ ҲАРАКАТНИ УСТУВОРЛИККА ТЕКШИРИШГА ТЕГИШЛИ АСОСИЙ ТЕОРЕМАЛАР ВА УСУЛЛАР. MAPLE ВА METCAT ПРОГРАММАЛАШ ПАКЕТЛАРИ ЁРДАМИДА БОШҚАРИШ МАСАЛАЛАРИНИ СОНЛИ ЕЧИШ.

Режа:

1. Ляпунов бўйича турғунлик ва асимптотик турғунлик.
2. Ляпунов функцияси ва хоссалари.Асосий теоремалар.
3. Ляпунов функциясини қуриш усуллари ва Maple ва MetCat программалаш пакетлари ёрдамида бошқариш масалаларини сонли ечиш.

Таянч сўзлар: *устуворлик, асимптотик турғунлик, Ляпунов функцияси, ишораси аниқланган ва ишораси ўзгармас функциялар.*

1. Ляпунов бўйича турғунлик ва асимптотик турғунлик.

Устуворлик тушунчаси механиканинг кўп йўналишларида ишлатилиб, ҳар доим бу тушунча қайси маънода кўрилаётгани эслатилиб ўтилади. Масалан, назарий механикада А.М. Ляпунов бўйича устиворлик, яъни бошланғич шартлардан оғиш ҳисобига хусусий ечимни оғиши, материаллар қаршилигида жисм формасини сақлаши, пластинка ва қобиқлар назариясида тебранма ҳаракат частотаси билан боғлиқ. А.М. Ляпунов бўйича турғунлик механик система хусусий ечимларига тегишли бўлиб, қуйидагича киритилади.

Фараз қиламиз, механик системанинг ҳаракат тенгламалари қуйидаги

$$\dot{y}_i = Y_i(t, y_1, \dots y_n) \quad i = 1, \dots, n \tag{1}$$

оддий дифференциал тенгламалар системасидан иборат бўлиб, $y_i = f_i(t),\ i = 1, \dots n$ $t = t_{0.}\ y_i = f_i(t_0),\ i = 1, \dots n$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи , (1) ҳаракат тенгламаларининг хусусий ечимидан иборат бўлсин.

Энди бошланғич шартларга

$$t = t_{0.}\ y_i = f_i(t_0) + \varepsilon_i,\ i = 1, \dots n, \tag{2}$$

оғишлар берамиз. Бунда (2) бошланғич шартларга мос келувчи системанинг ҳаракати оғдирилган ҳаракат ва ε_i миқдорлар эса бошланғич оғишлар деб аталади. Оғдирилган ҳаракатга мос келувчи параметрларни $y_i(t)$ билан белгиласак, у ҳолда оғдирилмаган ҳаракатга мос келувчи $f_i(t)$хусусий ечимларни ҳисобга олган ҳолда, маъносига кўра $x_i = y_i(t) - f_i(t),\ i = 1, \dots n$ ўзгарувчиларни оғишлар ёки вариациялар деб атаймиз. Кейинги аналитик амалларни бажариш учун, оғишларга мос келувчи n ўлчовли фазода ҳаракатланувчи $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нуқтанинг траекториясидан фойдаланамиз.

Кўриш қийин эмаски, оғдирилмаган ҳаракатга $x_i = 0$ координата боши мос келади. Кейинги ҳисоблашларда оғдирилмаган ҳаракатга нисбатан оғишларни баҳолашда қуйидаги $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_i^2 + ... + x_n^2$ миқдордан фойдаланамиз. Киритилган белгилашларга кўра, $t = t_{0.}$ $x_{oi} = \varepsilon_i$, $i = 1,...n$ бошланғич оғишлардан иборат бўлади.

А.М. Ляпунов бўйича турғунлик таърифи. 1. Агар ҳар қандай кичик мусбат $\varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ мусбат сон топиш мумкин бўлсаки, ҳар қандай $\sum_{i=1}^{n} x_{0i}^2 \le \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бошланғич оғишлар учун, вақтни ихтиёрий $t > t_0$ қийматларида $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \varepsilon$ шарт ўринли бўлса, оғдирилмаган ҳаракат турғун(устивор) деб аталади, акс ҳолда нотурғун дейилади. Ҳаракат геометриясига мурожат қиладиган бўлсак, $\sum_{i=1}^{n} x_{0i}^2 \le \delta$ сфера ичидан ҳаракатни бошлайдиган нуқта, хеч қачон $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \varepsilon$ сферадан чиқиб кетолмайди. Бошқача қилиб айтганда, оғдирилган ҳаракат оғдирилмаган ҳаракат атрофида ҳаракатланиб, ундан жуда кичик миқдорга фарқ қилади.

2. Агар оғдирилмаган ҳаракат турғун бўлиб,

$$\lim_{e \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

шарт бажарилса, у ҳолда оғдирилмаган ҳаракат асимптотик турғун дейилади.

3. Агар оғдирилмаган ҳаракат ўзгарувчиларни маълум қисмига нисбатан турғун ва қолганларига нисбатан нотурғун бўлса, оғдирилмаган ҳаракат маълум ўзгарувчиларга нисбатан турғун дейилади. Шуни таъкидлаш керакки, Ляпунов бўйича турғунлик ўзгарувчиларни танлаб олишга боғлиқ.

Оғдирилган ҳаракат тенгламалари

Оғдирилган ҳаракат тенгламаларини келтириб чиқариш учун, оғишларга мос келувчи $y_i = x_i(t) - f_i(t),\ i = 1,...n$ ўзгарувчиларни система ҳаракат тенгламаларига

$$\dot{y}_i + \dot{x}_i = Y_i(t, y_1 + x_1, ...y_n + x_n)\ \ i = 1,...,n,$$

қўямиз ва x_i ўзгарувчиларни кичик деб ҳисоблаб, Тейлор қаторига ёямиз. Бунга кўра

$$\dot{y}_i + \dot{x}_i = Y_i(t, f_1, ...f_n) + (\frac{\partial Y_i}{\partial x_1})_0 x_1 + ... + (\frac{\partial Y_i}{\partial x_n})_0 x_n + X_i^*,\ i = 1,...,n.$$

Бунда X_i^* - x_i ўзгарувчиларга нисбатан юқори тартибли ҳадлар. Агар $f_i(t)$ лар $\dot{y}_i = Y_i(t, y_1, ...y_n)$ $i = 1,...,n$ тенгламалар системасининг ечимидан иборат эканлигини ҳисобга олсак, **оғдирилган ҳаракат тенгламалари** қуйидаги

$$\dot{x}_i = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n + X_i^*,\ i = 1,...,n \qquad (3)$$

кўринишни эгаллайди.

Тенгламалар системасидан юқори тартибли ҳадларни ташлаб юборсак, $\dot{x}_i = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n$, $i = 1,...,n$ биринчи яқинлашишдаги оғдирилган ҳаракат тенгламалари келиб чиқади. Агар a_{ij} коэффициентлар ўзгармаслардан иборат бўлса, тенгламалар системаси автоном, акс ҳолда ноавтоном система деб аталади.

Ляпунов томонидан хусусий ҳаракатни устуворликка текширишни иккита усули таклиф қилган. Биринчи усул оғдирилган ҳаракат тенгламаларининг ечимларини аниқлаш орқали, иккинчи усул(тўғри усул) эса махсус хоссаларга эга бўлган функцияларни тузишга асосланади. Турғунликка текширишда иккинчи усул анчагина рационал ҳисобланиб, оғдирилган ҳаракат тенгламаларининг ечимларини топиш талаб қилинмайди ва бир қатор теоремаларга асосланади. Шуни таъкидлаш керакки, жуда кўп ҳолларда оғдирилган ҳаракат тенгламаларининг аналитик ечимларини топишнинг иложи йўқ ва шунинг учун иккинчи усулдан фойдаланиш самарали ҳисобланади.

2. Ляпунов функцияси ва хоссалари. Асосий теоремалар.

Асосий усул ҳисобланадиган иккинчи усулни ўрганиш учун

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \mu \tag{4}$$

соҳада маълум ҳоссаларга эга бўлган бир қийматли, узлуксиз $V(x) = V(x_1,...,x_n), V(0) = 0$ функцияни кўриб чиқамиз. Агар $V(x) = V(x_1,...,x_n)$ фунциянинг қиймати $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \mu$ соҳада нолдан ташқари фақатгина бир хил ишорали (мусбат ёки манфий) бўлса, фунция ишораси ўзгармас функция деб аталади. Агар ишораси ўзгармас $V(x) = V(x_1,...,x_n)$ функция фақатгина координата бошида $x_i = 0$да нолга тенг бўлса, бундай функция ишораси аниқланган (мусбат ёки манфий) функция деб аталади. Юқорида келтирилган хоссаларга эга бўлган ва ҳаракат турғунлигини аниқлашда ишлатиладиган функциялар, Ляпунов функциялари деб аталади. Энди бу функцияларнинг ҳоссаларини ўрганишга ўтамиз.

1. Ляпунов функциялари ҳамма x_i ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиши керак.
2. $V(x) = c$ сирт $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \mu$ соҳада ёпиқ сиртдан иборат.
3. Агар $|c| > |c_1|$ бўлса, $V(x) = c_1$ сирт $V(x) = c$ сиртнинг ичида жойлашади.

Энди Ляпунов функциясидан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра вақт бўйича олинган ҳосиланинг механик маъносига тўхталамиз. Агар система автоном системадан иборат бўлса, $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1 + ... + \frac{dV}{dx_n}\dot{x}_n$ ва оғдирилган ҳаракат тенгламаларини ҳисобга оладиган бўлсак, $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1}X_1 + ... + \frac{dV}{dx_n}X_n = gradV * \vec{v}$. Бундан, агар ҳаракат давомида нуқта мусбат аниқланган функцияга мос келувчи $V(x)=c$ сиртни ташқарисидан ичига қараб ҳаракатланса $\dot{V}=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1+...+\frac{dV}{dx_n}\dot{x}_n<0$ ва акси, ичидан ташқарисига қараб ҳаракатланса $\dot{V}=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1+...+\frac{dV}{dx_n}\dot{x}_n=\vec{v}*gradV>0$ бўлади. Бу ҳоллардан ташқари, яна $\dot{V}=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1+...+\frac{dV}{dx_n}\dot{x}_n=\vec{v}*gradV=0$ бўлиши мумкин. Бу ҳолда нуқта сирт устида ҳаракатланади.

Ҳаракатни турғунлиги хақидаги Ляпунов теоремалари

Теорема 1. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, шундай ишораси аниқланган $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра вақт бўйича олинган ҳосила $V(x)$ функцияга нисбатан тескари ишорали **ишораси ўзгармас функциядан** иборат бўлса, оғдирилмаган ҳаракат турғун дейилади.

Теорема 2. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, шундай ишораси аниқланган $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра вақт бўйича олинган ҳосила $V(x)$ функцияга нисбатан тескари ишорали ишораси аниқланган функциядан иборат бўлса, оғдирилмаган ҳаракат асимптотик турғун дейилади.

Асимптотик турғунлик хақидаги Н.Н. Красовский теоремаси

Юқорида келтирилган асимптотик турғунлик хақидаги Ляпунов теоремаси $V(x)$ функцияга етарлича оғир шарт қўяди. Бу шартни енгиллаштиришда $V(x)$ функция ишораси ўзгармас бўлиши ҳам мумкин экан. Агар $\dot{V}(x)=0$ га тенг бўладиган соҳани K

билан белгилаймиз. Бунда K нуқталар тўплами,чизиқдан ёки сиртдан иборат бўлиши мумкин.

Теорема. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \mu$ соҳада шундай ишораси аниқланган $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра вақт бўйича олинган ҳосила учун қуйидаги

$$\dot{V}<0,\ x\notin K,$$

$$\dot{V}=0,\ x\in K$$

шарт бажарилса, (бунда К соҳада оғдирилган ҳаракатга тегишли тўлиқ траектория жойлашмаган) оғдирилмаган ҳаракат асимптотик турғун дейилади.

Ҳаракатни нотурғунлиги хақидаги Четаев теоремаси

Теорема 1. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, шундай $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функция учун $x_i = 0$ нуқта атрофида шундай соҳа мовжуд бўлиб, бу соҳада $V(x) > 0$ ва бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра олинган вақт бўйича ҳосила эса $\dot{V} > 0$ бўлса, оғдирилмаган ҳаракат нотурғун дейилади.

Бу теорема Ляпунов томонидан исботланган қуйидаги теоремага нисбатан умумийроқ ҳисобланади.

Теорема 2. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, шундай $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функция учун $x_i = 0$ нуқта атрофидаги соҳада $V(x) > 0$ ва бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра олинган вақт бўйича ҳосила эса ишораси аниқланган бўлиб, $\dot{V} > 0$ шарт бажарилса, оғдирилмаган ҳаракат нотурғун дейилади.

Чизиқли системаларнинг устуворлиги

Қуйида хусусий ҳоллардан бири бўлган, оғдирилган ҳаракат тенгламалари чизиқли тенгламалар системасидан иборат бўлган ҳолни кўриб чиқамиз. Бунда ҳисоблашларни соддалаштириш учун алгебрада кўриладиган матрицалар назариясидан фойдаланамиз. Фараз қиламиз, оғдирилган ҳаракат тенгламалари чизиқли автоном $\dot{x}_i = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n$, $i = 1,...,n$,ёки вектор кўринишда

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

системадан иборат бўлсин. Бунда $A = \|a_{ij}\|$ квадрат матрица. Чизиқли $\vec{z} = \Lambda\vec{x}$ хос бўлмаган алмаштириш ёрдамида янги $z_1,...,z_n$ ўзгарувчиларга ўтамиз. $\Lambda = \|\alpha_{ij}\|$ матрица хосмас матрицадан иборат бўлгани учун,унинг тескари матрицаси мовжуд бўлиб тескари

$\vec{x} = \Lambda^{-1}\vec{z}$ чизиқли алмаштириш ўринли. Алмаштиришларни ўрнига қўйиб

$$\dot{\vec{z}} = B\vec{z},$$

вектор тенгламага эга бўламиз. Бунда $B = \Lambda A \Lambda^{-1}$. Шундай қилиб, чизиқли алмаштириш натижасида $\vec{x}$ узгарувчига нисбатан $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ вектор тенгламадан, $\vec{z}$ ўзгарувчига нисбатан $\dot{\vec{z}} = B\vec{z}$ вектор тенгламага келамиз. Алмаштиришлар чизиқли бўлгани учун хусусий ечимни $\vec{z}$ ўзгарувчиларга нисбатан устуворлик ёки ноустуворлигидан, $\vec{x}$ ўзгарувчиларга нисбатан устуворлик ёки ноустуворлик келиб чиқади.

Кейинга аналитик амалларни бажариш учун, чизиқли алгебрага тегишли теоремаларга тўхталамиз.

Теорема 1. Агар Λ матрица хосмас матрицадан иборат бўлса, у ҳолда $A - \lambda E$ ва $\Lambda A \Lambda^{-1} - \lambda E$ матрицаларнинг элементар бўлувчилари бир хил бўлади ва тескариси, агар $A - \lambda E$ ва $B - \lambda E$ матрицаларнинг элементар бўлувчилари бир хил бўлса, шундай Λ матрица топиладики $B = \Lambda A \Lambda^{-1}$ муносабат ўринли.

Теорема 2. Агар T ва Π матрицалар квадрат симметрик матрицалар бўлиб, бунда T мусбат аниқланган бўлса, у ҳолда

1. $\det(T\lambda + \Pi) = 0$ характеристик тенгламанинг ечимлари хақиқий бўлади.

2. Доимо шундай хосмас Λ матрица топиш мумкинки, $\Lambda' T\Lambda = E,\ \Lambda'\Pi\Lambda = C_0$. Бунда E-бирлик матрица, Λ'-транспанирланган матрица ва C_0-диагонал матрица бўлиб, унинг элементлари характеристик тенгламанинг ечимларидан иборат.

Юқорида келтирилган теоремаларга кўра, $\dot{\vec{z}} = B\vec{z}$ тенгламадаги B матрицанинг коэффициентларини, бошланғич A матрицанинг

$$B = \begin{Vmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_m \end{Vmatrix} \qquad (*)$$

Жордан формасини оламиз. Бунда $B_k = \begin{Vmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_4 \end{Vmatrix}$, ва ўзгартирилган тенгламалар системасига тегишли $\vec{z}$ вектор каноник вектор деб, унинг элементлари эса каноник ўзгарувчилар деб аталади. Шуни таъкидлаш керакки, каноник ўзгарувчиларга ўтиш учун фақатгина $A - \lambda E$ матрицанинг элементар бўлувчиларини билиш етарли бўлади. Олинган натижага кўра, каноник ўзгарувчилардаги тенгламалар m та алоҳида тенгламалар тўпламидан иборат бўлади ва улардан бири қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_1 + \lambda_1 z_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_{e_1} &= z_{e_1 - 1} + \lambda_1 z_{e_1}. \end{aligned}$$

Бу тенламалар системаси оддий интегралланади.

$$\begin{aligned} z_1 &= z_{01} e^{\lambda_1 t}, \\ z_2 &= (z_{02} + z_{01} t) e^{\lambda_1 t}, \\ \ldots\ldots &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{e_1} &= (z_{0e_1} + z_{0e_2} t + \ldots + z_{01} \frac{t^{e_1 - 1}}{(e_1 - 1)!}) e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

Энди оғдирилган ҳаракат устуворлиги масаласига қайтамиз. Олинган ечимларга кўра қуйидаги **теоремалар** ўринли:

1. Агар харакатеристик тенглама ечимларининг хақиқий қисмлари манфий бўлса, оғдирилмаган ҳаракат асимптотик устувор бўлади.

2. Агар харакатеристик тенглама ечимларининг ичида биттагина бўлса ҳам хақиқий қисми мусбат бўлган ечими мавжуд бўлса, оғдирилмаган ҳаракат ноустувор бўлади.

3. Агар харакатеристик тенглама ечимларининг ичида хақиқий қисмлари нолга тенг бўлган ечимлари бўлиб, қолганлари эса манфий хақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда:

а) Оғдирилмаган ҳаракат устувор бўлади, агар хақиқий қисмлари нолга тенг бўлган ечимларга оддий элементар бўлувчилар мос келса:

б) Оғдирилмаган ҳаракат ноустувор бўлади, агар хақиқий қисмлари нолга тенг бўлган ечимлар, оддий элементар бўлувчилар учун каррали бўлса.

3. Ляпунов функциясини қуриш усуллари ва Maple ва MetCat программалаш пакетлари ёрдамида бошқариш масалаларини сонли ечиш.

1. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламалари учун Ляпунов функциясини тузиш қийин бўлса, чизиқли алмаштиришлар ёрдамида Ляпунов функцияси маълум бўлган тенгламалар системасига ўтилади. Алмаштиришлар чизиқли бўлгани учун, алмаштиришлар ёрдамида олинган оғдирилган ҳаракат тенгламаларининг устуворлиги ёки ноустуворлигидан бошланғич системанинг устуворлиги ёки ноустуворлиги келиб чиқади.

2. Номаълум коэффициентлар усули. Кўпгина ҳолларда Ляпунов функцияси квадратик форма $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ кўринишида қидирилади,.чунки квадратик форма учун ишораси аниқланганлигини белгиловчи Сильвестр аломат мовжуд. Биринчи навбатда квадратик форманинг номаълум коэффициентлари Сильвестр аломатини қаноатлантирсин. Бунга кўра квадратик форма ишораси аниқланган бўлади. Форманинг коэффициентлари сони $n(n+1)/2$ бўлиб, улар Сильвестр аломатига кўра n та шартни қаноатлантириши лозим. Бундан эркин коэффициентлар сони $n(n-1)/2$ га тенг эканлиги келиб чиқади. Қолган эркин коэффициентларни Ляпунов теоремаларини қаноатлантирадиган қилиб танлаб олинса, оғдирилмаган ҳаракат устуворлигига тегишли еталилик шартлари келиб чиқади. Аммо бу усул хар доим ҳам иш бермайди, аммо айрим ҳолларда яхши натижалар олиш мумкин.

3. Кўпгина ҳолларда Ляпунов функциясини биринчи интеграллар комбинацияси ёрдамида тузилади. Фараз қиламиз, оғдирилган ҳаракат тенгламалари учун
$F(x_1, x_2, ..., x_n) = h$ биринчи интеграл бўлиб, $F(x_1, x_2, ..., x_n) - F(0)$ айирма аргументларга нисбатан мусбат аниқланган бўлсин. Кўриш қийин эмаски, Ляпунов функцияси сифатида $V = F(x_1, x_2, ..., x_n) - F(0)$ олинса, бу функция турғунлик хақидаги теоремани ҳамма шартларини қаноатлантиради. Айрим ҳолларда оғдирилган ҳаракат тенгламалари бир нечта

$$F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = h_1,$$

$$F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = h_2,$$

$$F_m(x_1, x_2, ..., x_n) = h_m,$$

биринчи интегралларга эга бўлади. Бу ҳолда Н.Г. Четаев томонидан Ляпунов функцияссини қуйидаги

$$V = \lambda_1 (F_1 - F_1(0)) + ... + \lambda_m (F_m - F_m(0)) + \mu_1 (F_1^2 - F_1^2(0)) + ... + \mu_1 (F_m^2 - F_m^2(0)),$$

кўринишда танлаб олиш таклиф қилинган. Бунда номаълум λ_k, μ_k коэффициентларни V функцияни ишораси аниқланганлик шартларидан танлаб олинади.

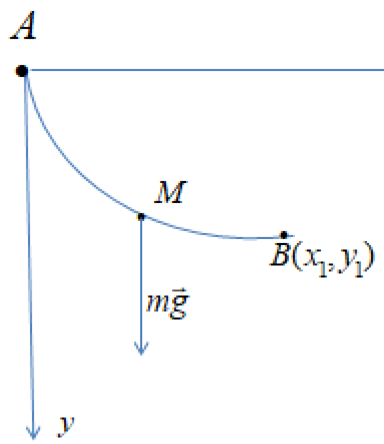
Шуни таъкидлаш керакки, хозиргача Ляпунов фунциясини тузишнинг умумий усули ва унинг мавжудлиги муаммолари очиқ қолмоқда. Охирги даврда чоп қилинган илмий мақолаларга мурожат қиладиган бўлсак, устуворлик муаммосини юқори тартибли оғдирилган ҳаракат тенгламаларида хал қилишда янги бир нечта Ляпунов функциясини тузиш, Ляпунов вектор функцияси ва чегаравий тенгламалар усуллари пайдо бўлди.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1- амалий машғулот. Бошқарилувчи механик системаларга аниқ масалалар.

Амалиётда ҳар қандай бошқариш имконияти мавжуд бўлган масалаларни ечишда, ечимлар орасидан бизни маълум бир талабларимизни қаноатлантирадиган, яъни оптимал ечимни топишга ҳаракат қилинади. Бунинг учун маълум бир миқдорни (функционал) минимум ёки максимумга эришиши тўғрисидаги математик масалани ҳал қилишга (оптималлаштириш масаласини) тўғри келади. Тарихий маълумки, биринчи бўлиб бундай масалани 1696 йилда И. Бернулли кўриб чиққан.

1-Масала. Вертикал текисликда иккита A, B нуқта берилган. Массаси m бўлган моддий нуқта бошланғич тезликсиз A нуқтадан B нуқтага оғирлик кучи $m\vec{g}$ таъсирида энг кам вақт сарфлаб етиб келадиган траекториясини аниқланг.



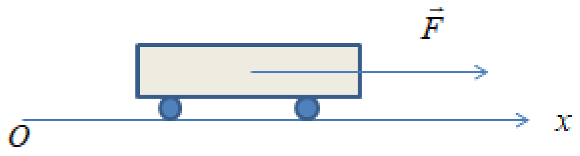
Масаланинг бошланғич шартига кўра $t = 0, x(0) = 0, y(0) = 0, v(0) = 0$. Моддий нуқтанинг ҳаракатига тегишли кинетик энергиясини ўзгариши хақидаги теоремага кўра ҳаракат давомида энергия интеграли ўринли: $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mgy$, бундан бошланғич шартларга кўра $v = \sqrt{2gy(x)}$. Агар $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dt}$ эканлигини ҳисобга олсак, траектория бўйлаб ds масофани босиб ўтиш учун $dT = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy(x)}} = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx$ ва текисликда A нуқтадан B нуқтага ўтиши учун эса

$$T(y(x)) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2gy}} dx \qquad (1)$$

вақт сарфланади, яъни ҳаракат вақти минималлаштирилувчи функционалдан иборат бўлади. Бунда $y(0)=0, y(x_1)=y_1$.

2-масала. Тез таъсир хақидаги масала

Массаси m бўлган тележка горизонтал тўғри чизиқ бўйлаб горизонтал йўналган F куч таъсирида ҳаракатланмоқда. Бошланғич шартлар қуйидагича: $x(t_0)=x_0, \dot{x}(t_0)=v_0$.



Ньютоннинг иккинчи қонунига кўра $\ddot{x}=\frac{F}{m}$, ёки

$$\ddot{x}=\frac{F}{m}=u \tag{2}$$

Тележкага таъсир қиладиган шундай $u(x_0, v_0, t)$ кучни топиш талаб қилинадики, тележка минимал t_1 вақтда тўхтасин, $x(t_1), \dot{x}(t_1)=0$. Бу масалада таъсир қилаётган горизонтал кучни амалга ошириш имконияти чегараланган бўлса, у ҳолда бошқариш параметри учун $u_1 \le u \le u_2$ муносабат ўринли бўлади ва минималлаштирилувчи функционал

$$J=t_1-t_0,$$

кўринишда бўлади.

3.Космик аппарат оптимал траекториясини аниқлаш масаласи.

Қуйида гравитация майдонида ҳаракатланадиган массаси ўзгарувчи космик аппарат масса марказини ҳаракатига тегишли экстремал траекторияларни аниқлаш масаласини кўриб чиқамиз. Мешчерский тенгламасига кўра, космик аппарат масса маркази ҳаракат дифференциал тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt}=M\vec{g}(\vec{r})+\vec{\Phi}, \tag{3}$$

бунда $M(t)-$космик аппарат массаси, $\vec{g}(\vec{r})$-гравитацион тезланиш, $\vec{\Phi}-$реактив куч. Агар гравитация майдони Ньютон тортиш майдонидан иборат бўлса,

$$\vec{g}=-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \tag{4}$$

реактив куч(тортиш кучи) эса

$$\vec{\Phi}=\vec{v}_r\frac{dM}{dt}, \tag{5}$$

$$\vec{v}_r=-c\vec{e}, \tag{6}$$

кўринишда бўлади. Бунда $\vec{v}_r$-сарф қилинаётган ёқилғининг нисбий тезлиги, $\vec{e}-$реактив куч йўналишидаги бирлик вектор, $c=/\vec{v}_r/$-нисбий тезлик миқдори бўлиб, ўзгармас деб қабул қилинади, $\mu-$тортиш марказига тегишли Гаусс доимийси.

Космик аппарат массаси ёқилғи сарфи ҳисобига камайгани учун $\frac{dM}{dt} < 0.$ Бунга кўра, $m = -\frac{dM}{dt}$ вақт бирлиги орасидаги масса сарфини киритамиз. Агар масса сарфини амалга ошириш жиҳатидан чегараланганини ҳисобга олсак, $0 \le m \le \tilde{m}$, яъни вақт бирлиги оралиғидаги масса сарфи қуйи ва юқоридан чегараланган. Юқорида келтирилган белгилашларга кўра, ҳаракат тенгламасини биринчи тартибли дифференциал тенгламалар кўринишида ёзиш мумкин.

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}(\vec{r}) - \frac{cm}{M}\bar{e}, \\ &\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \\ &\dot{M} = m. \end{aligned} \tag{7}$$

Масала қўйилишига кўра, вақт бирлиги оралиғидаги масса сарфи m ва тортиш кучи йўналиши $\vec{e}$ бошқариш параметрлари ҳисобланади, яъни бу миқдорларни танлаб олиш имконияти мавжуд.

Бу масала учун қуйидаги вариацион масалани қўйиш мумкин:

Нуқта фазода бошланғич ҳолатидан кейинги ҳолатига шундай ўтсинки, бу ўтишда нуқта ҳолатига боғлиқ бўлган маълум бир функционал ўзининг минимал қийматига эга бўлсин. Мисол учун нуқта бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтганда масса сарфи энг кам бўлсин (минимал). Бу ҳолда минималлаштилувчи функционал

$$J = -M_1, \tag{8}$$

кўринишда бўлади. Бунда M_1-космик аппаратни кейинги ҳолатдаги массаси. Бу масала массаси ўзгарувчи моддий нуқта динамикасига тегишли

$$J = c\ln\frac{M_0}{M} \tag{9}$$

характеристик тезликни минималлаштириш масаласига эквивалент.

Шундай қилиб, космик аппаратни гравитация майдонидаги ҳаракатида вақт бирлиги оралиғидаги масса сарфи m ва тортиш кучи йўналиши $\vec{e}$ бошқариш параметрлари ҳисобланади.

2-амалиёт. Оптимал ҳаракатни аниқлашга доир масалалар.

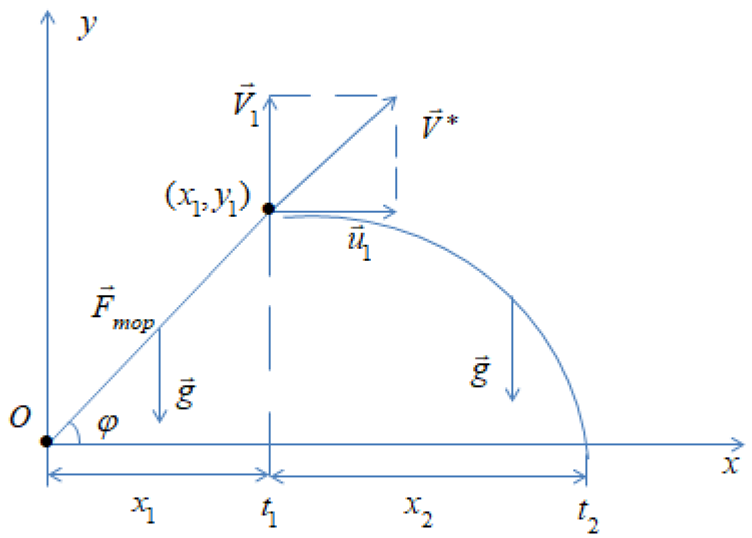
Масалалар

1. Қуйидаги $\dot{x} = -x^3 + u,\ x(0) = 1$ системада $J = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + u^2)dt$ функционални минимумини таъминловчи бошқариш параметри ва траекторияни аниқланг.
2. $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u$ системани бошланғич $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$ ҳолатдан $x_1(0) + x_2(0) = 1$ кейинги ҳолатга ўтказувчи ва $J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt$ функционални минималаштирувчи бошқаришни ва система траекториясини аниқланг.

3. Қуйидаги $\dot{x}=u$ системада $x(0)=1$ бошланғич, кейинги онда $x(4)=1$шартларни қаноатлантирувчи ва бошқаришга нисбатан $|u|\le 1$ тенгсизлик кўринишидаги чегарага кўра, ушбу $J=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dt$ функционални минимумини таъминловчи бошқариш параметри ва траекторияни аниқланг.
4. $\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=u, x_1(0)=10, x_2(0)=0$ системада $J=t_l^2+\frac{1}{2}\int_0^{t_l} u^2dt$ функционални минималлаштирувчи бошқаришни ва траекторияни аниқланг. Бунда $x_1(t_l)=0, x_2(t_l)=эркин.$
5. $J=\frac{1}{2}\int_0^1 (x_1^2+u^2)dt$ критерийга кўра, $\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-x_2-x_1^2+u$ система учун Гамильтон системасини тузинг.
6. “Ер-ҳаво” синфига тегишли ракета бошланғич нуқтадан горизонтга β бурчак остида ўтказилган тўғри чизиқ бўйича максимал узоқликка эришиши мумкин бўлган реактив куч вектори йўналишини ўзгариши дастурини аниқланг. Ракета массасининг ўзгариш қонуни $M=M_0e^{-\alpha t}$ (M_0 - бошланғич масса, $\alpha=const$). Ҳаракат вертикал текисликда бир жинсли оғирлик майдонида юз беради. Атмосферанинг қаршилиги ҳисобга олинмасин. Бошланғич тезлик нолга тенг.
7. $J=\frac{1}{2}\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+u^2)dt$ критерийга кўра, $\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-x_1-x_1^2+u$ система учун Гамильтон системасини тузинг.

3-амалий машғулот. Вертикал текисликда ҳаракатланадиган массаси ўзгарувчи ракетанинг оптимал траекториясини аниқлаш масаласи.

Массаси ўзгарувчи моддий нуқта вертикал текисликда бир жинсли оғирлик кучи ҳамда реактив куч таъсирида ҳаракатланади. Аэродинамик қаршиликни ҳисобга олмаган ҳолда, максимал учиш узоқлигини таъминлаш учун реактив куч йўналиши қандай қонунга кўра ўзгаришини аниқланг. Ечиш. Фараз қиламиз, бошланғич $t=0$ онда нуқта координата бошида ҳаракатга келиб, бошланғич тезлиги $v(0)=0$ га тенг бўлсин ва унинг реактив двигатели $t=t_1$ вақтга қадар маълум конуниятга кўра ёқилғи сарфласин.



Масаланинг қўйилишига кўра, реактив куч координата бошидан ўтувчи вертикал текисликда ўзгариши лозим ва ракетанинг масса марказини ҳаракати Мешчерский тенгламасига кўра қуйидаги кўринишда бўлади:

$$M\vec{W} = \vec{F}_{реак} + M\vec{g}\,,$$

ёки координата ўқларига проекциялаб

$$\begin{aligned} &\dot{u} = f\cos\varphi, \\ &\dot{v} = f\sin\varphi - g, \\ &\dot{x} = u,\ \dot{y} = v, \end{aligned} \qquad (1)$$

оддий дифференциал тенгламалар системасига эга бўламиз. Бунда M -нуқта массаси, $\frac{dM}{dt}$ – вақт бирлиги орасидаги масса сарфи, $f = \frac{c}{M}\frac{dM}{dt}$ – реактив тезланиш бўлиб, вақтнинг вақтнинг функцияси, c – ёнаётган ёқилғи зарраларининг нисбий тезлиги, φ – аинқланиши лозим бўлган бошқариш параметри бўлиб, реактив куч билан горизонтал ўқ орасидаги бурчак.
Масаланинг шартига кўра, бошланғич онда

$$t_0 = 0,\ x = y = u = v = 0 \qquad (2)$$

ва актив қисмни чегараси $t = t_1$ га тегишли координаталарни x_1, y_1 ва тезлик комполениталарини эса мос равишда u_1, v_1 билан белгилаймиз.

Нуқтанинг учиш узоқлиги $L = x_1 + x_2$, бунда x_2 пассив яъни эркин учиш узоқлиги $x_2 = u_1 t_2$ бўлиб, актив участканинг чегаравий қийматлари ёрдамида осон топилади. Бизга маълумки, t_2 – эркин учиш вақти бўлиб, қуйидагича аниқланади:

$$t_2 = \frac{1}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}),$$

ва бунга кўра умумий учиш узоқли учун

$$L = x_1 + \frac{1}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}) \qquad (3)$$

Кўрилаетган ҳолда вариацион масала қуйидагича қўйилади: (1) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи ва (3) учиш узоқлигини максимумга эришишини таъминловчи реактив куч йўналишини аниқловчи $\varphi(t)$ бошқариш функциясини аниқланг.

Умумий назарияга кўра, F Лагранж функциясини тузамиз.

$$F = \lambda_u(\dot{u} - f\cos\varphi) + \lambda_v(\dot{v} - f\sin\varphi + g) + \lambda_x(\dot{x} - u) + \lambda_v(\dot{y} - v).$$

Бунга кўра Эйлер-Лагранж

$$\dot{\lambda}_u = \frac{\partial F}{\partial u}, \dot{\lambda}_v = \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \dot{\lambda}_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \dot{\lambda}_y = \frac{\partial F}{\partial y}$$

тенгламалар системасини ёзамиз:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_u &= -\lambda_x, \\ \dot{\lambda}_v &= -\lambda_y, \\ \dot{\lambda}_x &= 0, \\ \dot{\lambda}_y &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\lambda_u f\sin\varphi - \lambda_v f\cos\varphi = 0 \Rightarrow tg\varphi = \frac{\lambda_u}{\lambda_v}. \tag{5}$$

(4) тенгламалар системасини интеграллаб,

$$\begin{aligned} \lambda_x &= -a,\ \lambda_y = -b, \\ \lambda_u &= at + c,\ \lambda_v = bt + d, \end{aligned} \tag{6}$$

бунда a, b, c, d -ихтиёрий ўзгармаслар. Бу ўзгармасларни аниқлаш учун трансверсаллик шартларидан фойдаланамиз.

Бунга кўра

$$\lambda_{x1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \Rightarrow \lambda_{x1} = -1,$$

$$\lambda_{y1} = \frac{\partial L}{\partial y_1} \Rightarrow \lambda_{y1} = -\frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}},$$

$$\lambda_{u1} = \frac{\partial L}{\partial u_1} \Rightarrow -\frac{1}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}),$$

$$\lambda_{v1} = \frac{\partial L}{\partial v_1} \Rightarrow -\frac{u_1}{g}(1 + v_1 / \sqrt{v_1^2 + 2gy_1})$$

ва олинган Лагранж кўпайиувчиларининг қийматларини (6) тенгламага қўйиб, a, b, c, d ўзгармасларни топамиз:

$$a = 1,$$

$$b = \frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}},$$

$$c - -[t_1 + \frac{1}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1})],$$

$$d = -\frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}}(t_1 + \frac{1}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1})).$$

Ўз навбатида реактив куч йўналиши φ қуйидагича аниқланади:

$$tg\varphi = \frac{\lambda_v}{\lambda_u} = \frac{bt + d}{at + c} = \frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}} \tag{7}$$

Бундан кўринадики, максимал учиш узоқлиги реактив кучни горизонт билан ҳосил қилган **бурчаги ўзгармас** бўлган ҳолда эришилар экан.

Энди бошқариш параметри φ бурчакка тегишли узилиш нуқталари мавжудлиги масаласини кўриб чиқамиз. Бунинг учун, Вейерштрасса зарурий шартларига мурожат қиламиз:

$$\lambda_x \dot{x} + \lambda_y \dot{y} + \lambda_u \dot{u} + \lambda_v \dot{v} \le \lambda_x \dot{X} + \lambda_y \dot{Y} + \lambda_u \dot{U} + \lambda_v \dot{V}. \qquad (8)$$

Бунда $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{U}, \dot{V}$ тенгламалар системасидан олинган бўлиб, бошқариш φ функциясини бошқа φ^* мумкин бўлган бошқариш функцияси билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлган функциялар. Бунга кўра, зарурий шартни қайтадан ёзамиз:

$$\lambda_x u + \lambda_y v + \lambda_u f \cos\varphi + \lambda_v (f \sin\varphi - g) \le \lambda_x u + \lambda_y v + \lambda_u f \cos\varphi^* + \lambda_v (f \sin\varphi^* - g),$$

ёки $\lambda_u f \cos\varphi + \lambda_v (f \sin\varphi - g) \le \lambda_u f \cos\varphi^* + \lambda_v f \sin\varphi^*.$

Бу муносабатга юқорида келтириб чиқарилган Лагранж кўпайтувчиларининг қийматларини қўйиб, қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$$\frac{1}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1})\cos\varphi + \frac{u_1}{g}(1 + v_1 / \sqrt{v_1^2 + 2gy_1})\sin\varphi \ge$$

$$\frac{1}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1})\cos\varphi * + \frac{u_1}{g}(1 + v_1 / \sqrt{v_1^2 + 2gy_1})\sin\varphi^*$$

Бу тенгсизликни иккала томонини $\frac{1}{g}(v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}\,)$ га бўлиб

$$cos\varphi + \frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}}\sin\varphi \ge cos\varphi^* + \frac{u_1}{\sqrt{v_1^2 + 2gy_1}}\sin\varphi^* \ , \qquad (9)$$

тенгсизлик ҳосил қиламиз. Бу тенгсизлик $u_1 > 0$, яъни ўткир бурчакларда (биринчи чоракда) бажарилади ва φ бурчакнинг қиймати (9) тенгламага кўра ягона бўлгани учун тўлиқ оптимал траектория бўйлаб бошқариш функциясини узилиш нуқталари бўлмайди. (1) тенгламалар системасини интеграллаш учун f реактив тезланишни аниқ кўринишини бериш зарур. Масалан, агар массани ўзгариш қонуни кўрсаткичли функцияга кўра ўзгарса, у ҳолда $f = \frac{c}{M}\frac{dM}{dt} = const$ ўзгармасдан иборат бўлади ва тенгламалар системасини бошланғич шартларга кўра интеграллаб қуйидаги ҳаракатланиш қонунига эга бўламиз:

$$u_1 = f \cos\varphi t_1, v_1 = (f \sin\varphi - g)t_1,$$

$$x_1 = \frac{1}{2} f \cos\varphi t_1^2,\ u_1 = \frac{1}{2}(f \sin\varphi - g)t_1^2.$$

Бошқариш параметри учун

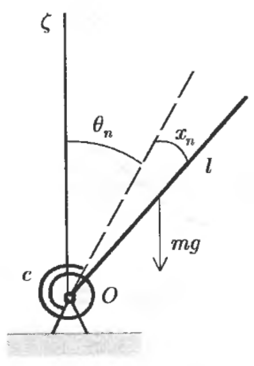
$$\sin^3\varphi + \frac{f}{g}\cos 2\varphi = 0,$$

яъни $f > g$ қийматларда ечимга эга бўлган тенглама келиб чиқади.

Олинган натижаларга кўра, ракетанинг траекторияси $y = \frac{f\sin\varphi - g}{f\cos\varphi}x$ тўғри чизиқдан иборат бўлиб, траектория бўйлаб ракета $w = (f^2 + g^2 - 2gf\sin\varphi)^{\frac{1}{2}}$ тезланиш билан ҳаракатланади.

4-амалий машғулот. Хусусий ҳаракатни устуворликка текшириш ва дастурлаш пакетларидан фойдаланиш.

Масала. Горизонтал ўқ атрофида айланадиган массаси m ва узунлиги l бўлган ингичка стержен вертикал ҳолатда бикрлиги c бўлган спирал пружина ёрдамида мувозанат ҳолатида ушлаб турилади. Вертикал ҳодатда прижина деформацияланмаган. Пружинанинг мувозанат ҳолатларини аниқланг ва оғдирилган ҳаракат тенгламаларини тузинг.



Мувозанат ҳолатида пружина томонидан стерженга таъсир қиладиган $c\theta$ момент оғирлик кучи моменти $\frac{1}{2}mgl\sin\theta$ га тенг бўлади.

$$c\theta = \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

Бундан $\theta = k\sin\theta$, $k = \frac{2c}{mgl}$. Бундан кўринадики, $к$ кичик қийматларида тенглама бир нечта ечимга эга бўлиши мумкин. Фараз қиламиз, θ_n мувозанат ҳолатларидан бири бўлсин. Оғдирилган ҳаракат тенгламаларини тузиш учун хусусий ечимга нисбатан $\theta = \theta_n + x_n$ оғиш берамиз ҳаракат тенгламасини тузамиз. Стержен ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши хақидаги теоремага кўра

$$m\frac{l^2}{3}\ddot{\theta} = -c\theta + \frac{1}{2}mgl\sin\theta.$$

Ҳаракат тенгламасига юқорида келтирилган $\theta = \theta_n + x_n$ муносабатни ва $k = \frac{2c}{mgl}$ белгилашни ҳисобга олсак,

$$\ddot{x}_n + \frac{3g}{2l}(k(\theta_n + x_n) - \sin(\theta_n + x_n))$$

x_n оғишга нисбатан дифференциал тенгламага эга бўламиз. Биринчи яқинлашишдаги тенгламани келтириб чиқариш учун $\sin(\theta_n + x_n)$ ифодани қаторга ёямиз: $\sin(\theta_n + x_n) = \sin\theta_n + x_n \cos\theta_n + ... +$ ва қаторнинг биринчи иккита ҳади билан чегаралансак

$$\ddot{x}_n + \frac{3g}{2l}(k_n - cosx_n)x_n$$

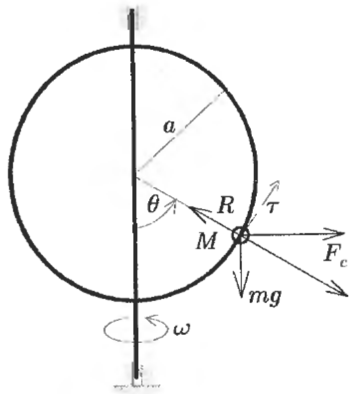
биринчи яқинлашишдаги оғдирилган ҳаракат тенгламаси келиб чиқади.

Ҳаракат турғунлигига оид масалалар.

1. Массаси m ва узунлиги l бўлган сферик маятникни стационар ҳаракатини устуворликка текширинг ва устуворлик шартларини аниқланг?

2. Қаттиқ жисмни Эйлер ҳолига мос келадаган қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатида бош ўқларга нисбатан перманент ҳаракатларига тегишли оғдирилган ҳаракат тенгламаларини тузинг ва биринчи интегралларини аниқланг?

3. Радиуси a бўлган халқа ўзининг вертикал диаметри атрофида айлантирувчи M момент таъсирида айланма ҳаракат қилади. Ўз навбатида халқага ўрнатилган m массаси халқача халқа бўйлаб ўзининг оғирлик кучи ҳисобига ҳаракатланади. Халқа ўзгармас бурчак тезлик билан айланма ҳаракат қилиши учун унинг ўқига қандай момент таъсир қилишини ва халқалар ўртасидаги ишқаланиш кучини ҳисобга олмаган ҳолда халқачанинг нисбий мувозанатини аниқланг ва нисбий мувозанат ҳолатидан оғдирилган ҳаракат тенгламаларини тузинг.



4. Массаси m радиуси r бўлган бир жинсли диск горизонтал текислик бўйлаб оғирлик кучи таъсирида сирпанмасдан думалаб ҳаракатланади. Дискни ҳаракат тенгламаларини тузинг, стационар ҳаракатларини аниқланг ва стационар ҳаракатларни биринчи яқинлашишга кўра устуворликка текширинг.

1. Каналдаги стационар оқим учун тезликлар тақсимоти қандай кўринишда бўлади?

2. Куэттнинг каналдаги оқими масаласи учун чегаравий шартни изоҳланг.

3. Стокснинг 1-масаласи қайси турдаги оқимлар учун ўринли?

4. Иккита коакциал айланувчи цилиндрлар орасидаги оқим масаласида Навье-Стокс тенгламасининг қайси кўринишидан фойдаланилади?

ГЛОССАРИЙ

1	Механическое движение	Механик ҳаракат	Вақт ўтиши билан моддий жисмларнинг фазода ўзаро ҳолатининг (ёки берилган жисм бўлаклари ўзаро ҳолатининг) ўзгариши .	Mechanical movement
2	Механика	Механика	Моддий жисмларнинг механик ҳаракати ва ўзаро механик таъсири ҳакидаги фан.	Mechanics
3	Сила	Куч	Бирор моддий жисмнинг бошқа жисмга кўрсатадиган механик таъсирининг ўлчови бўлган вектор катталик .	Force
4	Инертность	Инертлик	Кучлар таъсиридан холи бўлган моддий жисмнинг ўз ҳаракатини сақлаш ва вақтнинг ўтиши билан шу жисмга кучлар таъсир эта бошласа, мазкур ҳаракатини аста-секин ўзгартира бориш хусусияти.	Inertness
5	Масса	Масса	Исталган моддий объектнинг инертлик ва гравитацион хусусиятларини ифодаловчи асосий кўрсаткичларидан бири.	Weight
6	Материальная точка	Моддий нукта	ҳаракати ёки мувозанатини текширишда ўлчамлари ва шаклининг аҳамияти бўлмаган, массаси бир нуқтада жойлашган деб тасаввур қилинадиган жисм	Material point
7	Механическая система	Механик система	Система-система. Моддий нуқталарнинг ихтиёрий тўплами.	Mechanical system
8	Масса механической системы	Механик системанинг массаси	Механик системани ташкил этувчи моддий нуқталар массаларининг йиғиндиси.	Weight of the mechanical system
9	Абсолютно твердое тело	Абсолют қаттиқ жисм.	Твердое тело –қаттиқ жисм .Исталган икки нуқтаси орасидаги масофа доимо ўзгармасдан қоладиган жисм.	Perfectly rigid body
10	Свободное твердое тело	Эркин қаттиқ жисм	Кўчишларига хеч қандай чек қўйилмаган жисм.	Free solid body
11	Несвободное твердое тело	Боғланищдаги қаттиқ жисм	Кўчишлари чекланган қаттиқ жисм.	Non-free solid body
12	Система отсчета	Санок системаси	Щундай қаттиқ жисмки,унга нисбатан бирор координаталар системаси воситасида вақтнинг турли пайтида бошқа жисмларнинг (ёки механик системанинг) ҳолати аниқланади.	Reference system
13	Инерциальная система отсчета	Инерциал санок системаси	Шундай санок системасики,танҳоланган (ташқи кучлар таъсир этмайдиган) нукта унга нисбатан тинч ҳолатда қолади, ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат қилади.	Inertial reference system
14	Равновесие механической системы	Механик системанинг мувозанати.	Равновесие-Мувозанат.Механик системанинг барча нуқталари,қўйилган кучлар таъсирида берилган санок системасига нисбатан тинч ҳолатда қоладиган мазкур системанинг ҳолати.	The balance of the mechanical system
15	Положение	Ҳолат	Нукта ,нуқталар системаси ёки жисмларнинг санок системасига нисбатан эгаллаган геометрик ўрни	Position

16	Начальное положение	Бошланғич ҳолат	Нуқта,нуқталар системаси ёки жисмларнинг вақтни бошланғич пайтидаги ҳолати.	The initial position
17	Теоритическая механика	Назарий механика	Умумий механика. Механик системаларнинг ҳаракат қонунлари ва бу ҳаракатларнинг умумий хоссалари ўрганиладиган механиканинг бўлими.	Theoretical mechanics
18	Кинематика	Кинематика	Моддий жисмлар ҳаракатини мазкур жисмларнинг массаси ва уларга таъсир этувчи кучларга боғлиқона равишда ўрганиладиган механиканинг бўлими.	Kinematics
19	Основная система отсчета	Асосий санок системаси	Жисмларнинг ҳаракати бир неча санок системасига нисбатан қаралаётганда, мазкур санок системаларидан бири бўлиб, қолган санок системаларининг ҳаракати унга нисбатан аниқланади .	The main frame of reference
20	Подвижная система отсчета	Қўзғалувчи санок системаси	Асосий санок системасига нисбатан ҳаракатланувчи санок системаси.	Mobile reference system
21	Элементарное перемещение точки	Нуқтанинг элементар кўчиши	Нуқтанинг берилган ҳолатдан унга чексиз яқин ҳолатга кўчиши.	Elementary movement point
22	Траектория точки	Нуқтанинг траекторияси	Берилган санок системасига нисбатан ҳаракатланаётган нуқта ҳолатларининг геометрик ўрни.	The trajectory of the point
23	Путь точки	Нуқтанинг йўли	Нуқтанинг берилган вақт ичида ўтган масофаси бўйлаб ўлчанади.	Way point
24	Дуговая координата точки	Нуқтанинг ёй координатаси	Траекториянинг ҳисоблаш боши учун танланган нуқтасидан ҳаракати кузатилаётган нуқтанинг берилган пайтдаги ҳолатигача,шу траектория бўйлаб ўлчанадиган масофа	Arc coordinate point
25	Уравнения движения	Ҳаракат тенгламаси	Вақтнинг ўтиши билан танланган санок системасига нисбатан нуқта ҳолатининг ўзгаришини ифодалайдиган тенгламалар.	The equations of motion
26	График движения	Ҳаракат графиги	Танланган санок системасига нисбатан нуқта ҳолатини аниқловчи параметр билан вақт орасидаги муносабатни ифодалайдиган чизиқ.	Motion graphic
27	Скорость точки	Нуқтанинг тезлиги	Танланган санок системасига нисбатан ҳисобланган нуқтанинг радиус –векторидан вақт бўйича олинган ҳосиласи билан ифодаланувчи нуқта ҳаракатининг кинематик ўлчови.	The speed point
28	Величина скорости точки	Нуқта тезлигининг миқдори	Нуқтанинг ёй координатасидан вақт бўйича олинган ҳосиланинг абсолют қийматига тенг катталик.	The value of the speed point
29	Средняя скорость точки	Нуқтанинг ўртача тезлиги	Нуқтанинг муайян вақт оралиғидаги радиус – вектори орттирмасининг мазкур вақтга нисбатига тенг бўлган катталик.	The average speed of a point
30	Средняя величина скорости	Нуқта тезлигининг ўртача	Нуқтанинг муайян вақт оралиғидаги ёй координатаси абсолют қийматининг мазкур вақтга нисбатига тенг катталик.	The average value of the velocity of the

	точки	қиймати		point
31	График скорости точки	Нуқта тезлигининг графиги	Нуқта тезлигининг микдори билан вақт орасидаги боғланишни ифодаловчи чизиқ.	Graphic of speed point
32	Секторная скорость	Сектор тезлиги	Ҳаракатдаги нуқта радиус-векторини чизган юзасининг ўзгариш тезлигини ифодаловчи тезлигига векторли кўпайтмасининг ярмисига тен.	Sectoral speed
33	Равномерное движение точки	Нуқтанинг текис ҳаракати	Тезлигининг миқдори ўзгарувчан бўлган нуқтанинг ҳаракати.	Uniform motion of a point
34	Ускорение точки	Нуқтанинг тезланиши	Нуқта тезлигининг ўзгариш ўлчовини ифодаловчи катталик бўлиб,мазкур нуқтанинг танланган саноқ системасига нисбатан аниқланган тезлигидан вақт бўйича олинган ҳосиласига тенг.	The acceleration of point
35	Среднее ускорение точки	Нуқтанинг ўртача тезланиши	Нўқтанинг муайян вақт оралиғидаги тезлиги орттирмасининг мазкур вақта нисбатига тенг катталик	Average acceleration point
36	Естественные оси	Табиий ўқлар	Координаталар боши нуқта билан биргаликда траектория бўйлаб кўчадиган, нуқта траекториясига мос равищда ўтказилган уринма, бош нормаль ва бинормаллар бўйича йўналган тўғри бурчакли ўқлар системаси.	Natural axis
37	Касательное ускорение точки	Нуқтанинг уринма тезланиши	Нуқтанинг тезланишини табиий ўқлар бўйича ташкил этувчиларга ажратганда, траекторияга уринма бўйлаб йўналган ташкил этувчиси.	Tangential acceleration of point
38	Нормальное ускорение точки	Нуқтанинг нормал тезланиши	Нуқтанинг тезланишини табиий ўқлар бўйича ажратганда, траекторияга ўтказилган бош нормаль бўйича йўналган ташкил этувчиси.	Normal acceleration of point
39	Ускоренное движение	Тезланувчан ҳаракат	Вақтнинг ўтиши билан тезлигининг миқдори орта борадиган, яъни уринма тезланишининг йўналиши тезлик билан бир йўналишда бўлган нуқтанинг ҳаракати	Accelerated motion
40	Равномерно переменное движения	Текис ўзгарувчан ҳаракат	Уринма тезланишининг микдори ўзгармас бўлган нуқтанинг ҳаракати	Uniformly variable movement
41	Равномерно ускоренное движения	Текис ўзгарувчан ҳаракат	Уринма тезланишининг миқдори ўзгармас, йўналиши, тезликнинг йўналиши билан устма-уст тушадиган нуқтанинг ҳаракати	Uniformly accelerated motion
42	Замедленное движения	Секинланувчан ҳаракат	Вақтнинг ўтиши билан тезлигининг миқдори камая борадиган.уринма тезланишининг йўналиши тезликнинг йўналишига қарама-қарши йўналадиган нуқтанинг ҳаракати.	Decelerated motion
43	Равнозамедленное движения	Текис секин-ланувчан ҳаракат	Уринма тезланишининг миқдори ўзгармас, йуналиши, тезликнинг йўналишига қарама-қарши йўналган нуқтанинг ҳаракати	Equally decelerated motion
44	Сложное движение точки или тела	Нуқта ёки жисмнинг мураккаб ҳаракати	Бир ватнинг ўзида асосий ва кўзгалувчи саноқ системаларига нисбатан кузатиладиган нуқта ёки жисмнинг ҳаракати	The complex motion of a point or body

45	Абсолютное движения точки или тела	Нуқта ёки жисмнинг абсолют ҳаракати	Мураккаб ҳаракатдаги нуқта ёки жисмнинг асосий саноқ системасига нисбатан ҳаракати	The absolute motion of a point or body
46	Относительное движения точки или тела	Нуқта ёки жисмнинг нисбий ҳаракати	Мураккаб ҳаракатдаги нуқта ёки жисмнинг кўзғалувчи саноқ системасига нисбатан ҳаракати	The relative motion of a point or body
47	Переносное движения	Кўчирма ҳаракат	Кўзғалувчи саноқ системасининг асосий саноқ системасига нисбатан ҳаракати	figurative movement
48	Абсолютная траектория точки	Нуқтанинг абсолют траекторияси	Нуқтанинг кўзралувчи саноқ системасига нисбатан траекторияси.	The absolute trajectory of the point
49	Относительная траектория точки	Нуқтанинг нисбий траекторияси	Нуқтанинг кўзгалувчи саноқ системасига нисбатан траекторияси	The relative trajectory of the point
50	Абсолютная скорость точки	Нуқтанинг абсолют тезлиги	Нуқтанинг абсолют ҳаракатдаги тезлиги	The absolute velocity of the point
51	Относительная скорость точки	Нуқтанинг нисбий тезлиги	Нуқтанинг нисбий ҳаракатдаги тезлиги	The relative velocity of the point
52	Переносная скорость точки	Нуқтанинг кўчирма тезлиги	Берилган онда қўзғалувчи саноқ системаси билан доимий боғланган фазонинг нуқтаси билан устма-уст тушувчи нуқтанинг мураккаб ҳаракатдаги тезлиги	Portable speed point
53	Абсолютное ускорение точки	Нуқтанинг абсолют тезланиши	Нуқтанинг абсолют ҳаракатдаги тезланиши	The absolute acceleration of point
54	Относительное ускорение точки	Нуқтанинг нисбий тезланиши	Нуқтанинг нисбий ҳаракатдаги тезланиши	The relative acceleration point
55	Переносное ускорение точки	Нуқтанинг кўчирма тезланиши	Берилган онда қўзғалувчи саноқ системаси билан доимий боғланган фазонинг нуқтаси билан устма –уст тушувчи нуқтанинг мураккаб ҳаракатдаги тезланиши.	Portable acceleration point
56	Кориолисово ускорение точки	Нуқтанинг кориолис тезланиши	Мураккаб ҳаракатдаги нуқта абсолют тезланишининг ташкил этувчиси бўлиб, кўчирма ҳаракат бурчак тезлигини нуқтанинг нисбий тезлигига векторли кўпайтмасининг иккиланганига тенг.	Coriolis acceleration point
57	Поступательное движение твердого тела	Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати	Поступательное движения-Илгариланма ҳаракат. Қаттиқ жисмнинг ихтиёрий иккита нуқтасини туташтирувчи кесма ўзининг бошланғич ҳолатига параллал равишда кўчадиган ҳаракати.	Translational motion of the body
58	Скорость поступательного движения	Илгариланма харакат тезлиги	Илгариланма ҳаракатдаги қаттик жисм ихтиёрий нуқтасининг тезлиги.	The speed of translational movement
59	Ускорение	Илгариланма	Илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм	Acceleration of

	поступательного движение	ҳаракат тезланиши	ихтиёрий нуқтасининг тезланиши.	translational movement
60	Вращательное движения твердого тела	Қаттиқ жисминг айланма ҳаракати	Қаттлиқ жисмнинг бундай ҳаракатида мазкур жисм билан доимий боғланган бирор тўғри чизиқда ётувчи барча нуқталар танланган саноқ системасига нисбатан қўзғалмасдан қолади.	The rotational motion of a solid
61	Угол поворота твердого тела	Қаттиқ жисмнинг айланиш бурчаги	Угол поворота –Айланиш бурчаги. Жисмнинг айланиш ўқи орқали ўтувчи ва жисм билан доимий бириктирилган ярим текисликнинг кетма-кет эгаллаган иккита ҳолати орасидаги бурчак	The angle of rotation of a rigid body
62	Плоскопараллельное движение твердого тела	Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати	Плохое движение твердого тела-қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати. Ҳамма нуқталари танланган саноқ системасига нисбатан қўзгалмас бўлган текисликка параллел текисликларда ҳаракатланадиган қаттиқ жисмнинг ҳаракати.	Plane-parallel motion of a solid body
63	Центр конечного поворота	Чекли айланиш маркази	Шундай нуқтаки, мазкур нуқта атрофида текис шаклни айлантириш натижасида бу шаклни шакл текислигида бир ҳолатдан бошқа ҳолатга кўчириш мумкин.	The center of the finite of rotation
64	Мгновенный центр вращения	Оний айланиш маркази	Қўзғалмас текисликнинг шундай нуқтасики, мазкур нуқта атрофида буриш натижасида текис шакл берилган ҳолатдан унга чексиз якин ҳолатга кўчади.	Instantaneous center of rotation
65	Неподвижная центроида	Қўзғалмас центроида	Оний айланиш марказларининг кўзғалмас текисликдаги геометрик ўрни.	Fixed centroid
66	Подвижная центроида	Қўзғалувчи центроида	Тезликлар оний марказининг ҳаракатланувчи текис шакл билан боғланган текисликдаги геометрик ўрни.	Mobile centroid
67	Мгновенный центр ускорений	Тезланишларнинг оний маркази	Вақтнинг берилган пайтида тезланиши нолга тенг бўлган текис шаклнинг нуқтаси	Instant acceleration Center
68	Движение твердого тела вокруг неподвижной точки	Қаттиқ жисмининг қўзгалмас нуқта атрофидаги ҳаракати	Сферическое движение-сферик ҳаракат танланган саноқ системасига нисбатан доимо битта нуқтаси қўзғалмасдан қоладиган жисмнинг ҳаракати	rigid body motion around a fixed point
69	Ось конечного поворота твердого тела	Қаттиқ жисмнинг чекли айланиш ўқи.	Шундай тўғри чизиқки, унинг атрофида қўзғалмас нуқтага эга бўлган қаттиқ жисмни муайян бир ҳолатдан бошқа ҳолатга кўчириш мумкин	The finite rotation axis of a rigid body
70	Мгновенная ось вращения	Оний айланиш ўқи	Шундай тўғри чизиқки унинг атрофида буриш натижасида кўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм берилган ҳолатдан унга чексиз яқин ҳолатга кўчади.	The instantaneous axis of rotation
71	Мгновенная угловая	Оний бурчак тезлик	Қаттиқ жисмнинг оний айланиш ўқи атрофида айланишидаги бурчак тезлиги.	The instantaneous

	скорость			angular velocity
72	Угловая скорость	Бурчак тезлик	Қаттиқ жисм айланма ҳаракатининг кинематик ўлчовини ифодаловчи вектор катталик бўлиб,миқдор жиҳатдан элементар айланиш бурчагининг мазкур айланиш содир бўладиган элементар вақтга нисбатига тенг, йўналиши, оний айланиш ўқи бўйлаб шундай йўналадики, унинг учидан қаралганда, жисмнинг элементар айланиши соат стрелкаси айланадиган йўналишга тескари йўналишда кўриниши керак.	Angular velocity
73	Угловое ускорение	Бурчак тезланиш	Қаттиқ жисм бурчак тезлигининг ўзгариш ўлчовини ифодаловчи катталик бўлиб, Жисмнинг бурчак тезлигидан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг бўлади.	Angular acceleration
74	Неподвижный аксоид	Қўзғалмас аксоид	Асосий саноқ системасига нисбатан оний айланиш ўқларининг геометрик ўрни	Immovable cone
75	Подвижный аксоид	Қўзғалувчи аксоид	Ҳаракатланувчи жисмдаги оний айланиш ўқларининг геометрик ўрни.	Moving aksoid
76	Прецессия	Прецессия	Қаттиқ жисмнинг шу жисмга доимий бириктирилган ўқ атрофидаги айланма ҳаракати ва мазкур ўқнинг у билан кесишувчи ҳамда берилган саноқ системасига нисбатан қўзғалмас бўлган ўқ атрофидаги айланма ҳарақатидан ташкил топган қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракати.	Precession
77	Регулярная прецессия	Мунтазам прецессия	Соф айланиш ўқи ва прецессия ўқи атрофидаги айланишлар текис айланишдан иборат бўлган прецессия.	Regular precession
78	Нутация	Нутация	Қаттиқ жисмнинг прецессияси билан биргаликда бир вақтда содир бўлувчи ҳаракат бўлиб мазкур ҳаракат натижасида соф айланиш ўқи билан прецессия ўқи орасидаги бурчак ўзгаради.	Nutation
79	Прямая прецессия	Тўғри прецессия	Прецессия оний бурчак тезлиги вектори билан шу ондаги соф айланиш бурчак тезлиги вектори орасидаги бурчак ўткир бурчақдан иборат бўлган ҳолдаги прецессия.	Direct precession
80	Обратная прецессия	Тескари прецессия	Прецеччия оний бурчак тезлиги билан шу ондаги соф айланиш бурчак тезлиги орасидаги бурчак ўтмас бурчакдан иборат бўлган ҳолдаги прецессия	Inverse precession
81	Пара вращений	Жуфт айланиш	Абсолют миқдорлари тенг ва қарама-қарши йўналган бурчак тезликлар билан иккита параллел ўқлар атрофида айланувчи қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракати.	A pair of rotation
82	Винтовое движение твердого тела	Қаттиқ жисмнинг винт ҳаракати	Бирор ўқ атрофидаги айланма ҳаракат ва тезлиги мазкур ўққа параллел бўлган илгариланма ҳаракатдан ташкил топган жисмнинг ҳаракати.	Screw rigid body motion

83	Кинематический винт	Кинематик винт	Жисмнинг бурчак тезлиги ва унга параллел равишда йўналган илгариланма ҳаракат тезлигининг тўплами.	Kinematic screw
84	Ось конечного винтового перемещения	Чекли винт кўчишининг ўқи	Жисмнинг муайян бир ҳолатдан бошқа ҳолатга кўчириш мумкин бўлган винт кўчишининг ўқи.	The axis of the finite movement of the screw
85	Неподвижный винтовой аксоид	Қўзғалувчи винт аксоиди	Оний винт ўқларининг ассосий саноқ системасига нисбатан геометрик ўрни.	Fixed screw aksoid
86	Подвижный винтовой аксоид	Қўзғалувчи винт аксоиди	Оний винт ўқларининг ҳаракатланувчи жисмдаги геометрик ўрни	Movable screw aksoid
87	Кинетика	Кинетика	Куч таъсиридаги механик системанинг мувозанати ва ҳаракати ўрганиладиган механиканинг бўлими.	Kinetics
88	Линия действий силы	Кучнинг таъсир чизиғи	Кучни ифодаловчи вектор йўналган тўғри чизиқ	force action line
89	Система сил	Кучлар системаси	Механик системага таъсир этувчи ихтиёрий кучлар тўплами	System of the forces
90	Система сходящихся сил	Бир нуқтада кесишувчи кучлар системаси	Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишадиган кучлар системаси	The system of convergent forces
91	Система параллельных сил	Параллел кучлар системаси	Таъсир чизиқлари параллел бўлган кучлар системаси	System of parallel forces
92	Плоская система сил	Текисликдаги кучлар системаси	Таъсир чизиқлари бир текисликда ётадиган кучлар системаси.	The flat system of forces
93	Пространственная система сил	Фазодаги кучлар системаси	Таъсир чизиқлари фазода ихтиёрий равишда жойлашган кучлар системаси.	The space system of forces
94	Плечо силы	Куч елкаси	Берилган нуқтадан кучнинг таъсир чизиғигача бўлган энг қисқа масофа.	Moment of force about the axis
95	Момент силы относительно точки	Нуқтага нисбатан куч моменти	Куч қўйилган нуқтанинг берилган нуқтага нисбатан радиус векторини шу кучга векторли қўпайтмасига тенг катталик.	Moment of a force about a point
96	Момент силы относительно оси	Ўққа нисбатан куч моменти	Ўқнинг ихтиёрий нуқтасига нисбатан ҳисобланган куч моментининг шу укдаги проекциясига тенг катталик.	Moment of force about the axis
97	Главный вектор системы сил	Кучлар системасининг бош вектори	Кучлар системаси хамма кучларининг геометрик йиғиндисига тенг катталик.	The main vector of force system
98	Главный момент системы сил	Кучлар системасининг марказга	Кучлар системасининг ҳамма кучларидан берилган марказга нисбатан ҳисобланган моментларининг геометрик йигиндисига	The main point about the center of the system of

	относительного центра	нисбатан бош моменти	тенг катталик.	forces
99	Внешняя сила	Ташқи куч	Механик системанинг бирор моддий нуқтасига мазкур системанинг таркибига кирмайдиган моддий жисмларнинг кўрсатадиган таъсир кучи.	External force
100	Внутренняя сила	Ички куч	Механик системанинг бирор моддий нуқтасига мазкур системанинг таркибига кирувчи бошқа моддий нуқталарнинг кўрсатадиган таъсир кучи	Internal force
101	Сосредоточенная сила	Бир нуқтага қўйилган куч	Жисмнинг бир нуқтасига таъсир этадиган куч	concentrated force
102	Поверхностные силы	Сирт кучлари	Моддий жисмнинг сиртидаги нуқталарига таъсир этувчи кучлар	Surface forces
103	Массовые силы	Масса кучлари	Моддий жисмнинг ҳар бир заррасига таъсир этувчи ва мазкур зарраларнинг массасига пропорционал кучлар.	Mass forces
104	Пара сил	Жуфт куч	Пара-жуфт. Миқдорлари тенг ва қарама - қарши йўналган икки параллел кучдан иборат кучлар системаси.	Force couple
105	Плечо пары	Жуфт елкаси	Жуфт ташкил этувчи кучларнинг таъсир чизиқлари орасидаги энг қисқа масофа.	shoulder pairs
106	Плоскость пары	Жуфт текислиги	Берилган жуфтни ташкил этувчи кучларнинг таъсир чизиқлари ётган текислик.	plane couples
107	Момент пары	Жуфт моменти	Жуфтнинг механик таъсирини ўлчови бўлиб, жуфт ташкил этувчи кучлардан бирининг иккинчиси қўйилган нуқтасига нисбатан ҳисобланган моменти.	moment couples
108	Связи	Боғланишлар	Механик система нуқталарига таъсир этувчи ихтиёрий кучларга боғлиқ бўлмаган тарзда мазкур система нуқталарининг ҳолати ва тезлигига қўйиладиган чеклар.	relations
109	Реакции связей	Боғланишларнинг реакциялари	Механик системага қўйилган боғланишларни ифодаловчи моддий жисмларнинг мазкур системанинг моддий нуқталарига кўрсатадиган таъсир кучи.	Reactions relations
110	Статика	Статика	Кучлар таъсиридаги механик системаларнинг мувозанат шартлари текшириладиган механиканинг бўлими.	Statistics
111	Статически определимая механическая система	Статик аниқ механик система	Статиканинг мувозанат мартларидан аниқланган барча боғланишларнинг реакцияларини аниқлаш мумкин бўлган механик система	Statically determinate mechanical system
112	Уравновешенная система сил	Мувозанатлашган кучлар системаси	Мувозанат ҳолатидаги эркин қаттиқ жисмга таъсир этиб унинг бу ҳолатини ўзгартирмайдиган кучлар системаси	A balanced system of forces
113	Уравновешивающая система сил	Мувозанатловчи кучлар системаси	Берилган кучлар системаси билан биргаликда мувозанатлашган кучлар системасини ташкил этувчи бошқа кучлар системаси	Balancing system of forces
114	Приведение системы сил к данной	Кучлар системасини берилган	Абсолют қаттиқ жисмга таъсир этувчи кучлар системасини унга эквивалент бўлган ҳамда берилган марказга қўйилган битта куч ва	Bringing the power of the system to this

	точке	нуқтага келтириш	жуфт куч билан алмаштириш	point
115	Равнодействующая системы сил	Кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси	Равнодействующая –тенг таъсир этувчи берилган кучлар системасига эквивалент бўлган битта куч	Resultant of a system of forces
116	Динамический винт	Динамик винт	Силовой винт –куч винти. Битта куч ва ташкил этувчи кучлари мазкур кучга тик текисликда ётувчи жуфтдан иборат бўлган кучлар. системаси	Dynamic screw
117	Центральная ось системы сил	Кучлар системасининг марказий ўқи	Центральная ось -марказий ўқ . Келтириш марказларининг геометрик ўрни бўлган тўғри чизиқ бўлиб, бу марказларни ихтиёрий бирортасига келтириш натижасида берилган кучлар системаси динамик винтга эквивалент бўлади	The central axis of the system of forces
118	Инварианты системы сил	Кучлар системасининг инвариантлари	Берилган кучлар системасини унга эквивалент бўлган кучлар системаси билан алмаштирганда ўзгармасдан қоладиган,ҳамда мазкур системанинг бош векторига ва ихтиёрий марказга нисбатан ҳисобланган бош моментининг бош вектор йўналишидаги проекциясига тенг бўлган катталиклар	Invariants of the system of forces
119	Центр параллельных сил	Параллел кучлар маркази	Параллель кучлар системасини ташкил этувчи кучларнинг қўйилган нуқталари атрофида исталган бурчакка бурилганда барча кучлар параллел ҳолда қоладиган ва уларнинг ўзаро йўналиш ориентацияси сақланадиган, ҳамда мазкур системанинг тенг таъсир этувчиси ўтадиган геометрик нуқта.	Center of parallel forces
120	Центр тяжести твердого тела	Қаттиқ жисмнинг оғирлик маркази	Қаттиқ жисмнинг барча зарраларига таъсир этувчи ва параллел бўлган оғирлик кучларининг маркази	The center of gravity of a rigid body
121	Динамика	Динамика	Механик системаларнинг кучлар таъсиридаги ҳаракати ўрганиладиган механиканинг бўлими	Dynamics
122	Центр масс механической системы	Механик системанинг массалар маркази	Шундай геометрик нуқтаки, механик системани ташкил этувчи барча моддий нуқталарнинг массаларини уларнинг мазкур нуқтадан ўтказилган радиус-векторларига кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади.	The center of mass of the mechanical system
123	Момент инерции механической системы относительно оси	Механик системанинг ўққа нисбатан инерция моменти	Механик системани ташкил этувчи барча нуқталарининг массаларини берилган ўқдан мазкур нуқталаргача бўлган масофалар квадратига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг катталик.	The moment of inertia about the axis of the mechanical system
124	Радиус инерции системы	Системанинг ўққа нисбатан инерция	Шундай катталикки, унинг квадрати механик системанинг берилган ўққа нисбатан инерция моментини мазкур системанинг массасига	Radius of inertia about the axis

	относительно оси	радиуси	нисбатига тенг	
125	Центробежный момент инерции	Марказдан қочирма инерция моменти	Механик системани ташкил этувчи барча моддий нуқталарнинг массаларини,мазкур координаталарига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг катталик	Centrifugal moment of inertia
126	Эллипсоид инерции для данной точки	Берилган нуқта учун инерция эллипсоиди	Маркази берилган нуқтада ётувчи эллипсоид бўлиб, бу эллипсоид ҳар бир нуқтасининг мазкур марказдан ўтувчи радиус-векторининг квадрати, радиус –вектор бўйлаб йўналган ўққа нисбатан механик системанинг инерция моментига тескари пропорционал бўлади.	The ellipsoid of inertia for a given point
127	Центральный эллипсоид инерции	Марказий инерция эллипсоиди	Системанинг масса марказига мос бўлган инерция эллипсоиди.	The central ellipsoid of inertia
128	Главная ось инерции для данной точки	Берилган нуқта учун инерция бош ўқи	Берилган нуқта учун инерция бош ўқи Берилган нуқтага мос бўлган инерция эллипсоидининг исталгин бош ўкларидан бири.	The main axis of inertia for a given point
129	Главная центральная ось инерции	Инерция марказий бош ўқи	Системанинг массалар марказига мос бўлган инерция бош ўқи	Main central axis of inertia
130	Главный центральный момент инерции	Инерция марказий бош моменти	Инерция марказий бош ўқига нисбатан системанинг инерция моменти	The main central moments of inertia
131	Тензор инерции	Инерция тензори	Компонентлари системанинг ўққа нисбатан инерция моменти ва тескари ишора билан олинган марказдан қочирма инерция моментларидан иборат бўлган, ранги иккига тенг тензор	The inertia tensor
132	Момент инерции механической системы относительно точки	Нуқтага нисбатан механик системанинг инерция моменти	Механик системани ташкил этувчи барча нуқталар массаларини, берилган нуқтадан мазкур системанинг нуқталаригача бўлган масофалар квадратига кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг катталик	The moment of inertia of the mechanical system with respect to the point
133	Количество движения точки	Нуқтанинг ҳаракат миқдори	Механик ҳаракатнинг векторли ўлчови бўлиб, моддий нуқтанинг массасини унинг тезлик векторига кўпаймасига тенг катталик	The quantity of motion of the point
134	Количество движения системы	Системанинг ҳаракат миқдори	Механик системани ташкил этувчи барча моддий нуқталар ҳаракат миқдорларининг йиғиндисига тенг катталик	The quantity of motion of the system
135	Момент количества движения точки относительно центра	Марказга нисбатан нуқта ҳаракат миқдорининг моменти	Моддий нуқтанинг берилган марказдан ўтказилган радиус-векторини ҳаракат миқдорли векторли кўпайтмаси билан ифодаланадиган катталик	The angular momentum relative to the center point
136	Момент количества движения	Ўққа нисбатан нуқта ҳаракат	Берилган ўқда танлаб олинган ихтиёрий марказга нисбатан аниқланган нуқта ҳаракат миқдори моментининг мазкур ўкдаги	The angular momentum about the axis

	точки относительно оси	микдорининг моменти	проекциясига тенг катталик	point
137	Главный момент количества движения системы относительно центра	Марказга нисбатан система ҳаракат микдорининг бош моменти	Кинематический момент системы относительно центра-Марказга нисбатан системанинг кинетик моменти. Берилган марказга нисбатан механик система барча нуқталари ҳаракат миқдори моментларининг йиғиндисига тенг катталик	The main moment of the system's motion relative to the center
138	Главный момент количества движения системы относительно оси	Ўққа нисбатан система ҳаракат микдорининг бош моменти	Кинетический момент системы относительно оси-ўққа нисбатан системанинг кинетик моменти. Механик система барча нуқталарининг берилган ўққа нисбатан ҳисобланган ҳаракат миқдори моментларининг йиғиндисига тенг катталик	The main moment of the system's motion relative to the axis
139	Кинетическая энергия точки	Нуқтанинг кинетик энергияси	Механик ҳаракатнинг скаляр ўлчовини ифодаловчи катталик бўлиб, моддий нуқта массасини унинг тазлиги квадратига кўпаймасининг ярмига тенг.	The kinetic energy of a point
140	Кинетическая энергия системы	Системанинг кинетик энергияси	Механик системани ташкил этувчи барча нуқталар кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг катталик.	The kinetic energy of the system
141	Элементарный импульс силы	Кучнинг элементар импульси	Куч таъсирининг векторли ўлчови бўлиб,кучни мазкур куч таъсир этадиган элементар вақтга кўпайтмасига тенг	Elementary force impulse
142	Импульс силы за конечный промежуток времени	Кучнинг чекли вақт ичидаги импульси	Кучнинг элементар импульси чекли вақт оралиғида олинган аниқ интегралга тенг катталик бўлиб, интегралнинг чегараси учун бошланғич ва охирги пайтдаги вақт олинади	Impulse force for a finite period of time
143	Элементарная работа силы	Кучнинг элементар иши	Куч таъсирининг скаляр ўловини ифодаловчи катталик бўлиб, кучни шу куч қўйилган нуқтанинг элементар кўчишига скаляр кўпайтмасига тенг.	Elementary work of force
144	Работа силы на конечном перемещении	Кучнинг чекли кўчишдаги иши	Берилган моддий нуқтага таъсир этувчи кучнинг элементар ишидан куч қўйилган нуқтанинг кўчиши натижасида чизган эгри чизиғи бўйлаб олинган интегралга тенг катталик.	The work of force in the finite moving
145	Мощность силы	Кучнинг кувввати	Мощность-қувват. Кучни куч қўйилган нуқтанинг тезлигига скаляр кўпайтмасига тенг катталик	power force
146	Центральная сила	Марказий куч	Таъсир чизиғи доимо берилган саноқ системасига нисбатан кўзғалмас бўлган нуқтадан ўтадиган куч	Central force
147	Сила ньютонианского тяготения	Ньютон тортиш кучи	Куч таъсир этаётган нуқтанинг массасига пропорционал ҳамда шу нуқтадан тортиш марказигача бўлган масофанинг квадратига тескари пропорционал ва мазкур марказга йўналган марказий куч.	The strength of the Newtonian gravitation

148	Сила тяжести	Оғирлик кучи	Ернинг сиртига яқин моддий нуқтага таъсир этувчи куч бўлиб, мазкур нуқтанинг массасини унинг вакуумдаги эркин тушиш тезланишига купайтмасига тенг	Gravity
149	Вес тела	Жисмнинг оғирлиги	Жисм зарраларига таъсир этаётган оғирлик кучларининг модулларини йиғиндисига тенг катталик	Body weight
150	Силовое поле	Куч майдони	Фазонинг бирор бўлаги бўлиб, унга жойлашган моддий нуқтага таъсир этувчи куч, берилган саноқ системасига нисбатан ҳисобланган мазкур нуқтанинг координаталарига ва вақтга боғлиқ бўлади.	Force field
151	Стационарное силовое поле	Стационар куч майдони	Таъсир этувчи кучлари вақтга боғлиқ бўлмаган куч майдони дейилади.	The stationary force field
152	Однородное силовое поле	Бир жинсли куч майдони	Ихтиёрий нуқтасида майдон кучи берилган нуқта учун бир хил қийматга эга бўладиган куч майдони	A homogeneous force field
153	Силовая функция	Куч функцияси	Координаталарнинг ёки баъзида вақтнинг ҳам скаляр функцияси бўлиб, мазкур функциянинг градиенти, берилган куч майдонидаги моддий нуқтага таъсир этувчи кучга тенг.	force function
154	Потенциальное силовое поле	Потенциалли куч майдони	Куч функцияси мавжуд бўлган стационар куч майдони	Potential force field
155	Потенциальная энергия точки	Нуқтанинг потенциал энергияси	Потенциал куч майдонидаги моддий нуқтага таъсир этувчи кучнинг мазкур нуқтани берилган ҳолатдан, потенциал энергиянинг қиймати шартли равишда нолга тенг деб ҳисобланадиган ҳолатига кўчишида бажарган ишига тенг катталик.	The potential energy of a point
156	Потенциальная энергия системы	Системанинг потенциал энергияси	Механик система барча нуқталари потенциал энергияларининг йиғиндисига тенг катталик	The potential energy of the system
157	Полная механическая энергия точки	Нуқтанинг тўлиқ механик энергияси	Моддий нуқта кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндисига тенг катталик	The full mechanical energy of a point
158	Полная механическая энергия системы	Системанинг тўлиқ механик энергияси	Механик система кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндисига тенг катталик	The full mechanical energy of the system
159	Консервативная механическая система	Консерватив механик система	Тўлиқ механик энергиянинг сақланиш қонуни ўринли бўлган механик система	The conservative mechanical system
160	Сила инерции	Инерция кучи	Моддий нуқта массасини унинг тезланишига кўпайтмасига тенг ва бу тезланишга қарама-қарши йўналган катталик	inertia force
161	Переносная сила	Кўчирма инерция кучи	Инерциал бўлмаган саноқ системасига нисбатан моддий нуқтанинг ҳаракати	Portable inertia

	инерции		текширилаётганда, нуқта массасини унинг кўчирма тезланишига кўпайтмаси билан ифодаланадиган ва бу тезланишга қарама-қарши йўналган катталик.	
162	Кориолисова сила инерции	Кориолис инерция кучи	Инерциал бўлмаган саноқ системасига нисбатан моддий нуқтанинг ҳаракати текширилаётган, нуқта массасини унинг кориолис тезланиш векторига кўпайтмасига тенг ва бу тезланишга қарама-қарши йўналган катталик.	Coriolis force of inertia
163	Уравнения связей	Боғланишлар нинг тенгламалари	Боғланиш қўйилган система нуқталарининг координаталари ёки тезликлари қаноатлантирадиган тенгламар	The relations equations
164	Геометричес кие связи	Геометрик боғланишлар	Механик система нуқталарининг фақат координаталарига (баъзида вақтга ҳам) боғлиқ бўладиган тенгламалар билан ифодаланадиган боғланишлар	Geometric relationss
165	Дифференци альные связи	Дифференциа лли боғланишлар	Механик система нуқталарининг координаталаридан ташқари шу координаталарнинг вақт бўйича биринчи хосиласини хам (баъзида вақтни ни хам)ўз ичига оладиган тенгламалар билан ифодаланадиган боғланишлар	Differential relations
166	Голономные связи	Голономли боғланишлар	Тенгламаларини интеграллаш мумкин бўлган дифференциалли боғланишлар ва геометрик боғланишлар	Holonomic relations
167	Неголономн ые связи	Беголомном боғланишлар	Тенгламаларини интеграллаб бўлмайдиган дифференциалли боғланишлар	Nonholonomic relations
168	Голономная система	Голономли система	Факат голономли боғланишлар қўйилган механик система	Holonomic system
169	Неголономн ая система	Беголоном система	Камида битта беголоном боғланиш куйилган механик система	Nonholonomic system
170	Стационарн ые связи	Стационар боғланишлар	Тенгламаларига вақт ошкор равишда катнашмайдиган боғланишлар	Stationary relations
171	Нестационар ные связи	Стационар бўлмаган боғланишлар	Тенгламаларига вақт ошкор равишда қатнашадиган боғланишлар	Nonstationary relations
172	Сервосвязи	Серво боғланишлар	Ёрдамчи энергия воситасида амалга ошириладиган ҳамда система нуқталарига автоматик равишда таъсир этадиган ва автоматик бошқариладиган боғланишлар.	Servorelations
173	Возможное перемещени е точки	Нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши	Виртуальное перемещение точки-Нуқтанинг виртуал кўчиши. Боғланишларни қаноатлантирган ҳолда моддий нуқтанинг берилган пайтда эгаллаган ҳолатидан, худди шу пайтда эгаллаши мумкин бўлган ўқга чепсиз яқин ҳолатига кўчиши бўлиб, бу кўчиш мазкур нуқта радиус-векторининг изохрон вариацияси билан ифодаланади	The possible motion of the point
174	Возможное перемещени е системы	Системанинг мумкин бўлган	Виртуальное перемещение системы-Системанинг виртуал кўчиши. Берилган механик система нуқталарининг қўйилган	The possible motion of the system

		кўчиши	боғланишларни қаноатлантирувчи ихтиёрий мумкин бўлган кўчишлар тўплами	
175	Удерживающие связи	Бўшатмайдиган боғланишлар	Шундай боғланишларки,мазкур боғланишлар қўйилган механик система нуқтасининг ихтиёрий мумкин бўлган кўчишига қарама-қарши кўчиш ҳам мумкин бўлган кўчишдан иборат бўлади	Retention relations
176	Неудерживающие связи	Бўшатадиган боғланишлар	Шундай боғланишларки,мазкур боғланишлар қўйилган механик система нуқталарининг айрим мумкин бўлган кўчишларига қарама-қарши кўчишлар мумкин бўлган кўчишни ифодаламайди	Nonretention relations
177	Идеальные связи	Идеал боғланишлар	Механик система нуқталарининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида (бўшатмайдиган боғланишлар учун) ёки ихтиёрий мумкин бўлган кўчишга қарама -қарши кўчиш ҳам мумкин бўлган кўчишдан иборат бўлганда (бўшатадиган боғланишлар учун), боғланиш реакция кучларининг бажарган элементар ишларини йиғиндиси нолга тенг боғланишлар	Ideal relations
178	Число степеней свободы	Эркинлик даражаси сони	Механик системанинг ўзаро боғлиқсиз бўлган кўчишларининг сони	The number of degrees of freedom
179	Обобщенные координаты	Умумлашган координаталар	Механик системанинг ҳолатини бир қийматли аниқлайдиган, ўзаро боғлиқсиз параметрлар	Generalized coordinates
180	Обобщенная скорость	Умумлашган тезлик	Умумлашган координаталардан вақт бўйича олинган ҳосилага тенг катталик	Generalized speed
181	Неголономные координаты	Беголоном координаталар	Дифференциаллари, системанинг умумлашган координаталарини дифференциаллари билан интегралланмайдиган чизиқли тенгламалар воситасида боғланган катталиклар	Nonholonomic coordinates
182	Избыточные координаты	Ортиқча координаталар	Механик системанинг ҳолатини аниқлаш учун бўлган координаталардан ташқари қўшимча киритиладиган, ўзаро боғланишда бўлган координатоталар	redundant coordinates
183	Возможная работа	Мумкин бўлган иш	Виртуальная работа-виртуал иш. Кучнинг, мазкур куч қўйилган нуқтанинг мумкин бўлган кўчишида бажарган иши	possible work
184	Обобщенная сила	Умумлашган куч	Механик системага таъсир этаетган кучлар мумкин бўлган ишининг ифодасидаги, берилган умумлашган координата вариацияси олдидаги коэффициент тенг бўлган катталик	Generalized force
185	Функция Лагранжа	Лагранж функцияси	Умумлашган координаталар ва умумлашган тезликлар орқали ифодаланган	Lagrangian function
186	Циклические координаты	Циклик координаталар	Лагранж функциясига ошкор равишда қатнашмайдиган механик системанинг умумлашган координаталари	Cyclic coordinates
187	Обобщенны	Умумлашган	Механик системанинг кинетиқ энергиясидан	The generalized

	й импульс	импульс	(ёки Лагранж функциясидан) умумлашган тезлик бўйича олинган хусусий ҳосилага тенг катталик	impulce
188	Каноническ ие переменные	Каноник ўзгарувчилар	Механик система умумлашган координаталари ва умумлашган импусларининг тўпламидан иборат бўлган ўзгарувчилар	Canonical variables
189	Функция Гамильтона	Гамильтон функцияси	Каноник ўзгарувчилар орқали ифодаланган системанинг тўлиқ механик энергияси	The Hamiltonian
190	Действие по Гамильтону	Гамильон таъсири	Механик системанинг Лагранж функциясидан вақт бўйича олинган интегралга тенг катталик	Action to Hamilton
191	Действие по Лагранжу	Лагранж таъсири	Механик системанинг иккиланган кинетик энергиясидан вақт бўйича олинган интегралга тенг катталик	Action to Lagrange
192	Диссипативн ые силы	Диссипатив кучлар	Механик система нуқталарининг тезликларига боғлиқ бўлган ва мазкур системанинг тўлиқ механик энергиясини камайишига сабабчи бўлган қаршилик кучи	dissipative forces
193	Диссипативн ая функция	Диссипатив функция	Механик системанинг умумлашган координаталари ва умумлашган тезликларининг функцияси бўлиб, ундан тескари ишора билан олинган умумлашган тезликлар бўйича хусусий ҳосила, мос умумлашган диссипатив кучларга тенг	dissipative function
194	Невозмущен ное движение	Ассосий ҳаракат	Ҳаракатининг устуворлиги текширилаётган механик системанинг берилган кучларга ва бошланғич шартларга мос ҳаракати	undisturbed motion
195	Возмущенно е движение	Ассосий ҳаракатдан оғдирилган ҳаракат	Бошланғич шартларни ўзгартирилиши натижасида содир бўладиган, механик системанинг текширилиши натижасида содир бўладиган,механик системанинг текширилаётган ассосий ҳаракатидан фарқли бўлган ихтиёрий ҳаракати	disturbed motion
196	Устойчивое равновесие	Устувор мувозанат	Механик системанинг мувозанат ҳолати бўлиб, системанинг ҳолатини ихтиёрий равишда исталганча кичик ўзгартирилганда ва унга ҳар қандай исталганча кичик тезлик берилганда, система кейинги вақт давомида ҳам мазкур мувозанат ҳолатига исталганча яқин ҳолатни эгаллайди	stable equilibrium
197	Устойчивое движение	Устувор ҳаракат	Механик системанинг ассосий ҳаракати бўлиб, вақтнинг бошланғич пайтида мазкур ҳаракатдан исталганча кичик оғдирилган ҳаракат,кейинги вақт давомида ҳам ассосий ҳаракатга исталганча яқинлигича қолади	stable motion
198	Математиче ский маятник	Математик маятник	Оғирлик кучи таъсирида берилган текисликда ётувчи эгри чизиқ бўйича тебранадиган моддий нуқта	Mathematical pendulum
199	Сферическ ий маятник	Сферик маятник	Оғирлик кучи таъсирида сферик сирт бўйича ҳаракатланадиган моддий нуқта	Spherical pendulum
200	Физический	Физик	Кўзғалмас айланиш ўқига эга бўлган ва бу ўқ	physical

	маятник	маятник	атрофида оғирлик кучи таъсирида тебранадиган қаттиқ жисм	pendulum
201	Гироскоп	Гироскоп	Жисмда белгиланган нуқта атрофида ҳаракатланадиган ва мазкур нуқта учун ясалган жисмнинг инерция эллипсоиди айланма эллипсоиддан иборат бўлган қаттиқ жисм	gyroscope
202	Тело переменной массы	Ўзгарувчан массали жисм	Вақтнинг ўтиши билан система таркибининг узлуксиз равишда ўзгариши (унга моддий зарраларнинг қўшилиши ёки ундан ажралиши) натижасида массаси ўзгарадиган механик система	Nominations mass peremennoy
203	Удар	Зарба	Моддий жисмларнинг чексиз кичик вақт ичидаги ўзаро механик таъсири бўлиб,бу таъсир жисм нуқталарининг тезликларини чекли миқдорга ўзгаришига олиб келади.	Impact
204	Ударная сила	Зарбали куч	Зарба давридаги импульси чекли қийматга эга бўладиган куч	Impact force
205	Ударный импульс	Зарба импульси	Зарба давридаги зарбали куч импульси	Impact impulce
206	Центральны й удар	Марказий зарба	Бундай зарбада зарба импульсининг таъсир чизиғи зарба бериладиган жисмнинг массалар марказидан ўтади.	Central impact
207	Коэффициен т восстановле ния при ударе	Зарбадаги тиклаш	Моддий нуқта кўзғалмас текисликка урилгандаги зарбада, нуқтанинг зарбадан олдинги ва кейинги тезликларининг мазкур текисликка ўтказилган нормалдаги проекциялари нисбатининг модулига тенг катталик	Reduction factor on impact
208	Абсолютно упругий удар	Абсолют эластик зарба	Тиклаш коэффициенти бирга тенг бўлган зарба	Absolute Elastic impact
209	Абсолютно неупругий удар	Абсолют эластик бўлмаган зарба	Тиклаш коэффициент нолга тенг бўлган зарба	Absolute nonelastic impact
210	Центр удара	Зарба маркази	Кўзғалмас айланиш ўқига эга бўлган абсолют қаттиқ жисмнинг шундай хусусиятга эга бўлган нуқтасики, айланиш ўқи ва жисмнинг массалар маркази орқали ўтувчи текисликка тик равишда йўналган зарбали куч импульсининг таъсири чизиғи мазкур нуқтадан ўтади ва ўқ маҳкамланган нуқталарда зарбали реакцияни вужудга келтирмайди.	Center of impact

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-жилд. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 592 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-жилд. Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 507 б.
4. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.
5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тикланишдан – миллий юксалиш сари. 4-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2020. – 400 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.
7. Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда қабул қилинган “Таълим тўғрисида”ги ЎРҚ-637-сонли Қонуни.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.
9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.
10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.
11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.
12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.
13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.
14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 29 октябрь “Илм-фанни 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-6097-сонли Фармони.

17. Ўзбекистон Республикаси Президенти Шавкат Мирзиёевнинг 2020 йил 25 январдаги Олий Мажлисга Мурожаатномаси.

18. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрь “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли Қарори.

Ш. Махсус адабиётлар

1. Bruce R. Munson, Alric P. Rothmayer, Theodore H. Okiishi, Wade W. Huebsch Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 2017. 792p.

2. Charlie Brau Notes on Analytical Mechanics. 2005. 12. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. 3-изд. М.: Физматмех, 2005. 17

3. Chung T.J. Computational Fluid Dynamics. - Cambridge University Press, 2002 (1012p).

4. Grant R. Fowles and George L. Cassiday. Analytical Mechanics. Brooks Cole. USA, 2014.

5. Herbert Goldstein, Charles Poole, John Safko. Classical Mechanics. Classical Mechanics. USA, 2013.

6. I. M. Rikhsiboev and N. S. Mohamed, Engineering Mathematics 2, Malaysia, 2019.

7. Jim Libby, Math for Real Life: Teaching Practical Uses for Algebra, Geometry and Trigonometry// 2019, 234p. ISBN: 978-1476667492

8. Karl Berry, The TEX Live Guide—2020

9. Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation Butterworth, Washington, D.C. 2013.

10. Lindsay Clandfield and Kate Pickering “Global”, B2, Macmillan. 2013. 175.

11. Manfredo P. Do Carmo. Differential geometry of Curves and surface // Dover publications, Inc. Mineola, New York, 2016. – 529 pp.

12. Maple 15 user manual, Maplesoft, 2016, 462 p.

13. Margaret L. Lial, Thomas W. Hungerford, John P. Holcomb, Bernadette Mullins, Mathematics with Applications In the Management, Natural and Social Sciences (11th Edition), Pearsonб 2018.

14. Massey B., Ward-Smith J. Mechanics of Fluids. Solutions Manual Eighth edition. - Taylor &. Francis, 2016.
15. N.A. Korshunova and D.M. Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics», (AIAA, USA), 2014, V.37, №5, P.1716-1719
16. Rao, M. M. Random and Vector Measures, Series on Multivariate Analysis, 9, World Scientific, 2012.
17. Robert D. Zucker, Oscar Biblarz Fundamentals of Gas Dynamics, Wiley, 2002. 512p.
18. Steve Taylor "Destination" Vocabulary and grammar", Macmillan 2010.
19. Tao, Terence. An Introduction to Measure Theory. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2019.
20. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.
21. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.
22. Азимов Д.М., Коршунова Н.А Ҳаракатнинг устуворлик назарияси бўйича танланган маърузалар. - Учебное пособие. - Ташкент, Университет, 2005.
23. Белогуров А.Ю. Модернизация процесса подготовки педагога в контексте инновационного развития общества: Монография. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 116 с. ISBN 978-5-317-05412-0.
24. Гулобод Қудратуллоҳ қизи, Р.Ишмуҳамедов, М.Нормуҳаммедова. Анъанавий ва ноанъанавий таълим. – Самарқанд: "Имом Бухорий халқаро илмий-тадқиқот маркази" нашриёти, 2019. 312 б.
25. Ибраймов А.Е. Масофавий ўқитишнинг дидактик тизими. методик қўлланма/ тузувчи. А.Е. Ибраймов. – Тошкент: "Lesson press", 2020. 112 бет.
26. Ишмуҳамедов Р.Ж., М.Мирсолиева. Ўқув жараёнида инновацион таълим технологиялари. – Т.: «Fan va texnologiya», 2014. 60 б.
27. Кирянов Д. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.
28. Муслимов Н.А ва бошқалар. Инновацион таълим технологиялари. Ўқув-методик қўлланма. – Т.: "Sano-standart", 2015. – 208 б.
29. Игнатова Н. Ю. Образование в цифровую эпоху: монография. М-во образования и науки РФ. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2017. – 128 с. http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/54216/1/978-5-9544-0083-0_2017.pdf
30. Олий таълим тизимини рақамли авлодга мослаштириш концепцияси. Европа Иттифоқи Эрасмус+ дастурининг кўмагида. https://hiedtec.ecs.uni-ruse.bg/pimages/34/3._UZBEKISTAN-CONCEPT-UZ.pdf
31. О.К. Асекретов, Б.А. Борисов, Н.Ю. Бу-гакова и др. М – Книга 16 / Современные образовательные технологии: педагогика и психология:

Новосибирск: Издательство ЦРНС, 2015. – 318 с. http://science.vvsu.ru/files/5040BC65-273B-44BB-98C4-CB5092BE4460.pdf

32. Тураев Х. Ҳаракатнинг турғунлик назарияси. - СамГУ, 2004.

33. Усмонов Б.Ш., Ҳабибуллаев Р.А. Олий ўқув юртларида ўқув жараёнини кредит-модуль тизимида ташкил қилиш. Ўқув қўлланма. Т.: “Tafakkur” нашриёти, 2020 й. 120 бет.

IV. Интернет сайтлар

34. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

35. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси

36. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази

37. http://ziyonet.uz – Таълим портали ZiyoNET

38. http://natlib.uz – Алишер Навоий номидаги Ўзбекистон Миллий кутубхонаси