БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ
КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ
МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

ЗАМОНАВИЙ ГЕОМЕТРИЯ

2021

Дурдиев Д.Қ. физика-математика фанлари доктори, профессор

Бешимова Д.Р ўқитувчи

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

“ЗАМОНАВИЙ ГЕОМЕТРИЯ”

МОДУЛИ БЎЙИЧА

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Математика

Бухоро-2021

Модулнинг ўқув-услубий мажмуаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 7 декабрдаги 648-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув дастури ва ўқув режасига мувофиқ ишлаб чиқилган.

Тузувчи: **Д.Қ.Дурдиев** физика-математика фанлари доктори, профессор.
Д.Р Бешимова ўқитувчи

Тақризчи: **Ҳ.Р.Расулов** физика-математика фанлари номзоди, доцент.

Ўқув -услубий мажмуа Бухоро давлат университети Илмий Кенгашининг қарори билан нашрга тавсия қилинган
(2020 йил “30” декбардаги 9-сонли баённома)

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

«Замонавий геометрия» модули ҳозирги кунда геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилишини, вектор алгебрасидан фойдаланишни, евклид фазоси, евклид фазосида чизиқ ва сиртларини, псевдоевклид фазосини, сферик фазолари ва уларнинг татбиқларини амалиётга кенг қўллаш, ҳамда уларнинг келажакдаги ўрни масалаларини қамрайди.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

«**Замонавий геометрия**» **модулининг мақсади:** педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курс тингловчиларининг бу борада мамлакатимизда ва хорижий давлатларда тўпланган замонавий усулларини ўрганиш, амалда қўллаш, кўникма ва малакаларини шакллантириш.

«**Замонавий геометрия**» **модулининг вазифалари:**

- замонавий талабларга мос ҳолда олий таълимнинг сифатини таъминлаш учун зарур бўлган педагогларнинг касбий компетентлик даражасини ошириш;
- математика фанини ўқитиш жараёнига замонавий ахборот-коммуникасия технологиялари ва хорижий тилларни самарали тадбиқ этилишини таъминлаш;
- математика соҳасидаги ўқитишнинг инновасион технологиялар ва ўқитишнинг энг сўнгги замонавий усулларидан фойдаланишни ўргатиш;
- тингловчиларга «Математика» масалалари бўйича консептуал асослар, мазмуни, таркиби ва асосий муаммолари бўйича маълумотлар бериш ҳамда уларни мазкур йўналишда малакасини оширишга кўмаклашиш;

Курс якунида тингловчиларнинг билим, кўникма ва малакалари ҳамда компетенсияларига қўйиладиган талаблар:

«**Замонавий геометрия**» модули бўйича тингловчилар қуйидаги янги билим, кўникма, малака ҳамда компетенсияларга эга бўлишлари талаб этилади:

Тингловчи:

- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланишни;

- математик масалаларни математик тизимларда ечишни ва стандарт функциялардан фойдаланишни;

- математикани ўқитишда унинг татбиқлари билан тушунтиришни, ҳаётий ва соҳага оид мисолларни;

- математик фанларни ўқитишнинг замонавий усулларини ***билиши*** керак.

Тингловчи:

- математик фанларни ўқитишда инновацион таълим методлари ва воситаларини амалиётда қўллаш;

- талабанинг ўзлаштириш даражасини назорат қилиш ва баҳолашнинг назарий асослари ҳамда инновацион ёндашув услубларини тўғри қўллай олиш ***кўникмаларига э***га бўлиши лозим.

Тингловчи:

- геометриянинг чизиқли фазо ва чизиқли акслантиришлар ёрдамида баён этилиши, вектор алгебрасидан фойдаланиш;

- математикани ўқитиш инновацион жараёнини лойиҳалаштириш ва ташкиллаштиришнинг замонавий усулларини қўллаш ***малакаларига э***га бўлиши лозим.

Тингловчи:

- математикани ўқитишда фойдаланиладиган замонавий (матлаб, матҳсад, мапле, ГеоГебра ва бошқалар) математик пакетларини ўқув жараёнига татбиқ этиш;

- математиканинг хориж ва республика миқёсидаги долзарб муаммолари, ечимлари, тенденсиялари асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;

- олий таълим тизимида математик фанлар мазмунининг узвийлиги ва узлуксизлигини таҳлил қила олиш ***компетенсияларига э***га бўлиши лозим.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва

узвийлиги

«**Замонавий геометрия**» модули ўқув режадаги бошқа модуллар ва мутахассислик фанларининг барча соҳалари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг бу соҳа бўйича касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар математика фанларини ўқитишда замонавий усуллар ёрдамида таълим жараёнини ташкил этишда педагогик ёндашув асослари ва бу борадаги илғор тажрибаларни ўрганадилар, уларни таҳлил этиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий лаёқатга эга бўлиш, илмий-тадқиқотда инновацион фаолият ва ишлаб чиқариш фаолияти олиб бориш каби касбий компетентликка эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат			
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси		
			Жами	жумладан	
				Назарий машғулот	Амалий машғулот
1.	Чизиқли фазо.	4	4	2	2
2	Евклид фазоси	4	4	2	2
3	Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.	2	2		2
4	Псевдоевклид фазо.	4	4	2	2
5	Иккинчи тартибли сиртлар.	4	4	2	4
6	Кўпхилликлар.	2	2		2
	Жами	**20**	**20**	**8**	**12**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1 – мавзу. Чизиқли фазо.

Режа:

1. Чизиқли фазо. Чизиқли фазо ўлчами.
2. Аффин фазо. Аффин координаталар системаси.
3. Аффин алмаштиришлар ва текисликлари.
4. Бичизиқли форма.

2-мавзу. Евклид фазоси.

Режа:

1. Евклид фазоси. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.
2. Сирт дифференциал геометрияси.
3. Сирт ички геометрияси. Сирт ташқи геометрияси.

3 – мавзу. Псевдоевклид фазо.

Режа:

1. Псевдоевклид фазо. Сферик фазо.
2. Риман геометрияси. Гиперболик фазо.
3. Ярим Евклид фазолар. Ярим гиперболик фазолар.

4 – мавзу. Иккинчи тартибли сиртлар.

Режа:

1. Иккинчи тартибли сиртлар.
2. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари.
3. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари.
4. Кўпхиллик геометрияси.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1 – мавзу. Чизиқли фазо.

Режа:

1. Чизиқли фазо. Чизиқли фазо ўлчами.
2. Аффин фазо. Аффин координаталар системаси.
3. Аффин алмаштиришлар ва текисликлари.
4. Бичизиқли форма.

2 – мавзу. Евклид фазоси.

Режа:

1. Евклид фазоси.
2. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.

3 – мавзу. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.

Режа:

1. Сирт дифференциал геометрияси.
2. Сирт ички геометрияси.
3. Сирт ташқи геометрияси

4 – мавзу. Псевдоевклид фазо.

Режа:

1. Псевдоевклид фазо. Сферик фазо.
2. Риман геометрияси. Гиперболик фазо.
3. Ярим Евклид фазолар. Ярим гиперболик фазолар.

5 – мавзу. Иккинчи тартибли сиртлар.

Режа:

1. Иккинчи тартибли сиртлар.
2. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари.

6 – мавзу. Кўпхилликлар.

1. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари.
2. Кўпхиллик геометрияси.

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

АҚЛИЙ ХУЖУМ МЕТОДИ

Ақлий хужум - ғояларни генерация (ишлаб чиқиш) қилиш методидир. «Ақлий хужум» методи бирор муаммони ечишда талабалар томонидан билди рилган эркин фикр ва мулоҳазаларни тўплаб, улар орқали маълум бир ечимга келинадиган энг самарали методдир. Ақлий хужум методининг ёзма ва оғзаки шакллари мавжуд. Оғзаки шаклида ўқитувчи томонидан берилган саволга талабаларнинг ҳар бири ўз фикрини оғзаки билдиради. Талабалар ўз жавобларини аниқ ва қисқа тарзда баён этадилар. Ёзма шаклида эса берилган саволга талабалар ўз жавобларини қоғоз карточкаларга қисқа ва барчага кўринарли тарзда ёзадилар. Жавоблар доскага (магнитлар ёрдамида) ёки «пинборд» доскасига (игналар ёрдамида) маҳкамланади. «Ақлий хужум» методининг ёзма шаклида жавобларни маълум белгилар бўйича гуруҳлаб чиқиш имконияти мавжуддир. Ушбу метод тўғри ва ижобий қўлланилганда шахсни эркин, ижодий ва ностандарт фикрлашга ўргатади.

Ақлий хужум методидан фойдаланилганда талабаларнинг барчасини жалб этиш имконияти бўлади, шу жумладан талабаларда мулоқот қилиш ва мунозара олиб бориш маданияти шаклланади. Талабалар ўз фикрини фақат оғзаки эмас, балки ёзма равишда баён этиш маҳорати, мантиқий ва тизимли фикр юритиш кўникмаси ривожланади. Билдирилган фикрлар баҳоланмаслиги талабаларда турли ғоялар шаклланишига олиб келади. Бу метод талабаларда ижодий тафаккурни ривожлантириш учун хизмат қилади.

<u>Вазифаси.</u> “Ақлий хужум” қийин вазиятлардан қутулиш чораларини топишга, муаммони кўриш чегарасини кенгайтиришга, фикрлаш бир хилли - лигини йўқотишга ва кенг доирада тафаккурлашга имкон беради. Энг асосийси, муаммони ечиш жараёнида курашиш муҳитидан ижодий ҳамкорлик кайфиятига ўтилади ва гуруҳ янада жипслашади.

<u>Объекти.</u> Қўлланиш мақсадига кўра бу метод универсал ҳисобланиб тадқиқотчиликда (янги муаммони ечишга имкон яратади), ўқитиш жараёнида (ўқув материалларини тезкор ўзлаштиришга қаратилади), ривожлантиришда (ўз-ўзини бир мунча самарали бошқариш асосида фаол фикрлашни шакллантиради) асқотади.

<u>Қўлланиш усули.</u> “Ақлий хужум” иштирокчилари олдига қўйилган муаммо бўйича хар қандай мулохаза ва таклифларни билдиришлари мумкин. Айтилган фикрлар ёзиб борилди ва уларнинг муаллифлари ўз фикрларини қайтадан хотирасида тиклаш имкониятига эга бўлди. Метод самараси фикрлар хилма-хиллиги билан тавсифланди ва хужум давомида улар танқид қилинмайди, қайтадан ифодаланмайди. Ақлий хужум тугагач, муҳимлик жихатига кўра энг яхши таклифлар генерацияланади ва муаммони ечиш учун зарурлари танланади.

«Ақлий хужум» методи ўқитувчи томонидан қўйилган мақсадга қараб амалга оширилади:

1. Талабаларнинг бошланғич билимларини аниқлаш мақсад қилиб қўйилганда, бу метод дарснинг мавзуга кириш қисмида амалга оширилади.
2. Мавзуни такрорлаш ёки бир мавзуни кейинги мавзу билан боғлаш мақсад қилиб қўйилганда - янги мавзуга ўтиш қисмида амалга оширилади.
3. Ўтилган мавзуни мустаҳкамлаш мақсад қилиб қўйилганда - мавзудан сўнг, дарснинг мустаҳкамлаш қисмида амалга оширилади.

«Ақлий хужум» методининг афзаллик томонлари:

- натижалар баҳоланмаслиги талабаларни турли фикр-ғояларнинг шакл - ланишига олиб келади;
- талабаларнинг барчаси иштирок этади;
- фикр-ғоялар визуаллаштирилиб борилади;
- талабаларнинг бошланғич билимларини текшириб кўриш имконияти мавжуд;
- талабаларда мавзуга қизиқиш уйғотиш мумкин.

«Ақлий хужум» методининг камчилик томонлари:

- ўқитувчи томонидан саволни тўғри қўя олмаслик;
- ўқитувчидан юқори даражада эшитиш қобилиятининг талаб этилиши.

«Ақлий хужум» методининг таркибий тузилмаси

Муаммоли савол берилади

↓

Фикр ва ғоялар билдирилади

↓

Фикр ва ғоялар тўпланади

↓

Фикр ва ғоялар гуруҳланади

↓

Аниқ ва тўғри жавоб танлаб олинади

«Ақлий хужум» методининг босқичлари:

1. Талабаларга савол ташланади ва уларга шу савол бўйича ўз жавобларини (фикр, мулоҳаза) билдиришларини сўралади;
2. Талабалар савол бўйича ўз фикр-мулоҳазаларини билдиришади;
3. Талабаларнинг фикр-ғоялари (магнитафонга, видеотасмага, рангли қоғозларга ёки доскага) тўпланади;
4. Фикр-ғоялар маълум белгилар бўйича гуруҳланади;
5. Юқорида қўйилган саволга аниқ ва тўғри жавоб танлаб олинади.

«Ақлий хужум» методини қўллашдаги асосий қоидалар:

а) Билдирилган фикр-ғоялар муҳокама қилинмайди ва баҳоланмайди.

б) Билдирилган ҳар қандай фикр-ғоялар, улар ҳатто тўғри бўлмаса ҳам инобатга олинади.

в) Билдирилган фикр-ғояларни тўлдириш ва янада кенгайтириш мумкин.

Мавзу бўйича асосий тушунча ва иборалар

Замонавий таълим воситаси тушунчаси , таълим воситаси турлари, таълим воситасини қўллаш усуллари

Кластер
Кластер - (ўрам, боглам). Билимларни актуаллашишини рагбатлантиради, мавзу бўйича фикрлаш жараёнига янги бирлашган тассавурларни очик ва эркин кириб боришига ёрдам беради.

«Кластерни тузиш коидалари» билан танишадилар. Катта когознинг марказига калит сўзи ёзилади.

Калит сўзи билан бирлашиши учун унинг ён томонларига кичик айланалар ичига «йўлдошлар» ёзилади ва «Катта» айланага чизикчалар билан бирлаштирилади. Бу «йўлдошлар» нинг «кичик йўлдошлари» бўлиши мумкин ва х.о. Мазкур мавзу билан боглик бўлган сўзлар ва иборалар ёзилади.

Мулохаза килиш учун кластерлар билан алмашишади.

Гурухларда иш олиб бориш қоидалари

Ўзаро ҳурмат ва илтифот кўрсатган холда ҳар ким ўз дўстларини глай олиши керак;
Берилган топшириқга нисбатан ҳар ким актив, ўзаро ҳамкорликда ва сулиятли ёндашиши керак;
Зарур пайтда гар ким ёрдам сўраши керак;
Сўралган пайтда ҳар ким ёрдам кўрсатиши керак;
Гурух иш натижалари баҳоланаётганда ҳамма қатнашиши керак;
Ҳар ким аниқ тушуниши керакки:
Ўзгаларга ёрдам бериб, ўзимиз ўрганамиз!
Биз бир қайиқда сузаяпмиз: ё бирга кўзлаган манзилга етамиз, ёки га чўкамиз!

Мустақил ўрганиш учун саволлар

1. Замонавий таълим воситалари деганда нимани тушунасиз ?
2. Замонавий таълим воситаларини турларини тушунтиринг ?
3. Замонавий таълим воситаларини қўллаш усулларини тушунтиринг ?
4. Ахборотларни кодлаштириш нима учун хизмат қилади ?

“Давра суҳбати” мунозарасини ўтказиш бўйича йўриқнома

1. Сўзга чиққанларни диққат билан, бўлмасдан тингланг.
2. Маърузачининг фикрига қўшилмасанг, ўз фикрингни билдиришга рухсат сўра.
3. Маърузачининг фикрига қўшилсанг, кўриб чиқилаётган масала бўйича қўшимча фикрлар билдир.

Таянч сўзлар ва иборалар:

- ❖ Алгоритм
- ❖ Объект
- ❖ Сўз
- ❖ Аниқлик
- ❖ Дискретлик
- ❖ Оммавийлик
- ❖ Тушунарлилик
- ❖ Натижавийлик
- ❖ Блок-схема

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР

1 – мавзу. Чизиқли фазо.

Режа:

1. Чизиқли фазо. Чизиқли фазо ўлчами.
2. Аффин фазо. Аффин координаталар системаси.
3. Аффин алмаштиришлар ва текисликлари.
4. Бичизиқли форма.

Таянч иборалар: Уринма, чизиқ, нормал, тенглама регуляр, нуқта, вектор.

Бизга P майдон устида V аддитив абел группаси берилган бўлсин.

Таъриф 1. Ҳар бир $\lambda \in P$ ва $x \in V$ элементларга $\lambda x \in V$ кўпайтма аниқланган бўлиб, бу кўпайтма учун қуйидаги шартлар

1. $1 \cdot x = x, \quad 1 \in P; \quad x \in P;$
2. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),\ \lambda, \mu \in P;\ x \in P;$
3. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,\ \ \lambda, \mu \in P;\ x \in P;$
4. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,\ \ \lambda \in P;\ x, y \in P.$

ўринли бўлса, V группага P майдон устида чизиқли ёки вектор фазо дейилади.

Биз P майдон элементларини скаляр, V чизиқли фазо элементларини вектор деб атаймиз. Кўпгина адабиётларда x векторни $\vec{x}$ кўринишда ёки қалин қора шрифт шаклида ёзишади, лекин биз бу ерда фақат x шаклини ишлатамиз. Масалан, биз O ҳам P майдон элементи, ҳамда V фазо элементи сифатида бир хил ҳарф билан белгиланиб борилади. Агар бирор жойда иккаласи ҳам бир вақтда иштирок этган бўлса, $O \in P$ ёки $O \in V$ кўрсатиб ўтамиз. Бундан ташқари V чизиқли ёки векторли фазо ўрнига қисқача фазо сўзини ишлатамиз.

Шуни айтиш жоизки, битта V абел группасини ҳар хил майдонлар устида кўриб, ҳар хил фазолар ҳосил қилинади.

Мисоллар.

1. Ҳар қандай P майдон ўз устида фазо ташкил этади. Бундан ташқари ҳар қандай $V=\{0\}$ элементдан иборат абел группасини исталган P майдон устида фазо деб қараш мумкин.

2. Бизга геометрияда маълум бўлган текисликдаги ва фазодаги векторлар тўплами векторларни қўшиш ва сонга (скалярга) кўпайтириш амалларига нисбатан чизиқли фазолар ташкил этади.

3. P майдон устида $V=P^n$ арифметик фазо чизиқли фазо бўлади.

4. P майдон устида берилган даражаси $\deg f(x)\le n$ $V=P_n[x]$ кўпҳадлар тўплами кўпҳадлар қўшиш ва $\lambda\in P$ скалярга кўпайтириш амалларига нисбатан фазо ташкил этади.

5. Ҳамма $n\times m$ тартибли матрисалар $M_{m,n}(P)$ тўплам P майдон устида $V=M_{m,n}(P)$ фазо бўлади. Хусусан, $m=n$ да квадратик $M_n(P)$ фазо, $m=1$ да сатрли $M_{1n}(P)$ фазо ва $n=1$ да устунли M_{m1} фазолар бўлади.

Агар V фазода $x+(-y)=x-y$ деб олсак, у ҳолда айирмалар учун қуйидаги муносабатларни ҳам ўринли бўлишлиги фазо таърифидан тўғридан тўғри келиб чиқади:

1. $\lambda(x-y)=\lambda x-\lambda y,\ \forall\lambda\in P,\forall x\in V$;

2. $(\lambda-\mu)x=\lambda x-\mu x,\ \forall\lambda\in P,\forall x\in V$;

3. $\lambda\cdot 0=0,\ \forall\lambda\in P,\ 0\in V$;

4. $\lambda\cdot x=0\in V$ дан ёки $\lambda=0$ ёки $x=0$ келиб чиқади.

Умуман, $\lambda_i\in P,\ i=\overline{1,n}$ ва $x_i\in V,\ i=\overline{1,m}$ учун

$$(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n,$$

$$\lambda(x_1+x_2+x_m)=\lambda x_1+\lambda x_2+\ldots+\lambda x_m$$

тенгликлар ўринли бўлиб, бу тенгликларнинг ўзини ҳам умумлаштириб

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{m}x_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i x_j$$

тенгликнинг ўринли бўлишлигига комил бўламиз.

Шуни таъкидлаймизки, V абел группасига P майдон устида эмас, балки K коммутатив бирлик ёки умумий ҳалқа устида қарасак замонавий алгебранинг муҳим тармоқларидан бўлмиш модул тушунчасига келамиз.

V фазода P^n арифметик фазодаги каби муҳим аҳамият касб этувчи тушунча, бу векторларни чизиқли боғланиш тушунчасидир.

Таъриф 2. Агар $\lambda_i \in P$ ва $x_i \in V$, $i=\overline{1,n}$ учун

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_n x_n=0\in P \qquad \textbf{(1)}$$

тенглик камида биттаси нолдан фарқли λ_i лар учун ўринли бўлса, берилган $x_1,x_2,\ldots,x_n$ векторлар системасига чизиқли эрксиз (боғланмаган) дейилади. Акс ҳолда, яъни (1) тенглик айнан $\lambda_i=0$, $i=\overline{1,n}$ ўринли бўлса, чизиқли эркли (боғланган) векторлар системаси дейилади.

Шундай қилиб, P^n арифметик фазода берилган чизиқли комбинасия, максимал чизиқли эркли ва ранг тушунчалари ва булардан келиб чиққан хоссалар теоремалар (асосий теорема) тўғридан тўғри V фазодаги векторлар системасига кўчирилади ва ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бу хоссалар ва теоремаларни тўғри эканлигига кейинчалик биз яна бир бор ишонч ҳосил қиламиз.

Энди биз векторларни чизиқли боғлиқлиқ таърифидан фойдаланиб, V фазода марказий рол ўйновчи ўлчам тушунчаларини киритамиз.

Таъриф 3. Агар P майдон устида V фазо берилган бўлиб, бу фазонинг бирор-бир n векторлари чизиқли эркли бўлиб, қолган ҳамма $n+1$ векторлари чизиқли боғланган бўлса, V фазога n ўлчамли (ўлчовли) фазо дейилади ва $\dim_P V=n$ ёки $\dim V=n$ кўринишда ёзилади.

Агарда V да исталганча чизиқли эркли векторларни топиш мумкин бўлса, у ҳолда V га чексиз ўлчовли фазо деб аталади ва $\dim V = \infty$ кўринишда ёзилади. Чексиз ўлчовли фазолар айрим йўналишли бўлим бўлиб, биз бу ерда уларни ўрганмаймиз. Шунга қарамасдан чекли ва чексиз ўлчовли фазолар умумий хоссаларга эгадирлар.

Мисоллар.

1. Ўз устида берилган ҳар қандай P майдон 1 ўлчамли фазодир, чунки нолдан фарқли $x \in P$ вектор ва $\forall y \in P$ лар учун

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$$

тенгликни қаноатлантирувчи нолдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ мавжуд. Ҳақиқатан ҳам, агарда $\lambda_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lambda_1 x = -\lambda_2 y$$

бўлиб,

$$x = -\lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2 y$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $\dim P = 1$.

2. C комплекс сонлар майдонини ўз устида қаралганда, у 1 ўлчовли. Аммо уни R ҳақиқий сонлар майдонида қаралса, 2 ўлчамли фазони ташкил этади, яъни $\dim_C C = 1$ ва $\dim_R C = 2$ бўлади. Бу ерда R устида қаралганда $1, i$ чизиқли эркли ва агарда C устида қаралса, i чизиқли эркли.

3. P майдон устида берилган P^n арифметик фазо n ўлчовли фазодир. Ҳақиқатан ҳам, у ерда бизга маълумки,

$$e_1 = (1, 0, ..., 0),$$
$$e_2 = (0, 1, ..., 0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e_n = (0, 0, ..., 1)$$

орт векторлар чизиқли боғланмаган бўлиб, ихтиёрий $n+1$ векторлари чизиқли боғлиқ бўлади, чунки $\forall \alpha = (a_1, a_2, ..., a_n) \in P^n$ учун

$$\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_n e_n$$

тенглик ўринлидир ва демак

$$\alpha,\ e_1, e_2, ..., e_n$$

$n+1$ та векторлари чизиқли боғлангандир ва демак $\dim_P P^n = n$ бўлади.

4. $P_n[x]$ фазо $n+1$ ўлчовлидир, чунки бу ерда $1,\ x,\ x^2,\ ....,\ x^n$ векторлар чизиқли эркли бўлиб, $\forall f(x) \in P_n[x]$ учун

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,\quad a_i \in P,\ i = \overline{1,n}$$

бўлганлиги туфайли $f(x), 1,\ x, x^2, ..., x^n$ $n+2$ та векторлари чизиқли боғланган ва демак $\dim_P P_n[x] = n+1$ бўлади.

5. $M_{m,n}(P)$ матрисалар фазоси P майдон устида mn ўлчовли фазо бўлади, чунки $M_{m,n}(P)$ да

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},\ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, ..., e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

mn та матрисалари чизиқли эркли бўлиб, $\forall f \in M_{m,n}(P)$ учун

$$A = a_{11}e_{11} + a_{12}e_{12} + ... + a_{mn}e_{mn},\quad a_{ij} \in P,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$$

ва демак унда $mn+1$ векторлари чизиқли боғлангандир, яъни бундан эса

$$\dim_P M_{m,n}(P) = mn$$

эканлиги келиб чиқади.

Хусусан $M_m(P)$ сатрлар фазоси n ўлчамли ва M_{m1} устунлар фазоси m ўлчамлидирлар.

Иккинчи мисолдан кўриниб турибдики, V абел группасини ҳар хил майдонлар устида кўриб ҳар хил фазолар ҳосил қилиш мумкин, балки ҳар хил ўлчовли фазолар ҳам ҳосил бўлар экан.

n-ўлчовли Аффин фазо ва Аффин координаталар системаси. к-ўлчовли

текислик. Икки текисликнинг ўзаро вазияти

V_n вектор фазо ва элементлари нуқталар деб аталади. $\mho = \{A, B, \dots\}$ тўплам берилган бўлсин. $\mho$ тўплам билан V_n тўплам орасидаги шундай мослик ўрнатамизки, $\mho$ ма'ум тартибда олинган икки М,Н нуқта учун V_n даги аниқ битта $\vec{a}$ вектор мос келсин, буни $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$деб белгилаймиз. Лекин шуни та'кидлаш зарурки, V_n даги ҳар бир векторга $\mho$ да нуқталарнинг тартибланган турли жуфтликлари мос келиши мумкин. Масалан, $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{KL}$, бунда М, Н, П, Қ, К, Л ларнинг барчаси $\mho$ га тегишлидир.

$\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ ёзувини қуйидагича ифодалаймиз: $\vec{a}$ векторни М нуқтадан қўйиш билан Н нуқта ҳосил қилинади.

Юқорида келтирилган $\mho$ билан V_n орасидаги мосликнинг икки аксиомани қаноатлантириш талаб этилади.

VI_1. ∀ М∈ $\mho$ ва $\forall\vec{a} \in V_n$ учун ягона шундай Н∈ $\mho$ мавжудки, унинг учун $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$.

VI_2. ∀А, Б, С∈ $\mho$ учун $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Бу икки аксиома ба'зан векторни нуқтадан бошлаб қўйиш аксиомалари деб юритилади.

Таъриф. Элементлари юқоридаги I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}, IV_{1-2} аксиомаларини қаноатлантирувчи бўш бўлмаган тўплам *н* ўлчовли ҳақиқий аффин фазо деб аталади. Уни A_n орқали белгилаймиз. Агар V_n вектор фазо комплекс вектор фазо бўлса, у ҳолда A_n ҳам комплекс аффин фазо деб аталади.

Демак, н ўлчовли аффин фазони символик равишда қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин: $A_n = V_n \cup \mho$.

V_n вектор фазо A_n нинг элтувчиси дейилади.

Хусусий ҳолда, н=2 бўлса, A_2 икки ўлчовли аффин фазо бўлиб, V_2нинг элементларини одатдаги геометрик фазолар деб олсак, аффин текислик ҳосил бўлади.

Мисол тариқасида қуйидаги теоремаларни исботлайлик,

1-теорема. $\mho$ нинг устма-уст тушган икки нуқтасига V_n нинг нол вектори мос келади, яъни $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Исбот. $\forall A \in \mho$ бўсин. А, А нуқталарга V_n дан бирор $\vec{a}$ мос келсин: $\forall b \in V_n$ ни олсак, VI_1 га асосан, шундай Б нуқта мавжудки, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, энди VI_2 ни тадбиқ қилсак $\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Бундан I_3 га асоасан $\vec{a} = \vec{0}$. Δ

2-теорема. $\overrightarrow{AB} = \vec{a} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

Исбот. $\overrightarrow{BA} = \vec{b}$ десак, VI_2 га асосан $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$, $bundan\, \vec{b} = -\vec{a}$.

3-теорема. $\overrightarrow{OA^1} = k\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB^1} = k\overrightarrow{OB}, \Rightarrow \overrightarrow{A^1B^1} = k\overrightarrow{AB}$.

Исбот. VI_2 га асосан

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A^1O} + \overrightarrow{OB^1} = \overrightarrow{A^1B^1}$

Лекин $\overrightarrow{A^1O} = -\overrightarrow{OA^1} \Rightarrow \overrightarrow{A^1O} + \overrightarrow{OB^1} = -\overrightarrow{OA^1} + \overrightarrow{OB^1}$ =-к$\overrightarrow{AO} + k\overrightarrow{OB} = k($-$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = k\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = k\overrightarrow{AB}$, бундан ва юқоридаги тенгликдан $\overrightarrow{A^1B^1} =$ к$\overrightarrow{AB}$. Δ

Энди аффин координаталар системаси тушунчасини киритайлик, A_n да ихтиёрий бир О нуқтани олайлик, V_n нинг бирор $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ базисининг барча векторлари О нуқтадан қўйилган бўлсин, натижада О нуқта ва $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ басис векторларидан ташкил топган $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ тўплам ҳосил бўлади. Бу тўплам аффин координаталар системаси деб аталиб, уни $\mathcal{B} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ биланбелгилаймиз. О нуқта координаталар боши, $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ координата векторлари деб аталади.

Аффин координаталар системаси дейиш ўрнига бундан буён қисқача *аффин репер* деймиз. Демак, аффин репер икки турдаги обйектдан –нуқта ва векторлардан ташкил топган системадир. A_n нинг ихтиёрий М нуқтасини олсак ва аффин репер $\mathcal{B} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ маълум бўлса, $\overrightarrow{OM}$ вестор ҳосил қилиниб, бу вектор М нуқтанинг радиус-вектори деб аталади.

У ҳолда $\overrightarrow{OM} \in V_n$ бўлгани учун унинг $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$ базисдаги векторларини

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ десак,

$\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$ (1)

Таъриф. М нуқта радиус-векторларининг координаталари шу нуқтанинг аффин координаталари деб аталади: у $M(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ кўринишида белгиланади, демак (1) $\Leftrightarrow M(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Хусусий ҳолда $\overrightarrow{OM_1}$=$\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$=$\overrightarrow{e_2}$,.. $\overrightarrow{OM_n}$=$\overrightarrow{e_n}$ бўлса, аввалги мавзуларга асосан $M_1(1,0,0 \dots 0), M_2(0,1,0 \dots 0), \dots M_n(0,0,0 \dots 1)$.

. A_n даги $\mathcal{B}$ аффин реперга нисбатан $M(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$

Нуқталар берилган бўлсин. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ ёки $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ га асосан базис векторлар орқали ифодалайлик:

$$\overrightarrow{MN} = y_1\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + y_n\overrightarrow{e_n} - (x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n})$$
$$= (y_1 - x_1)\overrightarrow{e_1} + (y_2 - x_2)\overrightarrow{e_2} + \cdots + (y_n - x_n)\overrightarrow{e_n}$$

Бундан $\overrightarrow{MN}\left(y_1 - x_1,\ y_2 - x_{2,\dots,} y_n - x_n\right)$

Таъриф. A_n нинг учлари М, Н нуқталарда бўлиб, $\overrightarrow{MP} = t\overrightarrow{PN}$ тенгликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўпплами МН кесма дейилади.

МН кесма берилган бўлиб, $\overrightarrow{MP}$=$\lambda\overrightarrow{PN}$ (бунда $\lambda \in R, \lambda \neq 1$) бўлса, П нуқта берилган кесмани λ нисбатда бўлади.

A_n даги $\mathcal{B}$ реперда учлари $M_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ нуқталардаги МН кесмани λ нисбатда бўлувчи П нуқтанинг координаталарини $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ десак,

$$\mathbf{z_1 = \frac{x_1+\lambda y_1}{1+\lambda}, z_2 = \frac{x_2+\lambda y_2}{1+\lambda}, \dots, z_n = \frac{x_n+\lambda y_n}{1+\lambda}}$$

Агар $\lambda = 1\ boʻlsa$ кесманинг ўртасидаги нуқта пайдо бўлади.

Энди нуқтанинг аффин координаталарини алмаштириш формулаларини топайлик. A_n да $\mathcal{B} = (\,O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ ва $\mathcal{B}_1 = \left(O^1, \overrightarrow{e_1{}^1}, \overrightarrow{e_2{}^1}, \dots, \overrightarrow{e_n{}^1}\right)$ аффин реперлари берилган бўлсин. $\forall M \in A_n$ нинг шу базислардаги кординаталари мос равишда $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ва $x_1{}^1, x_2{}^1, \dots, x_n{}^1$ бўлсин ҳамда $\mathcal{B}_1$репер элементлари $\mathcal{B}$ реперга нисбатан қуйидагича аниқланган бўлсин:

$O^1(c_{10}, c_{20,\dots,} c_{n0})$, $\overrightarrow{e_1}^1(c_{11}, c_{21,\dots,} c_{n1})$, ……., $\overrightarrow{e_n}^1(c_{n1}, c_{n2,\dots,} c_{nn})$,

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^1} + \overrightarrow{O^1M}$ни координаталарда ёзайлик:

$$x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} =$$
$$= c_{10_1}\overrightarrow{e_1} + c_{20}\overrightarrow{e_2} + \cdots + c_{n0}\overrightarrow{e_n} + x_1^1\overrightarrow{e_1^1} + x_2^1\overrightarrow{e_2^1} + \cdots + x_n^1\overrightarrow{e_n^1}$$

$\overrightarrow{e_1^1}, \overrightarrow{e_2^1}, \dots \overrightarrow{e_n^1}$ ларни $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots . \overrightarrow{e_n}$ орқали ифодалаймиз.

$$x_1 = c_{11}x_1^1 + c_{21}x_2^1 + \cdots + c_{n1}x_n^1 + c_{10}$$

$$x_2 = c_{12}x_1^1 + c_{22}x_2^1 + \cdots + c_{n2}x_n^1 + c_{20}$$

…………………………

$$x_n = c_{1n}x_1^1 + c_{2n}x_2^1 + \cdots + c_{nn}x_n^1 + c_{n0}$$

Бу изланган формулалар бўлиб, ихтиёрий нуқтанинг $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ реперларга нисбатан координаталари орасидаги боғланишни аниқлайди.

Аффин фазода $M_0, M_1, \dots, M_m$ нуқталар системаси берилган бўлсин.

Таъриф. Агар $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}, \dots . \overrightarrow{M_0M_n}$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлса, берилган нуқталар системаси чизиқли эркли дейилади, акс ҳолда берилган нуқталар системаси чизиқли боғлиқ дейилади.

A_n н ўлчовли аффин фазо, унинг элтувчиси V_n вектор фазо ҳамда A_n қисм фазоси A_k бўлиб, унинг элтувчиси $V_k \subset V_n$ бўлсин. A_n нинг тайин Р нуқтасни олайлик.

Таъриф. A_n фазодаги $\overrightarrow{PN} \in V_k$ шартни қаноатлантирувчи барча Н нуқталар тўплами к ўлчовли текислик деб аталади ва P_k деб белгиланади.

Бу таърифадан кўринадики, $V_k \subset P_k$ бўлиб, Р$\in$ P_kдир. Чунки Н=Р бўлса, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$ бўлиб, V_kқисм фазо бўлгани учун $\vec{0} \in P_k$ дир. П нукта P_k нинг бошланғич нуқтаси, V_k эса элтувчиси дейилади.

Таъриф. A_n даги икки текислик камида битта умумий нуқтага эга бўлса, улар кесишувчи кекисликлар деб аталади.

Демак, икки текислик кесишса, кесимда нуқта-нол ўлчовли текислик, тўғри чизиқ-бир ўчовли текислик, икки ўлҳовли текислик ва ҳоказо лар ҳосил бўлиши мумкин.

Таъриф. Икки текисликнинг элтувчи вектор фазоларидан бири иккинчисининг қисми бўлса, бу текисликлар ўзаро параллел деб аталади.

Таъриф. Агар A_n P_k, P_s текисликлар кесишмаса ҳамда ўзаро параллел бўлмаса, улар айқаш текисликлар деб аталади.

Теорема. **Агар A_n P_k, P_s текисликлар ўзаро параллел бўлиб, умумий нуқтага эга бўлса, улардан бири иккинчисига тегишлидир.**

Назорат саволлари.

1. Эвклид фазоси деганда нимани тушунасиз?
2. Коши тенгсизлигини исботланг.
3. Очиқ қисм тўпламни тушунтириб беринг?
4. Элементар чизиқнинг таърифи.
5. Оддий чизиқнинг таърифи.
6. Регуляр чизиқнинг таърифи.
7. Қандай чизиққа силлиқ чизиқ деб аталади?
8. Э3 фазода чизиқнинг параметрик тенгламалари.

2-мавзу: Евклид фазоси.

Режа:

1. Сирт дифференциал геометрияси.
2. Сирт ички геометрияси.
3. Сирт ташқи геометрияси.

Таянч иборалар: Ҳақиқий сонлар тўплами, шар, очиқ тўплам, кесишма, учбурчак тенгсизлиги, уринма, чизиқ, нормал, тенглмма регуляр, нуқта, вектор.

Ҳақиқий сонлар тўплами, шар, очиқ тўплам,кесишма, учбурчак тенгсизлиги. ҳақиқий сонлар тўпламини P$^{|}$ билан белгилаймиз ва n≥1 учун $R^n = \left\{\left(x^1, x^2, ...x^n\right): x^i \in R^1, i = 1,2,....n\right\}$ тўпламда x=$\left(x^1, x^2, ...x^n\right)$ ва y=$\left(y^1, y^2, ...y^n\right)$ нуқталар орасидаги масофани d(x,y)=$\sqrt{\left(y^1 - x^1\right)^2 + \left(y^2 - x^2\right)^2 + ... + \left(y^n - x^n\right)^2}$

формула билан аниқлаймиз. Бу киритилган $d: R^n \times R^n \to R^1$ функтсия қуйидаги шартларни қаноатлантиради.

1) мусбат аниқланган ихтиёрий х,у $\in R^n$ жуфтлик учун d(x,y) ≥0 бўлиб d(x,y)=0 бўлиши учун x=y муносабатни бажарилиши зарур ва етарлидир.

2) Симметрик функтсиядир: ихтиёрий х,у жуфтлик учун d(x,y)= d(y,x) муносабатлар ўринли.

3) Учбурчак тенгсизлигини қаноатлантиради: ихтиёрий х,й,з учта нуқта учун d(x,y) ≤d(x,z)+d(z,y) тенгсизлик бажарилади. Юқорида d(x,y) функтсиянинг 1,2- шартларни қаноатлантириши равшан. Бу шартларнинг учинчиси сизга математик анализ курсидан маълум бўлган

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a^i - b^i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Коши тенгсизлигидан келиб чиқади.

Ҳақиқатдан ҳам агар х=$\left(x^1, x^2, ...x^n\right)$, й=$\left(y^1, y^2, ...y^n\right)$ $z = (z^1, z^2, ...z^n) ....nuqtalar...uchun.....a^k = x^k - z^k, b^k = z^k - y^k$ белгилашлар киритсак Коши тенгсизлигидан d(x,y) ≤d(x,z)+d(z,y) тенгсизлик келиб чиқади. Киритилган д функтсия билан биргаликда Р^n метрис фазо бўлади. эвклид фазода берилган х нуқта ва р>0 сони учун

$B_r(x) = \left\{ y \in R^n : d(x, y) < r \right\}$ тўплам маркази х нуқтада бўлган радийси р га тенг очиқ шар деб аталади.

$B_r(x) = \left\{ y \in R^n : d(x, y) \le r \right\}$ тўплам маркази х нуқтада бўлган радуси р га тенг ёпиқ шар деб аталади.

Сонлар ўқида яъни Р$^|$ да $B_r(x)$ очиқ шар (х-р, х+р)очиқ интервал, ёпиқ $B_r(x)$ шар эса [х-р, х+р] ёпиқ кесма бўлади.

Энди очиқ шар ёрдамида Р^n да очиқ тўплам тушунчасини киритамиз. Берилган А тўплам ва унга тегишли а нуқта учун шундай р>0 сони мавжуд бўлиб $B_r(a) \subset A$ бўлса а нуқта А тўпламнинг ички нуқтаси дейилади. Ҳамма нуқталари ички нуқталар бўлган тўплам очиқ тўплам дейилади. Демак ҳар қандай очиқ шар очиқ тўплам бўлади чунки $x \in B_r(a)$ бўлса

$r_x = \min\{d(a,x), r - d(a,x)\} > 0$ сони учун $B_{r_x} \subset B_r(a)$ бўлади. Ҳақиқатан

$$y \in B_{r_x}(x) ... bo'lsa.$$

$...d(a,y) \le d(a,x) + d(y,x) \le d(a,x) + r_x \le d(a,x) + r - d(a,x) = r$ яъни д(а,у)<р демак $B_{r_x} \subset B_r(a)$ бўлади Энди биз бўш тўпламни $\otimes$ билан белгилаб уни ихтиёрий тўплам учун қисм тўплам деб ҳисоблаймиз ва Р^n нинг очиқ қисм тўплам деб қабул қиламиз. Ана шунда очиқ қисм тўпламлар учун қуйидаги теоремани исботлай оламиз.

Теорема1. Очиқ қисм тўпламлар учун қуйидагилар ўринлидир.

1. Бутун фазо яъни Р^n очиқ тўпламдир.
2. Бўш тўплам очиқ тўпламдир.
3. Чекли сондаги очиқ қисм тўпларнинг кесишмаси (умумий қисми) очиқ тўпламдир.
4. ҳар қандай очиқ тўпламлар оиласи учун бу оиладаги очиқ тўпламлар йиғиндиси очиқ тўпламдир.

Исбот. Теореманинг иккинчи тасдиғИ исбот талаб қилмайди, чунки бўш тўпламни очиқ тўплам деб эълон қилганмиз. Агар $a \in R^n$ бўлса ихтиёрий р>0 сони учун $B_r(a) \subset R^n$ муносабат ҳар доим ўринли, шунинг учун ҳам Р^n очиқ тўпламдир.

Энди, очиқ тўпламлар берилган бўлса, А=$\bigcap_{i=1}^{m} A_i$

тўпламнинг очиқ, эканлигини кўрсатайлик. Агар А=$\varnothing$ бўлса, иккинчи пунктга кўра А очиқ, тўплам бўлади. Шунинг учун А$\neq\varnothing$ деб фараз қилиб, А га тегишли ихтиёрий а нуқтанинг ички нуқта эканлигини кўрсатайлик. Агар

$a \in A$ бўлса, унда $a e A_и$ муносабат барча и лар учун бажарилади. Ҳар бир $A_и$ очиқ, тўплам бўлганлиги учун шунда $р_и>0$ сони мавжудки, $Б_р(а) \subset A_и$

муносабат бажарилади. Бу чекли сондаги $р_и$ сонларининг энг кичигини р билан белгиласак, $Б_р(а) \subset Б_р(а) \subset A_и$ муносабат

бажарилади. Демак $Б_р(а) \subset A$, ва а нуқта А тўпламнинг ички нуқтасидир. Эиди теореманинг 4-пунктини исботлайлик. Очиқ,

тўпламлардан иборат $\{A_\alpha\}$ оила берилган бўлсин. $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$

йиғиндининг очиқ, тўплам эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун А га тегишли ихтиёрий а нуқта олиб, унинг ички нуқта эканлигини кўрсатамиз. Йиғиндига тегишли а нуқта йиғиндида қатнашаётган A_α тўпламларнинг камида бирортасига тегишли

бўлади. Фараз қилайлик $a \in A_{\alpha 0}$ бўлсин. $A_{\alpha 0}$ тўплам очиқ, бўлганлиги учун бирорта $р>0$ мавжуд бўлиб, $Б_р(а) \subset A_{\alpha 0}$ муносабат бажарилади. Демак $Б_р(а) \subset A$ ва А тўплам учун а ички нуқта бўлади. Бундан эса, А нинг очиқ, тўплам эканлиги келиб чиқади.

Энди очиқ, тўплам тушунчасидан фойдаланиб, ёпиқ; тўплам тушунчасини киритамиз. Берилган Ф тўпламиинг тўлдирувчиси $СФ=Р^м\backslash Ф$ очиқ. тўплам бўлса, Ф ёпиқ, тўплам деб аталади. Биринчи теоремадан фойдаланиб, ёпиқ тўпламлар учун қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

Теорема-2. Ёпиқ, қисм тўпламлар учун қуйидагилар ўринлидир.

1. Бутун фазо, яъни $Р^н$ ёпиқ, тўпламдир.

2. Бўш тўплам ёпиқ; тўпламдир.

3. Ҳар қандай ёпиқ қисм тўпламлар оиласи учун шу оиладаги тўпламлар кесишмаси ёпиқ, тўпламдир.

4. Чекли сондага ёпиқ, тўпламларнинг йиғиндиси ёпиқ, тўпламдир

Биз $Р^n$ нинг $x = (x_1, x_2, ..., x^н)$ $y = (y_1, y_2, \ldots y^n)$ элементлари учун $x+y=(x^1+y^1, x^2+y^2 \ldots . x^n+y^n)$, $\lambda x=(\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots .. \lambda x^n)$ қоидалар билан янги $x+y$, λx элементларни аниқлашимиз мумкин. Бу ерда λ ҳақиқий сон. Бу киритилган амалларга нисбатан P^n чизиқли фазо Бу холда $P^н$ ни чизиқли фазо сифатида қарасак, унинг элеменларини вектор деб атаймиз. Чизиқли фазо учун белгилашни ўзгартирмаймиз, чунки ҳар гал текст мазмунидан P^n нинг метрик фазо ёки чизиқли фазо эканлиги кўриниб туради. Метрик P^n фазо нуқталарииининг хар бир х, у жуфтига боши х нуқтада, охири эса у нуқтада

$x\vec{y}$ векторни мос қўйсак, бу вектор чизиқли P^n фазонинг элементи Чизиқли P^n фазода скаляр кўпайтма киритилгандан кейин P^n фазони Эвклид фазоси деб атаймиз. Демак, P^n ни Эвклид фазоси деганимизда, унда д функтсия ёрдамида метрика киритилиб, унга тегишли нуқталарнинг ҳар бир жуфтига мос қўйилган векторлар фазосида скаляр кўпайтма киритилгандир.

Эвклид фазосида

$$y^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^j + a_i = i = 1,2,....n$$

кўринишидаги алмаштиришда $\{a_{иж}\}$ матрисанинг детерминанти нолдан фарқли бўлса у аффин алмаштириш деб аталади. Бу ерда

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}, \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}, A = (a_{ij})$$

белгилашларни ҳисобга олиб аффин алмаштиришни y=Ax+a кўринишда ёзишимиз мумкин. Агар А матриса ортогонал матриса бўлса, F акслантириш ҳаракат деб аталади. Маълумки, А ортогонал матриса бўлса, х,у, векторлар учун

(Ax,Ay) = (x,y)

тенглик ўринлидир, яъни ҳаракатда скаляр кўпайтма сақланади. Ҳақиқатдан , А ортогонал матриса бўлса $A^TA=E$

муносабат ўринли бўлади. Бу ерда A^T транспонирланган матриса, Э эса бирлик матриса. Шунинг учун $(Ax,Ay)=(x,A^TAy)=(x,y)$

тенгликни хосил қиламиз. Бизга аналитик геометрия курсидаи маълумки ҳаракат икки нуқта орасидаги масофани сақлайди. Агар детA>0 бўлса, маълумки Ф ҳаракат фазода ориентатсияни ҳам сақлайди.

Эвклид фазосида бўшмас, элементлари нуқталар бўлган X ва Y тўпламлар берилсин.

Таъриф. X тўпламнинг x элементлари билан Y тўпламнинг y элементлари орасидаги $y = f(x)$ боғланишга X тўпламни Y тўпламга **акслантирувчи** деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$f : X \to Y.$$

y элементни x элементнинг f акслантиришдаги **акси**, x элементни эса y элементнинг **асли** дейилади. X тўплам барча элементларининг акслари тўплами $f(X)$ каби белгиланиб, уни f акслантиришдаги X тўпламнинг **акси** дейилади.

Таъриф. X тўпламни Y тўпламга f акслантирувчини **бир қийматли акслантириш** деб аталади, агарда бу акслантиришда X тўпламнинг ҳар хил нуқталари Y тўпламнинг ҳар хил нуқталарига мос келса.

Таъриф. Агар $f : X \to Y$ акслантириш бир қийматли бўлса, у вақтда Y тўпламга қарашли ҳар бир y нуқтага X тўпламдаги аниқ бир x нуқтани мос келтирувчи f^{-1} акслантириш мавжуд бўлиб, бу f^{-1} акслантиришни f акслантиришга **тескари акслантириш** деб аталади.

x ва x_o нуқталар X тўпламнинг элементлари бўлиб, $y = y(x)$ ва $y_0 = f(x_o)$ нуқталар, уларнинг Y тўпламдаги акслари бўлсин. x ва x_o нуқталар орасидаги масофани $\rho(x, x_o)$ билан, $y = f(x)$ ва $y_0 = f(x_o)$ нуқталар орасидаги масофани $\rho(y, y_0)$ билан белгилаймиз.

Таъриф. $\varepsilon > 0$ сон ҳар қандай бўлганда ҳам, унинг учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлсаки, $\rho(x, x_o) < \delta$ бўлганда $\rho(y, y_0) < \varepsilon$ бўлса, f акслантиришни x_o нуқтада **узлуксиз** деб аталади.

Агар f акслантириш X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у вақтда f акслантириш X тўпламда **узлуксиз** деб аталади.

Таъриф. Бирор интервалнинг уч ўлчовли E_3 фазодаги узлуксиз, бир қийматли ва тескариси ҳам узлуксиз акслантиришдаги аксига э**лементар**

чизиқ деб аталади.

Масалан, тўғри чизиқ элементар чизиқ бўлади.

Ҳақиқатан, E_3 фазода ℓ тўғри чизиқ

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 t + x_o, \\ y &= a_2 t + y_o, \\ z &= a_3 t + z_o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

параметрик тенгламалари билан берилса, у вақтда (1) чизиқли функсиялар билан аниқланган ϕ боғланиш, $(-\infty, +\infty)$ интервал ва ℓ тўғри чизиқ нуқталари орасидаги узлуксиз, бир қийматли, тескариси ҳам узлуксиз акслантириш бўлади.

Эвклид фазосидаги нуқталар тўплами G **очиқ тўплам** деб аталади, агарда бу тўпламнинг ҳар бир x нуқтаси учун шундай $\varepsilon > 0$ сон мавжуд бўлсаки, фазонинг x нуқтадан ε дан кичик масофада жойлашган барча нуқталари G тўпламга тегишли бўлса.

Бу таърифдан келиб чиқадики, исталган сондаги очиқ тўпламларнинг бирлашмаси очиқ тўплам бўлади.

x нуқтани ўз ичига олган ҳар қандай очиқ тўпламни, x нуқтанинг **атрофи** деб аталади.

Эвклид фазосидаги нуқталар тўплами W **туташ** деб аталади, агарда W тўпламни икки W_1 ва W_2 қисмга ажратувчи ва W_1 қисм тўплам фақат Γ_1 га, W_2 қисм тўплам Γ_2 га тегишли бўлган, Γ_1 ва Γ_2 очиқ тўпламлар мавжуд бўлмаса.

Таъриф. Эвклид фазосидаги нуқталар тўплами $Қ$ туташ бўлиб, унинг ҳар бир нуқтаси шундай атрофга эга бўлсаки, $Қ$ тўпламнинг бу атрофга тегишли қисми элементар чизиқ бўлса, у вақтда $Қ$ тўпламни **оддий чизиқ** деб аталади.

Масалан, айлана оддий чизиқ бўлади.

Ҳақиқатан, $Э_3$ фазода айлана ётган текислик, *Охй* текислиги бўлган $O\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ декарт координаталар системасини танласак, у вақтда

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t + a, \\ y &= R\sin t + b, \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2),$$

бу ерда $m \in [0,\ 2\pi]$, тенгламалар – маркази $M_o(a;\ b;\ 0)$ нуқтада ва радиуси R га тенг бўлган айлананинг параметрик тенгламалари бўлади. Агар $H(m_o)$ нуқта айлананинг $(R\cos m_o + a;\ R\sin m_o + b;\ 0)$ нуқтаси бўлса, у вақтда етарли даражада кичик $\varepsilon > 0$ учун (2) тенгликлар билан аниқланган $ф$ боғланиш $(m_o-\varepsilon,\ m_o+\varepsilon)$ интервални унинг аксига узлуксиз, бир қийматли ва тескариси ҳам узлуксиз акслантирувчи бўлади. Демак, айлананинг ихтиёрий $H(m_o)$ нуқтасининг етарли кичик атрофига тегишли қисми элементар чизиқ бўлади.

Таърифлардан кўринадики, ҳар қандай элементар чизиқ оддий чизиқ бўлади. Лекин оддий чизиқ ҳар доим ҳам элементар чизиқ бўла олмайди.

$Э_3$ фазода $O\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ декарт координаталар системасини оламиз. γ элементар чизиқ, ℓ тўғри чизиқдаги $(a,\ b)$ интервални узлуксиз, бир қийматли ва тескариси ҳам узлуксиз бўлган $ф$ акслантириш натижасида ҳосил қилинган бўлсин. γ элементар чизиқнинг, (a, b) интервалга тегишли ихтиёрий m нуқтага мос келувчи нуқтасини $H = ф\,(m)$ билан белгилайлик. Агар H нуқтанинг координаталарини x, y, z билан белгиласак, $ф$ акслантириш

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

тенгламалар системаси билан аниқланади. $ф$ акслантириш узлуксиз, бир қийматли ва тескариси ҳам узлуксиз бўлгани учун $x(m)$, $y(m)$, $z(m)$ ифодалар $(a,\ b)$ интервалда m нинг узлуксиз, бир қийматли ва тескариси ҳам узлуксиз функциялари бўлади.

(3) тенгламаларни γ элементар чизиқнинг **параметрик тенгламалари** деб аталади, m ўзгарувчини γ элементар чизиқнинг

параметри дейилади. Параметрнинг ҳар хил қийматларига γ элементар чизиқнинг ҳар хил нуқталари мос келади. ϕ акслантиришга γ элементар чизиқни **параметрлаш** деб аталади. Битта элементар чизиқда бир нечта ҳар хил параметрлаш мавжуд бўлиши мумкин. Параметрлаш билан таъминланган чизиқни **параметрланган чизиқ** деб аталади.

(3) тенгламалар системасининг биринчи тенгламасини $\vec{i}$ га, иккинчисини $\vec{j}$ га, учинчисини $\vec{k}$ га кўпайтириб, натижани ҳадма-ҳад қўшамиз:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Бу ерда

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

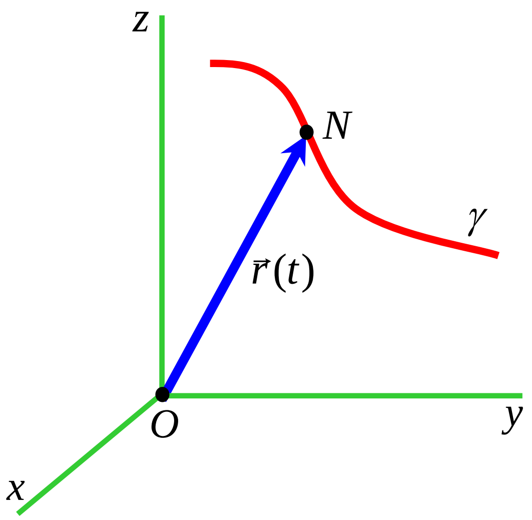
ва

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

белгилашларни киритсак

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (4)$$

тенглама ҳосил бўлади. (4) тенгламага элементар чизиқнинг **вектор тенгламаси** дейилади. Бу ерда $\vec{r}(t)$ – координаталари $x(m)$, y(m), z(m) бўлган ва (a, $б$) интервалда аниқланган вектор функсиядир. Демак, γ элементар чизиқни $\vec{r}(t)$ вектор функциянинг годографи сифатида қараш мумкин экан (6–чизма).



6–чизма.

Таъриф. γ элементар чизиқни **регуляр чизиқ** деб аталади, агарда у

$x = x(m)$, $y = y(m)$, $z = z(m)$

параметрик тенгламалари билан берилиб, $x(m)$, $y(m)$, $z(m)$ функциялар k марта ($k \geq 1$) дифференциалланувчи бўлиб,

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$$

шарти бажарилса.

Агар $k = 1$ бўлса, у вақтда γ элементар чизиқни **силлиқ чизиқ** дейилади.

Чизиқ **аналитик** деб аталади, агарда унинг параметрик тенгламалари аналитик функциялардан иборат бўлса.

Баъзи чизиқларнинг тенгламаларини

$$\left.\begin{aligned} x &= t, \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

бу ерда $m \in (a, б)$, ёки

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x), \\ z &= z(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

бу ерда $x \in (a, б)$, кўринишда ёзиш мумкин. Айрим масалаларни ечишда чизиқнинг бундай тенгламалари қулайлик туғдиради. Шу сабабли, қандай ҳолларда чизиқнинг тенгламасини (5) ёки (6) кўринишда ёзиш мумкин, деган савол туғилади. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

1-теорема. Агар $x=\phi_1(m)$, $y=\phi_2(m)$, $z=\phi_3(m)$ ифодалар γ регуляр чизиқнинг, параметрнинг $m = m_o$ қийматига мос келувчи $M_o(x_o;\ y_0;\ z_o)$ нуқтаси атрофида параметрик тенгламалари бўлиб, $\phi_1'(m_o) \neq 0$ бўлса, у вақтда $M_o(x_o;\ y_0;\ z_o)$ нуқтанинг бирор атрофида γ чизиқ тенгламаларини

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x), \\ z &= z(x) \end{aligned}\right\}$$

шаклда ёзиш мумкин.

Исбот. Ошкормас функциялар ҳақидаги теоремаларга асосан, x_o қийматнинг шундай $(x_o-\delta,\ x_o+\delta)$ атрофи топиладики ($\delta>0$), бу атрофда аниқланган бир қийматли, узлуксиз $m = \lambda(x)$ функсия мавжуд бўлиб, у $m_o = \lambda(x_o)$ ва $x=\phi_1(\lambda(x))$ тенгламаларни қаноатлантиради. Охирги тенгликни $x=x_o$ қийматда дифференциаллласак

$$1 = \phi_1'(\lambda(x_o))\cdot\lambda'(x_o).$$

Теорема шартига асосан $\phi_1'(m_o) \neq 0$ бўлгани учун $\lambda'(x_o) \neq 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу тенгсизлик эса $\lambda(x)$ функциянинг $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ интервалда монотон эканлигини билдиради. Шу сабабли биз $m = \lambda(x)$ функцияда m нинг ўрнига x ни параметр қилиб олишимиз мумкин. $m = \lambda(x)$ ифодани теорема шартидаги $y = \phi_2(m)$ ва $z = \phi_3(m)$ тенгламаларга қўйсак

$$y= \phi_2(\lambda(x)) = y(x),$$

$$z = \phi_3(\lambda(x)) = z(x)$$

келиб чиқади, бу ерда $x_o-\delta < x < x_o+\delta$. Теорема исбот бўлди.

Аналитик геометриядан маълумки, фазода тўғри чизиқни, шу тўғри чизиқ нуқталарининг x, y, z координаталарига нисбатан иккита биргаликда бўлган чизиқли тенгламалар системаси орқали бериш мумкин эди. Шу сабабли табиий равишда қуйидаги савол туғилади.

Қандай ҳолларда ушбу

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

тенгламалар системаси бирор чизиқни ифодалайди ? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

2-теорема. Агар Γ тўплам координаталари (7) системани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами бўлиб, $M_o(x_o;\ y_0;\ z_o) \in \Gamma$ нуқтанинг бирор $Б_o$ атрофида φ $(x_o;\ y_0;\ z_o)$ $\psi(x,y,z)$ функсиялар узлуксиз ва биринчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, M_o нуқтада

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z\\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z\end{pmatrix} = 2$$

бўлса, у вақтда M_o нуқтанинг шундай $Б'_o \subset Б_o$ атрофи мавжудки, Γ тўпламнинг бу атрофдаги қисми силлиқ чизиқ бўлади.

Исбот. Умумийликни чекламасдан, M_o нуқтада

$$\begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин деб фараз қилайлик. У вақтда ошкормас функциялар ҳақидаги теоремаларга асосан, шундай δ_1, δ_2, δ_3 мусбат сонлар топиладики, $(x_o-\delta_1, x_o+\delta_1)$ интервалга тегишли ҳар бир x учун (7) тенгламалар системаси ягона $y = y(x)$, $z = z(x)$ ечимга эга бўлиб, бу ечимлар

$$|y_0 - y(x)| < \delta_2,\ \ |z_o - z(x)| < \delta_3$$

тенгсизликларни қаноатлантиради. Шунингдек $y(x)$ ва $z(x)$ функсиялар мос равишда $(y_0-\delta_2, y_0+\delta_2)$ ва $(z_o-\delta_3, z_o+\delta_3)$ интервалда биринчи тартибли узлуксиз ҳосилага эга. Демак, M_o нуқтанинг $Б'_o=\{(x;\ y;z)\colon |x_o-x| < \delta_1,\ |y_0-y| < \delta_2,\ |z_o-z| < \delta_3\}$ атрофида $Г$ тўплам

$$\left.\begin{aligned} x &= t, \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$

параметрик тенгламалар билан аниқланувчи силлиқ чизиқ бўлади, бу ерда $x_o-\delta_1 < m < x_o+\delta_1$. Теорема исбот бўлди.

(7) тенгламалар системасини Эвклид фазосидаги чизиқнинг **ошкормас тенгламалари** деб аталади.

Таъриф. Ҳамма нуқталари бир текисликка тегишли бўлган чизиқни **текис чизиқ** деб аталади.

Текис чизиқ нуқталари тегишли бўлган текисликни Ox текислиги деб ҳисобланади. Шу сабабли текис чизиқнинг **параметрик тенгламалари** қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \qquad (8).$$

(8) тенгламалар системасида m ни йўқотсак

$$\phi(x, y) = 0 \qquad (9)$$

тенглама ҳосил бўлади. (9) тенгламани текис чизиқнинг **ошкормас**

тенгламаси деб аталади.

(9) тенгламани y га нисбатан ечсак

$$y = y(x) \qquad (10).$$

(10) тенглама текис чизиқнинг **ошкор тенгламаси** деб аталади.

Ошкормас функсиялар ҳақидаги теоремаларга асосан, агар текис чизиқ параметрик тенгламалари билан берилиб, параметрнинг m ва m_o қиймати билан аниқланувчи $H_o(x_o; y_0)$ нуқтада

$$x'(m_o) \neq 0 \quad \text{ёки} \quad y'(m_o) \neq 0$$

шарт бажарилса, у вақтда текис чизиқ бу нуқтанинг бирор атрофида мос равишда

$$y = y(x) \quad \text{ёки} \quad x = x(y)$$

кўринишдаги ошкор тенгламаларнинг бири билан ифода этилади.

Худди шунингдек, агар текис чизиқ ошкормас тенгламаси билан берилиб, $H_o(x_o; y_0)$ нуқтада

$$\phi_x'(x_o; y_0) \neq 0 \quad \text{ёки} \quad \phi_y'(x_o; y_0) \neq 0$$

шарти бажарилса, у вақтда текис чизиқ бу нуқтанинг бирор атрофида мос равишда

$$y = y(x) \quad \text{ёки} \quad x = x(y)$$

кўринишдаги ошкор тенгламалардан бири билан ифода этилади.

Шундай қилиб текис чизиқнинг

$$x'(m_o) = 0, \quad y'(m_o) = 0$$

ёки

$$\phi_x'(x_o; y_0) = 0, \quad \phi y'(x_o; y_0) = 0$$

тенгликларни қаноатлантирувчи $M_o(x_o; y_0)$ нуқталарининг атрофида чизиқ ошкор тенглама билан ифода этилмай қолиши мумкин экан. Бундай нуқталар махсус нуқталар деб аталади. Текис чизиқнинг махсус нуқтаси атрофидаги тузилишини кейинроқ ўрганамиз.

ЭВКЛИД ФАЗОСАДА СИРТЛАР. СИРТ ТУШУНЧАСИ.

Элементар сирт, оддий сирт, регуляр сирт, силлиқ сирт, сиртнинг эгри чизиқли координаталари, сиртнинг параметрик тенгламалари, сиртнинг вектор тенгламаси, сиртнинг ошкор тенгламаси, сиртнинг ошкармас тенгламаси, координат чизиқлар, *у* чизиқлар, *в* чизиқлар, координат тўри, мунтазам тўр.

Аввало тўпламлар назариясидан баъзи-бир тушунчаларни келтирамиз.

Текисликда нуқталар тўплами **Г** берилган бўлсин.

Текисликдаги $M_o(x_o; y_0)$ нуқтанинг “атрофи” деб қараш

муносабат билан аниқланувчи М нуқталар тўпламини тушунамиз.

Агар **Г** тўпламнинг M_o нуқтаси бирор атрофи билан **Г** тўпламга тўла тегишли бўлса, M_o нуқтани **Г** тўпламнинг **ички нуқтаси** деб атаймиз.

Г тўплам **очиқ** дейилади, агарда унинг ҳар бир нуқтаси ички нуқта бўлса.

Г тўплам **боғламли** деб аталади, агарда унинг исталган икки нуқтасини шу тўпламга тегишли синиқ чизиқ билан туташтириш мумкин бўлса.

Г тўпламни **соҳа** деб атаймиз, агарда у очиқ тўплам бўлиб, боғламли бўлса.

Масалан, доиранинг, уни ўраб турган айлана нуқталаридан бошқа нуқталари тўплами соҳа бўлади.

Г тўплам текисликдаги соҳа бўлсин, уни қисқача **текис соҳа** деб атаймиз.

Таъриф. Текис соҳанинг $Э_3$ фазодаги топологик аксига э**лементар сирт** деб атаймиз.

Таъриф. $Э_3$ фазодаги нуқталар тўплами **Қ** боғламли тўплам бўлиб, унинг ҳар бир нуқтаси шундай фазовий атрофга эга бўлсаки, тўпламнинг бу атрофга тегишли қисми элементар сирт бўлса, у ҳолда **Қ** тўпламга **оддий сирт** деб аталади.

Ф оддий сирт **Г** текис соҳани $Э_3$ фазога топологик акслантириш натижасида ҳосил бўлган бўлсин.

Г соҳа жойлашган текисликда **u,v** декарт координаталар системасини киритамиз (25-чизма).

У вақтда **Г** соҳани **Ф** оддий сиртга акслантирувчи функциялар умумий шаклда қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v), \\ z &= z(u,v) \end{aligned}\right\} \qquad (1).$$

Бу ерда x=x(u,v) , y=y(u,v) , z=z(u,v) функциялар узлуксиз, бир қийматли ва уларга тескари функциялар ҳам узлуксиздир.

25-чизма.

(1) тенгламалар системасига **Ф** оддий сиртнинг **параметрик тенгламалари** дейилади.

у ва *в* сонлар жуфти **Ф** сиртдаги нуқтанинг ҳолатини тўла аниқлайдилар ва уларга сиртдаги нуқтанинг э**гри чизиқли координаталари** ёки **гаусс координаталари** деб аталади.

РЕГУЛЯР СИРТЛАР.

Таъриф. **Ф** оддий сиртни **регуляр сирт** деб атаймиз, агарда у ўзининг ҳар бир нуқтаси атрофида $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ параметрик тенгламалари билан берилиб, $x(u,v)$, $y(u,v)$,$z(u,v)$ функциялар k марта дифференциалланувчи $(k \geq 1)$ ва ушбу

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

матритсанинг ранги иккига тенг бўлсади.

Теорема. Агар **Ф** силлиқ сирт $x = x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ параметрик тенгламалари билан берилиб, сиртнинг $M_o(x_o;y_0,z_0)$ нуқтасида

$$\begin{vmatrix} x_u^o & y_u^o \\ x_v^o & y_v^o \end{vmatrix} \neq 0$$

шарт бажарилса, у вақтда M_o нуқта атрофида **Ф** сирт тенгламасини

$$\mathbf{z} = \phi\,(x, y) \qquad (1)$$

шаклда ёзиш мумкин.

Исбот. Ошкормас функсиялар ҳақидаги теоремага асосан:

$$\begin{vmatrix} x_u^o & y_u^o \\ x_v^o & y_v^o \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлганда, $x = x(\mathrm{u,v})$, $y = y(\mathrm{u,v})$ тенгламалар системасини $M_o(u_0,v_0)$ нуқта атрофида u,v ларга нисбатан ечиш мумкин.

Натижада

$$u = \varphi(x, y)\,, \qquad v = \psi(x,y) \qquad (2)$$

ҳосил бўлади.

u ва v ларнинг бу қийматларини сиртнинг параметрик тенгламаларидаги z=z(u,v) тенгламага қўйсак:

$$z = z(\varphi(x,y), \psi\,(x, y)) = \phi\,(x,y)$$

ҳосил бўлади. Теорема исбот бўлди.

(1) тенгламага сиртнинг **ошкор тенгламаси** деб аталади.

(1) тенгламани умумий шаклда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y,z) = 0 \qquad (3).$$

(3) тенгламага сиртнинг **ошкормас тенгламаси** деб аталади.

КООРДИНАТ ЧИЗИҚЛАР.

Бизга **Ф** регуляр сирт

$$\vec{r} = \vec{r}\,(\mathrm{u,v}) \qquad (1)$$

вектор тенгламаси билан берилсин.

(1) тенгламада $v = v_o = конст$ деб олсак,

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u,v)$$

вектор битта $у$ ўзгарувчининг функцияси бўлиб, у **Ф** сирт устида ётувчи қандайдир чизиқнинг вектор тенгламаси бўлади.

Агар v_o га ҳар хил қийматлар қўйсак, сирт устида ҳар хил чизиқлар ҳосил бўла боради ва улар v параметрли чизиқлар оиласини ташкил этади. Бу чизиқлар оиласида $у$ ўзгарувчи бўлгани учун, уларни биз $у$ **чизиқлар** (v = *сонст*) деб атаймиз.

Худди шунга ўхшаш (1) тенгламада $у = у_o$ = *сонст* деб олсак, **Ф** сирт устида ётувчи чизиқларнинг $у_o$ параметрли иккинчи оиласини ҳосил қиламиз. Бу чизиқлар оиласини биз v **чизиқлар** ($у$ = *сонст*) деб атаймиз.

Координат чизиқларнинг иккала оиласини **координат тўри** деб атаймиз.

Силлиқ сиртнинг ҳар бир нуқтасидан координат тўрига тегишли иккита чизиқ ўтади.

Сиртда жойлашган бирор соҳанинг ҳар бир нуқтасидан координат тўрининг фақат иккита чизиғи ўтса, бундай тўрга **мунтазам тўр** дейилади.

Силлиқ сирт устидаги тўр мунтазам бўлади.

Ф сиртда $M_o(u_o; v_o)$ нуқта берилсин. У вақтда чизиқлар назариясидан маълумки, $\vec{r}_u\,(u_o, v_o)$ вектор $у$ чизиқнинг $M_o(u_o;vв_o)$ нуқтасидаги уринма вектори бўлади. $\vec{r}_u\,(u_o,v_o)$ вектор эса *в* чизиқнинг

$M_o(u_o;v_o)$ нуқтасидаги уринма вектори

бўлади (26-чизма).

Ф сирт регуляр бўлгани учун,

$M_o(u_o;v_o)$ нуқта атрофида

матритсанинг ранги иккига тенг бўлади.

Шу сабабли $M_o(u_o;v_o)$ нуқтада ушбу

вектор нолдан фарқлидир:

.

Бу эса $M_o(u_o;v_o)$ нуқтада $(u_o;v_o)$ ва

$(u_o;v_o)$ уринма векторлар нолдан фарқлилигини, ҳамда бу векторлар коллинеар эмаслигини кўрсатади. Демак, регуляр сиртнинг ҳар бир нуқтасида ва уринма векторлар коллинеар бўлмас экан.

СИРТ ИЧКИ ГЕОМЕТРИЯСИ

Таъриф. Сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентлари билан аниқланувчи хоссаларини ўрганувчи бўлимга **сирт ички геометрияси** деб аталади.

Маълумки сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентилари орқали сирт устидаги чизиқ ёйининг узунлиги, сирт устидаги икки чизиқ орасидаги бурчак ва сирт устидаги соҳанинг юзи аниқланар эди. Демак, юқоридаги таърифга асосан сирт устидаги чизиқ ёйининг узунлиги, сирт устидаги икки чизиқ орасидаги бурчак ва сирт устидаги соҳанинг юзи сирт ички геометриясининг объекти бўлади.

ГАУСС ТЕОРЕМАСИ.

Теорема (Гаусс теоремаси). Сиртнинг тўла эгрилиги биринчи квадратик форма коеффицентлари ва уларнинг биринчи ҳамда иккинчи тартибли ҳосилалари орқали ифодаланади, яъни сиртнинг тўла эгрилиги сирт ички геометриясининг объекти бўлади.

Исбот. Маълумки, сиртнинг тўла эгрилиги ушбу формула билан ҳисобланар эди:

$$K = \frac{DD_2 - D_1^2}{EG - F^2} \; .$$

Бу ерда

$$D \cdot D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Детерминантларни “сартларни сартларга” қоидаси билан кўпайтириб, ушбу

$$x_{uu} \cdot x_{vv} + y_{uu} \cdot y_{vv} + z_{uu} \cdot z_{vv} = \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv}\ , \qquad x_u \cdot x_{vv} + y_u \cdot y_{vv} + z_u \cdot z_{vv} = \vec{r}_u\vec{r}_{vv}\ ,$$

$$x_v \cdot x_{vv} + y_v \cdot y_{vv} + z_v \cdot z_{vv} = \vec{r}_v\vec{r}_{vv}\ , \qquad x_{uu} \cdot x_u + y_{uu} \cdot y_u + z_{uu} \cdot z_u = \vec{r}_{uu}\vec{r}_u\ ,$$

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \vec{r}_u^{\,2} = E\ , \qquad x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v = \vec{r}_u\vec{r}_v = F,$$

$$x_{uu} \cdot x_v + y_{uu} \cdot y_v + z_{uu} \cdot z_v = \vec{r}_{uu}\vec{r}_v\ , \qquad x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = \vec{r}_v^{\,2} = G$$

тенгликларни эътиборга олсак

$$DD_2 = \frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv} & \vec{r}_{uu}\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix}$$

ҳосил бўлади.

Худди шу йўл билан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D_1^2 = D_1D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{1}{EG-F^2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{r}_{uv}^{\,2} & \vec{r}_{uv}\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}.$$

Демак,

$$K = \frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv} & \vec{r}_{uu}\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{r}_{uv}^{\,2} & \vec{r}_{uv}\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

Бу ифодадаги иккала детерминантнинг ҳам биринчи устун, биринчи сатр элементидан тузилган биринчи тартибли минорларининг қўшимча минорлари бир хил бўлгани учун, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$K = \frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix} \vec{r}_{uu}\vec{r}_{vv} - \vec{r}_{uv}^{\,2} & \vec{r}_{uu}\vec{r}_u & \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u\vec{r}_{vv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{vv} & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \vec{r}_{uv}\vec{r}_u & \vec{r}_{uv}\vec{r}_v \\ \vec{r}_u r_{uv} & E & F \\ \vec{r}_v\vec{r}_{uv} & F & G \end{vmatrix}\right\} \qquad (1).$$

Энди $\vec{r}_u^{\,2} = E$, $\vec{r}_u\vec{r}_v = F$, $\vec{r}_v^{\,2} = G$ тенгликларни u ва v ларга нисбатан дифференциалласак:

$$2\cdot\vec r_u\cdot\vec r_{uu}=E_u,\qquad \text{бу ердан}\qquad \vec r_{uu}\cdot\vec r_u=\frac{1}{2}E_u\ ,$$

$$2\cdot\vec r_u\cdot\vec r_{uv}=E_v,\qquad \text{бу ердан}\qquad \vec r_{uv}\cdot\vec r_u=\frac{1}{2}E_v\ ,$$

$$2\cdot\vec r_v\cdot\vec r_{uv}=G_u,\qquad \text{бу ердан}\qquad \vec r_{uv}\cdot\vec r_v=\frac{1}{2}G_u\ ,$$

$$2\cdot\vec r_v\cdot\vec r_{vv}=G_v,\qquad \text{бу ердан}\qquad \vec r_{vv}\cdot\vec r_v=\frac{1}{2}G_v\ ,$$

$$\vec r_{uu}\cdot\vec r_v+\vec r_u\cdot\vec r_{uv}=F_u\ ,\qquad \text{бу ердан}\qquad \vec r_{uu}\cdot\vec r_v=F_u-\frac{1}{2}E_v\ ,$$

$$\vec r_{uv}\cdot\vec r_v+\vec r_u\cdot\vec r_{vv}=F_v\ ,\qquad \text{бу ердан}\qquad \vec r_{vv}\cdot\vec r_u=F_v-\frac{1}{2}G_u\ .$$

Бу ерда бешинчи тенгликни v бўйича, учинчи тенгликни y бўйича дифференциаллаб, уларни ҳадлаб айирсак

$$\vec r_{uuv}\cdot\vec r_v+\vec r_{uu}\cdot\vec r_{vv}-\vec r_{uuv}\cdot\vec r_v-\vec r_{uv}\cdot\vec r_{uv}=F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu}$$

ёки

$$\vec r_{uu}\cdot\vec r_{vv}-\vec r_{uv}^{\,2}=-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}$$

ҳосил бўлади. Бу тенгликларни (1) га қўйсак:

$$K=\frac{1}{\left(EG-F^2\right)^2}\left\{\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right\}\qquad (2).$$

Теорема исбот бўлди.

Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, агарда сиртнинг биринчи квадратик формаси

$$\Phi_1=du^2+Gdv^2$$

кўринишда бўлса, у вақтда (2) формулага асосан, бу сиртнинг гаусс эгрилиги қуйидагига тенг бўлади:

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\sqrt{G}\right)_{uu}.$$

СИРТНИ ЭГИШ.

Таъриф. Сирт устидаги чизиқ ёйининг узунлигини ўзгартирмасдан сиртни узлуксиз деформатциялашга **сиртни эгиш** деб аталади.

Масалан, бир варақ қоғозни ўраб, уни цилиндрга ёки конусга айлантириш қоғозни э**гиш** демакдир.

Ф сиртни эгиш натижасида **Ф**^{1} сирт ҳосил қилинган бўлсин. У вақтда бу сиртлардаги бир-бирига мос ёйларнинг узунлиги тенгдир:

$$\int_a^b \sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2} = \int_a^b \sqrt{E^1du^2+2F^1dudv+G^1dv^2}\ .$$

Бу тенглик чизиқлардаги исталган M(т) нуқта, яъни исталган т параметр учун бажарилгани сабабли, интеграл остидаги ифодалар бир-бирига айнан тенгдир:

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 = E^1du^2+2F^1dudv+G^1dv^2\ .$$

Бу шарт эса исталган $du:dv$ йўналиш учун бажарилгани сабабли, квадратик формаларнинг коеффицентлари тенг бўлади:

$$E=E^1, \qquad F=F^1, \qquad G=G^1.$$

Шундай қилиб ушбу теоремага келдик.

Теорема. Сиртни эгишда унинг биринчи квадратик формасининг коеффицентлари ўзгармайди.

Сирт устидаги икки чизиқ орасидаги бурчак, сирт устидаги соҳанинг юзи ва сиртнинг тўла эгрилиги фақат биринчи квадратик форма коеффицентларига боғлиқ бўлгани учун, юқоридаги теоремага асосан ушбу натижага келамиз.

Натижа. Сиртни эгишда сирт устидаги икки чизиқ орасидаги бурчак, сирт устидаги соҳанинг юзи ва сиртнинг тўла эгрилиги ўзгармайди.

БИРИНЧИ КВАДРАТИК ФОРМАСИ

Бизга **Ф** сирт $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ вектор тенгламаси билан берилсин. Бу тенгламани дифференциаллайлик:

$$\partial\vec{r} = \vec{r}_u\partial u + \vec{r}_v\partial v\ .$$

Бу тенгликни квадратга кўтарайлик:

$$\partial \vec{r}^{\,2} = \vec{r}_u^{\,2}\, \partial u^2 + 2\, \vec{r}_u \vec{r}_v\, \partial u\, \partial v + \vec{r}_v^{\,2}\, \partial v^2.$$

Ёзишни соддалаштириш мақсадида

$$\vec{r}_u^{\,2} = Э, \qquad \vec{r}_u \vec{r}_v = \boldsymbol{\Phi}, \qquad \vec{r}_v^{\,2} = \Gamma \qquad (1)$$

белгилашларни киритсак:

$$\partial \vec{r}^{\,2} = Э\, \partial у^2 + 2\Phi\, \partial у\, \partial в + \Gamma\, \partial в^2$$

ҳосил бўлади.

Таъриф. Ушбу

$$\partial \vec{r}^{\,2} = Э\, \partial u^2 + 2\Phi\, \partial u\, \partial v + \Gamma\, \partial v^2$$

ифодага сиртнинг **биринчи квадратик формаси** деб атаймиз ва $\mathbf{Ф}_1$ билан белгилаймиз.

Демак,

$$\mathbf{Ф}_1 = \partial \vec{r}^{\,2} = Э\, \partial u^2 + 2\Phi\, \partial u\, \partial v + \Gamma\, \partial v^2 \ (2).$$

Сиртнинг биринчи квадратик формасини баъзан сиртнинг **чизиқли элементи** деб ҳам аталади.

Э Ф , Г ларга сирт биринчи квадратик формасининг **коеффицентлари** деб аталади.

(1) белгилашларга асосан **,** **Э** ва *Г* нинг ҳар бири нолдан катта бўлиб, *Ф* эса манфий, нол ва мусбат қийматларни қабул қилиши мумкин.

$\mathbf{Ф}_1 = \partial \vec{r}^{\,2}$ бўлгани учун, сиртнинг биринчи квадратик формаси ҳар доим мусбатдир.

Сирт $x = x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$, параметрик тенгламалари билан берилса

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}\ ,$$

$$\vec{r}_u = x_u\cdot\vec{i} + y_u\cdot\vec{j} + z_u\cdot\vec{k}\ ,$$

$$\vec{r}_v = x_v\cdot\vec{i} + y_v\cdot\vec{j} + z_v\cdot\vec{k}$$

бўлгани учун, сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентлари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

(3) формула параметрик тенгламалари билан берилган сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентларини топиш формуласи бўлади.

Агар сирт $z = \phi(x, y)$ ошкор тенгламаси билан берилса, $u = x$, $v = y$ белгилашлар киритамиз. У вақтда $x_u = 1$, $x_v = 0$, $y_u = 0$, $y_v = 1$ бўлгани учун, (3) формулаларга асосан:

$$Э = 1 + z_x^2,$$

$$Ф = z_x z_y,$$

$$Г = 1 + z_y^2.$$

Бу ерда $z_x = p$, $z_y = q$ белгилашларни киритсак:

$$\left.\begin{aligned} E &= 1 + p^2, \\ F &= pq, \\ G &= 1 + q^2 \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

(4) формула ошкор тенгламаси билан берилган сирт биринчи квадратик формасининг коеффитсийентларини топиш формуласи бўлади.

<u>1-мисол.</u> $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$ айланма параболоиднинг биринчи квадратик формасини топинг.

Э<u>чиш.</u> Сирт параметрик тенгламалари билан берилган. Шунинг учун сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентларини топиш учун (3) формуладан фойдаланамиз. Сиртнинг берилган параметрик тенгламаларидан хусусий ҳосилалар оламиз:

$$X_u = \cos v, \qquad y_u = \sin v, \qquad z_u = 2u,$$

$$X_v = -u\sin v, \qquad y_v = u\cos v, \qquad z_v = 0.$$

Бу топилган ҳосилаларни (3) формулаларга қўямиз:

$$Э = \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 1 + 4u^2,$$

$$Ф = -u\cos v\sin v + u\sin v\cos v = 0,$$

$$Г = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2.$$

Э ***Ф*, *Г*** ларнинг бу қийматларини (2) формулага қўйсак, айланма параболоиднинг биринчи квадратик формаси ҳосил бўлади:

$$\mathbf{Ф}_1 = (1 + 4u^2)\, du^2 + u^2\, dv^2.$$

2-мисол. $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ сиртнинг биринчи квадратик формасини топинг.

Ечиш. Сирт ошкор тенгламаси билан берилган. Шу сабабли сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентларини топишда (4) формуладан фойдаланамиз. Сиртнинг берилган тенгламасидан хусусий ҳосилалар оламиз:

$$p = z_x = ax, \qquad q = z_y = by.$$

p ва q ларнинг топилган бу қийматларини (4) формулага қўямиз:

$$Э = 1 + a^2x^2,$$
$$Ф = abxy,$$
$$Г = 1 + b^2y^2.$$

Э , ***Ф*** , ***Г*** ларнинг топилган бу қийматларини (2) формулага қўйсак, сиртнинг биринчи квадратик формаси ҳосил бўлади:

$$\mathbf{Ф}_1 = (1 + a^2x^2)\partial x^2 + 2abxy\partial x\partial y + (1 + b^2y^2)\partial y^2.$$

СИРТ УСТИДАГИ ЧИЗИҚ.

Сирт устидаги чизиқнинг вектор тенгламаси, сирт устидаги чизиқнинг параметрик тенгламалари, сирт устидаги чизиқнинг эгри чизиқли координаталарга нисбатан тенгламалари, локсодром, сирт устидаги чизиқ ёйининг узунлиги.

Бизга **Ф** регуляр сирт $\vec{r} = \vec{r}(u.v)$ вектор тенгламаси билан берилсин. Бу сирт устида шундай нуқталар тўпламини қарайликки, уларнинг u ва v эгри чизиқли координаталари бирор t эркли ўзгарувчининг функциялари бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t), \\ v &= v(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1),$$

бунда u(t) ва v(t) - узлуксиз ва дифференциалланувчи функциялар бўлсин. Бу тенгламалар берилган сиртда ётувчи қандайдир чизиқни ифодалайди. Чунки сиртнинг $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ вектор тенгламасига (1) ифодаларни қўйсак:

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = \vec{r}(u(т), v(т)) = \vec{r}(т)$$

яъни

$$\vec{r} = \vec{r}(т) \qquad (2)$$

тенглама ҳосил бўлиб, чизиқлар назариясидан маълумки, бу (2) тенглама чизиқнинг вектор тенгламасидир.

Шунинг учун (2) тенгламага сирт устидаги **чизиқнинг вектор тенгламаси** деб аталади. (1) тенгламалар системасига сирт устидаги **чизиқнинг параметрик тенгламалари** дейилади. (1) тенгламалардан t ни йўқотиш мумкин:

$$\phi(u,v) = 0 \qquad (3).$$

Бу (3) тенглама сирт устидаги чизиқнинг эгри чизиқли координаталарга нисбатан **ошкормас тенгламаси** дейилади.

(3) тенгламани v га нисбатан ечсак:

$$v=v(u) \qquad (4).$$

(4) тенглама сирт устидаги чизиқнинг эгри чизиқли координаталарга нисбатан **ошкор тенгламаси** дейилади.

Хусусий ҳолда:

$$u = сонст$$

v чизиқнинг тенгламаси бўлади.

$$v = сонст$$

эса y чизиқнинг тенгламаси бўлади.

Сиртдаги чизиқнинг (2) тенгламасини т бўйича дифферентсиалласак ушбу

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \qquad (5)$$

вектор ҳосил бўлиб, у чизиқ уринмаси бўйлаб йўналади. $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар эса шу нуқтадан ўтувчи координат чизиқларнинг уринмалари бўйлаб йўналади.

Текисликда чизиқнинг йўналиши $дх:ду$ ёки $ду:дх$ нисбатларга боғлиқ бўлгани каби, сирт устидаги чизиқнинг йўналиши ҳам $\partial v{:}\partial u$ ёки $\partial u{:}\partial v$ нисбатларга боғлиқдир. Ҳақиқатан, (5) тенгликдан кўринадики, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ҳосила $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ ҳамда $\frac{du}{dt}$ ва $\frac{dv}{dt}$ ларнинг функциясидир. Бироқ $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар берилган нуқтада ўзгармас векторлар бўлади. Шу сабабли $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ҳосила $\frac{du}{dt}$ ва $\frac{dv}{dt}$ ларнинг функцияси бўлади. $\frac{du}{dt}$: $\frac{dv}{dt}$ нисбатни олсак $\partial u{:}\partial v$ ҳосил бўлади, ёки $\frac{dv}{dt}:\frac{du}{dt}$ нисбатни олсак $\partial v{:}\partial u$ ҳосил бўлади.

Энди сирт устидаги чизиққа мисол келтирамиз.

ЛОКСОДРОМ. Сферанинг ҳамма меридианларини бир хил бурчак остида кесиб ўтувчи чизиққа **локсодром** деб аталади.

Унинг тенгламасини топайлик.

Сферанинг вектор тенгламасини қараймиз:

$$\vec{r} = \{R\cos u\cos v;\ R\cos u\sin v; R\sin u\} \qquad (6).$$

Меридианнинг тенгламаси шу (6) тенгламада $в = сонст$ бўлган ҳолдир.

Меридианнинг уринмаси бўйлаб йўналувчи векторни топамиз. У (6) дан $v = сонст$ бўлган ҳолда топилади:

$$\vec{r}_u = \{-R\sin u\cos v;\ -R\sin u\sin v; R\cos u\} \qquad (7).$$

Локсодромнинг тенгламасини v=v(u) шаклда излаймиз. У вақтда таърифга асосан:

$$\frac{\vec{r}_u\dfrac{d\vec{r}}{du}}{|\vec{r}_u|\left|\dfrac{d\vec{r}}{du}\right|} = const = \cos m \qquad (8)$$

Бўлади.

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \{-R\sin u\cos v - R\cos u\sin v\frac{dv}{du};$$

$$-R\sin u\sin v + R\cos u\cos v\frac{dv}{du}; R\cos u\} \qquad (9).$$

(7) дан

$$|\vec{r}_u| = \sqrt{R^2\sin^2 u\cos^2 u + R^2\sin^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u} = P,$$

(9) дан

$$\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right| = \sqrt{\left(R\sin u\cos v + R\cos u\sin v\frac{dv}{du}\right)^2 + \left(-R\sin u\sin v + R\cos u\cos v\frac{dv}{du}\right)^2 + R^2\cos^2 u} = =$$

$$\sqrt{R^2\sin^2 u + R^2\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + R^2\cos^2 u} = R\cdot\left(\sqrt{1+\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\right).$$

(7) ва (9) дан: $\vec{r}_u\dfrac{d\vec{r}}{du} = R\sin u\cos v\left(R\sin u\cos v + R\cos u\sin v\dfrac{dv}{du}\right) +$

$$+\ R\sin u\sin v\left(R\sin u\sin v - R\cos u\cos v\frac{dv}{du}\right) + R^2\cos^2 u = \mathrm{R}^2.$$

$|\vec{r}_u|$, $\left|\dfrac{d\vec{r}}{du}\right|$ ва $\vec{r}_u\dfrac{d\vec{r}}{du}$ ларнинг қийматларини (8) га қўйиб, уни ихчамласак:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2}} = \cos m,$$

$$1+\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 m},$$

$$\cos^2 u\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{\sin^2 m}{\cos^2 m},$$

$$\cos u\frac{dv}{du} = \pm\ \text{тг}\ м,$$

$$\frac{\cos u}{du} = \pm\frac{tgm}{dv},$$

$$\frac{du}{\cos u} = \pm\ \partial в\cdot \mathrm{ctg}\ м \qquad (10).$$

(10) тенглама локсодромнинг ***дифференциал тенгламаси*** бўлади. Агар (10) дифференциал тенгламани интегралласак:

$$\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right| = \pm\ \mathrm{vctg}\ м + \ln\mathrm{C}$$

ёки

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)=Ce^{\pm v\cdot ctgm} \qquad (11).$$

(11) формула локсодромнинг **ошкормас тенгламаси** бўлади. Бу (11) тенгламадаги $\pm$ ишораси сферада иккита локсодром мавжудлигини кўрсатади.

СИРТНИНГ ИККИНЧИ КВАДРАТИК ФОРМАСИ

Бизга **Ф** регуляр сирт $\vec{r} = \vec{r}$(u,v) вектор тенгламаси билан берилган бўлсин.

Таъриф. **Ф** сиртнинг берилган M нуқтасидаги уринма текислигига перпендикуляр бўлган бирлик векторга сиртнинг шу нуқтасидаги **бирлик нормал вектори** деб атаймиз ва $\vec{n}$ билан белгилаймиз

Агар M (u,v) нуқта **Ф** сирт бўйлаб ҳаракатланса, у вақтда сиртнинг шу нуқтасидаги бирлик нормал вектори $\vec{n}$ ҳам ҳаракатлана боради, яъни бу $\vec{n}$ вектор $у$ ва v ўзгарувчиларнинг вектор функцияси бўлади:

$$\vec{n}=\vec{n}(u,v) \qquad (1).$$

Сиртнинг вектор тенгламасини ва (1) тенгламани дифферен-тсиаллаймиз:

$$\partial\vec{r} = \vec{r}_u du+\vec{r}_v dv,$$

$$\partial\vec{n} = \vec{n}_u du+\vec{n}_v dv.$$

Бу $\partial\vec{r}$ ва $\partial\vec{n}$ векторларни скаляр кўпайтирайлик:

$$\partial\vec{r}\cdot\partial\vec{n} = (\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)(\vec{n}_u du+\vec{n}_v dv) = \vec{r}_u\vec{n}_u du^2+(\vec{r}_u\vec{n}_v+\vec{r}_v\vec{n}_u)dudv+\vec{r}_v\vec{n}_v dv^2 .$$

Таъриф. Ушбу

$$\Phi_2 = -\partial\vec{r}\cdot\partial\vec{n} = -\vec{r}_u\vec{n}_u du^2-(\vec{r}_u\vec{n}_v+\vec{r}_v\vec{n}_u)dudv-\vec{r}_v\vec{n}_v dv^2 \qquad (2)$$

ифодага сиртнинг **иккинчи квадратик формаси** деб аталади.

Сиртнинг иккинчи квадратик формаси учун қуйидаги белги-лашларни киритамиз:

$$\left.\begin{aligned} -\vec{r}_u\vec{n}_u &= D, \\ -\left(\vec{r}_u\vec{n}_v + \vec{r}_v\vec{n}_u\right) &= 2D_1, \\ -\vec{r}_v\vec{n}_v &= D_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

У вақтда иккинчи квадратик форма ушбу кўринишни олади:

$$\mathbf{\Phi}_2 = Д\,\partial u^2 + 2\,Д_1\,\partial u\,\partial v + Д_2\,\partial v^2 \qquad (4).$$

Бизга маълумки $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар сиртнинг уринма текис-лигига параллел бўлар эди. Демак, бу векторларнинг чизиқли комбина-тсияси бўлган $\partial\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ вектор ҳам сиртнинг уринма текислигига параллел бўлади. Таърифга асосан $\vec{n}$ вектор уринма текисликка пер-пендикулярдир. Шунинг учун $\partial\vec{r}$ ва $\vec{n}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлиб, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади:

$$\partial\vec{r}\cdot\vec{n} = 0.$$

Бу тенгликни дифференциаллайлик:

$$\partial(\partial\vec{r}\cdot\vec{n}) = \partial^2\vec{r}\cdot\vec{n} + \partial\vec{r}\cdot\partial\vec{n} = 0.$$

(2) га асосан:

$$\partial^2\vec{r}\cdot\vec{n} = -\partial\vec{r}\cdot\partial\vec{n} = \mathbf{\Phi}_2.$$

Демак,

$$\mathbf{\Phi}_2 = \partial^2\vec{r}\cdot\vec{n}.$$

Бу ерда

$$\partial^2\vec{r} = \partial(\partial\vec{r}) = \partial(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = \vec{r}_{uu}du^2 + 2\vec{r}_{uv}dudv + \vec{r}_{vv}dv^2 + \vec{r}_u d^2u + \vec{r}_v d^2v$$

бўлиб, $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ ва $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ бўлгани учун:

$$\mathbf{\Phi}_2 = \partial^2\vec{r}\cdot\vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2 + \vec{r}_u\vec{n}d^2u + \vec{r}_v\vec{n}d^2v =$$

$$= \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2.$$

Демак,

$$\mathbf{\Phi}_2 = \vec{r}_{uu}\vec{n}du^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{n}dudv + \vec{r}_{vv}\vec{n}dv^2.$$

Бу тенглама билан (4) ни таққосласак, қуйидагилар келиб чиқади:

$$D = \vec{r}_{uu}\vec{n}, \qquad D_1 = \vec{r}_{uv}\vec{n}, \qquad D_2 = \vec{r}_{vv}\vec{n} \qquad (5).$$

Юқорида айтдикки, $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар сиртнинг уринма текислигига параллел бўлади. Шунинг учун бу векторларнинг вектор кўпайтмаси бўлган $[\vec{r}_u\ \vec{r}_v]$ вектор сиртнинг нормалига параллел бўлади. Демак, $\dfrac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\left|[\vec{r}_u\vec{r}_v]\right|}$ бирлик вектор сиртнинг нормали бўйлаб йўналади. Шу сабабли бу векторни сирт нормалининг бирлик вектори сифатида олиш мумкин, яъни:

$$\vec{n}=\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\left|[\vec{r}_u\vec{r}_v]\right|}=\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{[\vec{r}_u\vec{r}_v]^2}}=\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$\vec{n}$ векторнинг бу қийматини (5) тенгликларга қўйсак:

$$D=\vec{r}_{uu}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}=\frac{\vec{r}_{uu}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}=\frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$$D_1=\vec{r}_{uv}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}=\frac{\vec{r}_{uv}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.$$

$$D_2=\vec{r}_{vv}\frac{[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}=\frac{\vec{r}_{vv}[\vec{r}_u\vec{r}_v]}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}$$

Демак,

$$D=\frac{(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}.\qquad D_1=\frac{(\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}},\qquad D_2=\frac{(\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)}{\sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2}-(\vec{r}_u\vec{r}_v)^2}}\qquad (6).$$

(3) ва (6) формулалар вектор тенгламаси билан берилган сирт иккинчи квадратик формасининг коэффицентларини топиш формулалари бўлади.

Ф регуляр сирт $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ параметрик тенгламалари билан берилсин. Бу вақтда:

$$\vec{r}_u=x_u\vec{i}+y_u\vec{j}+z_u\vec{k}\quad,\quad \vec{r}_v=x_v\vec{i}+y_v\vec{j}+z_v\vec{k},$$

$$\vec{r}_{uu}=x_{uu}\vec{i}+y_{uu}\vec{j}+z_{uu}\vec{k}\quad,\quad \vec{r}_{uv}=x_{uv}\vec{i}+y_{uv}\vec{j}+z_{uv}\vec{k}\quad,\quad \vec{r}_{vv}=x_{vv}\vec{i}+y_{vv}\vec{j}+z_{vv}\vec{k}$$

бўлиб, координаталари билан берилган уч векторнинг аралаш кўпайтмаси қуйидагича аниқланар эди:

$$(\vec{r}_{uu},\vec{r}_u,\vec{r}_v)=\begin{vmatrix}x_{uu}&y_{uu}&z_{uu}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix},\quad (\vec{r}_{uv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)=\begin{vmatrix}x_{uv}&y_{uv}&z_{uv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix},\quad (\vec{r}_{vv},\vec{r}_u,\vec{r}_v)=\begin{vmatrix}x_{vv}&y_{vv}&z_{vv}\\x_u&y_u&z_u\\x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}.$$

Сирт биринчи квадратик формасининг коэффицентлари:

$$Э = \vec{r}_u^{\,2}, \qquad Ф = \vec{r}_u\,\vec{r}_v, \qquad Г = \vec{r}_v^{\,2}.$$

Бу тенгликларни ҳисобга олиб, (6) тенгликлардан қуйидаги ифодаларни ёза оламиз:

$$D = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}; \qquad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}; \qquad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \qquad (7).$$

Бу (7) формулалар параметрик тенгламалари билан берилган сирт иккинчи квадратик формасининг коеффицентларини топиш формулалари дейилади.

Агар сирт $z = ф\,(x,y)$ ошкор тенгламаси билан берилса, $x = u$, $y=v$ алмаштиришларини олиб, (7) формуладан қуйидаги ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$D = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \qquad D_1 = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}; \qquad D_2 = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \qquad (8).$$

Бу (8) формулалар ошкор тенгламаси билан берилган сирт иккинчи квадратик формасининг коеффицентларини топиш формулалари дейилади.

Бу ҳолда сиртнинг иккинчи квадратик формаси ушбу кўринишни олади:

$$Ф_2 = Ddx^2 + 2D_1dx\,dy + D_2dy^2 \qquad (9).$$

1-мисол. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ тўғри геликоиднинг иккинчи квадратик формасини топинг.

Ечиш. Тўғри геликоиднинг параметрик тенгламаларидан ҳосилалар оламиз:

$X_u = \cos v$, $y_u = \sin v$, $z_u = 0$,

$X_v = -u\sin v$, $y_v = u\cos v$, $z_v = a$,

$X_{uu} = 0$, $y_{uu} = 0$, $z_{uu} = 0$,

$X_{uv} = -\sin v$, $y_{uv} = \cos v$, $z_{uv} = 0$,

$X_{vv} = -u\cos v$, $y_{vv} = -u\sin v$, $z_{vv} = 0$.

Сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентларини топамиз:

$Э = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,$

$\Phi = - u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0,$

$\Gamma = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2.$

Сирт иккинчи квадратик формасининг коеффицентларини топамиз. Сирт параметрик тенгламалари билан берилгани учун (7) формулалардан фойдаланамиз.

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0, \qquad D_1 = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$D_2 = \frac{\begin{vmatrix} -u\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0$$

Топилган қийматларни (4) формулага қўямиз:

$$\Phi_2 = -\frac{2adudv}{\sqrt{u^2 + a^2}} \; .$$

Бу тўғри геликоиднинг иккинчи квадратик формаси бўлади.

2-мисол. $z = xy$ сиртнинг иккинчи квадратик формасини топинг.

Эчиш. Сирт тенгламасидан хусусий ҳосилалар оламиз:

$$p = z_x = y, \qquad q = z_y = x,$$

$$z_{xx} = 0, \qquad z_{xy} = 1, \qquad z_{yy} = 0.$$

Сирт ошкор тенгламаси билан берилгани учун (8) формулалардан фойдаланиб, иккинчи квадратик форманинг коеффицентларини топамиз:

$$D = \frac{0}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}} = 0; \qquad D_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}}; \qquad D_2 = \frac{0}{\sqrt{1 + y^2 + x^2}} = 0.$$

Топилган қийматларни (9) формулага қўямиз:

$$\Phi_2 = \frac{2dx\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

СИРТ УСТИДАГИ ЧИЗИҚНИНГ ЭГРИЛИГИ.

Таянч иборалар: Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

Сирт иккинчи квадратик форма тушунчасининг киритилиши, сирт устидаги чизиқларнинг эгрилигини аниқлашга имкон беради.

Бизга **Ф** регуляр сирт $\vec{r} = \vec{r}\,(\mathrm{u,v})$ вектор тенгламаси билан берилсин. Бу сиртда ётувчи γ чизиқни қарайлик. γ чизиққа c табиий параметрни киритамиз. У вақтда бу чизиқ нуқталарининг u ва v эгри чизиқли координаталари c табиий параметрнинг функциялари бўлади:

$$u = u(c)\,, \qquad v = v(c)\,.$$

Бу ифодаларни сиртнинг вектор тенгламасига қўйсак:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(\mathrm{u,v}) = \vec{r}\,(\mathrm{u}(c), v(c)) = \vec{r}\,(c)$$

ёки

$$\vec{r} = \vec{r}\,(c) \tag{1}$$

ҳосил бўлади.

Бу (1) тенглама **Ф** сирт устидаги γ чизиқнинг табиий параметрли вектор тенгламаси бўлади.

Чизиқлар назариясида маълумки

$$\ddot{\vec{r}} = k\vec{v}\,.$$

Бу ерда $\vec{v}$ вектор γ чизиқ бош нормалининг бирлик вектори, k эса чизиқнинг эгрилиги.

$\ddot{\vec{r}}$ вектор билан сирт бирлик нормал вектори $\vec{n}$ нинг скаляр кўпайтмасини қарайлик:

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = k\vec{v}\,\vec{n} = \mathrm{k}\cos\,\theta\,.$$

Демак,

$$\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{n} = k\cos\,\theta\,, \tag{2}$$

бу ерда $\theta = \angle(\vec{v}, \vec{n})$.

Иккинчи томондан:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$$

ва

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}_{uu} \frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv} \frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2}$$

бўлгани учун

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = \left(\vec{r}_{uu} \frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv} \frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v \frac{d^2v}{ds^2} \right) \cdot \vec{n} =$$

$$= \vec{r}_{uu}\vec{n} \frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\vec{n} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{n} \frac{dv^2}{ds^2} + \vec{r}_u\vec{n} \frac{d^2u}{ds^2} + \vec{r}_v\vec{n} \frac{d^2v}{ds^2}.$$

Бу ерда $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ ва $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ бўлиб, $\vec{r}_u\vec{n} = 0$ ва $\vec{r}_v\vec{n} = 0$ бўлади. Шунинг учун:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = \vec{r}_{uu}\vec{n} \frac{du^2}{ds^2} + 2\vec{r}_{uv}\vec{n} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{n} \frac{dv^2}{ds^2} = D\frac{du^2}{ds^2} + 2D_1 \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D_2 \frac{dv^2}{ds^2} =$$

$$= \frac{Ddu^2 + 2D_1 du dv + D_2 dv^2}{ds^2} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

Демак,

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \qquad (3).$$

(2) ва (3) тенгликларга асосан:

$$k\cos\theta = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \qquad (4).$$

Бу муносабат сиртлар назариясининг асосий формулаларидан бири бўлади. Унинг ўнг томонига иккала квадратик форманинг коэффицентлари киради. Тайин M нуқта берилганда бу коэффицентлар ўзгармас сонлар бўлади.

Демак, $k\cos\theta$ ифода фақатгина $\partial u : \partial v$ нисбатга, яъни γ чизиқнинг йўналишига боғликдир. Шу сабабли M нуқтада битта уринмага эга бўлган **Ф** сиртда ётувчи ҳамма чизиқлар учун $k\ cos\theta$ бир хил бўлади, яъни

$$k\cos\theta = const \qquad (5).$$

Энди **Ф** сиртдаги γ чизиқ сифатида нормал кесим деб аталувчи чизиқни қараймиз.

<u>Таъриф.</u> Сиртнинг берилган нуқтасидаги нормалидан ўтувчи текислик билан шу сиртни кесишдан ҳосил бўлган чизиққа **нормал кесим** деб аталади.

Нормал кесимнинг бош нормали кесувчи текисликда ётгани учун, бош нормалнинг бирлик вектори $\vec{v}$ ва сирт нормалининг бирлик

вектори $\vec{n}$ бир тўғри чизиқда ётиб, улар орасидаги бурчак ёки $0°$, ёки $180°$, яъни $\cos\theta = \pm 1$ бўлади.

Шундай қилиб, агар нормал кесимнинг эгрилигини k_o деб белгиласак, (5) га асосан

$$k\cos\theta = \pm k_o \qquad (6)$$

ҳосил бўлади. Бу (6) тенглик **Мене формуласи** деб аталади.

(4) ва (6) га асосан:

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \pm k_o \qquad (7)$$

бўлишлиги келиб чиқади.

Бу формула сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари билан сирт нормал кесимининг эгрилиги орасида боғланишни ифодалайди.

ЭГРИЛИК ИНДИКАТРИСАСИ.

Бизга **Ф** сирт $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ вектор тенгламаси билан берилиб, уни M нуқтасидаги нормалидан ўтувчи текислик билан кесиб, нормал кесим ҳосил қилинган бўлсин.

Агар нормал кесимни ҳосил қиладиган кесувчи текисликни M нуқтасидаги нормал атрофида айлантирсак, ҳосил бўлган нормал кесимларнинг k_o эгриликлари ўзгара боради. Биз шу ўзгаришнинг характерини ўрганамиз. Бунинг учун сиртнинг M нуқтасидаги уринма текислигида ҳар бир нормал кесимнинг уринмасига

$$MP = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \qquad (1)$$

кесмани мос қўямиз.

Таъриф. Сиртнинг берилган М нуқтасидаги уринма текисликдаги (1) тенгликни қаноатлантирувчи Р нуқталар тўпламига э**грилик индикатрисаси** деб аталади, баъзан уни **Дюпен индикатрисаси** деб ҳам айтилади.

Силлиқ сиртнинг ҳар бир нуқтасида аниқ бир эгрилик индикат-риса мавжуддир. Дюпен индикатрисаси қандай фигурадан иборат эканли-гини аниқлайлик.

Бунинг учун уринма текисликда шундай аффин координаталар системасини қурамизки, бунда M уриниш нуқтасини координаталар боши, $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар бўйлаб йўналган тўғри чизиқларни Ox ва Oy ўқлари, $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторларни базис векторлар деб оламиз.

Танланган координаталар системасига нисбатан Р нуқтанинг координаталарини x, y деб белгиласак

$$\overline{MP} = x\vec{r}_u + й\vec{r}_v \qquad (2)$$

тенглик ўринли бўлади.

Чизиқлар назариясидан маълумки нормал кесим уринмасининг бирлик вектори $\vec{\tau}$ орқали белгиланар эди. Шунинг учун

$$\overline{MP} = [\overline{MP}]\,\vec{\tau}$$

ёки (1) га асосан

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \vec{\tau}\,.$$

Бу ерда

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{r}} = \vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}$$

бўлгани учун

$$\overline{MP} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}}\left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}\right).$$

Агар (2) ни ҳисобга олсак:

$$x\vec{r}_u + \breve{u}\vec{r}_v = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}}\left(\vec{r}_u \frac{du}{ds} + \vec{r}_v \frac{dv}{ds}\right).$$

Бу ерда $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар коллинеар бўлмагани учун

$$x = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \frac{du}{ds}, \qquad \breve{u} = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cdot \frac{dv}{ds}$$

ёки $$\frac{du}{ds} = x\sqrt{|k_0|}, \qquad \frac{dv}{ds} = y\sqrt{|k_0|} \qquad (3).$$

Маълумки

$$\pm\, k_o = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}$$

эди, ёки

$$\pm\, k_o = \frac{Ddu^2 + 2D_1 dudv + D_2 dv^2}{ds^2} = D\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D_1 \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D_2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

(3) ни эътиборга олсак:

$$\pm\, k_o = Dx^2|k_0| + 2D_1 xy|k_0| + D_2 y^2|k_0|$$

ёки

$$Dx^2 + 2D_1 xy + D_2 y^2 = \pm 1 \qquad (4).$$

Ҳосил бўлган (4) формула **эгрилик индикатриса тенгламаси** дейилади. Бу тенглама x ва y га нисбатан иккинчи тартибли тенгламадир. Демак, индикатриса иккинчи тартибли чизиқ экан.

Бизга маълумки иккинчи тартибли чизиқ уч хил бўлади. Шу сабабли индикатрисалар ҳам уч хил бўлади.

I. Агар $DD_2 - D_1^2 > 0$ бўлса, индикатриса эллипсдан иборат бўлиб, сиртнинг M нуқтаси **эллиптик нуқта** деб аталади.

II. Агар $DD_2 - D_1^2 < 0$ бўлса, индикатриса иккита қўшма гиперболадан иборат бўлиб, M нуқтага **гиперболик нуқта** дейилади.

III. Агар $DD_2 - D_1^2 = 0$ бўлса, индикатриса иккита параллел тўғри чизиқдан иборат бўлиб, M нуқтага **параболик нуқта** деб аталади.

Мисол. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ сиртнинг $П(u = 1; v = 1)$ нуқтасидаги эгрилик индикатрисасининг тенгламасини тузинг.

Эчиш. Сиртнинг параметрик тенгламаларидан хусусий ҳоси-лалар оламиз:

$$X_u = 2u, \quad y_u = 2u, \quad z_u = v,$$
$$X_v = 2v, \quad y_v = -2v, \quad z_v = u,$$
$$X_{uu} = 2, \quad y_{uu} = 2, \quad z_{uu} = 0,$$
$$X_{uv} = 0, \quad y_{uv} = 0, \quad z_{uv} = 1,$$
$$X_{vv} = 2, \quad y_{vv} = -2, \quad z_{vv} = 0.$$

$Э, Ф, Г, Д, Д_1, Д_2$ коэффицентларнинг $П(u = 1; v = 1)$ нуқтадаги қийматларини топамиз.

$Э = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2$, $Э = 8 \cdot 1^2 + 1^2 = 9.$

$Ф = 4uv - 4uv + uv = uv$, $Ф = 1 \cdot 1 = 1.$

$Г = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2$, $Г = 8 \cdot 1^2 + 1^2 = 9.$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9 \cdot 9 - 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$D_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9 \cdot 9 - 1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}; \qquad D_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{9 \cdot 9 - 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Демак, эгрилик индикатриса тенгламаси

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}xy + \frac{2}{\sqrt{5}}y^2 = \pm 1$$

НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Оддий чизиқнинг таърифи.
2. Регуляр чизиқнинг таърифи.
3. Қандай чизиққа силлиқ чизиқ деб аталади ?

4. E_3 фазода чизиқнинг параметрик тенгламалари.
5. Эвклид фазосида чизиқнинг вектор тенгламаси.
6. Регуляр чизиқ ҳақидаги теорема.
7. E_3 фазода чизиқнинг ошкормас тенгламалари.
8. Текис чизиқнинг таърифи.
9. Текис чизиқнинг параметрик тенгламалари.
10. Текис чизиқнинг ошкормас тенгламаси.
11. Текис чизиқнинг ошкор тенгламаси.
12. Текис чизиқнинг вектор тенгламаси

3 – мавзу. Псевдоевклид фазо.

Режа:

1. Псевдоевклид фазо. Сферик фазо.
2. Риман геометрияси. Гиперболик фазо.
3. Ярим Евклид фазолар. Ярим гиперболик фазолар

Таянч иборалар: Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

A_n- аффин фазо берилган бўлсин. Бу фазода ортонормал бўлган n та вектор мавжуд: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$. Бизга A_n фазода иккита $\vec{X}(x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $\vec{Y}(y_1, y_2, ..., y_n)$ вектор берилган бўлсин.

Таъриф-1 $\vec{X}, \vec{Y} \in A_5$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси, қуйидагича:

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + ... + x_my_m - x_{m+1}y_{m+1} - x_{m+2}y_{m+2} - ... - x_ny_n$$

шаклида аниқланган аффин фазо n ўлчовли псевдоевклид фазо дейилади ва қуйидагича ёзилади: ${}^mR_n$.

Таъриф-2 Векторларнинг нормаси деб, шу векторларнинг ўзини-ўзига скаляр кўпайтмасидан олинган квадрат илдизга айтилади.

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{(\vec{X}, \vec{X})}$$

Табиийки, векторларни ўзини-ўзига скаляр кўпайтмаси манфий, мусбат ва нол бўлиши мумкин.

а) $(\vec{X}, \vec{X}) > 0 \quad |\vec{X}|$ - ҳақиқий сон б) $(\vec{X}, \vec{X}) = 0 \quad |\vec{X}| = 0,\ \vec{X} \neq 0$

Бундай векторлар изотроп векторлар деб аталади.

с) $(\vec{X}, \vec{X}) < 0 \quad |\vec{X}|$ - мавҳум сон.

Бу ҳолда векторларнинг нормаси мавҳум бўлиб, қиймати комплекс сонлар текислигининг юқори ярим текислиги олинади. Мисол сифатида 5 бўлган ҳолни қараймиз ва юқоридаги таърифларни келтириб ўтамиз.

A_5 - аффин фазо берилган бўлсин. Бу фазода ортонормал 5 та вектор мавжуд: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$. Бизга A_5 фазода иккита $\vec{X}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ва $\vec{Y}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ вектор берилган.

Таъриф-3 $\vec{X}, \vec{Y} \in A_5$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси, қуйидагича:

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 - x_5 y_5$$

шаклида аниқланган аффин фазо 5 ўлчовли псевдоевклид фазо дейилади ва қуйидагича ёзилади: ${}^2R_5$.

Таъриф-4 Векторларнинг нормаси деб, шу векторларнинг ўзини-ўзига скаляр кўпайтмасидан олинган квадрат илдизга айтилади.

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{(\vec{X}, \vec{X})}$$

Табиийки, векторларни ўзини-ўзига скаляр кўпайтмаси манфий, мусбат ва нол бўлиши мумкин.

а) $(\vec{X}, \vec{X}) > 0 \quad |\vec{X}|$ - ҳақиқий сон б) $(\vec{X}, \vec{X}) = 0 \quad |\vec{X}| = 0,\ \vec{X} \neq 0$

Бундай векторлар изотроп векторлар деб аталади.

с) $(\vec{X}, \vec{X}) < 0 \quad |\vec{X}|$ - мавҳум сон.

Бу ҳолда векторларнинг нормаси мавҳум бўлиб, қиймати комплекс сонлар текислигининг юқори ярим текислиги олинади.

Изоҳ-1 Псевдоевклид фазо физика масалаларида кўп ишлатилгани учун физика фанида ҳақиқий векторлар сўзи ўрнига фазовий вектор тушунчаси ишлатилади.

Псевдоевклид фазосида икки нуқта орасидаги масофа аниқлаймиз. A ва B нуқталарни олайлик.

$$A(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \quad B(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)$$

Таъриф-5. Псевдоевклид ${}^2R_5$ фазода иккита A ва B нуқталар орасидаги масофа деб $\vec{AB}$ векторнинг нормасига тенг катталикка айтилади.

$$d_{AB} = |\vec{AB}| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2-(y_4-x_4)^2-(y_5-x_5)^2}$$

икки нуқта орасидаги масофа.

Айтайлик бизга ${}^2R_5$ псевдоевклид фазо берилган бўлсин. Унда $U(x,y,z,y,z)\subset {}^2R_5$ қисм фазони қараймиз.

Бу қисм фазода $\vec{X}(x_1,x_2,x_3,x_2,x_3)$ ва $\vec{Y}(y_1,y_2,y_3,y_2,y_3)$ векторланинг скаляр кўпайтмаси

$$(\vec{X},\vec{Y})_1 = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_2y_2-x_3y_3 = x_1y_1$$

$$\text{Агар } (\vec{X},\vec{Y})_1 = 0 \text{ бўлса } (\vec{X},\vec{Y})_2 = x_2y_2+x_3y_3 \text{ тенг.}$$

Векторларнинг нормаси шу векторларнинг ўзини-ўзига скаляр кўпайтмасини илдиздан чиқарилганига тенг.

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{(\vec{X},\vec{X})}.$$

$A(x_1,x_2,x_3,x_3,x_4)$ ва $B(y_1,y_2,y_3,y_2,y_3)$ иккита нуқта орасидаги масофа қуйидагича ҳисобланади.

$$AB_1 = |\vec{AB}| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2-(y_2-x_2)^2-(y_3-x_3)^2} = |y_1-x_1|.$$

$$AB_1 = |\vec{AB}| = 0 \text{ бўлса, } AB_2 = |\vec{AB}| = \sqrt{(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2} \text{ тенг.}$$

Шунингдек A_5 фазода бешта $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5\}$ чизиқли боғлик бўлмаган векторларни базис векторлар сифатида олиб, ҳар қандай олтинчи векторни аффин координаталарини топиш мумкин.

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + x_4\vec{e}_4 + x_5\vec{e}_5$$

$U(x, y, z, y, z) \subset R_5$ қисм фазода $x_2 = x_4$, $x_3 = x_5$ тенглигидан

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{i} \\ \dfrac{\vec{e}_2 + \vec{e}_4}{2} = \vec{j} \\ \dfrac{\vec{e}_3 + \vec{e}_5}{2} = \vec{k} \end{cases} \qquad (3.5)$$

алмаштириш бажарсак бу $\{i, j, k\}$ вектор уч ўлчовли фазода базис векторларни ташкил қилади.

Ярим евклид фазосининг умумий тушунчалари.

Бирорта бўш бўлмаган V тўплам берилган бўлсин. Биз V тўпламнинг элементлари нимадан иборат эканлиги ҳақида маълумот бермаган ҳолда, унда қуйидаги иккита амал киритилган бўлишини талаб қиламиз.

Биринчи амал: бу тўпламга тегишли ҳар қандай иккита элементга берилган қоидага кўра бу тўпламнинг битта элементи мос қўйилган; Биз шартли равишда V тўпламнинг a, b элементларига мос қўйилган элементни $a + b$ кўринишда ёзамиз.

Иккинчи амал: берилган ҳақиқий сон ва V тўпламнинг берилган элементига V тўпламнинг битта элементи мос қўйилган. Биз шартли равишда V тўпламнинг a элементларига ва λ ҳақиқий сонга мос қўйилган V тўпламнинг элементларини λa кўринишда ёзамиз.

Таъриф-1.1 Берилган V тўпламнинг юқорида киритилган иккита амал учун

1) Ихтиёрий a, b, c элемент учун $a + (b + c) = (a + b) + c$ тенглик,

2) Ихтиёрий a, b элемент учун $a + b = b + a$ тенглик,

3) V тўпламга тегишли шундай 0 элемент мавжудки ҳар қандай a элемент учун $a + 0 = a$ тенглик,

4) Ҳар бир a элемент учун шундай $-a$ элемент мавжудки $a + (-a) = 0$ тенглик,

5) Ҳар бир l, m ҳақиқий сонлар учун ва ҳар бир a элемент учун $(l + m)a = l a + ma$ тенглик,

6) Ҳар қандай l, m ҳақиқий сонлар учун ва ҳар бир a элемент учун $(l m)a = l (ma)$ тенглик,

7) Ҳар қандай l ҳақиқий сон ва ихтиёрий a, b элементлар учун $l (a + b) = l a + l b$ тенглик,

8) Ҳар бир a элемент учун $1 \cdot a = a$ тенглик ўринли бўлса, V тўплам чизиқли фазо, унинг элементлари эса векторлар деб аталади.

Учинчи аксиомада мавжудлиги таъкидланган 0 элемент чизиқли фазонинг нол элементи ёки нол вектор дейилади.

Таъриф-1.2 Чизиқли фазонинг $a_1, a_2, ..., a_m$ элемент учун камида биттаси нолдан фаркли $l_1, l_2, ..., l_m$ ҳақиқий сонлар мавжуд бўлиб, $l_1 a_1 + l_2 a_2 + ... + l_m a_m = 0$ муносабат ўринли бўлса, $a_1, a_2, ..., a_m$ векторлар оиласи чизиқли боғланишли, акс ҳолда эса бу оила чизиқли эркли дейилади.

Биз чизикли n-ўлчовли L_n фазони қарайлик. Маълумки бу фазода n -та чизиқли эркли элемент мавжуд. Агар икки $x, y \in L_n$ бўлса, уларнинг чизиқли комбинасияси $\alpha x + \beta y \in L_n$ бўлади. Чизиқли L_n фазо элементларини нуқталар деб атаймиз. Чизиқли фазонинг $A, B \in L_n$ икки элементига битта $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ векторни мос қўямиз.

Бу $\vec{x}$ вектор учун қуйидаги аксиомалар бажарилиши талаб қилинади.

1^0 $\forall \vec{x}$ ва A нукта учун $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$ нукта мавжуд.

2^0 $\forall A, B, C$ нуқталар учун $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Таъриф-1.3 Келтирилган 1^0, 2^0 аксиомаларни қаноатлантирувчи L_n чизиқли фазо A_n - n- ўлчовли вектор аффин фазо, аффин фазо деб аталади.

Мисол-1.1 1) Тўғри чизиқ – бир ўлчовли чизиқли фазо – бир ўлчовли аффин вектор фазога мисол бўлади.

2)Текислик икки ўлчовли аффин вектор фазога мисол бўлади.

Текисликда иккита ихтиёрий e_1 ва e_2 чизиқли эркли векторларни олайлик.

$O(0,0)$ чизиқли эркли векторларни қарайлик. У ҳолда ҳар қандай учинчи векторни $\vec{a} = a_1e_1 + b_1e_2$ шаклида ёзиш мумкин. Бунда (a_1, b_1) $\vec{a}$ векторнинг $O(e_1, e_2)$ координат системасидаги аффин координаталари деб аталади.

Шунинг учун A_n да n та $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ чизиқли боғлиқ бўлмаган векторларни базис векторлар сифатида олиб, ҳар қандай $(n+1)$ векторнинг аффин координаталарини аниқлаш мумкин.

$$\vec{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n \tag{1.1}$$

Таъриф-1.4 A_n-фазода векторларнинг ўзаро чизиқли муносабатини сақловчи ва янги вектор ҳосил қилмайдиган акслантириш аффин акслантириш деб аталади.

Демак, $A, B, \ldots, Q, H$ нуқталар A_n даги бирор фигуранинг нуқталари бўлиб ва $p, q, \ldots, s$ сонлар учун $p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{BC} + \ldots + s\overrightarrow{GH} = 0$ тенглик ўринли бўлса, бу нуқталарнинг асоси $A', B', \ldots, Q', H$ нуқталар учун

$$p\overrightarrow{A'B'} + q\overrightarrow{B'C'} + \ldots + s\overrightarrow{G'H'} = 0 \tag{1.2}$$

тенглик бажарилиши зарур.

Шунингдек, янги вектор ҳосил бўлмаслиги учун бу шартни акси бажарилиши зарур.

Агар (1.2) тенгликни матрисалар ёрдамида ифодаласак янги X' ва эски X векторлар координаталари орасидаги муносабатни $X' = AX + B$ шаклида ёзиш мумкин. Бунда $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - квадрат матриса $B = \begin{matrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{matrix}$ параллел кўчирувчи вектор.

Биз n ўлчовли A_n аффин фазосини қарайлик. Бу фазода $(Ox_1x_2...x_n)$ координат системаси берилган бўлсин. Бунда ҳар қандай $\overset{1}{X}$ вектор ўзининг координаталарига эга бўлади. Берилган $X\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ва $Y\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ векторлар учун уларнинг скаляр кўпайтмаси деб аталган сон катталик киритамиз.

Маълумки (1.3) тенгликни ўнг томонини икки ўзгарувчилик квадратик формадан иборат. Бу квадратик форма аффин алмаштиришларида яна квадратик формага ўтади.

Таъриф-1.5 Иккита A ва B нуқталар орасидаги масофа деб, $\overrightarrow{AB}$ нинг нормасига тенг катталикка айтилади.

Агар $\bar{X} = \bar{Y}$ бўлса, $\bar{X}^2 = \left(\bar{X} \cdot \bar{X}\right) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ векторнинг ўзни - ўзига скаляр кўпайтмаси ёки векторнинг квадрати деб аталади.

Таъриф-1.6 Векторнинг ўзини - ўзига скаляр кўпайтмасидан олинган квадрат илдиз векторнинг модули ёки нормаси деб аталади.

Вектор модули $\left|\bar{X}\right| = \sqrt{\left(\bar{X} \cdot \bar{X}\right)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ тенглик билан ҳисобланади.

Энди AB масофани ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз.

Маълумки $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ бундан $\overline{AB} = \{y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n\}$ экани келиб чиқади. Демак, $AB = \sqrt{\left(\overline{AB} \cdot \overline{AB}\right)} = \sqrt{\left(y_1 - x_1\right)^2 + ... + \left(y_n - x_n\right)^2}$. Бу эса бизга таниш икки нуқта орасидаги масофа формуласидир.

Агар (1.3) тенгламанинг ўнг томони мусбат аниқланган квадратик форма бўлмаса, Евклид геометриясидан фарқли геометрия ҳосил бўлади.

Маълумки мусбат аниқланган квадратик форма кононик кўринишга келтирилганда коеффисентлари мусбат ёки манфий бўлган тўла квадратик шаклга келади. Бунда манфий коеффицентлар сони квадратик форманинг индекси деб аталади ва у инвариант катталик бўлади.

НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Элементар чизиқнинг таърифи. Оддий чизиқнинг таърифи.
2. Регуляр чизиқнинг таърифи.
3. Қандай чизиққа силлиқ чизиқ деб аталади ?
4. E_3 фазода чизиқнинг параметрик тенгламалари.
5. Эвклид фазосида чизиқнинг вектор тенгламаси.
6. Регуляр чизиқ ҳақидаги теорема.

7. E_3 фазода чизиқнинг ошкормас тенгламалари.
8. Текис чизиқнинг таърифи.
9. Текис чизиқнинг параметрик тенгламалари.
10. Текис чизиқнинг ошкормас тенгламаси.
11. Текис чизиқнинг ошкор тенгламаси.
12. Текис чизиқнинг вектор тенгламаси.

4 – мавзу: Иккинчи тартибли сиртлар.

Режа:

1. Иккинчи тартибли сиртлар.
2. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари.
3. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари.
4. Кўпхиллик геометрияси.

Таянч иборалар:Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

Уч ўлчовли Oxyz Декарт системасида ҳар қандай сирт бирор Ф(x,y,z) = 0 тенглама билан ёзилади, бу ерда x,y,z– сирт ихтиёрий нуқтасининг координатаси. Агар Ф (x,y,z) ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали кўпҳад бўлса, у ҳолда Ф(x,y,z) = 0 тенглама иккинчи тартибли тенглама дейилади, шу тенглама ёрдамида тасвирланадиган сирт эса иккинчи тартибли сирт дейилади.

Агар сиртнинг координаталар системасига нисбатан жойлашиши алоҳида хусусиятга эга бўлса (масалан, баъзи координаталар текисликларига нисбатан симметрик жойлашган бўлса), у ҳолда унинг тенгламаси жуда содда кўринишга эга бўлади ва у каноник тенглама дейилади.

1. Иккинчи тартибли сиртлар.

2. Сфера. Эллипсоид

3. Бир ва икки паллали гиперболоидлар.

Сфера.

Таянч иборалар:Сфера, сферанинг тенгламалари, айланма сирт, айланма сирт-нинг тенгламаси, тор, торнинг тенгламаси, псевдосфера, псевдосферанинг тенгламаси. Сферанинг параметрик тенгламаларини келтириб чиқаришни ўрганади. Сферанинг турли тенгламаларини ўрганади.

Таъриф. Эвклид фазосида берилган нуқтадан бир хил масофада жойлашган нуқталар тўпламига сфера деб аталади.

Берилган нуқтани сферанинг маркази деб аталади.

Сфера марказидан сферанинг исталган нуқтасигача бўлган масофани сферанинг радиуси деб аталади.

Сферанинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун сфера сиртида ихтиёрий M нукта олиб, унинг u,v эгри чизиқли координаталарини қуйидагича киритамиз. Сферанинг M нуқтасидан PMА катта айлана ўтказамиз ва HOM бурчакни u орқали белгилаймиз, бу ерда $HM \perp O$А. У OM радиус вектор билан $XOУ$ текислик орасидаги бурчак бўлади. M нуқтадан ўтувчи PMА меридиан текислик билан $XOЗ$ текислик орасидаги бурчакни v орқали белгилаймиз (27-чизма).

Бу u ва v лар қуйида-
гича ўзгаради:

$$-\pi \leq в \leq \pi \qquad (1).$$

Чизмадан:

$$z = \pm HM = \mathrm{R}\, sinu ,$$

$$x = \pm OД = \pm OH\, cosv ,$$

$$\mathrm{y} = \pm ДH = \pm OH\ \ sinv ,$$

бу ерда P сфера радиуси.

Чизмада $\pm OH = P\ cosu$

эканлигини ҳисобга олсак

$x = Rcosucosv$

$y = Rcosusinv$

бўлади. 27-чизма.

Демак, маркази координаталар бошида жойлашган ва радиуси R га тенг сферанинг параметрик тенгламалари

$x = Rcosucosv,\quad y = Rcosusinv,\quad z = Rsinu$ (2)

кўринишда бўлар экан.

Вектор тенгламаси эса

$$\vec{r} = \{ R\cos u \cdot \cos v;R\cos u \cdot \sin v; R\sin u \},$$

ёки

$$\vec{r} = R\cos u \cdot \cos v \cdot \vec{i} + R\cos u \cdot \sin v \cdot \vec{j} + R\sin u \cdot \vec{k}.$$

Агар (2) тенгламаларни квадратга кўтариб қўшсак:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (3).$$

(3) формула сферанинг ошкормас тенгламаси бўлади.

Таъриф: Саноқли базали W^n Хаусдорф топологик фазонинг ҳар бир нуқтаси R^n даги очиқ тўпламга гомеоморф атрофга эга бўлса, у ҳолда уни n - ўлчамли топологик кўпхиллик дейилади.

n - сонини кўпхилликнинг ўлчами дейилади, ҳамда $\dim W^n$ белгиланади. Топологик кўпхиллик сўзи ўрнига одатда кўпхиллик сўзини ишлатамиз. Таърифга кўра ҳар қандай $a \in W^n$ нуқта учун шу нуқта атрофи U ва шу атрофни бирорта $G \subset R^n$ очиқ тўпламга акслантирувчи φ гомеоморфизмдан иборат (U, φ) жуфтлик мавжуд.

R^n даги $b = \varphi(a) \in G$ нуқта $V \subset G$ шарсимон атрофга эга бўлиб, $\varphi^{-1} : G \to U$ акслантиришнинг гомеоморфизмлигидан $\varphi^{-1}/_v : V \to \varphi^{-1}(V)$ акслантириш ҳам гомеоморфизмдир.

У ҳолда а нуқта W^n да $V \subset R^n$ очиқ шарга гомеоморф $U_1 = \varphi^{-1}(V)$ атрофга эга бўлади. φ гомеоморфизм U_1 қадар торайиб акслантиришдир.

Шундай қилиб, топологик кўпхиллик таърифидаги R^n га тегишли очиқ тўпламга гомеоморф атрофнинг мавжуд бўлиши ҳақидаги талаб R^n даги очиқ шарга гомеоморф атрофнинг мавжудлиги ёки R^n нинг ўзига ёки ундаги очиқ кубга гомеоморф атрофнинг мавжудлиги талаби билан тенг кучлидир. Бунда R^n даги очиқ шарнинг R^n билан ёки R^n ундаги очиқ куб билан гомеоморфлигига эътибор қилинади.

Бирорта кўпхиллик W мавжуд бўлиб, унинг баъзи бир нуқталари бир вақтда ва R^n *ва* $R^m\,(n \neq m)$ га гомеоморф атрофга эга бўлса, кўпхиллик ўлчамининг таърифида корректлик бажарилмайди. Л. Брауер теоремаси деб аталган қўйидаги теоремада юқоридаги муаммо ечилади.

37 – теорема. Агар R^n ва R^m эвклид фазолари гомеоморф бўлса, у ҳолда $n = m$

Теореманинг исботи анча мураккаб, биз буни келтирмаймиз. Теореманинг исботини А. Д. Александровнинг «Қабариқ кўпёқлар» М.Л. 1950 китобида учратиш мумкин.

Бу теоремадан топологик кўпхилликнинг ўлчами унинг топологик инварианти эканлиги келиб чиқади.

38 – теорема Бир ўлчамли компакт (ёпик) боғланишли ҳар кандай топологик кўпхиллик S^1 айланага гомеоморф. Бир ўлчамли ҳар кандай боғланишли нокомпакт (очиқ) топологик кўпхиллик R^1 га гомеоморф.

Теореманинг исботи R^1 да боғланишли очиқ тўплам интервал, очиқ нур ёки R^1 нинг ўзи эканлигига асосланади. Теореманинг исботи В. А. Рохлин ва Д. Б. Фукснинг «Началний курс топологии» М .1979 китобида келтирилган.

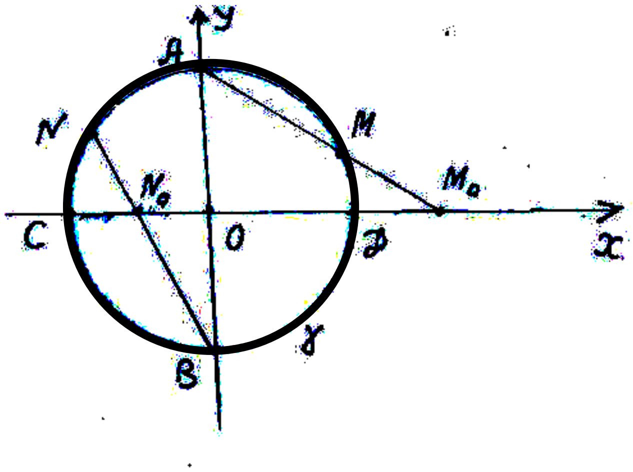
Икки ўлчамли компакт кўпхилликни классификациялаш учун қўшимча янги тушунчалар киритиш лозим бўлади.

Энди кўпхилликка доир яна бир мисол келтирайлик.

$\gamma(o,r)$ айлана Эвклид текислигига тегишли. γ айлана OXY координаталар системаси ўқларини кесиб ўтади. OY ўқ билан А ва Б нуқталарда кесишсин. γ айланадан А нуқтани ўйиб ташлаб қолган қисмини $U_1 = \gamma \setminus \{A\}$

белгилаймиз. Шунингдек $U_2 = \gamma \setminus \{B\}$ айлананинг Б нуқтасисиз қисми бўлсин. $\varphi : U_1 \to (OX), \psi : U_2 \to (OX)$ акслантиришни қарайлик.

$$\varphi(M) = M_0 \in (OX), \psi(N) = N_0 \in (OX).$$



6-шакл.

φ акслантириш γ - ни (OX) ўққа A марказдан проексиялаш, ψ эса γ ни (OX) ўққа Б марказдан проексиялашдан иборат. γ ва (OX) ўқ нуқталари орасида марказий проексиялаш орқали ўрнатилган мослик гомеоморфизмдир.

Айланани A нукта, яъни нол ўлчамли кўпхиллик ва U_1 бир ўлчамли кўпхиллик билан ёки Б нуқта ва U_2- бир ўлчамли кўпхиллик билан ёпиш мумкин. $A, B, U_1, U_2 -$ лар катаклардан иборат.

Кўрамизки, γ айлана бир ўлчамли компакт кўпхилликдир.

Сфера, эллипсоид, гиперболоидлар, параболоидлар, 2 – тартибли цилиндрлар 2 ўлчамли кўпхилликлардир. Сфера ва элипсоидларнинг чегараланганлигидан уларнинг компактлиги, қолганлари эса ноқомпакт кўпхилликлар бўлиши ўз-ўзидан аён

Четли кўпхиллик

R^n да P гипертекислик билан чегараланган бирор R^n_+ ёпиқ ярим фазони фиксирлайлик.

Таъриф: n - ўлчамли четли кўпхиллик деб, ҳар бир нуқтаси R^n га ёки R^n_+ га гомеоморф атрофга эга бўлган саноқли базали топологик Хаусдорф фазосига айтилади ва W^n белгиланади.

W^n четли кўпхилликнинг R^n га гомеоморф атрофга эга бўлган нуқталарини ички нуқталар, R_+^n га гомеоморф атрофга эга бўлган нуқталарини эса четки нуқталар дейилади.

Бироpта $a \in W^n$ нуқта бир вақтда ички ва четки нуқта бўлиши мумкинми ? деган савол туғилади. Бу ҳол ўринли эмас, чунки ички ва четки нуқталар коррект таърифга эга.

W^n четли кўпхилликнинг барча ички нуқталар тўпламини инт W^n билан белгилаймиз.

инт W^n W^n да ўлчамли очиқ топологик кўпхилликдир. W^n нинг четки нуқталар тўплами ёпиқ бўлиб, ушбу тўпламни ∂W^n билан белгиланади.

∂W^n инт W^n нинг чегараси бўлиб, W^n га тегишли бўлиши ёки тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин. Яъни n- ўлчамли кўпхилликнинг чети бўш тўпламдан иборат бўлиши ҳам мумкин.

39 – теорема. Агар n - ўлчамли четли кўпхилликнинг ∂W^n чети бўш бўлмаса, у ҳолда й n ўлчамли кўпхилликдан иборатдир.

W^n компакт бўлса, у ҳолда унинг чети компакт (ёпиқ) тўпламдир.

Теореманинг исботи В. А. Рохлин китобида келтирилган.

Мисоллар келтирайлик:

41 – мисол $R_+^n (n \geq 1)$ ёпиқ ярим фазо четли кўпхилликдир. Кўпхилликнинг чети

$$\partial R_+^n = R^{n-1}$$

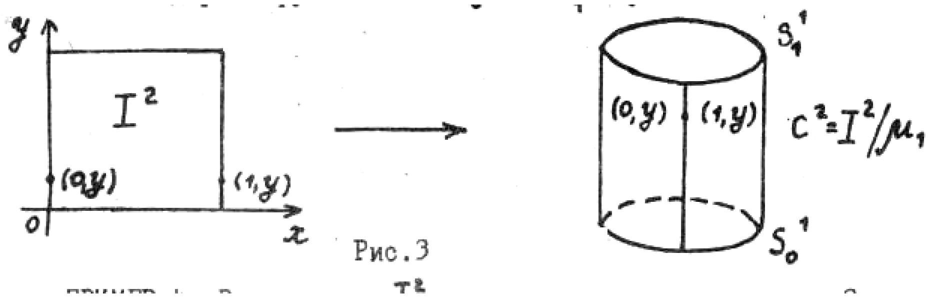
$n=1$ да R_+^1 - нур, ∂R_+^1 эса нуқтадан иборат. $n=2$ да R_+^2- яримтекислик, ∂R_+^2 эса тўғри чизиқдир.

42 – мисол R^n да $(n \geq 1) D^n$ - ёпиқ шар четли кўпхилликдир. Кўпхилликнинг ∂D^n чети S^{n-1} сферадан иборат. $n=1$ да D^1 - кесма, C^0 - кесманинг четлари бўлган иккита нуқта $n=2$ да D^2- доира, $\partial D^2 = S^1$ доиранинг чегараси бўлган айланадир.

43 – мисол P^2 текисликда $I^2 = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ квадратни қарайлик.

I^2 да эквивалентлик муносабати μ_1 ни шундай киритайликки, $(0, y)$ ва $(1, y)$ нуқталар эквивалент ҳисоблансин.

$C^2 = I^2 / \mu_1$ фактор тўплам икки ўлчамли четли кўпхиллик бўлиб, халқага гомеоморфдир. Унинг чети ∂C^2 иккита S_0^1 ва S_1^1 айланалардан иборат.



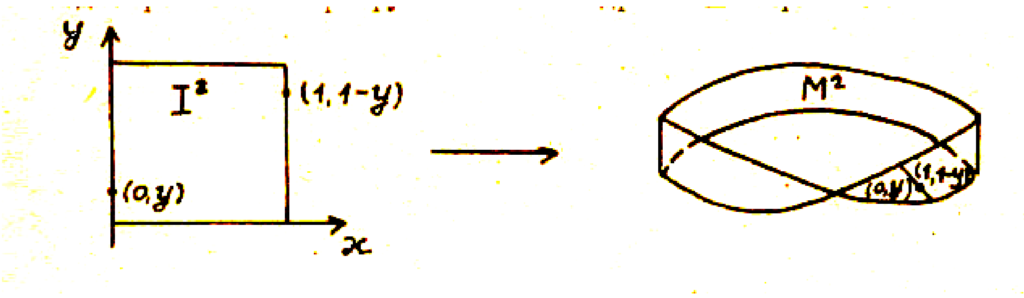
7-шакл.

44 – мисол 43 – мисолдаги I^2 квадратда эквивалентлик муносабати μ_2 ни қўйидагича киритайлик.

$(0, y)$ ва $(1, 1-y)$ эквивалент нуқталар бўлсин. $\mu^2 = I^2 / \mu_2 \to M^2 = I^2 / \mu_2$

фактор фазо « Мёбиус япроғи» деб номланади.

Олдинги мисолда халқа I^2(квадрат)нинг қарама-қарши иккита ён томонларини “бурмай” тўғридан – тўғри «елимлаб» ёпиштириш орқали ҳосил қилинган бўлса, «Мёбиус япроғи» I^2нинг қарама – қарши ён томонларини 180 градусга айлантириб ёпиштириш билан ҳосил қилинади.



8-шакл.

«Мёбиус япроғи» M^2 нинг четли кўпхиллик бўлиб, унинг чети ∂M^2 *aylana* S^1 га гомеоморф. Бундан μ^2 халқага гомеоморф эмаслиги кўринади. Халқанинг чети иккита айланадан иборатдир.

45 – мисол Агар T^2 тордан очиқ доирага гомеоморф тўплам четлатилса, яъни «қирқилса» торнинг қолган қисми N^2 чекли ўлчамли четли кўпхиллик бўлиб, унинг чети S^1 айланадан иборат.

N^2 – ни «даста» ёки “катак” дейилади.

9-шакл.

Кўпхилликнинг эйлер характеристикаси.

Биз 14-§ да топологик фазони катакларга ажратиш шартлари билан танишдик. Шу асосда ҳар қандай н-ўлчовли четли кўпхилликни ҳам катакларга ажратиш мумкинлигини исботлашимиз мумкин.

Агар н – ўлчовли четли $w^н$ кўпхиллик компакт бўлса, унинг катакларга ихтиёрий ажратмаси $E=\{e_И^К\}$учун бир хил ўлчовли катаклар сони ушбу бўлинишда чеклидир. Е бўлинишда $\alpha_и$ орқали и ўлчовли катаклар сонини белгилайлик, бунда и=0,1,…,п.

$$X(w^n)=\sum_{i-0}^{n} (-1)^i \alpha_i (2\cdot 1)$$

сонни W^n четли компакт кўпхилликнинг Эйлер характеристикаси дейилади $X\left(w^n\right)$ соннинг катакларга ажратиш усулларига нисбатан боғлиқмаслиги (инвариантлиги)ни, яъни таърифнинг корректлигини исбот қилишимиз мумкин. Икки ўлчовли сфера C^2 учун инвариантлик хоссасининг исботи қўйида келтирилади.

Баъзи бир кўпхилликлар учун Эйлер характеристикасини аниқлайлик.

46-мисол. E^{m+1} фазодаги шарнинг чегараси сфера битта нол ўлчовли катак-x_0 нуқта ва $C^м \setminus \{x_о\}$ дан иборат битта м-ўлчовли катакларга ажралади. Шунинг учун

$$X(C^м)=1+1(-1)^м=\begin{cases} \dfrac{2, \ m-juft \ \ bo'lsa}{0, \ m-toq \ \ bo'lsa} \end{cases} \qquad (2.2)$$

$m=0$ да S^0 -иккита нуқтдан иборат, шунинг учун $X(S^m)=2,$ м-жуфт.

47-мисол. Икки ўлчовли T^2 торни, унинг параллели ва меридиани битта нол ўлчовли катакка, яъни параллел ва меридианнинг кесишиш нуқтасига, иккита бир ўлчовли ва битта икки ўлчовли катакларга ажратади. Шунинг учун $X\left(T^2\right)=0$

48-мисол. н-ўлчовли проектив фазо P^n нинг модели R^{n+1} даги сфера S^n да диаметрал қарама-қарши нуқталарни айнийлаштириб (елимлаб) ҳосил қилинади. Кўрамизки, P^n ни эквивалентлик синфига иккита диаметрал қарама қарши нуқталардан ташкил топган эквивалентлик муносабати бўйича S^n факторфаза каби қараш мумкин: P^n да P^{n-1} қисм фазони оламиз, P^{n-1} да P^{n-2} қисм фазони оламиз ва ҳ.к. P^0 -нол ўлчовли қисм фазо нуқтагача ажратиш давом этади.

Катаклар қўйидагича аниқланади:

$e^0=p^0, e^1=p^1\setminus p^0, \dots e^n=p^n\setminus p^{n-1}$

$$X(P^н)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^н=\begin{cases}1_1 \ agar \ n \ juft \ bo'lsa \\ 0_1 \ agar \ n \ toq \ bo'lsa\end{cases} \qquad (2.3)$$

49-мисол. $D^n n>1$ ёпиқ шарнинг катакларга ажратиш $S^{n-1}=\partial D^n$ нинг катакларга ажратиб, сўнгра S^{n-1} га битта n-ўлчовли катакни ёпиштиришдан юзага келиши мумкин. Шунинг учун

$X(D^n)=1+(-1)^{n-1}+(-1)^n=1$ (2.4)

$n=1$ учун $X(D^1)=1$, чунки D^1 кесма битта бир ўлчовли катак ва иккита нол ўлчовли катаклар – кесма учларидан ташкил топади.

50-мисол. «Мёбиус япроғи» M^2 ни катакларга ажратиш қўйидагича ўтказилади:

I^2 квадратда $(0,0)$ учдан $(1,1)$ учга d диагонал ўтказамиз. Ушбу учларни «елимлаб ёпиштириб» айнийлаштирилади. Бундан M^2 ажратилган катаклар битта нол ўлчовли катак e^0 дан I^2 квадратнинг ички нуқтлар тўпламидан иборат битта икки ўлчовли катакдан ва d -диагонал ҳамда $S^1=\partial M^2$ чегарадан иборат иккита бир ўлчовли катаклардан ташкил топади.

Шунинг учун $X(M^2)=1-2+1=0$ (2.5)

Ҳар қандай тоқ ўлчовли компакт четсиз кўпхилликнинг Эйлер характеристикаси нолга тенглигини таъкидлаймиз. Биз қўйида асосан икки ўлчовли кўпхилликни қараймиз

40-теорема. $W_1,\ldots W_2,\ldots,W_s$ компакт кўпхиллик ёки четли кўпхиллик бўлиб, баъзи бир компакт чегаралардан $\partial W_1,\ldots\partial W_2,\ldots,\partial W_s$ жуфтлари орасидаги $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_r$ гомеоморфизмлар берилган бўлсин. Ҳар бир компонента фақат битта жуфтга тушади.

$W_1,\ldots,W_s$ кўпхилликлардан $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_r$ акспантиришлар бўйича елимлаб-ёпиштириб четли W кўпхиллик олинса, у ҳолда

$$X(W)=X(W_1)+X(W_2)+\ldots.X(W_{s)}) \qquad (2.6)$$

Исбот. Биринчидан, кўпхилликни катакларга ажратиб ихтиёрий бир ўлчамли катакнинг ичига нол ўлчамли катакни қўшиб, биз яна катакларга ажратган бўламиз.

Бундан (2.1) йиғинди ўзгармайди, чунки ҳар бир бундай ажратмада бир ўлчовли катаклар сони ҳам биттага ошади.

Шунинг учун $W_1,\ldots W_2,\ldots,W_s$ четли кўпхилликларнинг шундай $E_{1,}E_2,\ldots,E_s$ катакларга бўлишларга эга бўлиндики, $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_r$ гомеоморфизмларда нол ўлчовли ҳар бир катак нол ўлчовли катак билан бир ўлчовли катак бир ўлчовли билан «ёпиштирилади». Эи катакка ажратишлар W да E катакка ажратишни аниқлайди.

$\alpha_i^j(\alpha_i)$ E_i даги (i=0,1,2) ўлчовли катаклар сони бўлсин. Ёпиқ кўпбурчакда томонлар сони учлар сонига тенглигидан бир ўлчовли циклларни ёпиштирсак, елимлашдан сўнг нол ўлчовли катаклар сони ва бир ўлчовли катаклар сони бир хилда камаяди.

Шунинг учун $\alpha_2^1+\ldots+\alpha_2^c-\alpha_0=\alpha_1^1+\ldots+\alpha_1^c-\alpha_1$ (2.7)

Бундан ташқари $\alpha_2^1+\ldots+\alpha_2^c=\alpha_2$ (2.8)

(2.8) ва (2.7) дан (2.6) келиб чиқади.

1-натижа. C^2 сферадан Γ_1, Γ_2, … Γ_p р-кесишмайдиган очиқ доира (Р «туйнукли» сфералар) га гемеоморф соҳаларни четлатишдан ҳосил қилинган C_p^2 четли кўпхилликнинг Эйлер характеристикаси 2-р га тенг.

2-натижа. «даста» (16-§. 45-мисол)нинг Эйлер характеристикаси -1га тенг.

Таъриф: Кесманинг гомеоморф образига содда ёй деб айлананинг гомеоморф образига эса содда ёпиқ чизиқ ёки бир ўлчовли цикл дейилади.

C^2 сфера учун (2.1) йиғиндининг катакларга ажратиш усулига боғлиқ бўлмаслигининг исботи К. Жорданнинг қўйидаги теоремасига асосланади.

41-теорема. Ҳар қайси цикл C^2 сферани иккита соҳаларга ажратади ва улар учун умумий чегара бўлади.

Теореманинг исботи П.А. Александровнинг «Введение в гомологическую теорию размерности» китобида 172 бетида келтирилган.

Таъриф: C^2 даги Σ тўр деб чекли сондаги A_1, A_2, … $A_м$ нуқталар ва учлари ушбу нуктларда бўлиб, чекли сондаги ички нуқталарда ўзаро кесишмайдиган $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ содда ёйларнинг ихтиёрий танловига айтилади, яъни $\sum$ тўр S^2 даги бир ўлчовли катаксимон қисм фазодир.

A_1, A_2, … $A_н$ нуқталарга тўрнинг учлари, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ ёйларга тўрнинг қирралари дейилади.

$\sum$ тўрнинг соҳалари деб $S^2 \setminus (\underset{i}{U} A_i) \cup (\underset{i}{U} \gamma_i)$ тўплам компонентларига айтилади.

сфера учун қўйидаги теорема ўринли.

42-теорема. $\sum$ S^2 сферадаги тўр бўлиб, α_0 - унинг учлари сони, α_1 - қирралари сони, α_2 - соҳалари сони ва l эса унинг боғланишли компонентлари сони бўлса, у ҳолда $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - l = 1$ (2.9)

<u>**Исбот**</u>. Тўр бўш тўплам бўлган ҳолда (2.9) формуланингш тўғрилигига шубҳа йўқ, чунки $\alpha_0 = \alpha_1 = l$ бўлиб, $\alpha_2 = 1$

Энди ихтиёрий $\sum$ тўрдан бўш тўр Σ_0 га учлари ва қирраларини четлаштириш орқали ўтамиз ва ҳар гал бундай четлаштиришларда $\lambda(\Sigma) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = l$ ифоданинг ўзгармаслигини текшириб борамиз.

Охир оқибатда бўш тўр учун $\lambda(\sum_0)=1$ келиб чиқади, у ҳолда бошланғич Σ тўр учун $\lambda(\sum)=1$

Теореманинг исботи шу усул билан ўтказилади. Бошланғч тўрдан бўш тўрга қўйидаги босқичлар орқали ўтишимиз мумкин.

Σ тўрдан Σ^1 тўрга яккаланган нуқталарни четлатиш орқали ўтилади. У ҳолда α_0 ва l сонларнинг ҳар бири бир хилда камаяди, бунда α_1 ва α_2 ўзгармайди. Шунинг учун $\lambda(\sum^1)=\lambda(\sum)$

Барча яккаланган нуқталарни чиқариб ва Σ тўр биттадан γ_j қирра ўтувчи A_i эркин учга эга бўлсин деб фараз қилиб шу $A_и$ учни ва γ_j қиррани четлаштирамиз. γ_j нинг иккинчи учи ўзгаришсиз қолади (10-шакл). Биз Σ^1 тўрга эга бўламиз. Ушбу тўр учун α_0 ва α_1 лар бир бирликданга камаяди. α_2 ва l эса ўзгармайди. Кўрамизки $\lambda(\sum^1)=\lambda(\sum)$.

10-шакл.

11-шакл.

1 ва 2 босқичларни кетма-кет такрорлаб шундай Σ тўр ҳосил қиламизки унда яккаланган учлар ва эркин охирлар бўлмайди. Бу тўр бўш эмас. Унинг қирраларидан камида битта цикл тузиш мумкин. (11-шакл). 41-теоремага кўра цикл таркибидаги ҳар бир γ_j қирра Σ да турли 2 та соҳаларнинг чегарасида ётади. Шунинг учун γ_j ни четлаштириб, учларини ўзгаришсиз қолдириб Σ тўрдан Σ^1 тўрга ўтамиз. Σ^1 да α_1 ва α_2 лар биттаданга камаяди, α_0 ва Л- ўзгаришсиз қолади. Янада $\lambda(\sum^1)=\lambda(\sum)$ тенглик келиб чиқди. 1,2,3 босқичларни бажариб Σ тўрдан бўш тўрга ўтиш мумкин. бунда $\lambda(\sum)$ ўзгармайди. Теореманинг исботи якунланди. C^2 сферанинг катакларга ажралишини таъминловчи Σ тўрнинг ҳар бир соҳаси очиқ доирага гомеоморф бўлганидан, бундай тўр учун $l=1$, чунки ушбу тўр фақат битта компонентга эга. Акс ҳолда тўрнинг соҳалари орасида камида иккита компонентани ўз

ичига олувчи чегарага эга бўлиб, бу компоненталар тўрининг турли компоненталарига тегишли бўлиши мумкин. Бунинг иложи йўқ, чунки ҳар бир соҳа доирага гомеосорф бўлиб, унинг чегараси битта компонентадан иборатдир. Шунинг учун 24-теоремадан сферанинг катаклар сони ҳар қандай бўлнишга нисбатан бир хилда.

α_0 - α_0+α_0=2 (2.10)

келиб чиқади. Шу билан C^2 сферанинг Эйлер характеристикаси коррект таърифланди.

C^2 сферага гомеоморф ҳар қандай P ёпиқ кўпёқ уни катакларига ажратиш усулга боғлиқ бўлмаган ҳолда (2.10) формула билан характерланади. Бу формула P кўпёқ учун Эйлер теоремасининг аналитик ифодаси бўлиб, бунда α_0 - учлар сони, α_1 - қирралар сони, α_2- ёқлар сони.

Йўналмали ва йўналмасиз кўпхилликлар.

W икки ўлчовли четли кўпхиллик бўлиб, T унинг бирорта катакларига ажратмаси бўлсин. Агар T да ҳар бир $t_i \in T$ икки ўлчовли тўрнинг чегараси учта турлича бир ўлчовли $\tau_1^и$, $\tau_2^и$, $\tau_3^и$ катакларидан ташкил топса, ҳамда ҳар бир 1 ўлчовли катак $\gamma \in T$ нинг охирлари T бўлинишда иккита нол ўлчовли катакларда ётса, у холда T ажратмани триангуляция дейилади.

T триангуляцияда нол ўлчовли катакларни унинг қирралари, чегарасини қўшган ҳолда икки ўлчовли катакларни ундаги топологик учбурчаклар деб номланади.

Иккинчидан юқори ўлчовлар учун триангулясиянинг ўхшатмаси симплициал бўлинишлардир. Бундай катакли ажратмалар топологик симплекслардан тузилган бўлиб, қўшни симплекслар бир-бир билан ўлчовли кичик ёқалар бўйича туташади. Икки ва уч ўлчовли кўпхилликларни симплициал ажратишлар мумкинлиги исботланган.

Чегарасининг охири А ва Б нуқталарда бўлган w четли кўпхилликда γ T триангуляциянинг қирраси бўлсин. γ қирранинг йўналмаси деб унинг учлари жуфтлигидаги тартибга айтилади. γ учун (А,Б) ва (Б,А) дан иборат иккита йўналма мавжуд. Уларни қарама қарши йўналма деб номаланади.

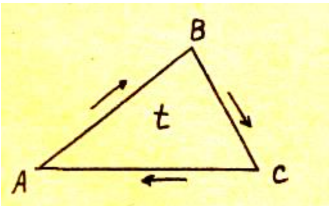
Агар γ қаррадаги иккита йўналмалардан бири танланса, у ҳолда γ ни йўналмали дейилади. Энди уларни А, Б, С нуқталарда бўлган $t \in T$ тополгик учбурчакни қарайлик.

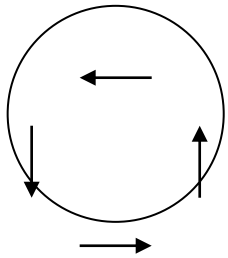
т учбурчакдаги йўналма деб, унинг учларидан иборат учликдаги тартибга айтилади. Цикллик ўрин алмаштиришдан ҳосил қилинган йўналмаларни бир хилдаги эъни экивалент дейилади. Ушбуни

(А, Б, С)~(Б, С, А)~(С, А, Б)~ ва

(С, Б, А)~(Б, А, С)~(А, С, Б)

белгиланади.





12-шакл. 13-шакл.

Шундай қилиб т учбурчак иккита йўналмага эга. Шулардан бири кўрсатилса, учбурчакни йўналмали дейилади.

т учбурчак учларининг (А, Б, С) тартиби унинг томонларидаги (А, Б), (Б, С) ва (С, А) йўналмаларни юзага келтиради. (12-шакл).

Т даги иккита қўшни йўналмали учбурчакларда, яъни умумий томонга эга бўлган учбурчакларда умумий томон бўйича қарама-қарши йўналмалар индукцияланган бўлса, у ҳолда уларни келишилган йўналмали дейилади.

Агар икки ўлчовли четли W кўпхилликнинг Т триангуляцияси мавжуд бўлиб, ундаги барча учбурчакларда шундай йўналма кўрсатиши мумкин бўлсаки, ҳар қандай қўшни иккита учбурчаклар келишилган йўналмали бўлса у ҳолда W ни келишилган йўналмали дейилади. Мисоллар келтирайлик.

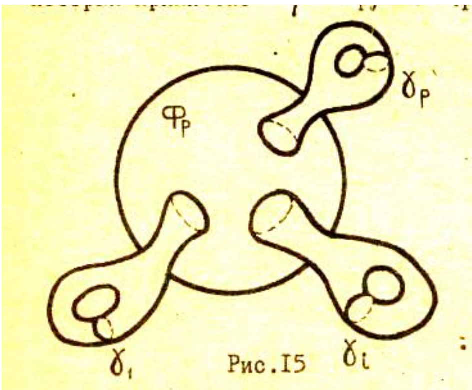
Икки ўлчовли кўпхилликларнинг топологик классификацияси.

W-кўпхиллик четли ёки кўпхилликнинг ўзи бўлсин. Агар W кўпхилликда $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_p$ та жуфт жуфти билан кесишмайдиган цикллар системаси мавжуд бўлиб, ∂W чегарани кесмаса, ва $W \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup, ..., \cup \gamma_n)$ боғланиши бўлса, у холда p сонни W нинг жинси (род) дейилади. C^2 сфера ва P^2 текислик P=0 жинсли кўпхилликлардир. Проектив текислик ва тор P=1 жинсли кўпхилликдир. Компакт кўпхиллик w нинг г(w) жинси ҳар доим чекли сонга тенгдир.

Компакт бўлмаган кўпхилликлар чексиз жинсли бўлишлари мумкин.

P жинсли йўналмали кўпхилликка "P декталли сфера" деб аталувчи фигура мисол бўлиши мумкин Φ_p кўпхиллик P та «туйнук» ли сферанинг туйнуклар чегарасига p та «даста» ни ёпиштириб хосил қилинади, (14-шакл)

Чизмадаги $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ цикллар «даста»га тегишли бўлиб, Φ_p ни ажратмайди. Йўналмали бўлмаган p жинси Φ_p кўпхиллик S_p^2 сферанинг барча P дона тешикларига чегара бўйлаб «Мёбиус япроғи» ни ёпиштириш орқали ҳосил қилинади. Маълумки, «Мёбиус япроғи» нинг чети C^1 айланага гомеморф. Бундан хар бир «туйнук» чегарасига япроқ четини елимлаш мумкинлиги келиб чиқади.



17-шакл.

Проектив текислик P^2 1-та «туйнук» ка эга бўлган C^2 сферага «Мёбиус япроғи» ни елимлаш билан ҳосил қилинади.

$X(C_p^2)$=2-p дан тор учун $X(M^2)$=0, «даста»нинг Эйлер характеристикаси -1 га тенг.

Эйлер характеристикасининг аддитивлик хоссасига кўра

$X(\Phi_p)$=(2-p)-p=2(1-p) (2.11)

$X(\Phi_p)$=2-p (2.12). бу формулалар кўпхилликларнинг жинси ва Эйлер характеристикалари орасидаги муносабатни аниқлайди.

43-теорема. Иккита икки ўлчовли боғланишли компакт кўпхилликлар гомеоморф бўлиши учун улар бир вақтда йўналмали бўлиши ёки йўналмали бўлмаслиги, шунингдек улар тенг Эйлер характеристикага эга бўлиши зарур ва етарлидир.

Мунтазам кўпёқлар классификацияси

Ёпиқ кўпёқлар учун (2.10) Эйлер формуласи мунтазам кўпёқларни классификациялаш имкониятини беради.

Таъриф: E^3 фазодаги S^2 сферага гомеорф P кўпхилликнинг барча ёқлари бир хил сондаги (m) қирраларга эга бўлиб, ҳар бир учидан бир хил сондаги (n) қирралар ўтса, у ҳолда P ни топологик мунтазам кўпёқ дейилади.

$m \geq 3, n \geq 3$ эканлигига шубҳа йўқ.

P кўпёқ учлари сонини α_0 орқали, қирралар сонини α_1 орқали, ёқлар сонини α_2 орқали белгиласак, P нинг ҳар бир учдан n та қирра ўтиб, ҳар қайси қирра 2 та учни бирлаштиргани учун $n\alpha_0 = 2\alpha_1$ (2.13)

Ҳар бир қирранинг иккита ёққа тегишлигидан $m\alpha_3 = 2\alpha_1$ (2.14)

(13) ва (14) дан α_0 ва α_3 ларни аниқлаб, Эйлер формуласи (2.10) га қўйсак,

$\frac{2\alpha_1}{n} - \alpha_1 + \frac{2\alpha_1}{m} = 2$ (2.15) келиб чиқади.

Бундан $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ (2.16)

$m \geq 3, n \geq 3$ бўлгани учун (2.16) тенгсизлик қўйидаги 5 жуфт ечимларга эга бўлиши мумкин:

1) $m = 3, n = 3$ 2) $m = 3, n = 4$ 3) $m = 3, n = 5$ 4) $m = 4, n = 3$ 5) $m = 5, n = 3$

m, n ларга мос $\alpha_0, \alpha 1, \alpha_2$ қийматларни жадвал кўринишида ёзайлик.

$м$	$н$	α_0	α_1	α_2	Кўпёқ номи
3	3	4	6	3	тетраедр
3	4	6	12	8	октаедр
3	5	12	30	20	икосаедр
4	3	8	12	6	куб

5	3	20	30	12	(гексаедр) додекаедр

Ҳар бир ёғи мунтазам кўпбурчаклардан иборат бўлиб, ҳар бир учида мунтазам кўпёқли бурчакларга эга бўлган бошқа типдаги кўпёқлар мавжуд эмас.

НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Сирт ички геометрияси объектларига мисоллар келтиринг.
2. Регуляр сирт таърифини ёзинг.
3. Силлиқ сирт таърифини ёзинг.
4. Силлиқ сирт ҳақидаги теоремани ёзинг.
5. Силлиқ сирт ҳақидаги теоремани исботланг.
6. Сиртнинг ошкор тенгламасини ёзинг.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАРИНИНГ МАЗМУНИ

1 – Амалиёт. Чизиқли фазо.

Режа:

1. Чизиқли фазо. Чизиқли фазо ўлчами.
2. Аффин фазо. Аффин координаталар системаси.
3. Аффин алмаштиришлар ва текисликлари.
4. Бичизиқли форма.

Таянч иборалар:Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

1. Ўз устида берилган ҳар қандай P майдон 1 ўлчамли фазодир, чунки нолдан фарқли $x \in P$ вектор ва $\forall y \in P$ лар учун

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$$

тенгликни қаноатлантирувчи нолдан фарқли $\lambda_1, \lambda_2 \in P$ мавжуд. Ҳақиқатан ҳам, агарда $\lambda_1 \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lambda_1 x = -\lambda_2 y$$

бўлиб,

$$x = -\lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2 y$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, $\dim P = 1$.

2. C комплекс сонлар майдонини ўз устида қаралганда, у 1 ўлчовли. Аммо уни R ҳақиқий сонлар майдонида қаралса, 2 ўлчамли фазони ташкил этади, яъни $\dim_C C = 1$ ва $\dim_R C = 2$ бўлади. Бу ерда R устида қаралганда $1, i$ чизиқли эркли ва агарда C устида қаралса, i чизиқли эркли.

3. P майдон устида берилган P^n арифметик фазо n ўлчовли фазодир.

Ҳақиқатан ҳам, у ерда бизга маълумки,

$$e_1=(1,0,\dots,0),$$
$$e_2=(0,1,\dots,0),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$e_n=(0,0,\dots,1)$$

орт векторлар чизиқли боғланмаган бўлиб, ихтиёрий $n+1$ векторлари чизиқли боғлиқ бўлади, чунки $\forall\alpha=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in P^n$ учун

$$\alpha=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_ne_n$$

тенглик ўринлидир ва демак

$$\alpha,\ e_1,e_2,\dots,e_n$$

$n+1$ та векторлари чизиқли боғлангандир ва демак $\dim_P P^n=n$ бўлади.

4. $P_n[x]$ фазо $n+1$ ўлчовлидир, чунки бу ерда $1,\ x,\ x^2,\ \dots.,\ x^n$ векторлар чизиқли эркли бўлиб, $\forall f(x)\in P_n[x]$ учун

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n,\quad a_i\in P,\ i=\overline{1,n}$$

бўлганлиги туфайли $f(x),1,\ x,x^2,\dots,x^n$ $n+2$ та векторлари чизиқли боғланган ва демак $\dim_P P_n[x]=n+1$ бўлади.

5. $M_{m,n}(P)$ матрисалар фазоси P майдон устида mn ўлчовли фазо бўлади, чунки $M_{m,n}(P)$ да

$$e_{11}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\ e_{12}=\begin{pmatrix}0&1&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\dots,e_{mn}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}$$

mn та матрисалари чизиқли эркли бўлиб, $\forall f\in M_{m,n}(P)$ учун

$$A=a_{11}e_{11}+a_{12}e_{12}+\dots+a_{mn}e_{mn},\quad a_{ij}\in P,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$$

ва демак унда $mn+1$ векторлари чизиқли боғлангандир, яъни бундан эса

$$\dim_P M_{m,n}(P) = mn$$

эканлиги келиб чиқади.

Хусусан $M_m(P)$ сатрлар фазоси n ўлчамли ва M_{m1} устунлар фазоси m ўлчамлидирлар.

Иккинчи мисолдан кўриниб турибдики, V абел группасини ҳар хил майдонлар устида кўриб ҳар хил фазолар ҳосил қилиш мумкин, балки ҳар хил ўлчовли фазолар ҳам ҳосил бўлар экан.

2– Амалиёт. Евклид фазоси.

Режа:

1. Евклид фазоси.
2. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.

Таянч иборалар: Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

1. Евклид фазоси деганда нимани тушунасиз?
2. Коши тенгсизлигини исботланг.
3. Очиқ қисм тўпламни тушунтириб беринг?
4. Элементар чизиқнинг таърифи.
5. Оддий чизиқнинг таърифи.
6. Регуляр чизиқнинг таърифи.
7. Қандай чизиққа силлиқ чизиқ деб аталади ?
8. E_3 фазода чизиқнинг параметрик тенглам
9. Евклид фазоси деганда нимани тушунасиз?
10. Коши тенгсизлигини исботланг.

11. Очиқ қисм тўпламни тушунтириб беринг?
12. Элементар чизиқнинг таърифи.
13. Оддий чизиқнинг таърифи.
14. Регуляр чизиқнинг таърифи.
15. Қандай чизиққа силлиқ чизиқ деб аталади ?
16. E_3 фазода чизиқнинг параметрик тенгламалари.
17. Евклид фазосида чизиқнинг вектор тенгламаси.
18. Регуляр чизиқ ҳақидаги теорема.
19. E_3 фазода чизиқнинг ошкормас тенгламалари.
20. Текис чизиқнинг таърифи.
21. Текис чизиқнинг параметрик тенгламалари.
22. Текис чизиқнинг ошкормас тенгламаси.
23. Текис чизиқнинг ошкор тенгламаси.
24. Текис чизиқнинг вектор тенгламаси. . Сиртнинг биринчи квадратик формасини ёзинг.
25. Сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентларини топиш формулаларини ёзинг.
26. Сиртнинг иккинчи квадратик формасини ёзинг.
27. Сирт иккинчи квадратик формасининг коеффицентларини топиш формулаларини ёзинг.
28. Сирт тўла эгрилигининг таърифини ёзинг.
29. Сиртнинг гаусс эгрилигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
30. Гаусс теоремасини ёзинг.
31. Гаусс теоремасини исботланг. Сиртни эгишнинг таърифини ёзинг.
32. Сиртни эгишга мисоллар келтиринг.
33. Сирт устидаги чизиқ ёйининг узунлигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
34. Сиртни эгиш ҳақидаги теоремани ёзинг.
35. Сиртни эгиш ҳақидаги теоремани исботланг.
36. Сирт устидаги икки чизиқ орасидаги бурчакни топиш формуласини ёзинг.

37. Сирт устидаги соҳанинг юзини топиш формуласини ёзинг.
38. Сиртнинг тўла эгрилигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
39. Элементар чизиқнинг таърифи. Оддий чизиқнинг таърифи.
40. Регуляр чизиқнинг таърифи.
41. Қандай чизиққа силлиқ чизиқ деб аталади ?
42. E_3 фазода чизиқнинг параметрик тенгламалари.
43. Евклид фазосида чизиқнинг вектор тенгламаси.
44. Регуляр чизиқ ҳақидаги теорема.
45. E_3 фазода чизиқнинг ошкормас тенгламалари.
46. Текис чизиқнинг таърифи.
47. Текис чизиқнинг параметрик тенгламалари.
48. Текис чизиқнинг ошкормас тенгламаси.
49. Текис чизиқнинг ошкор тенгламаси.
50. Текис чизиқнинг вектор тенгламаси.
51. . Соҳанинг таърифини ёзинг.
52. . Элементар сиртнинг таърифини ёзинг.
53. Оддий сиртнинг таърифини ёзинг.
54. Сиртнинг параметрик тенгламаларини ёзинг.
55. Сиртнинг гаусс координаталари қандай ёзилади ?
56. Сиртнинг вектор тенгламасини ёзинг. Сирт ички геометриясининг таърифини ёзинг.
57. Сирт устидаги чизиқ ёйининг узунлигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
58. Сирт устидаги чизиқлар орасидаги бурчакни топиш формуласини ёзинг.
59. Сирт устидаги соҳанинг юзини топиш формуласини ёзин.
60. u чизиқларнинг таърифини ёзинг.
61. u чизиқларнинг тенгламасини ёзинг.
62. v чизиқларнинг таърифини ёзинг.
63. v чизиқларнинг тенгламасини ёзинг.
64. Координат чизиқлари деб қандай чизиқларга айтилади?
65. Координат тўрининг таърифини ёзинг.

66. Мунтазам тўр таърифини ёзинг.
67. Регуляр сирт нуқталарида ва уринма векторлар қандай жойлашади.
68. Сирт ички геометрияси объектларига мисоллар келтиринг.
69. Регуляр сирт таърифини ёзинг.
70. Силлиқ сирт таърифини ёзинг.
71. Силлиқ сирт ҳақидаги теоремани ёзинг.
72. Силлиқ сирт ҳақидаги теоремани исботланг.
73. Сиртнинг ошкор тенгламасини ёзинг.

3–Амалиёт. Евклид фазосида чизиқ ва сиртлар.

Режа:

1. Сирт дифференциал геометрияси.
2. Сирт ички геометрияси.
3. Сирт ташқи геометрияси.

Таянч иборалар:Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

1. Элементар чизиқнинг таърифи.
2. Оддий чизиқнинг таърифи.
3. Регуляр чизиқнинг таърифи.
4. Қандай чизиққа силлиқ чизиқ деб аталади ?
5. E_3 фазода чизиқнинг параметрик тенгламалари.
6. Евклид фазосида чизиқнинг вектор тенгламаси.
7. Регуляр чизиқ ҳақидаги теорема.
8. E_3 фазода чизиқнинг ошкормас тенгламалари.
9. Текис чизиқнинг таърифи.

10. Текис чизиқнинг параметрик тенгламалари.
11. Текис чизиқнинг ошкормас тенгламаси.
12. Текис чизиқнинг ошкор тенгламаси.
13. Текис чизиқнинг вектор тенгламаси.
14. Сирт эгрилик индикатрисасининг таърифини ёзинг.
15. Эгрилик индикатрисаси баъзан нима деб аталади ?
16. Эгрилик индикатриса тенгламасини ёзинг.
17. Эгрилик индикатриса тенгламасини келтириб чиқаринг.
18. Сиртнинг эллиптик нуқтаси деб, қандай нуқтага айтилади ?
19. Сиртнинг гиперболик нуқтаси деб, қандай нуқтага айтилади ?
20. Сиртнинг параболик нуқтаси деб, қандай нуқтага айтилади
21. Чизиқ эгрилигининг таърифини ёзинг.
22. Чизиқ вектор тенгламаси билан берилганда, эгриликни ҳисобловчи формулани ёзинг.
23. Чизиқ табиий параметрли вектор тенгламаси билан берилганда эгрилигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
24. Чизиқ бош нормалининг таърифини ёзинг.
25. Чизиқ бош нормалининг бирлик векторини ёзинг.
26. Сирт устидаги чизиқ эгрилигини топиш формуласини ёзинг.
27. Сирт нормал кесимининг таърифини ёзинг.
28. Сирт нормал кесимининг эгрилигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
29. Мене формуласини ёзинг.
30. Сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари билан сирт нормал кесим эгрилиги орасидаги боғланишни ёзинг. Чизиқ эгрилигининг таърифини ёзинг.
31. Чизиқ вектор тенгламаси билан берилганда, эгриликни ҳисобловчи формулани ёзинг.
32. Чизиқ табиий параметрли вектор тенгламаси билан берилганда эгрилигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
33. Чизиқ бош нормалининг таърифини ёзинг.

34. Чизиқ бош нормалининг бирлик векторини ёзинг.

35. Сирт устидаги чизиқ эгрилигини топиш формуласини ёзинг.

36. Сирт нормал кесимининг таърифини ёзинг.

37. Сирт нормал кесимининг эгрилигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.

38. Мене формуласини ёзинг.

39. Сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари билан сирт нормал кесим эгрилиги орасидаги боғланишни ёзинг. Сирт биринчи квадратик формасининг таърифини ёзинг.

40. Сирт биринчи квадратик формаси яна нима деб аталади ?

41. Сиртнинг биринчи квадратик формасини келтириб чиқаринг.

42. Сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентлари деб нимага айтилади ?

43. Сирт биринчи квадратик формасининг коеффицентлари қандай қийматларга тенг бўлаши мумкин ?

44. Сиртнинг биринчи квадратик формаси қандай қийматларга тенг бўлиши мумкин ?

45. Сирт вектор тенгламаси билан берилганда биринчи квадратик форма коеффитсийентларини топиш формуласини ёзинг.

46. Сирт параметрик тенгламалари билан берилганда биринчи квадратик форма коеффицентларини топиш формуласини ёзинг.

47. Сирт ошкор тенгламаси билан берилганда биринчи квадратик форма коеффицентларини топиш формуласини ёзинг. Сирт устидаги чизиқнинг вектор тенгламасини ёзинг.

48. Сирт устидаги чизиқнинг вектор тенгламасини келтириб чиқаринг.

49. Сирт устидаги чизиқнинг параметрик тенгламаларини ёзинг.

50. Сирт устидаги чизиқнинг эгри чизиқли координаталарга нисбатан ошкормас тенгламасини ёзинг.

51. Сирт устидаги чизиқнинг эгри чизиқли координаталарга нисбатан ошкор тенгламасини ёзинг.

52. u чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

53. v чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

54. Сирт устидаги чизиқнинг йўналиши қандай аниқланади ?

55. Локсодромнинг таърифини ёзинг.

56. Локсодромнинг дифференциал тенгламасини ёзинг.

57. Локсодромнинг ошкормас тенгламасини ёзинг.

58. Локсодромнинг ошкормас тенгламасини келтириб чиқаринг.

4 – Амалиёт. Псевдоевклид фазо.

Режа:

1. Псевдоевклид фазо. Сферик фазо.
2. Риман геометрияси. Гиперболик фазо.
3. Ярим Евклид фазолар. Ярим гиперболик фазолар.

Таянч иборалар: Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

37 – мисол: R^n фазо $n-$ ўлчамли кўпхилликдир. R^n даги ҳар кандай очиқ тўплам ҳам $n-$ ўлчамли кўпхилликдир.

38 – мисол: $S^n \subset R^{n+1}$ сфера n - ўлчамли кўпхилликдир. S^n R^{n+1} нинг қисм фазоси сифатида саноқли базага эга бўлган Хаусдорф фазосидир.

$a \in S^n$ га $a^1 \in S^n$ диаметрал қарама-қарши нуқта бўлсин. $U_a = S^n \setminus \{a^1\}$ атроф S^n нинг a нуқтадаги уринма текислик R_a^n га гомеоморфдир. Гомеоморфизм a' марказдан проекциялаш орқали ўрнатилади.

39 – мисол: Проектив фазо P^n $n-$ўлчамли топологик кўпхилликдир. P^n нинг ҳар бир нуқтаси $S^n \subset R^{n+1}$ фазонинг елимланган (айнийлаштирилган) нуқталар жуфти бўлиб, R^n га гомеоморф атрофга эга. Бу атрофлар S^n даги

маркази мос нуқталарда бўлган диаметрал қарама-қарши очиқ шарлар жуфтлигидир.

40 – мисол: T^2 тор икки ўлчамли кўпхилликдир.

n- ўлчамли кўпхиллик таърифидан унинг ҳар бир нуқтаси учун чизиқли боғланишли атрофининг мавжудлиги келиб чиқади. 1 – бобдаги 33 – теоремага кўра кўпхилликнинг боғланишли эканлигидан унинг чизиқли боғланишли бўлиши келиб чиқади.

n- ўлчамли кўпхиллик ҳар бир боғланишли компонентасининг ўзи n- ўлчамли кўпхилликдир.

Биз қўйида боғланишли кўпхилликларни қараймиз. Якка нуқталар тўплами нол ўлчамли боғланишли кўпхиллик бўлишини эслатиб утамиз. Бир ўлчамли компакт кўпхилликларни қўйидаги теорема асосида классификациялаш мумкин. Кубда триангулясия қирралар ва ёқларнинг диагоналлари орқали берилган. Кубнинг бирор қиррасидаги йўналманинг берилиши ўзаро келишилган учбурчаклар учун бирдан бир йўналманинг аниқлашишини кўрсатинг.

E^3да барча ёқлари олтибурчаклардан иборат қабариқ кўпёқнинг мавжуд бўлмаслигини исботланг.

Ечиш. Фараз қилайлик шундай кўпёқ мавжуд бўлсинки, $\alpha_0 = 2+\alpha_2$, $\alpha_1 = 3\alpha_2$ бажарилсин. Кўпёқнинг ҳар бир учидан учтадан кам бўлмаган қирралар ўтади. Шунинг учун $\alpha_0 \le \frac{\alpha_1}{3} = \alpha_2$ $2+2\alpha_2 \le \alpha_2$ тенгсизлик бўлиши мумкин эмас.

Нол жинсли кўпёқда барча кўпёқли бурчаклар тўрттадан кўп бўлмаган ёқларни ўз ичига олади, ҳамда ёқлардан ҳеч қайси бирида тўрттадан ортиқ бўлмаган учлар ётсин. Учёқли бурчаклар ва учбурчакли ёқлар сонининг йиғиндиси 8 га тенг бўлишини исботланг.

Нол жинсли ҳар қандай кўпёқда α_0- учлар сони, α_1-қирралар сони ва α_2- ёқлар сони бўлса, қўйидаги тенгсизликларнинг ўринлилигини исботлансин.

$$\alpha_1+6 \le 3\alpha_0 \le 2\alpha_1, \quad \alpha_1+6 \le 3\alpha_2 \le 2\alpha_1, \quad \alpha_0+4 \le 2\alpha_2 \le 4\alpha_0-8, \quad \alpha_2+4 \le 2\alpha_0 \le 4\alpha_2-8.$$

Қоғоз варағидан тўғри бурчакли йўлак қирқинг. Йўлакка ўрта чизиқ ўтказинг. Йўлак четларини елимлаб цилиндр ясанг. Цилиндр йўналмалими? Цилиндрни ўрта чизиқ бўйлаб қирқилса нима ҳосил бўлади?

Тўғри бурчакли йўлакда, цилиндрда ва Мёбиус япроғида четларини аниқланг. У неча қисмдан иборат?

Қоғоздан квадрат қирқинг. Уни диагонал бўйича буклаб четини ёпиштиринг. Сфера (куб)га гомеоморф сиртнинг модели келиб чиқди. Кўпхиллик триангулясиясини ясанг.

5 – Амалиёт. Иккинчи тартибли сиртлар.

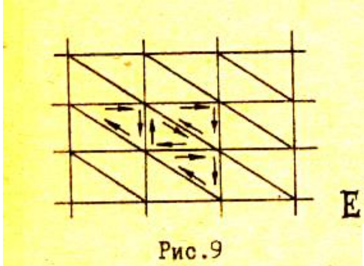
Режа:

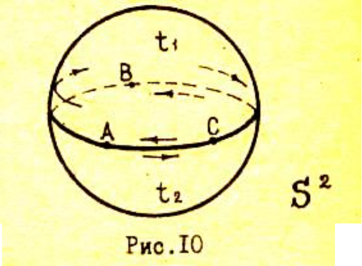
1. Иккинчи тартибли сиртлар.
2. Иккинчи тартибли сирт инвариантлари

Таянч иборалар:Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

1. Сферанинг таърифини ёзинг.
2. Сферанинг параметрик тенгламаларини ёзинг.
3. Сферанинг параметрик тенгламаларини келтириб чиқаринг.
4. Сферанинг вектор тенгламасини ёзинг.
5. Сферанинг ошкормас тенгламасини ёзинг

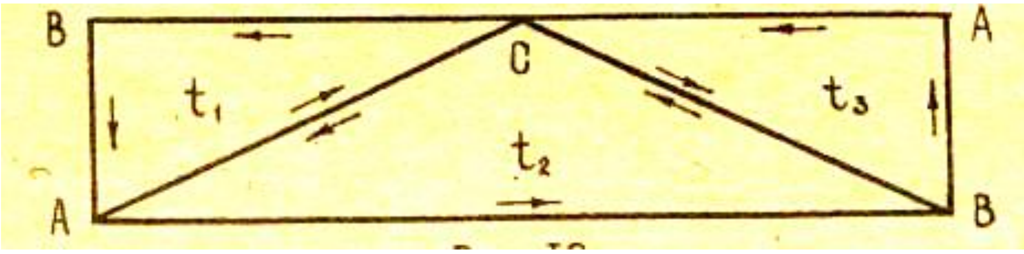
51-мисол. Евклид текислиги E^2 ва C^2 сфера йўналмали. Мос триангуляциялар ва учбурчакларнинг йўналмаси 14-15 шаклларда тасвирланган C^2 сфера иккита τ_1 ва τ_2 топологик учбурчакларга ажратилган бўлиб, улардан бири юқори ярим сфера, иккинчи қуйи ярим сферадир.





14-шакл. 15-шакл.

52-мисол. «Мёбиус япроғи» йўналмасиз сиртдир. Буни изоҳлаш учун M^2 ни учта $т_1$, $т_2$, $т_3$ учбурчакларга ажратамиз (16-шакл). ($т_1$, $т_2$) ва ($т_2$, $т_3$) жуфтликларидаги йўналма келишилган, лекин ($т_1$, $т_3$) жуфтликларда AB томонга нисбатан келишилганлик йўқ (умумий томон AB бир хил йўналмали)



16-шакл.

44-мисолда «Мёбиус япроғи» қандай ҳосил қилиниши изоҳланди ва шакли келтирилди. У қўйидаги хоссаларга эга:

1) «Мёбиус япроғи» нинг чети айланага гемеоморф эгри чизиқдан иборат.

2) «Мёбиус япроғи» ўрта чизиқ бўйича қирқилса, у икки бўлакка ажралмайди.

«Мёбиус япроғи» бир томони сиртдир, чунки мўй қаламни узмай ўрта чизиқ бўйлаб бўясак, сиртнинг ичи ва ташқи қисми бўялган бўлади Кубда триангуляция қирралар ва ёқларнинг диагоналлари орқали берилган. Кубнинг бирор қиррасидаги йўналманинг берилиши ўзаро келишилган учбурчаклар учун бирдан бир йўналманинг аниқлашишини кўрсатинг.

E^3 да барча ёқлари олтибурчаклардан иборат қабариқ кўпёқнинг мавжуд бўлмаслигини исботланг.

Ечиш. Фараз қилайлик шундай кўпёқ мавжуд бўлсинки, $\alpha_0 = 2 + \alpha_2$, $\alpha_1 = 3\alpha_2$ бажарилсин. Кўпёқнинг ҳар бир учидан учтадан кам бўлмаган қирралар ўтади. Шунинг учун $\alpha_0 \leq \frac{\alpha_1}{3} = \alpha_2 \quad 2 + 2\alpha_2 \leq \alpha_2$ тенгсизлик бўлиши мумкин эмас.

Нол жинсли кўпёқда барча кўпёқли бурчаклар тўрттадан кўп бўлмаган ёқларни ўз ичига олади, ҳамда ёқлардан хеч қайси бирида тўрттадан ортиқ бўлмаган учлар ётсин. Учёқли бурчаклар ва учбурчакли ёқлар сонининг йиғиндиси 8 га тенг бўлишини исботланг.

Нол жинсли ҳар қандай кўпёқда α_0 - учлар сони, α_1-қирралар сони ва α_2-ёқлар сони бўлса, қуйидаги тенгсизликларнинг ўринлилигини исботлансин.

$\alpha_1 + 6 \leq 3\alpha_0 \leq 2\alpha_1, \quad \alpha_1 + 6 \leq 3\alpha_2 \leq 2\alpha_1, \quad \alpha_0 + 4 \leq 2\alpha_2 \leq 4\alpha_0 - 8, \quad \alpha_2 + 4 \leq 2\alpha_0 \leq 4\alpha_2 - 8.$

Қоғоз варағидан тўғри бурчакли йўлак қирқинг. Йўлакка ўрта чизиқ ўтказинг. Йўлак четларини елимлаб цилиндр ясанг. Цилиндр йўналмалими? Цилиндрни ўрта чизиқ бўйлаб қирқилса нима ҳосил бўлади?

Тўғри бурчакли йўлакда, цилиндрда ва Мёбиус япроғида четларини аниқланг. У неча қисмдан иборат?

Қоғоздан квадрат қирқинг. Уни диагонал бўйича буклаб четини ёпиштиринг. Сфера (куб)га гомеоморф сиртнинг модели келиб чиқди. Кўпхиллик триангуляциясини ясанг.

6– Амалиёт. Кўпхилликлар.

Режа:

1. Кўпхилликлар. Кўпхиллик турлари.
2. Кўпхиллик геометрияси.

Таянч иборалар: Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги, нормал кесим, нормал кесимнинг эгрилиги, Мене формуласи, эгрилик (Дюпен) индикатрисаси, индикатриса тенгламаси, сиртнинг эллиптик нуқта, сиртнинг гиперболик нуқта, сиртнинг параболик нуқта, қўшма йўналишлар, бош йўналишлар, бош эгриликлар.

1. Аффин фазо A^n, евклид фазоси E^n нинг n- ўлчамли кўпхиллик бўлишини кўрсатинг.

2. Кўпхиллик боғланишли бўлса, унинг чизиқли боғланишли бўлишини исботланг.

3. Боғланишли бўлмаган нол ўлчамли кўпхилликка мисол келтиринг.

4. Компакт ва компакт бўлмаган кўпхилликларга мисоллар келтиринг.

5. E^2 текисликда $M = \{x(x_{1,}x_2) \in E^2 / x_2 \geq 0, x_1(x_1^2 - x_2^3) = 0\}$ қисм фазо локал Евклид фазоси бўлмай $M \setminus \{0\}$ ва $N = \{x \in M / x_1 \geq 0\}$ қисм фазолар локал Евклид фазоси эканини кўрсатинг.

6. $q \in R^1$ нуқтани қарайлик $\{(R^1 x\{0\}) \cup (R^1 x\{1\})\}$ топологик йиғиндида $(P,0)$ ва $(P,1)$ нуқталар $P = P \neq 2$ шарт бажарилганда айнийлаштирилган (елимланган) бўлсин. Ушбу фазо Хаусдорф фазоси бўлмай локал Евклид фазоси бўлишини кўрсатинг.

7. Қўйидаги X фазо кўпхиллик эмаслигини кўрсатинг.

8. а) $X = (R^1 \cup R^2)/_T$, бунда $xTy, x = y, y < 0$

б) $X = [0,3] \subset R^1$. Барча нуқта атрофлари (1 нуқта бундан истисно) R^1 даги атрофлар системаси орқали индуксияланган. 1- нуқта эса $U =]0,1] \cup]2,b[$ атрофга эга, бунда $a < 1$, $b > 2$

в) Тривиал топология билан таъминланган X

г) R^2 даги иккита координат ўқларининг бирлашмаси.

9. Қўйидаги $A_i \subset R^1$ қисм фазолар четли кўпхиллик бўлиши мумкинми?

а) $A_1 = \{x(x_1, x_2) / 0 \leq x_1 < 1\}$

б) $A_2 = \{x(x_1, x_2) / 0 \leq x_1 \leq 1\}$

в) $A_3 = \{x(x_1, x_2) / 0 < x_1 < 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$

г) $A_4 = \{x(x_1, x_2) / x_1 = 0, x_2 = 0\}$

д) $A_5 = \{x(x_1, x_2) / 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$

е) $A_6 = A_5 \cup \{(\frac{1}{2}, 0)\}$

ж) $A_7 = \{x(x_1, x_2) / 0 \le x_2 < 1, 0 < x_1 < 1\}$

10. Қайси топологик кўпхиллик μ^n ва эквивалентлик муносабати T учун n дан кичик ўлчамли кўпхиллик бўла олади? Мисол келтиринг.

11. S^2 нинг катакли ажратмаларини текширинг:

12. Битта нол ўлчовли ва битта икки ўлчовли;

13. б) Иккита очиқ сфералардан, нуқтадан ва экваториал текисликда битта бир ўлчовли катаклардан иборат бўлсин. $X(S^2) = ?$

14. Қуйидагилар учун катакли ажратишларни ясанг ва Эйлер характеристикасини топинг.

15. E^3 даги тор учун;

16. P^k проектив текислик учун;

17. D^n −ёпиқ шар учун;

18. I^n −куб ва симплекс учун;

19. Мёбиус япроғи учун;

20. S^2 сферадан очиқ доирага голмеморф кесишмайдиган соҳаларни четлаштириш орқали ҳосил бўлган кўпхилликлар (р ”туйнук”ли сфералар) учун;

21. “даста”лар учун;

22. р дастали сфералар учун;

23. “Клейн бутилкаси” учун.

24. $f : M^2 \to N^2$ M^2 кўпхилликнинг N^2 кўпхилликка голмеморфизм бўлсин.

25. M^2 да триангуляциянинг берилиши N^2 да триангуляциянинг юзага келтиришини кўрсатинг. Агар $f(M^2) \ne N^2$ бўлса, N^2 да триангулясия содир бўладими?

26. АБСД тетраедрнинг бир ёғи (АБС)да кўрсатилган ориентатсия (йўналма) бошқа ёқлардаги бирдан бир келишилган йўналмали аниқлаши кўрсатилсин.

27. Кубда триангулясия қирралар ва ёқларнинг диагоналлари орқали берилган. Кубнинг бирор қиррасидаги йўналманинг берилиши ўзаро келишилган учбурчаклар учун бирдан бир йўналманинг аниқлашишини кўрсатинг.

28. E^3да барча ёқлари олтибурчаклардан иборат қабариқ кўпёқнинг мавжуд бўлмаслигини исботланг.

29. Ечиш. Фараз қилайлик шундай кўпёқ мавжуд бўлсинки, $\alpha_0 = 2 + \alpha_2$, $\alpha_1 = 3\alpha_2$ бажарилсин. Кўпёқнинг ҳар бир учидан учтадан кам бўлмаган қирралар ўтади. Шунинг учун $\alpha_0 \le \frac{\alpha_1}{3} = \alpha_2$ $2 + 2\alpha_2 \le \alpha_2$ тенгсизлик бўлиши мумкин эмас.

30. Нол жинсли кўпёқда барча кўпёқли бурчаклар тўрттадан кўп бўлмаган ёқларни ўз ичига олади, ҳамда ёқлардан ҳеч қайси бирида тўрттадан ортиқ бўлмаган учлар ётсин. Учёқли бурчаклар ва учбурчакли ёқлар сонининг йиғиндиси 8 га тенг бўлишини исботланг.

31. Нол жинсли ҳар қандай кўпёқда α_0 - учлар сони, α_1 -қирралар сони ва α_2 - ёқлар сони бўлса, қуйидаги тенгсизликларнинг ўринлилигини исботлансин.

32. $\alpha_1 + 6 \le 3\alpha_0 \le 2\alpha_1$, $\alpha_1 + 6 \le 3\alpha_2 \le 2\alpha_1$, $\alpha_0 + 4 \le 2\alpha_2 \le 4\alpha_0 - 8$, $\alpha_2 + 4 \le 2\alpha_0 \le 4\alpha_2 - 8$.

33. Қоғоз варағидан тўғри бурчакли йўлак қирқинг. Йўлакка ўрта чизиқ ўтказинг. Йўлак четларини елимлаб цилиндр ясанг. Цилиндр йўналмалими?цилиндрни ўрта чизиқ бўйлаб қирқилса нима ҳосил бўлади?

34. Тўғри бурчакли йўлакда, цилиндрда ва Мёбиус япроғида четларини аниқланг. У неча қисмдан иборат?

35. Қоғоздан квадрат қирқинг. Уни диагонал бўйича буклаб четини ёпиштиринг. Сфера (куб)га гомеоморф сиртнинг модели келиб чиқди. Кўпхиллик триангуляциясини ясанг. Кўпхиллик жинсини аниқланг. Кўпхиллик йўналмалик бўлдими?

V. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи
Аргумент	еркли ўзгарувчи
Эйлер	(Эйлер Леонҳард, 1707 - 1783) француз математики Петербург ФА аъзоси.
Коши	(Августин Лавис, 1789 - 1857) француз математики
Умумий ечим	тенглама ечими ошкор кўринишда

Белги	Аталиши	Ким киритган?	Қачон киритган?
+	қўшиш	Я. Видман	ХВ аср охири
-	қўшиш	Я. Видман	ХВ аср охири
*	кўпайтирш	Оутред	1631
·	кўпайтириш	Г. Лейбнис	1698
:	бўлиш	Г. Лейбнис	1684
a^n	даража	Р. Декарт	1637
$\sqrt{}$	илдиз	Х.Рудолф, А.Жирор	1525, 1629
$\log_a x$	логарифм	И.Кеплер	1624
$\sin x$	синус	Б.Кавалери	1632
$\cos x$	косинус	А.Ейлер	1748
tgx	тангенс	А.Ейлер	1753
$\arcsin x$, $arctgx$	Арксинус, арктангенс	Ж.Лагранж	1772
dx, $d^2x, \ldots$	Дифференциал	Г. Лейбнис	1675
$\int f(x)dx$	Интеграл	Г.Лейбнис	1675
$y'(x)$	Хосила	Г.Лейбнис	1675
$\int_a^b f(x)dx$	Аниқ интеграл	Ж.Фуре	1819-1822

$\sum$	Йиғинди	Л.Ейлер	1755
$k!$	Факториал	Х.Крамп	1803
$\lim$	Лимит	У.Гамилтон	1853
$f(x)$	Функция	И.Бернулли, Л.Ейлер	1718, 1734
i	Комплекс сон	Л.Ейлер	1777
x, y, z	Ўзгарувчилар	Р.Декарт	1637
$\rightarrow$	Вектор	О.Коши	1853
$=$	Тенглик	Р.Рекорд	1557
$><$	Катта, кичик	Т.Гарриот	1631
$\equiv$	Тенглик	К.Гаусс	1801
$\parallel$	Параллеллик	У.Оутред	1677
$\perp$	Пперпендикулярлик	П.Еригон	1634
Араб рақамлари	Математик белгилар	Ҳинд математиклари	В аср
$\lvert \square \rvert$	Модул	К.Веерштрасс	
Рим рақамлари	Математик белгилар	Рус математиклари	Ерамиздан В аср аввал
$\leq \geq$	Нокатъий тенгсизликлар	П.Буге	1734
[ ]	Квадрат қавс	Р.Бомбелли	1550
( )	Қавс	Н.Тарталя	1556
{ }	Системали қавс	Ф.Виет	1593
e	Натурал логарифм асоси	Л.Ейлер	1736
$\equiv$	Тенглик белгиси	Б.Риман	1857
$\cap$	Кесишма	Дж.Пеано	1895

VI. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б.

2. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-жилд. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 592 б.

3. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-жилд. Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 507 б.

4. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.

5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тикланишдан – миллий юксалиш сари. 4-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2020. – 400 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.

7. Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда қабул қилинган “Таълим тўғрисида”ги ЎРҚ-637-сонли Қонуни.

8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 10 декабрдаги “Чет тилларни ўрганиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1875-сонли қарори.

9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.

10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли қарори.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.

17. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрь “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли қарори.

Ш. Махсус адабиётлар

18. Авилова Л.В., Болотюк В.А., Болотюк Л.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра// 2013. Издание: 1-е изд. 421 с.

19. Александров А.Д., Несветаев Н.Ю. Геометрия, М.: Наука, 1990. – 672 с.

20. Математик анализ./ Азларов Т., Мансуров Ҳ.: Университет ва пед. институтлар талабалари учун дарслик: 2 қисмли. 1-қ.— Қайта ишланган ва тўлдирилган 2-нашри.— Т.: Уқитувчи, 1994.—416 б.

21. Додажонов Н., Юнусметов Р., Абдуллаев Т. Геометрия, 2 қисм.

22. Нарманов А. Дифференциал геометрия.

23. Собиров М.А., Юсупов А.Ё. Дифференциал геометрия курси.

24. Эргашев Б. Евклид фазосида чизиқлар.

25. Эргашев Б. Евклид фазосида сиртлар.
26. Белко И.В. и др. Сборник задач по дифференциалной геометрии.

IV. Интернет сайтлар

27. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги
28. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси
29. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази
30. www.ams.mathscinet.org
31. www.ziyonet.uz – Таълим портали