БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

МАТЕМАТИКАНИНГ СОҲАЛАРГА ТАТБИҚЛАРИ

2021

Дурдиев Д.Қ. физика-математика фанлари доктори, профессор

Жумаев Ж.Ж. ўқитувчи

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

“МАТЕМАТИКАНИНГ СОҲАЛАРГА ТАТБИҚЛАРИ”

МОДУЛИ БЎЙИЧА

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Математика

Бухоро-2021

Модулнинг ўқув-услубий мажмуаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 7 декабрдаги 648-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув дастури ва ўқув режасига мувофиқ ишлаб чиқилган.

Тузувчи: Д.Қ.Дурдиев физика-математика фанлари доктори, профессор.
Ж.Ж. Жумаев ўқитувчи

Тақризчилар: Хаётов А.Р. физика-математика фанлари доктори, профессор.
Ҳ.Р.Расулов физика-математика фанлари номзоди, доцент.

Ўқув -услубий мажмуа Бухоро давлат университети Илмий Кенгашининг қарори билан нашрга тавсия қилинган
(2020 йил "30" декбардаги 9-сонли баённома)

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

«Математиканинг соҳаларга татбиқлари» модули ҳозирги кунда математикани ўқитишда унинг татбиқлари билан тушунтиришни, ҳаётий ва соҳага оид мисолларни, математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, иқтисодий соҳалар ва бошқа соҳаларда кенг қўллашни, тенгламалар, матрицалар, векторлар, функциялар, ҳосила, интеграл ва дифференциал тенгламаларнинг татбиқларини амалиётга кенг қўллаш, ҳамда уларнинг келажакдаги ўрни масалаларини қамрайди.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

«**Математиканинг соҳаларга татбиқлари**» **модулининг мақсади:** педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курс тингловчиларининг бу борада мамлакатимизда ва хорижий давлатларда тўпланган математика фанларини ўқитишнинг замонавий усулларини ўрганиш, амалда қўллаш, кўникма ва малакаларини шакллантириш.

«Математиканинг соҳаларга татбиқлари» вазифалари:

- замонавий талабларга мос ҳолда олий таълимнинг сифатини таъминлаш учун зарур бўлган педагогларнинг касбий компетентлик даражасини ошириш;
- математика фанини ўқитиш жараёнига замонавий ахборот-коммуникация технологиялари ва хорижий тилларни самарали тадбиқ этилишини таъминлаш;
- математика соҳасидаги ўқитишнинг инновацион технологиялар ва ўқитишнинг энг сўнгги замонавий усулларидан фойдаланишни ўргатиш;
- тингловчиларга «математика» масалалари бўйича концептуал асослар, мазмуни, таркиби ва асосий муаммолари бўйича маълумотлар бериш ҳамда уларни мазкур йўналишда малакасини оширишга кўмаклашиш;
- таълим-тарбия жараёнида фаннинг мазмуни, функциялари, таркибий қисмларини ёритиш ва тингловчиларда улардан фойдаланиш маҳоратини ошириш;

Модуль бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетентлигига қўйиладиган талаблар

«Математиканинг соҳаларга татбиқлари» модулини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

- математикани ўқитишда унинг татбиқлари билан тушунтиришни, ҳаётий ва соҳага оид мисолларни;
- тенгламалар, матрицалар, векторлар, функциялар, ҳосила, интеграл ва дифференциал тенгламаларнинг татбиқларини;
- математик фанларни ўқитишнинг замонавий усулларини ***билиши*** керак.

Тингловчи:

- математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, иқтисодий соҳалар ва бошқа соҳаларда кенг қўллаш;
- математик фанларни ўқитишда инновацион таълим методлари ва воситаларини амалиётда қўллаш;
- талабанинг ўзлаштириш даражасини назорат қилиш ва баҳолашнинг назарий асослари ҳамда инновацион ёндашув услубларини тўғри қўллай олиш ***кўникмаларига*** эга бўлиши лозим.

Тингловчи:

- математикани ўқитиш инновацион жараёнини лойиҳалаштириш ва ташкиллаштиришнинг замонавий усулларини қўллаш ***малакаларига*** эга бўлиши лозим.

Тингловчи:

- математиканинг хориж ва республика миқёсидаги долзарб муаммолари, ечимлари, тенденциялари асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;
- математикани турли соҳаларга татбиқ этиш;
- олий таълим тизимида математик фанлар мазмунининг узвийлиги ва узлуксизлигини таҳлил қила олиш ***компетенцияларига*** эга бўлиши лозим.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва

узвийлиги

« Математиканинг соҳаларга татбиқлари » модули ўқув режадаги бошқа модуллар ва мутахассислик фанларининг барча соҳалари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг бу соҳа бўйича касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар математика фанларини ўқитишда замонавий усуллар ёрдамида таълим жараёнини ташкил этишда педагогик ёндашув асослари ва бу борадаги илғор тажрибаларни ўрганадилар, уларни таҳлил этиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий лаёқатга эга бўлиш, илмий-тадқиқотда инновацион фаолият ва ишлаб чиқариш фаолияти олиб бориш каби касбий компетентликка эга бўладилар.

Модуль бўйича соатлар тақсимоти

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат			
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси		
			Жами	жумладан	
				Назарий машғулот	Амалий машғулот
1.	Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.	4	4	2	2
2	Функциялар ва уларнинг татбиқлари.	4	4	2	2
3	Ҳосила ва унинг татбиқлари.	2	2		2
4	Дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.	4	4	2	2
5	Дифференциал тенгламаларнинг татбиқлари.	2	2		2
6	Математика ва саънат.	4	4	2	2
	Жами	**20**	**20**	**8**	**12**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1 – мавзу. Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Математиканинг соҳаларга татбиқлари.
2. Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.
3. Матрицалар ва уларнинг татбиқлари.
4. Векторлар ва уларнинг татбиқлари.

2-мавзу. Функциялар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Функция таърифи ва уларнинг татбиқлари.
2. Функциялар ёрдамида табиий жараёнларни моделлаштириш.
3. Ҳосила таърифи ва унинг татбиқлари.
4. Интеграл ва унинг татбиқлари.
5. Қаторлар ва уларнинг татбиқлари.

3-мавзу. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган табиий фанлар масалалари. Ечим, умумий ечим тушунчалари.

2. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли тенгламалар. Коши масаласи. Коши масаласининг ечими ҳақидаги теорема.

3. Математик физика, механика ва астрономия ҳамда иктисодий масалаларни ечишда, биологик жараёнларни тахлил этишда ва бошка кўп соҳалардаги жараёнларни математик модели дифференциал тенгламалар орқали ифодаланилиши.

4-мавзу. Математика ва саънат.

Режа:

1. Илм-фан, таълим, рақамли иқтисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни.
2. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги.
3. Математика соҳасидаги илғор мамлакатларида олиб борилаётган ишлар билан бир қаторда мавжуд муаммолар, математикани ўрганиш ва ёшларни математика илмига қизиқтириш, математика орқали аниқ ва соҳага боғлиқ бошқа фанларни ривожланишига кўмаклашишнинг ахамияти.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1–Мавзу: Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Математиканинг соҳаларга татбиқлари.
2. Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари. Ечимни текшириш. Тенгламаларни сонли ечиш усуллари.
3. Матрицалар ва уларнинг татбиқлари.
4. Векторлар ва уларнинг татбиқлари.

2–Мавзу: Функциялар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Функция таърифи ва уларнинг татбиқлари.
2. Функциялар ёрдамида табиий жараёнларни моделлаштириш.
3. Қаторлар ва уларнинг татбиқлари.

3–Мавзу: Ҳосила ва унинг татбиқлари.

Режа:

1. Ҳосила таърифи ва унинг татбиқлари.
2. Функцияларнинг монотонлиги, энг катта ва энг кичик қийматларини топиш.

3. Интеграл ва унинг татбиқлари.
4. Юзаларни интеграллар ёрдамида ҳисоблаш.

4–Мавзу: Дифференциал тенгламалар.

Режа:

1. Дифференциал тенгламалар. Ечим, умумий ечим тушунчалари.
2. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли тенгламалар.
3. Коши масаласи. Коши масаласининг ечими ҳакидаги теорема.

5–Мавзу: Дифференциал тенгламаларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган табиий фанлар масалалари.
2. Математик физика, механика ва астрономия ҳамда иктисодий масалаларни ечишда, биологик жараёнларни тахлил этишда ва бошка кўп соҳалардаги жараёнларнинг математик моделини дифференциал тенгламалар орқали ифодалаш.

6–Мавзу: Математика ва саънат.

Режа:

1. Илм-фан, таълим, рақамли иқтисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни.
2. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги.
3. Математика соҳасидаги илғор мамлакатларида олиб борилаётган ишлар билан бир қаторда мавжуд муаммолар, математикани ўрганиш ва ёшларни математика илмига қизиқтириш, математика орқали аниқ ва соҳага боғлиқ бошқа фанларни ривожланишига кўмаклашишнинг ахамияти.

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

АҚЛИЙ ХУЖУМ МЕТОДИ

Ақлий хужум - ғояларни генерация (ишлаб чиқиш) қилиш методидир. «Ақлий хужум» методи бирор муаммони ечишда талабалар томонидан билди - рилган эркин фикр ва мулоҳазаларни тўплаб, улар орқали маълум бир ечимга келинадиган энг самарали методдир. Ақлий хужум методининг ёзма ва оғзаки шакллари мавжуд. Оғзаки шаклида ўқитувчи томонидан берилган саволга та -лабаларнинг ҳар бири ўз фикрини оғзаки билдиради. Талабалар ўз жавобларини аниқ ва қисқа тарзда баён этадилар. Ёзма шаклида эса берилган саволга талаба - лар ўз жавобларини қоғоз карточкаларга қисқа ва барчага кўринарли тарзда ёзадилар. Жавоблар доскага (магнитлар ёрдамида) ёки «пинборд» доскасига (игналар ёрдамида) маҳкамланади. «Ақлий хужум» методининг ёзма шаклида жавобларни маълум белгилар бўйича гуруҳлаб чиқиш имконияти мавжуддир. Ушбу метод тўғри ва ижобий қўлланилганда шахсни эркин, ижодий ва но - стандарт фикрлашга ўргатади.

Ақлий хужум методидан фойдаланилганда талабаларнинг барчасини жалб этиш имконияти бўлади, шу жумладан талабаларда мулоқот қилиш ва мунозара олиб бориш маданияти шаклланади. Талабалар ўз фикрини фақат оғзаки эмас, балки ёзма равишда баён этиш маҳорати, мантиқий ва тизимли фикр юритиш кўникмаси ривожланади. Билдирилган фикрлар баҳоланмаслиги талабаларда турли ғоялар шаклланишига олиб келади. Бу метод талабаларда ижодий тафаккурни ривожлантириш учун хизмат қилади.

Вазифаси. "Ақлий хужум" қийин вазиятлардан қутулиш чораларини топишга, муаммони кўриш чегарасини кенгайтиришга, фикрлаш бир хилли - лигини йўқотишга ва кенг доирада тафаккурлашга имкон беради. Энг асосийси, муаммони ечиш жараёнида курашиш муҳитидан ижодий ҳамкорлик кайфиятига ўтилади ва гуруҳ янада жипслашади.

Объекти. Қўлланиш мақсадига кўра бу метод универсал ҳисобланиб тадқиқотчиликда (янги муаммони ечишга имкон яратади), ўқитиш жараёнида (ўқув материалларини тезкор ўзлаштиришга қаратилади), ривожлантиришда (ўз-ўзини бир мунча самарали бошқариш асосида фаол фикрлашни шаклланти - ради) асқотади.

Қўлланиш усули. “Ақлий хужум” иштирокчилари олдига қўйилган муаммо бўйича хар қандай мулохаза ва таклифларни билдиришлари мумкин. Айтилган фикрлар ёзиб борилди ва уларнинг муаллифлари ўз фикрларини қай - тадан хотирасида тиклаш имкониятига эга бўлди. Метод самараси фикрлар хилма-хиллиги билан тавсифланди ва хужум давомида улар танқид қилин - майди, қайтадан ифодаланмайди. Ақлий хужум тугагач, муҳимлик жихатига кўра энг яхши таклифлар генерацияланади ва муаммони ечиш учун зарурлари танланади.

«Ақлий хужум» методи ўқитувчи томонидан қўйилган мақсадга қараб амалга оширилади:

1. Талабаларнинг бошланғич билимларини аниқлаш мақсад қилиб қўйилганда, бу метод дарснинг мавзуга кириш қисмида амалга оширилади.

2. Мавзуни такрорлаш ёки бир мавзуни кейинги мавзу билан боғлаш мақсад қилиб қўйилганда - янги мавзуга ўтиш қисмида амалга оширилади.

3. Ўтилган мавзуни мустаҳкамлаш мақсад қилиб қўйилганда - мавзудан сўнг, дарснинг мустаҳкамлаш қисмида амалга оширилади.

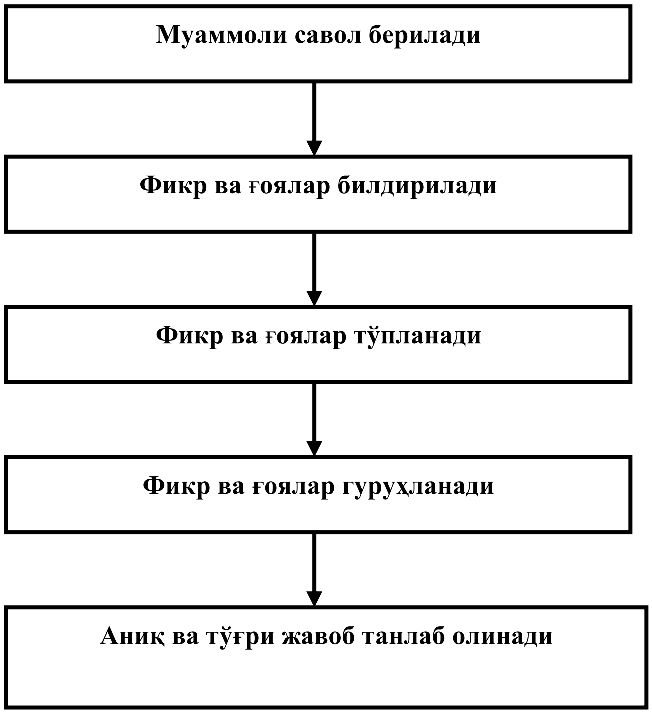
«Ақлий хужум» методининг афзаллик томонлари:

- натижалар баҳоланмаслиги талабаларни турли фикр-ғояларнинг шакл - ланишига олиб келади;
- талабаларнинг барчаси иштирок этади;
- фикр-ғоялар визуаллаштирилиб борилади;
- талабаларнинг бошланғич билимларини текшириб кўриш имконияти мавжуд;
- талабаларда мавзуга қизиқиш уйғотиш мумкин.

«Ақлий хужум» методининг камчилик томонлари:

- ўқитувчи томонидан саволни тўғри қўя олмаслик;
- ўқитувчидан юқори даражада эшитиш қобилиятининг талаб этилиши.

«Ақлий хужум» методининг таркибий тузилмаси



«Ақлий хужум» методининг босқичлари:

1. Талабаларга савол ташланади ва уларга шу савол бўйича ўз жавобларини (фикр, мулоҳаза) билдиришларини сўралади;
2. Талабалар савол бўйича ўз фикр-мулоҳазаларини билдиришади;
3. Талабаларнинг фикр-ғоялари (магнитафонга, видеотасмага, рангли қоғозларга ёки доскага) тўпланади;
4. Фикр-ғоялар маълум белгилар бўйича гуруҳланади;
5. Юқорида қўйилган саволга аниқ ва тўғри жавоб танлаб олинади.

«Ақлий хужум» методини қўллашдаги асосий қоидалар:

а) Билдирилган фикр-ғоялар муҳокама қилинмайди ва баҳоланмайди.

б) Билдирилган ҳар қандай фикр-ғоялар, улар ҳатто тўғри бўлмаса ҳам инобатга олинади.

в) Билдирилган фикр-ғояларни тўлдириш ва янада кенгайтириш мумкин.

Мавзу бўйича асосий тушунча ва иборалар

Замонавий таълим воситаси тушунчаси , таълим воситаси турлари, таълим воситасини қўллаш усуллари

Кластер
Кластер - (ўрам, боглам). Билимларни актуаллашишини рагбатлантиради, мавзу бўйича фикрлаш жараёнига янги бирлашган тассавурларни очик ва эркин кириб боришига ёрдам беради.

«Кластерни тузиш коидалари» билан танишадилар. Катта когознинг марказига калит сўзи ёзилади.

Калит сўзи билан бирлашиши учун унинг ён томонларига кичик айланалар ичига «йўлдошлар» ёзилади ва «Катта» айланага чизикчалар билан бирлаштирилади. Бу «йўлдошлар» нинг «кичик йўлдошлари» бўлиши мумкин ва х.о. Мазкур мавзу билан боглик бўлган сўзлар ва иборалар ёзилади.

Мулохаза килиш учун кластерлар билан алмашишади.

Гурухларда иш олиб бориш қоидалари

Ўзаро ҳурмат ва илтифот кўрсатган холда ҳар ким ўз дўстларини глай олиши керак;
Берилган топшириқга нисбатан ҳар ким актив, ўзаро ҳамкорликда ва сулиятли ёндашиши керак;
Зарур пайтда ғар ким ёрдам сўраши керак;
Сўралган пайтда ҳар ким ёрдам кўрсатиши керак;
Гурух иш натижалари баҳоланаётганда ҳамма қатнашиши керак;
Ҳар ким аниқ тушуниши керакки:
Ўзгаларга ёрдам бериб, ўзимиз ўрганамиз!
Биз бир қайиқда сузаяпмиз: ё бирга кўзлаган манзилга етамиз, ёки га чўкамиз!

Мустақил ўрганиш учун саволлар

1. Замонавий таълим воситалари деганда нимани тушунасиз ?
2. Замонавий таълим воситаларини турларини тушунтиринг ?
3. Замонавий таълим воситаларини қўллаш усулларини тушунтиринг ?
4. Ахборотларни кодлаштириш нима учун хизмат қилади ?

“Давра сухбати” мунозарасини ўтказиш бўйича йўриқнома

1. Сўзга чиққанларни диққат билан, бўлмасдан тингланг.
2. Маърузачининг фикрига қўшилмасанг, ўз фикрингни билдиришга рухсат сўра.
3. Маърузачининг фикрига қўшилсанг, кўриб чиқилаётган масала бўйича қўшимча фикрлар билдир.

Таянч сўзлар ва иборалар:

- Алгоритм
- Объект
- Сўз
- Аниқлик
- Дискретлик
- Оммавийлик
- Тушунарлилик
- Натижавийлик
- Блок-схема

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР

1 – мавзу. Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Математиканинг соҳаларга татбиқлари.
2. Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.
3. Матрицалар ва уларнинг татбиқлари.
4. Векторлар ва уларнинг татбиқлари.

Таянч тушунчалар: Алгебра, алгоритм, 2,3 ва n-тартибли детерминантлар, бош диагонал, ёрдамчи диагонал, минор, алгебраик тўлдирувчи, учбурчаклар қоидаси, диагонал қоидаси, матрица, матриванинг ўлчами, матриванинг детерминанти, махсус матрица, махсусмас матрица, бош диагонал, диагонал матрица, бирлик матрица, транспонирланган матрица, тенг матрицалар, матрицаларнинг йиғиндиси,матрицани сонга кўпайтириш, матрицалар кўпайтмаси,матрицанинг к-тартибли минори, матрицанинг ранги, элементар алмаштиришлар,тескари матрица, детерминантларнинг хоссалари, детерминантни бирор сатри (устуни) элементлари бўйича ёйиш.

Математиканинг соҳаларга татбиқлари. Мамлакатимизда математика 2020 йилдаги илм-фанни ривожлантиришнинг устувор йўналишларидан бири сифатида белгиланди. Ўтган давр ичида математика илм-фани ва таълимини янги сифат босқичига олиб чиқишга қаратилган қатор тизимли ишлар амалга оширилди:

биринчидан, илғор илмий марказларда фаолият юритаётган ватандош математик олимларнинг таклиф қилиниши ва халқаро илмий-тадқиқотлар олиб борилиши учун зарур шарт-шароит яратилди;

иккинчидан, халқаро фан олимпиадаларида ғолиб бўлган ёшларимиз ва уларнинг мураббий устозлари меҳнатини рағбатлантириш тизими жорий этилди;

учинчидан, олий таълим ва илмий-тадқиқотларнинг ўзаро интеграциялашувини таъминлаш мақсадида Талабалар шаҳарчасида Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институтининг (кейинги ўринларда — Институт) янги ва замонавий биноси барпо этилди. Математика соҳасидаги фундаментал тадқиқотларни молиялаштириш ҳажми бир ярим бароборга оширилди, бюджет маблағлари ҳисобидан суперкомпьютер, замонавий техника ва асбоб ускуналар харид қилинди;

тўртинчидан, илмий даражали кадрларни тайёрлашнинг бирламчи босқичи сифатида стажёр-тадқиқотлик институти жорий этилди;

бешинчидан, илм-фан соҳасидаги устувор муаммоларни тезкор бартараф этиш, фан, таълим ва ишлаб чиқариш интеграциясини кучайтириш масаласини Ҳукумат даражасида белгилаш мақсадида Ўзбекистон Республикасининг Бош вазири раисилигида Фан ва технологиялар бўйича республика кенгаши ташкил этилди.

Шу билан бирга, соҳада ечимини топмаган қатор масалалар математика соҳасидаги таълим сифати ва илмий-тадқиқот самарадорлигини оширишга қаратилган чора-тадбирларни амалга ошириш заруратини кўрсатмоқда. Жумладан:

биринчидан, математика таълимотининг таълим олиш босқичлари ўртасидаги узвийлик тўлиқ таъминланмаган;

иккинчидан, умумтаълим мактабларида математика дарсликлари ўқувчиларнинг ёшига нисбатан фанни ўзлаштиришни қийинлаштирувчи мураккаб масалалардан иборат ва бошқа фанларда ўтиладиган мавзулар билан уйғунлаштирилмаган;

учинчидан, математикага қизиқувчан, халқаро олимпиадалар ғолиблари бўлган аксарият иқтидорли ёшларимиз ҳудудлардан бўлишига қарамасдан уларнинг келгуси ривожланиши учун олий таълим ва илм-фан соҳасида зарур шарт-шароит яратиб берилмаган;

тўртинчидан, математика соҳасидаги илмий-тадқиқотнинг амалиёт ва ишлаб чиқариш билан боғлиқлиги заифлигича сақланиб қолмоқда;

бешинчидан, соҳадаги олимларнинг хорижий илмий ва таълим муассасалари билан алоқалари миллий математикани жаҳон миқёсига олиб чиқиш, халқаро ҳамжамиятда нуфузини ошириш учун етарли эмас.

Таълимнинг барча босқичларида математика фанини ўқитиш тизимини янада такомиллаштириш, педагогларнинг самарали меҳнатини қўллаб-қувватлаш, илмий-тадқиқот ишларининг кўламини кенгайтириш ва амалий аҳамиятини ошириш, халқаро ҳамжамият билан алоқаларни мустаҳкамлаш, шунингдек, 2017 — 2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини ривожлантиришнинг бешта устувор йўналиши бўйича Ҳаракатлар стратегиясини «Илм, маърифат ва рақамли иқтисодиётни ривожлантириш йили»да амалга оширишга оид давлат дастурида белгиланган вазифалар ижросини таъминлаш мақсадида:

1. Қуйидагилар математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш, илмий-тадқиқотларни ривожлантириш ва илмий ишланмаларни амалиётга жорий қилишнинг устувор йўналишлари этиб белгиланди:

мактабгача, умумий ўрта, ўрта махсус, профессионал, олий таълим ташкилотлари ва илмий муассасалар ўртасидаги яқин ҳамкорликни таъминловчи яхлит тизимни шакллантириш;

илғор хорижий тажриба асосида мактабгача ёшдаги болаларда илк математик тасаввурларни шакллантириш бўйича замонавий педагогик технологияларни жорий қилиш;

умумий ўрта ва ўрта махсус таълим муассасаларида математика фанларини ўқитиш сифатини ошириш, ҳудудларда математика фанига ихтисослаштирилган мактаблар фаолиятини ривожлантириш ҳамда янги мактабларни ташкил этиш;

математика фани бўйича кадрларни, хусусан қишлоқ жойлардаги мактабларнинг кадрларини тайёрлаш ва қайта тайёрлаш тизимини ривожлантириш, математика фани бўйича дарсликлар ва ўқув қўлланмаларни такомиллаштириш;

иқтидорли ёшларни аниқлаш ҳамда уларнинг математика фани бўйича маҳаллий ва халқаро фан олимпиадаларида муваффақиятли иштирок этишини ҳамда совринли ўринларни эгаллашини таъминлаш;

таълим беришнинг онлайн платформасини яратиш ва амалиётга татбиқ этиш, масофадан ўқитиш тизими самарадорлигини ошириш, баҳолаш тизимининг шаффофлигини таъминлаш механизмларини жорий қилиш;

Математика фанини билиш даражасини баҳолаш бўйича миллий сертификатлаштириш тизимини жорий қилиш, олий таълимнинг тегишли йўналишлари ва мутахассисликларида математика фани бўйича машғулотларни кўпайтириш ҳамда таълим бериш сифатини ошириш;

математика соҳасидаги илмий-тадқиқотларнинг ишлаб чиқариш билан узвий боғлиқлигини таъминлаш, амалий математикани ривожлантириш ва иқтисодиёт тармоқларидаги муаммоларни моделлаштириш асосида математик ечимларни ишлаб чиқиш;

математика соҳасида таълим олаётган ва илмий-тадқиқотлар билан шуғулланаётган иқтидорли ёшларни қўллаб-қувватлаш, чет элдаги олий таълим муассасалари ҳамда илмий ташкилотлар билан алоқаларни ривожлантириш;

мамлакатимизнинг илмий ва таълим ташкилотларини босқичма-босқич жаҳоннинг математика фани бўйича етакчи илмий марказлари даражасига етказиш.

Ҳозирги замонда иқтисодга, ишлаб чиқаришга қўйилаётган юксак талабларни бажаришда кадрларнинг умумий малакаси олдинги ўринга қўйилмоқда. Бу юксак талаблар ҳамма мутахассисларга тегишлидир.

Бундай юксак вазифаларни ҳар томонлама камол топган, юксак маълакали мутахассислар амалга оширади. Юксак малакали мутахассислар тайёрлашда «Математика» фанининг катта аҳҳамиятга эга эканлиги ҳеч кимда шубҳа туғдирмаса керак.

Ҳамма соҳаларда математик қонуниятларга асосланган замонавий компъютерларнинг муваффақият билан татбиқ этилиши ҳамда унинг кундан-кунга ривожланиб бораётганлиги, ёш мутахассисларнинг тегишли соҳалар, масалаларининг математик моделларини туза билиши ва унда ҳисоблаш техникасини жорий этиш вазифаларини қўймоқда. Бу масалаларни моделлаштириш математик амаллар ва усуллар ёрдамида амалга оширилади.

Маълумки, математикадаги мавжуд, натурал сонлар, арифметик амаллардан бошлаб, ҳозирги замонавий, чизиқли алгебра ва аналитик геометрия, дифференциал ва интеграл ҳисоб ҳамда дифференциал тенгламаларгача тушунчалар реал дунёнинг моделларидир. Бу тушунчаларнинг ҳаммаси инсоният эҳтиёжларидан-нарсаларни санаш, хўжалик ҳисоби каби тирикчилик учун зарур масалалардан келиб чиққан ва ривожланиб бормоқда.

Математика ўз ривожланиш тарихида механика, физика, биология каби фанлардан ташқари ижтимоий фанларга ҳам жадал кириб, ривожланиб бормоқда. Математикани инсоният тараққиётида вужудга келган ва унинг ривожланишида катта аҳамиятга эга бўлган фанларнинг етакчиларидан десак хато қилмаган бўламиз. Бу фикримизнинг исботини математика ибораси юнонча “матема” - “билим, илм, фан” дейилиши билан ҳам изоҳласа бўлади.

Маълумки, математик тушунча ва моделлар универсаллик хусусиятига эга, яъни айнан битта модел физикада ўз маъносига, биологияда ҳам, иқтисодиётда ҳам маълум маъноларга эга. Бундай моделлар табиий фанларда бир неча асрлардан бери қўлланиб ривожланиб келмоқда. Лекин, ижтимоий (иқтисодиёт, психология, жамиятшунослик ва бошқалар) фанларда қўллаш XIX-XX асрларда интенсив ривожланиши билан характерланади. XX асрда ижтимоий фанлар муаммоларини ечадиган математиканинг соҳалари вужудга кела бошлади. Кейинги ўн йилликларда математика усуллари, кишилик жамиятининг жараёнларини ва муносабатларини ўрганишда янада чуқурроқ кириб бормоқда. Математика, шундай универсал қуролки, реал борлиқдаги мавжуд боғланиш ва муносабатларни аниқлашда, ҳамда улардан ҳодиса ва жараёнларни илмий баҳолаб башорат қилишда фойдаланиш имкониятлари ривожланиб бормоқда.

Математикани ўрганишнинг бевосита амалий татбиқларидан ташқари ёш мутахассисларни ҳар тарафлама ривожланган комил инсон қилиб тарбиялашда унинг алоҳида ўрингa эгалигини таъкидламасдан бўлмайди. Таҳлилий мулоҳаза, мантиқий мушоҳада, фазовий тасаввур, абстракт тафаккур инсон фаолиятининг барча соҳаси учун зарур қобилиятки, булар математикани ўрганиш жараёнида шаклланиб, ривожланади.

Математика ва моделлар ҳамда моделлаштириш тушунчалари

Модел лотинча modulus сўзидан олинган бўлиб, нарса ёки ҳодисаларнинг асосий хусусиятларини ўзида ифодаловчи шартли (моддий ёки абстракт) тасвирдир.

У текширувчи шахси томонидан тузилиб, текширилаётган объект, оригиналнинг асосий хусусиятлари (тузилиши, ўзаро боғлиқлиги, хоссалари ва ҳоказо)ни текшириш мақсадига мувофиқ ҳолда тахминан ифодалайди. Модел ибораси инсон фаолиятининг кўп соҳаларида ишлатилади. Моделни текшириш натижасида оригинал ҳақида янги ахборотлар олинади. Моделларнинг оддий турлари қадим замонда ҳам бўлган. Моделларга мисол сифатида Ер шарининг модели глобусни, рассом ясаган расмни, бирор жойнинг харитасини ва ҳоказоларни кўрсатиш мумкин.

Ҳар бир объектни система (тизим) деб қараш мумкин. ***Система*** - (грекчадан олинган бўлиб. қисмлардан тузилган бутун, бирлашма, тизим) ўзаро боғлиқ элементлардан тузилган тўплам бўлиб, аниқ яхлитликни ифодалайди. Системалар ўта хилма-хил бўлиб, инсон илмий ва амалий фаолиятининг ҳамма жабҳаларида учрайди. Биз кўпроқ **иқтисодий системалар** ҳақида фикр юритамиз. Иқтисодий системаларнинг мисоллари қилиб, халқ хўжалигининг турли тармоқларини, ишлаб чиқариш корхоналарини, фирмаларни ва ҳоказоларни кўрсатиш мумкин.

Иқтисодий система деб бирор маҳсулот ишлаб чиқаришни олсак, унинг элементлари сифатида ишчи кучи -одамларни, станокларни, хом ашёларни қараш мумкин.

Системанинг элементлари ўзаро бир-бири билан боғлиқ бўлади. Масалан, халқ хўжалиги системасининг элементлари ишлаб чиқариш корхоналари ва бирлашмалари бир-бирига хом ашёлар, материаллар, жиҳозлар етиштириб беради. Ишлаб чиқариш корхоналари, бирлашмалар ўз навбатида, транспорт, курулиш ва бошқа ташкилотлардан ташкил топган системаларни ташкил этади. Юқоридаги ҳар бир система элементини яна мустақил система сифатида қараш мумкин.

Система тушунчаси фавқулодда кенг соҳаларда фойдаланилади.

Системаларни шартли равишда ***<u>моддий</u>*** **ва** ***<u>абстракт</u>*** (ғоявий) турларга ажратиш мумкин.

Моддий (материал) система инсондан ташқарида реал оламдаги элементлар тўпламидан ташкил топган системадир. Бунга станокларни, механизмларни ва бошқаларни киритиш мумкин.

Абстракт система инсон фикри, тасаввури бўлиб унга билимлар, назариялар, гипотезалар системасини киритиш мумкин.

Системаларни таҳлил қилиш жараёнида кўп сондаги текширишлар, тажрибалар ўтказилиб улардан энг қулайини танлаш масаласи келиб чиқади. Буни мавжуд (реал) системаларда ўтказиш жуда мураккаб ва жуда кўп вақтни олади, ҳамда иқтисодий томондан катта ҳаражатларга олиб келади.

<u>Системанинг моделини тузиш</u> ва унда тажриба, текширишлар ўтказиш масаласи юзага келади.

<u>Моделлаштириш</u> деганда мавжуд системани алмаштира оладиган ўхшашини, моделини тузиш ва уни текшириш натижасида оригинал (асли) ҳақида янги ахборотлар олиш тушунилади. Тузилган модел, моделлаштирилаётган системани тўлиқ ёки қисман хусусиятларини мужассамлаштиради.

Моделлаштиришда учта: 1) ***<u>субъект</u>*** сифатида текширувчи, инсон шахси; 2) ***<u>текшириш объекти</u>*** (система); 3) объектнинг модели элементларининг мавжудлигини пайқаш лозим.

Моделлаштириш жараёни қайтарилиш хусусиятига эга бўлиб, кўрсатилган босқичлр бир неча марта такрорланиш жараёнида модел кетма-кет мукаммаллаштирилади. Масалан, кеманинг модели ясалиб уни бир неча марта ўрганиб, текшириб, натижада сувда сузадиган **<u>асл кема</u>** ясалади. Бичувчи олдин буюмнинг моделини ясаб уни ҳар тарафлама текшириб, кейин уни материалга қўйиб кийимни бичади ва бу жараёнда материал иқтисод қилинади.

Амалиётда қўлланиладиган моделларни шартли равишда икки, ***<u>физик</u>***

ва ***<u>символик</u>*** (белгилик) турларга ажратиш мумкин. Ўз навбатида физик модел ***<u>геометрик ўхшашлик</u>*** модели ва ***<u>аналог-моделларда</u>*** ифодаланади.

<u>Геометрик ўхшашлик</u> моделида асосан оригиналнинг тузилиши ва унинг геометрик хусусиятлари мужассамлашади. Моделнинг ўлчамлари оригиналга нисбатан пропорсионал ҳолда кичирайтирилиши ёки катталаштирилиши мумкин. Масалан, текшириш учун самолёт, кема, машина, кўприк,биноларнинг моделлари оригиналга нисбатан кичирайтирилади. Атомнинг модели катталаштирилади.

Геометрик ўхшашлик моделларини ясашда ҳар бир текшириладиган система учун модел тузилади ёки эскисини қайтадан ясалади, бунга кўп вақт кетади ҳамда анча моддий ҳаражатларга олиб келади. Бундан ташқари бундай турдаги моделлар система динамикасини текширишда қийинчиликларга олиб келади.

Аналог-моделларда оригиналда кечадиган физик жараёнлар мўжассамлашади. Моделларнинг бундай тури техник қурилмалар моделларини ясашда ишлатилади

Символик моделларда оригинал тузилиши ҳамда уларга тегишли боғлиқликлар символлар ва улар орасидаги муносабатлар ёрдамида ифодаланади. Символик моделлар орасида математик ва мантиқий боғланишни ифодалайдиган ***<u>математик</u>*** **(тенглама, тенгсизлик, функция ва бошқалар)** ***<u>моделлар</u>*** асосий ўринни эгаллайди.

Маълумки, инсоният жамиятининг узлуксиз ўсиб борувчи эҳтиёжини тўларок қондириш учун математика фани вужудга келди ва ривожланди. Буни арифметика, геометрия ва алгебра фанларининг келиб чиқиши ҳамда ривожланиши тарихидан ҳам тушуниш мумкин. Масалан, томонлари a дан иборат квадрат юзининг модели $s = a \cdot a = a^2$ дир. A маҳсулот 5 кг нинг нархи 200 сўм бўлса, унинг 1 кг нинг нархи x учун $5x=200$ тенглама ўринли бўлиб, $x=40$ сўм эканлигини топамиз. Хулоса қилиб, математикадаги ҳар бир ифода, тенглама, тенгсизлик, формула, функция, ҳосила, интеграл ва ҳоказолар борлиқнинг моделлари эканлигини пайқаш қийин эмас.

Математик моделда мавжуд система (оригинал) тузилиши ҳамда элементларининг боғлиқлиги математик ва мантиқий муносабатлар системаси орқали ифодаланади. Математик модел ўзининг табиати билан оригиналдан фарқ қилади. Оригиналнинг хусусиятларини математик модел орқали текшириш жуда қулай ва арзон бўлади. Бундан ташқари кўп математик моделлар ***универсал*** бўлиб, улар ёрдамида турли системаларни текшириш мумкин. Масалан, икки номаълумли иккита чизиқли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

берилган бўлсин. (1) системанинг маъноси нима? Ҳар хил йўналишдаги мутахассислар: бу актив қаршиликли электр занжиридаги кучланиш ёки ток кучи модели, станокларни юклаш тенгламаси, бу система орқали товарларни реализация қилиш шартлари ифодаланган дейиш мумкин. Бу a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 ўзгармас коэффициентлар ва x_1, x_2 номаълумлар символларининг нимани ифодалаши билан боғлиқ. Бу математик ёзувнинг универсаллиги шундаки, у юқоридаги ҳамма ҳолатлар, асосий қонуниятларини ифодалайди.

Математик моделлаштириш ривожланишида ҳар хил мураккабликдаги ҳисоблашларни ва мантиқий амалларни катта тезлик билан бажарадиган замонавий компъютерларнинг аҳамияти каттадир.

Иқтисодий ҳодиса ва жараёнларнинг математик моделлари қисқача ***иқтисодий-математик модел*** (ИММ)лар деб аталади.

Иқтисодий жараёнларни моделлаштириш табиий фанлардагига нисбатан анча мураккаброқ кечади, бу биринчи навбатда иқтисод, ишлаб чиқариш жараёнларидан ташқари, ***ишлаб чиқариш муносабатларини*** ҳам қамраб олишидадир. ***Ишлаб чиқариш муносабатларида*** эса одамларнинг хулқ-одат, ҳатти-ҳаракатлари, қизиқиши ва шахсан ечим қабул қилишларини ҳисобга олмасдан моделни ясаб бўлмайди.

Бу фикрнинг тўғрилигини қуйидаги оддий мисолдан ҳам пайқаш мумкин. Уста (мастер) бошчилигида бир неча киши ишлайдиган жамоа кам серияли маҳсулот ишлаб чиқаришини олайлик. Уста ҳар куни ишчилар ўртасида ҳар хил деталларни ясашни тақсимлайди. Ишчилар бир-биридан умумий малакаси билан ҳам ишлаб чиқариш амалларини бажариши билан ҳам фарқ қилади. Ҳар бир ишчининг, ҳар бир амални бажаришини иш унумдорлигига қараб деталларни энг кам вақт сарф қилган ҳолда топширилган вазифани бажаришнинг математик моделини ясаб уни чизиқли дастурлаш масаласига келтириб ечиш мумкин. Лекин ечилган масала бошлиқни (устани) қаноатлантирмаслиги мумкин. Гап шундаки амаллар (деталларни) бажариш иш ҳақига нисбатан қулай, ноқулай бўлиши ва бу амалларни бажараётган ишчилар учун иш ҳақи улар ҳоҳлаган ҳамда уста ҳоҳлагандай муайян нормада бўлишини моделлаштириш қийин. Бунда устани, ишчини нима қизиқтиради ***буни оддий ҳолда ҳам математик ифодалаш анча мураккаб***. Бу соҳада ҳам эътиборга молик ишлар қилинмоқда.

Иқтисодий-математик моделлаштириш амалиётида шундай аниқ қонун-қоидалар ишлаб чиқилганки, уларни кейинги курсларда ўрганиладиган математик (математик дастурлаш, иқтисодий математик моделлар ва усуллар ва бошқалар) курсларда қаралади.

Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари. Иқтисодий жараён ёки ҳодисаларнинг математик моделини тузишда ва уни текширишда координатлар усулидан кенг фойдаланилади. Мисол тариқасида ушбуни қараймиз.

1-мисол. Бирор хил маҳсулотдан икки донасини ишлаб чиқариш учун 6 минг сўм харажат қилинади, ўн донаси учун эса харажат 26 минг сўм бўлсин.

Харажат функцияси чизиқ (тўғри чизиқ) ли бўлса, шу маҳсулотдан саккиз дона ишлаб чиқариш ҳаражатини топиш учун масаланинг математик моделини тузинг.

Ечиш. Ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг микдорини x , уни ишлаб чиқариш учун кетган ҳаражат миқдорини y билан белгиласак, xOy координатлар текислигида масала шартига асосан $A(2;\ 6)$ *ва* $B(10;\ 26)$ берилган нуқталар ҳосил бўлади. берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасига асосан,

$$\frac{x-2}{10-2}=\frac{y-6}{26-6} \quad \textit{ёки} \quad y=2{,}5x+1$$

математик моделни ҳосил қиламиз ва $x=8$ бўлганда $y=2{,}5\cdot 8+1=21$ минг сўм ҳаражат бўлиши келиб чиқади, координатлар усули **текислик ва фазодаги аналитик геометрия мавзулари**да ўрганилади.

Турли хил иқтисодий системаларнинг математик моделларини тузиш ва уни таҳлил қилишда чизиқли ва ночизиқли (чизиқли бўлмаган) моделлар деб аталувчи математик моделлар қўлланилади. Ушбу мисолларни қараймиз.

2-мисол. Фирма палто ва куртка (калта камзул) ишлаб чиқариш учун тўртта турдаги ресурслардан фойдаланади. Ресурслар сарфи қуйидагича: битта палто ишлаб чиқариш учун 1-турдаги ресурсдан a_1 бирлик, 2-турдаги ресурсдан a_2 бирлик, 3-турдаги ресурсдан a_3 бирлик, 4-турдаги ресурсдан эса a_4 бирлик миқдорда ишлатилади; битта куртка учун эса 1,2,3,4-турдаги ресурслардан мос равишда b_1,b_2,b_3,b_4 бирлик миқдорда ишлатилади. Ресурслар чегараланган бўлиб, улар мос равишда c_1,c_2,c_3,c_4 бирлик миқдорда берилган бўлсин.

Палто ва куртка ишлаб чиқариш учун ресурслар сарфи математик моделини тузинг.

Ечиш. Ишлаб чиқарилиши керак бўлган палтолар миқдорини x_1, ишлаб чиқарилиши керак бўлган курткалар миқдорини x_2 билан белгилайлик. Бу ҳолда $a_1 \cdot x_1$ кўпайтма палто ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур ресурс миқдорини худди шунга ўхшаш $b_1 x_2$ куртка ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур ресурс миқдорини ифодалайди. Демак, 1-тур ресурснинг умумий сарфи $a_1 x_1 + b_1 x_2$ бўлиб,

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$$

тенглик ҳосил бўлади. Юқоридагига ўхшаш 2, 3, 4-тур ресурслар сарфи учун мос равишда

$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2$$
$$a_3 x_1 + b_3 x_2 = c_3$$
$$a_4 x_1 + b_4 x_2 = c_4$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.Шундай қилиб, берилган масаланинг математик модели

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= c_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 &= c_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 &= c_3 \\ a_4 x_1 + b_4 x_2 &= c_4 \end{aligned}$$

икки номаълумли, тўртта чизиқли тенгламалар системаси бўлади. Бу моделда ўзгарувчилар (номаълумлар) фақат биринчи даражали бўлганлиги учун чизиқли модел деб юритилади.

Бу системанинг коэффициентларидан ҳамда озод ҳадлардан ушбу жадвалларни тузиш мумкин:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

Бундай жадвалларга матрицалар деб айтилади. Юқоридагига ўхшаш моделларни тузишда ва таҳлил қилишда олий алгебра (детерминантлар, матрицалар, чизиқли тенгламалар системаси ва бошқалар) элементларидан кенг фойдаланилади, бу математик аппарат **олий алгебра (чизиқли алгебра)** элементлари мавзусида ўрганилади.

3-мисол. Маълумки, бирор маҳсулотни сотишдан олинган жаъми даромад y, маҳсулот нархи p билан, унинг миқдори x нинг кўпайтмасига тенг, яъни

$$y = px \qquad (2)$$

бўлади.

Иккинчи томондан сотиладиган маҳсулотнинг миқдори унинг нархига боғлиқ, одатда нарх қанча арзонроқ қўйилса кўпроқ миқдорда, нарх кўтарилса эса камроқ миқдорда маҳсулот сотилади. Бу боғланиш оддий, чизиқли деб олайлик, яъни

$$p = ax + b \qquad (3)$$

кўринишда бўлсин. Нархнинг (3) формуладаги қийматини (2) тенгликка қўйсак

$$y = px = (ax + b)x = ax^2 + bx$$

математик модел келиб чиқади. Бу модел **ночизиқли моделлар**га мисол бўлади (x ўзгарувчи иккинчи даражада).

Текширилаётган иқтисодий система бутун халқ хўжалиги бўладими ёки унинг тармоқларими, айрим фермер хўжаликлари бўладими уларни моделлаштиришда кўрсаткичлар орасидаги функционал боғланишни, яъни маҳсулот ишлаб чиқариш учун у ёки бу ресурсларнинг сарфи орасидаги боғланишни топишдан иборат бўлади. Бундай функцияни одатда **ишлаб чиқариш функцияси** деб аталади. Ишлаб чиқариш функциясини умумий ҳолда

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (4)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бунда x ресурсларнинг сарфи, y ишлаб чиқариш кўрсаткичи (миқдори), a параметр (сон). Бу боғланиш аналитик (формулалар) кўринишида ёки жадвал кўринишида бўлиши мумкин. Бу функциянинг кўринишини умумий иқтисодий ёки технологик мулоҳазалардан ҳамда ахборотларни статистик ўрганишлардан олиш мумкин. (4) тенгликни

$$y = f(x, a) \;\; \text{ёки} \;\; x = \varphi(y, a)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин, булар мос равишда ишлаб чиқариш ва сарф функциялари деб аталади. Функциялар ҳақидаги бошланғич тушунчалар математик таҳлилга кириш бобида қаралади.

Маълумки, ўртача миқдор тушунчаси кўп соҳаларда ишлатилади, масалан, бирор ер майдонига экилган буғдой экинининг ўртача ҳосилдорлиги, сутдаги бўлган ўртача ёғ миқдори, бозорда сотилаётган товарнинг ўртача миқдори, маълум ойнинг кунларидаги бирор шаҳарга келган туристлар сони ва бошқалар. Тижорат ишларида ҳам ўртача миқдор аҳамиятга эга, мисол учун ҳафтанинг кунларида сотилган маҳсулот миқдори, куннинг соатларида ошхонага келган хўрандалар сони, йилнинг ойларидаги корхонанинг ўртача даромади ва бошқалар. Лекин ўртача миқдорни билиш билан кўп ҳолларда мақсадга эришиб бўлмайди. Исталган тадбиркорлик ишларини амалга оширишда ушбу саволга тўғри келиш мумкин, маҳсулот ишлаб чиқаришда қилинаётган ҳаражатни бирор миқдорга оширганда ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдори қанчага кўпаяди ёки аксинча ҳаражат бирор миқдорга қисқартирилганда маҳсулот ишлаб чиқариш қандай бўлади. Бундай ҳолларда ўзгарувчи миқдорлар ортиши ҳақида фикр юритилиб, қаралаётган ўзгарувчилар орттирмаси нисбатининг лимити қийматини ёки лимитик самарадорлик ҳақида мулоҳаза қилишга олиб келади. Мисол учун лимитик ҳаражат тушунчасини қарайлик. Табиийки, бирор маҳсулот ишлаб чиқарилганда ишлаб чиқариш ҳаражатлари ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг миқдорига боғлиқ. Маҳсулот миқдорини x бирлик билан, ишлаб чиқариш ҳаражатларини y билан белгиласак,

$$y = f(x)$$

функционал боғланиш келиб чиқади. Маҳсулот ишлаб чиқаришни Δx га орттирилса, $x + \Delta x$ маҳсулотга мос келувчи ҳаражат $f(x + \Delta x)$ бўлади. Демак, маҳсулот миқдорининг Δx орттирмасига, маҳсулот ишлаб чиқариш харажатининг

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

орттирмаси мос келади. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатга маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ўртача харажати дейилади.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

га эса ишлаб чиқаришнинг лимитик харажати дейилади, бундай масалаларни ечиш математикадаги **функция ҳосиласи** тушунчасига олиб келади , бу тушунчалар **дифференциал ҳисоб** мавзусида ўрганилади.

4-мисол. Маҳсулот ишлаб чиқариш харажати y ва маҳсулот ҳажми x орасида ушбу функционал боғланиш бўлсин:

$$y = 200x - \frac{1}{20}x^2.$$

Ишлаб чиқариш ҳажми:

а) $x = 100$; б) $x = 150$ бўлгандаги лимитик харажатларни топинг.

Ечиш. Берилган функциядан ҳосила олсак $y' = 200 - \dfrac{1}{10}x$

бўлиб, $x = 100$ бўлганда, $y'(100) = 200 - \dfrac{1}{10} \cdot 100 = 190$ ва $x = 150$ бўлганда эса, $y'(150) = 200 - \dfrac{1}{10} \cdot 150 = 185$ бўлади. Бу топилганларнинг иқтисодий маъноси, маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми 100 бирлик бўлганда, маҳсулот ишлаб чиқариш харажати келгуси маҳсулотни ишлаб чиқаришга ўтишда, 190 бирликни ташкил этади, ишлаб чиқариш ҳажми 150 бирлик бўлганда эса, у 185 ни ташкил этади.

Қаралаётган масалаларда бир неча вариантлардан оптимал (энг қулай) ини топиш масаласи қўйилган бўлса, унинг учун тузилган математик моделда унинг оптимал қийматини топиш масаласи қўйилади. Масалан, бирор фирма яқин келажак режасида ишлаб чиқариш функцияси, фақат ишлаб чиқаришда банд бўлган шахслар сонига боғлиқ бўлиб,

$$y = 4{,}5x^2 - 0{,}1x^3$$

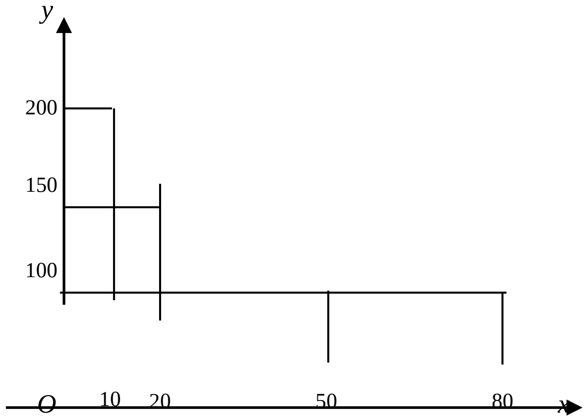
кўринишда бўлсин, бунда y ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдори, x ишловчи шахслар сони. Ишловчи шахслар сонининг шундай қийматини топиш керакки ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдори максимал бўлсин. Бу ҳолда ишлаб чиқариш функциясидан ҳосила олиб, уни 0 га тенглаштириб критик (стационар) нуқталарни топамиз:

$y' = 9x - 0{,}3x^2$, $9x - 0{,}3x^2 = 0$, бундан $x_1 = 0$ бўлганда функция минимумга $x_2 = 30$ да максимумга эга бўлади. Табиийки ишчилар сони 0 бўлганда ҳеч қандай маҳсулот ишлаб чиқарилмаслиги тушунарли, $x_2 = 30$ бўлганда, $y(30) = 4{,}5 \cdot 30^2 - 0{,}3 \cdot 30^3 = 1250$

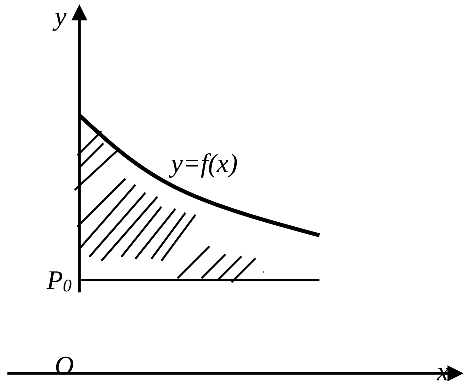
бўлиб, максимум қийматга эга бўлади. Оптималлик шарти қатнашган моделларга **оптимизациявий** (оптимизацион) моделлар деб аталади.

Маълумки, истеъмолчи бирор товарни бозордаги нархдан юқорироқ нархда сотиб олишга қодир бўлиб, уни пастроқ, бозор нархида ҳарид қилиб ортиқча пул маблағига эга бўлади. Истеъмолчининг бундай жами пул маблағига истеъмолчилар ортиқча пул маблағи деб атайлик. Бирор товарга талаб қуйидагича ифодалансин: товарнинг нархи 200 сўм бўлса уни 10 нафар истеъмолчи бир донадан, 150 сўм бўлса 20 нафар, 100 сўм бўлса яна 50 нафар истеъмолчи бир донадан ҳарид қилсин, бунда истеъмолчиларнинг умумий сарфи $S_1 = 200 \cdot 10 + 150 \cdot 20 + 100 \cdot 50 = 10000$ сўм бўлади. Товарга нарх бирданига 100 сўм бўлганда уни 80 нафар истеъмолчи бир донадан ҳарид қилиб умумий сарф $S_2 = 100 \cdot 80 = 8000$ сўм бўлар эди. Демак истеъмолчилар

$S_1 - S_2 = 10000 - 8000 = 2000$ сўм пулни иқтисод қилар эди. Бу ҳолатни график кўринишда 1-чизмадаги юзалар айирмаси сифатида ифодалаш мумкин.



1-чизма.



2-чизма

Умумий ҳолда, талаб $y = f(x)$ функция билан берилган бўлиб, p_0 бозордаги мувозанат нарх бўлса, истеъмолчилар ортиқча маблағини ҳисоблаш, юқоридан талаб чизиғи қуйидан $y = p_0$ тўғри чизиқ билан чегараланган юзани ҳисоблашга олиб келади (2-чизма). Бундай кўринишдаги масалалар математиканинг интеграл ҳисоб деб аталувчи аппаратини ўрганишга олиб келади, бу аппарат **аниқмас ва аниқ интеграл ҳисоб** мавзуларида қаралади.

Табиат ва жамиятдаги ҳодиса ҳамда жараёнлар бир неча факторларга боғлиқ бўлади. Масалан, бирор ер майдонига экилган буғдойдан олинадиган ҳосилнинг миқдори, бир неча факторларга: экилган буғдой уруғига, ернинг тузилишига, унинг суғорилишига, ўғит берилишига, об-ҳавонинг келишига, парвариш қилаётган шахснинг савиясига ва бошқаларга боғлиқ.

Иқтисодиётни қарайдиган бўлсак, умуман юқорида қайд этилган маҳсулот ишлаб чиқариш, ишлаб чиқариш ускуналари, ишчи кучи, ишчи шахс савияси, унинг кайфияти, ишлаб чиқарувчининг молиявий аҳволи ва бошқаларга боғлиқ, яъни уни

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

кўринишда ифодалаш керак бўлади. Бундай турдаги масалаларни моделлаштириш ва текшириш математиканинг кўп ўзгарувчили функциялар назарияси бўлими ёрдамида амалга оширилади.

Шуни таъкидлаймизки, „Математика'' фани олий таълимда асосий таянч фан эканлиги, унинг усуллари эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, информатика, чизиқли ва ночизиқли дастурлаш, макро ва микро иқтисод, эконометрия, иқтисодий таҳлил, молиянинг миқдорий методлари, логистика ва бошқа фанларнинг асосий билимларини эгаллашда асосий қурол сифатида ишлатилиши эътиборга олинди.

3. Матрицалар ва уларнинг татбиқлари. Системаларни моделлаштиришда **м*<u>атрицалар алгебраси</u>*** деган тушунча муҳим аҳамиятга эга . Режалаштириш муаммолари, ялпи маҳсулот, жами меҳнат сарфи, нархни аниқлаш ва бошқа масалалар ҳамда уларда компьютерларни қўллаш матрицалар алгебрасини қарашга олиб келади. Ишлаб чиқаришни режалаштириш, моддий ишлаб чиқариш орасидаги мавжуд боғланишларни ифодалашда ва бошқаларда, маълум даражада тартибланган ахборотлар системасига асосланган бўлиши лозим. Бу тартибланган ахборотлар системаси муайян жадваллар кўринишида ифодаланган бўлади. Мисол ўрнида моддий ишлаб чиқариш тармоқлари орасидаги ўзаро боғлиқлик ахборотлари системасини қарайлик. Ишлаб чиқариш 5 та (масалан, машинасозлик, электроэнергия, метал, кўмир, резина ишлаб чиқариш саноатлари) тармоқдан иборат бўлсин. Бунда улар орасидаги ўзаро боғлиқлик 1-жадвал билан ифодалансин.

1-жадвал.

Тармоқ-лар	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

Бу жадвалда a_{ij} $(i, j = 1,2,3,4,5)$ лар билан, i-тармоқнинг j- тармоққа етказиб берадиган (таъминлайдиган) маҳсулоти миқдори белгиланган, чунончи, a_{21}, a_{22}, ..., a_{25} лар 2-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга; a_{31}, a_{32}, ..., a_{35} лар эса 3-тармоқнинг мос равишда ҳамма тармоқларга етказиб берадиган маҳсулотлари миқдорини билдиради. a_{22}, a_{33} лар мос равишда 2,3-тармоқларнинг ўз эҳтиёжларига сарфини ифодалайди.

Юқоридагига ўхшаш ишлаб чиқариш мезони (нормаси) ахборотлари системасига сонли мисол қарайлик. Корхона 3 турдаги хом ашё ишлатиб 4 хилдаги маҳсулот ишлаб чиқарадиган бўлсин, бунда хом ашё сарфи нормаси системаси 2-жадвал билан берилган бўлсин.

2-жадвал.

Хом ашёлар	Маҳсулотлар			
	1	2	3	4
1	2	3	2	0
2	4	0	3	5
3	3	5	2	4

2-жадвалда масалан, 1-турдаги хом ашё сарфи нормаси мос равишда 1,2,3,4-хилдаги маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун 2,3,2,0 бўлади.

1 ва 2 жадваллар, математикада ўрганиладиган матрицалар тушунчасининг мисоллари бўлаолади. Матрицалар иқтисодий изланишларда кенг қўлланилмоқда, хусусан, улардан фойдаланиш ишлаб чиқаришни режалаштиришни осонлаштириб, меҳнат сарфини камайтиради, ҳамда режанинг ҳар хил вариантларини тузишни ихчамлаштиради. Бундан ташқари ҳар хил иқтисодий кўрсаткичлар орасидаги боғлиқликни текширишни осонлаштиради. Бу ҳолатлар матрицаларни умумий ҳолда қарашга олиб келади.

1-таъриф. m та сатрли ва n та устунли тўғри бурчакли $m \cdot n$ та элементдан тузилган жадвал

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ ------ & --- \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m\times n$ ***ўлчамли матрица*** дейилади. A матрицани қисқача (a_{ij}) $(i=1,...m,\ j=1,...n)$ билан ҳам белгилаш мумкин. Матрицаларда сатрлар сони устунлар сонига тенг бўлса, бундай матрицалар **квадрат матрица** деб аталади.

Ҳар бир n тартибли квадрат матрица учун унинг элементларидан тузилган *детерминантни* ҳисоблаш мумкин, бу детерминантга A матрицанинг ***детерминанти*** дейилади ва $\det A$ ёки $|A|$ билан белгиланади. $\det A=0$ бўлса, A матрицага ***махсус матрица***, $\det A\neq 0$ бўлса, ***махсусмас матрица*** дейилади. Квадрат матрицанинг $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ элементлар жойлашган диагонали ***бош диагонал***, $a_{1n},a_{2n-1},\ldots,a_{n1}$ элементлари жойлашган диагонали ***ёрдамчи диагонал*** дейилади. Бош диагоналдаги элементлар 0дан фарқли бошқа барча элементлари 0 га тенг квадрат матрица ***диагонал матрица*** дейилади.Масалан,

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрица диагонал матрицадир. Диагоналдаги барча элементлари 1 га тенг диагонал матрица ***бирлик матрица*** дейилади ва

$$E=\begin{pmatrix} 1\,0\ldots 0 \\ 0\,1\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\cdots 1 \end{pmatrix}$$

билан белгиланади.

Фақат битта сатрдан иборат $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$ матрицага сатр матрица дейилади. Фақат битта устунга эга

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

матрицага устун матрица деб аталади.

Барча элементлари 0 лардан иборат бўлган матрицага нўл матрица дейилади ва O билан белгиланади.

А матрицага қуйидаги матрицани мос қўйиш мумкин:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\cdots a_{m2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Бу матрицанинг ҳар бир сатри A матрицанинг унга мос устунидан иборат. A^T матрицани A матрицага нисбатан транспонирланган дейилади.

$A = (a_{ij})$ ва $B = (b_{ij})$ $(i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ матрицаларнинг мос элементлари $a_{ij} = b_{ij}$ тенг бўлса, бундай матрицалар тенг дейилади.

2. *Матрицалар устида амаллар.* Матрицаларни қўшиш, сонга кўпайтириш ва бир-бирига кўпайтириш мумкин.

Бир хил ўлчамли $A = (a_{ij})$ва $B = (b_{ij})\,(i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ матрицаларнинг йиғиндиси деб, элементлари $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ равишда аниқланадиган учинчи $C = (c_{ij})$ матрицага айтилади. Равшанки, C матрицанинг ўлчами олдинги матрицаларнинг ўлчами билан бир хил бўлади. Масалан:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицалар йиғиндиси

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 & 0+3 \\ 3-2 & 1+4 & -1+2 \\ 0+5 & 4+0 & 5+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}=C$$

бўлади. Матрицаларни қўшиш амали қуйидаги ўрин алмаштириш ва гуруҳлаш хоссаларига эга, яъни

$$A+B=B+A, \qquad (A+B)+C=A+(B+C).$$

Матрицаларни қўшишда бирор матрицага O матрицани қўшиш одатдаги сонларни қўшишдаги нўл сони ролини ўйнайди, яъни

$$A+O=A.$$

масалан,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

A матрицани λ сонга кўпайтириш деб унинг ҳамма элементларини шу сонга кўпайтиришга айтилади, яъни

$$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

масалан,

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

матрицани $\lambda=3$ га кўпайтирсак,

$$\lambda A=3\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 6 & 0 \\ 12 & 9 & 3 \\ 15 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

бўлади.

$m \cdot k$ ўлчамли $A=(a_{ij})$ матрицанинг $k \cdot n$ ўлчамли $B=(b_{ij})$ матрицага, кўпайтмаси деб $m \cdot n$ ўлчамли шундай $C=(c_{ij})$ матрицага айтиладики унинг c_{ij} элементи A матрица i-сатри элементларини B матрица j-устунининг мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Матрицалар кўпайтмаси $C = AB$ билан белгиланади. Демак, матрицаларни кўпайтириш учун биринчи кўпайтувчининг устунлари сони, 2-кўпайтувчининг сатрлари сонига тенг бўлиши талаб қилинади. Шу сабабли, умуман $AB \neq BA$.

1-мисол. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ва $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ матрицалар берилган. A ва B матрицаларни кўпайтиринг.

Ечиш. Биринчи матрицанинг устунлар сони, иккинчи матрицанинг сатрлар сонига тенг, шунинг учун бу матрицаларни кўпайтириш мумкин:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot 5+3\cdot 6 & 1\cdot 7+0\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 0 \\ 4\cdot 2+(-3)\cdot 0+1\cdot 5+0\cdot 6 & 4\cdot 7+(-3)\cdot 2+1\cdot 4+0\cdot 0 \\ 2\cdot 2+5\cdot 0+3\cdot 5+1\cdot 6 & 2\cdot 7+5\cdot 2+3\cdot 4+1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 13 & 26 \\ 25 & 36 \end{pmatrix}.$$

Матрицаларни кўпайтириш ушбу

$$A \cdot (BC) = (AB) \cdot C$$

гуруҳлаш ҳамда

$$(A+B) \cdot C = AC + BC$$

тақсимот хоссасига эга. Масалан,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

бўлсин. Бу ҳолда

$$A\cdot(BC)=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+2\cdot 0 & 0\cdot 2+2\cdot(-3)\\ 3\cdot(-1)+4\cdot 0 & 3\cdot 2+4\cdot(-3)\\ 1\cdot(-1)+(-3)\cdot 0 & 1\cdot 2+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -6\\ -3 & -6\\ -1 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 14\\ -14 & -110\end{pmatrix}.$$

Энди $(AB)\cdot C$ кўпайтиришни бажарамиз:

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 4\\ 14 & 46\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13\cdot(-1)+4\cdot 0 & 13\cdot 2+4\cdot(-3)\\ 14\cdot(-1)+46\cdot 0 & 14\cdot 2+46\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13 & 14\\ -14 & -110\end{pmatrix}$$

Шундай қилиб

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

хосса ўринли бўлади. Энди тақсимот хоссасини қараймиз:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\\ & & \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

бўлсин. Олдин тақсимот хоссасининг чап томонини

$$(A+B)\cdot C$$

ҳисоблаймиз:

$$(A+B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 6 & -5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

Ўнг томони

$$AC+BC=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 19\\ -1 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 6 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

бўлади.

Шундай қилиб

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

тенглик ўринли бўлади.

Исталган квадрат матрица A ни мос бирлик E матрицага кўпайтирганда

$$AE=EA=A$$

тенглик ўринли бўлади, масалан

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot0+0\cdot1\\ -1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1\\ -3\cdot1+0\cdot0+0\cdot(-2) & -3\cdot0+0\cdot1+(-2)\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot0+(-2)\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Худди шунга ўхшаш $EA = A$ тенгликни ҳам текшириб кўриш мумкин (буни бажаришни ўқувчига ҳавола қиламиз).

3.Матрицанинг ранги ва уни ҳисоблаш. A $m\times n$ ўлчовли матрицада k сатр ва k та устунини ажратамиз, бунда, k, m ва n сонлардан кичик ёки уларнинг кичигига тенг бўлиши мумкин. Ажратилган сатр ва устунларнинг кесишувида ҳосил бўлган k-тартибли детерминантга A ***матрицанинг*** k***-тартибли минори дейилади.***

Таъриф. A матрицанинг 0 дан фарқли минорларининг энг юқори тартибига A ***матрицанинг ранги*** дейилади. A матрицанинг ранги $rangA$ ёки $r(A)$ билан белгиланади.

Матрица рангини бевосита ҳисоблашда кўп сондаги детерминантларни ҳисоблашга тўғри келади. Қуйидаги амаллардан фойдаланиб матрица рангини ҳисоблаш қулайроқ. Матрицада: 1)фақат 0 лардан иборат сатри (устуни)ни ўчиришдан; 2) иккита сатр (устун)нинг ўринларини алмаштиришдан; 3) бирор сатр (устун)нинг элементларини бирор $\lambda\neq 0$ сонга кўпайтириб, бошқа сатр (устун) мос элементларига қўшиш; 4) матрицани транспонирлашдан, унинг ранги ўзгармайди. Бу амалларга одатда ***элементар алмаштиришлар*** дейилади.

1-мисол. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

матрицанинг рангини ҳисобланг.

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаш учун элементар алмаштиришлардан фойдаланамиз. Биринчи сатр элементларини иккинчи сатр элементларига, биринчи сатр элементларини (–2)га кўпайтириб, учинчи сатр элементларига, ҳамда учинчи сатр элементларини тўртинчи сатр элемнтларига қўшиб қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Кейинги матрицада 2-сатрини (–1) га кўпайтириб тўртинчи сатрига қўшсак

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

бўлиб, тўртинчи тартибли минорлар 0 га тенг. Шундай қилиб, берилган матрицанинг ранги 3 га тенг.

4. Тескари матрица ва уни топиш. A квадрат матрица учун $AB = BA = E$ бирлик матрица бўлса, B квадрат матрица A матрицага ***тескари матрица*** дейилади. Одатда, A матрицага тескари матрица A^{-1} билан белгиланади.

Теорема: A квадрат матрица тескари матрицага эга бўлиши учун A матрицанинг детерминанти 0 дан фарқли бўлиши зарур ва етарлидир. (Бу теоремани исботсиз келтирдик, унинг исботини кенгроқ дастурли курслардан топиш мумкин, масалан, В.Е.Шнейдер ва бошқалар. «Олий математика қисқа курси» 1том. Т. Ўқитувчи. 1985. 407 б.)

A квадрат матрица учун $\det A \neq 0$ бўлса , унга тескари бўлган ягона матрица A^{-1} мавжуд.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ ------ & ---- \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрицага тескари A^{-1} матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots A_{n2} \\ ------ & ---- \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

формула билан топилади. Бунда A_{ij} мос равишда a_{ij} элементларнинг алгебраик тўлдирувчилари ва $\Delta=\det A$.

Тескари матрицани топишга мисол қараймиз.

2-мисол. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Олдин A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=18+4+3-2-12-9=2\neq 0.$$

Юқоридаги теоремага асосан тескари матрица мавжуд, чунки

$$\Delta=2\neq 0$$

яъни, берилган матрица махсусмас матрицадир. A^{-1} ни топиш учун A матрица ҳамма элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix}=6,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}=-5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&9\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&9\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

Тескари матрицани топиш

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

формуласига асосан

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2{,}5&4&-1{,}5\\0{,}5&-1&0{,}5\end{pmatrix}$$

бўлади. A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

тенгликнинг бажарилиши билан текшириб кўриш мумкин, ҳақиқатан ҳам,

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2.5&4&-1.5\\0.5&-1&0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+1\cdot(-2.5)+1\cdot0.5&1\cdot(-3)+1\cdot4+1\cdot(-1)&1\cdot1+1\cdot(-1.5)+1\cdot0.5\\1\cdot3+2\cdot(-2.5)+4\cdot0.5&1\cdot(-3)+2\cdot4+4\cdot(-1)&1\cdot1+2\cdot(-1.5)+4\cdot0.5\\1\cdot3+3\cdot(-2.5)+9\cdot0.5&1\cdot(-3)+3\cdot4+9\cdot(-1)&1\cdot1+3\cdot(-1.5)+9\cdot0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

яъни, $AA^{-1}=E$ бирлик матрица ҳосил бўлади, бу A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини исботлайди.

Такрорлаш учун саволлар

1. Матрица деб нимага айтилади?
2. Матрицанинг ўлчови нима ва у қандай ёзилади?
3. Квадрат матрица деб қандай матрицага айтилади?
4. Матрицанинг детерминанти нима?
5. Махсус ва махсусмас матрицалар қандай матрицалар?
6. Диагонал матрица деб нимага айтилади?
7. Бирлик матрица деб қандай матрицага айтилади?
8. Транспонирланган матрица деб нимага айтилади?
9. Қандай матрицалар тенг бўлади?
10. Матрицалар йиғиндиси нима?

2-мавзу. Функциялар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Функция таърифи ва уларнинг татбиқлари.
2. Функциялар ёрдамида табиий жараёнларни моделлаштириш.
3. Ҳосила таърифи ва унинг татбиқлари.
4. Интеграл ва унинг татбиқлари.
5. Қаторлар ва уларнинг татбиқлари.

Таянч иборалар ва тушунчалар. Ўзгармас ва ўзгарувчи миқдорлар, функция тушунчаси, функция аниқланиш соҳаси, қийматлар тўплами, аналитик усул, график усул, жадвал усул, ошкор ва ошкормас функциялар, функциянинг алгоритмик берилиши, мураккаб функция, тескари функция, Сонли қатор, чексиз йиғинди, умумий ҳад, гармоник қатор, қатор йиғиндиси, қисмий йиғинди, яқинлашувчи қатор, узоқлашувчи қатор, зарурий белги, етарли белги, таққослаш белгиси, Даламбер белгиси, Коши белгиси, интеграл белги, ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлар, ўзгарувчан ишорали қаторлар, Лейбниц белгиси, абсолют ва шартли яқинлашиш.

1. **Функция таърифи ва уларнинг татбиқлари.** ***Функция тушунчаси*** математиканинг энг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, унинг ёрдамида табиат ва жамиятдаги кўп жараён ва ҳодисалар моделлаштирилади.

Математик таҳлилда элементлари ҳақиқий сонлардан иборат, бўлган тўпламларни қараймиз. X ва Y лар ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. $x \in X$ тўпламда, $y \in Y$ тўпламда ўзгарсин.

Таъриф. $x \in X$ ҳар бир x га бирор қоида ёки қонун бўйича $y \in Y$ дан битта y мос қўйилса, X тўпламда ***функция берилган*** **(аниқланган)** деб аталади ва у

$$y = f(x)$$

символ билан белгиланади. Айрим ҳолларда $y = xf$ ҳам деб белгиланадики, бунда компьютерда олдин x қиймати олиниб, кейин ҳисобланадиган символ олинади. Бунда X тўпламга функциянинг **аниқланиш соҳаси,** Y тўпламга ўзгариш соҳаси ёки ***қийматлар тўплами*** дейилади. Одатда функция аниқланиш соҳасини D, қийматлар тўпламини E билан белгиланади.

Шундай қилиб, ҳар бир элемент $x \in X$ га битта ва фақат битта $y \in Y$ мослик ўрнатилган бўлса, бу мосликка X тўпламда функция аниқланган дейилади. x га **эркли ўзгарувчи** ёки **аргумент,** y га эса **эрксиз ўзгарувчи** ёки x **нинг функцияси** дейилади.

Шундай қилиб, функция берилган бўлиши учун: 1) X тўплам берилиши керак (кўп ҳолларда уни x билан y ўзгарувчиларнинг боғланишига кўра топилади); 2) x ўзгарувчининг X тўпламдан олинган ҳар бир қийматига унга мос қўйиладиган y ни аниқлайдиган қоида ёки қонун берилиши керак. (таърифда уни f символ билан белгиладик).

Масалан; 1) f $X = (-\infty, +\infty)$ тўпламга тегишли бўлган ҳар бир

—

сонга унинг ўзини ўзига кўпайтириб, яъни квадратга кўтариб мос қўйувчи қоида бўлсин. Бу ҳолда $y=x^2$ функция ҳосил бўлади. Бу функция $(-\infty, +\infty)$ оралиқда аниқланган; 2) f ҳар бир $x\in[0, +\infty)$ сонга шу сондан олинган квадрат илдизни мос қўйсин. Бу $y=\sqrt{x}$ функцияни ифодалайди. Унинг аниқланиш соҳаси $[0, +\infty)$бўлади.

1-мисол. $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Маълумки, функциянинг аниқланиш соҳаси x нинг шундай қийматлари тўпламики, бунда y функция ҳақиқий сон қийматларга эга бўлиши керак. Берилган функцияда

$$x-3\geq 0,$$
$$4-x>0$$

бўлгандагина x нинг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати ҳақиқий бўлади. Бу тенгсизликлар системасидан, $x\geq 3,\quad x<4$бўлиб, яъни $3\leq x<4$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $[3, 4)$ бўлади.

Функциянинг берилиш усуллари. Функция таърифида келтирилган x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос қўйиладиган y ни аниқловчи қоида ёки қонун турлича бўлиши мумкин. Демак, функциянинг берилиши ҳам турличадир. Функция ***аналитик***, ***жадвал*** **ва** ***график*** **ҳамда компьютер** усуллари ёрдамида берилиши мумкин:

1) функцияинг ***аналитик усул*** билан берилишида, x ўзгарувчининг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати, x аргумент устида алгебраик амалларнинг бажарилиши натижасида, яъни формулалар ёрдамида берилади. Масалан,

$$y=x^3+1,\quad y^2=\frac{x+5}{x^2-3},\quad y=3^{x+1},\quad y=\log_2(x+3);$$

2) ўзгарувчилар орасидаги боғланиш **жадвал** кўринишида берилиши мумкин. Масалан, кузатиш натижасида сутни ёпиқ идишда қиздирилганда P_1

босим остида унинг қайнаш температураси t_1, P_2 босим остида қайнаш температураси t_2 ва ҳ.к. бўлишини топганда қўйидаги жадвал келиб чиқади.

Босим P	P_1	P_2	$\dots$	P_n
Температура t	t_1	t_2	$\dots$	t_n

Бундан кўринадики P босим билан t температура орасида боғланиш бўлиб, P аргумент, t функция бўлади. Функциянинг бундай берилишига ***жадвал усулда*** берилган дейилади. Бундай усул кўпроқ тажрибаларда ишлатилади.

3) Функциянинг ***график усулида*** берилишида, x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш текисликдаги бирор чизиқ ёрдамида берилади. Бунда X ва Y тўпламлар орасидаги мослик график билан берилади. XOY текисликда l чизиқ берилган бўлсин. x нинг қийматига мос келган y нинг қийматини, топиш учун x нуқтадан OX ўқига перпендикуляр ўтказамиз. У l чизиқни битта A нуқтада кесиб ўтади. A нуқтадан OY ўқига перпендикуляр ўтказамиз, бу перпендикулярнинг OY ўқи билан кесишиш нуқтаси, y нинг x га мос қиймати бўлади. Маълумки, бундай мослик l чизиқ ёрдамида бажарилади. Функциянинг бундай берилиши, **график усулда берилган** дейилади. Функциянинг график усулида берилишидан, уни аналитик усул билан ифодалаш қийин бўлган ҳолларда ва функциянинг сифат ўзгариши график усулда яхши кўринадиган ҳолларда фойдаланилади. Масалан, физикавий тажрибалар жараёнида осциллографдан олинадиган график.

4) ***алгоритмик ёки компьютер усули*.** Функциянинг бундай усулда берилишида x нинг ҳар бир қиймати учун, $y = f(x)$ функциянинг қийматини ҳисоблайдиган алгоритим ёки программа берилган бўлади. Бундай программа ЭҲМга қўйилган бўлиб функциянинг қиймати автоматик ҳисобланади.

Функциянинг айрим ҳоллари

Ошкор ва ошкормас функциялар. Функция $y = f(x)$ кўринишда, яъни y га нисбатан ечилган бўлса, унга ***ошкор функция*** дейилади. Функция $F(x,\ y) = 0$ кўринишда берилган бўлса, яъни y га нисбатан ечилмаган бўлса, ***ошкормас функция*** кўринишда берилган дейилади. Масалан, $y = 3x^2 + 5,\quad y = \sin x,\quad y = 4^x$ функциялар ошкор кўринишда; $2x - 3y + 6 = 0,\qquad x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ функциялар ошкормас кўринишда берилган. Шуни таъкидлаймизки ҳамма $F(x,\ y) = 0$ кўринишдаги тенглик ҳам функцияни ифодалай бермайди. Масалан, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ тенглама функцияни ифодаламайди, чунки x нинг ҳар бир қийматига y нинг ҳақиқий сон қийматини мос қўйиш мумкин эмас.

Мураккаб функция. $y = f(u)$ бўлиб, $u = \varphi(x)$ функция берилган бўлса, y функцияга $\varphi(x)$ **функциянинг функцияси** ёки y га x нинг ***мураккаб функцияси*** дейилади. Масалан, $y = \lg(x^2 + 1)$ функцияда $u = x^2 + 1$ бўлиб. y x нинг мураккаб функцияси бўлади. Бундан ташқари $y = \sin(x^2 + 1),\quad y = 3^{x+5},\quad y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ ва ҳ.к. лар ҳам, мураккаб функцияга мисол бўлаолади.

Тескари функция*.** $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. y функциянинг қийматлар тўпламидаги ҳар бир қийматига x аргументнинг аниқланиш соҳасидан битта қиймати мос қўйилган бўлса, берилган функцияга ***тескари $x = d(y)$ ***функция*** берилган бўлади ва $D(f) = E(d)$ ва $E(f) = D(d)$ ҳар бир $x_0 \in D(f) = E(d)$ ва $y_0 = E(f) = D(d)$ бўлиб. $y_0 = f(x_0)$ фақат $x_0 = d(y_0)$ учун бажарилади. Масалан $y = 2x - 3$ функцияга тескари функция $2x = y + 3,\ x = (y+3)/2$ бўлади. $y = x^3$ функция $x = \sqrt[3]{y}$ тескари функцияга эга бўлади. Ўзаро тескари бўлган функцияларнинг графиклари $y = x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади.

2. Функциялар ёрдамида табиий жараёнларни моделлаштириш.

Чизиқли функция. Маълумки,

$$y = ax + b \qquad (1)$$

формула билан аниқланган функцияга чизиқли функция дейилади. Бу бурчак коэффициенти $k = a$, бошланғич ординатаси b бўлган тўғри чизиқ тенгламасидир.

1-мисол. Бирор корхонада ишлаб чиқарилаётган бир хил маҳсулот харажатини икки гуруҳ:

1) маҳсулот ҳажмига, пропорционал ўзгарувчи харажат, масалан, материаллар сарфи;

2) ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажмига боғлиқ бўлмаган ўзгармас харажатлар, масалан, маъмурият биноси ижарасига, уни иситишга кетадиган ва бошқа харажатлар деб қараш мумкин.

Ўзгармас харажатларни b билан, ўзгарувчи харажатларни, маҳсулотнинг ҳир бир бирлиги учун a билан белгиласак, бирор даврда x бирлик ҳажмдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган умумий харажат

$$y = b + ax$$

бўлиб, бу чизиқли функциядир.

2-мисол. Маҳсулотнинг умумий баҳоси унинг сонига пропорционал бўлсин. a битта маҳсулот нархи бўлса, x бирлик маҳсулотнинг умумий баҳоси

$$y = ax$$

чизиқли функция билан ифодаланади, маълумки бу координатлар бошидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасидир.

Чизиқли функция ва унинг графиги, иқтисодий миқдорлар орасида пропорционаллик мавжуд бўлган боғланишларда ишлатилади.

Даражали функция. Бундай функция

$$y = x^{\alpha} \qquad (2)$$

формула билан ифодаланади, бунда α 0 дан фарқли ихтиёрий ҳақиқий сон. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси α кўрсатгичга боғлиқ. α

натурал сон бўлса, ҳамма ҳақиқий сонлар учун аниқланган, α бутун манфий сон бўлса,

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

бўлиб, $x \neq 0$ бўлган ҳамма x лар учун аниқланган (бунда n натурал сон). $\alpha = 1/n$ кўринишдаги сон бўлса,

$$y = f(x) = x^{\alpha} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

бўлиб, n тоқ сон бўлса, $(-\infty, +\infty)$ интервалда, n жуфт сон бўлса, $[0, \infty)$ интервалда аниқланган.

Умуман олганда даражали функция ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиздир.

3-мисол. Италян иқтисодчиси Парето жамиятда фойдани тақсимлашнинг қуйидаги қоидасини таклиф этди: y билан x дан кичик бўлмаган фойдага эга бўлган шахслар сонини белгиласак,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

бўлади, бунда a ва m ўзгармаслар.

Парето қонуни катта фойдага эга бўлганда, тақсимотни етарли даражада аниқлик билан ифодалайди, паст даражадаги фойдага эга бўлганда аниқ эмас.

Бирор жамиятда фойдани тақсимлаш

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

формула билан аниқлансин:

1) 100000 дан кўп фойдага эга бўлган шахслар сони;

2) 100 нафар энг бой шахслар орасида, энг кам фойдани топинг.

Ечиш. 1) масала шарти бўйича, $x = 100000$, уни тақсимот формуласига қўйсак:

$$y=\frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

бўлади. Охирги тенгликни логарифмласак:

$$\lg y=\lg\frac{2000000000}{100000^{1.5}}=\lg 2000000000-1{,}5\lg 100000=\lg 2\cdot 10^{9}-1.5\lg 10^{5}=$$
$$=9+0{,}301-1{,}5\cdot 5=9{,}301-7{,}5=1{,}801,$$

яъни $\lg y=1.801$ бўлади. Логарифмлар жадвалидан $y=63{,}2$ ни топамиз. Шундай қилиб, Парето тақсимоти бўйича 63 киши 100000 дан кўп фойдага эга бўлади;

2) масала шарти бўйича $y=100,$ тақсимот формуласидан

$$100=\frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан $x=73700$ эканлигини аниқлаш мумкин (уни бажаришни ўқувчига ҳавола этамиз).

Шундай қилиб, 100 нафар энг бой кишилар ичида энг кичик фойда 73700 ни ташкил этади.

Функцияларнинг иқтисодда қўлланилишига мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Бу мавзу бўйича тингловчиларни шуғулланишини таклиф этамиз.

4. Ҳосила таърифи ва унинг татбиқлари.

Оний тезлик ҳақидаги масала. Амалиётда ҳар хил жараёнларни текширишда биринчи навбатда, шу жараённинг кечиши тезлигини аниқлаш керак бўлади. Тезликни аниқлаш ҳақидаги масала фан ва техниканинг энг асосий масалаларидан биридир.

Маълумки, текис кечадиган жараёнларда унинг кечиши тезлиги ўзгармасдир. Масалан, текис ҳаракатда ўтилган йўлнинг шу йўлни ўтишга кетган вақтга нисбати унинг тезлигини билдириб у ўзгармасдир.

Лекин табиатдаги ёки жамиятдаги кўпчилик ҳодисалар нотекис кечадиган жараёнлардир. Масалан, оғир моддий нуқтанинг бўшлиқда оғирлик кучи таъсирида эркин тушуши масаласини қарайлик. Физикадан маълумки, бўшлиқда моддий нуқтанинг эркин тушиши қонуни

$$S = \frac{g}{2}t^2 \qquad (1)$$

муносабат билан ифодаланиб, бу ерда t эркин тушиш бошланишидан ҳисобланган вақт, S t вақтда ўтган йўл, g эркин тушиш тезланиши, $g \approx 9{,}81 м/сек^2$. Бу ҳаракат нотекис бўлиб, унинг тезлигини топиш масаласини қараймиз.

Вақтнинг бирор аниқ t моменти (они)ни қарайлик. Бу моментда моддий нуқта A ҳолатда бўлсин. OA йўлнинг миқдори (1) формула билан топилади. Вақт Δt миқдорга ортсин, яъни t, Δt орттирма қабул қилади. $t+\Delta t$ моментда нуқта B ҳолатда бўлади. AB, вақт Δt орттирма олгандаги йўл орттирмаси, уни $AB = \Delta S$ билан белгилаймиз. (1) формулага $t+\Delta t$ қўйиб,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2, \quad \text{бундан} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

ёки $\Delta S = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2)$.

Охирги тенгликни Δt га бўлиб,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t) \qquad (2)$$

натижани оламиз. Охирги тенгликдан маълумки, $\Delta S / \Delta t$ нисбат t ва Δt га боғлиқ. Масалан: $\Delta t = 0{,}1$ сек, $t = 1$ сек бўлганда,

$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2\cdot 1 + 0{,}1) = 1{,}05g$ бўлиб, $t = 3$ сек бўлганда

$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2\cdot 3 + 0{,}1) = 3{,}05g$ бўлади.

Шунинг учун, нотекис ҳаракатнинг тезлиги фақат вақтнинг аниқ моментига тегишли бўлади. Шундай қилиб, вақтнинг ҳар бир моментидаги

оний тезлик ҳақида гапириш керак бўлади.

Оний тезлик тушунчасини қандай аниқлаш керак?

(2) тенгликдан маълумки, t ўзгармас бўлганда, $\Delta S/\Delta t$ А дан B ҳолатгача оралиқдаги ўртача тезлик бўлиб, уни v_{yp} билан белгилаймиз. Маълумки, Δt қанча кичик бўлса, t моментдаги тезликни шунча яхшироқ ифодалайди. Бундан шундай хулосага келамизки, эркин тушаётган нуқтанинг t моментидаги оний тезлиги v ни v_{yp} ўртача тезликнинг $\Delta t \to 0$ даги лимити каби аниқлаймиз, яъни

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{yp}$$

Шундай қилиб, оний тезликни ҳисоблаш учун қўйидаги кўринишдаги лимитни ҳисоблаш керак бўлади.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (3)$$

(3) кўринишдаги лимитни ҳисоблашга кўп сондаги амалий масалаларни ечишда тўғри келади.

Умуман, ўзгарувчи миқдор ўзгариш тезлигини топиш масаласи, математика фанининг энг аҳамиятли тушунчаларидан бири - ҳосила тушунчасига олиб келади.

Шунинг учун (3) кўринишдаги лимитларни ҳисоблашни умумий ҳолда қараш зарур бўлади.

Функция ҳосиласининг таърифи. 1-таъриф. $y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, x_0 нуқтадаги функция Δy орттирмасининг Δx аргумент орттирмасига нисбатининг, аргумент орттирмаси нолга интилгандаги лимитига, $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги <u>ҳосиласи</u> дейилади. Бу лимит

$$y', \; f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

символлардан бири билан белгиланади.

Шундай қилиб, таърифга асосан

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

бўлади, бу лимит мавжуд бўлса, ҳосила x_0 нуқтада мавжуд дейилади.

Ҳосилани топиш жараёни ***дифференциаллаш*** **деб** аталади.

Биз ўрганаётган $y = f(x)$ функция орқали қандай жараён тавсифланмасин, унинг ҳосиласи $y = f(x)$ физик нуқтаи назардан шу жараён кечишининг тезлигини ифодалайди.

Чунончи, τ вақт, Q бирор реакция натижасида олинган модданинг τ моментдаги миқдори бўлса, демак Q τ нинг функцияси бўлади. Q дан олинган ҳосила, реакция кечишининг тезлигини ифодалайди. τ вақт, Q бирор ўтказгич кесим юзидан вақт бирлигида ўтаётган электр миқдори бўлса, Q ҳосила ток кучининг ўзгариш тезлигини ифодалайди. Q иситилаётган жисмнинг ўзгарувчи температурасини тавсифласа, Q' ҳосила исиш тезлигини ифодалайди.

Функция ҳосиласини ҳосила таърифига асосан топишга бир неча мисоллар қараймиз:

1-мисол. $y = x^3$ функциянинг ҳосиласини ҳосила таърифига асосан топинг.

Ечиш. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ лимитни ҳисоблаймиз.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Шундай қилиб, $y' = 3x^2$.

2-мисол. $y = \sin x$ функция ҳосиласини ҳосила таърифига асосан, топинг.

Ечиш. аргумент x, Δx орттирма олганда, функция Δy орттирма олади.

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos(x+\Delta x/2)\sin \Delta x/2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)};$$

$$\Delta x \to 0 \quad \text{да} \quad \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x. \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = 1.$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x,\quad y' = (\sin x)' = \cos x$

бўлади.

Умуман, x ва y ўзгарувчиларнинг физик, иқтисодий, кимёвий маъноларидан воз кечсак, y дан x бўйича олинган ҳосила, y нинг x га боғлиқ бўлиб ўзгаришининг тезлигини ифодалайди.

Ҳосиланинг геометрик маъноси. Ҳосила муҳим геометрик маънога эга. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи унинг графигига $M(x_0,\ f(x_0))$ ***нуқтада ўтказилган уринманинг*** OX ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагининг тангенсига тенг. $y = f(x)$ эгри чизиққа $M_0(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ***ўтказилган уринма тенгламаси***

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

бўлади, бунда $y_0 = f(x_0)$. Функция графигига уриниш нуқтаси $M_0(x_0,\ y_0)$ да ўтказилган нормалнинг тенгламаси

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ (f'(x_0) \neq 0)$$

бўлади.

3-мисол. $y = \dfrac{x^3}{3} + 4$ эгри чизиққа абсциссаси $x_0 = 2$ нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини ёзинг.

Ечиш. $y_0 = \dfrac{20}{3}$, $\quad y'(2) = 2^2 = 4$, $\quad y - \dfrac{20}{3} = 4(x-2)$

ёки

$3y - 20 = 12(x-2)$, $\quad 12x - 3y - 4 = 0$, бу $M_0(2{,}20/3)$ нуқтадан ўтказилган уринманинг тенгламаси. Нормалнинг бурчак коэффициенти

$-\dfrac{1}{f'(x_0)} = -\dfrac{1}{4}$, $\quad$ демак, $\quad y - \dfrac{20}{3} = -\dfrac{1}{4}(x-2)$

ёки

$12y - 80 = -3(x-2)$, $3x + 12y - 86 = 0$

бўлиб, бу M_0 нуқтадан ўтказилган нормалнинг тенгламаси бўлади.

4. Интеграл ва унинг татбиқлари.

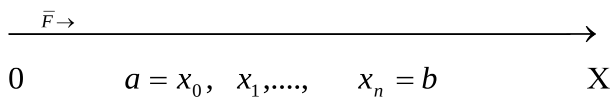
Аниқ интеграл математик таҳлилнинг энг асосий амалларидан биридир.

Юзаларни, ёй узунликларини, ҳажмларни, ўзгарувчан кучнинг бажарган ишини ҳамда иқтисоднинг бир қанча масалалари аниқ интегралга келтирилади.

Ўзгарувчан кучнинг бажарган иши масаласи

Масала. Материал нуқта F ўзгарувчан куч таъсирида OX ўқи бўйича ҳаракатланаётган бўлсин. F куч таъсирида материал нуқта *а* нуқтадан *в* нуқтага ўтганда бажарилган ишни ҳисобланг. F куч x нинг функцияси бўлади. $F(x)$ $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлсин.

Ечиш: $[a,b]$ кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ нуқталар орқали $[x_{i-1,} x_i]$ šисмий кесмаларга ажратамиз.



1-чизма.

Механикадан маълумки куч ўзгармас бўлса, бажарилган иш $A = F \cdot 1$, бунда F куч миқдори, 1 - силжиш узунлиги. Ҳар бир қисмий кесмада биттадан нуқта танлаймиз. Бу нуқталардаги кучнинг қийматини $F(c_i)$ларни ҳисоблаймиз $(i=1,n)$. Бунда ҳар бир қисмий кесмада бажарилган иш

$$A_i = F(c_i)\Delta x_i$$

бўлади. $[a,b]$ кесмада бажарилган иш тақрибан

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$$

бўлади.

$\max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i = \lambda$ деб белгиласак, бажарилган ишнинг аниқ қиймати

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

бўлади.

Шундай қилиб, F ***<u>ўзгарувчан кучнинг бажарган ишини ҳисоблаш</u>*** учун (1) кўринишдаги чексиз кўп сондаги чексиз кичиклар йиғиндисининг лимитини ҳисоблаш керак экан. Бундай лимитни ҳисоблашга жуда кўп сондаги геометрик, техник, технологик ва иқтисодий жараёнлардаги масалалар келтирилади.

Аниқ интегралнинг таърифи ва унинг геометрик маъноси. Юқоридаги масалани умумий ҳолда қараймиз. кесмада узлуксиз функция берилган бўлсин. $[a,b]$ кесмани $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i=1,\ n$ қисмий кесмаларга ажратамиз, ҳар бир қисмий кесмада биттадан $c_1, c_2, \ldots, c_n$ нуқталар танлаймиз. Бу нуқталарда $f(c_i)$ функция қийматларини ҳисоблаб $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$ йиғиндини тузамиз? бу йиғиндига $y = f(x)$ фугкция учун $[a,b]$ кесмадаги интеграл йиғинди дейилади. $\max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i = \lambda$ белгилаш киритамиз.

Таъриф. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ интеграл йиғиндининг $[a,b]$ кесманинг $[x_{i-1}, x_i](i=1,2,3,\ldots,n)$ қисмий кесмаларга бўлиниш усулига ва уларда

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаган $\lambda \to 0$ даги чекли лимити мавжуд бўлса, бу лимитга $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмадаги ***аниқ интеграли*** дейилади ва

$$\int_a^b f(x)dx$$

символ билан белгиланади.

Таърифга асосан

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

бўлиб, $y = f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ***интегралланувчи*** яъни бундай функциянинг ***аниқ интеграли*** мавжуддир.

Аниқ интеграл қуйидаги асосий хоссаларга эга:

1) чекли сондаги интегралланувчи функциялар алгебраик йиғиндисининг аниқ интеграли қўшилувчилар аниқ интегралларининг алгебраик йиғиндисига тенг, яъни

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx;$$

2) ўзгармас кўпайтувчини аниқ интеграл белгисидан чиқариш мумкин, яъни

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$$

3) $[a,b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ бўлса,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

бўлади;

4) $[a,b]$ кесмада $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик бажарилса,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

бўлади;

5) c $[a,b]$ кесмадаги бирор нуқта бўлса,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

тенглик ўринли бўлади;

6) m ва M сонлар $y = f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмадаги мос равишда энг кичик ва энг катта қийматлари бўлса,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

тенглик ўринли бўлади;

$$7)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$8)\ \int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$9)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn$$

бўлади;

10) $y = f(x)$ $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлса, бу кесмада шундай бир c нуқта топиладики

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бунга ўрта қиймат ҳақидаги теорема деб ҳам айтилади.

Аниқ интегрални ҳисоблаш. Ньютон-Лейбниц формуласи.

Аниқ интегралнинг таърифига асосан, яъни чексиз кўп сондаги чексиз кичиклар йиғиндисининг лимитини ҳисоблаш анча қийинчиликка олиб келади. Шунинг учун аниқ интегрални ҳисоблаш учун, бошқа аниқмас интеграл билан аниқ интеграл орасидаги боғланишга асосланган усулдан фойдаланилади.

$F(x), [a,b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияларидан бири бўлса

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

формула ўринли бўлиб, бунга **Нъютон-Лейбниц формуласи** дейилади. Бундан фойдаланиб ***аниқ интегралнинг катталиги*** ҳисобланади.

Шундай қўйилиб, аниқ интегрални ҳисоблаш учун ҳам, аниқмас интегралдагидек, бошланғич функцияни топиш керак экан. Бундай масала билан аниқмас интегрални ҳисоблашда тўларок шуғулландик. Демак, аниқмас интегрални ҳисоблашдаги ҳамма формула ва усуллар ўз кучида қолиб, ундан аниқ интегрални ҳисоблашда ҳам фойдаланамиз.

1-мисол. $\int_1^4 x^2 dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$

Эслатма: $y = x^2$ функциянинг $\frac{x^3}{3}$ бошланғич функциясини олдик, бунинг ўрнига ихтиёрий $\frac{x^3}{3} + C$ бошланғич функциясини олганда ҳам натижа бир хил бўлади. Ҳақиқатан, ҳам

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

бўлади. Шунинг учун бундан кейин $C = 0$ бўлган бошланғич функцияни оламиз.

2-мисол. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$ интегрални ҳисобланг:

Ечиш; $\sqrt{x+4} = t$ алмаштириш оламиз, $x = t^2 - 4,\ dx = 2tdt$ бўлиб,

$x = 0$ бўлганда, $\sqrt{0+4} = t,\ \ t = 2,\ \sqrt{5+4} = t,\ t = 3$ бўлади.

Шундай қилиб,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx = \int_2^3 (t2-4)t2tdt = \int_2^3 (2t^4-8t^2)dt = 2\int_2^3 t^4dt - 8\int_2^3 t^2dt = 2\frac{t^5}{5}\Bigg|_2^3 - 8\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^3$$

$$= \frac{2}{3}(3^5-2^5) - \frac{8}{3}(3^3-2^3) = \frac{2}{5}\cdot 211 - \frac{8}{3}\cdot 19 = \frac{506}{15} = 33\frac{11}{15}.$$

Демак, ***аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштирилганда*** ўзгарувчилар бўйича унинг интеграллаш чегараларини ҳам алмаштириб олинса, аниқмас интегралдагидек олдинги ўзгарувчига қайтиш керак эмас.

3-мисол. $\int_0^{\pi} x\sin xdx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш: ***Бўлаклаб интеграллаш***

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$$

формуласидан фойдаланамиз:

$$\int_0^{\pi} x\sin xdx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin xdx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos xdx = -\pi(\cos\pi + \sin x\pi)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$$

5. Қаторлар ва уларнинг татбиқлари.

1-таъриф. $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ сонлар кетма-кетлигидан тузилган.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_1^{\infty} u_n \qquad (1)$$

чексиз йиғиндига сонли қатор дейилади.

$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ ларга қаторнинг ҳадлари, u_n га эса n***- ҳади*** ёки ***умумий ҳади*** дейилади.

Қаторларга бир неча мисоллар келтирамиз:

1) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

қаторга ***гармоник қатор*** дейилади;

$$2)\ \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

қатор биринчи ҳади $a_1=\frac{1}{2}$, махражи $q=\frac{1}{2}$ бўлган геометрик прогрессияни ифодалайди;

$$3)\ \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

2. Қатор йиғиндиси ва унинг яқинлашуви. Сонли қатор таърифидан маълумки, унинг ҳадлари чексиз кўп бўлиб, йиғиндисини оддий йўл билан қўшиб, топиб бўлмайди. Шунинг учун қаторнинг йиғиндиси тушунчасини киритамиз. (1) қатор ҳадларидан

$$u_1=S_1,\ \ u_1+u_2=S_2,\ \ u_1+u_2+u_3=S_3,\ldots,$$
$$u_1+u_2+u_3+\ldots.+u_n=S_n$$

қисмий йиғиндилар тузамиз.

2-таъриф. $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ чекли лимит мавжуд бўлса, S га ***қатор йиғиндиси*** дейилади ва ***қатор яқинлашувчи*** деб аталади.

Чекли лимит мавжуд бўлмаса, қаторнинг йиғиндси бўлмайди ва у ***узоқлашувчи*** дейилади.

1-мисол. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қаторнинг n қисмий йиғиндиси

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots..+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots.+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

бўлиб, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

Шундай қилиб, берилган сонли қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S=1$ бўлади.

3. <u>Қатор яқинлашишининг зарурий белгиси(шарти).</u>

Теорема. $u_1+u_2+...+u_n+...$ (2)

қатор яқинлашувчи бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

шарт бажарилади.

Исбот. (2) қатор яқинлашувчи бўлганлиги учун

$$u_n = S_n - S_{n-1}; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ келиб чиқди.

Натижа. Қатор умумий ҳадининг $n\to\infty$ даги лимити 0 га тенг бўлмаса, у узоқлашувчи бўлади. Лекин $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ шартдан қаторнинг

яқинлашувчилиги келиб чиқмайди. Бу шарт фақат зарурий шарт бўлиб, етарли эмас.

4. Мусбат ҳадли қаторлар яқинлашишининг <u>етарли белгилари</u>

1) <u>Қатор яқинлашишининг таққослаш белгиси</u>.

$$u_1+u_2+...+u_n+... \quad , \qquad (3)$$

$$v_1+v_2+...+v_n+... \qquad (4)$$

қаторлар учун $u_1 \le v_1,\ u_2 \le v_2,...,u_n \le v_n,...$ тенгсизликлар ҳамма n лар учун бажарилиб: (4) қатор яқинлашувчи бўлса, (3) қатор ҳам яқинлашувчи бўлиди ва унинг йиғиндиси (4) қатор йиғиндисидан катта бўлмайди; (3) қатор узоқлашувчи бўлса, (4) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

2-мисол. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+...+\frac{1}{n\cdot 2^n}+...$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қаторни

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

қатор билан таққослаймз. Маълумки, кейинги қатор махражи $q=\frac{1}{2}$ га тенг бўлган геометрик прогрессия бўлиб, яқинлашувчидир. Ҳамма n лар учун

$$\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}$$

тенгсизликлар бажарилади, демак таққослаш белгисига асосан, берилган қаторнинг ҳам яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

2). ***<u>Даламбер аломати.</u>*** Мусбат ҳадли

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots$$

қатор берилган бўлсин. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$ лимит мавжуд бўлиб: $d<1$ бўлса,

қатор яқинлашувчи; $d>1$ бўлса, қатор узоқлашувчи; $d=1$ бўлса, қатор яқинлашувчи ҳам узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин, бундай ҳолларда қаторни бошқа белгилардан фойдаланиб текшириш керак бўлади.

3-мисол. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $d=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$

Демак, берилган қатор Даламбер белгисига асосан яқинлашувчи.

4-мисол. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш.

$$d=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}/\frac{n}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-1}{2n^2+n}=\frac{2}{2}=1.$$

Бу ҳолда Даламбер белгиси саволга жавоб бермайди. Берилган қатор учун қатор яқинлашишининг зарурий белгисини текширайлик.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмайди, демак берилган қатор узоқлашувчи.

3) ***<u>Коши аломати</u>***

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

мусбат ҳадли қатор берилган бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$$

лимит мавжуд ва $k<1$ бўлса, қатор яқинлашувчи; $k>1$ бўлса, қатор узоқлашувчи; $k=1$ бўлса, қатор яқинлашувчи ҳам, узоқлашувчи ҳам бўлиши мумкин, бу ҳолда Коши белгиси саволга жавоб бермайди.

5-мисол. $$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Коши белгисидан

$$k=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Шундай қилиб, берилган қатор Коши белгисига асосан яқинлашувчи бўлади.

4) Қатор *<u>яқинлашишининг интеграл аломати</u>*

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

мусбат ҳадли қатор берилган бўлсин.

$f(n)=a_n$ натурал аргументли функция тузамиз. $f(n)$ узлуксиз, мусбат ва камаювчи функция бўлсин.

$\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^b f(n)dn$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, берилган қатор ҳам яқинлашувчи, хосмас интеграл узоқлашувчи бўлса, қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

6-мисол. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $f(n)=\frac{1}{n^2}$ *yoki* $f(x)=\frac{1}{x^2}$ функцияни тузиб, ушбу хосмас интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_1^\infty f(x)dx=\int\limits_1^\infty\frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b x^{-2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)^b\Bigg|_1=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{1}\right)=1.$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашувчи, интеграл белгига асосан, текширилаётган қатор ҳам яқинлашувчидир.

7-мисол. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+...$

гармоник қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $f(n)=\frac{1}{n}$ *yoki* $f(x)=\frac{1}{x}$ бўлганлиги учун

$$\int\limits_1^\infty f(x)dx=\int\limits_1^\infty\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln 1)=\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty.$$

Демак, хосмас интеграл узоқлашувчи, интеграл белгига асосан, гармоник қатор ҳам узоқлашувчи эканлиги келиб чиқади.

5. Ишоралари алмашинувчи қаторлар(Лейбниц қатори). Ишоралари ҳар хил бўлган қаторларга ***ўзгарувчан ишорали*** қаторлар дейилади.

Ўзгарувчан ишорали қаторларнинг хусусий ҳоли ***ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлардир*.**

Масалан, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$

қатор биринчи ҳади мусбат бўлган ишоралари навбат билан алмашинувчи қатордир.

Ишоралари навбат билан алмашинувчи қаторлар яқинлашишини **Лейбниц белгиси** билан текширилади.

Ишоралари навбат билан алмашинувчи

$$a_1 - a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ... \qquad (5)$$

қатор берилган бўлсин. Бу ерда $a_1, a_2, a_3, ... , a_n, ...$ мусбат сонлар.

***Лейбниц белгиси*.** Ишоралари навбат билан алмашинувчи қатор ҳадлари абсолют қиймати бўйича камаювчи, яъни 1) $a_1 > a_2 > a_3 > ...$

ва 2) умумий ҳадининг $n \to \infty$ даги лимити нўлга тенг, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ бўлса, ишоралари навбат билан алмашинувчи (5) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси биринчи ҳаддан катта бўлмайди. Бу шартлардан биронтаси бажарилмаса қатор узоқлашувчи бўлади.

8 –мисол. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Лейбниц белгиси шартларини текширамиз:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > ...$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Демак, Лейбниц белгисининг иккала шарти ҳам бажарилади. Шундай қилиб, берилган қатор Лейбниц белгисига асосан, қатор яқинлашувчи.

9-мисол. $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 + ...$

қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш: $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > ...$

биринчи шарт бажарилади. Лекин $a_n = 1 + 0{,}1^n$ бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{10^n}\right) = 1 \neq 0,$$

Лейбниц белгисининг иккинчи шарти бажарилмайди. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

Қаторлар назариясидан тақрибий ҳисоблашларда кенг қўлланилади. Тақрибий ҳисоблашларда йўл қўйилган хатоликни баҳолаш катта амалий аҳамиятга эга. Ишоралари навбатлашувчи қаторларда хатолик, ҳисобга олинмаётган биринчи ҳад абсолют қийматидан катта бўлмайди, яъни

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

10-мисол. $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + ...$

ни 0,1 аниқликда тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: Шартга асосан $|r_n| < 0{,}1$ бўлиши керак.

$$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9. \quad Demak,$$

$$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$$

Бунда $S \approx 0{,}7$; $0{,}1$ гача аниқликда ҳисобланди.

Энди ўзгарувчан ишорали қаторларнинг айрим хоссаларини қараймиз.

Абсолют ва шартли яқинлашиш.

1-таъриф. Ўзгарувчан ишорали қатор ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлса, ўзгарувчан ишорали қатор ***абсолют яқинлашувчи*** дейилади.

2-таъриф. Ўзгарувчан ишорали қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган қатор узоқлашувчи бўлса, ўзгарувчан ишорали қатор ***шартли яқинлашувчи*** дейилади.

11-мисол. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + ...$ қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Берилган қатор ҳадларининг абсолют қийматидан қатор тузамиз:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$$

бу қатор махражи $q=\frac{1}{3}$ бўлган геометрик прогрессия бўлиб яқинлашувчидир. Демак, берилган қатор абсолют яқинлашувчи бўлади.

12-мисол. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+...$

қатор шартли яқинлашувчидир. Чунки, унинг ҳадларининг абсолют қийматидан тузилган

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$$

гармоник қатор узоқлашувчи эди.

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+....+a_n(x-a\ \ )^n+... \qquad (4)$$

функционал қаторга даражали қатор дейилади. $a_0,\ a_1,\ a_2,...,a_n,...$ ўзгармас сонлар, даражали қаторнинг коэффициентлари деб аталади.

Даражали қатор шундай хоссага эгаки, у $x=b_0$ нуқтада яқинлашувчи бўлса, $|x-x_0|<|b_0-x_0|$ тенгсизликни қоноатлантирувчи ҳамма x лар учун ҳам яқинлашувчи бўлади. Даражали қатор учун шундай R сон мавжудки, $|x-x_0|<R$ учун, қатор абсолют яқинлашувчи $|x-x_0|>R$ учун қатор узоқлашувчи, яъни $-x_0-R<x<-x_0+R$ ораликда даражали қатор абсолют яқинлашувчи, $x=-x_0\pm R$ нуқталарда ҳосил бўлган қатор яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши мумкин. Ҳар икки нуқтада қатор яқинлашишини алоҳида текшириш керак бўлади. $(x_0-R,\ x_0+R)$ интервалга ***яқинлашиш интервали,*** га даражали қаторнинг ***яқинлашиш радиуси*** дейилади. Яқинлашиш радиуси $R=0$ $yoki$ $R=\infty$ бўлиши мумкин $R=0$ бўлса, даражали қатор фақат $x=x_0$ нуқтада, $R=+\infty$ бўлса, бутун сонлар ўқида яқинлашувчи бўлади.

Яқинлашиш интервалини, берилган қаторнинг абсолют қийматидан тузилган қатор учун Даламбер ва Коши белгиларидан фойдаланиб топиш мумкин. Даражали қаторнинг ҳамма коэффициентлари 0 дан фарқли бўлса, яқинлашиш радиусини топишда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

формуладан фойдаланилади. Бошқа ҳолларда бевосита Даламбер белгисидан фойдаланиб яқинлашиш интервалини топиш мумкин.

2-мисол. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots$

даражали қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш: $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)}$. Қаторнинг яқинлашиш радиусини

топамиз.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Демак, $-1<x<1$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳамма x лар учун қатор яқинлашувчи.

Қатор яқинлашишини интервалнинг четки нуқталарида текширамиз: $x=1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.$$

гармоник қатор ҳосил бўлиб, у узоқлашувчидир. $x=-1$ бўлсин, бу ҳолда

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, у Лейбниц белгиси шартларини қаноатлантиргани учун яқинлашувчи бўлади.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали

$-1\le x<1$ дан иборатдир.

3-мисол. $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots+\frac{1}{n^2}(x-2)^n+\ldots$

даражали қатор яқинлашишини текширинг.

Ечиш. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ бўлганлиги учун

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^2 = 1.$$

Демак, $-1 < x-2 < 1$ *yoki* $1 < x < 3$ интервалда қатор яқинлашувчи. Интервалнинг четки нуқталарида қатор яқинлашишини текширамиз. $x=3$ бўлсин, бунда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, интеграл белгидан фойдалансак унинг яқинлашувчилиги келиб чиқади (бажариб кўринг). $x=1$ бўлса,

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + ...$$

сонли қатор ҳосил бўлиб, у абсолют яқинлашувчидир.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш интервали $1 \le x \le 3$ бўлади.

3. Тейлор ва Маклорен қаторлари. $y = f(x)$ функция $x = a$ нуқтада $(n+1)$ тартибгача ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда қўйидаги Тейлор формуласи ўринлидир:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n + R_n(x),$$

бу ерда $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}\left[a + Q(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $(0 < Q < 1)$ бўлиб,

Лагранж

шаклидаги қолдиқ ҳади дейилади.

$a = 0$ да Тейлор формуласининг хусусий ҳоли - Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad bu\ erda$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}[Qx]}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < Q < 1).$$

$y = f(x)$ функция a нуқта атрофида исталган марта дифференциалланувчи бўлса ва бу нуқтанинг бирор атрофида

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

бўлса, Тейлор ва Маклорен формулаларидан

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ... \ va$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

қаторлар ҳосил бўлади. Буларнинг биринчиси ***Тейлор қатори,*** иккинчисига ***Маклорен қатори*** дейилади.

Бу қаторлар x нинг $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ бўладиган қийматларида $f(x)$ га яқинлашади.

А нуқтани ўз ичига олувчи бирор интервалда исталган n учун $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$, ($M$ бирор мусбат сон) тенгсизлик бажарилса, $\lim\limits_{n\to\infty} R(x) = 0$

бўлади ва $f(x)$ функция Тейлор қаторига ёйилади.

4. Функцияларни даражали қаторларга ёйиш

Айрим функцияларни даражали қаторга ёйямиз.

1) $f(x) = e^x$, исталган x учун

$$f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x, ..., f^{(n)}(x) = e^x, ... \quad x = 0 \quad deb$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1, ..., f^{(n)}(0) = 1, ...$$

Буларни Маклорен қаторига қўйиб,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

ҳосил қиламиз. Охирги тенгликдан $x = 1$ десак,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots.$$

бўлиб, e сони қатор йиғиндиси кўринишида ифодаланади. Бундан фойдаланиб e сонининг тақрибий қийматини исталган даражадаги аниқликкача ҳисоблаш мумкин.

2) $f(x) = \sin x$. Исталган x учун

$$f'(x) = \cos x, \;\; f''(x) = -\sin x, \;\; f'''(x) = -\cos x, \;\; f''''(x) = \sin x, \dots .$$

Бундан

$$f(0) = 0, \;\; f'(0) = 1, \;\; f''(0) = 0, \;\; f'''(0) = -1, \;\; f''''(0) = 0, \dots$$

бўлиб,буларни Маклорен қаторига қўйсак,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

ҳосил бўлади.

Бу қатор исталган x учун яқинлашувчи $-\infty < x < +\infty$. Охирги қаторни ҳадлаб дифференциалласак,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1-1}}{(2n-2)!} + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

қатор ҳосил бўлади, бу $f(x) = \cos x$ функция учун Маклорен қатори бўлади.

3) Худди юқоридагидек усул билан $f(x) = (1+x)^m$ функция учун

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots. + \dots$$

қаторни ҳосил қиламиз. Бу қаторга ***<u>биномиал қатор</u>*** дейилади. У $(-1,1)$ интервалда абсолют яқинлашувчи бўлади.

4) $f(x) = \ln(1+x)$ функция учун юқоридаги усул билан

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots. \quad (-1 < x \le 1)$$

ёйилмани ҳосил қилиш мумкин.

5-мисол. $f(x) = \cos\sqrt{x}$ функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Ечиш. Юқоридаги $\cos x$ учун келтирилган қаторда x ни $\sqrt{x}$ билан алмаштирсак,

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \ldots. + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \ldots$$

бўлади. Бу қатор исталган x учун яқинлашувчидир, бироқ $\cos\sqrt{x}$ функция $x < 0$ да аниқланмаганлигини ҳисобга олиб, ҳосил қилинган қатор $\cos\sqrt{x}$ функцияга $0 \le x < +\infty$ да яқинлашади.

5. Қаторларнинг тақрибий ҳисоблашга татбиқлари. Бир неча мисоллар қараймиз.

6-мисол. $\cos x$ нинг ёйилмасидан фойдаланиб $\cos 18^0$ ни $0{,}001$ аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. $\cos x$ функциянинг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб,

$$\cos 18^0 = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - \ldots$$

қаторни ҳосил қиламиз.

$$\frac{\pi}{10} = 0{,}31416; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0{,}09870; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0{,}00974.$$

ва $\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001$ бўлганлиги учун, тақрибий ҳисоблашда қаторнинг биринчи учта ҳади билан чегараланамиз, демак

$$\cos 18^0 \approx 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24}; \quad yoki \quad \cos 18^0 \approx 0{,}9511.$$

7-мисол. $\sqrt[5]{1{,}1}$ *ni* $0{,}0001$ аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: $\sqrt[5]{1{,}1}=(1+0{,}1)^{\frac{1}{5}}$ деб, биномиал қатордан фойдалансак:

$$\sqrt[5]{1{,}1}=(1+0{,}1)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}\cdot 0{,}1+\frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)}{2!}0{,}01+\frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)\cdot(\frac{1}{5}-2)}{3!}0{,}001+$$

$$+\ldots=1+0{,}02-0{,}0008+0{,}000048-\ldots.$$

бўлади. Тўртинчи ҳад $0.000048<0.0001$ бўлганлиги учун, ҳисоблашда биринчи учта ҳадини олиб, ҳисоблаймиз:

$$\sqrt[5]{1{,}1}\approx 1+0{,}02-0{,}0008=1{,}0192.$$

8-мисол. $\sqrt[3]{130}$ *ni* $0{,}001$ аниқликкача тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. 5^3 130 га энг яқин бутун соннинг куби бўлганлиги учун $130=5^3+5$ деб олиш қўлай бўлиб,

$$\sqrt[3]{130}=\sqrt[3]{5^3}+5=\sqrt[3]{5^3(1+\frac{1}{25})}=5(1+\frac{1}{25})^{\frac{1}{3}}=5(1+\frac{1}{3}0{,}04+\frac{\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}-1)}{2!}0{,}0016+$$

$$+\frac{(\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdot(\frac{1}{3}-2))}{3!}0{,}000064+\ldots.)=5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2\cdot\frac{1}{9}\cdot 0{,}0016+5\frac{25}{81}\cdot 0{,}000032-\ldots$$

охирги қаторда тўртинчи ҳад $0{,}001$ дан кичик бўлганлиги учун, биринчи учта ҳад билан чегараланамиз:

$$\sqrt[3]{130}\approx 5+0{,}0667-0{,}0009\approx 5{,}066.$$

9-мисол. $\ln 1{,}04$ *ni* $0{,}0001$ гача аниқликда тақрибий ҳисобланг.

Ечиш: $\ln(1+x)$ функциянинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланиб,

$$\ln(1+0{,}04)=0{,}04-\frac{0{,}04^2}{2}+\frac{0{,}04^3}{3}-\frac{0{,}04^4}{4}+\ldots,\quad \text{ёки}$$

$$\ln 1{,}04=0{,}04-0{,}0008+0{,}000021-0{,}00000064+\ldots$$

қаторни ҳосил қиламиз, ҳамда учинчи ҳад $0{,}0001$ дан кичик бўлганлиги учун биринчи икки ҳадни ҳисобга олиб ҳисоблаймиз:

$$\ln 1{,}04\approx 0{,}0392.$$

Такрорлаш учун саволлар

1. Сонли қатор деб нимага айтилади?
2. Қаторнинг умумий ҳади нима?
3. Гармоник қатор деб қандай қаторга айтилади?
4. Қаторнинг қисмий йиғиндиси нима?
5. Қаторнинг йиғиндиси қандай аниқланади?
6. Қандай қаторга яқинлашувчи дейилади?
7. Қандай қатор узоқлашувчи бўлади?
8. Яқинлашувчи қаторлар қандай хоссаларга эга?
9. Қатор яқинлашишининг зарурий белгиси нима?
10. Қатор яқинлашишининг етарли ва зарурий белгиларининг фарқи нимадан иборат?

3-мавзу. Дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган табиий фанлар масалалари. Ечим, умумий ечим тушунчалари.
2. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли тенгламалар. Коши масаласи. Коши масаласининг ечими ҳақидаги теорема.
3. Математик физика, механика ва астрономия ҳамда иктисодий масалаларни ечишда, биологик жараёнларни тахлил этишда ва бошка кўп соҳалардаги жараёнларни математик модели дифференциал тенгламалар орқали ифодаланилиши.

Таянч тушунчалари. Дифференциал тенглама, оддий дифференциал тенглама, хусусий ҳосилали дифференциал тенглама, дифференциал тенгламанинг тартиби, дифференциал тенглама ечими, интеграл чизиқ, биринчи тартибли дифференциал тенглама, Коши масаласи, бошланғич шартлар, ўзгарувчилари ажралган, ўзгарувчилари ажраладиган, биринчи тартибли бир жинсли, биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар, Бернулли тенгламаси, Риккати тенгламаси, тўла дифференциалли тенглама, интегралловчи кўпайтувчи.

1. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган табиий фанлар масалалари. Ечим, умумий ечим тушунчалари. 1-таъриф. Эркли ўзгарувчи, номаълум функция ҳамда унинг ҳосилалари ёки дифференциаллари орасидаги муносабатга ***дифференциал тенглама*** дейилади.

Номаълум функция фақат битта ўзгарувчига боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенгламага ***оддий дифференциал тенглама*** *дейилади*.

Номаълум функция икки ёки ундан кўп ўзгарувчиларга боғлиқ бўлса, бундай дифференциал тенгламаларга, ***хусусий ҳосилали дифференциал*** *тенгламалар* дейилади.

2-таъриф. Дифференциал тенгламага кирган ҳосилаларнинг энг юқори тартибига ***дифференциал тенгламанинг тартиби*** дейилади.

$y'' = 3x^2$, $y''' = \cos x$ тенгламалар мос равишда иккинчи ва учинчи тартибли тенгламаларга мисол бўлади.

Умумий ҳолда n-тартибли дифференциал тенглама

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

кўринишда белгиланади.

3-таъриф. ***Дифференциал тенгламанинг ечими*** **ёки** ***интеграли*** деб тенгламага қўйганда уни айниятга айлантирадиган ҳар қандай дифференциалланувчи $y = \varphi(x)$ функцияга айтилади.

Дифференциал тенглама ечимининг графигига ***интеграл чизиқ*** дейилади. Масалан, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $y = x^2$ бу берилган дифференциал тенгламанинг ечими бўлиб, бу ҳолда интеграл чизиқ параболадан иборат бўлади.

Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий масаласи берилган тенгламанинг барча ечимларини топиш ва бу ечимларнинг ҳоссаларини ўрганишдан иборат.

Алгебраик тенгламалардагидек ҳамма дифференциал тенгламаларни ечиш мумкин бўладиган умумий усуллар йўқ. Дифференциал тенгламаларнинг ҳар бир турига хос ечиш усулидан фойдаланилади.

Биринчи тартибли тенгламалар. **Биринчи тартибли тенглама** *умумий* ҳолда

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади. (1) тенгламани y га нисбатан ечсак

$$y' = f(x, y) \quad yoki \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

бўлади. (2) тенгламанинг ўнг томони фақат x нинг функцияси бўлса, тенглама

$$y' = f(x) \qquad (3)$$

кўринишида бўлиб, охирги тенгликдан бевосита кўриш мумкинки, бундай тенгламанинг ечимини топиш $f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини топишдан иборат бўлади, яъни $y = F(x) + C, \quad [F(x)]' = f(x)$. Шундай қилиб, (3) кўринишдаги биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг ечими чексиз кўп ечимлар тўпламидан иборат бўлади.

1-таъриф. $y = \varphi(x, C)$ x нинг функцияси ҳар бир C ихтиёрий ўзгармас бўлганда (2) тенгламани қаноатлантирса, унинг ***умумий ечими*** дейилади.

2-таъриф. C ихтиёрий ўзгармаснинг муайян қийматида умумий ечимдан олинадиган ечимга ***хусусий ечим*** дейилади.

Умумий ечимдан ягона ечимни олиш учун кўпинча қўшимча

$$y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

шартдан фойдаланилади, бу ерда x_0, y_0 лар берилган сонлар бўлиб, бу шартга бошланғич шарт деб аталади.

3-таъриф. $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг (4) бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига ***Коши масаласи*** дейилади.

1-мисол. $y' = \frac{5}{\cos^2 x}$, дифференциал тенглама учун $y(0) = 3$бўладиган бошланғич шартни қаноатлантирувчи Коши масаласини ечинг.

Ечиш. Олдин берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5tgx + C$$

Энди бошланғич шартдан фойдаланиб, $5tg0 + C = 3$, бундан $C = 3$ келиб чиқади. Демак, Коши масаласининг ечими $y = 5tgx + 3$ бўлади.

Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган биринчи тартибли тенгламалар

4-таъриф. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ кўринишдаги тенгламага ***ўзгарувчилари ажралган*** дифференциал тенглама дейилади.

Бундай дифференциал тенгламани бевосита, тенгликни интеграллаб унинг умумий ечими топилади, яъни

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

бўлади.

2-мисол. $xdx + ydy = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани бевосита интеграллаб

$$\int xdx + \int ydy = C, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \;\; yoki \;\; x^2 + y^2 = C_1,$$

умумий ечим бўлади .

5-таъриф. $y' = f_1(x) f_2(y)$ $\quad yoki \quad$ $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$ кўринишдаги тенгламага ***ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама*** дейилади.

Бундай дифференциал тенгламани $f_2(y)$ га бўлиб, dx га кўпайтириб

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенгламага келтириш билан ечими топилади.

3-мисол. $\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ўзграувчиларини ажратиб $\frac{dy}{1+y^2} = xdx$ тенгламани ҳосил қиламиз. Охирги тенгламани бевосита интеграллаб,

$$arctg\, y = \frac{x^2}{2} + C$$

ликка эга бўламиз. Охирги тенгликдан

$$y = tg(\frac{x^2}{2} + C)$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламалар. $f(x,y)$ функция учун $f(kx,ky) = k^{\alpha} f(x,y)$ тенглик бажарилса, $f(x,y)$ функцияга α тартибли бир жинсли функция дейилади, бунда α бирор сон. Масалан, $f(x,y) = xy - y^2$ функция учун $f(kx,ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2)$ бўлиб, $f(x,y) = xy - y^2$ функция $\alpha = 2$ тартибли бир жинсли функция бўлади. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}, \alpha = 0$ тартибли бир жинсли функциядир(буни текшириб кўринг).

6-таъриф. $y' = f(x,y)$ дифферециал тенгламада $f(x,y)$ функция нўлинчи тартибли бир жинсли функция бўлса, бундай дифференциал тенгламага ***биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама*** дейилади.

Бир жинсли, тенглама $y = xv(x)$алмаштириш билан ўзгарувчилари ажраладиган

$$xv' = f(1,v) - v$$

дифференциал тенгламага келтирилади.

4-мисол. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y = x \cdot v$ алмаштириш олиб, $y' = x'v + xv'$ эканлигини ҳисобга олсак, берилган тенгламадан

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2 v^2}{x^2}$$

бўлиб, $v + xv' = v + v^2$ ёки $xv' = v^2$, $\dfrac{xdv}{dx} = v^2$

бўлади. Охирги тенгламада ўзгарувчиларини ажратсак,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

бўлади. Охирги тенгликни интеграллаcак,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

бўлиб,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

бўлганлиги учун

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad yoki \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар**.** Бундай тенглама

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

кўринишда бўлиб, $p(x)$ va $g(x)$ лар берилган функциялар. Бундай тенгламани ечиш учун $z = u(x)y$ алмаштириш олиб

$$\frac{dz}{dx}+\left[p(x)-\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]z=g(x)u(x) \qquad (1)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $u(x)$ функцияни шундай танлаймизки,

$$p(x)-\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=0$$

бўлсин. Бундан $u(x)=e^{\int p(x)dx}$ бўлиб, бу ҳолда (1)

тенглама

$$\frac{dz}{dx}=g(x)e^{\int p(x)dx}+C$$

кўринишда бўлади. Бевосита интегралласак

$$z=\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

ҳосил бўлади.

Энди изланаётган y функцияга қайтиб

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[C+\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \qquad (2)$$

умумий ечимни ҳосил қиламиз.

1-мисол. $y'+xy=x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама биринчи тартибли чизиқли тенглама бўлиб $p(x)=x,\quad g(x)=x$ лигини ҳисобга олиб (2) формулага асосан,

$$y=e^{-\int xdx}\left[C+\int x\cdot e^{\int xdx}dx\right]=e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C+\int x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx\right]=e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C+\int \cdot e^{\frac{x^2}{2}}d(\frac{x^2}{2})\right]=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}+C). \quad y=e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}+C).$$

умумий ечим бўлади.

***<u>Бернулли тенгламаси</u>*.** Бундай дифференциал тенглама

$$y'+p(x)y=y^n g(x)$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламада n=0 ёки n=1бўлса, чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Демак $n \neq 0{,}1$ бўлган ,ўзгармас. Бернулли тенгламасини y^n га бўлиб,

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = g(x), \qquad \frac{1}{y^{n-1}} = z$$

алмаштириш бажарсак,

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y'$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = g(x) \ \ yoki \ \ z' + (1-n)p(x)z = (1-n)g(x)$$

биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама ҳосил бўлади.

2-мисол. $y' + xy = xy^3$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани y^3 бўлиб,

$$\frac{y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $\frac{1}{y^2} = z$ алмаштириш олсак $z' = \frac{2y'}{y^3}$ бўлади. Буларни тенгламага қўйиб,

$$\frac{z'}{2} + xz = x, \qquad z' - 2xz = -2x$$

чизиқли тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг умумий ечимини (6) формулага асосан топиш мумкин:

$$z = e^{2\int xdx}\left[C + \int(-2x)e^{-2\int xdx}dx\right] = e^{x^2}\left[C - \int 2xe^{-x^2}dx\right] =$$
$$e^{x^2}\left[C + \int e^{-x^2}d(-x^2)\right] = e^{x^2}\left[C + e^{-x^2}\right] = Ce^{x^2} + 1.$$

Шундай қилиб

$$z = C \cdot e^{x^2} + 1$$

бўлади, z нинг ўрнига $\frac{1}{y^2}$ ни қўйиб,

$$\frac{1}{y^2} = C \cdot e^{x^2} + 1, \quad y^2 = \frac{1}{Ce^{x^2} + 1},$$

ечимни оламиз. Бу берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечими бўлади.

Риккати тенгламаси. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad \textbf{(4)}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламага Риккати тенгламаси дейилади. Бунда $a(x), b(x), c(x)$ функциялар бирор интервалда аниқланган узлуксиз функциялар. (4) тенгламада $a(x) = 0$ бўлса, чизиқли тенглама, $c(x) = 0$ бўлса, Бернулли тенгламаси келиб чиқади.

Умуман олганда Риккати тенгламаси ечимини элементар функция ва уларнинг интеграллари ёрдамида ечиб(квадратурада интеграллаб) бўлмайди.

Ушбу хусусий ҳолни қараймиз: Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими маълум бўлса , бу тенглама ечими квадратураларда интегралланади. $y = \varphi(x)$ Риккати тенгламасининг бирор хусусий ечими бўлсин. $y = \varphi(x) + z$ алмаштириш бажарамиз: бу ҳолда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

бўлиб, (4) тенглама

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} = a(x)[\varphi(x) + z]^2 + b(x)[\varphi(x) + z] + c(x)$$

кўринишда бўлади. Охирги тенгликдан, $y = \varphi(x)$ (4) тенглама ечими, яъни

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a(x)[\varphi(x)]^2 + b(x)\varphi(x) + c(x)$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{dz}{dx} = [2a(x)\varphi(x) + b(x)]z + a(x)z^2$$

тенглама ҳосил бўлиб, бу Бернулли тенгламасидир. Бундай дифференциал тенгламанинг умумий ечимини қандай топишни юқорида ўргандик.

3- мисол. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 2xy + \left(5 - x^2\right)$$

Риккати тенгламасининг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг хусусий ечимини $y = \varphi(x) = ax + b$ кўринишда излаш мақсадга мувофиқ, бу ҳолда

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a,\ a = -(ax + b)^2 + 2x(ax + b) + 5 - x^2$$

бўлиб, бир хил даражали x лар коэффициентларини тенглаштирсак $a = 1, b = \pm 2$ келиб чиқади.

Демак, $\varphi(x) = x + 2, \varphi(x) = x - 2$ хусусий ечимлар бўлади. $\varphi(x) = x + 2$ хусусий ечим учун Бернулли тенгламаси

$$\frac{dz}{dx} = -4z - z^2$$

бўлиб, унинг умумий ечими

$$y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4ч} - 1}$$

бўлади.

Тўла дифференциалли тенгламалар ва интегралловчи кўпайтувчи.

Тўла дифференциалли тенглама.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

кўринишдаги тенгламанинг чап қисми бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

бўлса, бундай тенглама тўла дифференциалли тенглама дейилади.(1) тенглама тўла дифференциалли тенглама бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

шарт бажарилиши керак. Тўла дифференциалли тенглама таърифидан $du=0$ бўлиб, бундан $u(x,y)=C$ келиб чиқади(C ихтиёрий ўзгармас). $u(x,y)$ функцияни топиш учун y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз, у ҳолда $dy=0$ эканлигидан $du=M(x,y)dx$ бўлади. Охирги тенгликни x бўйича интегралласак,

$$u=\int M(x,y)dx+\varphi(y)$$

тенглик ҳосил бўлади. Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаймиз ва натижани $N(x,y)$ га тенглаймиз, чунки $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$ эди.

$$\int\frac{\partial M}{\partial y}dx+\varphi'(y)=N(x,y)$$

ёки

$$\varphi'(y)=N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx$$

бўлади. Охирги тенгликни y бўйича интеграллаб, $\varphi(y)$ ни топамиз:

$$\varphi(y)=\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx\right)dy+C$$

Шундай қилиб,

$$u(x,y)=\int M(x,y)\,dx+\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx\right)dy+C$$

натижага эга бўламиз.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2y}{x^3}dy=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг тўла дифференциалли бўлиш ёки бўлмаслигини текширамиз: берилган тенгламада

$$M=\frac{x^2-3y^2}{x^4} \quad ,N=\frac{2y}{x^3}$$

бўлганлиги учун

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-6y}{x^4} \quad ,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-6y}{x^4}$$

бўлиб,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

бўлади, яъни берилган дифференциал тенглама тўла дифференциалли тенгламадир. Демак, берилган тенгламанинг чап томони бирор $u(x,y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади. Энди $u(x,y)$ функцияни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}$$

бўлганлиги учун

$$u=\int\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\varphi(y)=\int\left(x^{-2}-3y^2x^{-4}\right)dx+\varphi(y)=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+\varphi(y) \quad (2)$$

бўлиб, бунда $\varphi(y)$ ҳозирча номаълум функциядир. Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{2y}{x^3}$$

эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{2y}{x^3}+\varphi'(y)=\frac{2y}{x^3}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $\varphi'(y)=0$ бўлиб,

$$\varphi(y)=C_1.$$

бўлади. (2) тенгликдан

$$u=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$du=d(-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1)=0$$

бўлганлиги учун

$$-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1=C_2$$

бўлиб, ёки

$$-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}=C$$

бўлади, бунда $C=C_2-C_1$.

Интегралловчи кўпайтувчи.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

дифференциал тенгламанинг ўнг томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлган ҳолни қарадик. Бу тенгламанинг ўнг томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлмасин. Айрим ҳолларда шундай $\mu(x,y)$ функцияни танлаб олиш мумкин бўладики, берилган тенгламани шу функцияга кўпайтирилганда, унинг чап томони бирор функциянинг тўла дифференциали бўлиши мумкин. Ҳосил қилинган дифференциал тенгламанинг умумий ечими Билан дастлабки берилган тенгламанинг умумий ечими бир хил бўлади. Бундай $\mu(x,y)$ функцияга берилган тенгламанинг интеграллавчи кўпайтувчиси дейилади. Интегралловчи кўпайтувчини топиш учун , берилган тенгламани ҳозирча номаълум бўлган μ га кўпайтириб,

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$$

тенгламани оламиз. Охирги тенглама тўла дифференциалли бўлиши учун

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

тенглик ўринли бўлиши керак. Бундан

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

бўлиб,

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

бўлади. Охирги тенгламани μ га бўлсак,

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial \mu}{\mu\partial y}$$

бўлганлиги учун

$$M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

бўлади.

Умумий ҳолда μ x, y ларга боғлиқ, яъни $\mu(x, y)$. Берилган тенглама фақат x га боғлиқ интегралловчи кўпайтувчига эга бўлса, $\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=0$ бўлиб,

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{ёки} \quad \frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{4}$$

бўлади. Дифференциал тенглама фақат y ўзгарувчига боғлиқ интегралловчи кўпайтувчига эга бўлса, $\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=0$ бўлиб,

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M} \tag{5}$$

бўлади. Бу ҳолларда (4) ва (5) тенгликларни бевосита интеграллаб

$$\mu = e^{\int\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/\,Ndx}, \quad \mu = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)/\,Mdx}$$

интегралловчи кўпайтувчини топамиз. Бунда (4) ва (5) нисбатлар, биринчи ҳолда y ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган, иккинчи ҳолда x ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган интегралловчи кўпайтувчиларнинг мавжудлигини билдиради.

2-мисол.

$$(x^2-3y^2)\,dx+2xydy=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг тўла дифференциалли ёки тўла дифференциалли эмаслигини текширамиз. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ шартни текширайлик:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\left(x^2-3y^2\right)_y'=-6y \quad , \frac{\partial N}{\partial x}=\left(2xy\right)_x'=2y\,.$$

Демак, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилмайди. (4) нисбатни қараймиз:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-6y-2y}{2xy}=-\frac{4}{x}$$

бўлиб,

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{4}{x}$$

бўлади. Охирги тенгликни интегралласак,

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{ч}dx}=e^{-4\ln x}=e^{\ln x^{-4}}=\frac{1}{x^4}$$

ҳосил бўлади. Берилган тенгламани $\mu(x)=\frac{1}{x^4}$ функцияга кўпайтирсак,

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2xy}{x^4}dy=0$$

бўлиб, кейинги тенглама учун $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилади, яъни охирги дифференциал тенглама тўла дифференциалли тенгламадир. Бундай дифференциал тенгламаларнинг ечимини топишни юқорида ўргандик.

$y^{(n)}=f(x)$ **кўринишдаги дифференциал тенглама *кетма-кет*** n марта интеграллаш билан унинг ечими топилади. Ҳар бир интеграллашда биттадан ихтиёрий ўзгармас ҳосил бўлиб, натижада n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ умумий ечим ҳосил бўлади.

1-мисол. $y''=\cos 2x$ дифференциал тенгламанинг $x=0$ бўлганда $y=0,\ y'=0$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

Ечиш. $y'=p(x)$ десак, $y''=p'$ бўлиб, берилган тенглама

$$p'=\cos 2x \ \ yoki \ \ \frac{dp}{dx}=\cos 2x, \quad dp=\cos 2x dx$$

кўринишда бўлади. Охирги тенгламани интегралаб,

$$p=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

$p=y'$ бўлганлиги учун

$$y'=\frac{1}{2}\sin 2x+C_1$$

яъни,

$$dy=\frac{1}{2}\sin 2xdx+C_1dx.$$

Охирги тенгликни интеграллаб,

$$\int dy=\frac{1}{2}\int\sin 2xdx+\int C_1dx, \quad y=-\frac{1}{4}\cos 2x+C_1x$$

умумий ечимни оламиз.

Энди берилган бошланғич шартларда Коши масаласини ечамиз: $x=0$

бўлганда $y=0$, $y'=0$ бўлганлиги учун,

$$-\frac{1}{4}\cos 0 + C_1\cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\sin 0 + C_1 = 0,\quad C_1 = 0,\quad C_2 = \frac{1}{4}\ .$$

Шундай қилиб, Коши масаласининг ечими

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$$

бўлади.

2.Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли тенгламалар. Коши масаласи. Коши масаласининг ечими ҳақидаги теорема.

$\underline{F(x,y',y'')=0}$ ***<u>кўринишдаги дифференциал тенглама</u>*** $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dx}$ алмаштириш орқали $F(x,p,\dfrac{dp}{dx})=0$ биринчи тартибли дифференциал тенгламани ечишга келтирилади.

2-мисол. $y''=\dfrac{y'}{x}+x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш: $y'=p$ билан алмаштириб олсак

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}+x$$

биринчи тартибли чизиқли тенгламага келамиз. Бу тенгламани ечиб:

$$P = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[C_1 + \int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{\ln x}\left[C_1 + \int xe^{-\ln x}dx\right] = x(C_1 + \int xe^{-\ln x}dx) =$$

$$= x(C_1 + \int x\cdot\frac{1}{x}dx) = x(C_1 + x),\quad p = y' = C_1x + x^2,\quad y = C_1\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2$$

умумий ечимни оламиз.

$\underline{F(y,y',y'')=0}$ ***<u>(эркли ўзгарувчи ошкор қатнашмаган) бундай дифференциал тенгламанинг</u>*** умумий ечимини $y'=z(y)$ алмаштириш олиб, биринчи тартибли тенгламага келтириб ечим топилади.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y).$$

бўлади.

3-мисол. $yy'' - 2y'^2 = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y' = z(y)$ алмаштириш олиб, $y'' = z\frac{dz}{dy}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$yz\frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама: $\frac{ydz}{dy} = 2z \quad yoki \quad \frac{dz}{z} = 2\frac{dy}{y}$,

охирги тенгламани интеграллаб,

$$\ln z = 2\ln y + \ln C_1$$

бундан

$$z = C_1 y^2$$

бўлади. $z = \frac{dy}{dx}$ ни ҳисобга олсак ,

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \quad yoki \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx$$

бўлади. Охирги тенгликдан

$$-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \quad yoki \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}$$

бўлади.Бу берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ҳақида умумий тушунчалар. Физика, механика, техника ва иқтисоднинг жуда кўп масалаларини ечиш *иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларга* келтирилади.

Дифференциал тенгламада номаълум функция ва унинг ҳосилалари биринчи даражада қатнашса бундай тенгламага чизиқли дейилади. ***<u>Иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама</u>*** қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \qquad (1)$$

бу ерда y номаълум функция, $p(x),\ g(x),\ f(x)$ лар бирор (a,b) оралиқда берилган узлуксиз функциялар, $f(x)=0$ бўлса, (1) тенгламага **бир жинсли чизиқли дифференциал тенглама** дейилади. $f(x)\neq 0$ **бўлса бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенглама** дейилади.

Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар ечимини топишда чизиқли боғланган ва чизиқли боғланмаган функциялар тушунчасидан фойдаланилади.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ функциялар бирор $[a,b]$ кесмада берилган бўлсин.

1-таъриф. Шундай α_1, α_2 ўзгармас сонлар топилсаки, улардан ҳеч бўлмаганда биттаси нўлдан фарқли бўлганда

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (2)$$

айният ўринли бўлса, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ функцияларга **чизиқли боғланган функциялар** дейилади.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ функциялар чизиқли боғланган бўлса, улар пропорцианал бўлади, яъни, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ бўлиб, $\alpha_1 \neq 0$ бўлса,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \ \ yoki \ \ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1},\ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$$

бўлади.

Масалан, $y_1(x) = 4x^2$ *va* $y_2 = x^2$ функциялар чизиқли боғланган, чунки $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \dfrac{4x^2}{x^2} = 4.$

2-таъриф. (2) тенглик фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ бўлгандагина бажарилса, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ функцияларга **чизиқли боғланмаган функциялар** дейилади.

Функцияларнинг чизиқли боғланган ёки чизиқли боғланмаганлигини

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2{}' - y_2 y_1{}'$$

Вронский детерминанти ёрдамида текшириш мумкин. $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ функциялар (a,b) оралиқда чизиқли боғланган бўлса, улардан тузилган Вронский детерминанти нўлга тенг бўлади. Бу функциялар учун (a,b) оралиқда тузилган Вронский детерминанти нўлдан фарқли бўлса улар чизиқли боғланмаган бўлади.

Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Фан ва техника ҳамда иқтисоднинг кўп масалалари (1) тенгламада $p(x)$ *va* $g(x)$ функциялар ўзгармас сонлар бўлган ҳолдаги тенгламаларга келтирилади. Шунинг учун бу функциялар ўзгармас коэффициентлар бўлган ҳолни алоҳида қараймиз. Бу ҳолда бир жинсли тенглама

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (3)$$

кўринишда бўлиб p, g лар ўзгармас коэффициентлар. Бундай кўринишдаги тенгламага ***иккинчи тартибли, ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли дифференциал тенглама*** дейилади. (3) кўринишдаги тенгламанинг ечимини топиш билан қизиқамиз.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ функциялар (3) тенгламанинг (a,b) оралиқда чизиқли боғланмаган ечимлари бўлса,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (4)$$

функция унинг умумий ечими бўлади, бу ерда c_1 *va* c_2 ихтиёрий ўзгармаслар. Бу функцияни (3) тенгламага бевосита қўйиб кўрсатиш мумкин (буни бажариб кўринг).

1-мисол. $y'' - y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бевосита қўйиш билан текшириб кўриш мумкинки,

$y_1(x) = e^x \quad va \quad y_2(x) = e^{-x}$ берилган тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимлар чизиқли боғланмаган ечимлар бўлади, чунки Вронский детерминанти

$$\begin{vmatrix} e^x e^{-x} \\ e^x - e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1-1 = -2 \neq 0.$$

Демак, (4) формулага асосан, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ функция берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Шундай қилиб, (3) бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиш учун, унинг иккита чизиқли боғланмаган хусусий ечимини топиш кифоя.

(3) тенгламанинг ечимини $y = e^{rx}$, кўринишда излаймиз, бу ерда $r -$ номаълум сон. $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, бўлиб,(3) тенгламадан

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + ge^{rx} = 0 \;\; yoki \quad r^2 + pr + g = 0, \;\; (e^{rx} \neq 0) \qquad (5)$$

бўлади. (5) тенглик бажарилса $y = e^{rx}$ функция (3) тенгламанинг ечими бўлади.

(5) тенгламага (3) дифференциал тенгламанинг ***характеристик тенгламаси*** дейилади. Характеристик тенгламанинг ечимлари

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

бўлиб, бунда қуйидаги учта ҳол бўлиши мумкин:

1) $r_1 \;\; va \;\; r_2$ лар ҳақиқий ва ҳар хил, яъни $r_1 \neq r_2$;

2) $r_1 \;\; va \;\; r_2$ ҳақиқий ва тенг (каррали), яъни $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$;

3) $r_1 \;\; va \;\; r_2$ комплекс сонлар, яъни $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$ бунда;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \;\; \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\,.$$

Ҳар бир ҳолни алоҳида қараймиз:

1) бу ҳолда $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ функциялар чизиқли боғланмаган хусусий ечимлар бўлиб, умумий ечим

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad (6)$$

бўлади.

2-мисол. $y'' - 5y' + 6y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламага мос характеристик тенгламани тузамиз:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Характеристик тенгламанинг илдизлари

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \qquad r_2 = 3$$

бўлиб, умумий ечим (6) формулага асосан

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

бўлади.

2) Иккинчи ҳолда, характеристик тенгламанинг илдизлари тенг

$r_1 = r_2$ *va* $y_1(x) = e^{r_1 x}$ битта хусусий ечим бўлади. Иккинчи хусусий ечимни $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ кўринишда танлаймиз. Бу функция ҳам (3) тенгламанинг ечими бўлади, ҳақиқатан ҳам

$$y_2(x) = xe^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x}(1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x}(r_1^2 + 2r_1)$$

ифодаларни (3) тенгламага қўйиб

$$x(r_1^2 + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. r_1 характеристик тенгламанинг илдизи бўлганлиги учун охирги тенгликдаги биринчи қавс айнан нўлга тенг, $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$ бўлганлиги учун иккинчи қавс ҳам айнан нўлга тенг.

Демак, $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ функция ҳам (3) тенгламанинг ечими бўлади, ҳамда $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ ечимлар чизиқли боғланмаган (текшириб кўринг).

Шундай қилиб,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \qquad (7)$$

умумий ечим бўлади.

3-мисол. $y'' + 6y' + 9y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

бўлиб, илдизлари $r_1 = r_2 = -3$ бўлади (тенгламани ечиб кўрсатинг). Характеристик тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг, (7) формулага асосан $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ функция берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

3) Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс, қўшма:

$r_1 = \alpha + i\beta,\ r_2 = \alpha - i\beta$ бўлганда хусусий ечимларни

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x}$$

кўринишда олиш мумкин. Бу ифодаларга

$$e^{\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

Эйлер формуласини татбиқ этсак,

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$$

тенгликлар ҳосил бўлади. Маълумки, бу функцияларнинг чизиқли комбинацияси ҳам бир жинсли тенгламанинг ечимлари бўлади. Шунинг учун

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x \quad va \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

функциялар ҳам (3) тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимлар чизиқли боғланмаган, чунки улардан тузилган Вронский детерминанти нўлдан фарқли (текшириб кўринг).

Демак,

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad (8)$$

(3) тенгламанинг умумий ечими бўлади.

4-мисол. $y'' + 6y' + 13y = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламага мос характеристик тенгламанинг илдизлари:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i, \quad r_2 = -3 - 2i$ бўлади. Бу илдизлар комплекс қўшма бўлиб учинчи ҳолга мос келади. $\alpha = -3, \ \beta = 2$ эканлигини ҳисобга олиб (8) формулага асосан умумий ечим,

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

бўлади.

Энди иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли тенглама учун берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топишни, яъни Коши масаласини қараймиз.

5-мисол. $y'' - y' - 2y = 0$ дифференциал тенгламанинг $x = 0$ бўлганда $y = 8, \quad y' = 7$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли, бир жинсли, чизиқли тенгламадир. Унга мос характеристик тенглама

$$r^2 - r - 2 = 0$$

бўлиб, $r_1 = -1, \quad r_2 = 2$ унинг илдизлари бўлади. Демак, тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

бўлади. Охирги тенгликдан ҳосила олсак,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

бўлиб , $x = 0$ бўлганда $y = 8, \quad y' = 7$ бошланғич шартларга асосан,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Охирги тенгламалар системасидан $C_1 = 3,\ \ C_2 = 5$ ларни аниқлаймиз. Шундай қилиб, изланаётган хусусий ечим

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

бўлади.

3.Математик физика, механика ва астрономия ҳамда иктисодий масалаларни ечишда, биологик жараёнларни тахлил этишда ва бошка кўп соҳалардаги жараёнларни математик модели дифференциал тенгламалар орқали ифодаланилиши.

Дифференциал тенгламаларнинг иқтисоддаги татбиқларига бир неча мисоллар келтирамиз.

1). ***Ишлаб чиқаришнинг рақобатсиз шароитда (табиий) ўсиш модели.*** Бирор турдаги маҳсулот ишлаб чиқарилиб у тайин (белгиланган) P нархда сотилаётган бўлсин. $Q(t)$ вақтнинг t онида (моментида) реализация қилинган маҳсулот микдори бўлсин. Бу ҳолда маҳсулотни реализация қилишдан олинган даромад

$$PQ(t)$$

модел билан ифодаланади. Бу даромаднинг бир қисми албатта ишлаб чиқариш $J(t)$ инвестициясига сарфлансин, яъни

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

бўлсин, бунда m инвестиция меъёри бўлиб ўзгармас сон, ҳамда $0 < m < 1$.

Ишлаб чиқарилаётган маҳсулот тўлиқ реализация қилинаётган бўлса, ишлаб чиқаришни кенгайтириш натижасида даромаднинг ўсиши таъминланиб, бу даромаднинг бир қисми яна маҳсулот ишлаб чиқаришни кенгайтиришга сарфланади. Бу ҳол ишлаб чиқариш тезлигининг ўсиши (акселерация)га олиб келади, ҳамда ишлаб чиқариш тезлиги инвестицияга пропорционал бўлади, яъни

$$Q(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

бунда $\frac{1}{e}$ акселерация меъёри. (1) ва (2) тенгликлардан

$$Q(t) = emPQ \quad yoki \quad Q(t) = kQ(t) \tag{3}$$

келиб чиқади, бунда $k = emP$.

(3) дифференциал тенглама биринчи тартибли, ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлиб, унинг умумий ечими

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln c \quad yoki \quad Q = ce^{kt}$$

бўлади, бунда c ихтиёрий ўзгармас.

Вақтнинг $t = t_0$ моментида ишлаб чиқарилган маҳсулот миқдори Q_0 бўлсин.

Бу шартда

$$Q_0 = ce^{kt_0} \quad yoki \quad c = Q_0 e^{-kt_0}$$

бўлади. (3) тенглама учун Коши масаласининг ечими

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \tag{4}$$

бўлади.

Шундай қилиб, ишлаб чиқаришнинг табиий ўсиши модели экспоненциал бўлар экан (табиий ўсиш деганимизда рақобат йўқлиги тушунилади).

Математик моделлар **умумийлик хоссасига эга.** Бунинг мисоли сифатида қуйидаги ҳолни келтириш мумкин. Биологик кузатишлардан маълумки бактерияларнинг кўпайиш жараёни ҳам (3) дифференциал тенглама билан ифодаланади. Бундан ташқари радиоактив парчаланиш: радиоактив модда массасининг камайиши жараёни қонуни ҳам (4) формулага мос келади.

<u>Ишлаб чиқаришнинг рақобатли шароитда ўсиши модели</u> Олдинги мисолда ишлаб чиқарилаётган маҳсулот тўлиқ реализация бўладиган шароитни қарадик. Энди рақобатли, яъни бозорга бу маҳсулотни бошқалар ҳам реализация қиладиган шароитни қараймиз. Бундай шароитда маҳсулот ишлаб чиқариш миқдорини кўпайтириш билан бозорда унинг нархи камаяди. $P = P(Q)$ функция (P маҳсулот нархи, Q маҳсулот миқдори) камаювчи бўлиб

$\frac{dP}{dQ} < 0$ бўлади. Энди (1)-(3) формулалардагидек

$$Q = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бунда $\alpha = em$. (5) тенгламанинг ўнг томонидаги кўпайтувчилар ҳаммаси мусбат ишорали, демак $Q' > 0$ бўлади, яъни $Q(t)$ ўсувчи функция эканлиги келиб чиқади.

Оддийлик учун $P(Q)$ функционал боғланиш чизиқли, яъни

$$P(Q) = a - bQ, \;\; a >, \; b > 0$$

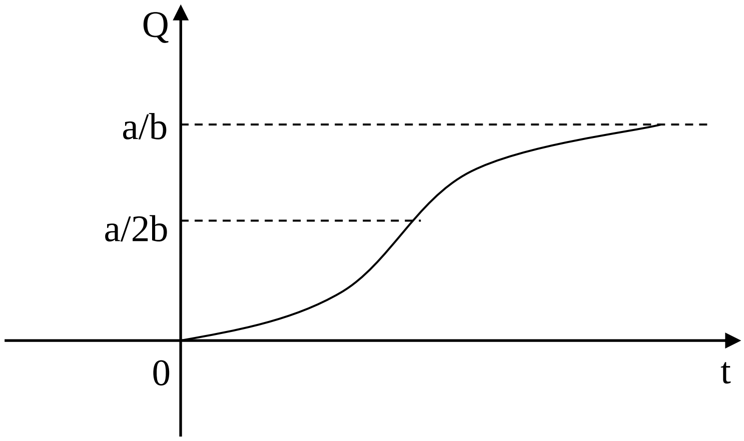
бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (5) тенглама

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

кўринишда бўлади. (6) тенгликни дифференциалласак

$$Q'' = (\alpha aQ - \alpha bQ^2)' = \alpha aQ' - 2\alpha bQQ' \;\; yoki \;\; Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \qquad (7)$$

тенглама ҳосил бўлади. (6)-(7) тенгламалардан $Q = 0 \; va \; Q = \frac{a}{b}$ бўлганда, $Q' = 0,$ $Q < \frac{a}{2b}$ бўлганда, $Q'' > 0$ ҳамда $Q > \frac{a}{2b}$ бўлса $Q'' < 0$ келиб чиқади. Булардан $\frac{a}{2b}$ нуқтадан ўтишда Q ишорасини ўзгартирганлиги учун, бу нуқта $Q = Q(t)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлади. Бу функция графиги, яъни (6) дифференциал тенглама интеграл чизиқларидан бири, 1-чизмада тасвирланган бўлиб, бу эгри чизиққа иқтисодда ***логистик чизиқ*** деб аталади.



1-чизма.

<u>Талаб ва таклифни таҳлил қилиш.</u> Маълумки, бозор моделида маҳсулотга талаб ва таклиф мавжуд ҳолатларда нархнинг ўзгариш суръати билан боғлиқ бўлади. Бундай суръат t вақтнинг $P(t)$ нарх функцияси биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласи билан характерланади.

Қуйидаги мисолни қараймиз. Талаб D ва таклиф S P нархнинг функцияси бўлиб ушбу билан ифодалансин:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6 \qquad (1)$$

Бундай боғлиқлик ҳақиқатда мавжуд ҳолатларга мос келади. Ҳақиқатан ҳам, нарх суръати ошса бозорнинг маҳсулотга қизиқиши ортади, яъни $p'' > 0$ бўлади. Нархнинг тез ўсиши харидорни чўчитиб талабнинг пасайишига олиб келади. Шунинг учун, p' биринчи тенгликда манфий ишора билан ифодаланади. Иккинчидан, нарх суръатининг ортиши билан таклиф яна кучаяди, шунинг учун p'' нинг коэффициенти талаб функциясидагига нисбатан катта, нархнинг ўсиши тезлиги таклифнинг ҳам ўсишига олиб келади, яъни p' таклиф функциясида мусбат ишорали бўлади.

Нарх функцияси ва вақт ўзгариши орасидаги боғланишни таҳлил қилайлик. Маълумки, бозор ҳолати $D = S$ мувозанат билан ифодаланади. Бу ҳолда (1) тенгликдан

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

иккинчи тартибли, ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама келиб чиқади.

Бизга маълумки бундай тенгламанинг умумий ечими бу тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва (2) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечими йиғиндисидан иборат. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

бўлади, бунда C_1 ва C_2 лар ихтиёрий ўзгармаслар.

Бир жинсли бўлмаган (2) тенглама хусусий ечими $p_1(t) = A$ ўзгармас, яъни қарор топган нархни оламиз, ҳамда буни (3) тенгламага қўйиб $A = 3$ эканлигини аниқлаш мумкин. Демак, $p_1(t) = 3$ бўлади.

Шундай қилиб (9) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$p(t) = p(t) + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

бўлади.

Бу ечимдан $t \to \infty \; da \;\; p(t) \to 3$ бўлади, яъни ҳамма нархлар қарор топган нархга яқинлашади.

Ушбу Коши масаласини қараймиз: $t = 0$ бўлганда, нарх $p(0) = 4$ ва ўсиш майли (тенденцияси) $p'(0) = 1$ бўлсин. $t = 0$ бўлганда $p(0) = 4$ бўлганлиги учун (10) дан $C_1 = 1$ келиб чиқади. (3) тенгликдан ҳосила олиб ва t=0 бўлганда $p(0) = 1$ шартдан фойдалансак C_2=4 келиб чиқади, демак Коши масаласининг ечими

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4 \sin t)$$

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг қандай хиллари бор?
2. Қандай дифференциал тенгламаларнинг тартибини пасайтириш билан ечиш мумкин?
3. Қандай дифференциал тенгламаларга чизиқли дейилади?
4. Иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар қандай кўринишда бўлади?
5. Характеристик тенглама нимадан иборат?

6. Характеристик тенглама илдизларига қараб умумий ечимни ёзиш мумкинми?

7. Характеристик тенглама илдизлари комплекс қўшма бўлганда ечим қандай ёзилади?

8. Характеристик тенглама илдизлари каррали, ҳақиқий ва ҳар хил бўлганда умумий ечим қандай ёзилади?

9. Эйлер формуласи қандай бўлади?

4-мавзу. Математика ва саънат.

Режа:

1. Илм-фан, таълим, рақамли иқтисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни.
2. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги. Математика соҳасидаги илғор мамлакатларида олиб борилаётган ишлар билан бир қаторда мавжуд муаммолар, математикани ўрганиш ва ёшларни математика илмига қизиқтириш, математика орқали аниқ ва соҳага боғлиқ бошқа фанларни ривожланишига кўмаклашишнинг ахамияти.

1. Илм-фан, таълим, рақамли иқтисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни.

Давлатимиз раҳбарининг «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В. И. Раммановский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори мамлакатимизда таълим, илм-фан соҳасида амалга оширилаётган ислоҳотларни янги босқичга олиб чиқиши билан аҳамиятлидир.

Илм-фан ва техниканинг замонавий тармоқлари жадал ривожланиши тараққиётнинг тезлашиб кетишида, янгидан-янги техника ва технологияларнинг яратилишида математика фани, унинг ривожи асос бўлаётгани сир эмас. Бугун дунё иқтисодий сиёсатида етакчи ўринларга чиқиб олган ахборот-коммуникация технологиялари, тиббиёт, биология, рақамли иқтисодиёт ва бошқа кўплаб соҳалар ривожи математик ёндашувлар, унинг ушбу соҳаларга самарали татбиқи асосида рўй бермоқда. Математика — барча фанларнинг отаси, дея эътироф этилади. У кириб бормаган фан соҳаси йўқ. Нафақат табиий фанлар, балки ижтимоий-гуманитар фанлар соҳаларида ҳам математикага, ҳисоб-китобга унинг таҳлилида эҳтиёж сезилади. Қайсидир маънода математиканинг алоқаси бўлмаган социология, психологияда ҳам математик анализ долзарб ҳисобланади. Бугун ҳаётимизнинг барча жабҳасида, ҳаттоки, маданият, спорт соҳаларида ҳам математик таҳлилларсиз уларнинг натижадорлигини аниқлашимиз қийин кечади. Ушбу фаннинг ривожи, унинг бошқа фанлар орқали соҳаларга татбиқи юзаки хулосалар чиқаришдан тийилишга сабаб бўлади, масала моҳиятига чуқур кириш, тизимли таҳлил ва ёндашувларга олиб келади.

Бу борада математика фанининг асосчилари ва уни ўз илмий фаолиятида ривожлантирган улуғ аждодларимиз Муҳаммад ал-Хоразмий, Аҳмад Фарғоний, Абу Райҳон Беруний, Мирзо Улуғбеклар давомчилари мамлакатимизда математика илм-фанини янада юксалтириш борасида ўтган даврда муайян ишларни амалга оширдилар. Қабул қилинган қарорда мазкур соҳадаги эътиборга молик ишлар эътироф этилган ҳолда, бугунги давр талаблари, таълим ва илм-фанни ривожлантириш, кадрлар тайёрлаш, илмнинг фундаментал, қидирув ва амалий соҳаларини ривожлантириш, дунё илм-фани, у билан интеграциялашув, соҳани дунё илм-фани даражасига олиб чиқиш, ушбу мақсадларда соҳани мувофиқлаштириш ва давлат томонидан қўллаб-қувватлашга қаратилган вазифалар белгилаб берилган.

Ушбу мақсадларда Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институтида математика таълими ва

фанларини янада ривожлантиришга тааллуқли комплекс чора-тадбирларни амалга ошириш назарда тутилган. Устувор вазифаларни адо этиш бўйича мақсадли дастур қабул қилинган. Унда илм-фаннинг турдош соҳаларида ва иқтисодиёт тармоқларида илмий натижалардан фойдаланишга, институтнинг айрим илмий йўналишларини фундаментал изланишлардан амалий тадқиқотларга қайта йўналтириш дастурларини ишлаб чиқиш белгиланган. Бу, ўз навбатида, натижали илмий ишлар қамровининг ошишига олиб келиш билан бирга, амалий аҳамиятга эга илмий ишлар салмоғининг ортишига олиб келади. Шунингдек, 2020-2022 йилларда иқтисодиёт тармоқлари ва ижтимоий соҳа учун математика бўйича олий малакали кадрлар тайёрлаш чора-тадбирлари дастурини ишлаб чиқиш вазифаси белгилаб берилмоқда. Бу эса, истиқболда математиканинг барча соҳаларга татбиқининг кучайишига, чуқур тизимли таҳлилга асосланган хулосаларга эга бўлишга замин яратади.
Давлатимиз раҳбарининг қарорида таълим ва илм-фан алоқаларини мустаҳкамлашга алоҳида ўрин берилган. Хусусан, Математика институти ходимлари Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети, Муҳаммад ал-Хоразмий номидаги Тошкент ахборот технологиялари университети талабаларининг тажриба start-up лойиҳаларининг амалга оширилишида кўмаклашиши лозимлиги қайд этилган. Бу, ўз навбатида, малакали кадрлар тайёрлаш сиёсатини амалга оширишда ҳам муҳим аҳамиятга эга.

Шу билан бирга, математика соҳасида жаҳон илмий марказлари — МДҲ, Европа, Америка ва Осиё мамлакатларининг етакчи университетлари билан ҳамкорликда тадқиқотлар ташкил этиш вазифасининг белгилаб қўйилиши институт ходимларига юксак масъулият юклайди. Илмий изланишларни улар даражасида ташкил этиш имкониятини яратади. Инглиз тилидаги «Ўзбекистон математика журнали» илмий нашри фаолияти такомиллаштирилиши илм-фанимизнинг жаҳонга юз тутишида, ўзаро алоқаларни мустаҳкамлашда, шунингдек, илмий ишланмаларнинг жаҳон ақл бозорига чиқишида бошланғич нуқталаридан бири бўлиб хизмат қилади.

Эътиборлиси, қарорга мувофиқ, иқтидорли ёшларни танлаш ва саралаш ишларига, уларга шароитлар яратишга ҳам алоҳида эътибор берилган. Ушбу мақсадларда институтда «Ёш математиклар ўқув маркази»га асос солинади. Унда математика фани бўйича ўқув курслари ташкил этилиб, уларда умумтаълим мактаблари, лицейларнинг ўқувчилари, олий таълим муассасаларининг талабалари, докторантлари қатнашиши назарда тутилган. Шунингдек, Ўзбекистон терма жамоасини халқаро математика олимпиадаларига тайёрлаш учун зарур шарт-шароитлар яратилади. Иқтидорли ёшларни саралаб олиш ва мақсадли тайёрлаш жараёнларига ўқитишнинг замонавий усуллари, педагогик инновациялар жорий этилади. Марказга етакчи олимлар ва юқори малакали мутахассислар билан бир қаторда, хорижий олимлар ва мутахассислар жалб этилиши кўзда тутилган.
Бир сўз билан айтганда, мазкур қарор мамлакатимизда математика фанининг янги босқичга чиқишини назарда тутади. Таълим ва илм-фанда математиканинг ўрнини кучайтириш, мазкур фаннинг янада ривожланишига кенг имконият яратади.

Математика ҳамиша фанларнинг отаси, фанларнинг подшоси каби таърифлар билан улуғланиб келинган. Аслида ҳам мазкур фансиз ҳеч бир соҳани мукаммал эгаллаб бўлмайди. Шу сабабли мамлакатимизда математика 2020 йилдаги илм-фанни ривожлантиришнинг устувор йўналишларидан бири сифатида белгиланди.

2. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги.

Ўтган давр ичида математика илм-фани ва таълимини янги сифат босқичига олиб чиқишга қаратилган қатор тизимли ишлар амалга оширилди. Хусусан, математик олимлар учун шарт-шароитлар яратилиб, уларни рағбатлантириш тизими йўлга қўйилди. Шунингдек, яна қатор масалаларда самарали ишлар қилинди.

Шунга қарамай, соҳада ечимини кутаётган масалалар ҳам оз эмас. Президентимизнинг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида“ги қарори ана шундай камчиликларни бартараф этиш ҳамда соҳани ривожлантиришга хизмат қилиши билан аҳамиятлидир. Умумий қилиб айтганда, қарор орқали таълимнинг ҳар бир босқичи қамраб олинган. Яъни, мактабгача таълимдан тортиб, илмий изланишларгача бўлган жараёндаги масалаларнинг ечими босқичма-босқич кўрсатиб ўтилган.

Шу ўринда қуйидаги маълумотларни айтиб ўтишни лозим топдик. Айни пайтда юртимизда 357 та ихтисослаштирилган мактаб ва мактаб-интернати мавжуд бўлиб, уларнинг 229 таси математика ва аниқ фанларга ихтисослаштирилган. Босқичма-босқич математика фанига ихтисослаштирилган мактаблар сони кўпайтирилади. Асосийси, мактаблардаги таълим бериш билан боғлиқ натижалар кўрсаткичи юқори бўлиши керак. Бунинг учун ҳам муҳим чора-тадбирлар олиб борилмоқда. Қарор эса мазкур йўналишдаги ишларни янада ривожлантириш ҳамда такомиллаштиришда асосий вазифани ўтайди.

Мисол учун, шу пайтгача бўлмаган мактабгача, умумий ўрта, ўрта махсус, профессионал, олий таълим ташкилотлари ва илмий муассасалар ўртасидаги яқин ҳамкорликни таъминловчи яхлит тизим шакллантирилади. Бу орқали таълимнинг кейинги босқичлари ҳамда ўқувчида тасаввур ҳосил қилинади. Шунингдек, педагоглар ўзаро фикр алмашиб, ўқитишни яхшилаш, кўпроқ янгиликлар жорий этиш имконига эга бўладилар.

Эндиликда фарзандингиз боғча ёшиданоқ математика ҳақидаги тасаввурга эга бўлиб улғаяди. Бунинг учун илғор хорижий тажриба асосида мактабгача ёшдаги болаларда илк математик тасаввурларни шакллантириш бўйича замонавий педагогик технологиялар жорий қилинади. Шу билан бирга, ҳар бир ҳудудда ва таълимнинг ҳар бир босқичида математика фанларини ўқитиш сифатини ошириш, ихтисослаштирилган мактаблар фаолиятини ривожлантириш ҳамда янги мактабларни ташкил этиш ҳам устувор вазифа сифатида белгиланмоқда. Бунинг учун, албатта, бизга малакали кадрлар керак бўлади. Ана шу мақсадда мазкур фан бўйича кадрларни, хусусан қишлоқ жойлардаги мактабларнинг кадрларини тайёрлаш ва қайта тайёрлаш тизимини ривожлантириш, математика фани бўйича дарслик ва ўқув қўлланмаларни такомиллаштириш чора-тадбирлари ҳам биринчи галдаги масалалар сифатида баҳоланмоқда.

Қарор кўлами жиҳатдан ва мазмунан жуда кенг ҳамда бой бўлиб, уни соҳа аҳли кўтаринки кайфиятда кутиб олди. Сабаби унда математика фани ўқитувчилари, педагоглар ҳамда олимларнинг меҳнатини муносиб рағбатлантириш, ўқувчиларни эса фанга янада қизиқишини ошириш билан боғлиқ ислоҳотлар ҳам акс этган.Таъкидлаш керакки, Президент, ижод ва ихтисослаштирилган мактабларни ривожлантириш агентлиги тасарруфида ҳам математикага йўналтирилган мактаблар мавжуд. Бугунги кунда 4 Президент ва 2 ихтисослаштирилган, яъни, Мирзо Улуғбек ва Ал-Хоразмий мактабларида 1 минг 420 нафар ўқувчига асосан математика фани чуқурлаштирилган ҳолда ўқитилади. Ушбу мактабларга саралаш имтиҳонлари ҳам асосан математика фанидан амалга оширилади. Ушбу муассасаларда иш самарадорлигига эришиш учун қатор тадбирлар жорий этилган. Жумладан, математика институтининг олимлари мазкур мактабларга бириктирилган. Олимлар ўқувчилар учун махсус маҳорат дарслари олиб боради. Жорий йилнинг февраль ойида Тошкент шаҳридаги Президент мактабида Академик Шавкат Аюпов томонидан маҳорат дарси ўтказилди. Табиийки, бу амалиёт ўқувчиларда ижобий ўзгаришларни ҳосил қилди. Улардаги қизиқиш ва интилиш янада ошгани дарслар давомида кўзга ташланди. Бундан ташқари, пойтахтимиздаги Президент мактабида Математика инсититути билан ҳамкорликда халқаро математика олимпиадасига республика терма жамоасини тайёрлаш марказини ташкил қилиш ишлари олиб борилмоқда. Шунингдек, математика бошқа STEAM фанлари каби инглиз тилида ҳам ўргатилмоқда. Бу, ўз навбатида, ўқувчиларимизнинг келгусида математика соҳасидаги билимини халқаро майдонда намоён қилишига кенг имконият беради.

Яна бир гап. Агентлик ва “SixClouds Pte Ltd Singapore” компанияси ўртасида имзоланган меморандумга кўра, “SixClouds” компанияси 4 Президент ва 3 ихтисослаштирилган мактабга, компания томонидан ишлаб чиқилган математика фани бўйича рақамли ўқув методикаси ва дастури беғараз тақдим этилди. Бу дастур 5-8 синф ўқувчилари учун қўшимча машғулотлар ташкил қилишда қўлланилмоқда. Албатта, бажарилган ишларимиз ҳали қўл билан санарли. Олдинда қилиниши керак бўлган муҳим вазифалар бисёр. Биз уларни қай тартибда амалга ошириш ҳақида кўпроқ бош қотиришимиз лозим. Иқтидорли ёшларни аниқлаш ҳамда уларнинг математика фани бўйича маҳаллий ва халқаро фан олимпиадаларида муваффақиятли иштирок этиб, совринли ўринларни эгаллашини таъминлаш муҳимдир. Онлайн платформа асосида таълим беришни амалиётга татбиқ этиш, масофадан ўқитиш тизими самарадорлигини ошириш, баҳолаш мезонининг шаффоф механизмларини жорий қилиш талаб этилади.

Мустаҳкамлаш учун саволлар

1. Илм-фан, таълим, рақамли иқтисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни.
2. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги.
3. Математика соҳасидаги илғор мамлакатларида олиб борилаётган ишлар билан бир қаторда мавжуд муаммолар, математикани ўрганиш ва ёшларни математика илмига қизиқтириш, математика орқали аниқ ва соҳага боғлиқ бошқа фанларни ривожланишига кўмаклашишнинг ахамияти.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАРИНИНГ МАЗМУНИ

1–Мавзу: Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Математиканинг соҳаларга татбиқлари.
2. Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари. Ечимни текшириш. Тенгламаларни сонли ечиш усуллари.
3. Матрицалар ва уларнинг татбиқлари.
4. Векторлар ва уларнинг татбиқлари.

Мавзу мақсади: Тинловчиларга Математиканинг соҳаларга татбиқлари бўйича тассавур шаллантириш. Тенгламалар ва уларнинг татбиқлари. Ечимни текшириш. Тенгламаларни сонли ечиш усулларини ўрганиш. Матрицалар, векторлар ва уларнинг татбиқларига доир мисоллар ечиш.

Топшириқни бажариш учун кўрсатма ва тавсиялар:

1-мисол. Корхона уч хилдаги хом ашёни ишлатиб уч турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Ишлаб чиқариш характеристикалари 1-жадвалда берилган.

1-жадвал.

хом ашё хиллари	Маҳсулот турлари бўйича хом ашё сарфлари			хом ашё захираси
	1	2	3	
1	5	12	7	2000
2	10	6	8	1660
3	9	11	4	2070

Берилган хом ашё заҳирасини ишлатиб, маҳсулот турлари бўйича ишлаб чиқариш ҳажмини аниқланг.

Ечиш: Ишлаб чиқарилиши керак бўлган маҳсулотлар ҳажмини мос равишда x_1, x_2, x_3 лар билан белгилаймиз. 1-тур маҳсулотга, 1-хил хом ашё, биттаси учун сарфи 5 бирлик бўлганлиги учун $5x_1$ 1-тур маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган 1-хил хом ашёнинг сарфини билдиради. Худди шундай 2,3-тур маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун кетган 1-хил хом ашё сарфлари мос равишда $12x_2$, $7x_3$ бўлиб, унинг учун қуйидаги тенглама ўринли бўлади: $5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000$. Юқоридагига ўхшаш 2,3-хил хом ашёлар учун

$$10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660,$$

$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070$$

тенгламалар ҳосил бўлади. Демак, масала шартларида қуйидаги уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000\ ,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 7x_3 = 2000, \\ 10x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 1660, \\ 9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070 \end{cases}$$

$$9x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 2070.$$

Бу масаланинг математик модели уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системасидан иборат бўлди. Бу масала тенгламалар системасининг ечимини топиш билан ечилади. Бундай тенгламалар системасини ечишни умумий ҳолда қараймиз.

2-мисол. Фирма палто ва куртка (калта камзул) ишлаб чиқариш учун тўртта турдаги ресурслардан фойдаланади. Ресурслар сарфи қуйидагича: битта палто ишлаб чиқариш учун 1-турдаги ресурсдан a_1 бирлик, 2-турдаги ресурсдан a_2 бирлик, 3-турдаги ресурсдан a_3 бирлик, 4-турдаги ресурсдан эса a_4 бирлик миқдорда ишлатилади; битта куртка учун эса 1,2,3,4-турдаги ресурслардан мос равишда b_1, b_2, b_3, b_4 бирлик миқдорда ишлатилади. Ресурслар чегараланган бўлиб, улар мос равишда c_1, c_2, c_3, c_4 бирлик миқдорда берилган бўлсин.

Палто ва куртка ишлаб чиқариш учун ресурслар сарфи математик моделини тузинг.

Ечиш. Ишлаб чиқарилиши керак бўлган палтолар миқдорини x_1, ишлаб чиқарилиши керак бўлган курткалар миқдорини x_2 билан белгилайлик. Бу ҳолда $a_1 \cdot x_1$ кўпайтма палто ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур ресурс миқдорини худди шунга ўхшаш $b_1 x_2$ куртка ишлаб чиқариш учун сарфланган 1-тур ресурс миқдорини ифодалайди. Демак, 1-тур ресурснинг умумий сарфи $a_1 x_1 + b_1 x_2$ бўлиб,

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1$$

тенглик ҳосил бўлади. Юқоридагига ўхшаш 2, 3, 4-тур ресурслар сарфи учун мос равишда

$$\begin{aligned} a_2 x_1 + b_2 x_2 &= c_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 &= c_3 \\ a_4 x_1 + b_4 x_2 &= c_4 \end{aligned}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.Шундай қилиб, берилган масаланинг математик модели

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 &= c_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 &= c_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 &= c_3 \\ a_4 x_1 + b_4 x_2 &= c_4 \end{aligned}$$

икки номаълумли, тўртта чизиқли тенгламалар системаси бўлади. Бу моделда ўзгарувчилар (номаълумлар) фақат биринчи даражали бўлганлиги учун чизиқли модел деб юритилади.

3-мисол. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ва $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ матрицалар берилган. A ва B матрицаларни кўпайтиринг.

Ечиш. Биринчи матрицанинг устунлар сони, иккинчи матрицанинг сатрлар сонига тенг, шунинг учун бу матрицаларни кўпайтириш мумкин:

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\4&-3&1&0\\2&5&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&7\\0&2\\5&4\\6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot0+2\cdot5+3\cdot6 & 1\cdot7+0\cdot2+2\cdot4+3\cdot0\\4\cdot2+(-3)\cdot0+1\cdot5+0\cdot6 & 4\cdot7+(-3)\cdot2+1\cdot4+0\cdot0\\2\cdot2+5\cdot0+3\cdot5+1\cdot6 & 2\cdot7+5\cdot2+3\cdot4+1\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}30&15\\13&26\\25&36\end{pmatrix}.$$

Матрицаларни кўпайтириш ушбу

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

гуруҳлаш ҳамда

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

тақсимот хоссасига эга.

Масалан, $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}$

бўлсин. Бу ҳолда

$$A\cdot(BC)=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\cdot(-1)+2\cdot0 & 0\cdot2+2\cdot(-3)\\3\cdot(-1)+4\cdot0 & 3\cdot2+4\cdot(-3)\\1\cdot(-1)+(-3)\cdot0 & 1\cdot2+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-6\\-3&-6\\-1&11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&14\\-14&-110\end{pmatrix}.$$

Энди $(AB)\cdot C$ кўпайтиришни бажарамиз:

$$(AB)C=\left[\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\3&4\\1&-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&4\\14&46\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2\\0&-3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}13\cdot(-1)+4\cdot0 & 13\cdot2+4\cdot(-3)\\14\cdot(-1)+46\cdot0 & 14\cdot2+46\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&14\\-14&-110\end{pmatrix}$$

Шундай қилиб

$$A\cdot(BC)=(AB)\cdot C$$

хосса ўринли бўлади. Энди тақсимот хоссасини қараймиз:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\\ & & \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

бўлсин. Олдин тақсимот хоссасининг чап томонини

$$(A+B)\cdot C$$

ҳисоблаймиз:

$$(A+B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 6 & -5\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

Ўнг томони

$$AC+BC=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 19\\ -1 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 15\\ 6 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 34\\ 5 & -7\end{pmatrix}.$$

бўлади.

Шундай қилиб

$$(A+B)\cdot C=AC+BC$$

тенглик ўринли бўлади.

Исталган квадрат матрица A ни мос бирлик E матрицага кўпайтирганда

$$AE=EA=A$$

тенглик ўринли бўлади, масалан

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+1\cdot0+0\cdot1\\ -1\cdot1+2\cdot0+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot1+3\cdot0 & -1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1\\ -3\cdot1+0\cdot0+0\cdot(-2) & -3\cdot0+0\cdot1+(-2)\cdot0 & 3\cdot0+0\cdot0+(-2)\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ -3 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Худди шунга ўхшаш $EA=A$ тенгликни ҳам текшириб кўриш мумкин (буни бажаришни ўқувчига ҳавола қиламиз).

4-мисол. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & -3 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 3\\ 4 & 5 & 2 & -6 & -5\\ 1 & -4 & -2 & 3 & 7\end{pmatrix}$

матрицанинг рангини ҳисобланг.

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаш учун элементар алмаштиришлардан фойдаланамиз. Биринчи сатр элементларини иккинчи сатр элементларига, биринчи сатр элементларини (–2)га кўпайтириб, учинчи сатр элементларига, ҳамда учинчи сатр элементларини тўртинчи сатр элемнтларига қўшиб қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & -3 & -1\\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2\\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

Кейинги матрицада 2-сатрини (–1) га кўпайтириб тўртинчи сатрига қўшсак

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица ҳосил бўлади. Бу матрицада

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

бўлиб, тўртинчи тартибли минорлар 0 га тенг. Шундай қилиб, берилган матрицанинг ранги 3 га тенг.

5-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Олдин A матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 18 + 4 + 3 - 2 - 12 - 9 = 2 \neq 0.$$

Юқоридаги теоремага асосан тескари матрица мавжуд, чунки

$$\Delta = 2 \neq 0$$

яъни, берилган матрица махсусмас матрицадир. A^{-1} ни топиш учун A матрица ҳамма элементларининг алгебраик тўлдирувчиларини топамиз:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&4\\3&9\end{vmatrix}=6,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&4\\1&9\end{vmatrix}=-5,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\3&9\end{vmatrix}=-6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&9\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=-2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$$

Тескари матрицани топиш

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

формуласига асосан

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2,5&4&-1,5\\0,5&-1&0,5\end{pmatrix}$$

бўлади. A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

тенгликнинг бажарилиши билан текшириб кўриш мумкин, ҳақиқатан ҳам,

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-3&1\\-2.5&4&-1.5\\0.5&-1&0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+1\cdot(-2.5)+1\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+1\cdot4+1\cdot(-1) & 1\cdot1+1\cdot(-1.5)+1\cdot0.5\\ 1\cdot3+2\cdot(-2.5)+4\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+2\cdot4+4\cdot(-1) & 1\cdot1+2\cdot(-1.5)+4\cdot0.5\\ 1\cdot3+3\cdot(-2.5)+9\cdot0.5 & 1\cdot(-3)+3\cdot4+9\cdot(-1) & 1\cdot1+3\cdot(-1.5)+9\cdot0.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

яъни, $AA^{-1}=E$ бирлик матрица ҳосил бўлади, бу A^{-1} тескари матрицанинг тўғри топилганлигини исботлайди.

Мустақил иш учун топшириқлар

1. Математик моделларга бир неча мисоллар келтиринг.

2. Оила даромадини x, унинг ҳаражатини y десак $y=\frac{x}{2}$ моделда даромаднинг ортиши билан нимани кузатасиз?

3. Республикамиз халқ хўжалиги тармоқлари ва уларнинг элементларини иқтисодий системага мисол қилиб бўладими? Мумкин бўлса система ва унинг элементлари нималар бўлади? Муайян тармоқлар мисолида тушунтиринг.

4. Яшаш жойингиз ёки унга яқин, бирор маҳсулот ишлаб чиқаришни система деб олиб унинг элементларини санаб чиқинг(бирнеча мисоллар келтиринг).

5 Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ ва } B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ матрицаларни кўпайтиринг.

6. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицаларни кўпайтиринг.

7. Ушбу

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$;

2) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ матрицаларга тескари матрицаларни топинг.

8. Ушбу

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 34 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицаларнинг рангини ҳисобланг.

2–Мавзу: Функциялар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Функция таърифи ва уларнинг татбиқлари.
2. Функциялар ёрдамида табиий жараёнларни моделлаштириш.
3. Қаторлар ва уларнинг татбиқлари.

Мавзу мақсади: Тинловчиларга Функция таърифи ва уларнинг татбиқлари бўйича тассавур шаллантириш. Функциялар ёрдамида табиий жараёнларни моделлаштириш. Қаторлар ва уларнинг татбиқларини ўрганиш.

Топшириқни бажариш учун кўрсатма ва тавсиялар:

1-мисол. Бирор корхонада ишлаб чиқарилаётган бир хил маҳсулот харажатини икки гуруҳ:

1) маҳсулот ҳажмига, пропорционал ўзгарувчи харажат, масалан, материаллар сарфи;

2) ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажмига боғлиқ бўлмаган ўзгармас харажатлар, масалан, маъмурият биноси ижарасига, уни иситишга кетадиган ва бошқа харажатлар деб қараш мумкин.

Ўзгармас харажатларни b билан, ўзгарувчи харажатларни, маҳсулотнинг ҳир бир бирлиги учун a билан белгиласак, бирор даврда x бирлик ҳажмдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун кетган умумий харажат

$$y = b + ax$$

бўлиб, бу чизиқли функциядир.

2-мисол. Маҳсулотнинг умумий баҳоси унинг сонига пропорционал бўлсин.

a битта маҳсулот нархи бўлса, x бирлик маҳсулотнинг умумий баҳоси

$$y = ax$$

чизиқли функция билан ифодаланади, маълумки бу координатлар бошидан ўтувчи тўғри чизиқлар дастасининг тенгламасидир.

Чизиқли функция ва унинг графиги, иқтисодий миқдорлар орасида пропорционаллик мавжуд бўлган боғланишларда ишлатилади.

3-мисол. Италян иқтисодчиси Парето жамиятда фойдани тақсимлашнинг қуйидаги қоидасини таклиф этди: y билан x дан кичик бўлмаган фойдага эга бўлган шахслар сонини белгиласак,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

бўлади, бунда a ва m ўзгармаслар.

Парето қонуни катта фойдага эга бўлганда, тақсимотни етарли даражада аниқлик билан ифодалайди, паст даражадаги фойдага эга бўлганда аниқ эмас.

Бирор жамиятда фойдани тақсимлаш

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

формула билан аниқлансин:

1) 100000 дан кўп фойдага эга бўлган шахслар сони;

2) 100 нафар энг бой шахслар орасида, энг кам фойдани топинг.

Ечиш. 1) масала шарти бўйича, $x = 100000$, уни тақсимот формуласига қўйсак:

$$y = \frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

бўлади. Охирги тенгликни логарифмласак:

$$\lg y = \lg\frac{2000000000}{100000^{1.5}} = \lg 2000000000 - 1{,}5\lg 100000 = \lg 2\cdot 10^9 - 1.5\lg 10^5 =$$

$$= 9 + 0{,}301 - 1{,}5\cdot 5 = 9{,}301 - 7{,}5 = 1{,}801,$$

яъни $\lg y = 1.801$ бўлади. Логарифмлар жадвалидан $y = 63{,}2$ ни топамиз. Шундай қилиб, Парето тақсимоти бўйича 63 киши 100000 дан кўп фойдага эга бўлади;

2) масала шарти бўйича $y = 100$, тақсимот формуласидан

$$100 = \frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан $x = 73700$ эканлигини аниқлаш мумкин (уни бажаришни ўқувчига ҳавола этамиз).

Шундай қилиб, 100 нафар энг бой кишилар ичида энг кичик фойда 73700 ни ташкил этади.

Функцияларнинг иктисодда қўлланилишига мисолларни кўплаб келтириш мумкин. Бу мавзу бўйича талабаларнинг шуғулланишини таклиф этамиз.

4-мисол. $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Маълумки, функциянинг аниқланиш соҳаси x нинг шундай қийматлари тўпламики, бунда y функция ҳақиқий сон қийматларга эга бўлиши керак. Берилган функцияда

$$x - 3 \geq 0,$$
$$4 - x > 0$$

бўлгандагина x нинг ҳар бир қийматига мос келадиган y нинг қиймати ҳақиқий бўлади. Бу тенгсизликлар системасидан, $x \geq 3$, $x < 4$бўлиб, яъни $3 \leq x < 4$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $[3,\ 4)$ бўлади.

5-мисол. $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + 3/x)^x$ лимитни иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланиб ҳисобланг.

Ечиш. $x \to \infty$ да лимитга ўтсак, 1^{∞} кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади. $3/x = \alpha$ билан алмаштирсак, бу ердан $x = 3/\alpha$ ҳамда $x \to \infty$ да $\alpha \to 0$ бўлади..Демак,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3=e^3$$

келиб чиқади.

Шундайқилиб, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x=e^3$.

6-мисол. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш: $x\to 1$да $1/(x-1)\to\infty$ ва $2/(x^2-1)\to\infty$ бўлиб, $(\infty-\infty)$ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1-2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Охирги ифода $x\to 1$ да $(0/0)$ аниқмас ифода бўлади. Шундай қилиб,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

7-мисол. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ лимитни ҳисобланг.

Ечиш. $x\to+\infty$ да $\infty-\infty$ кўринишдаги аниқмаслик келиб чиқади. Қуйидаги шакл алмаштиришни бажарамиз:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Охирги ифода $x\to\infty$ да (∞/∞) кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, 6-мисолдагидек x нинг юқори даражалисига сурат ва махражини бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

бунда $x\to+\infty$ да $3/x\to 0$ бўлади.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. $y = x^2$ функциянинг узлуксизлигини, $x_0 = 3,\ x = 5$ нуқталарда, орттирмалар орқали кўрсатинг.

2. 1) $y = 3x^3 + 5x^2 - 7$, 2) $y = 4x^3 + 3x^2 + 5$ функциялар узлуксизлигини $x_0 = 2;\ x_1 = -3$ нуқталарда, орттирмалар орқали кўрсатинг.

3. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг x нинг ҳамма қийматлари учун узлуксиз эканлигини кўрсатинг.

4. Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг:

1) $f(x) = \dfrac{8}{x+4}$; 2) $f(x = \dfrac{x}{x-4}$.

5. Ушбу функцияларнинг узилиш нуқталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5}$.

6. Қуйидаги функцияларга тескари функцияларни топинг ва топилган функцияларнинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини аниқланг:

1) $f(x) = x^2 - 1,\ x \in [0, +\infty)$; 2) $f(x) = 2x + 3,\ x \in (-\infty, +\infty)$;

3) $f(x) = (x-1)^3,\ x \in (-\infty, +\infty)$; 4) $f(x) = x^2 - 1,\ x \in (-\infty, 0]$.

7. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг ва уларнинг графикларини ясанг.

1) $y = \dfrac{1}{x}$; 2) $y = -\dfrac{3}{x}$; 3) $y = 2 - \dfrac{1}{x}$; 4) $y = \dfrac{2}{x-1}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+3}{5x} = \dfrac{4}{5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7) = 5$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8) = 3$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2) - 4x + 6 = 10$

эканлигини функция лимити таърифидан фойдаланиб исботланг хамда x ва берилган функциялар кийматлари жадвали билан тушунтиринг.

9. Қуйидаги лимитларни, лимитларнинг хоссаларидан фойдаланиб ҳисобланг:.

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 6) $\lim\limits_{t\to 3}\left[2t+\sqrt{t^2-8}+\lg(3t+\sqrt{t^2-8})\right]$.

10. Ушбу $(0/0)$ ва (∞/∞) кўринишдаги аниқмасликларни очинг:

1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5+6x^3+4x^2-2x+11}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x-17}$.

11. Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

12. Қуйидаги лимитларни биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлардан фойдаланиб ҳисобланг:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x/3}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x/2}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin 1/x$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2/n)^n$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-5/n)^n$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/3n)^n$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x)^{1/x}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n/(n+1)]^n$.

13. Қуйидаги аниқмасликларни очинг:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

3–Мавзу: Ҳосила ва унинг татбиқлари.

Режа:

1. Ҳосила таърифи ва унинг татбиқлари.
2. Функцияларнинг монотонлиги, энг катта ва энг кичик қийматларини топиш.
3. Интеграл ва унинг татбиқлари.
4. Юзаларни интеграллар ёрдамида ҳисоблаш.

Мавзу мақсади: Тинловчиларга Ҳосила таърифи ва уларнинг татбиқлари бўйича тассавур шаклантириш. Функцияларнинг монотонлиги, энг катта ва энг кичик қийматларини топиш. Интеграл ва унинг татбиқлари. Юзаларни интеграллар ёрдамида ҳисоблашларни ўрганиш.

Топширикни бажариш учун кўрсатма ва тавсиялар:

1-мисол. $y=\sqrt{1+x^2}$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли дифференциалларини топинг.

Ечиш. Олдин биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = (\sqrt{1+x^2})' = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{x'\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot x/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Шундай қилиб,

$$dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \text{ва} \quad d^2y = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx^2$$

бўлади.

2-мисол. $f(x) = 3x^2 - 7$ функциянинг, аргумент 2 дан 2,001 гача ўзгаргандаги орттирмасини тақрибан топинг.

Ечиш. (3) формуладан фойдаланамиз. $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.001.$

$f'(x) = 6x,\quad f'(x_0) = 6 \cdot 2 = 12$, $\Delta f(x_0) \approx df(x_0) = f'(x_0)\quad \Delta x = 12 \cdot 0.001 =$
$= 0.012.$

Функция орттирмаси ўрнига унинг дифференциалини олиб қанча хатога йўл қўйилганини баҳолаймиз: бунинг учун ҳақиқий орттирмани топамиз,

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x)^2 - 7 - (3x_0^2 - 7) =$$
$$= 3x_0^2 + 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 7 - 3x_0^2 + 7 =$$
$$= 6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 6 \cdot 2 \cdot 0.001 + 3 \cdot 0.000001 = 0.012003.$$

Демак, абсалют хато

$$|\Delta y - dy| = |0.012003 - 0.012| = 0.000003.$$

Нисбий хато

$$\frac{|\Delta y - dy|}{dy} = \frac{0.000003}{0.012} = 0.00025 \quad \text{ёки} \quad 0{,}025\%.$$

Тақрибий ҳисоблаш хатоси анча кичик, бу эса юқоридаги тақрибий тенгликдан тақрибий ҳисоблашларда фойдаланиш мумкинлигини кўрсатади.

3-мисол. $y = f(x) = x^3 - 3/2 \cdot x^2 - 6x + 4$ функциянинг монотонлик оралиқларини топинг.

Ечиш. Биринчи тартибли ҳосилани топамиз:

$y' = f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$, $x^2 - x - 2 = 0$,

бундан $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ критик нуқталар бўлиб, улар функциянинг аниқланиш соҳасини $(-\infty;-1), (-1;2), (2;+\infty)$ оралиқларга ажратади.

Бу оралиқларнинг ҳар бирида ҳосиланинг ишорасини текширамиз. $(-\infty;-1)$ оралиқдан ихтиёрий нуқта олиб, масалан, $x = -2$ бўлса, $f'(-2) = (-2\ )^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$ бўлади. Бундай тенгсизлик оралиқнинг исталган нуқтаси учун бажарилади (буни текшириб кўринг). Демак, $(-\infty;-1)$ оралиқда функция ўсувчи (ўсувчи функциянинг етарли шартига асосан).

$(-1;2)$ оралиқнинг $x = 0$ нуқтасида $f'(0) = -2 < 0$, бўлиб, бу оралиқнинг исталган нуқтаси учун, $f'(x) < 0$ тенгсизлик бажарилади. Камаювчи функциянинг етарли шартига асосан, $(-1;2)$ оралиқда функция камаювчи бўлади.

$(2;+\infty)$ оралиқнинг $x = 3$ нуқтаси учун, $f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4 > 0$, бўлиб, бу тенгсизлик ҳам оралиқнинг исталган нуқтаси учун бажарилади, демак, функция $(2;+\infty)$ оралиқда ўсувчи.

4-мисол. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ функциянишг экстремумини биринчи қоида билан текширинг.

Ечиш. Критик нуқталарни топамиз:

$f'(x) = x^2 - x - 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, бунда $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$;

бўлиб, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ бўлади.

Энди аргументнинг критик нуқталаридан ўтишда функция ҳосиласининг ишораларини текширамиз:

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, $x < -2$ бўлса, $x+2<0$, $x-3<0$ бўлиб, $(x+2)(x-3)>0$, бўлади, яъни ишора мусбат $(+)$. $x>-2$ бўлса, $x+2>0$; $x-3<0$, $(x+2)(x-3)<0$, яъни ишора манфий(-). Демак, $x_1=-2$ нуқтадан ўтишда функция ҳосиласининг ишораси мусбатдан манфийга ўзгаради. Биринчи қоидага асосан $x_1=-2$ нуқтада берилган функция максимумга эга бўлади.

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 8/3 = 10 .$$

Энди -2< x<3 бўлса, $(x+2)>0$; $(x-3)<0$ бўлиб, $(x+2)(x-3)<0$, ҳосиланинг ишораси манфий $(-)$, $x>3$ бўлса, $(x+2)>0$; $(x-3)>0$ бўлиб, $(x+2)(x-3)>0$, мусбат (+) бўлади. Демак, $x_2=3$ нуқтадан ўтишда функция ҳосиласи ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартиради, биринчи қоидага асосан функция $x_2=3$ нуқтада минимумга эга бўлади.

$$y_{\min} = 1/3 \cdot 3^3 - 1/2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8/3 = -65/6.$$

5-мисол. $f(x) = 1/4 \cdot x^4 - 2x^3 + 11/2 \cdot x^2 - 6x + 9/4$ функция экстремумини иккинчи қоида билан текширинг.

Ечиш. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \qquad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11 .$$

энди критик нуқталарни топайлик:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$$
$$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6), \qquad x^2 - 5x + 6 = 0, \ x - 1 = 0$$

бундан, $x=1$ ва

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} ; \ x_2 = 2 , \ x_3 = 3$$

бўлади. Демак, критик нуқталар: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ бўлади. Энди иккинчи тартибли ҳосиланинг критик нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f''(1)=3\cdot 1^2-12\cdot 1+11=2>0,$$
$$f''(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+11=-1<0,$$
$$f''(3)=3\cdot 3^3-12\cdot 3+11=2>0.$$

Шундай қилиб, экстремумга эга бўлишнинг иккинчи қоидасига асосан, $x_1=1,\ x_3=3$ нуқталарда минимум, $x_2=2$ нуқтада функция максимумга эга бўлади. $\min f(1)=0$; $\max f(2)=0.25$; $\min f(3)=0$.

6-мисол. Периметри $2p(p>0)$ бўлган тўғри тўртбурчаклар орасида энг катта юзага эга бўлган тўғри тўртбурчак топилсин.

Ечиш: Бундай тўғри тўртбурчакнинг асоси x бўлсин. Бу ҳолда тўғри тўртбурчакнинг баландлиги $p-x$ га, юзи эса,

$$S=S(x)=x(p-x),\ (0<x<p)$$

бўлади.

$S(x)$ функциянинг критик нуқталарини топамиз:

$$S'(x)=p-2x,\ p-2x=0,\quad x=\frac{p}{2}$$

критик нуқта бўлади. $S''(x)=-2;$ $S''(p/2)=-2<0.$

Демак, $S(x)$ функция, $x=\dfrac{p}{2}$ нуқтада максимумга эга бўлади.

$$S_{\max}=\frac{p}{2}(p-\frac{p}{2})=\frac{p^2}{4}.$$

Шундай қилиб, энг катта юзага эга бўлган тўғри тўртбурчак томони $\dfrac{p}{2}$ тенг бўлган квадратдан иборат экан.

Функцияни текширишнинг умумий режаси. Функцияни ҳосила ёрдамида текширишни ҳисобга олиб, функцияни текширишнинг қуйидаги умумий режасини тавсия этамиз:

1) функциянинг аниқланиш соҳасини топиш ҳамда аргументнинг аниқланиш

соҳаси четларига интилганда функция ўзгаришини текшириш;

2) функциянинг жуфт-тоқлигини текшириш;

3) функциянинг даврийлигини аниқлаш;

4) функциянинг узлуксизлиги, узилишини текшириш;

5) функциянинг критик нуқталарини аниқлаш;

6) функциянинг монотонлик оралиқларини ва экстремумини текшириш;

7) иккинчи тур критик нуқталарни топиш;

8) функция графигининг қавариқлик, ботиқлик оралиқларини ва эгилиш нуқталарини аниқлаш;

9) функция графигининг асимтоталарини текшириш;

10) имконияти бўлса функция графигининг координат ўқлари билан кесишиш нуқталарини аниқлаш;

11) юқоридаги аниқланган хусусиятларни ҳисобга олиб, функция графигини ясаш.

7-мисол. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ функцияни текширинг.

Ечиш. Функцияни текширишнинг умумий режасидан фойдаланамиз:

1) функция махражи нўлга айланадиган нуқталардан бошқа ҳамма нуқталарда аниқланган. Махраж $x_1=-2, x_2=2$ нуқталарда нўлга тенг, демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty,-2)$, $(-2;+2)$, $(2,+\infty)$ оралиқлардан иборат. Аниқланиш оралиқларининг четларида функциянинг ўзгаришини текширамиз:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\ \lim_{x\to-2-0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=\infty,\ \lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$$

2) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$

бўлганлиги учун тоқ функция;

3) функция $f(x+T)=f(x)$ тенгликни қаноатлантирмайди, демак, даврий эмас;

4) функция $x=\pm 2$ нуқталарда узилишга эга;

5) критик нуқталарни топамиз:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}, \quad f'(x)=0, \ x=0, \ x=\pm 2\sqrt{3}..$$

Бундан ~~т~~ашқари $f'(x)$, $x=\pm 2$ нуқт~~ала~~рда мавжуд эмас. Демак, критик нуқталар: $x_1=-2\sqrt{3},\ x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=2,\ x_5=2\sqrt{3}$

бўлади;

6) $(-\infty,-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2{,}0)$, $(0{,}2)$, $(2{,}2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},+\infty)$

ораликларнинг ҳар бирида $f'(x)$ нинг ишорасини текширамиз;

$(-\infty,-2\sqrt{3})$ *ва* $(-2\sqrt{3},+\infty)$ оралиқларда $f'(x)$ функция ҳосиласи мусбат, яъни функция бу оралиқларда ўсувчи; $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2{,}0)$, $(0{,}2)$, $(2{,}2\sqrt{3})$ оралиқларда $f'(x)<0$, яъни камаювчи $x_1=-2\sqrt{3}$ нуқтада функция максимумга, $x_5=2\sqrt{3}$ нуқтада минимумга эга бўлади. $x=0$ критик нуқтадан ўтишда $f'(x)$ ишораси ўзгармайди, демак бу нуқтада экстремум йўқ.

$$\max f(x)=f(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3}; \ \min f(x)=f(2\sqrt{3})=3\sqrt{3};$$

7) иккинчи тур критик нуқталарни топамиз:

$$f''(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-x^2(x^2-12)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)-4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(x)=0, \quad 8x(x^2+12)=0, \quad x=0, \quad x=\pm 2$$

нуқталарда иккинчи тартибли ҳосила мавжуд эмас. Демак иккинчи тур критик нуқталар

$x_1=-2;\ \ x_2=0;\ \ x_3=2$

бўлади ;

8) $(-\infty,-2),(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,+\infty)$ оралиқларда $f''(x)$ нинг ишорасини текширамиз: $x=-3$ бўлсин.

$$f''(-3)=\frac{8(-3)\left[(-3)^2+12\right]}{\left[(-3)^2-4\right]}=\frac{-24\cdot 21}{5^3}=-\frac{504}{125}<0,$$

худди шундай

$f''(-1)>0$, $f''(1)<0$, $f''(3)>0$ бўлиб, $(-\infty,-2)$ *ва* $(0,2)$ оралиқларда функция графиги қаварик, $(-2,0)$ *ва* $(2,+\infty)$ оралиқларда функция графиги ботиқ бўлади. Иккинчи тартибли ҳосила ҳар бир иккинчи тур критик нуқтада ишорасини ўзгартиради, лекин $x=\pm 2$ да функция узилишга эга. Шунинг учун фақат $x=0$ нуқтада функция графиги эгилишга эга бўлади $f(0)_{эгл}=0$;

9) функция графигининг асимптоталарини топамиз:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty \quad ва \quad \lim_{x\to -2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty.$$

Демак, $x=-2$, $x=2$ функция графигининг вертикал асимгтоталари бўлади.

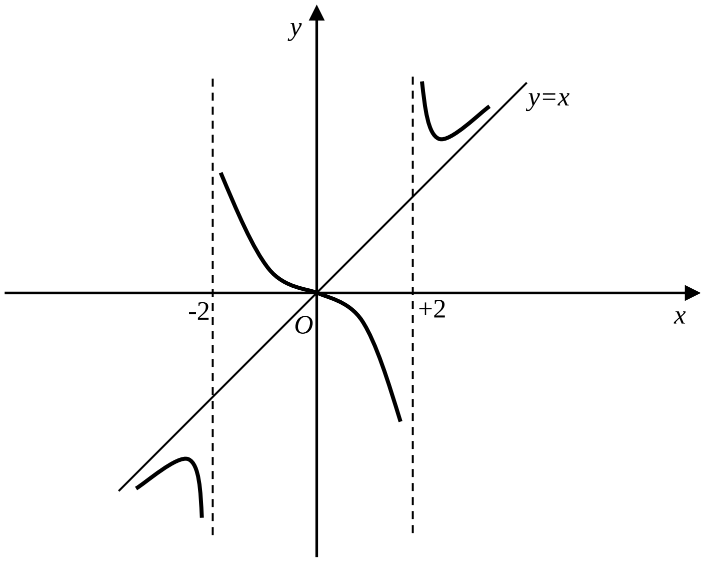
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1, \quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}==\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x}=\frac{0}{1}=0.$$

Шундай қилиб, $y=x$ оғма асимптота бўлади;

10) $x=0$ бўлганда $y=0$ бўлиб, функция графиги координаталар бошидан ўтади;

11) юқоридаги текширишга асосан, функция графигини ясаймиз. (2-чизма)



2-чизма

8-мисол. Маҳсулот ишлаб чиқариш харажати ва маҳсулот ҳажми x орасида

$$y = 100x - \frac{1}{30}x^3$$

боғланиш бўлсин. Ишлаб чиқариш ҳажми, 5 бирлик ва 10 бирлик бўлганда лимитик харажатни топинг.

Ечиш. масала шартига асосан, $x = 5,\ x = 10.$Функционал боғланиш ҳосиласи

$$y' = 100 - \frac{1}{10}x^2$$

бўлиб,

$$f'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97.5, \quad f'(10) = 90$$

бўлади.

Буларнинг иктисодий маъноси, маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми 5 бирлик бўлганда, маҳсулот ишлаб чиқариш харажати келгуси маҳсулотни ишлаб чиқаришга ўтишда 97,5 ни ташкил этади; ишлаб чиқариш ҳажми 10 бирлик бўлганда, эса у 90 ни ташкил этади.

9-мисол. $xy = 8,\ x = 1,\ x = e,\ y = 0$ чизиқлар билан чегараланган юзани ҳисобланг

Ечиш. $y = 8/x$ бўлиб, (3) формулага асосан,

$$S_1=\int ydx=\int\frac{8}{x}dx=8\ln x\Big|=8(\ln e-\ln 1)=8.$$

10-мисол. $y=x^2,\, y^2=x$ чизиқлар билан чегараланган юзани топинг.

Ечиш: $\begin{cases} y=x^2, \\ y^2=x \end{cases}$

тенгламалар системасидан $x^4=x,\, x^4-x=0,\; x_1=0;\, x_2=1$ кесишиш нуқталарининг абсциссалари бўлиб, бу юза

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{x}-x^2\right]dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\left(\frac{2}{3}-0\right)-\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{3}$$

бўлади.

11-мисол. Эллипснинг

$$\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}$$

параметрик тенгламасидан фойдаланиб унинг юзини топинг.

Ечиш. Эллипс координат ўқларига нисбатан симметриклигидан фойдаланиб, ҳамда $x=3\cos t$ тенгламада $x=o, x=3$ бўлганда $t_1=\pi/2$ $,t_2=0$ бўлганлигини ҳисобга олиб,

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}ydx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin t(-3\sin t)dt=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=12t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{12}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}12\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-6(\sin\pi-\sin 0)=6\pi.$$

12-мисол. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ астроида ёйининг узунлигини топинг.

Ечиш: Астроида координат ўқларига нисбатан симметрик бўлганлиги учун 1/4 ёй узунлигини топамиз.

Ошкормас функция ҳосиласига асосан

$\frac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}}+\frac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}}y'=0$ бундан, $y'=-\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$. Ёй узунлиги формуласига асосан,

$$l=4\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\int_0^a\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{y}/\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx=$$

$$=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx=4\int_0^a\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx=4\sqrt[3]{a}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx=4\sqrt[3]{a}\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^a=4\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right)=6a.$$

13-мисол. $y^2=2x$ парабола, $x=3$ тўғри чизиқ ва OX ўқи билан чегараланган фигуранинг OX ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Масала шартига кўра x о дан 3 гача ўзгаради. Демак,

$$V_x=\pi\int_0^3 y^2dx=\pi\int_0^3 2xdx=\pi x^2\Big|_0^3=\pi(3^2-0^2)=9\pi\,.$$

14-мисол. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг OY ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Бундай жисмга айланма эллипсоид дейилади. Эллипс тенгламасидан $x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$ бўлиб, интегралнинг чегаралари $c=-b,\ d=b$ бўлади. (8) формулага асосан,

$$V_y=\pi\int_{-b}^{b}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\pi a^2\int_{-b}^{b}dy-\frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2dy=\pi a^2 y\Big|_{-b}^{b}-\pi\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b}=$$

$$=\pi a^2[b-(-b)]-\pi\frac{a^2}{3b^2}\left[b^3-(-b)^3\right]=2\pi a^2b-\frac{2}{3}\pi a^2b=\frac{4}{3}\pi a^2b.$$

Демак, $V_y=\frac{4}{3}\pi a^2b$

$a=b=R$ бўлса, шар ҳосил бўлиб $V_ш=\frac{4}{3}\pi R^3$ бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Куйидаги функцияларнинг ўсиши ва камайиши оралиқлари текширилсин.

1) $y = x^2$;

2) $y = x^3$;

3) $y = \frac{1}{x}$;

4) $y = \ln x$;

5) $y = tg\,x$;

6) $y = e^x$;

7) $y = 4x - x^2$.

2. Куйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин ва уларнинг графиклари ясалсин.

1) $y = x^2 + 4x + 5$;

2) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$;

3) $y = \frac{x^4}{4} - x^3$;

4) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$;

5) $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$;

6) $y = 4x - \frac{x^3}{3}$;

7) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$;

8) $y = \frac{1}{1 + x^2}$

9) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$;

10) $y = x^2(1 - x)$;

11) $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2}$;

12) $y = 4x - tg\,x$ $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда

13) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$;

14) $y = x \ln x$.

3. Куйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин ва жадваллари тузилсин.

1. $y = 4x - x^2$;

2. $y = x^2 + 2x + 3$;

3. $y = \frac{x^3}{3} + x^2$;

6. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

7. $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$;

8. $y = x - 2\ln x$;

4. $y=\frac{x^2}{x-2}$

5. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$;

9. $y=\sin 2x-x$, $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ оралиқда.

4. Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини топинг.

1) $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha>1$, $x>0$;

2) $f(x)=e^{x}$;

3) $f(x)=\ln x$;

4) $f(x)=x^5-10x^2+3x$;

5) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$;

6) $y=x^5+5x-6$;

7) $y=(x-4)^5+4x+4$;

8) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;

9) $y=2+\frac{12}{x^2-4}$;

5. Қуйидаги функциялар графикларининг эгилиш нуқталарини топинг.

1) $y=x^5+5x-6$

2) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$

3) $y=xe^{1-x}$

4) $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$

5) $y=\cos x$

6) $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$

6. Қуйидаги функцияларнинг асимптоталарини топинг.

1) $y=\frac{x^2+1}{x}$

2) $y=\frac{x^2}{x-2}$

3) $y=x-\ln x$

4) $y=\frac{e^x}{x}$

5) $y=\frac{\ln(x+1)}{x^2}+2x$

7. Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг.

1) $y=3x-x^3$;

2) $y=-x^3+4x-3$;

3) $y=-4x+x^3$;

4) $y=x^5-\frac{5}{3}x^3$;

5) $y=x(x-1)^3$;

8. Қўйидаги чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

1) $y=x^2-6x+8,\quad y=0$; 2) $x=4-y^2,\quad x=0$; 3) $y=\ln x,\quad x=e,\quad y=0$;

4) $y=\frac{x^2}{2}$ парабола, $x=1,\ x=3$ тўғри чизиқлар ва OX ўқи билан чегараланган;

5) $x=2-y^2-y^2,\ x=0$; 6) $y=2-x^2,\ y=x^2$;

7) $y=x^2+4x,\ y=x+4$; 8) $x=3t^2,\quad y=^3 t-t^3$.

9. $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг OX ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

10. 1) $y^2=(x+4)^3$ *va* $x=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг OY ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг OY ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

4–Мавзу: Дифференциал тенгламалар .

Режа:

1. Дифференциал тенгламалар. Ечим, умумий ечим тушунчалари.
2. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли тенгламалар.
3. Коши масаласи. Коши масаласининг ечими ҳакидаги теорема.

Мавзу мақсади: Тинловчиларга дифференциал тенгламалар. Ечим, умумий ечим тушунчалари бўйича тассавур шаклантириш. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли тенгламалар. Коши масаласи. Коши масаласининг ечими ҳакидаги теоремани ўрганиш.

Топшириқни бажариш учун кўрсатма ва тавсиялар:

1-мисол. $y' + xy = x$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама биринчи тартибли чизиқли тенглама бўлиб $p(x) = x, \quad g(x) = x$ лигини ҳисобга олиб (2) формулага асосан,

$$y = e^{-\int xdx}\left[C + \int x \cdot e^{\int xdx} dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}} d(\frac{x^2}{2})\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C).$$

умумий ечим бўлади.

2-мисол. $y' + xy = xy^3$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани y^3 бўлиб,

$$\frac{y'}{y^3}+x\frac{1}{y^2}=x$$

тенгламани ҳосил қиламиз. $\frac{1}{y^2}=z$ алмаштириш олсак $z'=\frac{2y'}{y^3}$ бўлади. Буларни тенгламага қўйиб,

$$\frac{z'}{2}+xz=x, \quad z'-2xz=-2x$$

чизиқли тенгламага келамиз. Бу тенгламанинг умумий ечимини (6) формулага асосан топиш мумкин:

$$z=e^{2\int xdx}\left[C+\int(-2x)e^{-2\int xdx}dx\right]=e^{x^2}\left[C-\int 2xe^{-x^2}dx\right]=$$
$$e^{x^2}\left[C+\int e^{-x^2}d(-x^2)\right]=e^{x^2}\left[C+e^{-x^2}\right]=Ce^{x^2}+1.$$

Шундай қилиб

$$z=C\cdot e^{x^2}+1$$

бўлади, z нинг ўрнига $\frac{1}{y^2}$ ни қўйиб,

$$\frac{1}{y^2}=C\cdot e^{x^2}+1, \quad y^2=\frac{1}{Ce^{x^2}+1},$$

ечимни оламиз. Бу берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечими бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2y}{x^3}dy=0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг тўла дифференциалли бўлиш ёки бўлмаслигини текширамиз: берилган тенгламада

$$M=\frac{x^2-3y^2}{x^4} \quad ,N=\frac{2y}{x^3}$$

бўлганлиги учун

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{-6y}{x^4} \quad ,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-6y}{x^4}$$

бўлиб,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

бўлади, яъни берилган дифференциал тенглама тўла дифференциалли тенгламадир. Демак, берилган тенгламанинг чап томони бирор $u(x,y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлади. Энди $u(x,y)$ функцияни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M=\frac{x^2-3y^2}{x^4}$$

бўлганлиги учун

$$u=\int\frac{x^2-3y^2}{x^4}\,dx+\varphi(y)=\int\left(x^{-2}-3y^2x^{-4}\right)dx+\varphi(y)=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+\varphi(y) \quad (2)$$

бўлиб, бунда $\varphi(y)$ ҳозирча номаълум функциядир. Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаб,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N=\frac{2y}{x^3}$$

эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{2y}{x^3}+\varphi'(y)=\frac{2y}{x^3}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $\varphi'(y)=0$ бўлиб,

$$\varphi(y)=C_1.$$

бўлади. (2) тенгликдан

$$u=-\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+C_1$$

Шундай қилиб, берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$du = d(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1) = 0$$

бўлганлиги учун

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1 = C_2$$

бўлиб, ёки

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$$

бўлади, бунда $C = C_2 - C_1$.

4-мисол.

$$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xydy = 0$$

дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламанинг тўла дифференциалли ёки тўла дифференциалли эмаслигини текширамиз. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ шартни текширайлик:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(x^2 - 3y^2\right)_y' = -6y \quad , \frac{\partial N}{\partial x} = \left(2xy\right)_x' = 2y\,.$$

Демак, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилмайди. (4) нисбатни қараймиз:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$$

бўлиб,

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{4}{x}$$

бўлади. Охирги тенгликни интегралласак,

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{ч} dx} = e^{-4\ln x} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}$$

ҳосил бўлади. Берилган тенгламани $\mu(x)=\dfrac{1}{x^4}$ функцияга кўпайтирсак,

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2xy}{x^4}dy=0$$

бўлиб, кейинги тенглама учун $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ тенглик бажарилади, яъни охирги дифференциал тенглама тўла дифференциалли тенгламадир.

5-мисол. $yy''-2y'^2=0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y'=z(y)$ алмаштириш олиб, $y''=z\dfrac{dz}{dy}$ эканлигини ҳисобга олсак,

$yz\dfrac{dz}{dy}-2z^2=0$ тенглама ҳосил бўлади. Бу биринчи тартибли ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама: $\dfrac{ydz}{dy}=2z \quad yoki \quad \dfrac{dz}{z}=2\dfrac{dy}{y}$,

охирги тенгламани интеграллаб,

$$\ln z=2\ln y+\ln C_1$$

бундан

$$z=C_1y^2$$

бўлади. $z=\dfrac{dy}{dx}$ ни ҳисобга олсак ,

$$\frac{dy}{dx}=C_1y^2 \quad yoki \quad \frac{dy}{y^2}=C_1dx$$

бўлади.Охирги тенгликдан

$$-\frac{1}{y}=C_1x+C_2 \quad yoki \quad y=-\frac{1}{C_1x+C_2}$$

бўлади.Бу берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:

1) $y' - \frac{y}{x} = -1$; 2) $y' + y = e^{-x}$; 3) $x^2 y' - 2xy = 3$; 4) $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2$;

5) $\left(a^2 + x^2\right)y' + xy = 1$; 6) $(2x+1)y' + y = x$; 7) $y' - ytgx = ctgx$;

8) $y' + y\cos x = \sin 2x.$

2. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топинг:

1) $xy' + y = 3,\ \ x = 1\ da\ \ y = 1$; 2) $(1 + x^2)y' - xy = 2x,\ \ x = 0\ \ bo'\lg anda\ \ y = 0$;
3) $xy' + y = x + 1,\ \ x = 2\ \ bo'\lg anda\ \ y = 3.$

3. 1) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ дифференциал тенгламанинг $x = -1$ бўлганда $y = 1$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

2) $y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^3}$ тенглама учун $x = 1$ бўлганда $y = -1$ бошланғич шарт бажариладиган Коши масаласини ечинг.

4. Ушбу тўла дифференциалли тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг:

1) $\left(x^2 + y\right)dx + (x - 2y)\,dy = 0$; 2) $\left(y - 3x^2\right)dx - (4y - x)\,dy = 0$;

3) $2\left(3xy^2 + 2x^2\right)dx + 3\left(2x^2 y + y^2\right)dy = 0$; 4) $\left(3x^2 + 2y\right)dx + (2x - 3)\,dy = 0$;

5) $\left(3x^2 y - 4xy^2\right)dx + \left(x^3 - 4x^2 y + 12y^3\right)dy = 0$; 6) $3x^2 e^y\,dx + \left(x^3 e^y - 1\right)dy = 0$.

5. Қуйидаги дифференциал тенгламалар учун интегралловчи кўпайтувчиларни топинг ва тенгламаларнинг умумий ечимларини аниқланг:

1) $\left(x^2 - y\right)dx + x\,dy = 0$; 2) $\left(y + xy^2\right)dx - x\,dy = 0$;

3) $y^2\,dx + (xy - 1)\,dy = 0$; 4) $\left(\sin x + e^y\right)dx + \cos x\,dy = 0$;

5) $(x\cos y - y\sin y)dx + (x\sin y + y\cos y)dy = 0$; 6) $2xtgx\,dx + \left(x^2 - 2\sin y\right)dy = 0.$

6. $y''' = \frac{6}{x^3}$ тенгламанинг $x = 1$ бўлганда $y = 2,\ \ y' = 1,\ y'' = 1$ бўладиган хусусий ечимини топинг.

7. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1) $x^3y'' + x^2y' = 1;$ 2) $yy'' + y'^2 = 0;$ 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0;$ 4) $y''y^3 = 1;$

5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3;$ 6) $y'' + y'tgx = \sin 2x;$ 7) $y'' + 2y'^2 = 0;$

8) $xy'' - y'tgx = e^x x^2;$ 9) $2yy'' = (y^1)^2;$ 10) $t\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{ds}{dt} + t = 0.$

8. Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0;$ 2) $y'' - 2y' - 5y = 0;$ 3) $y'' - y = 0;$

4) $4y'' - 12y' + 9y = 0;$ 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0;$ 6) $y'' - 2y' + 50y = 0;$

7) $y'' - 4y' + 7y = 0;$ 8) $y'' + 6y' = 0.$

9. $y'' + 10y' + 25y = 0$ тенгламанинг $x = 1$ бўлганда, $y = e^{-5}$, $y' = 3e^{-5}$бўладиган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топинг.

5–Мавзу: Дифференциал тенгламаларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган табиий фанлар масалалари.
2. Математик физика, механика ва астрономия ҳамда иктисодий масалаларни ечишда, биологик жараёнларни тахлил этишда ва бошка кўп соҳалардаги жараёнларнинг математик моделини дифференциал тенгламалар орқали ифодалаш.

Мавзу мақсади: Тинловчиларга математик физика, механика ва астрономия ҳамда иктисодий масалаларни ечишда, биологик жараёнларни тахлил этишда ва бошка кўп соҳалардаги жараёнларнинг математик моделини дифференциал тенгламалар орқали ифодалашни ўргатиш.

Топшириқни бажариш учун кўрсатма ва тавсиялар:

Дифференциал тенгламаларнинг иқтисоддаги татбиқларига бир неча мисоллар келтирамиз.

Ишлаб чиқаришнинг рақобатсиз шароитда (табиий) ўсиш модели. Бирор турдаги маҳсулот ишлаб чиқарилиб у тайин (белгиланган) P нархда сотилаётган бўлсин. $Q(t)$ вақтнинг t онида (моментида) реализация қилинган маҳсулот микдори бўлсин. Бу ҳолда маҳсулотни реализация қилишдан олинган даромад

$$PQ(t)$$

модел билан ифодаланади. Бу даромаднинг бир қисми албатта ишлаб чиқариш $J(t)$ инвестициясига сарфлансин, яъни

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

бўлсин, бунда m инвестиция меъёри бўлиб ўзгармас сон, ҳамда $0 < m < 1$.

Ишлаб чиқарилаётган маҳсулот тўлиқ реализация қилинаётган бўлса, ишлаб чиқаришни кенгайтириш натижасида даромаднинг ўсиши таъминланиб, бу даромаднинг бир қисми яна маҳсулот ишлаб чиқаришни кенгайтиришга сарфланади. Бу ҳол ишлаб чиқариш тезлигининг ўсиши (акселерация)га олиб келади, ҳамда ишлаб чиқариш тезлиги инвестицияга пропорционал бўлади, яъни

$$Q(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

бунда $\frac{1}{e}$ акселерация меъёри. (1) ва (2) тенгликлардан

$$Q(t) = emPQ \quad yoki \quad Q(t) = kQ(t) \qquad (3)$$

келиб чиқади, бунда $k = emP$.

(3) дифференциал тенглама биринчи тартибли, ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлиб, унинг умумий ечими

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln c \quad yoki \quad Q = ce^{kt}$$

бўлади, бунда c ихтиёрий ўзгармас.

Вақтнинг $t = t_0$ моментида ишлаб чиқарилган маҳсулот микдори Q_0 бўлсин.

Бу шартда

$$Q_0 = ce^{kt_0} \quad yoki \quad c = Q_0 e^{-kt_0}$$

бўлади. (3) тенглама учун Коши масаласининг ечими

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

бўлади.

Шундай қилиб, ишлаб чиқаришнинг табиий ўсиши модели экспоненциал бўлар экан (табиий ўсиш деганимизда рақобат йўқлиги тушунилади).

Математик моделлар **умумийлик хоссасига эга.** Бунинг мисоли сифатида қуйидаги ҳолни келтириш мумкин. Биологик кузатишлардан маълумки бактерияларнинг кўпайиш жараёни ҳам (3) дифференциал тенглама билан ифодаланади. Бундан ташқари радиоактив парчаланиш: радиоактив модда массасининг камайиши жараёни қонуни ҳам (4) формулага мос келади.

Ишлаб чиқаришнинг рақобатли шароитда ўсиши модели Олдинги мисолда ишлаб чиқарилаётган маҳсулот тўлиқ реализация бўладиган шароитни қарадик. Энди рақобатли, яъни бозорга бу маҳсулотни бошқалар ҳам реализация қиладиган шароитни қараймиз. Бундай шароитда маҳсулот ишлаб чиқариш миқдорини кўпайтириш билан бозорда унинг нархи камаяди. $P = P(Q)$ функция (P маҳсулот нархи, Q маҳсулот миқдори) камаювчи бўлиб

$\dfrac{dP}{dQ} < 0$ бўлади. Энди (1)-(3) формулалардагидек

$$Q = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бунда $\alpha = em$. (5) тенгламанинг ўнг томонидаги кўпайтувчилар ҳаммаси мусбат ишорали, демак $Q' > 0$ бўлади, яъни $Q(t)$ ўсувчи функция эканлиги келиб чиқади.

Оддийлик учун $P(Q)$ функционал боғланиш чизиқли, яъни

$$P(Q) = a - bQ, \;\; a >, \;\; b > 0$$

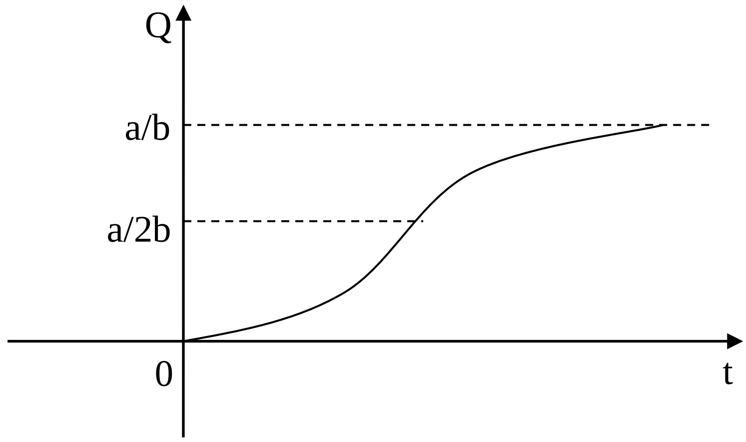
бўлган ҳолни қараймиз. Бу ҳолда (5) тенглама

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

кўринишда бўлади. (6) тенгликни дифференциалласак

$$Q'' = (\alpha aQ - \alpha bQ^2)' = \alpha aQ' - 2\alpha bQQ' \;\; yoki \;\; Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \qquad (7)$$

тенглама ҳосил бўлади. (6)-(7) тенгламалардан $Q=0\ va\ Q=\dfrac{a}{b}$ бўлганда, $Q'=0,\ Q<\dfrac{a}{2b}$ бўлганда, $Q''>0$ ҳамда $Q>\dfrac{a}{2b}$ бўлса $Q''<0$ келиб чиқади. Булардан $\dfrac{a}{2b}$ нуқтадан ўтишда Q ишорасини ўзгартирганлиги учун, бу нуқта $Q=Q(t)$ функция графигининг эгилиш нуқтаси бўлади. Бу функция графиги, яъни (6) дифференциал тенглама интеграл чизиқларидан бири, 1-чизмада тасвирланган бўлиб, бу эгри чизиққа иқтисодда ***логистик чизиқ*** деб аталади.



. 1-чизма.

Талаб ва таклифни таҳлил қилиш. Маълумки, бозор моделида маҳсулотга талаб ва таклиф мавжуд ҳолатларда нархнинг ўзгариш суръати билан боғлиқ бўлади. Бундай суръат t вақтнинг $P(t)$ нарх функцияси биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласи билан характерланади.

Қуйидаги мисолни қараймиз. Талаб D ва таклиф S P нархнинг функцияси бўлиб ушбу билан ифодалансин:

$$D(t)=p''-2p'-6p+36,\quad S(t)=2p''+4p'+4p+6 \qquad (1)$$

Бундай боғлиқлик ҳақиқатда мавжуд ҳолатларга мос келади. Ҳақиқатан ҳам, нарх суръати ошса бозорнинг маҳсулотга қизиқиши ортади, яъни $p''>0$ бўлади. Нархнинг тез ўсиши харидорни чўчитиб талабнинг пасайишига олиб келади. Шунинг учун, p' биринчи тенгликда манфий ишора билан ифодаланади. Иккинчидан, нарх суръатининг ортиши билан таклиф яна кучаяди, шунинг учун p'' нинг коэффициенти талаб функциясидагига нисбатан катта, нархнинг ўсиши тезлиги таклифнинг ҳам ўсишига олиб келади, яъни p' таклиф функциясида мусбат ишорали бўлади.

Нарх функцияси ва вақт ўзгариши орасидаги боғланишни таҳлил қилайлик. Маълумки, бозор ҳолати $D = S$ мувозанат билан ифодаланади. Бу ҳолда (1) тенгликдан

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

иккинчи тартибли, ўзгармас коэффициентли, чизиқли, бир жинсли бўлмаган дифференциал тенглама келиб чиқади.

Бизга маълумки бундай тенгламанинг умумий ечими бу тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва (2) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечими йиғиндисидан иборат. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$\overline{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

бўлади, бунда C_1 ва C_2 лар ихтиёрий ўзгармаслар.

Бир жинсли бўлмаган (2) тенглама хусусий ечими $p_1(t) = A$ ўзгармас, яъни қарор топган нархни оламиз, ҳамда буни (3) тенгламага қўйиб $A = 3$ эканлигини аниқлаш мумкин. Демак, $p_1(t) = 3$ бўлади.

Шундай қилиб (9) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими

$$p(t) = p(t) + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

бўлади.

Бу ечимдан $t \to \infty$ da $p(t) \to 3$ бўлади, яъни ҳамма нархлар қарор топган нархга яқинлашади.

Ушбу Коши масаласини қараймиз: $t = 0$ бўлганда, нарх $p(0) = 4$ ва ўсиш майли (тенденцияси) $p'(0) = 1$ бўлсин. $t = 0$ бўлганда $p(0) = 4$ бўлганлиги учун (10) дан $C_1 = 1$ келиб чиқади. (3) тенгликдан ҳосила олиб ва t=0 бўлганда $p(0) = 1$ шартдан фойдалансак C_2=4 келиб чиқади, демак Коши масаласининг ечими

$$p(t)=3+e^{-3t}(\cos t+4\sin t)$$

бўлади.

Мустақил бажариш учун топшириқлар

1.Қуйидаги дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

1) $y''+6y'+5y=e^{2x}$; 2) $y''+y'+7y=8\sin 2x$; 3) $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$;
4) $y''-5y'+6y=3e^{2x}$; 5) $y''+9y=(43+10x-26x^2)e^{2x}$;
6) $y''+6y'+10y=9\cos x+27\sin x$; 7) $y''-6y'+9y=2\sin 2x$

2. $y''+16y=\sin 4x$ тенглама учун $x=0$ бўлганда $y=1,\ y'=\frac{7}{8}$ бўладиган бошланғич шартларда, Коши масаласини ечинг.

3. Аниқмас коэффициентлар усули нимадан иборат?

4. Ишлаб чиқаришнинг рақобатсиз шароитда ўсиш модели қандай бўлади?

5. Ишлаб чиқаришнинг рақобатли шароитда ўсиши модели нима?

6. Логистик чизиқ деб нимага айтилади?

7. Талаб ва таклифни дифференциал тенглама ёрдамида қандай таҳлил қилинади?

6–Мавзу: Математика ва саънат.

Режа:

1. Илм-фан, таълим, рақамли иктисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни.
2. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги.
3. Математика соҳасидаги илғор мамлакатларида олиб борилаётган ишлар билан бир қаторда мавжуд муаммолар, математикани ўрганиш ва ёшларни математика илмига қизиқтириш, математика орқали аниқ ва соҳага боғлиқ бошқа фанларни ривожланишига кўмаклашишнинг ахамияти.

Мавзу мақсади: Тинловчиларга Илм-фан, таълим, рақамли иқтисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги. Математика соҳасидаги илғор мамлакатларида олиб борилаётган ишлар билан бир қаторда мавжуд муаммолар, математикани ўрганиш ва ёшларни математика илмига қизиқтириш, математика орқали аниқ ва соҳага боғлиқ бошқа фанларни ривожланишига кўмаклашишнинг ахамиятини ўргатиш.

Топшириқни бажариш учун кўрсатма ва тавсиялар:

АМАЛИЙ ВАЗИЯТНИ БОСҚИЧМА – БОСҚИЧ ТАҲЛИЛ ҚИЛИШ ВА ҲАЛ ЭТИШ БЎЙИЧА ТАЛАБАЛАРГА УСЛУБИЙ КЎРСАТМАЛАР

Тингловчиларга йўриқнома

Математика ва саънат. Математка ва муҳандислик.

Иш босқичлари	Маслаҳатлар ва тавсияномалар.
1. Кейс ва унинг ахборот таъминоти билан танишиш	Аввало кейс билан танишинг. Илм-фан, таълим, рақамли иқтисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги. Математика соҳасидаги илғор мамлакатларида олиб борилаётган ишлар билан бир қаторда мавжуд муаммолар, математикани ўрганиш ва ёшларни математика илмига қизиқтириш, математика орқали аниқ ва соҳага боғлиқ бошқа фанларни ривожланишига кўмаклашишнинг ахамияти ҳақида

	тушунча ҳосил қилиш учун бор бўлган бутун ахборотни диққат билан ўқиб чиқиш лозим. Ўқиш пайтида вазиятни таҳлил қилишга шошилманг
2. Берилган вазият билан танишиш	Маълумотларни яна бир маротаба диққат билан ўқиб чиқинг. Сиз учун муҳим бўлган сатрларни белгиланг. Бир абзацдан иккинчи абзацга ўтишдан олдин, уни икки уч маротаба ўқиб мазмунига кириб борамиз. Кейсдаги муҳим фикрларни қалам ёрдамида остини чизиб қўйинг. Вазият тавсифида берилган асосий тушунча ва ибораларга диққатингизни жалб қилинг. Мулоҳаза тушунчаси ва улар устида бажариладиган амаллар тавсифида берилган далилларни санаб ўтинг ва қайсиниси аниқлаштирилиши лозимлигини аниқланг
3. Муаммоли вазиятни таҳлил қилиш	Асосий муаммо ва кичик муаммоларга диққатингизни жалб қилинг. ***Асосий муаммо:*** Қуйидаги саволларга жавоб беришга ҳаракат қилинг. 1. Илм-фан, таълим, рақамли иқтисодиёт, юқори технологиялар ва бошқа соҳалар ривожланишининг негизида математиканинг ўрни. 2. Муҳандислик, банк-молия, хавфсизлик, пул-кредит соҳаларидаги мавжуд муаммоларни ечиш бўйича математик олимлар томонидан тадқиқотлар ўтказилиши, мутахассис кадрлар тайёрлаш ва қайта тайёрлашнинг зарурлиги. 3. Математика соҳасидаги илғор мамлакатларида олиб борилаётган ишлар билан бир қаторда мавжуд муаммолар, математикани ўрганиш ва ёшларни математика илмига қизиқтириш, математика орқали аниқ ва соҳага боғлиқ бошқа фанларни ривожланишига кўмаклашишнинг ахамияти. Асосий муаммо нимага қаратилганини аниқланг.

	Муаммонинг асосий мазмунини ажратиб олинг. Муаммоли вазиятни таҳлил қилиш – объектнинг ҳолатини аниқланг, асосий қирраларига эътибор қаратинг, муаммоли вазиятнинг ҳамма томонларини таҳлил қилинг. вектор тушунчасини яхши ўзлаштириб келгусида улар амалларини бажаришни ўрганиб олинг.
4. Муаммоли вазиятни ечиш усул ва воситаларини танлаш ҳамда асослаш	Ушбу вазиятдан чиқиб кетиш ҳаракатларни излаб топиш мақсадида қуйида тақдим этилган “Муаммоли вазият” жадвалини тўлдиришга киришинг. Муаммони ечиш учун барча вазиятларни кўриб чиқинг, муқобил вазиятни яратинг. Муаммонинг ечимини аниқ вариантлардан танлаб олинг, муаммонинг аниқ ечимини топинг. Жадвални тўлдиринг. Кейс билан ишлаш натижаларини ёзма шаклда илова этинг

“Муаммоли вазият” жадвалини тўлдиринг

Вазиятдаги муаммолар Тури	Муаммоли вазиятнинг келиб чиқиш сабаблари

V. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
Ассесмент	англ. assessment «баҳолаш», билимни, кўникма ва малакаларни бир неча хил ёндашувлар орқали баҳолаш, таҳлил қилиш, синаб кўришдан педагогик технологияси.	the technology of teaching.by documenting of knowledge, skills, attitudes, with using of different ways of assesment, analysis and testing.
Гуруҳли таълим Group traning	бир ўқитувчи бир неча ўқитувчини ўқитадиган таълим шакли. Гуруҳлар ўқувчилар сонига қараб: кичик (3-6 ўқувчи), ўрта (7-15 ўқувчи), катта (15 дан ортиқ ўқувчи, гуруҳлар) га ажратилади. Шунингдек, ҳар бир гуруҳдаги таълим олувчиларнинг ёшига, таълим йўналишига ва шу кабиларга қараб ҳам гуруҳларга ажратилади. Бу шаклни қўллаш жараёнида якка таълим шакллари ҳам амалга оширилади. Биологиядан дарс ўтишда энг самарали гурухлар 3-5 киши	A form of teaching in which a person teaches a few students. Depending on the number of students the groups can be small (3-6 students), medium (7-15 students) and large (more than 15 students, groups). In addition the each group can be devided by age, training, direction, and etc. In this form of traning the individual education is also used/ For teaching biology the groups from 3-5 students is the most effective
Вектор	(лот. вестор — элтувчи) — бу сон қиймати ва йўналиши билан аниқланадиган катталикдир, яни вектор деб йўналишга эга бўлган кесмага айтилади.	(Lat. vector - carrier) - is a quantity determined by the value and direction of the number, that is, a vector is said to be an intersection with a direction.
Функция	математиканинг энг муҳим ва умумий тушунчаларидан бири. Функциянинг турлари кўп бўлиб, энг ко'п	one of the most important and general concepts of mathematics. There are many types of functions, the most commonly

	қўлланиладигани бу чизиқли Функциядир яъни й=кх+б. Ўзгарувчи микдорлар орасидаги боғланишни ифодалайди ва муҳим.	used is the linear function, ie y = kx + b. Represents the relationship between variables and is important.
Матрица	ихтиёрий элементлардан тузилган тўғри бурчакли жадвал. М. элементлари йўл (сатр)лар ва устунлар бўйлаб жойлашади. Сатр ва устунлар, кўпинча, умумий атама билан "М.нинг қаторлари" дейилади. М. элементлари, одатда, ац жуфт индекслар билан белгиланади. Биринчи /' индекс М.нинг а;ж элемент турган сатри рақамини, иккинчи у индекс эса М.нинг а.тж элемент турган устуни рақамини билдиради.	a right-angled table composed of arbitrary elements. M. elements are placed along rows (rows) and columns. Rows and columns are often referred to by the general term "rows of M." M. The elements are usually defined by ats double indices. The first / 'index represents the row number of M. where the element a; j is located, and the second index indicates the number of the column where M. has the element a.tj.
Ҳосила	дифференсиал ҳисобнинг асосий тушунчаси. У Функция ўзгариши тезлигини ифодалайди. х0 нуқтанинг атрофида берилган ф(х) нуқта учун мавжуд бўлса, у Функциянинг х0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади	the basic concept of differential calculus. It represents the rate of change of a function. If x0 exists for a given point f (x) around the point, it is called the product of the function at point x0
Интеграл	(лот. интегер — бутун) — математик анализ (таҳлил)нинг асосий тушунчаларидан бири (каранг Интеграл ҳисоб)	lot. integer - whole) - one of the basic concepts of mathematical analysis (see Integral calculus)

Гиперматн	ассоциатив боғланган блоклар кўринишида тақдим этилган (бошқаматнли ҳужжатларга йўл кўрсатувчи) матн.	**Hypertext** is text displayed on a computer display or other electronic devices with references (hyperlinks) to other text which the reader can immediately access, or where text can be revealed progressively at multiple levels of detail
Гиперма-тинли тизим	электрон ҳужжатлар кутубхонасини яратишни таъминлайдиган восита.	a database management system tha t allows strings of text (`objects') t o be processed as acomplex netwo rk of nodes that are linked together in an arbitrary way
Гиперме-диа	матндан ташқари мультимедиа имкониятларини ҳам ўзида мужассамлаштирган маълумотларга йўл	**Hypermedia**, an extension of the term hypertext, is a nonlinear medium of information which includes graphics, audio, video, plain text and hyperlinks.

VI. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б.

2. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-жилд. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 592 б.

3. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-жилд. Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 507 б.

4. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.

5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тикланишдан – миллий юксалиш сари. 4-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2020. – 400 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.

7. Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда қабул қилинган “Таълим тўғрисида”ги ЎРҚ-637-сонли Қонуни.

8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 10 декабрдаги “Чет тилларни ўрганиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1875-сонли қарори.

9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.

10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли қарори.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-

2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.

17. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрь “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли қарори.

Ш. Махсус адабиётлар

18. Математик моделлаштириш. / Камилов М.М. Эргашев А.К., ТАТУ, Тошкент 2007-176 б.

19. Ҳисоблаш усуллари. / Г.П. Исматуллаев., Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги. — Т.: «Тафаккур Бўстони», 2014. —240 б.

20. Прикладная математика, Задачи, Типовые расчеты и приложения, ,— М.: Наука. Уварова Л.А., 2004.

21. Самарский А.А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб, пособие для вузов,— М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с.— ISBN 5-02-013996-3.

22. Natalie Denmeade. Gamification with Moodle. Packt Publishing - ebooks Accoun 2015. - 134 pp.

23. Paul Kim. Massive Open Online Courses: The MOOC Revolution. Routledge; 1 edition 2014. - 176 pp.

24. English for academics. Cambridge University Press and British Council Russia, 2014. Book 1,2.

IV. Интернет сайтлар

25. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

26. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси

27. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази

28. www.ams.mathscinet.org

29. www.ziyonet.uz – Таълим портали

30. http://www.princeton.edu/main/

31. https://www.stanford.edu