БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

ЎЛЧОВ НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ҚЎЛЛАНИШИ

2021

Расулов Т.Ҳ. **физика-математика фанлари номзоди, доцент**

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

БУХОРО ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

“ЎЛЧОВ НАЗАРИЯСИ ВА УНИНГ ҚЎЛЛАНИШИ”

МОДУЛИ БЎЙИЧА

ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА

Математика

Бухоро-2021

Модулнинг ўқув-услубий мажмуаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 7 декабрдаги 648-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув дастури ва ўқув режасига мувофиқ ишлаб чиқилган.

Тузувчи: Расулов Т.Ҳ. физика-математика фанлари номзоди, доцент.

Тақризчи: Ҳ.Р.Расулов физика-математика фанлари номзоди, доцент.

Ўқув -услубий мажмуа Бухоро давлат университети Илмий Кенгашининг қарори билан нашрга тавсия қилинган
(2020 йил “30” декбардаги 9-сонли баённома)

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

“Ўлчов назарияси ва унинг қўлланиши” модули ҳозирги кунда ўлчовлар назариясидан математика, физика ва биология масалаларида кенг фойдаланиш, ўлчовлар назарияси ва унинг татбиқини турли фазоларда қўллай олиш, интеграл ва ўлчов тушунчаларини амалиётга кенг қўллаш бўйича, ҳамда уларнинг келажакдаги ўрни масалаларини қамрайди.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

«Ўлчов назарияси ва унинг қўлланиши» модулининг мақсади: педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курс тингловчиларининг бу борада мамлакатимизда ва хорижий давлатларда тўпланган замонавий усулларини ўрганиш, амалда қўллаш, кўникма ва малакаларини шакллантириш.

«Ўлчов назарияси ва унинг қўлланиши» модулнинг вазифалари:

- замонавий талабларга мос ҳолда олий таълимнинг сифатини таъминлаш учун зарур бўлган педагогларнинг касбий компетентлик даражасини ошириш;
- ўлчов назарияси фанини ўқитиш жараёнига замонавий ахборот-коммуникация технологиялари ва хорижий тилларни самарали тадбиқ этилишини таъминлаш;
- математика соҳасидаги ўқитишнинг инновацион технологиялар ва ўқитишнинг энг сўнгги замонавий усулларидан фойдаланишни ўргатиш;
- тингловчиларга «Математика» масалалари бўйича концептуал асослар, мазмуни, таркиби ва асосий муаммолари бўйича маълумотлар бериш ҳамда уларни мазкур йўналишда малакасини оширишга кўмаклашиш;

Модуль бўйича тингловчиларнинг билими, кўникма, малака ва компетентлигига қўйиладиган талаблар

«Ўлчов назарияси ва унинг қўлланиши» ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида:

Тингловчи:

- ўлчов тушунчаси ва хоссаларини;
- эҳтимоллик ўлчовлар ва уларнинг қўлланиши;
- биологик динамик ситемаларни ўрганишда ўлчовлар ва уларнинг татбиқларини **билиши** керак.

Тингловчи:

- ўлчовлар назариясидан математика, физика ва биология масалаларида кенг фойдаланиш;
- математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, иқтисодий соҳалар ва бошқа соҳаларда кенг қўллай олиш **кўникмаларига эга бўлиши** лозим.

Тингловчи:

- ўлчовлар назарияси ва унинг татбиқини турли фазоларда қўллай олиш **малакаларига эга бўлиши** лозим.

Тингловчи:

- математиканинг хориж ва республика миқёсидаги долзарб муаммолари, ечимлари, тенденциялари асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;
- математикани турли соҳаларга татбиқ этиш;
- олий таълим тизимида математик фанлар мазмунининг узвийлиги ва узлуксизлигини таҳлил қила олиш **компетенцияларига эга бўлиши** лозим.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

«**Ўлчов назарияси ва унинг қўлланиши**» модули ўқув режадаги бошқа модуллар ва мутахассислик фанларининг барча соҳалари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг бу соҳа бўйича касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар математика фанларини ўқитишда замонавий усуллар ёрдамида таълим жараёнини ташкил этишда педагогик ёндашув асослари ва бу борадаги илғор тажрибаларни ўрганадилар, уларни таҳлил этиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий лаёқатга эга бўлиш, илмий-тадқиқотда инновацион фаолият ва ишлаб чиқариш фаолияти олиб бориш каби касбий компетентликка эга бўладилар.

Модуль бўйича соатлар тақсимоти

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат			
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси		
			Жами	жумладан	
				Назарий машғулот	Амалий машғулот
1.	Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.	4	4	2	2
2	Ўлчовсиз тўпламлар.	4	4	2	2
3	Эҳтимоллик ўлчовлар ва уларнинг қўлланиши.	2	2		2
4	Инвариант ўлчовлар.	4	4	2	2
5	Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.	4	4	2	2
6	Ноархимед фазоларда ўлчовлар ва уларнинг татбиқлари.	2	2		2
	Жами	**20**	**20**	**8**	**12**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1 – мавзу. Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.

Режа:

1. Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.
2. σ – аддитивлик.
3. Лебег ўлчовлари.
4. Лебег маъносида ўлчовли тўпламлар синфи.

2-мавзу. Ўлчовсиз тўпламлар.

Режа:

1. Ўлчовсиз тўпламлар.
2. Ўлчовли функциялар.
3. Турли фазолар ва улар устидаги ўлчовларга мисоллар.
4. Интеграллар.
5. Эҳтимоллик ўлчовлар ва уларнинг қўлланиши.

3 – мавзу. Инвариант ўлчовлар.

Режа:

1. Инвариант ўлчовлар.
2. Эргодик теоремалар.
3. Гиббс ўлчовлари (физикада қўлланиши).

4 – мавзу. Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.

Режа:

1. Биологик динамик ситемаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.
2. Биологик динамик ситемалар устидаги ўлчовларга мисоллар.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1–Мавзу: Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.

Режа:

1. Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.
2. σ – аддитивлик. Лебег ўлчовлари.
3. Лебег маъносида ўлчовли тўпламлар синфи.

2–Мавзу: Ўлчовсиз тўпламлар.

Режа:

1. Ўлчовсиз тўпламлар.

2. Ўлчовли функциялар.
3. Турли фазолар ва улар устидаги ўлчовларга мисоллар.

3–Мавзу: Эҳтимоллик ўлчовлар ва уларнинг қўлланиши.

Режа:

1. Эҳтимоллик ўлчовлари ва уларнинг қўлланиши.
2. Эҳтимоллик ўлчовларининг қўлланиши.
3. Интеграллар.

4–Мавзу: Инвариант ўлчовлар.

Режа:

1. Инвариант ўлчовлар.
2. Эргодик теоремалар.
3. Гиббс ўлчовлари ва уларнинг физикада қўлланиши.

5–Мавзу: Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.

Режа:

1. Биологик динамик ситемаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.
2. Биологик динамик ситемалар устидаги ўлчовларга мисоллар.

6–Мавзу: Ноархимед фазоларда ўлчовлар ва уларнинг татбиқлари.

Режа:

1. Ноархимед фазоларда ўлчовлар.
2. Ноархимед фазоларда ўлчовларнинг татбиқлари.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ.

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади: маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);

баҳс ва мунозаралар (лойиҳалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ.

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни:

Тингловчи мустақил ишни муайян модулнинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- амалий машғулотларда берилган топшириқларни бажариш.

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

«ФСМУ» методи

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизнинг баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

“Брифинг” методи

“Брифинг”- (инг. briefing-қисқа) бирор-бир масала ёки саволнинг муҳокамасига бағишланган қисқа пресс-конференция.

Ўтказиш босқичлари:

1. Тақдимот қисми.
2. Муҳокама жараёни (савол-жавоблар асосида).

Брифинглардан тренинг якунларини таҳлил қилишда фойдаланиш мумкин. Шунингдек, амалий ўйинларнинг бир шакли сифатида қатнашчилар билан бирга долзарб мавзу ёки муаммо муҳокамасига бағишланган брифинглар ташкил этиш мумкин бўлади. Талабалар ёки тингловчилар томонидан яратилган мобил иловаларнинг тақдимотини ўтказишда ҳам фойдаланиш мумкин.

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР

1-мавзу: Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.

Режа:

1. Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.
2. σ – аддитивлик.
3. Лебег ўлчовлари.
4. Лебег маъносида ўлчовли тўпламлар синфи.

Таянч иборалар: Ўлчов, ҳалқа, ярим ҳалқа, минимал ҳалқа, очиқ шар, ёпиқ шар, аддитивлик, ярим аддитивлик.

1 Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.

Фараз қилайлик, $a,b,c,d \in R$ лар ихтиёрий сонлар бўлсин. Текисликда

$$a \le x \le b, a \le x < b, a < x \le b, a < x < b,$$

$$c \le y \le d, c \le y < d, c < y \le d, c < y < d$$

тенгсизликларнинг исталган бир жуфти билан аниқланган тўпламлар системаси берилган бўлсин. Бу тўпламларни тўғри тўртбурчаклар деб атаймиз.

Бизга $a \le x \le b, c \le y \le d$ тенгсизликлари билан аниқланган тўғри тўртбурчак берилган бўлсин. Агар $a < b$, $c < d$ бўлса, у чегараси ўзига қарашли бўлган тўғри тўртбурчакни, агар $a = b$ ва $c > d$ ёки $a < b$ ва $c = d$ бўлса кесмани, агар $a = b$, $c = d$ бўлса нуқтани, агар $a > b$ ёки $c > d$ бўлса, бўш тўпламни аниқлайди.

σ орқали текисликдаги барча тўғри тўртбурчаклар системасини белгилаймиз.

1-лемма. Текисликдаги барча тўғри тўртбурчаклар системаси ярим ҳалқани ташкил қилади.

Исбот. a,b,c ва d сонлари билан аниқланувчи очиқ тўғри тўртбурчак $a = b$ бўлганда бўш тўплам бўлади, демак $\varnothing \in \sigma$. Иккита тўғри тўртбурчакнинг кесишмаси яна тўғри тўртбурчакдир, яъни $P_1, P_2 \in \sigma \Rightarrow P_1 \cap P_2 \in \sigma$.

Фараз қилайлик $P = P_{abcd}$ тўғри тўртбурчак $P_1 = P_{a_1b_1c_1d_1}$ тўғри тўртбурчакни ўзида сақласин. У ҳолда

$a \le a_1 \le b_1 \le b, \quad c \le c_1 \le d_1 \le d$

муносабатлар ўринли. $P \setminus P_1$ ни қуйидагича тасвирлаш мумкин :

$P \setminus P_1 = P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5,$

бу ерда

$$P_2 = P_{aa_1cd}, \; P_3 = P_{a_1bd_1d}, \; P_4 = P_{b_1bcd_1}, \; P_5 = P_{a_1b_1cc_1}.$$

Демак G – ярим ҳалқа бўлар экан.

1-таъриф. G ярим ҳалқадан олинган ва a,b,c,d сонлари билан аниқланган (ёпиқ, очиқ ёки ярим очиқ) $P = P_{abcd}$ тўғри тўртбурчак учун $m(P) = (b-a)(d-c)$ сонни мос қўямиз. Агар $P = \varnothing$ бўлса, у ҳолда $m(P) = 0$ деймиз ва $m: G \to R$ тўплам функциясини ўлчов деб атаймиз.

Шундай қилиб, G даги ҳар бир P тўғри тўртбурчакка унинг ўлчови $m(P) = (b-a)(d-c)$ сон мос қўйилади. Бу мослик қуйидаги шартларни қаноатлантиради :

1) $m(P) \ge 0;$

2) $m: G \to R$ ўлчов аддитив, яъни агар

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} P_k, P_i \cap P_k = \varnothing, \; i \ne k$$

бўлса, у ҳолда $m(p) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$ тенглик ўринлидир.

1) ва 2) хоссаларни сақлаган ҳолда m ўлчовни барча тўғри тўртбурчаклар системаси σ дан кенгроқ синфга давом эттириш мақсадида σ ярим ҳалқа устида қурилган $m(\sigma)$ минимал ҳалқани қараймиз.

2-таъриф. $M(\sigma)$ ҳалқа элементлари элементар тўпламлар дейилади. Ихтиёрий $A \in m(\sigma)$ тўплам чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган тўғри тўртбурчаклар бирлашмаси шаклида ифодаланади ва аксинча.

2-лемма. Иккита элементар тўпламнинг бирлашмаси, кесишмаси, айирмаси ва симметрик айирмаси яна элементар тўплам бўлади.

1.2 σ аддитивлик хоссаси

3-таъриф. Ҳар бир $A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k \in m(\sigma)$ элементар тўпламга

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

сонни мос қўювчи $m' : M(\sigma) \to R$ мосликни аниқлаймиз. $m'(A)$ миқдорга A тўпламнинг ўлчови дейилади.

m' функциянинг қиймати A элементар тўпламни чекли сондаги тўғри тўртбурчаклар йиғиндисига ёйиш усулидан боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\{P_k, k = 1, \ldots, m\}$ ва $\{Q_j, j = 1, \ldots, n\}$ ларнинг ҳар бири ўзаро кесишмайдиган тўғри тўртбурчаклар системаси бўлиб,

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$$

тенглик ўринли бўлсин. У ҳолда

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (P_k \cap Q_j)$$

тенглик ўринлидир. Шу сабабли

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{m} m(P_k) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m(P_k \cap Q_j);$$

$$m'(A) = \sum_{j=1}^{n} m(Q_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m(P_k \cap Q_j).$$

Демак, элементар тўплам ўлчови m' нинг аниқланиши коррект экан.

1) Агар $A \in M(\sigma)$ тўплам тўғри тўртбурчак бўлса, у ҳолда $m'(A) = m(A)$ бўлади.

2) Агар $A \in M(\sigma)$ тўплам чекли сондаги ўзаро кесишмайдиган $A_1, \ldots, A_n$ элементар тўпламларнинг йиғиндиси шаклида тасвирланса, яъни $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ бўлса, у ҳолда

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m'(A_k).$$

1-теорема. Агар $A \in M(\sigma)$ ва $\{A_n\}$- элементар тўпламларнинг чекли ёки саноқли системаси бўлиб, $A \subset \bigcup_n A_n$ бўлса, у ҳолда

$$m'(A) \le \sum_n m'(A_n) \qquad (1.1)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(1.1) тенгсизликга m' ўлчовнинг ярим аддитивлик хоссаси дейилади.

2-теорема. A элементар тўплам саноқли сондаги ўзаро кесишмайдиган $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ элементар тўпламларнинг йиғиндисидан иборат, яъни $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ бўлса, у ҳолда

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m'(A_k) \qquad (1.2)$$

тенглик ўринли.

Исбот. m' ўлчовнинг чекли аддитивлик хоссасига кўра ихтиёрий $N \in N$ учун

$$m'(A) \ge m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} m'(A_n)$$

тенгсизлик ўринли. Агар $N \to \infty$ да лимитга ўтсак,

$$m'(A) \ge \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

бўлади. 1.1-теоремага кўра

$$m'(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n)$$

Охирги икки муносабатдан (1.2) тенглик келиб чиқади. (1.2) га m' нинг σ аддитивлик хоссаси дейилади.

3 Текисликдаги тўпламларнинг Лебег ўлчови

Бизга

$$E=\{(x,y):0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}$$

бирлик квадрат берилган бўлсин.

4-таъриф. Ихтиёрий $A\subset E$ тўплам учун

$$\mu^*(A)=\inf_{A\subset\bigcup_k P_k}\sum_k m(P_k) \qquad (1)$$

сон A тўпламнинг ташқи ўлчови дейилади. Бу ерда аниқ қуйи чегара A тўпламни қопловчи тўғри тўртбурчакларнинг барча чекли ёки саноқли системалари бўйича олинади.

Агар A-элементар тўплам бўлса, у ҳолда $\mu^*(A)=m'(A)$. Ҳақиқатан ҳам, A-элементар тўплам $P_1,P_2,\dots,P_n$ тўғри тўртбурчакларнинг бирлашмаси кўринишида тасвирлансин, у ҳолда

$$\mu^*(A)\le\sum_{k=1}^{n}m(P_k)=m'(A)$$

$\{P_k\}$ тўғри тўртбурчаклар системаси A тўпламни тўлиқ қоплайди, шунинг учун (1) тенглик ўринли.

Иккинчи томондан, $\{Q_j\}$ система A тўпламни қопловчи чекли ёки саноқли сондаги ихтиёрий тўғри тўртбурчаклар системаси бўлса, 1.1-теоремага кўра $m'(A)\le\sum_j m(Q_j)$ келиб чиқади. Шунинг учун

$$m'(A)\le\inf\sum_j m(Q_j)=\mu^*(A) \qquad (2)$$

Демак, (1) ва (2)лардан $m'(A)=\mu^*(A)$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, $M(G)$ га m' ва μ^* ўлчовлар устма-уст тушар экан.

3-теорема. Агар чекли ёки саноқли сондаги $\{A_n\}$ тўпламлар системаси учун $A\subset\bigcup_n A_n$ бўлса, у ҳолда

$$\mu^*(A)\le\sum_n\mu^*(A_n)$$

тенгсизлик ўринли. Хусусий ҳолда, агар $A \subset B$ бўлса, $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$ бўлади.

Исбот. Итиёрий $\varepsilon > 0$ ва ҳар бир A_n учун ташқи ўлчов таърифига кўра тўғри тўртбурчакларнинг шундай чекли ёки саноқли P_{nk} системаси мавжудки,

$$A_n \subset \bigcup_k P_{nk} \text{ ва } \sum_k m(P_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

бўлади. У ҳолда

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk} \text{ ва } \mu^*(A) \le \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли. $\varepsilon > 0$ соннинг ихтиёрийлигидан теореманинг исботи келиб чиқади.

5-таъриф. Бизга $A \subset E$ тўплам берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сони учун шундай $B \subset E$ элементар тўплам мавжуд бўлиб, $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда A Лебег маъносида ўлчовли тўплам дейилади. Агар A Лебег маъносида ўлчовли тўплам бўлса , унинг ўлчови деб ташқи ўлчовни қабул қиламиз.

Фақат ўлчовли тўпламлар системасида аниқланган μ^* тўплам функцияси Лебег ўлчови деб аталади ва у μ билан белгиланади.

Шундай қилиб, ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ ва унда Лебег ўлчови μ аниқланади. Демак, ихтиёрий $A \in M(E)$ учун $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Ўлчовли тўпламларнинг хоссаларини келтирамиз:

4-теорема. Ўлчовли тўпламларнинг тўлдирувчиси ўлчовлидир.

Исбот. Теореманинг тасдиғи элементар тўпламнинг тўлдирувчиси элементар тўплам эканлигидан ва

$$A\Delta B = (E \setminus A)\Delta(E \setminus B)$$

тенгликдан келиб чиқади.

5- теорема. Ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ ҳалқа бўлади.

Исбот. Теоремани исботлаш учун ўлчовли тўпламларнинг кесишмаси ва симметрик айирмаси яна ўлчовли тўплам эканлигидан кўрсатиш этарли.

A_1, A_2 ўлчовли тўпламлар бўлсин. Таърифга кўра, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $B_1 \in M(G)$ ва $B_2 \in M(G)$ элементар тўпламлар мавжуд бўлиб, қуйидаги тенгсизликлар бажарилади

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

У ҳолда $(A_1 \cap A_2)\Delta(B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ муносабатдан ва ташқи ўлчовнинг ярим аддитивлик хоссасидан

$$\mu^*((A_1 \cap A_2)\Delta(B_1 \cap B_2)) \le \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$$

га эга бўламиз. $B_1 \cap B_2$ нинг элементар тўплам эканлигидан $A_1 \cap A_2$ нинг ўлчовли тўплам эканлиги келиб чиқади.

Икки тўплам симметрик айирмасининг ўлчовли эканлиги

$$(A_1 \Delta A_2)\Delta(B_1 \Delta B_2) = (A_1 \Delta B_1)\Delta(A_2 \Delta B_2)$$

тенгликдан келиб чиқади.

Агар ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ да бирлик элемент мавжуд бўлса, у алгебра ташкил қилади. $M(E)$ да $E = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ тўплам бирлик элемент шартларини қаноатлантиради. Демак, ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ алгебра ташкил қилади.

1- натижа. Ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси ва айирмаси яна ўлчовлидир.

2- натижа. Чекли сондаги ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна ўлчовли тўпламдир.

6- теорема (Ўлчовнинг аддитивлик хоссаси). Агар $A_1, \ldots, A_n$ лар ўзаро кесишмайдиган ўлчовли тўпламлар бўлса, у ҳолда

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

тенглик ўринли.

1-лемма. Ихтиёрий A ва B тўпламлар учун

$$\left|\mu^*(A) - \mu^*(B)\right| \le \mu^*(A \Delta B)$$

тенглик ўринлидир.

3- натижа. Ихтиёрий $A \subset E$ ўлчовли тўпламлар учун

$$\mu(E \setminus A) = 1 - \mu(A)$$

тенглик ўринлидир.

7- теорема. Саноқли сондаги ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна ўлчовли тўпламдир.

4- натижа. Ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$, $\sigma -$ алгебра ташкил қилади.

8- теорема (Ўлчовнинг $\sigma -$аддитивлик хоссаси). Агар $\{A_n\}$ ўзаро кесишмайдиган ўлчовли тўпламлар кетма - кетлиги учун

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

9- теорема (Ўлчовнинг узликсизлик хоссаси). Агар ўлчовли тўпламларнинг $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ кетма- кетлиги учун $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ бўлса, у ҳолда

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

бўлади.

5- натижа. Агар $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ ўлчовли тўпламлар кетма - кетлиги учун $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ бўлса, у ҳолда

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

бўлади.

6-таъриф. Агар исталган m, n бутун сонлар учун $A_{mn} = A \bigcap E_{mn}$ тўпламлар ўлчовли бўлса, у ҳолда A тўплам ўлчовли дейилади. Агар A тўплам ўлчовли бўлса,

$$\mu(A) = \sum_{m,n \in Z} \mu(A_{mn})$$

қатор йиғиндиси A тўпламнинг Лебег ўлчови дейилади.

Агар (2.1) тенгликдан аниқ қуйи чегара $A \subset R$ тўпламни қопловчи барча B содда тўпламалр олинса, A тўпламнинг Жордан маъносидаги *ташқи ўлчови ҳосил* бўлади, у $j^*(A)$ билан белгиланади, яъни

$$j^*(A) = \inf_{B \supset A} m'(B), \quad B \in M(G).$$

Ушбу

$$j_*(A) = \sup_{B \subset A} m'(B), \quad B \in M(G),$$

сон A тўпламнинг Жордан маъносидаги *ички ўлчови дейилади.*

7-таъриф. Агар $j^*(A) = j_*(A)$ бўлса, A Жордан маъносида ўлчовли тўплам дейилади.

Ҳозир биз қурилиши Кантор тўплами K билан боғлиқ бўлган Канторнинг зинапоя функцияси келтирамиз. Канторнинг зинапоя функцияси k билан белгилаймиз ва уни R да қуйидагича аниқлаймиз. $k(x) = 0, \quad x \in (-\infty, 0]$ ва $k(x) = 1, \quad x \in [1, \infty).$

Энди $[0, 1] \setminus K$ да қуйидагича аниқлаймиз. $K_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ тўплам ва унинг чегарасида

$$k(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

$K_2 = K_{21} \bigcup K_{22} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \bigcup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ тўплам ва унинг чегараларида

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & agar \ x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \\ \frac{3}{4}, & agar \ x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]. \end{cases}$$

Энди

$$K_3=\bigcup_{k=1}^{4}K_{3k}=\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right)\cup\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right)\cup\left(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right)\cup\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right)$$

тўплам ва унинг чегараларида

$$k(x)=\frac{2k-1}{2^3},\quad x\in K_{3k},\quad k=1,2,3,4.$$

Худди шундай $K_n=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}K_{nk}$ тўпламнинг k- қўшни интервали ва унинг чегарасида

$$k(x)=\frac{2k-1}{2^n},\quad x\in K_{nk},\quad k=1,2,3,\dots,2^{n-1}.$$

Шундай қилиб, K_n тўпламлар ва уларнинг чегараларида k функция аниқланади. Бу $\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n=[0,1]\setminus K$ тўплам [0, 1] кесмада зич. Энди $x_0\in K$ сони k функция аниқланмаган борор нуқта бўлсин, у ҳолда

$$k(x_0)=\sup\left\{k(x):x<x_0,\ x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n\right\}$$

деймиз. Ҳосил қилинган функция Канторнинг зинапоя функцияси дейилади. Канторнинг зинапоя функцияси [0,1] кесмада узлюксиз, монотон камаймайдиган функция бўлади. Хусусан $k(0)=0,\ k(1)=1.$

1.4 Ўлчовнинг Лебег бўйича давоми

Бирли (бирлик элементли) ярим ҳалқада аниқланган ўлчовнинг Лебег бўйича давоми. Агар G_m ярим ҳалқада аниқланган m ўлчов аддитивлик хоссасига эга бўлиб, аммо $\sigma-$ аддитив бўлмаса, у ҳолда m нинг G_m дан $M(G_m)$ гача давоми билан ўлчовни давом эттириш жараёни тугайди, яъни m ўлчовни $M(G_m)$ дан кенгроқ синфга давом эттириб бўлмайди. Агар G_m да аниқланган m ўлчов $\sigma-$ аддитив бўлса, у ҳолда, m ни G_m дан $M(G_m)$ га нисбатан кенгроқ бўлган ва қандайдир маънода максимал синфга давом эттириш мумкин. Буни Лебег бўйича давом эттириш ёрдамида амалга ошириш мумкин. Бу бандда бирли ярим ҳалқада берилган ўлчовни Лебег бўйича давом эттириш масаласини қараймиз.

Бизга бирор G_m бирли ярим ҳалқада аниқланган $\sigma-$ аддитив m ўлчов берилган бўлсин ва E тўплам G_m ҳалқанинг бири бўлсин. E нинг барча қисм тўпламларидан ташкил топган $\Im(E)$ системада ташқи ўлчов деб аталувчи μ^* функцияни қуйидаги усулда аниқлаймиз.

1-таъриф. Ихтиёрий $A \subset E$ тўплам учун

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(B_n) \tag{1}$$

сон A тўпламнинг ташқи ўлчови дейилади. Бу ерда аниқ қуйи чегара A тўпламни қопловчи барча чекли ёки саноқли $\{B_n\}, B_n \in G_m$ тўпламалар системалари бўйича олинади.

1-теорема (Саноқли ярим аддитивлик). Агар A ва саноқлита $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ тўпламлар учун $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\mu^* \leq \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Бу теорема тасдиғининг 2.1-теорема тасдиғи исботига(айнан) ўхшаш амалга оширилди.

2-таъриф. Агар $A \subset E$ тўплам ва исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $B \in M(G_m)$ тўплам мавжуд бўлиб,

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, A (Лебег бўйича) ўлчовли тўплам дейилади.

2-теорема. Ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ ҳалқа бўлади.

Исбот. Ихтиёрий A_1 ва A_2 тўпламлар учун

$$A_1 \bigcap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2) \tag{2}$$

ва

$$A_1 \bigcup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \bigcap (E \setminus A_2)] \tag{3}$$

тенгликлар ўринли бўлгани учун қуйидагини исботлаш етарли. Агар

$A_1 \in M(E),\ A_2 \in M(E)$ бўлса, у ҳолда $A = A_1 \setminus A_2 \in M(E)$ бўлади, яъни ўлчовли тўпламларнинг айирмаси ўлчовлидир. Ҳақиқатдан ҳам, A_1 ва A_2 ўлчовли тўпламлар учун шундай $B_1 \in M(G)$ ва $B_1 \in M(G)$ тўпламлар мавжудки,

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ва } \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. $B = B_1 \setminus B_2 \in M(G)$ бўлганлиги учун

$$(A_1 \setminus A_2)\Delta(B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \bigcup (A_2 \Delta B_2)$$

муносабатдан фойдаланиб, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ тенгсизликни оламиз. Демак, $A_1 \setminus A_2 \in M(E)$ у ҳолда (4.2) ва (4.3) муносабатлардан $A_1 \bigcap A_2 \in M(E)$ ва $A_1 \bigcup A_2 \in M(E)$ эканлигини оламиз. A_1 ва A_2 тўпламларнинг симметрик айирмасининг ўлчовли эканлиги

$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \bigcup (A_2 \setminus A_1)$$

тенгликдан келиб чиқади.

1-эслатма. G_m нинг бирлик элементи – E ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ учун ҳам бирлик элемент бўлади, шунинг учун ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ алгебра ташкил этади.

3-теорема. Ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ да аниқланган μ тўплам функцияси аддитивдир.

4-теорема. Ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ да аниқланган μ тўплам функцияси σ - аддитивдир.

Исбот. Айтайлик $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in M(E)$ бўлиб $A_i \bigcap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$ бўлсин. 4.1-теоремага кўра,

$$\mu'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(A_n) \text{ ёки } \mu'(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\ (A_n) \qquad (4)$$

тенгсизлик ўринли. 4.3-теоремага кўра, ҳар бир n да

$$\mu(A) \geq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \qquad (5)$$

тенгсизликни оламиз. (4.5) дан $n \to \infty$ да лимитга ўтиб,

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (6)$$

га эга бўламиз. (4.4) ва (4.6) лардан теорема тасдиғи келиб чиқади.

5-теорема. Лебег бўйича ўлчовли бўлган барча тўпламлар системаси $M(E)$, E бирлик элементли σ - алгебрадир.

3-таъриф. Ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ да аниқланган ва $M(E)$ да ташқи ўлчов μ^* билан устма-уст тушувчи μ функция m ўлчовнинг $\mu = L(m)$ Лебег давоми деб аталади.

2. Бирлик элементга эга бўлмаган ярим ҳалқада берилган ўлчовни давом эттириш.

6-теорема. Исталган бошланғич m ўлчов учун Лебег бўйича ўлчовли тўпламлар системаси $M(E)$ σ- ҳалқа бўлади. Саноқли сондаги ўлчовли $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ тўпламлар бирлашмаси бўлган $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ тўпламнинг ўлчовли бўлиши учун $\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)$ миқдорнинг n га боғлиқсиз ўзгармас билан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

Исбот. *Етарлилиги.* Ўлчовли тўпламларнинг $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ саноқли система берилган бўлиб,

$$\sup_{n\geq 1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = K < \infty$$

бўлсин. Янги

$$A_1' = A_1,\ A_2' = A_2 \setminus A_1,\ A_3' = A_3 \setminus (A_1 \bigcup A_2), \ldots, A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \ldots$$

ўлчовли тўпламлар кетма-кетлигини тузамиз. Тузилишига кўра, $A_1', A_2', \ldots, A_n', \ldots$ тўпламлар ўзаро кесишмайди. Бундан ташқари, исталган n да $\bigcup_{k=1}^{n} A_k' = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ тенглик ўринли. Бундан ташқари

$$\sup_n \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sup_n \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^{'}) = \sup_n \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k^{'}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k^{'}) \leq K$$

шарт бажарилади. Демак, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $n \in N$ мавжудки,

$$\mu(\bigcup_{k=n+1}^{n} A_k^{'}) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k^{'}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^{'}$ тўплам ўлчовли бўлгани учун, шундай $B \in G_m$ тўплам мавжуд бўлиб,

$$\mu^{*}(C \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилади.

$$A \Delta B \subset (C \Delta B) \bigcup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k^{'} \right)$$

муносабатдан фойдалансак,

$$\mu^{*}(A \Delta B) < \varepsilon$$

тенгсизликни оламиз. Демак, A ўлчовли тўплам экан.

Зарурийлиги. Айтайлик саноқлита $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ ўлчовли тўпламлар учун $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ тўплам ўлчовли бўлсин ва $\mu(A)$ чекли бўлсин. У ҳолда исталган $n \in N$ учун $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A$ муносабатдан ва $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ўлчовли тўплам бўлгани учун

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \mu(A) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_n \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \mu(A) < \infty.$$

1-натижа. Ўлчовли тўпламлар синфи $M(E)$ ва $A \in M(E)$ тўплам берилган бўлсин. A тўпламнинг барча $B \in M(E)$ қисм тўпламларидан тузилган $B(M(A))$ система σ- алгебра бўлади.

4-таъриф. Агар $\mu(A) = 0$ ва $A' \subset A$ бўлишидан A' нинг ўлчовли эканлиги келиб чиқса, μ ўлчов тўла дейилади.

Умуман олганда σ- алгебрада аниқланган ҳар қандай σ- аддитив ўлчови тўла ўлчовгача давом эттириш мумкин. Бунинг учун нол ўлчови тўпламнинг ихтиёрий қисмига нолни мос қўйиш кифоя қилади.

Назорат саволлари:

1. Лебег маъносида ўлчовли, аммо Жордан маъносида ўлчовли бўлмаган тўпламга мисол келтиринг.
2. Кантор тўплами $K \subset [0,1]$ нинг Жордан маъносида ўлчовли эмаслигини исботланг.
3. $A \subset R$ тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса, $\mu(\bar{A}) = 0$ бўлиши шартми? Бу ерда $\bar{A}$– A тўпламнинг ёпиғи.
4. $A \subset R$ чегараланмаган мусбат ўлчовли тўплам бўлсин, у ҳолда шундай $x, y \in A$ лар мавжудки $x - y \in Q$ бўлади. Исботланг.

2-мавзу. Ўлчовсиз тўпламлар.

Режа:

1. Ўлчовсиз тўпламлар.
2. Ўлчовли функциялар.
3. Турли фазолар ва улар устидаги ўлчовларга мисоллар.
4. Интеграллар.
5. Эҳтимоллик ўлчовлар ва уларнинг қўлланиши.

Таянч иборалар: ўлчовли тўплам, ўлчовли функция, гармоник функциялар, субгармоник функциялар, монотон камаювчи, текис яқинлашувчи, максимумлар принципи**.**

Ўлчовли функциялар ва улар устида амаллар.

Бизга $E \subset R \left(E \subset R^2\right)$ ўлчовли тўплам ва унда аниқланган ҳақиқий қийматли f функция берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар ихтиёрий $c \in R$ учун $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$

тўплам ўлчовли бўлса, у ҳолда f функция E тўпламда ўлчовли функция дейилади.

1-мисол. Биз $E\in R$ тўплам сифатида $[0,1]$ кесмани f функция сифатида ўзгармас бир функцияни оламиз, яъни $f(x)=1$ аниқланишига кўра ихтиёрий $c\in R$ учун

$$E(f<c)=\{x: f(x)<c\}=\begin{cases}[0,1], & agar\, c>1,\\ \varnothing, & agar\, c\leq 1\end{cases}$$

тенглик ўринли. $[0,1]$ кесма ва $\varnothing$ тўплам ўлчовли. Демак, ихтиёрий $c\in R$ учун $E\left(f<c\right)$ тўплам ўлчовли экан. Таърифга кўра, $f(x)=1$ функция $[0,1]$ да ўлчовли функция бўлади.

1-теорема. Агар f ва g функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси $f+g$, айирмаси $f-g$ ва кўпайтмаси $f\cdot g$ ўлчовли бўлади. Агар $g(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\dfrac{f}{g}$ функция ҳам E да ўлчовли бўлади.

Теоремани исботлашда қуйидаги леммалардан фойдаланамиз.

1-лемма. Агар f функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда ихтиёрий $a,b\in R$ лар учун қуйидаги тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли бўлади.

1) $E(f\geq a)$; 2) $E(a\leq f<b)$; 3) $E(f=a)$; 4) $E(f\leq a)$; 5) $E(f>a)$.

2- лемма. Агар ихтиёрий $a,b\in R$ лар учун 1), 2), 4), 5) тўпламларнинг бирортаси ўлчовли бўлса, у ҳолда f функция E тўпламда ўлчовли бўлади.

Исбот. f ўлчовли бўлсин, у ҳолда таърифга кўра, ихтиёрий $a,b\in R$ учун $E(f<a)$ тўплам ўлчовли бўлади.

1) $E(f\geq a)=E\setminus E(f<a)$ тенгликдан, ҳамда ўлчовли тўпламнинг тўлдирувчиси ўлчовли эканлигидан $E(f\geq a)$ тўпламларнинг ўлчовлилиги келиб чиқади.

2) $E(a \le f < b) = E(f \ge a) \cap E(f < b)$ тенгликдан, ҳамда ўлчовли тўпламлар кесишмаси ўлчовли эканлигидан $E(a \le f < b)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

3) $E(f = a)$ тўпламни ўлчовлилигини кўрсатамиз

$$E(f = a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(a \le f < a + \frac{1}{n})$$

Бу ерда $E\left(a \le f < a + \frac{1}{n}\right)$ тўплам 2) кўринишдаги тўплам бўлгани учун ўлчовли. Ўлчовли тўпламларнинг саноқли сондаги кесишмаси ўлчовли бўлгани учун $E(f = a)$ тўплам ўлчовли бўлади.

4) $E(f \le a)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги таърифидан, 3) дан ҳамда $E(f \le a) = E(f < a) \bigcup E(f = a)$ тенгликдан келиб чиқади.

5) $E(f > a) = E \setminus E(f \le a)$ тенгликдан ҳамда тўлдирувчи тўпламнинг ўлчовлилигидан келиб чиқади.

3-лемма. Агар f ва g лар E да ўлчовли функциялар бўлса, у ҳолда

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\} = E(f > g)$$

тўплам ўлчовли бўлади.

Исбот. Рационал сонлар тўплами Q саноқли бўлгани учун унинг элементларини номерлаб чиқамиз, яъни $Q = \{r_1, r_2, ..., r_k, ...\}$ ва қуйидаги тенгсизликни исботлаймиз:

$$\{x \in E : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x : f(x) > r_k\} \bigcap \{x : g(x) < r_k\}), \quad r_k \in Q \tag{5.1}$$

фараз қилайлик, $x_0 \in \{x \in E : f(x) > g(x)\}$ бўлсин, у ҳолда рационал сонларнинг зичлик хоссасига кўра шундай $r_k \in Q$ мавжудки $f(x_0) > r_k > g(x_0)$ муносабат ўринли бўлади. Демак,

$$\{x_0 \in E : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{x : f(x) > r_k\} \bigcap \{x : g(x) < r_k\}), \quad r_k \in Q.$$

Бундан

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{x:\ f(x) > r_k\} \cap \{x:\ g(x) < r_k\}\right)$$

эканлиги келиб чиқади. Энди

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\{x:\ f(x) > r_k\} \cap \{x:\ g(x) < r_k\}\right)$$

ихтиёрий нуқта бўлсин, у ҳолда x_0 йиғиндининг бирортасига тегишли бўлади, яъни шундай $r_k \in Q$ мавжудки бир вақтда $f(x_0) > r_k$ ва $g(x_0) < r_k$ бўлади. Бундан $f(x_0) > g(x_0)$ эканлиги ва демак $x_0 \in \{x \in E:\ f(x) > g(x)\}$ эканлиги келиб чиқади.

Биз (1) тенгликни исботладик. 3-лемманинг исботи (1) тенгликдан, ҳамда ўлчовли тўпламларнинг саноқли бирлашмаси яна ўлчовли эканлигидан келиб чиқади.

Теоремани исботини бир неча қисмга ажратамиз.

1) агар $ф$ – ўлчовли функция бўлса, у ҳолда ихтиёрий $k \in R$ учун $k \cdot f$ ва $f + k$ функциялар ҳам ўлчовли бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$\{x \in E:\ f(x) > g(x)\} \tag{2}$$

(5.2) тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламларнинг ҳар бир ўлчови бўлгани учун $k \cdot f$ функция ўлчовли бўлади. $f + k$ функциянинг ўлчовлиги қуйидаги тенгликдан

$$\{x \in E:\ f(x) + k < c\} = \{x \in E:\ f(x) < c - k\}$$

келиб чиқади.

2) Агар $ф$ ва $г$ ўлчовли функциялар бўлса, у ҳолда 3-леммага кўра

$$\{x \in E:\ f(x) + g(x) > c\} = \{x \in E:\ f(x) > c - g(x)\}$$

тўплам ихтиёрий $c \in R$ да ўлчовли бўлади. Демак, таърифга кўра $f + g$ ўлчовли бўлади.

3) 1) ва 2) дан келиб чиқадики $f - g$ ўлчовли функция бўлади.

4) Агар $ф$ ўлчовли бўлса $|f|$ ва f^2 лар ҳам ўлчовлилар ҳам ўлчовли функциялар бўлади. Ҳақиқатан ҳам

$$E(|f|>c)=\begin{cases} E, \ agar \ c<0 \\ E(f<-c)\bigcup E(f>c), \quad agar \quad c\geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$E(f^2>c)=\begin{cases} E, \quad agar \quad c<0 \\ E(|f|>\sqrt{c}), \quad agar \quad c\geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

(3) ва (4) тенгликларнинг ўнг томонидаги тўпламлар ихтиёрий $c\in R$ да ўлчовли бўлгани учун $|f|$ ва f^2 лар ўлчовли функциялар бўлади.

5) Ўлчовли функцияларнинг кўпайтмаси ўлчовли эканлиги қуйидаги

$$f\cdot g=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$$

айниятдан, ҳам 1), 2), 3) ва 4) хоссалардан келиб чиқади.

6)Агар f ўлчовли бўлиб, $f(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{f}$ ўлчовли бўлади.

Исботи:

$$E\left(\frac{1}{f}<c\right)=\begin{cases} E(f<0)\bigcup E\left(f>\frac{1}{c}\right), \quad agar \quad c>0 \\ E\left(\frac{1}{c}<f<0\right), \quad agar \quad c<0 \\ E(f<0), \quad agar \ c=0 \end{cases}$$

тенгликнинг ўнг томони ўлчовли тўпламлар бўлгани учун $E\left(\frac{1}{f}<c\right)$ ўлчовли тўплам экан. Демак $\frac{1}{f}$ ўлчовли функция. 5-хоссага кўра,

$g(x)\cdot\frac{1}{f(x)}$ функция ҳам ўлчовли бўлади, бунда $f(x)\neq 0$.

Шундай қилиб, биз ўлчовли функциялар тўпламининг арифметик амалларга нисбатан ёпиқлигини кўрсатдик.

2-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $n_0 > 0$ мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ ва ҳамма $x \in E$ ларда $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда f функцияга текис яқинлашади дейилади.

3-таъриф. Агар ҳар бир $x \in E$ да $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ бўлса, у ҳолда $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги f функцияга нуқтали яқинлашади дейилади.

Қуйидаги теорема ўлчовли функциялар тўпламининг лимитга ўтиш амалига нисбатан ҳам ёпиқлигини ифодалайди.

2-теорема. Агар $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги ҳар бир $x \in E$ да $f(x)$ га яқинлашса, у ҳолда лимитик функция ϕ ўлчовли бўлади.

Исбот. Ихтиёрий $x \in E$ учун $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ бўлсин. Агар биз

$$E(f < c) = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m>n}^{\infty}\left\{x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right\}$$

(5.5)

тенгликни исботласак теорема исботланган бўлади. Чунки, саноқли сондаги ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна ўлчовли тўпламдир. (5.5) тенглик амалиёт дарсида кўрсатилади.

Ўлчовли функциялар кетма- кетликларининг яқинлашишлари

1-таъриф. E ўлчовли тўпламда аниқланган f ва g функциялар учун

$$\mu\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} = 0$$

бўлса у ҳолда f ва g лар эквивалент функциялар дейилади ва $f \equiv g$ каби белгиланади

1-мисол. $E = [0,1]$

$$F(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \cap Q \\ 0, x \in [0,1] \cap I \end{cases}, \quad g(x) = 0$$

Функциялар эквивалентдир чунки

$$\{x\in[0,1]:\ f(x)\neq g(x)\}=[0,1]\cap Q$$

ва $\mu([0,1]\cap Q)=0$ тенгликлар ўринлидир .

2-таъриф. Агар бирор хосса E тўпламнинг нол ўлчовли қисм тўпламидан бошқа барча нуқталарида бажарилса , бу хосса E тўпламда деярли бажарилади дейилади .

1-теорема: Агар f функция Y ўлчовли тўпламда аниқланган бўлиб , ўлчовли $G:E\to R$ функцияга эквивалент бўлса у ҳолда f ҳам E га ўлчовли функция дейилади.

2-мисол. $E=[0,2\pi]$

$$F(x)=\begin{cases}\cos x, x\in[0,2\pi]/\left\{\dfrac{\pi}{n}, n\in N\right\}\\ \sin^2(\cos x), x\in\left\{\dfrac{\pi}{n}, n\in N\right\},\end{cases};\qquad g(x)=\cos x$$

$f\equiv g$ ва g ўлчовли функциялар. Шу сабабли 6.1- теоремага асосан, f ҳам ўлчовли функциядир.

Деярли яқинлашиш.

3-таъриф. Агар E тўпламда аниқланган $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлигининг f функцияга яқинлашмайдиган нуқталари тўпламнинг ўлчови 0 бўлса. У ҳолда $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда функцияга деярли яқинлашади дейилади, яни

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

Тенглик E даги деярли барча x лар учун ўринли, ёки

$$A=\{x\in E:\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\},\ \ \mu\in(E/A)=0$$

3-мисол. $f_n(x)=\cos^n(x), x\in[0,2\pi]$ функциялар кетма –кетлиги 0 функцияга деярли яқинлашишини кўрсатинг .

Маълумки, $x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ лар учун $|\cos x|<1$ тенгсизлик ўринли ҳамда $\cos 0 = \cos 2\pi = 1,\ \cos\pi = -1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ x \in (0,2\pi)\setminus\{\pi\} \\ mavjud \ \ emas, \ agar \ \ x = \pi \\ 1, \ \ agar \ \ \ x = \{0,2\pi\}; \end{cases}$$

Агар $A = \{x : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0\} = (0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ белгилаш киритсак , у ҳолда $\mu(E \setminus A) = \mu\{0,\pi,2\pi\} = 0$

Таърифга асосан $f_n(x) = \cos^n x$ функциялар кетма-кетлиги $E = [0,2\pi]$ га $\theta(x) = 0$ функция деярли яқинлашади.

2-теорема. Агар E тўпламда $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги f га деярли яқинлашса, у ҳолда лимитик функция f ҳам ўлчовлидир.

Текис яқинлашишдан нуқтали яқинлашиш, нуқтали яқинлашишдан эса деярли яқинлашиш келиб чиқади .

Қуйидаги теорема деярли яқинлашиш, ва текис яқинлашиш орасидаги боғланишни ифодалайди

3-теорема (Эгоров). E чекли ўлчовли тўпламда $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги f га деярли яқинлашсин .У ҳолда $\nabla\delta > 0$ сони учун шундай $E_\delta \subset E$ тўплам мавжудки, унинг учун қуйидагилар ўринли:

1) $\mu(E_\delta \setminus E) < \delta,$

2) E_δ тўпламга $\{f_n\}$ функциялар кетма- кетлиги f га текис яқинлашади.

2. Ўлчов бўйича яқинлашиш. Бизга E тўпламда аниқланган $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги ва f ўлчовли функция берилган бўлсин.

Ўлчов бўйича яқинлашиш.

Бизга $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги ва f функция берилган.

4-таъриф. Агар ихтиёрий $\delta > 0$ учун

$$\lim_{n\to\infty}\mu\{x\in E : |f_n(x)-f(x)|\geq\delta\}=0$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда f функцияга ўлчов бўйича яқинлашади дейилади.

Деярли яқинлашишдан ўлчов бўйича яқинлашиш келиб чиқади. Қуйидаги теорема шу ҳақда.

4-теорема. Агар $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги $E(\mu(E)<\infty)$ тўпламда f функцияга деярли яқинлашса, у ҳолда $\{f_n\}$ кетма-кетлик E тўпламда f га ўлчов бўйича ҳам яқинлашади.

Исбот. 2-теоремага кўра, лимитик функция f ўлчовли бўлади.

$$A=\left\{x:\lim_{n=\infty} f_n(x)=f(x)\right\}$$

бўлсин, у ҳолда $\mu(E\setminus A)=0$ бўлади. Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$E_k(\delta)=\left\{x:|f_k(x)-f(x)|\geq\delta\right\};$$

$$R_n(\delta)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k(\delta),\quad M=\bigcap_{n=1}^{\infty}R_n(\delta),$$

ўлчовли тўпламларнинг хоссаларидан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, юқорида киритилган барча тўпламлар ўлчовли бўлади. Равшанки,

$$R_1(\delta)\supset R_2(\delta)\supset\ldots\ldots\supset$$

Ўлчовнинг узлюксизлик хоссасидан

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(R_n(\delta)\right)=\mu(M)$$

тенглик келиб чиқади.

Кўрсатамизки $M\subset E\setminus A$ бўлади, ҳақиқатан ҳам $x_0\in A$ бўлсин, яъни

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=f(x_0)$$

Лимит таърифига кўра берилган $\delta\succ 0$ сон учун шундай $н$ мавжудки,

$$|\ f_k(x_0)-f(x_0)\ |<\delta$$

тенгсизлик барча $k \ge n$ лар учун ўринли, яъни $x_0 \notin R_n(\delta)$ демак, албатта $x_0 \notin M.$ Бундан $A \subset E \setminus M \Rightarrow M \subset E \setminus A.$ Ўлчовнинг ярим аддитивлик хоссасидан

$$\left(\mu(M) \le \mu(E \setminus A) = 0\right) \quad \mu(M) = 0$$

Демак $\mu\left(R_n(\delta)\right) \to 0,\ n \to \infty$ яна бир марта ўлчовнинг ярим аддитивлик хоссасидан фойдалансак, $E_n(\delta) \subset R_n(\delta)$ муносабатдан

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(E_n(\delta)\right) = 0$$

эканлиги келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.

Умуман олганда ўлчов бўйича яқинлашишдан деярли яқинлашиш келиб чиқмайди. Қуйидаги мисол шу фикрни тўғрилигини тасдиқлайди.

4-мисол. Ҳар бир $k \in N$ учун [0,1] ярим интервалда $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ функцияларни қуйидаги усул билан аниқлаймиз.

$$f_i^{(k)}(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & агар & \dfrac{i-1}{k} \prec x \le \dfrac{i}{k} \\ 0, & агар & x \in [0,1] \setminus \left[\dfrac{m}{k}, \dfrac{i}{k}\right] \end{matrix} \right\}$$

Бу функцияларни тартиб билан номерлаб, $\{g_n(x)\}$ кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Кўрсатиш мумкинки $\{g_n(x)\}$ кетма-кетликнинг нол функцияга ўлчов бўйича яқинлашишини ва бирор нуқтада ҳам нолга яқинлашмаслиги исботланг.

Исбот. Ҳар бир $n \in N$ учун шундай *к* ва *и* сонлар топиладики, $f_i^{(k)}(x) = g_n(x)$ тенглик бажарилади ва n чексизга интилиши билан *к* ҳам чексизга интилади. Демак, ихтиёрий $\sigma > 0$ учун

$$\mu\{x : |g_n(x)| \ge \sigma\} = \mu\{x : f_i^{(k)} \ge \sigma\} \le \mu\left[\frac{i-1}{k}, \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{k} \underset{k \to 0}{\to} 0.$$

Энди $\{g_n\}$ кетма-кетликни $Q(x)$ га деярли яқинлашмаслигини кўрсатамиз. Ихтиёрий $x_0 \in \left(0,1\right]$ нуқтани оламиз. Шундай k_n ва i_n

$\left(k_1 < k_2 < \ldots k_n <\right)$ сонлар топиладики,

$$x_0 \in \left(\frac{i_n - 1}{K_n}, \frac{in}{K_n} \right]$$

бўлади. Демак

$$\lim_{n\to\infty} f_{i_n}^{(k_n)}\left(x_0\right) = 1 \neq 0.$$

6-теорема. Агар $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $f(x)$ га ўлчов бўйича яқинлашса ундан $f(x)$ га деярли яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

Исбот. Биз мусбат ва нолга интилувчи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ кетма-кетликни ва $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ мусбат сонларни $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots$ қатор яқинлашувчи бўладиган қилиб танлаймиз. Индекслар кетма-кетлиги $n_1 < n_2, \ldots$ ларни қуйидагича танлаймиз n_1 индексни шундай танлаймизки,

$$\mu(\{x : \left| f_{n_1}(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon_1\}) \geq \eta_1$$

тенгсизлик бажарилсин. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи n_1 мавжудлиги $\{f_n\}$ кетма-кетликнинг f га ўлчов бўйича яқинлашувчи эканлигидан келиб чиқади. Энди $n_2 > n_1$ индекс шундай танланадики,

$$\mu(\{x : \left| f_{n_2}(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon_2\}) \geq \eta_2$$

тенгсизлик бажарилсин. Умуман $n_k > n_{k-1}$ индекс шундай танланадики,

$$\mu(\{x : \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon_k\}) \geq \eta_k$$

тенгсизлик бажарилсин. Танланган $\{f_{n_k}\}$ кетма-кетликнинг f га деярли яқинлашувчи бўлишини кўрсатамиз. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$R_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} \{x : \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| \geq \varepsilon_k\} \text{ ва } R = \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i.$$

Танланишига кўра, $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$. Ўлчовнинг узлюксиз хоссасига кўра, $\mu(R_n) \to \mu(R)$. Иккинчи томондан, равшанки,

$$\mu(R_i) \le \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k$$

тенгсизлик ўринли. Сўнги қатор яқинлашувчи қаторнинг қолдиғИ бўлганлиги учун, у $i \to \infty$ да нолга интилади. Демак, $\mu(R) = \lim_{i\to\infty} \mu(R_i) = 0$. Энди $E \setminus R$ тўпламда $f_{n_k}(x) \to f(x)$ ни кўрсатиш қолди. Фараз қилайлик, $x_0 \in E \setminus R$, яни $x_0 \notin R$ бўлсин. У ҳолда шундай i_0 мавжудки, $x_0 \notin R_{i_0}$. Бу шни англатадики, барча $k > i_0$ лар учун

$$x_0 \notin \{x : \left| f_{n_k}(x) - f(x) \right| \ge \varepsilon_k\} \text{ яъни } \left| f_{n_k}(x_0) - f(x_0) \right| < \varepsilon_k .$$

шартга кўра $\varepsilon_k \to 0$, шунинг учун $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = f(x_0)$.

7-теорема. (Лузин). $[a,b]$ да аниқланган f функция ўлчовли бўлиши учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун $[a,b]$ да узлюксиз бо'лган шундай φ функция мавжуд бўлиб, $\mu\{x \in [a,b]: f(x) \ne \varphi(x)\} < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилиши зарур ва етарли.

1-натижа. $[a,b]$ кесмада узлюксиз функция ўлчовлидир.

5-мисол. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0,\pi] \setminus Q \\ \cos^2 x(\sin x) & x \in Q \end{cases}$ Лузин теоремасига кўра функция ўлчовли, чунки $\varphi(x) = \sin x,\ x \in [0,\pi]$ ва

$$\mu\{x : f(x) \ne \varphi(x)\} = \varphi[0, \pi \cap Q] = 0.$$

Ихтиёрий ўлчовли функция учун Лебег интеграли ва унинг хоссалари

Биз доим чекли ўлчовли A $(\mu(A) < +\infty)$ тўплам ва унда аниқланган f ўлчовли функцияни қараймиз.

1-таъриф. Агар A тўпламда f функцияга текис яқинлашувчи, интегралланувчи содда функцияларнинг $\{f_n\}$ кетма-кетлиги мавжуд бўлса, у ҳолда f функция A тўпламда Лебег маъносида интегралланувчи дейилади ва унинг интеграли

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu \qquad (1)$$

тенглик билан аниқланади.

Бу таъриф коррект, яъни камчиликлардан ҳоли бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

1) Ҳар қандай текис яқинлашувчи ва A тўпламда интегралланувчи содда функциялар кетма-кетлиги учун (8.1) лимит мавжуд бўлиши керак.

2) Берилган f функция учун (8.1) лимит $\{f_n\}$ кетма-кетликнинг танлашига боғлиқ эмас.

3) Агар f функция содда функция бўлса, бу таъриф 7-мавзудаги содда функциялар учун берилган 2-таъриф билан устма-уст тушиши керак.

1-3 шартларнинг бажарилишини кўрсатамиз.

1) Содда функциялар учун интегралнинг А, Б ва С хоссаларидан

$$\left|\int_A f_n(x)d\mu - \int_A f_m(x)d\mu\right| \le \left|\int_A (f_m(x)d\mu - f_n(x)d\mu\right| \le \mu(A)\cdot\sup_{x\in A}\left|f_n(x)-f_m(x)\right|$$

тенгсизлик келиб чиқади.

2) (1) лимитнинг $\{f_n\}$ кетма-кетликнинг танланишига боғлиқ эмаслигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, f га текис яқинлашувчи иккита $\{f_n\}$ ва $\{f_n'\}$ кетма-кетликлар учун (1) лимит ҳар хил қийматлар қабул қилсин. У ҳолда $f_1, f_1', f_2, f_2', \ldots, f_n, f_n', \ldots$ кетма-кетлик f га текис яқинлашади, лекин бу кетма-кетлик учун (1) лимит мавжуд эмас. Бу эса ҳозиргина исботланган 1) шартга зид.

3) шартни исботлаш учун ихтиёрий n да $f_n(x) = f(x)$ деб олиш етарли.

2-таъриф. Агар ҳар бир $n\in N$ учун (1) тенглик билан аниқланувчи f_n^{but} содда функция интегралланувчи бўлса, у ҳолда f функция A тўпламда Лебег маъносида интегралланувчи дейилади ва унинг интеграли

$$\int_A f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n^{but}(x)d\mu$$

1-теорема. *(Лебег интегралининг σ − аддитивлик хоссаси).* Ўлчовли A тўплам ўзаро кесишмайдиган $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ўлчовли тўпламнинг бирлашмасидан иборат бўлсин, яъни

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

ва f функция A тўпламда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда ҳар бир A_n тўплам бўйича f функциянинг интеграли мавжуд,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu$$

қатор абсолют яқинлашади ва қуйидаги тенглик ўринли

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f(x)d\mu. \qquad (2)$$

1-натижа. Агар f функция A тўпламда интегралланувчи бўлса, у ҳолда f функция A тўпламнинг ихтиёрий ўлчовли A' қисмида ҳам интегралланувчи бўлади.

2-теорема. Ўлчовли A тўплам ўзаро кесишмайдиган $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ўлчовли тўпламнинг бирлашмасидан иборат бўлсин, яъни

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$$

Ҳар бир A_n тўпламда f функция интеграналланувчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)| d\mu$$

қатор яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда A тўпламда интеграналланувчи ва (2) тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Теоремани исботлаш учун f функциянинг A тўпламда интегралланувчи эканлигини кўрсатиш этарли. Аввало исботни B_i

тўпламларда f_i қийматларни қабул қилувчи f содда функция учун келтирамиз. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$B_i = \{x \in A : f(x) = f_i\}, \quad A_{ni} = A_n \bigcap B_i.$$

У ҳолда қуйидаги ўринли

$$\bigcup_n A_{ni} = B_i \text{ ва } \int_{A_n} |f(x)| d\mu = \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}).$$

(2) қаторнинг яқинлашувчилигидан

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni})$$

қаторнинг яқинлашувчилиги келиб чиқади. Яқинлашувчи мусбат ҳадли қатор ҳадларининг ўринларини ихтиёрий тартибда алмаштириш мумкин. Шунинг учун

$$\sum_n \sum_i |f_i| \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \sum_n \mu(A_{ni}) = \sum_i |f_i| \mu(B_i).$$

Охирги қаторнинг яқинлашувчилиги

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_i f_i \mu(B_i)$$

интегралнинг мавжудлигини билдиради.

Умумий ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон ва f функция учун шундай $\tilde{f}$ содда функция мавжудки, барча $x \in A$ учун

$$\left| f(x) - \tilde{f}(x) \right| < \varepsilon. \qquad (3)$$

тенгсизлик ўринли. У ҳолда ВИИ хоссага кўра, ҳар бир A_n тўпламда $\tilde{f}$ функциянинг интеграли мавжуд ва

$$\int_{A_n} \left| \tilde{f}(x) \right| d\mu \le \int_{A_n} |f(x)| d\mu + \varepsilon \mu(A_n)$$

тенгсизлик ўринли. (2) қаторнинг яқинлашувчи эканлигидан, ҳамда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \left| \tilde{f}(x) \right| d\mu$$

қаторнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Бундан $\tilde{f}$ содда функциянинг A да интегралланувчи эканлиги, (3) тенгсизликдан эса f функциянинг A тўпламда интегралланувчи эканлиги келиб чиқади.

3-теорема. *(Чебишев тенгсизлиги).* A ўлчовли тўпламда манфиймас φ функция ва $c > 0$ сон берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\mu(\{x \in A : \varphi(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu$$

Исбот. Айтайлик, $A_c = \{x \in A : \varphi(x) \geq c\}$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_A \varphi(x)d\mu = \int_{A_c} \varphi(x)d\mu + \int_{A \setminus A_c} \varphi(x)d\mu \geq \int_{A_c} \varphi(x)d\mu \geq c \cdot \mu(A_c).$$

Бу ердан

$$\mu(A_c) \leq \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu$$

тенгсизлик келиб чиқади.

2-натижа. Агар

$$\int_A |f(x)|d\mu = 0$$

бўлса, у ҳолда деярли барча $x \in A$ учун $f(x) = 0$ бўлади.

4-теорема. *(Лебег интегралининг абсолют узлуксизлик хоссаси).* Агар f функция A $(\mu(A) < +\infty)$ тўпламда интегралланувчи бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжудки, $\mu(D) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай $D \subset A$ тўплам учун

$$\left|\int_D f(x)d\mu\right| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. Агар f функция A тўпламда M сони билан чегараланган бўлса, теоремани исботлаш учун $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$ деб олиш етарли, чунки

$$\left|\int_D f(x)d\mu\right| < M\cdot\mu(D) < M\cdot\delta = M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Энди f ихтиёрий ўлчовли ва интегралланувчи функция бўлсин. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$A_n = \{x\in A : n \le |f(x)| < n+1\},\quad B_n = \bigcup_{n=0}^{N} A_n,\quad C_n = A\setminus B_N.$$

У ҳолда Лебег интегралининг аддитивлик хоссасига кўра,

$$\int_A |f(x)|d\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|d\mu$$

тенглик ўринли. Берилган $\varepsilon > 0$ сон учун N ни шундай танлаймизки,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{A_n}|f(x)|d\mu = \int_{C_N}|f(x)|d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин ва

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$$

бўлсин. Агар $\mu(D) < \delta$ бўлса у ҳолда

$$\left|\int_D f(x)d\mu\right| \le \int_D |f(x)|d\mu = \int_{D\cap B_N}|f(x)|d\mu + \int_{D\cap C_N}|f(x)|d\mu \le$$

$$\le (N+1)\mu(D) + \int_{C_N}|f(x)|d\mu < (N+1)\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Лебег интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.

1-теорема. (Лебег). Агар $\{f_n\}$ кетма-кетлик A тўпламнинг ҳар бир нуқтасида f функцияга яқинлашса ва барча $n\in N$ лар учун $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ тенгсизлик бажарилиб, φ фуҳксия A тўпламда интегралланувчи бўлса, у ҳолда лимитик функция f ҳам A да интегралланувчи бўлади ва

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu$$

Исбот. Теорема шартидан лимитик функция f учун $\left|f(x)\right| \le \varphi(x)$ тенгсизликнинг бажарилиши келиб чиқади. Лебег интегралининг ВИИ хоссасига кора, f интегралланувчи фунсия бўлади. Энди $\varepsilon < 0$ ихтиёрий сон бўлсин. Лебег интегралининг абсолют узлюксизлик хоссасига кўра шундай $\delta < 0$ сон мавжудки, агар $\mu(B) < \delta$ бўлса,у ҳолда

$$\int_B \varphi(x)d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (9.1)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. 6.3-Эгоров теоремасига кўра, B тўпламни шундай танлаш мумкинки, $\{f_n\}$ кетма-кетлик $C = A \setminus B$ тўпламда f функцияга текис яқинлашади. Демак,шундай N мавжудки, ихтиёрий $n > N$ лар ва ихтиёрий $x \in C$ учун

$$|\ f(x) - f_n(x)\ | < \frac{\varepsilon}{2\mu(C)} \qquad (9.2)$$

тенгсизлик бажарилади.У ҳолда

$$\int_A f(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu = \int_C [f(x) - f_n(x)]d\mu + \int_B f(x)d\mu - \int_B f_n(x)d\mu$$

бўлади. Энди

$$\left|f(x)\right| \le \varphi(x), \qquad \left|f_n(x)\right| \le \varphi(x)$$

эканлигидан ҳамда (9.1) ва (9.2) лардан

$$\left|\int_A f(x)d\mu - \int_A f_n(x)d\mu\ \right| \le$$

$$\le \int_C \left| f(x) - f_n(x)\ \right| d\mu + \int_B \left| f(x)\ \right| d\mu + \int_B \left| f_n(x)\ \right| d\mu \le \frac{\varepsilon}{2\mu(C)}\mu(C) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Δ

1-натижа. Агар $\left|f_n(x)\ \right| \le M = const$ ва $f_n(x) \to f(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)d\mu = \int_A f(x)d\mu.$$

1-эслатма. Нол ўлчовли тўпламда функциянинг қийматини ўзгартириш интеграл қийматига (ВИ хоссага каранг) таъсир қилмайди, шунинг учун 9.1-

теоремада $\{f_n\}$ кетма- кетликнинг f функцияга деярли яқинлашишини ва $|f(x)|\leq\varphi(x)$ тенгсизликнинг ҳам деярли барча x лар учун бажарилишини талаб қилиш етарли.

2- теорема. (Леви). A тўпламда монотон

$$f_1(x)\leq f_2(x)\leq\ldots\leq f_n(x)\leq\ldots,$$

интегралланувчи $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлиб, барча $n\in N$ лар учун

$$\int_A f_n(x)d\mu\leq K$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда A тўпламнинг деярли ҳамма ерида $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ чекли лимит мавжуд ҳамда f функция A да интегралланувчи ва интеграл белгиси остида лимитга ўтиш мумкин, яъни

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)d\mu=\int_A f(x)d\mu.$$

Исбот. Фараз қилайлик $f_1(x)\geq 0$ бўлсин. Умумий ҳол $\overline{f_n}(x)=f_n(x)-f_1(x)$ алмаштириш ёрдамида $\overline{f_1}(x)\geq 0$ ҳолга келтирилади.

$$\Omega=\{x\in A:\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\infty\}$$

тўпламни қараймиз. Агар биз $\Omega_n^{(r)}=\{x\in A: f_n(x)>r\}$ тўпламни киритсак, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\Omega=\bigcap_{r=1}^{\infty}\Omega^{(r)},\quad \Omega^{(r)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n^{(r)}.$$

Чебишев тенгсизлигига (8.3-теоремага қаранг) кўра,

$$\mu(\Omega_n^{(r)})\leq\frac{1}{r}\int_A f_n(x)d\mu\leq\frac{K}{r}.$$

Ҳар бир тайинланган r да $\Omega_1^{(r)}\subset\Omega_2^{(r)}\subset\ldots\subset\Omega_n^{(r)}\subset\ldots$ муносабат ўринли. Ўлчовнинг узлуксизлик хоссасига кўра

$$\mu(\Omega^{(r)})=\lim_{n\to\infty}\mu(\Omega_n^{(r)})\leq\frac{K}{r}.$$

Ҳар бир r учун $\Omega \subset \Omega^{(r)}$ эканлигидан $\mu(\Omega) \le \frac{K}{r}$ эканлиги келиб чиқади ва r ихтиёрий бўлгани учун $\mu(\Omega) = 0.$

Шу билан монотон $\{ f_n(x) \}$ кетма-кетлик деярли барча $x \in A$ ларда чекли $f(x)$ лимитга эга эканлиги келиб чиқади.

Энди $f^{but}(x) = [f(x)]$, $A_r = \{x \in A : f^{but}(x) = r \}$, $r = 0,1,2,...$ деб оламиз. f^{but} функциянинг A тўпламда интегралланувчи эканлигини кўрсатамиз. $B_s = \bigcup_{r=0}^{s} A_r$ деймиз. B_s да f_n ва f функциялар чегараланган ва ҳар доим $f^{but}(x) \le f(x)$ бўлгани учун 9.1- натижага кўра

$$\int_{B_s} f^{but}(x) d\mu \le \int_{B_s} f(x) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{B_s} f_n(x) d\mu \le K.$$

Иккинчи томондан,

$$\int_{B_s} f^{but}(x) d\mu = \sum_{r=0}^{s} r\mu(A_r) \le K.$$

Бу йиғиндининг чегараланганлиги

$$\sum_{r=0}^{s} r\mu(A_r)$$

қаторнинг яқинлашувчилигини билдиради. Демак,

$$\int_{A} f^{but}(x) d\mu = \sum_{r=0}^{\infty} r\mu(A_r).$$

Шундай қилиб, f^{but} нинг A да интегралланувчи эканлиги исботланди. Δ

Теоремани монотон ўсмайдиган кетма – кетликлар учун ҳам исботлаш мумкин.

2- натижа. Агар $\psi_n(x) \ge 0$ бўлиб,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A} \psi_n(x) d\mu < +\infty$$

бўлса, у ҳолда A тўпламнинг деярли барча нуқталарида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)$$

қатор яқинлашади ва қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин, яъни

$$\int_A\left(\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x)\right)d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_A\psi_n(x)d\mu$$

тенглик ўринли.

3- теорема (Фату). Агар манфиймас, ўлчовли $\{f_n\}$ функциялар кетма – кетлиги A тўпламнинг деярли барча нуқталарида f функцияга яқинлашса ва

$$\int_A f_n(x)d\mu\le K$$

бўлса, у ҳолда f функция A тўпламда интегралланувчи ва

$$\int_A f(x)d\mu\le K$$

тенгсизлик ўринли.

Исбот. $\varphi_n(x)=\inf\limits_{k\ge n} f_k(x)$ деб белгилаймиз. φ_n ўлчовли, чунки

$$\{x:\varphi_n(x)<c\}=\bigcup_{k\ge n}\{x:f_k(x)<c\}.$$

Бундан ташқари $0\le\varphi_n(x)\le f_n(x)$ бўлгани учун φ_n интегралланувчи ва

$$\int_A\varphi_n(x)d\mu\le\int_A f_n(x)d\mu\le K.$$

Ниҳоят, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)\le\ldots\le\varphi_n(x)\le\ldots$ деярли барча x лар учун

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

Шунинг учун 9.2 – теоремани $\{\varphi_n\}$ кетма–кетликка қўллаб, 9.3 – теореманинг исботига эга бўламиз.

3-теорема. Айтайлик A тўпламнинг ўлчови чексиз бўлсин. Чеклита нолмас $y_1,y_2,\ldots,y_n$ қийматларни қабул қилувчи $f:A\to R$ содда функция A да интегралланувчи бўлиши учун $A_k=\{x\in A:f(x)=y_k\},\ k=1,2,\ldots,n$ тўпламларнинг ўлчови чекли бўлиши зарур ва этарли. Хусусан $B \subset A$ тўпламнинг характеристик функцияси - $\chi_B(x)$ интегралланувчи бўлиши учун $\mu(B) < \infty$ бўлиши зарур ва етарли.

1-таъриф. Айтайлик A чексиз ўлчовли тўплам , $f: A \to R$ саноқлита $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ қийматларни қабул қилувчи содда функция бўлсин. Агар ҳар бир нолмас y_k чун $A_k = \{x \in A: f(x) = y_k\}$ тўплам чекли ўлчовли бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu(A_n)$ қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, $f: A \to R$ содда функция A тўпламда Лебег маъносида интегралланувчи дейилади.

Эҳтимоллик ўлчовлар ва уларнинг қўлланиши.

Елементар ҳодисалар фазоси чексиз бўлган умумий ҳолда биз барча ҳодисаларни қараш ўрнига, ҳодисаларнинг алгебралари ёки σ- алгебралари деб аталувчи баъзи синфларинигина қараймиз. Шундай **қилиб,** элементар ҳодисалар фазоси Ω-ихтиёрий тўпламдан иборат ва $\mathcal{A}$ **э** са Ω тўпламнинг қисм тўпламларидан ташкил топган бирорта система бўлсин.

1-таъриф. Агар

1. $\boldsymbol{\Omega} \in \mathcal{A}$;

2°. $A \in \mathcal{A}$ ва $B \in \mathcal{A}$ муносабатдан $A + B \in \mathcal{A}$ экани келиб чиқса;

3. $A \in \mathcal{A}$ муносабатдан $\bar{A} \in \mathcal{A}$ экани келиб чиқса, у ҳолда $\mathcal{A}$ система **алгебра** деб аталади.

2-таъриф. $\mathcal{A}$ - ҳодисалар алгебраси, $P = P(A); A \in \mathcal{A}$ эса $\mathcal{A}$ да аниқланган ва [0;1] тўпламдан қийматлар қабул қиладиган тўплам функцияси бўлсин. Агар $\mathcal{A}$ дан олинган ва биргаликда бажарилмайдиган ихтиёрий $\boldsymbol{A}$ ва $\boldsymbol{B}$ ҳодисалар учун

$$П(А + Б)=П(А) + П(Б)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $\mathcal{A}$ да **чекли аддитив ўлчов** киритилган дейилади. $\boldsymbol{П(\Omega) = 1}$ шартни қаноатлантирувчи чекли аддитив ўлчовга эса $\mathcal{A}$ да аниқланган **чекли аддитив эҳтимоллик ўлчови** дейилади.

Агар $\mathcal{A}$ ҳодисалар алгебраси бўлса, у ҳолда $A \in \mathcal{A}$ **в а** $B \in \mathcal{A}$

ҳодисалар учун $\boldsymbol{A} \cap Б = \overline{\overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}}$ ва $A \backslash B = A \cap \bar{B}$ муносабатларга кўра $\boldsymbol{A} \cap Б \in \mathcal{A}$ ва $A \backslash B \in \mathcal{A}$ эканлиги келиб чиқади. Шу каби 1^0 ва 3^0 шартдан $\emptyset = \bar{\Omega} \in \mathcal{A}$, яни $\emptyset \in \mathcal{A}$ **э** канлиги келиб чиқади.

Ҳодисаларнинг $\mathcal{A}$ алгебраси баъзан ҳодисалар ҳалқаси деб ҳам аталади, чунки $\mathcal{A}$ да ҳалқанинг барча шартларини қаноатлантирувчи иккита алгебраик амал (қў**шиш** ва кўпайтириш: $\cup; \cap$**)** киритилган. Ҳодисаларнинг $\mathcal{A}$ алгебраси, $\mathcal{A} \cap \Omega = \mathcal{A}$ бўлгани учун бирлик ҳалқани ташкил этади.

Алгебра ташкил қилувчи ҳодисалар системасининг “енг кичиги” $\mathcal{A} = \{\emptyset; \Omega\}$еканлиги равшан. Шу билан бирга Ωтўпламнинг барча қисм тўпларнларидан ташкил топган ҳодисалар системаси $\mathcal{M}(\Omega)$ ҳам алгебрадан иборат эканлигини текшириш мумкин.

Агар Ω чекли фазо бўлса, у ҳолда унинг барча қисм тўпламларидан ташкил топган $\mathcal{M}(\Omega)$ система ҳам чекли тўплам бўлади.

1-мисол Тажриба бир жинсли симметрик тангани икки марта ташлашдан иборат бўлсин. У ҳолда элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{gg, gr, rg, rr\}$ 4 та элементдан ташкил топган чекли тўпламдан иборат бўлади ва $\mathcal{M}(\Omega)$ алгебранинг барча ҳодисаларини ёзиб чиқиш мумкин:

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{\emptyset; \{гг\}; \{гр\}; \{рг\}; \{rr\}; \{гг, гр\}; \{гг, рг\}; \{гг, рр\}; \{гр, рг\};$$
$$\{гр, рр\}; \{рг, рр\}; \{гг, гр, рр\}; \{гг, рр, гр\}; \{гг, рр\ , гр\}; \{гр, рг, рр\}; \Omega\}$$

Бу мисолда $\mathcal{M}(\Omega)$ алгебра $2^4 = 16$-та элементар ҳодисалардан ташкил топган. Агар Ω тўплам N та элементдан ташкил топган бўлса, у ҳолда $\mathcal{M}(\Omega)$ тўплам 2^N т а элементдан иборат. Ҳақиқатан ҳам 0 ва 1 лардан ташкил топган узунликлари N га тенг бўлган кетма-кетликларнинг сони 2^H га тенг ва бундай кетма-кетликлар билан $\mathcal{M}(\Omega)$ орасида ўзаро бирқийматлик мослик ўрнатиш мумкин ($2^N = C_N^0 + C_N^1 + ... + C_N^N$).

3-таъриф. Агар Ω тўпламнинг қисм тўпламларидан ташкил топган ҳодисаларнинг $\mathcal{A}$ -алгебрасида (2° шарт ўрнида):

2^*. $A_n \in \mathcal{A}; n = 1, 2, ...$ **д а н** $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ эканлиги келиб чиқса, у ҳолда $\mathcal{A}$ **-алгебра** ёки **Борел алгебраси** дейилади. Ω фазо ва унинг қисм түп- ламларидан ташкил топган $\mathcal{A}$ σ-алгебра биргаликда **ўлчовли фазо** деб аталади ва $(\Omega, \mathcal{A})$ орқали белгиланади.

2-мисол. 1) $\Omega = R = (-\infty; +\infty)$ сонли тўғри чизиқ бўлсин. $\mathcal{F}_0$ орқали чекли ёки чексиз кесмалардан, интерваллар ва ярим интерваллардан ташкил топган тўпламлар системасини белгилаймиз. $\mathcal{F}_0$ алгебра ташкил қилмайди. Масалан, $A = (-\infty;\ -1)$ ва $B = (1; +\infty)$ тўпламлар йиғиндиси $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ тўплам $\mathcal{F}_0$ системага кирмайди. Агар $\mathcal{F}_0$ ни, ундан олинган тўпламларнинг барча чекли йиғиндилари билан тўлдирсак, у ҳолда ҳосил бўлган янги тўпламлар системаси $\mathcal{F}$ алгебрани ташкил қилади.

$\mathcal{F}$ алгебрани ўз ичига олган барча -алгебралани қараймиз. $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ ва $\mathcal{M}(\Omega)$ σ -алгебрани ташкил қилгани сабабли, $\mathcal{F}$ алгебрани ўз ичига олган камида битта σ-алгебра мавжуд. Бундай σ - алгебраларнинг кесишмаси (яъни σ -алгебраларнинг барчасига тегишли бўлган тўпламлар синфи) яна σ - алгебрани ташкил қилади. Бу барча интервалларни ўз ичига олган минимал σ -алгебра бўлиб, **Борел σ - алгебраси дейилади** ва $\mathcal{B} = \mathcal{B}(R)$ орқали белгиланади.

4-таъриф. Бизга $(\Omega, \mathcal{A})$-ўлчовли фазо берилган бўлсин. Агар $\mathcal{A}$ σ - алгебрада аниқланган *П* сонли функция учун қуйидаги аксиомалар ўринли бўлса:

К1. Исталган $A \in \mathcal{A}$ учун $P(A) \geq 0$ (***П*** нинг номанфийлиги);

К2. $P(\Omega) = 1$ (*П* нинг нормаланганлиги);

К3. Жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ҳодисалар кетма-кетлиги учун

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad (П \text{ нинг саноқли аддитивлиги}),$$

у ҳолда $\mathcal{A}$ σ -алгебрада ***П*** эҳтимоллик ўлчови ёки эҳтимол киритилган дейилади.

$(\Omega, \mathcal{A}, \Pi)$ учликка эҳтимоллар фазоси ёки эҳтимоллик модели дейилади, бу ерда $\mathcal{A}$ ҳодисаларнинг σ -алгебраси, *П* $\mathcal{A}$ да аниқланган эҳтимол, $P(A)(A \in \mathcal{A})$ сонга A ҳодисанинг эҳтимоли дейилади.

Демак, эҳтимоллик моделини яратиш ўлчовли фазода манфий бўлмаган, саноқли аддитив Ω фазонинг ўлчови 1 бўлган ўлчов киритишдан иборат экан.

Еҳтимоллар назариясининг, юқорида киритилган, аксиоматикасини А.Н.Колмогоров таклиф қилган. Кл, К2, К3 аксиомалар системаси, уларни қаноатлантирувчи реал обектлар мавжуд бўлгани сабабли ўзаро зид эмас

Назорат саволлари:

1. $A \subset R$ ихтиёрий мусбат ўлчовли тўплам бўлсин, у ҳолда шундай $x, y \in A$ мавжудки $x - y \in Q$ бўлади. Исботланг.

2. R даги нол ўлчовли тўпламлар системаси σ - ҳалқа бўлишини исботланг.

3. Ўлчовли тўпламлар системаси $U(R)$ ҳалқа ташкил қилади. Исботланг.

4. Чекли сондаги ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмаси яна ўлчовли тўпламдир. Исботланг.

3 – мавзу. Инвариант ўлчовлар.

Режа:

1. Инвариант ўлчовлар.
2. Эргодик теоремалар.
3. Гиббс ўлчовлари (физикада қўлланиши).

Таянч иборалар: ўлчов, чекли ўлчов, Инвариант ўлчов, Гиббс ўлчов.

Берилган модел учун топиладиган Гиббс ўлчовлари сонини топишда алгебранинг асосий теоремасидан фойдаланилади. Шу мақсадда, ушбу бобда алгебранинг асосий теоремасини баён этамиз.

1.-теорема: Даражаси бирдан кичик бўлмаган ҳақиқий коеффитсиентли ҳар қандай кўпҳад камида битта комплекс илдизга эга.

Исбот: Тоқ даражали кўпҳад илдизга эга эканлигидан фақат теорема учун кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, н- даражали ф(х) кўпҳад берилган бўлиб, унда $n = 2^k * m$ бўлсин ($k \geq o, m$-тоқ сон). Исботнига нисбатан индуксия асосида олиб борамиз. $m = 1$ вабўлса, $n = 1$ бўлиб, теорема чин.

Енди теоремани даражаси 2^{k-1} $(k > 0)$ га бўлиниб,2^kга бўлинмайдиган барча ҳақиқий коеффитсиентли кўпҳадлар учун тўғри деб фараз қиламиз.

Ҳар қандай кўпҳад учун ёйилма майдон мавжуд эди. Шунга кўра бирор P майдонни $f(x)$ кўпҳадни комплекс сонлар майдони устидаги ёйилма майдони деб оламиз.$f(x)$ кўпҳад ёйилма майдонда n та α_i илдизга эга бўлганидан $\alpha_i \in P \quad (i = \overline{1,n})$ бўлади..Енди P майдоннинг элементлари ва $\forall$ $\boldsymbol{c}$ ҳақиқий сондан фойдаланиб,

$$\beta_{i,j} = \alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i + \alpha_j)$$

кўринишда тузилган элементларни қараймиз. Ўз-ўзидан маълумки,$\beta_{i,j} \in P$ ларнинг сони n та элементдан иккитадан группалашлар сонига, я`ни

$$n(n-1)/2$$

га тенгдир.

Иккинчи томондан

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^k*m(2^k*m-1)}{2} = 2^{k-1} * m(2^k * m - 1) = 2^{k-1} * q` \quad (1)$$

Бу ерда м ва $2^k m - 1$ лар тоқ сон бўлганидан

$$q^` = m(2^k m - 1)$$

ҳам тоқ сондир. Энди илдизлари фақат $\beta_{i,j}$ лардан иборат бўлган ва $P[x]$ ҳалқага тегишли

$$G(x) = \prod_{1=i<j=2}^{\frac{n(n-1)}{2}} (x - \beta_{i,j}) \quad (2)$$

кўпҳадни тузиб оламиз. Бу кўпҳаднинг коеффитсиентлари $\beta_{i,j}$ лардан тузилган элементлар симметрик кўпҳадлардан иборат бўлади.Агар $\beta_{i,j}$ ларни алмаштирсакнинг коеффисиентлари ҳам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \alpha_n$ ларга боғлиқ бўлган симметрик кўпҳадлар бўлиб бу симметрик кўпҳадларнинг коеффитсиентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлади. г(х) нинг коеффитсиентлари ҳам ҳақиқийсонлар бўлади. г(х) кўпҳаднинг даражаси бу $\beta_{i,j}$ илдизлар сонига тенг бўлгани учун ва (2) га асосан бу даража 2^{k-1} га бўлиниб,2^kга бўлинмайди.Индуктив фаразимизга асосан $g(x)$ нинг $\beta_{i,j}, (i < j)$

илдизларидан камида биттаси комплекс сон бўлади.

Демак,

$$\beta_{i,j} = \alpha_i\alpha_j + c(\alpha_i+\alpha_j)$$

елементлар учун шундай бир жуфт $(i_1 j_1)$ номер мавжуд эканки, бу номерларга мос келувчи $\beta_{i,j}$ комплекс сонлар бўлар экан.

Агар $c \neq c_1$ ҳақиқий сонни оладиган бўлсак, унга мос келувчи $(i_{2,}j_2)$ номерлар ҳам $(i_{1,}j_1)$ билан устма – уст тушмайди.

Демак,шундай ўзаро ҳар хил (c_1дан c_2)ҳақиқий сонлар мавжудки буларга бир хил (i,j) жуфтлар мос келади, яъни

$$\begin{cases} \alpha_i\alpha_j + c_1(\alpha_i + \alpha_j) = a \\ \alpha_i\alpha_j + c_2(\alpha_i + \alpha_j) = b \end{cases} \qquad (3)$$

бўлиб a ва b лар комплекс сонлардир.

Асосий теореманинг натижалари.

1- натижа. Комплекс сонлар майдони устида н-даражали кўпҳаднинг роса n та илдизи бор.

2-натижа. n даражали $f(x)$ кўпҳад x нинг n тадан ортиқ ҳар хил қийматларида нолга тенг бўлса, у ҳолда кўпҳад $f(x)$ нол кўпҳад бўлади.

3-натижа. Даражалари n дан юқори бўлмаган икки $f(x)$ ва $\varphi(x)$ кўпҳад x нинг n тадан ортиқ ҳар хил қийматларида бир-бирига тенг бўлса,$f(x)$ ва $\varphi(x)$ ўзаро тенг кўпҳадлар бўлади.

1-таъриф. X ихтиёрий тўплам ва унинг қисм тўпламларидан тузилган бирор E тўпламлар алгебраси берилган бўлсин. Аниқланиш соҳаси э бўлган м(А) тўплам функцияси учун:

- ихтиёрий $A \in E$ учун $m(A) \geq 0$;
- $m(A)$ саноқли-аддитив.

шартлари бажарилса, m тўплам функцияси X да чекли ўлчов дейилади.

Демак, ўлчов деганда қийматлари чекли ва мусбат бўлган саноқли-аддитив тўплам функциясини тушунар эканмиз.

Қулайлик учун келгусида "чекли ўлчов" ўрнига, оддий қилиб, ўлчов сўзи ишлатилади.

Ўлчовларнинг ба`зи хоссаларини кўриб ўтайлик.

1) Бўш тўпламнинг ўлчови нолга тенг $m(\emptyset) = 0$

2) Агар A ва B тўпламлар E нинг элементлари бўлиб, $B \subset A$ Бўлса, у ҳолда $m(B) \leq m(A)$ бўлади (ўлчовнинг монотонлик хоссаси).

$m(A) - m(B) = m(A \backslash B) \geq 0.$

3) Ҳар бир A учун $m(A) \leq m(X)$ ўринли. Бу 2) дан келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган ўлчов тўпламлар алгебраси E да чегараланган экан.

4) Агар э нинг ихтиёрий A элементи учун

$A \subset \bigcup_i A_i$

бўлиб, бу ердаги қўшилувчиларнинг сони чекли ёки саноқли бўлса, у ҳолда тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу хоссани исботлаш учун хар бир A_i тўпламдан A_i қисм тўпламларни қуйидагича ажратиб оламиз

$$B_1 = A_1 \cap A, \quad B_2 = (A_2 \setminus A_1) \cap A\,,$$

$$B_3 = [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \cap A, \ldots$$

Кўриниб турибдики, B_i лар E нинг элементи ва ўзаро кесишмайди.Қолаверса, $A \supset \cup B_i$ энди A тўплам $\cup B_i$ бирлашмага текшириш қолди.Агар $x \in A$ бўлса у ҳолда шундай бир номери топиладики шартга кўра $x \in A_i$ бўлади. Агар x бир нечта A_jларга тегишли бўлиб қолса у холда бу индекслардан энг кичиги i бўлсин деймиз.Бундан $x \in B_i$ бўлади ва керакли муносабат келиб чиқади.

энди ўлчовнинг саноқли –аддитивлигини ва монотонлигини эътиборга олсак ,

$$m(A) = \sum_i m(B_i) \leq \sum_i m(A_i)$$

бўлади. Ўлчовнинг узлуксизлиги исботланади.

Қуйидагича белгилашлар қилиб оламиз, ихтиёрий фиксирланган $x^0 \in V$ нуқта учун бу ерда $d(x,y)$ - $\Im^k$ дарахтнинг x ва y учлари орасидаги масофа, яъни x ва y учларни туташтирувчи йўлдаги (енг қисқа йўлдаги) қирралар сонидир. Фараз қилайлик, $\Phi=\{-1,1\}$ ва $\sigma\in\Omega=\Phi^V$ –конфигуратсия, яъни $\sigma=\{\sigma(x)\in\Phi : x\in V\}$ ҳамда $A\subset V$ бўлсин. Ω_A билан A тўпламда аниқланган ва $\Phi=\{-1,1\}$ тўпламдан қиймат қабул қилувчи барча конфигуратсиялар фазосини белгилаймиз.

Изинг модели Гамилтонианини қараймиз, у қуйидагича бўлиши бизга маълум эди:

$$H(\sigma)=-J\sum_{<x,y>\in L}\xi_{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{4}$$

бу ерда, $J\in R$, $<x,y>$ -енг яқин қўшнилар.

Фараз қилайлик, $h_x\in R,\ x\in V$ бўлсин. Ҳар бир n учун μ_n ўлчовни Ω_{V_n} да қуйидагича аниқлаймиз :

$$\mu_n(\sigma_n)=Z_n^{-1}\exp\{-\beta H(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_x\sigma(x)\}, \tag{5}$$

бу ерда $\beta=\frac{1}{T}$ ($T>0$ - температура), $\sigma_n=\{\sigma(x),\ x\in V_n\}\in\Omega_{V_n}$, Z_n^{-1} эса нормаллаштирувчи кўпайтувчи.

$$H(\sigma_n)=-J\sum_{<x.y>\in L_n}\xi_{\sigma_n(x)\sigma_n(y)}\ .$$

$\mu_n(\sigma_n)$, $n\geq 1$, ўлчов учун мувофиқлик шарти қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$\sum_{\sigma^{(n)}}\mu_n\left(\sigma_{n-1},\sigma^{(n)}\right)=\mu_{n-1}(\sigma_{n-1})\ , \tag{6}$$

бу ерда $\sigma^{(n)}=\{\sigma(x),x\in W_n\}$.

Фараз қилайлик, $\mu_n, n\geq 1$ лар Ω_{V_n} даги ўлчовлар кетма-кетлиги бўлсин ҳамда бу кетма-кетлик (6) мувофиқлик шартини бажарсин. У ҳолда Колмогоров теоремасига кўра $\Omega_V=\Omega$ да аниқланган лимит ўлчов мавжуд ва у ягона бўлади, (Уни лимит Гиббс ўлчови деб аталади) бу ўлчов, ҳар бир $n=1,2,...$ учун қуйидаги тенгликни қаноатлантиради:

$$\mu(\sigma_n)=\mu_n(\sigma_n)\ .$$

Гиббс ўлчовларига оид илмий мақолалар ва рисолалардан бизга маълумки, (5) ўлчов (6) шартни фақат ва фақатгина бажарадики, бунда қуйидаги $h=\{h_x, x\in G_k\}$ қийматлар ушбу тенгликни бажаради

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} f\left(h_y,\theta\right), \qquad (7)$$

бу ерда $S(x)$ -тўплам $x\in V$ нуқтанинг «бевосита авлодлари» тўплами ва $f(x,\theta)=arcth(\theta\, th\, x),\ \theta=th(J\beta),\ \beta=\frac{1}{T},\ T>0$ температура.

Худди шунга ўхшаш ғояларни қуйидаги моделлар учун ҳам келтириш мумкин.

1) Кели дарахтида ўзаро таъсири 2 га тенг бўлган Поттс моделининг Гамилтоняни қуйидаги кўринишда ифодаланади

$$H(\sigma)=J_1\sum_{\substack{<x,y>\\ x,y\in V}}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}+J_2\sum_{\substack{x,y\in V\\ d(x,y)=2}}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

бу ерда

$$Ж_1,\ Ж_2\in P \text{ ва } \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}=\begin{cases}1, & \sigma(x)=\sigma(y)\\ 0, & \sigma(x)\neq\sigma(y)\end{cases}$$

$\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$ -Кроникер символи дейилади.

Поттс модели учун топилган асосий ҳолатлар Розиков ва Ботировлар томонидан Тхрорй Матҳематисал Пҳйсисс номли жоурналда нашр этилган. Бу мақолада иккинчи тартибли Кели дарахтида аниқланган спин қиймати учга тенг бўлган Поттс модели учун асосий ҳолатлар ва уларнинг сонлари топилган.

Розиқов томонидан Кроникер символининг умумлашмаси қуйидаги функция кўринишида киритилган.

$$U(\tau a):\Omega a\to\{|A|-1,|A|-2,....|A|-\min\{|A|,|\Phi|\}\}$$

бу қуйидагича ифодаланади:

$$\mathrm{V}\ (\tau a\ )=|A|-|\tau a\cap\phi|-\tau(x), x\ni A$$

Масалан, агар G_A ўзгармас конфигуратсия бўлса у ҳолда $|\tau A\cap\Phi|=1$ бўлади.

Шуни таъкидлаш лозимки агар $|A|=2$ бўлиб $A=\{x,y\}$ бўлса, у ҳолда:

$U(\{\tau(x),\tau(y)\}) = \sqrt{\tau(x)\tau(y)}$ бу ерда (a) – a нинг бутун қисми.

$$\sqrt{\tau(x)\tau(y)} = \begin{cases} 1, \tau(x)=\tau(y) \\ 0, \tau(x)\neq\tau(y) \end{cases}$$

$r \ni N$ ва $r^1 = \left[\frac{r+1}{2}\right]$ бўлсин бу ерда (a) – a нинг бутун қисми. μ_r билан

барча

$(x) = \{y \ni V : d(x,y) \le r^1\}$ радиуси r^1 бўлган барча шарлар тўпламини белгилаймиз, яъни

$\mu_r = \{br(x) : x \ni V\}$

Розиқов томонидан қуйидаги гамилтаниан киритилган:

$H(T) = -J \sum_{b \ni Mr} V(\tau b)$ бу ерда $J \in R$

Бу модел учун Кели дарахтининг асосий ҳолатлари ва уларнинг сони топилган ҳамда Ботиров томонидан Матҳематисал Нотес номли журналда натижалар нашр этилган.

2) қ- компонентли модел. Бу моделнинг Гамилтаниан я`ни қуйидагича аниқланади

$$H(G) = \sum_{<x,y>eL} \lambda(G(x)G(y)) + \sum_{xev} h(G(x))$$

бу ерда, $\lambda(V_i,V_j) = \lambda_{ij}$, *и, ж=1,2,*

қ- эса конфигуратсиянинг қабул қиладиган спин қийматлари:

$$q * q, h(Vj) \in R, \quad ж=1,2,....,қ$$

ва ($\tau \in \Omega$) симметрик матритсани ташкил қилади. Ω - барча конфигуратсиялар тўплами.

Бу модел учун Розиков ва Ботировларнинг олинган натижалари 2007 йилда Жоурнал Статистисал Мечанисс: Тҳеорй анд эхпремент номли журналда нашр этилган.

3) 2- ўлчовли назария квант майдонида панжарали модел $d = 2$ бўлсин. Ҳ-қадам билан Z^2 панжарани қараймиз. Мо Ганс статсионар тақсимотига мос келувчи гамилтаниан қуйидагича аниқланади.

$$\frac{1}{2}\sum_{ч}\left[\left(\vartheta(x_1+h,x_2)-\vartheta(x_2,x_2+h)-\vartheta(x_2,x_2)\ \right)^2+m^2{}_0h^2\vartheta^2(x_1,x_2)\right]$$

$X=(x_1,x_2)$ бу ерда $h\in Z^2$ дан олинган нуқта.

Кели дарахтида спин қийматлари $\tau(x)x\ э\ V$ Ф=$\{\pm1,\pm2,...,\pm q\ \}$ тўплам элементлари қабул қилувчи λ моделларнинг гамилтаниани қуйидагича аниқланади.

Ҳ (Т)=Ҳ$\lambda(\tau)=\sum\limits_{<x,y>эL}\lambda(\tau(x),\tau(y),J)$ бу ерда Ж$\in R^n, n\in N$

барча ён қўшнилар билан жамланувчидир.

Бу модел учун, М. Ракҳматуллаев томонидан кучсиз асосий ҳолатлар тушунчаси киритилган ва олинган натижалар Тҳеорй Матҳематисал Пҳйсисс номли журналда нашр этилган.

4) 2- ўлчовли панжарада Изинг модели қуйидагича аниқланади:

Ҳ$_0$=Ж $\sum\limits_{At-t^v11=1}\vartheta(t^1)\vartheta(t)=\pm1,t^1,t^{11}\ э\ z^2$

Агар $J>0$ бўлса феррамагнит ҳолати бўлади, бу ерда 2 та даврий $\vartheta^+=\{\vartheta(t)=1\ \},\ \vartheta=\{\vartheta(t)=-1\ \}$асосий ҳолат бўлади. Кели дарахтининг бирлик шарида энергиясини ҳисоблаш:

$$\sqrt{\tau(x)\tau(y)=\begin{cases}1, agar\,\tau(x=\tau(y)\\0, agar\,\tau(x)\pm\tau(y)\end{cases}}.$$

Назорат саволлари:

1. Кели дарахтида ўзаро таъсири 2 га тенг бўлган Поттс моделининг Гамилтоняни кўринишини айтинг.
2. қ- компонентли моделини кўринишини айтинг.
3. Мо Ганс стационар тақсимотини айтинг

4 – мавзу. Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.

Режа:

1. Биологик динамик ситемаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.

2. Биологик динамик ситемалар устидаги ўлчовларга мисоллар.

Таянч иборалар: компакт, σ- компакт , топологик фазо, ўлчов, μ(ф) интеграл Риман йиғиндиси.

Ноархимед қийматли ўлчовга нисбатан интеграллашнинг Монна-Спрингер назарияси.

X орқали нол ўлчамли лосал компакт σ- компакт топологик фазони, $\Delta(x)$ орқали X тўпламнинг компакт очиқ қисм тўпламлари ҳалқсини, $c_c(x)$ орқали эса компакт ташувчили $f: X \to K$ узлуксиз функциялар фазосини белгилаймиз. Бу фазода текис нормани

$$\|f\| = \max_{x\in X} |f(x)|_K \qquad (1)$$

каби киритамиз.

1-таъриф. Агар К-чизиқли $\mu: C_c(x) \to K$ функсионал учун $\forall A \in \Delta(x)$ учун шундай $M_A \geq 0$ сони топилиб, $\mathrm{suppf} \subset A$ бўладиган барча $f \in C_c(x)$ лар учун

$$|\mu(f)|_K \leq M_A \|f\| \qquad (2)$$

тенгсизлик бажарилса, μ га ўлчов дейилади.

2-таъриф. Агар шундай ўзгармас $M \geq 0$ сони топилиб,

$$|\mu(f)|_K \leq M\|f\|, \quad f \in C_c(x) \qquad (3)$$

тенгсизлик ўринли бўлса,ўлчовга чегараланган дейилади.

Чегараланган μ ўлчовнинг нормаси $C^{'} f(x)$ иккили фазосидаги элементнинг нормаси каби аниқланади:

$$\|\mu\| = \sup_{f\neq 0} \|f\|^{-1} |\mu(f)|_K \qquad (4)$$

Исталган $B \subset X$ қисм тўплам учун Б тўпламнинг характеристик функцияси Φ_B орқали белгиланади. Агар $B \in \Delta(x)$, у ҳолда $\Phi_B \in C_c(x)$. Ҳар бир μ ўлчов $\mu: \Delta(x) \to K, \mu(A) = \mu(\Phi_A)$ тўплам функциясини аниқлайди.

1-теорема. Фараз қилайлик Ф-Х топология базаси бўлиб, компакт очиқ қисм тўпламлардан ташкил топган бўлсин ва $\mu : F \to K$ қуйидаги шартларни қаноатлантиради.

1.Фараз қилайлик $A_1,....,A_k \in F, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$ ва $A = \bigcup_{j=1}^{k} A_i \in F.$ (5) бўлсин.

У ҳолда
$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \qquad (6)$$

2.Фараз қилайлик $\{A\}, A \in F$ -фиксирланган $B \in \Delta(x)$ тўпламнинг қисм тўпламлари тўплами бўлсин. У ҳолда $\{|\mu(A)|_K\}$-Кда чегараланган бўлади. У ҳолда μ тўплам функциясини $C_c(x)$ ўлчовгача давом эттириш мумкин. Аксинча, ҳар бир μ ўлчов 1 ва 2 шартларни қаноатлантиради. 1 ва 2 шартларни қаноатлантирувчи $\mu : F \to K$ функция учун μ(ф) интеграл Риман йиғиндисининг лимити сифатида аниқланади, яъни

$$S_u(f) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i)\mu(A_i), \qquad (7)$$

бу ерда $u = (U, a_1,..., a_k), U = (A)_{i=1}^{k} - B = \sup pf$ тўпламнинг қопламаси, $A_i \in F, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, a_j \in A_j$.

$C_c(x)$фазода ҳақиқий қийматли N_f функцияни киритамиз:

$$N_\mu(f) = \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(fg)|_K, g \in C_c(X) \qquad (8)$$

Бу $C_c(x)$даги ноархимед ярим нормаси бўлиб,қуйидаги хоссаларга эга:

а)$|\mu(f)|_K \leq N_\mu(f)$;

б)$N_\mu(fg) \leq N_\mu(f)\|g\|$ (Телдер тенгсизлиги).

Агар $U_i \cap U_j = \varnothing, i \neq j, U_i \in \Delta(x)$ бўлса, $U = (U_i) - X$ учун қоплама дейилади. $f \in C_c(x)$ учун

$$N_\mu(f, U) = \sup_i \left(\sup_{x \in U_i} |f(x)| N_\mu(\phi u_i) \right) \qquad (9)$$

деб оламиз. У ҳолда $N_\mu(f) = \inf_U N_\mu(f, U).$ (10)

$x \in X$ учун $\boldsymbol{N_\mu(x) = \inf N_\mu(\Phi_U)}$ деб оламиз,бу ерда $\{U\}$-х нуқтанинг компакт очиқ атрофлари системаси.

2-теорема. $f \in C_c(x)$ бўлсин. У ҳолда

$$N_\mu(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|_K N_\mu(x). \qquad (11)$$

$\forall \alpha > 0$ учун

$$X_\alpha = \{x \in X : N_\mu(x) \geq \alpha\}, X_+ = \cup_{\alpha > 0} X_\alpha$$

$$X_0 = \{x \in X : N_\mu(x) \geq 0\}, X = X_+ \cup X_0. \qquad (12)$$

ни ҳосил қиламиз. (1) дан фойдаланиб, $\forall f : X \to K$ функция учун $N_\mu(f)$ ни аниқлаш мумкин, хусусан, $N_\mu(x) = N_\mu(\varPhi\{x\})$.

3-таъриф. Агар $N_\mu(f) = 0$ бўлса, ф функция μ-еътиборсиз дейилади.

1-тасдиқ. ф функция μ-еътиборсиз бўлиши учун исталган x, $f(x) \neq 0$ учун $N_\mu(f) = 0$ бўлиши зарур ва етарли.

4-таъриф. Агар (ф-г) функция μ-еътиборсиз бўлса , ф ва г функциялар эквивалент дейилади.

$F(\mu)$ орқали $N_\mu(f) < \infty$ бўладиган μ-еквивалент ф функцияларнинг фазосини белгилаймиз.

5-таъриф. μ ўлчовга нисбатан инегралланувчи функцияларнинг $L^1(x,\mu)$ синфи $F(\mu)$ да $c_c(x)$ фазонинг ёпиғи сифатида аниқланади.

2-тасдиқ. $f \in L^1(x,\mu)$ бўлсин. У ҳолда ф функциянинг исталган X_α тўпламдаги қисқартмаси узлуксиз бўлади.

6-таъриф. Агар қуйидаги шартлар бажарилса, $f : X \to K$ функция N_μ га нисбатан абсолют узлуксиз дейилади:

а) $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сони топилиб, $N_\mu(\varPhi_U) < \delta, U \in \Delta(x)$ лар учун $N_\mu(f\varPhi_U) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади;

б) $\lim_V N_\mu(f\varPhi_U) = 0$, бу ерда В-Х тўпламнинг компакт қисм тўпламлари тўлдирувчиси бўладиган тўпламлар филтри.

3-теорема. $f : X \to K$ функция интегралланувчи бўлиши учун

а) функциянинг исталган X_α, α даги қисми узлуксиз

б) ф функция N_μ га нисбатан узлуксиз бўлиши зарур ва етарли.

3-тасдиқ. $f \in L^1(x,\mu)$ бўлсин. У ҳолда

$$N_\mu(f) = \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(f,g)|_K, g \in C_C(x) \qquad (13)$$

$\overline{A}$ орқали X тўпламниг A қисм тўпламининг тўлдирувчиси белгиланган, $\overline{A} = A \setminus A$.

7-таъриф. Агар исталган $B \subset K$ компакт ва $\forall \varepsilon > 0$ сони учун шундай $B_1 \subset B$ компакт тъплам топилиб, $N_\mu(B \subset \overline{B_1}) < \varepsilon$ ва ф функциянинг B_1 даги қисми узлуксиз бўлса,у ҳолда $f : X \to K$ функция μ-ўлчовли дейилади.

4-тасдиқ. $f : X \to K$ функция μ-ўлчовли бўлиши учун $\forall \alpha > 0$ учун ф функциянинг X_α даги қисми узлуксиз бўлиши зарур ва етарли.

8-таъриф. Агар $\forall B$ компакт тўплам ва $\forall \varepsilon > 0$ Учун Б компакт тўпламнинг B_1 компакт қисм тўлами топилиб $N_\mu(B \subset \overline{B_1}) < \varepsilon$ ва $\{f_n\}$ кетма-кетлик B_1 да текис яқинлашувчи бўлса,Хда μ-ўлчовли бўлган $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлиги Егоров бўйича яқинлашувчи дейилади.

5-тасдиқ. Агар $\{f_n\}$ кетма-кетлик исталган $X_\alpha, \alpha > 0$ да текис яқинлашувчи бўлса, $\{f_n\}$ кетма-кетлик Егоров бўйича яқинлашувчи бўлади.

4-теорема. *(Монна-Спрингер интеграли учун лимит теоремаси).* $\{f_n\}$- Егоров бўйича яқинлашувчи интегралланувчи функциялар кетма-кетлиги бўлсин. Фараз қилайлик шундай г интегралланувчи г функция топилиб, барча $x \in X$ ларда $|f_n(x)|_K \leq |g(x)|_K$ бўлсин. У ҳолда ф лимитик функция интегралланувчи ва $\mu(f) = \lim_{n \to \infty} \mu(f_n)$.

X даги μ ва Йдаги ν ўлчовларнинг $\mu \otimes \nu$ -тўғри кўпайтмасини

$$N_{\mu \otimes \nu}(x,y) = N_\mu(x) N_\nu(y). \qquad (3)$$

каби аниқлаймиз.

Монна-Спрингер назариясида Радон-Никодим теоремасининг аналоги ёқ.

Биз кўпинча Q_p да аниқланган ва қийматлари Q_q да бўлган Хаар ўлчови мавжуд деб ҳисоблаймиз, бу ерда $p \neq q$. Бу ўлчов $\mu(Z_p) = 1$ шарт бўйича ягонадир. Бу ҳолда $N_\mu(x)$ функция c=1 ўзгармасга тенг ва L^1 фазо C_C фазо билан устма-уст тушади

Чексизда камаювчи ўлчовлар.

Биз Q_p-қийматли эҳтимоллик ўлчовини аниқламоқчимиз. Бизни σ-аддитивлик шартининг П-адик аналоги қизиқтиради.

μ ўлчовга қўйиладиган 1-шарт-бу чегараланганлик шартидир.

1-теорема. μ ўлчов чегараланган бўлиши учун N_μ функция Х да чегараланган ва $\|\mu\| = \sup N_\mu(x).$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. μ чегараланган бўлсин ,{У} эса х нуқтанинг ёпиқ-очиқ айрофлари системаси бўлсин. У ҳолда

$$N_\mu(x) = \inf_U \sup_{g\neq 0}\|g\|^{-1}|\mu(g\phi_U)|_K \le \|\mu\|\sup_{g\neq 0}\|g\|^{-1}\|g\phi_U\| \le \|\mu\|.$$

Иккинчи томондан, $\forall f \in C_C(x)$ учун

$$|\mu(f)|_K \le N_\mu(f) = \sup_x |f(x)|_K N_\mu(x) \le \sup_x N_\mu(x)\|f\|.$$

Q_p қийматли эҳтимоллик ўлчовини аниқлаш учун қуйидаги шартдан фойдаланамиз. Татбиқ учун бизга нафақат $\Delta(x)$ даги,балки барча ёпиқ-очиқ қисм тўпламлар алгебрасидаги ўлчов керак бўлади.

2-таъриф. Агар $\forall\varepsilon > 0$ учун шундай $U_\varepsilon \in \Delta(x)$ топилиб,

$$\sup\{N_\mu(x) : x \in \overline{U_\varepsilon}\} < \varepsilon$$

бўлса, μ ўлчов чексизда камаювчи дейилади.

1-теоремага кўра камаювчи μ ўлчов чегаралангандир.

1-мисол. Х=К=Q_p, $\{x_n = p^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ ва $\mu(\{x_n\}) = 1, n = 0,1,....$ бўлсин. У ҳолда μ чегараланган, лекин эмас.

Х фазонинг ёпиқ очиқ тўпламлари алгебрасини Ф(х) билан белгилаймиз.

2-теорема. μ камаювчи ўлчов бўлсин. У ҳолда $\forall A \in \Phi(x)$ тўплам камаювчи бўлади.

Исботи. $N_\mu(\Phi_A - G_n) \to 0$ бўладиган $g_n \in C_C(x)$ кетма-кетликни қуришимиз керак. $\{B_n\}-\Delta(x)$ даги қисм тўпламлар кетма-кетлиги бўлиб, $\sup\{N_\mu(x): x\in B_n\}<1/n$ бўлсин. Бундан ташқари,

$$N_\mu\left(\phi_A-\phi_{C_n}\right)=\sup_{x\in X}\left|\phi_A(x)-\phi_{C_n}(x)\right|_K N_\mu(x)<1/n.$$

Хусусан,бу теоремани қўллаб X фазо жамланувчи эканлигини ҳосил қиламиз.

μ камаювчи ўлчовни Ф(х) алгебрага чекли аддитивлик ва чегараланганлик хоссаларини сақлаган ҳолда давом эттириш мумкин: $\forall A\in\Phi(x)$ учун

$$\sup\{|\mu(B)|_K : B\subset A, B\in\Delta(X)\}<\infty.$$

Бу тасдиқни исботлаш учун

$$|\mu(B)|_K = N_\mu(\phi_B)=\sup_x \phi_B(x)N_\mu(x)\le\|\mu\|.$$

еканлигини кўрсатиш керак.

$\forall A\in\Phi(x)$ учун шундай $(C_n), C_n\in\Delta(x)$ кетма-кетлик топилиб, $\mu(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(C_n)$ бўлади.

Узлуксиз чегараланаган $f: X\to K$ гунксиялар фазосини $C_b(x)$ билан белгилаймиз. Бу фазо $\|\cdot\|$ текис норма билан тасдиқланади.

1-тасдиқ. μ камаювчи ўлчов бўлсин. У ҳолда $\forall f\in C_b(X)$ функция учун $f\in L^1(X,\mu)$ элемент мос келади ва

$$|\mu(f)|_K\le N_\mu(f)\le\|f\|\|\mu\|.$$

тенгсизлик бажарилади.

Исботи. Фараз қилайлик (B_n)-2.2.2-теоремада айтилган кетма-кетлик бўлсин.

У ҳолда $$N_\mu(f-f\phi_{B_n})\le\sup_{x\in B_n}|f(x)|_K N_\mu(x)\le\|f\|/n.$$

2-тасдиқ. μ ўлчов камаювчи бўлиши учун X_α тўплам $\forall\alpha>0$ учун компакт бўлиши зарур ва етарли.

Исботи. 1. X_α тўплам ёпиқ-очиқдир. μ ўлчов камаювчи бўлгани учун шундай $U_\alpha \in \Delta(x)$ топилиб,барча $x \in \overline{U_\alpha}$ ларда $N_\mu(x) < \alpha$ бўлади. Шу сабабли, $X_\alpha \subset U_\alpha$.

2. Энди аксинча барча $X_\alpha + \forall\alpha > 0$ учун компакт бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x \in X_\alpha$ нуқта учун У(х) ёпиқ-очиқ атроф мавжуд бўлади. Бундай атрофлар системаси X_α компакт қисм тўпламнинг очиқ қопламаси бўлади. $\left(U\left(x_j\right)\right)_{j=1}^n$ чекли қисм қоплама мавжуд. $G_j = \bigcup_{j=1}^n U(x_j)$ ни ҳосил қиламиз. Бу тўплам $\Delta(x)$ га тегишли,лекин

$$\sup\left\{N_\mu(x) : x \in \overline{G_a}\right\} \le \sup\left\{N_\mu(x) : x \in \overline{X_\alpha}\right\} < \alpha.$$

Функциялар ва ўлчовларнинг кўпайтмаси.

μ-X даги $\forall$ ўлчов бўлиб , $f \in L^1(X,\mu)$ бўлсин. Барча $g \in C_c(x)$ учун $\nu = f\mu, \nu(g) = \mu(fg)$ функционални қараймиз. Бунда

$$|\nu(g)|_K \le N_\mu(fg) \le N_\mu(f)\|g\|.$$

Шу сабабли $\nu-$чегараланган ўлчов бўлади.

1-теорема. .μ ўлчов, $f \in L^1(X,\mu), \nu = f\mu,$ бўлсин. У ҳолда

$$N_\nu(x) = |f(x)|_K N_\mu(x). \qquad (1)$$

Исбот. $N_\nu(x)$ ва $N_\mu(x)$ ларнинг таърифидан х нуқтанинг шундай очиқ-компакт У атрофи топилиб,

$$N_\nu(\phi_U) - N_\nu(x) \le \varepsilon \qquad (2)$$

бўлиши ва $N_\mu(\phi_U) - N_\nu(x) \le \varepsilon$ бўлиши келиб чиқади. $f \in L^1$ бўлгани учун шундай $g \in C_C(x)$ топилиб, $N_\mu(f-g) \le \varepsilon$ бўлади, $\forall y \in U$ учун $|g(y) - g(x)|_K \le \varepsilon$ бўладиган У атрофни қараш мумкин. (2.3.2)га кўра

$$\left|N_\mu(f\phi_U) - |f(x)|_K N_\mu(x)\right|.$$

ни баҳолаш етарли.

$$\left|N_\mu(f\phi_U) - |f(x)|_K N_\mu(x)\right| \le \sup_{y\in Y}|g(x) - g(y)|_K N_\mu(y) + |g(x)|_K \left|N_\mu(f\phi_U) - N_\mu(x)\right| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\sup_{y\in Y} N_\mu(y) + |g(x)|_K\right) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

ўринли. Яъни

$$\left|N_\mu(f\phi_U)-N_\mu(g\phi_U)\right|\le\varepsilon$$

ва

$$\left\|g(x)\right|_K N_\mu(x)-\left|f(x)\right|_K N_\mu(x)\right|\le\sup_x\left|g(x)-f(x)\right|_K N_\mu(x)\le\varepsilon\,.$$

ни ҳосил қиламиз.

1-тасдиқ. μ-ўлчов бўлиб, $f\in L^1(X,\mu)$ бўлсин. У ҳолда $\nu=f\mu$ камаювчи бўлади.

Камаювчи ўлчов учун Монна-Спрингер интегралида ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи.

Локал-компакт тўла ноархимед майдонни С билан белгилаймиз. С-қийматли ўлчов ва функцияларни қараймиз.

2-теорема. μ камаювчи ўлчов ва $\eta\in L^1(X,\mu)$ бўлсин. У ҳолда $fog\in L^1(X,\mu)$.

Исбот. $\eta\in L^1(X,\mu)$ бўлгани учун $\eta-X_\alpha$да узлуксиз бўлади. Шу сабабли $M_\alpha=\eta(X_\alpha)$ компакт бўлади. V_α орқали С майдондаги марказ О нуқтада бўлган ва $M_\alpha\subset V_\alpha$ бўлган шарни белгилаймиз.

Фараз қилайлик $U_\alpha\in\Delta(x)$ учун $\sup\{N_\mu(x):x\in\overline{U_\alpha}\}<\alpha$ бўлсин. $\eta\in L^1$ бўлгани учун шундай $\delta>0$ топилиб, $\eta_\delta\in C_C(x)$ ва $N_\mu(\eta-\eta_\delta)<\eta$ бўлади.

Энди

$$g_{\delta\alpha}(x)=[(f\phi_{V_\alpha})\circ\eta_\delta]\phi_{U_\alpha}\,.$$

функциялар системасини қараймиз. Бу функциялар $C_C(x)$га тегишли. Барча $x\in X_\alpha\subset U_\alpha$ учун

$$g_{\delta\alpha}(x)=f(\eta_\delta(x))\phi_{V_\alpha}(\eta_\delta(x))$$

ўринли. $\delta,\alpha\to 0$ бўлганда $N_\mu(f\circ\eta-g_{\delta\alpha})\to 0$ бўлишини кўрсатамиз.

Аввал α ни шундай танлаймизки, $\|f\|\alpha<\varepsilon$ бўлсин. У ҳолда

$$N_\mu\left(f\circ\eta-g_{\delta\alpha}\right)\le\max\left[\sup_{x\in X_\alpha}\left|f(\eta(x))-g_{\delta\alpha}(x)\right|_S N_\mu(x),\sup_{x\in\overline{X}_\alpha}\left|f(\eta(x))-g_{\delta\alpha}(x)\right|_S N_\mu(x)\right]=$$

$$=\max[\gamma_{\delta\alpha},\lambda_{\delta\alpha}.]$$

$\lambda_{\delta\alpha}\le\|f\|\alpha<\varepsilon$ бўлгани учун

$$\gamma_{\delta\alpha} = \sup_{x\in X_\alpha}\left| f(\eta(x)) - (\eta_\delta(x))\phi_{V_a}(\eta_\delta(x))\right|_S N_\mu(x) =$$
$$= \sup_{x\in X_\alpha}\left|\left(f\phi_{V_a}\right)(\eta(x)) - \left(f\phi_{V_a}\right)(\eta_\delta(x))\right|_S N_\mu(x).$$

$\delta = \theta\alpha$ деб оламиз. У ҳолда $N_\mu(\eta - \eta_\delta) \le \theta\alpha$. Шундай қилиб, $|\eta(x) - \eta_\delta(x)|_S N_\mu(x) \le \theta\alpha$. Бу $x \in X_\alpha$ учун $|\eta(x) - \eta_\delta(x)|_S \le \theta$ бўлишини билдиради. $f\Phi_{V_\alpha}$ функция компакт ташувчига эга ва шу сабабли у текис узлуксиздир. Демак, $\forall\varepsilon < 0$ учун шундай $\theta_\varepsilon > 0$ топилиб, $|y_1 - y_2|_{S_1} \le \theta_\varepsilon$ бўлганда $|f(y_1) - f(y_2)|_S < \varepsilon / \|\mu\|$ бўлиши керак.

Исботни якункаш учун $\delta = \delta_\varepsilon = \theta_\varepsilon\alpha$ деб олиш керак.

3-теорема. μ-камаювчи ўлчов, $\eta \in L^1(X,\mu)$ бўлсин. У ҳолда $\mu(f) = \mu(f \circ g)$ тенглама ёрдамида аниқлнган $\mu : C_C(S) \to S$ функсионал $C_C(S)$ даги чегараланган ўлчов бўлади.

Агар μ ўлчов чегараланган,лекин камаювчи бўлмаса, $f \in C_C(S)$ учун $f \circ g \notin L^1(X,\mu)$ бўлиши мумкин.

1-мисол. μ теоремадаги ўлчов бўлсин. $\eta(x_n) = y_n = p^n$ ва $x \ne x_n$ да $\eta(x) = 0$ бўладиган функцияни қараймиз. $\eta \in L^1$ бўлишини кўрсатамиз. Ҳар бир x_n нуқта учун турли нуқталар учун бўш кесишмага эга ёпиқ-очиқ V_n шарлар мавжуд. Компакт ташувчили узлуксиз функцияларни қараймиз:

$$\eta_N(x) = \sum_{k=1}^{N} y_k \phi_{V_k}(x)$$

У ҳолда $N_\eta(\eta - \eta_N) \to 0$. Энди ф функция $U_1(0)$ да 1+й га ва ундан ташқарида 0 га тенг бўлсин. У ҳолда $z_n = f(y_n) = 1 + p^n$ ва $\alpha_n z_n$ нолга интилмайди,н→0.

2-тасдиқ. μ камаювчи ўлчов, $\eta \in L^1(X,\mu)$ бўлсин. У ҳолда

$$N_{\mu\eta}(f) \le N_\mu(f \circ \eta). \qquad (3)$$

Исбот. $N_{\mu_\eta}(f) = \sup_{g\ne 0, g\in C_c} \|g\|^{-1} |\mu_\eta(fg)|_S \le \sup_x |f(\eta(x))|_S N_\mu(x)$.

Бу тенгсизлик қатъий бўлиши мумкин.

1-лемма. Агар $y \notin M_\alpha = \eta(x_\alpha)$ бўлса, у ҳолда $N_{\mu\eta}(y) < \alpha$.

Исботи. M_α ёпиқ тўплам,шу сабабли $\forall y \in \overline{M_\alpha}$ учун $V_\alpha \cap M_\alpha = \varnothing$ бўладиган V_α атроф мавжуд. (2.3.1) тенглик ва (2.3.3) тенгсизликни қўллаб,

$$N_{\mu\eta}(y) = \inf_{y \in V \in \Delta(x)} N_{\mu_\eta}(\phi v) \le \inf_{y \in V \in \Delta(x)} N_{\mu_\eta}(\phi v \circ \eta) \le\le \sup_x \left|\phi_{V_\alpha}(\eta(x))\right|_S N_\mu(x) < \alpha.$$

ни ҳосил қиламиз.

3-тасдиқ. $\forall \eta \in L^1(x,\mu)$ учун μ_η ўлчов камаювчи бўлади.

Бу тасдиқ 2.3.1-лемманинг натижаси ҳисобланади. 2.3.2-теоремада ф функцияга кучсизроқ шарт қўйиш мумкин.

$\eta \in L^1$ бўлсин. $\forall \alpha > 0$ учун M_α да узлуксиз ф:C→C функцияларнинг функсионал фазоси $\Gamma(\eta)$ ни киритамиз. $\Gamma_b(\eta)$ орқали $\Gamma(\eta)$ га кирувчи чегараланган функциялар қисм фазосини белгилаймиз.

4-теорема. μ-камаювчи ўлчов, $\eta \in L^1(x,\mu)$, $f \in \Gamma_b(\eta)$ бўлсин. У ҳолда $f \circ \eta \in L^1(x,\mu), f \in L^1(S,\mu_\eta)$ ва

$$\mu_\eta(f) = \mu(f \circ \eta). \tag{2.3.4}$$

тенглик ўринли.

Исботи.

1. $(f \circ g) \in L^1(x,\mu)$ ни кўрсатамиз. ф функциянинг M_α даги қисми f_α нинг текис узлуксизлигини қўллаб, $\forall \varepsilon > 0$ сони учун шундай $\delta > 0$ топилиб, $|x-y|_S < \delta$ да $|f(x) - f(y)|_S < \varepsilon$ ни ҳосил қиламиз. $U_\delta(x), x \in M_\alpha$ қопламани қараймиз. $\bigcup_{j=1}^n U_\delta(x_j) \supset M_\alpha$ чекли қисм қоплама мавжуд. $\varepsilon = \beta$ учун

$$f_{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j)\phi_{U_\delta(x_j)}(x)$$

бўлсин. У ҳолда $f_{\alpha\beta} \in C_c$ ва

$$\sup_{x \in M_\alpha} \left| f_{\alpha\beta}(x) - f(x) \right|_S < \beta.$$

η_δ функциялар 2.3.2-теоремадаги каби бўлсин. $g_{\alpha\beta\delta}(x) = f_{\alpha\beta}(\eta(x))\phi_{U_\alpha}(x)$ функцияни қараймиз, бу ерда U_α аввалги теоремадаги каби. 6.1-теоремага ўхшаш

$$\rho_{\alpha\beta\delta} = N_\mu(f \circ \eta - g_{\alpha\beta\delta}) \to 0, \alpha, \beta, \delta \to 0.$$

ни исботлаш мумкин. Шундай қилиб,(2.3.4) тенгламанинг ўнг томонини аниқланган.

Енди $f \in L^1(S, \mu_\eta)$ бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун шундай $\{\Phi_n\}, \Phi_n \in C_c(S)$ кетма-кетлик топилиб, $N_{\mu_\eta}(f - \Phi_n) \to 0$ бўлишини кўрсатиш етарли. Леммага кўра

$$N_{\mu_\eta}(f - f_{\alpha\beta}) = \sup_{y \in S}\left| f(y) - f_{\alpha\beta}(y)\right|_S N_{\mu_\eta} \le$$
$$\le \max\left[\sup_{y \in \underline{M}_\alpha}\left|f(y)\right|_S N_{\mu_\eta}(y); \sup_{y \in M_\alpha}\left|f(y)\right|_S N_{\mu_\eta}(y)\right] \le$$
$$\max\left[\alpha\|f\|, \beta\|\mu\|\right] \to 0, \alpha, \beta \to 0.$$

Шу сабабли, (2.3.4) тенгламанинг чап томони аниқланган. Энди ўнг томон чап томонга тенглигини кўрсатамиз. Аввалги мулоҳазаларни қўллаб, $\mu_\alpha(f \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta})$ ни ҳосил қиламиз. Шунга кўра $N_\mu(f \circ \eta - f_{\alpha\beta} \circ \eta) \to 0.$ Демак,

$$\mu(f \circ \eta) = \lim \mu(f_{\alpha\beta} \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta}).$$

1-эслатма. Олинган натижаларни вестор қийматли $\eta : X \to S^n, \eta = (\eta_1, ..., \eta_n), \eta_j \in L^1$ ҳолга умумлаштириш мумкин. μ_η ўлчов $\Phi(S^n)$ да аниқланган бўлади.

П-адик қийматли эҳтимоллик ўлчови.

Камаювчи ўлчовларга асосланган аксиоматика.

Камаювчи ўлчовлар назарияси п-адик эҳтимоллар назарияси аксиоматик даражада пайдо бўлишига асос бўлган.

1-таъриф. $(\Omega, \Phi(\Omega), P)$-учлик бу эҳтимоллик фазосидир,бу ерда Ω-нол ўлчамли локал компакт σ-компакт топологис фазо, $\Phi(\Omega)$-ёпиқ-очиқ қисм тўпламлар алгебраси, П-камаювчи Q_p-қийматли $\Phi(\Omega)$ даги ўлчов бўлиб,

$P(\Omega)=1$.

1-эслатма. Колмогоров аксиоматикасиисталган абстракт Ω тўплам ва унинг қисм тўпламлари алгебраси асосида қурилган. Лекин бундай мулоҳаза бизни ҳолга тўғри келмайди. Бизнинг мулоҳазаларда Ω фазонинг топологис хоссалари муҳим рол ўйнайди. Бизнинг аксиоматика Фреше ва Крамернинг геометрик эҳтимоллар назариясига бироз ўхшаш.

С бу Q_p ни қисм майдон сифатида ўзида сақловчи лосал компакт ноархимед майдон бўлсин.

2-таъриф. L^1 синфдан олинган $\xi:\Omega\to S$ функцияга тасодифий миқдор дейилади.

Одатдаги

$$M\xi\equiv\int_{\Omega}\xi(\omega)P(d\omega)=P(\xi),$$

таъриф ёрдамида ξ математик кутилмани киритамиз, $m_K(\xi)=M\xi^K$ - моментлар,агар $\xi^K\in L^1$ бўлса,бу моментлар коррект аниқланган, ва $\upsilon_\xi A)=\rho(\xi\in A)$ эҳтимоллик тақсимоти. $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ векторга тасодифий миқдор дейилади, бу ерда ξ_K -тасодифий миқдор. ξ тасодифий вестор учун P_ξ тасоддифий тақсимотни тасодифий миқдор учун ҳам киритиш мумкин. Шу билан бирга $m_\alpha(\xi)=M_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_m}$ тасодифий векторларнинг аралаш моментларини киритиш мумкин.

Назорат саволлари.

1. Тасодифий миқдор деб нимага айтилади.
2. Камаювчи ўлчовларга асосланган аксиоматика.
3. Камаювчи ўлчов учун Монна-Спрингер интегралида ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи**.**

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАРИНИНГ МАЗМУНИ

1- амалий машғулот: Ўлчов тушунчаси ва хоссалари.

1. $$A=\bigcup_{n=1}^{8}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{8},\ \frac{1}{n}+\frac{1}{8}\right).$$

$P_n=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{8},\ \frac{1}{n}+\frac{1}{8}\right),\ n=1,2,\dots,8$ белгилаш оламиз ва P_n оралиқларнинг кесишиш ёки кесишмаслигини текширамиз.

$$P_1=\left[\frac{7}{8},\ \frac{9}{8}\right),\ P_2=\left[\frac{3}{8},\ \frac{5}{8}\right),\ P_3=\left[\frac{5}{24},\ \frac{11}{24}\right),\ P_4=\left[\frac{1}{8},\ \frac{3}{8}\right),\dots,P_8=\left[0,\ \frac{1}{4}\right).$$

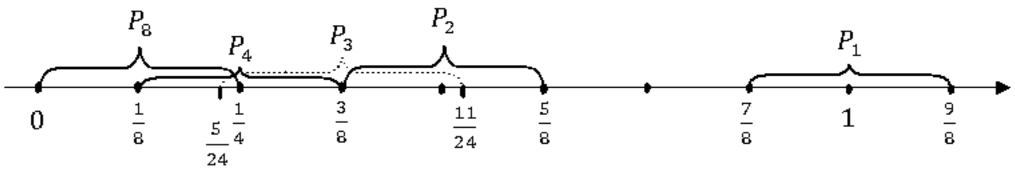
1-чизмадан маълум бўлдики, $P_1\cap P_2=\varnothing,\ P_k\cap P_{k+1}\neq\varnothing,\ \ k=2,3,\dots,8$. Шунинг учун

$$A=P_1\cup Q_1,\quad Q_1=\bigcup_{n=2}^{8}P_n=\left[0,\ \frac{5}{8}\right),\ \ P_1,Q_1\in S$$

тасвир энг кам сонли ёйилма бўлади. Демак, A содда тўплам. Бу ёйилмадан

$$m(A)=m(P_1)+m(Q_1)=\frac{2}{8}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$$

тенгликни оламиз. D



2. $A=\{(x,y):0\le x\le 7,\ 0\le y\le 7\}$,

$$A_1=\{(x,y):4\le x<7,\ 3\le y\le 7\}.$$

5-теорема. Агар чекли ёки саноқли сондаги $\{A_n\}$ тўпламлар системаси учун $A\subset\bigcup_n A_n$ бўлса, у ҳолда

$$\mu^*(A)\le\sum_n\mu^*(A_n)$$

тенгсизлик ўринли. Хусусий ҳолда, агар $A\subset B$ бўлса, $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$ бўлади.

Исбот. Итиёрий $\varepsilon>0$ ва ҳар бир A_n учун ташқи ўлчов таърифига кўра тўғри тўртбурчакларнинг шундай чекли ёки саноқли P_{nk} системаси мавжудки,

$$A_n \subset \bigcup_k P_{nk} \text{ ва } \sum_k m(P_{nk}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

бўлади. У ҳолда

$$A \subset \bigcup_n \bigcup_k P_{nk} \text{ ва } \mu^*(A) \le \sum_n \sum_k m(P_{nk}) \le \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли. $\varepsilon > 0$ соннинг ихтиёрийлигидан теореманинг исботи келиб чиқади.

μ-камаювчи ўлчов, $\eta \in L^1(x,\mu)$, $f \in \Gamma_b(\eta)$ бўлсин. У ҳолда $f \circ \eta \in L^1(x,\mu), f \in L^1(S,\mu_\eta)$ ва

$$\mu_\eta(f) = \mu(f \circ \eta). \qquad (2.3.4)$$

тенглик ўринли.

Исботи.

1. $(f \circ g) \in L^1(x,\mu)$ ни кўрсатамиз. ф функциянинг M_α даги қисми f_α нинг текис узлуксизлигини қўллаб, $\forall \varepsilon > 0$ сони учун шундай $\delta > 0$ топилиб, $|x-y|_S < \delta$ да $|f(x) - f(y)|_S < \varepsilon$ ни ҳосил қиламиз. $U_\delta(x), x \in M_\alpha$ қопламани қараймиз. $\bigcup_{j=1}^n U_\delta(x_j) \supset M_\alpha$ чекли қисм қоплама мавжуд. $\varepsilon = \beta$ учун

$$f_{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j)\phi_{U_\delta(x_j)}(x)$$

бўлсин. У ҳолда $f_{\alpha\beta} \in C_c$ ва

$$\sup_{x \in M_\alpha} \left| f_{\alpha\beta}(x) - f(x) \right|_S < \beta.$$

η_δ функциялар 2-теоремадаги каби бўлсин. $g_{\alpha\beta\delta}(x) = f_{\alpha\beta}(\eta(x))\phi_{U_\alpha}(x)$ функцияни қараймиз, бу ерда U_α аввалги теоремадаги каби. 6.1-теоремага ўхшаш

$$\rho_{\alpha\beta\delta} = N_\mu(f \circ \eta - g_{\alpha\beta\delta}) \to 0, \alpha, \beta, \delta \to 0.$$

ни исботлаш мумкин. Шундай қилиб, (2.3.4) тенгламанинг ўнг томонини аниқланган.

Енди $f \in L^1(S,\mu_\eta)$ бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун шундай $\{\Phi_n\}, \Phi_n \in C_c(S)$

кетма-кетлик топилиб, $N_{\mu_\eta}(f - \Phi_n) \to 0$ бўлишини кўрсатиш етарли. Леммага кўра

$$N_{\mu_\eta}(f - f_{\alpha\beta}) = \sup_{y \in S} \left| f(y) - f_{\alpha\beta}(y) \right|_S N_{\mu_\eta} \le$$

$$\le \max\left[\sup_{y \in M_\alpha} \left| f(y) \right|_S N_{\mu_\eta}(y); \sup_{y \in M_\alpha} \left| f(y) \right|_S N_{\mu_\eta}(y) \right] \le$$

$$\max\left[\alpha \| f \|, \beta \| \mu \| \right] \to 0, \alpha, \beta \to 0.$$

Шу сабабли, (4) тенгламанинг чап томони аниқланган. Энди ўнг томон чап томонга тенглигини кўрсатамиз. Аввалги мулоҳазаларни қўллаб, $\mu_\alpha(f \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta})$ ни ҳосил қиламиз. Шунга кўра $N_\mu(f \circ \eta - f_{\alpha\beta} \circ \eta) \to 0.$ Демак,

$$\mu(f \circ \eta) = \lim \mu(f_{\alpha\beta} \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta}).$$

2-– амалий машғулот: Ўлчовсиз тўпламлар.

1. a О$(0, 1)$ ихтиёрий сон бўлсин. $[0, 1]$ кесманинг ўртасидан узунлиги $\frac{a}{2}$ га тенг $A_1 = \left(\frac{2-a}{4}, \frac{2+a}{4} \right)$ интервални чиқариб ташлаймиз. A_1 ни ўрта интервал деб атаймиз. Иккинчи қадамда қолган икки кесманинг узунлиги $\frac{a}{8}$ га тенг бўлган ўрта интервалини чиқариб ташлаймиз. Бу интерваллар бирлашмасини A_2 билан белгилаймиз. Учинчи қадамда қолган тўртта кесманинг ҳар биридан узунлиги $\frac{a}{32}$ га тенг бўлган ўрта интервалини чиқариб ташлаймиз. Уларнинг бирлашмасини A_3 орқали белгилаймиз. Бу жараённи чексиз давом эттирамиз. A билан $[0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ тўпламни белгилаймиз. A нинг ўлчовли эканлигини кўрсатинг ва унинг ўлчовини топинг.

2. 5.36-мисолда келтирилган A тўплам $[0, 1]$ кесманинг ҳеч ерида зич эмаслигини исботланг.

3. $A \subset [a, b]$ ўлчовли тўплам ва $\mu(A) = l > 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) = \mu\big([a, x) \cap A\big)$ функциянинг узлюксизлигини исботланг. $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ функциянинг қийматлар соҳасини топинг.

4. $[0, 1]$ кесмада $[0, 1]$ дан фарқли ва ўлчови 1 бўлган ёпиқ тўплам мавжудми?

5. Текисликда шундай ўлчовли $A \subset \mathbf{R}^2$ тўпламга мисол келтирингки, унинг координата ўқларига проексиялари ўлчовсиз бўлсин.

Қуйидаги мисолларда $A_1 \subset A$ шартни қаноатлантирувчи A ва A_1 тўпламлар берилган. $A \setminus A_1$ тўпламни энг кам сондаги ўзаро кесиш-майдиган $P_1, P_2, \ldots, P_n$ тўғри тўртбурчаклар бирлашмаси кўринишида тасвирланг. $A \setminus A_1 = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ ёйилмадан фойдаланиб $A \setminus A_1$ тўплам ўлчовини топинг.

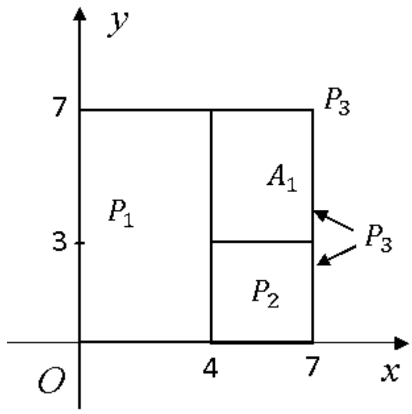
1. $A = \{(x,y) : 0 \le x < 7,\ 0 \le y < 7\}$,

$$A_1 = \{(x,y) : 4 \le x < 6,\ 3 \le y < 5\}.$$

2. $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 7,\ 0 \le y \le 7\}$,

$$A_1 = \{(x,y) : 4 \le x < 7,\ 3 \le y \le 7\}.$$

2-мисолнинг ечими. Текисликда A ва A_1 тўпламларни чизмада тасвирлаймиз. 5.6-чизмадан $A \setminus A_1 = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ ёйилмани оламиз. Бу ерда $P_1 = \{(x,y) : 0 \le x < 4, 0 \le y \le 7\}$, $P_2 = \{(x,y) : 4 \le x < 7, 0 \le y \le 3\}$, $P_3 = \{(x,y) : x = 7, 0 \le y \le 7\}$. Бу тўғри тўртбурчаклар ўзаро кесиш-майди. Ўлчовнинг аддитивлик хоссасига кўра $\mu(A \setminus A_1) = \mu(P_1) + \mu(P_2) + \mu(P_3) = 28 + 9 + 0 = 37$ бўлади. $\square$



5.6-chizma

6. $A \subset \mathbf{R}$ тўплам ўлчовли бўлиши учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ га кўра шундай $G\ (G \supset A)$ очиқ тўплам мавжуд бўлиб, $m^*(G \setminus A) < \varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли. Исботланг.

7. Агар $A \subset \mathbf{R}$ ўлчовли тўплам бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай $G\ (G \subset A)$ ёпиқ тўплам мавжуд бўлиб, $m^*(A \setminus G) < \varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилишини исботланг.

8. Агар $A \subset B$ бўлса, $m^*(A) \leq m^*(B)$ бўлади. Исботланг.

9. Агар A - содда тўплам бўлса, у ҳолда $m^*(A) = m'(A)$ тенгликни исботланг.

10. Агар чекли ёки саноқли сондаги $\{A_n\}$ тўпламлар системаси учун $A \subset \bigcup_n A_n$ бўлса, у ҳолда

$$m^*(A) \leq \sum_n m^*(A_n)$$

тенгсизлик ўринли. Исботланг.

11. Агар $A \subset [0,1]$ ўлчовли тўплам бўлса, у ҳолда $[0,1] \setminus A$ нинг ўлчовли бўлишини исботланг.

12. Агар A ва B тўпламлар ўлчовли бўлса, у ҳолда $A \cup B$, $A \cap B$, $A \Delta B$, $A \setminus B$ тўпламларнинг ўлчовли бўлишини исботланг.

13. Ўлчовли тўпламлар системаси $\mathfrak{M}(\mathbf{R})$ ҳалқа ташкил қилади. Исботланг.

14. Чекли сондаги ўлчовли тўпламларнинг бирлашмаси ва кесиш-маси яна ўлчовли тўпламдир. Исботланг.

15. Агар A ва B лар ўзаро кесишмайдиган ўлчовли тўпламлар бўлса, у ҳолда $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ тенгликни исботланг.

16. Агар A ва B лар ўлчовли тўпламлар бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликларни исботланг:

a) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$,

b) $m(A \Delta B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B)$.

17. Ихтиёрий иккита A ва B тўпламлар учун

$$\left|m^*(A) - m^*(B)\right| \le m^*(A \Delta B)$$

тенгсизлик ўринли. Исботланг.

18. $A \subset E = [0, 1]$ ўлчовли тўплам учун $m(E \setminus A) = 1 - m(A)$ тенглик ўринли. Исботланг.

3- амалий машғулот: Эҳтимоллик ўлчови ва уларнинг қўлланилиша.

1-теорема. μ ўлчов чегараланган бўлиши учун N_μ функсия Х да чегараланган ва

$\|\mu\| = \sup N_\mu(x).$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. μ чегараланган бўлсин ,{У} эса х нуқтанинг ёпиқ-очиқ айрофлари системаси бўлсин. У ҳолда

$N_\mu(x) = \inf\limits_U \sup\limits_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(g\phi_U)|_K \le \|\mu\| \sup\limits_{g \neq 0} \|g\|^{-1} \|g\phi_U\| \le \|\mu\|.$

Иккинчи томондан, $\forall f \in C_C(x)$ учун

$|\mu(f)|_K \le N_\mu(f) = \sup\limits_x |f(x)|_K N_\mu(x) \le \sup\limits_x N_\mu(x) \|f\|.$

Q_p қийматли эҳтимоллик ўлчовини аниқлаш учун қуйидаги шартдан фойдаланамиз. Татбиқ учун бизга нафақат $\Delta(x)$ даги,балки барча ёпиқ-очиқ қисм тўпламлар алгебрасидаги ўлчов керак бўлади.

μ -камаювчи ўлчов, $\eta \in L^1(x,\mu)$, $f \in \Gamma_b(\eta)$ бўлсин. У ҳолда $f \circ \eta \in L^1(x,\mu), f \in L^1(S,\mu_\eta)$ ва

$$\mu_\eta(f) = \mu(f \circ \eta). \qquad (2.3.4)$$

тенглик ўринли.

Исботи.

1. $(f \circ g) \in L^1(x,\mu)$ ни кўрсатамиз. ф функциянинг M_α даги қисми f_α нинг текис узлуксизлигини қўллаб, $\forall \varepsilon > 0$ сони учун шундай $\delta > 0$ топилиб, $|x-y|_S < \delta$ да $|f(x) - f(y)|_S < \varepsilon$ ни ҳосил қиламиз. $U_\delta(x), x \in M_\alpha$ қопламани қараймиз. $\bigcup_{j=1}^n U_\delta(x_j) \supset M_\alpha$ чекли қисм қоплама мавжуд. $\varepsilon = \beta$ учун

$$f_{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j)\phi_{U_\delta(x_j)}(x)$$

бўлсин. У ҳолда $f_{\alpha\beta} \in C_c$ ва

$$\sup_{x \in M_\alpha} \left| f_{\alpha\beta}(x) - f(x) \right|_S < \beta.$$

η_δ функциялар 2.3.2-теоремадаги каби бўлсин. $g_{\alpha\beta\delta}(x) = f_{\alpha\beta}(\eta(x))\phi_{U_\alpha}(x)$ функцияни қараймиз, бу ерда U_α аввалги теоремадаги каби. 6.1-теоремага ўхшаш

$$\rho_{\alpha\beta\delta} = N_\mu(f \circ \eta - g_{\alpha\beta\delta}) \to 0, \alpha, \beta, \delta \to 0.$$

ни исботлаш мумкин. Шундай қилиб,(2.3.4) тенгламанинг ўнг томонини аниқланган.

Енди $f \in L^1(S,\mu_\eta)$ бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун шундай $\{\Phi_n\}, \Phi_n \in C_c(S)$ кетма-кетлик топилиб, $N_{\mu_\eta}(f - \Phi_n) \to 0$ бўлишини кўрсатиш етарли. Леммага кўра

$$N_{\mu_\eta}(f - f_{\alpha\beta}) = \sup_{y \in S} \left| f(y) - f_{\alpha\beta}(y) \right|_S N_{\mu_\eta} \le$$

$$\le \max\left[\sup_{y \in \overline{M_\alpha}} |f(y)|_S N_{\mu_\eta}(y); \sup_{y \in M_\alpha} |f(y)|_S N_{\mu_\eta}(y) \right] \le$$

$$\max\left[\alpha \|f\|, \beta \|\mu\|\right] \to 0, \alpha, \beta \to 0.$$

Шу сабабли, (2.3.4) тенгламанинг чап томони аниқланган. Энди ўнг томон чап томонга тенглигини кўрсатамиз. Аввалги мулоҳазаларни қўллаб, $\mu_\alpha(f\circ\eta)=\lim\mu_\eta(f_{\alpha\beta})$ ни ҳосил қиламиз. Шунга кўра $N_\mu(f\circ\eta-f_{\alpha\beta}\circ\eta)\to 0$. Демак,

$$\mu(f\circ\eta)=\lim\mu\left(f_{\alpha\beta}\circ\eta\right)=\lim\mu_\eta(f_{\alpha\beta}).$$

4- амалий машғулот: Инвариант ўлчовлар.

1. Айтайлик, $E = A_1 \cup A_2$ ва $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ бўлсин. Агар $f_1 : A_1 \to \mathbf{R}$ ва $f_2 : A_2 \to \mathbf{R}$ функциялар ўлчовли бўлса, у ҳолда

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & agar\ \ x \in A_1 \\ f_2(x), & agar\ \ x \in A_2 \end{cases}$$

функциянинг E тўпламда ўлчовли бўлишини исботланг.

Исбот. Ихтиёрий $c \in \mathbf{R}$ да

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \{x \in A_1 : f_1(x) < c\} \cup \{x \in A_2 : f_2(x) < c\}$$

тўплам - ўлчовли. Демак, f функция - E да ўлчовли. Δ

2. Нол ўлчовли A тўпламда аниқланган ихтиёрий $f : A \to \mathbf{R}$ функциянинг ўлчовли бўлишини исботланг.

3. Агар $f : E \to \mathbf{R}$ функция, ўлчовли $g : E \to \mathbf{R}$ функцияга эквива-лент бўлса, у ҳолда f ҳам E да ўлчовли функция бўлади. Исботланг.

4. Агар $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ ва $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ узлюксиз функциялар эквива-лент бўлса, улар айнан тенг бўлишини исботланг.

5. Агар $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги $f : E \to \mathbf{R}$ функци-яга ҳар бир $x \in E$ да яқинлашса, у ҳолда ихтиёрий $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ узликсиз функция учун $\{\varphi_n = g(f_n)\}$ кетма-кетлик $g(f)$ функцияга нуқтали яқинлашади. Исботланг.

6. Агар $\{f_n\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги $f : E \to \mathbf{R}$ функцияга

ўлчов бўйича яқинлашса, у ҳолда ихтиёрий $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ узликсиз функсия учун $\{\varphi_n = g(f_n)\}$ кетма-кетлик $g(f)$ функсияга E тўпламда ўлчов бўйича яқинлашади. Исботланг.

Қуйидаги $f_n:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ функсиялар кетма-кетлигини ўлчов бўйича яқинлаҳувчиликка текширинг. Яқинлашувчи бўлса, лимитик функсиясини топинг.

7. $f_n(x) = \chi_{[\sqrt{n},\sqrt{n+1}]}(x).$

8. $f_n(x) = \sin^n x\cdot\chi_{[2\pi n, 2\pi n+\pi]}(x).$

$f_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty}\chi_{[k,k+k^{-2}]}(x).$

5- амалий машғулот: Биологик динамик системаларни ўрганишда ўлчовлар назарияси.

Мисол. Фараз қилайлик

$$L(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

бўлсин, бу ерда a,b,c,d лар комплекс сонлар бўлиб $ad-bc\neq 0$ ўринли. Л функсия каср чизиқли акслантириш дейилади. Агар $c\neq 0$ бўлса, $L(\infty)=a/c\neq\infty$ бўлади. Агар $a\neq 0$ бўлса, z ни $1/z$ га алмаштириб

$$F(z)=\frac{c+dz}{a+bz}$$

ни ҳосил қиламиз ва $F'(0)=(ad-bc)/a^2\neq 0$ бўлади. Демак, ∞ нуқта L учун регуляр нуқта экан.

Умумий ҳолда, агар $R(z)$ функсия $P(z)/Q(z)$ кўринишдаги ратсионал функсия бўлса, бу ерда P ва Q лар кўпҳадлар, у ҳолда R функсия бутун Риман сферасида аналитик функсия бўлади. ∞ нуқта кўпҳад ҳолига қўзғалмас нуқта, $R(z)=1/z^n$ ҳолда даврий бўлиши мумкин. ∞ нуқтага акслантирилувчи нуқталарга қутб нуқталар дейилади.

Қуйидаги

$$T(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

функсия ратсионал функсия бўлади, бу ерда $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in C$. Агар $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ бўлса, бу аксалантиришга Мёбиус акслантириши дейилади. Энди $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ деб фараз қиламиз.

1. Мёбиус функсияси Риман сиртида диффеоморфизм бўлишини исботланг.
2. T тескариланувчан бўлиб, яна Мёбиус функсия бўлишини кўрсатинг.
3. $T(\infty)$ ни ҳисобланг ва $T(-\delta/\gamma)=\infty$ эканлигини кўрсатинг.
4. Мёбиус акслантириши $z\to z+a$, $z\to 1/z$ ва $z\to bz$ алмаштиришлар композитсияси кўринишда тасвирланишини кўрсатинг.
5. Мёбиус акслантириши C даги тўғри чизиқни ё айланага ёки тўғри чизиққа ўтказишини исботланг. Худди шунга ўхшаш айланани ё айланага ёки тўғри чизиққа ўтказишини кўрсатинг. C даги тўғри чизиқлар Риман сиртида айланага мос келгани учун уларни ҳам айлана деб атаймиз.
6. Агар $(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma=0$ бўлса T функсия $z=\alpha-\delta$ нуқтада ягона қўзғалмас нуқтага эга бўлишини исботланг. Бу ҳолда T га параболик акслантириш дейилади.
7. Параболик акслантириш $z\to z+\mu$ акслантиришга қўшма аналитик эканлигини кўрсатинг.
8. Агар T да 2 та қўзғалмас нуқтаси бўлса, у ҳолда $z\to\mu z$ кўринишдаги ягона акслантиришга қўшма аналитик бўлишини кўрсатинг. Агар $|\mu|=1$ бўлса, T га эллиптик, агар $|\mu|\neq 1$ бўлса, T га гиперболик акслантириш дейилади.
9. Қуйидаги Мёбиус акслантиришларидан қайсилари параболик, гиперболик ёки эллиптик акслантириш эканини аниқланг:

$$
\begin{aligned}
&a..T(z) = 1/z \\
&b.T(z) = 2z+1 \\
&c.T(z) = (z+1)/(z-1) \\
&d.T(z) = z/(2-z) \\
&e.T(z) = iz+1-i
\end{aligned}
$$

10. Координата бошидан ўтувчи тўғри чизиқлар тўпламини C_1 билан, консентрик айланалар тўпламини C_2 билан белгилаймиз. $z \to \mu z$ акслантириш C_1 ва C_2 элементларини яна ўзига ўтказади. C_1 ва C_2 ларнинг образлари Стейнер айланалари дейилади. Бу айланаларни қуйидаги

$$
\begin{aligned}
&a..T(z) = 1/z \\
&b.T(z) = 2z+1 \\
&c.T(z) = z/(2-z)
\end{aligned}
$$

Мёбиус акслантиришдаги аксини топинг.

11. Мёбиус акслантиришиниг Швартс ҳосиласи айнан 0 га тенглигини исботланг.

6- амалий машғулот: Ноархимед фазоларда ўлчовлар ва уларнинг тадбиқлари.

Тасдиқ. Фараз қилайлик, $|a|<1$бўлсин. Ушбу

$$T_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

белгилаш киритамиз. У ҳолда $|z|<|a|^{-1}$ учун T_a аналитик бўлади.шу сабабли, $|z|<1$учун $T_a^{-1} = T_{-a}$ бўлади ва $T_a \circ D \to D$.

Исбот. Тасдиқнинг исботи тўғридан-тўғри ҳисоблашлардан келиб чиқади ва уни мисол сифатида қолдирамиз.

Теорема. P - бу кўпҳад ва z_0 нуқта P учун ҳаракатланувчи даврий нуқта бўлсин. У ҳолда z_0 ҳаракатланувчи нуқта атрофида ётувчи критик қиймат мавжуд.

Исбот. Яна соддалик учун бу натижани ҳаракатланувчи z_0кўзғалмас нуқта учун келтириб чиқарамиз. Аввалги натижаларга кўра, Pни чизиқли қилувчи z_0 нуқтанинг Uатрофи ва $H:U\to D$ аналитик гомеоморфизм мавжуддир. Vорқали Uни ўзида сақловчи очиқ тўпламни белгилаймиз ва $P:V\to U$- устига акслантириш бўлсин. Pакслантириш ё Vда критик нуқтага эга ёки Pнинг $P^{-1}:U\to V$ аналитик тескариси мавжуд. Буни исботлаш учун Pнинг Uда аналитик тескариси мавжуд бўлмасин деб фараз қиламиз. P аналитик ва V да суръектив бўлгани учун P бир қийматли бўлмаслиги керак. Шу сабабли шундай $z_1 z_2 \in V$ нуқталар топилиб $P(z_1)=P(z_2)=q$ бўлади. Фараз қилайлик $H(q)=a$ ва $T_a:D\to D$ аввалги тасдиқдаги каби акслантириш бўлсин.

D да маркази O нуқтада радиуси $r<1$ га тенг C_r айланани қараймиз. T_a^{-1} акслантириш бу айланалар оиласини бир боғламли ёпиқ чизиқларга ўтказади. $P:V\to U$ аналитик ва барча i ларда $P'(z_i)\neq 0$ бўлгани учун етарлича кичи r ларда $P^{-1}(H^{-1}\circ T_a^{-1}(C_r))$- айланалар жуфти бўлиб, бири z_1 нуқтада иккинчиси z_2 нуқтада бўлади. Бунда P^{-1} орқали акслантириш эмас тўплам асли белгиланган. Энди rкамайиши билан кичик r топилиб икки оила кесишади. P орқали $P^{-1}(H^{-1}\circ T_a^{-1}(C_{r_a}))$ кўринишдаги боғламли ёпиқ чизиқларнинг умумий нуқтасини белгилаймиз. У ҳолда осонгина кўриш мумкинки, p нуқта P учун критик қиймат бўлади.

Шундай қилиб, P^{-1} акслантиришни ҳаракатланувчи z_0нинг мумкин бўлган катта соҳасигача аниқлаш мумкин, бунда кейинги критик қийматни учратгунча давом этамиз ва барча мусбат kлар учун $P^{-k}:U\to C$ ни қурамиз. Таъкидлаш лозимки, исталган kучун $P^{-k}(U)$- C ни қопламайди. Шундай қилиб, P^{-k}акслантиришлар оиласи Uда нормал эмас. Монтел теоремасига кўра $\bigcup_{k=0}^{\infty}P^{-k}(U)\ -C$ минус камида битта нуқтани қоплаши керак. Бу зиддият натижани исботлайди.

Мисоллар

1. Аналитик акслантиришлар итератсияси ҳар қандай ҳаракатланувчи даврий нуқта бўйича нормал оилани ташкил қилишини исботланг.

2. Чекли ҳаракатланувчи даврий нуқта бассейни бир боғламли эканлигини исботланг.

3. $|a|<1$ учун

$$T_a(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

деб оламиз. У ҳолда T_a – $D=\{z:|z|<1\}$ ни ўзига ўтказувчи аналитик гомеоморфизм эканлигини исботланг.

4. Агар P даражаси 1 дан катта кўпҳад бўлса, у ҳолда шундай $R>0$ сони топилиб, агар $|z|>R$ бўлса, $|P(z)|>|z|$ бўлади. Агар $|z|>R$ бўлса, $|P^n(z)|\to\infty$ бўлади.

V. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
Ўлчовли функция ***Measurable function***	Агар ихтиёрий $c \in R$ учун $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ тўплам ўлчовли бўлса, у ҳолда f функция E тўпламда ўлчовли функция дейилади.	The function $f : E \to R$ is measurable iff $\{x \in E : f(x) < c\} := E(f < c)$ is measurable for all $c \in R$.
Лебег ўлчови ***Lebesgue measure***	Ўзаро кесишмайдиган интерваллар бирлашмасидан тузилган $S \equiv \sum_k (a_k, b_k)$ очиқ тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламнинг Лебег ўлчови қуйидагича аниқланади: $\mu_L(S) = \sum_k (b_k - a_k)$. $S' \equiv [a, b] - \sum_k (a_k, b_k)$ ёпиқ тўплам берилган бўлса, $\mu_L(S') = (b - a) - \sum_k (b_k - a_k)$.	Given an open set $S \equiv \sum_k (a_k, b_k)$ containing disjoint intervals, the Lebesgue measure is defined by $\mu_L(S) = \sum_k (b_k - a_k)$. Given a closed set $S' \equiv [a, b] - \sum_k (a_k, b_k)$, $\mu_L(S') = (b - a) - \sum_k (b_k - a_k)$.
Сигма алгебра ***Sigma-algebra***	X тўплам берилган бўлсин. Қуйидаги шартлар бажарилса, X тўпламнинг бўш бўлмаган қисм тўпламларидан тузилган F тўплам $\sigma -$ алгебра ташкил қилади дейилади: 1. $X \in F$; 2. Агар A F га тегишли бўлса, у ҳолда A нинг тўлдирувчиси ҳам F га тегишли; 3. Агар A_n F тўплам элементларидан тузилган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда A_n тўпламлар	Let X be a set. Then a $\sigma -$algebra F is nonempty collection of subsets of X such that the following hold: 1. X is in F; 2. If A is in F, then so is the complement of A; 3. If A_n is a sequence of elements of F, then the union of the A_ns is in F.

	бирлашмаси ҳам F нинг элементи бўлади.	
Ўлчовли фазо ***Measurable space***	Сигма-алгебра ташкил қиладиган тўпламлар системаси	A set considered together with the sigma-algebra on the set.
Эҳтимолликлар фазоси ***Probability space***	$(S, \mathbb{S}, P)$учлик, бу ерда S тўплам ва бу тўпламда аниқланган $(S, \mathbb{S})$ ўлчовли фазо, $\mathbb{S}$ S нинг ўлчовли қисм тўпламлари, P эса $\mathbb{S}$ даги $P(S) = 1$ шартни қаноатлантирувчи ўлчов.	A triple $(S, \mathbb{S}, P)$ on the domain S, where $(S, \mathbb{S})$ is a measurable space, $\mathbb{S}$ are the measurable subsets of S, and P is a measure on $\mathbb{S}$ with $P(S) = 1$.
Эҳтимоллик ўлчови ***Probability measure***	$(S, \mathbb{S}, P)$ эҳтимолликлар фазоси берилган бўлсин. У ҳолда P ўлчовга эҳтимолликлар ўлчови дейилади.	Let $(S, \mathbb{S}, P)$ be is probability space. Then the measure P is said to be a probability measure.
f **га нисбатан инвариант** **Invariant under** ***f***	(X, Σ)- ўлчовли фазо ва $f - X$ тўпламни ўзини-ўзига акслантирувчи ўлчовли функция бўлсин. (X, Σ) фазода аниқланган μ ўлчов f га нисбатан инвариант дейилади, агар Σ даги барча ўлчовли A тўпламлар учун $\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(A)$ бўлса.	Let (X, Σ) be a measurable space and let f be a measurable function from X to itself. A measure μ on (X, Σ) is said to be invariant under f if, for every measurable set A in Σ, $\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(A)$.
Инвариант ўлчов	(X, Σ) ўлчовли фазо, T моноид ва $\varphi: T \times X \to X$ акслантириш	Let (X, Σ) is a measurable space, T is monoid and $\varphi: T \times X \to X$ is

Invariant measure	бўлсин, (X,Σ) фазодаги μ ўлчов инвариант ўлчов бўлади, агар у ихтиёрий $\varphi_t: X \to X$ акслантиришга нисбатан инвариант бўлса.	the flow map, a measure μ on (X,Σ) is said to be an invariant measure if it is an invariant measure for each map $\varphi_t: X \to X$.

VI. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б.

2. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. 1-жилд. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 592 б.

3. Мирзиёев Ш.М. Халқимизнинг розилиги бизнинг фаолиятимизга берилган энг олий баҳодир. 2-жилд. Т.: “Ўзбекистон”, 2018. – 507 б.

4. Мирзиёев Ш.М. Нияти улуғ халқнинг иши ҳам улуғ, ҳаёти ёруғ ва келажаги фаровон бўлади. 3-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2019. – 400 б.

5. Мирзиёев Ш.М. Миллий тикланишдан – миллий юксалиш сари. 4-жилд.– Т.: “Ўзбекистон”, 2020. – 400 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

6. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.

7. Ўзбекистон Республикасининг 2020 йил 23 сентябрда қабул қилинган “Таълим тўғрисида”ги ЎРҚ-637-сонли Қонуни.

8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 10 декабрдаги “Чет тилларни ўрганиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1875-сонли қарори.

9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июнь “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли Фармони.

10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февраль “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрель "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли қарори.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 21 сентябрь “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5544-сонли Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 май “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада

такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.
14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июнь “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.
15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 август “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.
16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 8 октябрь “Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги ПФ-5847-сонли Фармони.
17. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2019 йил 23 сентябрь “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 797-сонли қарори.

Ш. Махсус адабиётлар

18. Ҳисоблаш методлари. / Исроилов М.И., Тошкент: Ўқитувчи, 2000.
19. Математик анализ./ Азларов Т., Мансуров Ҳ.: Университет ва пед. институтлар талабалари учун дарслик: 2 қисмли. 1-қ.— Қайта ишланган ва тўлдирилган 2-нашри.— Т.: Укитувчи, 1994.—416 б.
20. Математик моделлаштириш. / Камилов М.М. Эргашев А.К., ТАТУ, Тошкент 2007-176 б.
21. Ҳисоблаш усуллари. / Г.П. Исматуллаев., Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги. — Т.: «Тафаккур Бўстони», 2014. —240 б.
22. Самарский А.А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб, пособие для вузов,— М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с.— ISBN 5-02-013996-3.

23. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — 6-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 636 с. : ил.

24. Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, Cambridge University Press, 2011.

25. Bauer, H. Measure and Integration Theory, Berlin: de Gruyter, ISBN-13: 978-3110167191, 2001.

26. Bear, H.S. A Primer of Lebesgue Integration, San Diego: Academic Press, 2nd Edition, 2001.

27. Georgii H.O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin:de Gruyter, 657 p., 2011.

28. Weaver, Nik Measure Theory and Functional Analysis. World Scientific, 2013, 423 p.

IV. Интернет сайтлар

29. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

30. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси

31. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази

32. www.ams.mathscinet.org

33. www.ziyonet.uz – Таълим портали

34. http://www.princeton.edu/main/

35. https://www.stanford.edu