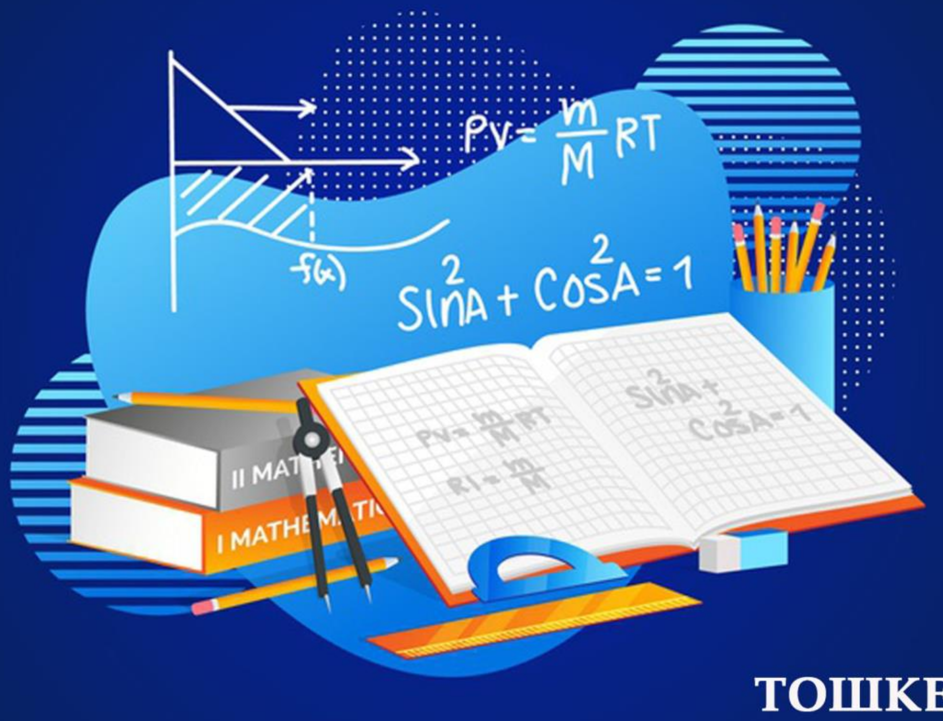
ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ МАРКАЗИ

МАТЕМАТИКА ЎҚИТИШ МЕТОДИКАСИ

Халқаро математик олимпиадалар методологияси

МОДУЛИ БЎЙИЧА ЎҚУВ-УСЛУБИЙ МАЖМУА



ТОШКЕНТ-2021

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 7 декабрдаги 648-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчилар: **п.ф.д., проф.Д. Юнусова**

ф-м.ф.н., доц. Ш.Исмаилов

Тақризчилар: **п.ф.н., доцент А.А.Акмалов-ТДПУ, “Математика ва уни ўқитиш методикаси” кафедраси мудири.**
ф-м.ф.ф.д. (PhD) М.Э.Нуриллаев- ТДПУ, “Умумий математика” кафедраси мудири.

Хорижий эксперт: ф.-м.ф.д., профессор В.К.Жаров.-АФХТИ (Россия), Фундаментал ва амалий математика кафедраси мудири

Ўқув-услубий мажмуа ТДПУ Кенгашининг 2020 йил 27 августдаги 1/3.6- сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР 4

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ 12

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР 27

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ 44

V. ГЛОССАРИЙ 89

VI. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ 92

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Мамлакатимизда истиқболли ёшларни қўллаб-қувватлаш, уларнинг иқтидорини рўёбга чиқариш, илмий-тадқиқот ва инновацион фаолиятини самарали йўлга қўйиш учун қўшимча шарт-шароитлар яратиш борасида изчил чора-тадбирлар амалга ошириб келинмоқда.

Шу билан бирга, улғайиб келаётган ёш авлоднинг илм эгаллашга бўлган иштиёқи ва интеллектуал салоҳиятини ошириш, шунингдек халқаро майдонда мамлакатимизнинг нуфузини янада юксалтириш учун иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини такомиллаштириш зарурати мавжуд.

Ёшларни амалга оширилаётган ислоҳотларнинг фаол иштирокчисига айлантириш, илм-фанни ўзлаштиришга бўлган рағбатини ошириш, изланувчанлик ва яратувчанлик фаолиятига кенг жалб қилиш, жаҳон миқёсида Ватанимиз довруғини кенг таратган аждодларга муносиб авлодни тарбиялаш мақсадида 03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил етиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори қабул қилинди.

Мазкур қарор таълимнинг барча босқичларида олимпиадаларга мақсадли тайёрлаш тизиминини танқидий ўрганиш ва халқаро тажрибаларга асосланиб қайта кўриб чиқишни тақозо этади.

“Математикадан халқаро олимриадалар методологияси” фани математика ўқитувчиларини математика фанидан халқаро олимпиада ва мусобақаларда тақдим этиладиган масалалар ечиш усуллари, математикага ихтисослаштирилган умумтаълим муассасаларида чуқурлаштирилган фан мазмунининг таҳлили асосида инновацион методлари асосида дарс ишланмаларини ишлаб чиқиш кўнималарини шакллантириш вазифаларини бажаради.

Юқоридагиларни ҳамда Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли, 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сонли, 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармонлари, шунингдек 2017 йил 20 апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПҚ–2909-сонли Қарорида белгиланган устувор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини такомиллаштиришни мақсад қилади.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

Модулнинг мақсади: Педагог кадрлар тайёрловчи олий таълим муассасалари профессор-ўқитувчилари педагогик касбий билим ва кўникмаларини илғор хорижий давлатларда математика олимпиадаларига мақсадли тайёрлашнинг илғор миллий ва хорижий тажрибалар асосида чуқурлаштириш, янгилаш ва таълим-тарбия жараёнида инновацион технологиялардан фойдаланиш имконини берадиган замонавий билим, кўникма ва малакаларни таркиб топтириш.

Модулнинг вазифалари:

- "Таълим тўғрисида"ги Қонун ва Кадрлар тайёрлаш миллий дастурида, Хукумат қарорларида акс этган вазифаларни амалга ошириш;
- Педагог кадрлар тайёрловчи олий таълим муассасаси профессор-ўқитувчиларининг илмий-назарий, педагогик-психологик, илмий-методик тайёргарлиги даражасини орттириш;
- Профессор-ўқитувчиларда математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашда замонавий ёндошувларни амалга ошириш, жумладан халқаро олимпиадалар талабларига мослаштириш, битирувчи талабаларга умумий ўрта таълим муассасаларига ишга келишда мазкур йўналишда тайёр ҳолда келишларини таъминлаш ҳамда математика фанидан иқтидорли ўқувчи ёшлар фаолиятини илмий ва услубий жиҳатдан таъминлаб бориш учун зарур бўлган методологик билимларни шакллантириш, кўникмаларни таркиб топтириш;
- Таълим-тарбия жараёнида инновацион технологиялардан фойдаланиш учун зарур бўлган методик билим, кўникма, малака ва компетенция (лаёқат)ни таркиб топтириш;
- Ўқитувчиларни ўз педагогик фаолиятини таҳлил қилишга ўргатиш, таҳлилий – танқидий, ижодий ва мустақил фикр юритиш кўникмаларини ривожлантириш;
- математикани ўқитишни такомиллаштириш ва самарадорлигини орттириш йўллари билан таништириш.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

Тингловчи:

- Умумий ўрта таълимда математика олимпиадаларига мақсадли тайёрлашда қўлланиладиган ёндошувлар, тенденциялари;
- Математикани ўқитиш методикаси ўқув дастурларини халқаро тадқиқотлар талабларига мослаштириш йўлларини билиши, битирувчи талабаларга умумий ўрта таълим муассасаларига ишга келишда мазкур йўналишда тайёр ҳолда келишларини таъминлаш методолгиясини;
- иқтидорли ўқувчи ёшларни аниқлаш, улар фаолиятини илмий ва услубий жиҳатдан таъминлаб бориш, соҳада илғор тажрибаларни оммалаштириш ва улар асосида таълим муассасалари учун тавсия ва қўлланмалар ишлаб чиқиш тўғрисида **билимларга эга бўлиш;**

Тингловчи:

- математика олимпиадаларига мақсадли тайёрлашда таълим мазмуни, воситалари, методлари ва шаклларининг узвийлиги ва изчиллигини таъминлаш муаммолари;
- ўқитиш мазмунига оид ахборотларни қайта ишлаш, умумлаштириш ва талабалар онгига етказиш йўллари;
- педагогика олий таълим муассасаларида математикани ўқитиш олдидаги долзарб муаммолар ва уларни ҳал этиш
- иқтидорли ўқувчи ёшларни аниқлаш, улар фаолиятини илмий ва услубий жиҳатдан таъминлаб боришга оид **кўникма эгаллаши;**

Тингловчи:

- ўқитиш мазмунига оид ахборотларни қайта ишлаш, умумлаштириш ва талабалар онгига етказиш йўлларини танлаш;
- вужудга келган ностандарт ва нотаниш педагогик вазиятларида самарали методикаларни аниқлаш, асослаш ва қўллаш **малакаларини эгаллаши;**

Тингловчи:

- математика олимпиадаларга тайёрлашда замонавий машғулотларига қўйиладиган талабларни эгаллаш;
- педагогика олий таълим муассасаларида математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлаш бўйича маъруза, амалий машғулотларида талабаларнинг фаолиятини ташкил этиш ва бошқариш;
- талабаларнинг мустақил ишлари ва таълимини ташкил этиш, уларни илмий-тадқиқотларга йўналтириш

- иқтидорли ўқувчи ёшларни аниқлаш, улар фаолиятини илмий ва услубий жиҳатдан таъминлаб бориш, соҳада илғор тажрибаларни оммалаштириш ва улар асосида таълим муассасалари учун тавсия ва қўлланмалар ишлаб чиқиш **компетенцияларни эгаллаши лозим**

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

Модул бўйича маъруза машғулотлари олий таълим муассасаларида математика фанларидан ўқув машғулотлари олиб бораётган профессор-ўқитувчиларнинг мавзу доирасидаги долзарб масалалар юзасидан ўзаро фикр алмашиш, мунозара, муҳокамасини ташкил этишга асосланади. Амалий машғулотлар давомида тингловчиларнинг таҳлилий, танқидий, ижодий ўрганиш ва тажриба алмашуви амалий мазмундаги топшириқларда бевосита фаол иштирок этиши орқали амалга оширилади.

Маъруза, амалий машғулотлар ва мустақил таълим топшириқлари бир-бири билан узвий боғланган, бир-бирини тўлдирувчи амалий ишлардан иборат бўлиб, бунда ҳар бир тингловчига ўзи ўқитаётган ўқув фани доирасидаги мавзуни танлаш, индивидуал ишлаш имконияти берилади.

Ўқув машғулотларидан ташқари вақтда компьютер синфида модул бўйича тайёрланган услубий ишланмалар (маърузалар матни, тақимотлар, намуналар, қўшимча материаллар, ёрдамчи манбалар манзиллари)дан, Низомий номидаги ТДПУ математика кафедраларида мавжуд имкониятлардан фойдаланиш учун шарт-шароит яратилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

Модул мазмуни ўқув режадаги “Кредит модул тизими ва ўқув жараёнини ташкил этиш”, “Илмий ва инновацион фаолиятни ривожлантириш”, “Таълим жараёнига рақамли технологияларни жорий этиш”, “Махсус мақсадларга йўналтирилган инглиз тили”, “Математикани ўқитишнинг инновацион таълим муҳитини лойиҳалаштириш”, “Олий таълим математика фанлари мазмунининг илмий-назарий масалалари”, “Педагогик тадқиқот натижаларини таҳлил қилувчи ахборот тизимлари” ўқув модуллари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар олий таълимда математика фанларини ўқитиш инновацияларини, илғор тажрибаларни аниқлаш, уларни қиёсий таҳлил этиш ва баҳолаш, мослаштириш, лойиҳалаштириш, қўллашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар таксимоти

Т/р	Мавзу	Жами аудитория соати	Назарий	Амалий
1.	03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил етиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори мазмун-моҳияти ва ундан келиб чиққан вазифалар.	2	2	
2.	Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашнинг холати ва замонавий тенденциялари	2	2	
3.	Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашда илғор миллий ва хорижий тажрибалар	2	2	
4.	Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда алгебра ва сонлар назариясига оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси	2		2
5.	Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда комбинаторикага оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси	2		2
6.	Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда геометрияга оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси	2		2
Жами		**12**	**6**	**6**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: 03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил етиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори мазмун-моҳияти ва ундан келиб чиққан вазифалар.

03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил етиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори мазмун-моҳияти ва ундан келиб чиққан вазифалар.

2-Мавзу: Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашнинг холати ва замонавий тенденциялари

Иқтидорли ўқувчи ёшларни аниқлаш, улар фаолиятини илмий ва услубий жиҳатдан таъминлаб бориш, соҳада илғор тажрибаларни оммалаштириш ва улар асосида таълим муассасалари учун тавсия ва қўлланмалар ишлаб чиқиш ҳолати;

умумий ўрта таълим мактаблари, академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари ўқувчилари ўртасида маҳаллий ва халқаро, шу жумладан нодавлат фан олимпиадаларини ташкил этиш, уларнинг халқаро олимпиадалардаги иштирокини таъминлаш ҳолати;

юқори малакали мутахассисларни жалб қилган ҳолда олимпиадалар учун доимий янги назорат материалларини ишлаб чиқиш ҳолати;

халқаро олимпиадалар иштирокчиларини юқори малакали мутахассислар, шу жумладан олимлар, профессор-ўқитувчилар, хорижлик мутахассисларни жалб қилган ҳолда тайёрлаш, инглиз тили ва рус тили фанларидан мулоқот қилиш кўникмаларини шакллантириш мақсадида махсус курслар ташкил этиш йўллари;

олимпиадаларда юқори натижаларни қайд этган иқтидорли ўқувчиларнинг келгусидаги фаолиятини мониторинг қилиб бориш ва қўллаб-қувватлаш чоралари.

3-Мавзу: Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашда илғор миллий ва хорижий тажрибалар

Иқтидорли ўқувчи ёшларни аниқлаш, улар фаолиятини илмий ва услубий жиҳатдан таъминлаб бориш, соҳада илғор тажрибаларни оммалаштириш ва улар асосида таълим муассасалари учун тавсия ва қўлланмалар ишлаб чиқишда илғор миллий ва халқаро тажрибалар;

умумий ўрта таълим мактаблари, академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари ўқувчилари ўртасида маҳаллий ва халқаро, шу жумладан нодавлат фан олимпиадаларини ташкил этиш, уларнинг халқаро олимпиадалардаги иштирокини таъминлашда илғор миллий ва халқаро тажрибалар;

юқори малакали мутахассисларни жалб қилган ҳолда олимпиадалар учун доимий янги назорат материалларини ишлаб чиқишда илғор миллий ва халқаро тажрибалар;

халқаро олимпиадалар иштирокчиларини юқори малакали мутахассислар, шу жумладан олимлар, профессор-ўқитувчилар, хорижлик мутахассисларни жалб қилган ҳолда тайёрлаш, инглиз тили ва рус тили фанларидан мулоқот қилиш кўникмаларини шакллантириш мақсадида махсус курслар ташкил этишда илғор миллий ва халқаро тажрибалар;

олимпиадаларда юқори натижаларни қайд этган иқтидорли ўқувчиларнинг келгусидаги фаолиятини қўллаб-қувватлаш чораларини кўришда илғор миллий ва халқаро тажрибалар.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-амалий машғулот: Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда алгебра ва сонлар назариясига оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси

Алгебра ва сонлар назариясига оид олимпиада масалалари тизими ҳақида. Алгебра ва сонлар назариясига оид масалаларни ечишга замонавий ёндашувлар. Педагогика йўналишидаги олий таълим муассасаларида математика фанини ўқитиш жараёнига алгебра ва сонлар назариясига оид олимпиада масалаларини ечиш усулларини жорий этишнинг методик имкониятлари.

2-амалий машғулот: Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда комбинаторикага оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси

Комбинаторикага оид олимпиада масалалари тизими ҳақида. Комбинаторикага оид масалаларни ечишга замонавий ёндашувлар. Педагогика йўналишидаги олий таълим муассасаларида математика фанини ўқитиш жараёнига комбинаторикага оид олимпиада масалаларини ечиш усулларини жорий этишнинг методик имкониятлари.

3-амалий машғулот: Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда геометрияга оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси

Геометрияга оид олимпиада масалалари тизими ҳақида. Геометрияга оид масалаларни ечишга замонавий ёндашувлар. Педагогика йўналишидаги олий таълим муассасаларида математика фанини ўқитиш жараёнига геометрияга оид олимпиада масалаларини ечиш усулларини жорий этишнинг методик имкониятлари.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (масалалар ечимлари бўйича таклиф бериш қобилиятини ошириш, эшитиш, идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);
- баҳс ва мунозаралар (масалалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш);
- тренинг машғулотлар (олимпиада мавзуларга оид метод ва воситалардан фойдаланиш тажрибасига эга бўлиш).

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“Ақлий ҳужум” методи - бирор муаммо бўйича таълим олувчилар томонидан билдирилган эркин фикр ва мулоҳазаларни тўплаб, улар орқали маълум бир ечимга келинадиган методдир. “Ақлий ҳужум” методининг ёзма ва оғзаки шакллари мавжуд. Оғзаки шаклида таълим берувчи томонидан берилган саволга таълим олувчиларнинг ҳар бири ўз фикрини оғзаки билдиради. Таълим олувчилар ўз жавобларини аниқ ва қисқа тарзда баён этадилар. Ёзма шаклида эса берилган саволга таълим олувчилар ўз жавобларини қоғоз карточкаларга қисқа ва барчага кўринарли тарзда ёзадилар. Жавоблар доскага (магнитлар ёрдамида) ёки «пинборд» доскасига (игналар ёрдамида) маҳкамланади. “Ақлий ҳужум” методининг ёзма шаклида жавобларни маълум белгилар бўйича гуруҳлаб чиқиш имконияти мавжуддир. Ушбу метод тўғри ва ижобий қўлланилганда шахсни эркин, ижодий ва ностандарт фикрлашга ўргатади.

“Ақлий ҳужум” методидан фойдаланилганда таълим олувчиларнинг барчасини жалб этиш имконияти бўлади, шу жумладан таълим олувчиларда мулоқот қилиш ва мунозара олиб бориш маданияти шаклланади. Таълим олувчилар ўз фикрини фақат оғзаки эмас, балки ёзма равишда баён этиш маҳорати, мантиқий ва тизимли фикр юритиш кўникмаси ривожланади. Билдирилган фикрлар баҳоланмаслиги таълим олувчиларда турли ғоялар шаклланишига олиб келади. Бу метод таълим олувчиларда ижодий тафаккурни ривожлантириш учун хизмат қилади.

“Ақлий ҳужум” методи таълим берувчи томонидан қўйилган мақсадга қараб амалга оширилади:

1. Таълим олувчиларнинг бошланғич билимларини аниқлаш мақсад қилиб қўйилганда, бу метод дарснинг мавзуга кириш қисмида амалга оширилади.
2. Мавзуни такрорлаш ёки бир мавзуни кейинги мавзу билан боғлаш мақсад қилиб қўйилганда –янги мавзуга ўтиш қисмида амалга оширилади.
3. Ўтилган мавзуни мустаҳкамлаш мақсад қилиб қўйилганда-мавзудан сўнг, дарснинг мустаҳкамлаш қисмида амалга оширилади.

“Ақлий ҳужум” методини қўллашдаги асосий қоидалар:

1. Билдирилган фикр-ғоялар муҳокама қилинмайди ва баҳоланмайди.
2. Билдирилган ҳар қандай фикр-ғоялар, улар ҳатто тўғри бўлмаса ҳам инобатга олинади.
3. Ҳар бир таълим олувчи қатнашиши шарт.

Муаммоли савол берилади

↓

Фикр ва ғоялар эшитилади ва жамлаб борилади

↓

Фикр ва ғоялар гуруҳланади

↓

Аниқ ва тўғри жавоб танлаб олинади

“Ақлий ҳужум” методининг тузилмаси

“Ақлий ҳужум” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Таълим олувчиларга савол ташланади ва уларга шу савол бўйича ўз жавобларини (фикр, ғоя ва мулоҳаза) билдиришларини сўралади;

2. Таълим олувчилар савол бўйича ўз фикр-мулоҳазаларини билдиришади;

3. Таълим олувчиларнинг фикр-ғоялари (магнитафонга, видеотасмага, рангли қоғозларга ёки доскага) тўпланади;

4. Фикр-ғоялар маълум белгилар бўйича гуруҳланади;

5. Юқорида қўйилган саволга аниқ ва тўғри жавоб танлаб олинади.

“Ақлий ҳужум” методининг афзалликлари:

- натижалар баҳоланмаслиги таълим олувчиларда турли фикр-ғояларнинг шаклланишига олиб келади;
- таълим олувчиларнинг барчаси иштирок этади;
- фикр-ғоялар визуаллаштирилиб борилади;
- таълим олувчиларнинг бошланғич билимларини текшириб кўриш имконияти мавжуд;
- таълим олувчиларда мавзуга қизиқиш уйғотади.

“Ақлий ҳужум” методининг камчиликлари:

- таълим берувчи томонидан саволни тўғри қўя олмаслик;
- таълим берувчидан юқори даражада эшитиш қобилиятининг талаб этилиши.

«ФСМУ» МЕТОДИ. Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, аққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади.

Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизни баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:
- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

“ИНСЕРТ” МЕТОДИ. Методнинг мақсади: Мазкур метод ўқувчиларда янги ахборотлар тизимини қабул қилиш ва билмларни ўзлаштирилишини енгиллаштириш мақсадида қўлланилади, шунингдек, бу метод ўқувчилар учун хотира машқи вазифасини ҳам ўтайди.

Методни амалга ошириш тартиби:

- ➢ ўқитувчи машғулотга қадар мавзунинг асосий тушунчалари мазмуни ёритилган инпут-матнни тарқатма ёки тақдимот кўринишида тайёрлайди;
- ➢ янги мавзу моҳиятини ёритувчи матн таълим олувчиларга тарқатилади ёки тақдимот кўринишида намойиш этилади;
- ➢ таълим олувчилар индивидуал тарзда матн билан танишиб чиқиб, ўз шахсий қарашларини махсус белгилар орқали ифодалайдилар. Матн билан ишлашда талабалар ёки қатнашчиларга қуйидаги махсус белгилардан фойдаланиш тавсия этилади:

Белгилар	1-матн	2-матн	3-матн
“V” – таниш маълумот.			
“?” – мазкур маълумотни тушунмадим, изоҳ керак.			
“+” бу маълумот мен учун янгилик.			
“– ” бу фикр ёки мазкур маълумотга қаршиман?			

Белгиланган вақт якунлангач, таълим олувчилар учун нотаниш ва тушунарсиз бўлган маълумотлар ўқитувчи томонидан таҳлил қилиниб, изоҳланади, уларнинг моҳияти тўлиқ ёритилади. Саволларга жавоб берилади ва машғулот якунланади.

“БАҲС-МУНОЗАРА” МЕТОДИ - бирор мавзу бўйича таълим олувчилар билан ўзаро баҳс, фикр алмашинув тарзида ўтказиладиган ўқитиш методидир.

Ҳар қандай мавзу ва муаммолар мавжуд билимлар ва тажрибалар асосида муҳокама қилиниши назарда тутилган ҳолда ушбу метод қўлланилади. Баҳс-мунозарани бошқариб бориш вазифасини таълим олувчиларнинг бирига топшириши ёки таълим берувчининг ўзи олиб бориши мумкин. Баҳс-мунозарани эркин ҳолатда олиб бориш ва ҳар бир таълим олувчини мунозарага жалб этишга ҳаракат қилиш лозим. Ушбу метод олиб борилаётганда таълим олувчилар орасида пайдо бўладиган низоларни дарҳол бартараф этишга ҳаракат қилиш керак.

“Баҳс-мунозара” методини ўтказишда қуйидаги қоидаларга амал қилиш керак:

- ✓ барча таълим олувчилар иштирок этиши учун имконият яратиш;
- ✓ “ўнг қўл” қоидаси (қўлини кўтариб, рухсат олгандан сўнг сўзлаш)га риоя қилиш;
- ✓ фикр-ғояларни тинглаш маданияти;
- ✓ билдирилган фикр-ғояларнинг такрорланмаслиги;
- ✓ бир-бирларига ўзаро ҳурмат.

Қуйида “Баҳс-мунозара” методини ўтказиш тузилмаси берилган.

Муаммоли савол ташланади

↓

Турли фикрлар тингланади

↓

Фикр-ғоялар тўпланади

↓

Таҳлил қилинади

↓

Аниқ ва мақбул ечимни топиш

“Баҳс-мунозара” методининг тузилмаси

“Баҳс-мунозара” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Таълим берувчи мунозара мавзусини танлайди ва шунга доир саволлар ишлаб чиқади.

2. Таълим берувчи таълим олувчиларга муаммо бўйича савол беради ва уларни мунозарага таклиф этади.

3. Таълим берувчи берилган саволга билдирилган жавобларни, яъни турли ғоя ва фикрларни ёзиб боради ёки бу вазифани бажариш учун таълим олувчилардан бирини котиб этиб тайинлайди. Бу босқичда таълим берувчи таълим олувчиларга ўз фикрларини эркин билдиришларига шароит яратиб беради.

4. Таълим берувчи таълим олувчилар билан биргаликда билдирилган фикр ва ғояларни гуруҳларга ажратади, умумлаштиради ва таҳлил қилади.

5. Таҳлил натижасида қўйилган муаммонинг энг мақбул ечими танланади.

ТРЕНИНГ. Тренинг замонавий таълим шаклларидан бири ҳисобланиб, у интерфаол машғулотларни амалга оширишнинг ўзига хос кўринишидир.

Тренинглар ўрганилиши лозим бўлган назарий ғоя ва фикрларни амалий иш ҳамда машқлар давомида ўзлаштириш имкониятини беради ва таълим олувчиларда шахслараро ўзаро ҳамкорликнинг самарали кўникмасини шакллантиришга, шунингдек, мутахассис касбий компетентлигининг умумий даражасини оширишга йўналтирилади.

Ҳар қандай педагогик тренингни ташкил этиш қуйидаги босқичлардан ташкил топади:

1. Ташкилий босқич: гуруҳни йиғиш ёки шакллантириш.

2. Бошланғич босқич: гуруҳ меъёрларини ишлаб чиқиш, танишув ва машғулотдан кутувларни аниқлаш.

3. Фаолиятли босқич: тренинг тури ва ўтказиш методикасини белгилаш.

4. Якуний босқич (рефлекция). Тренинг мобайнида талабалар назарий маълумотларни ўзлаштириш билан бирга, уларда билиш, эммоционал ва хулқ-атвор кўникмалари ҳам ривожланиб боради.

“ДАВРА СУҲБАТИ” МЕТОДИ – айлана стол атрофида берилган муаммо ёки саволлар юзасидан таълим олувчилар томонидан ўз фикрмулоҳазаларини билдириш орқали олиб бориладиган ўқитиш методидир.

“Давра суҳбати” методи қўлланилганда стол-стулларни доира шаклида жойлаштириш керак. Бу ҳар бир таълим олувчининг бир-бири билан “кўз алоқаси” ни ўрнатиб туришига ёрдам беради. Давра суҳбатининг оғзаки ва ёзма шакллари мавжуддир. Оғзаки давра суҳбатида таълим берувчи мавзуни бошлаб беради ва таълим олувчилардан ушбу савол бўйича ўз фикрмулоҳазаларини билдиришларини сўрайди ва айлана бўйлаб ҳар бир таълим олувчи ўз фикр-мулоҳазаларини оғзаки баён этадилар. Сўзлаётган таълим олувчини барча диққат билан тинглайди, агар муҳокама қилиш лозим бўлса, барча фикр-мулоҳазалар тингланиб бўлингандан сўнг муҳокама қилинади. Бу эса таълим олувчиларнинг мустақил фикрлашига ва нутқ маданиятининг ривожланишига ёрдам беради.

Давра столининг тузилмаси

Ёзма давра суҳбатида ҳам стол-стуллар айлана шаклида жойлаштирилиб, ҳар бир таълим олувчига конверт қоғози берилади. Ҳар бир таълим олувчи конверт устига маълум бир мавзу бўйича ўз саволини беради ва “Жавоб варақаси”нинг бирига ўз жавобини ёзиб, конверт ичига солиб қўяди. Шундан сўнг конвертни соат йўналиши бўйича ёнидаги таълим олувчига узатади. Конвертни олган таълим олувчи ўз жавобини “Жавоблар варақаси”нинг бирига ёзиб, конверт ичига солиб қўяди ва ёнидаги таълим олувчига узатади. Барча конвертлар айлана бўйлаб ҳаракатланади. Якуний қисмда барча конвертлар йиғиб олиниб, таҳлил қилинади.

“Давра суҳбати” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1.Машғулот мавзуси эълон қилинади.

2. Таълим берувчи таълим олувчиларни машғулотни ўтказиш тартиби билан таништиради.

3. Ҳар бир таълим олувчига биттадан конверт ва жавоблар ёзиш учун гуруҳда неча таълим олувчи бўлса, шунчадан “Жавоблар варақалари”ни тарқатилиб, ҳар бир жавобни ёзиш учун ажратилган вақт белгилаб қўйилади. Таълим олувчи конвертга ва “Жавоблар варақалари”га ўз исми-шарифини ёзади.

4. Таълим олувчи конверт устига мавзу бўйича ўз саволини ёзади ва “Жавоблар варақаси”га ўз жавобини ёзиб, конверт ичига солиб қўяди.

5. Конвертга савол ёзган таълим олувчи конвертни соат йўналиши бўйича ёнидаги таълим олувчига узатади.

6. Конвертни олган таълим олувчи конверт устидаги саволга “Жавоблар варақалари”дан бирига жавоб ёзади ва конверт ичига солиб қўяди ҳамда ёнидаги таълим олувчига узатади.

7. Конверт давра столи бўйлаб айланиб, яна савол ёзган таълим олувчининг ўзига қайтиб келади. Савол ёзган таълим олувчи конвертдаги “Жавоблар варақалари”ни баҳолайди.

8. Барча конвертлар йиғиб олинади ва таҳлил қилинади.

Ушбу метод орқали таълим олувчилар берилган мавзу бўйича ўзларининг билимларини қисқа ва аниқ ифода эта оладилар. Бундан ташқари ушбу метод орқали таълим олувчиларни муайян мавзу бўйича баҳолаш имконияти яратилади. Бунда таълим олувчилар ўзлари берган саволларига гуруҳдаги бошқа таълим олувчилар берган жавобларини баҳолашлари ва таълим берувчи ҳам таълим олувчиларни объектив баҳолаши мумкин.

“МУАММОЛИ ВАЗИЯТ” МЕТОДИ - таълим олувчиларда муаммоли вазиятларнинг сабаб ва оқибатларини таҳлил қилиш ҳамда уларнинг ечимини топиш бўйича кўникмаларини шакллантиришга қаратилган методдир.

“Муаммоли вазият” методи учун танланган муаммонинг мураккаблиги таълим олувчиларнинг билим даражаларига мос келиши керак. Улар қўйилган муаммонинг ечимини топишга қодир бўлишлари керак, акс ҳолда ечимни топа олмагач, таълим олувчиларнинг қизиқишлари сўнишига, ўзларига бўлган ишончларининг йўқолишига олиб келади. «Муаммоли вазият» методи қўлланилганда таълим олувчилар мустақил фикр юритишни, муаммонинг сабаб ва оқибатларини таҳлил қилишни, унинг ечимини топишни ўрганадилар.

“Муаммоли вазият” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1.Таълим берувчи мавзу бўйича муаммоли вазиятни танлайди, мақсад ва вазифаларни аниқлайди. Таълим берувчи таълим олувчиларга муаммони баён қилади.

2. Таълим берувчи таълим олувчиларни топшириқнинг мақсад, вазифалари ва шартлари билан таништиради.

3. Таълим берувчи таълим олувчиларни кичик гуруҳларга ажратади.

4. Кичик гуруҳлар берилган муаммоли вазиятни ўрганадилар. Муаммонинг келиб чиқиш сабабларини аниқлайдилар ва ҳар бир гуруҳ тақдимот қилади. Барча тақдимотдан сўнг бир хил фикрлар жамланади.

5. Бу босқичда берилган вақт мобайнида муаммонинг оқибатлари тўғрисида фикр-мулоҳазаларини тақдимот қиладилар. Тақдимотдан сўнг бир хил фикрлар жамланади.

6. Муаммони ечишнинг турли имкониятларини муҳокама қиладилар, уларни таҳлил қиладилар. Муаммоли вазиятни ечиш йўлларини ишлаб чиқадилар.

7. Кичик гуруҳлар муаммоли вазиятнинг ечими бўйича тақдимот қиладилар ва ўз вариантларини таклиф этадилар.

8. Барча тақдимотдан сўнг бир хил ечимлар жамланади. Гуруҳ таълим берувчи билан биргаликда муаммоли вазиятни ечиш йўлларининг энг мақбул вариантларини танлаб олади.

“SWOT-ТАҲЛИЛ” МЕТОДИ. Методнинг мақсади: мавжуд назарий билимлар ва амалий тажрибаларни таҳлил қилиш, таққослаш орқали муаммони ҳал этиш йўлларни топишга, билимларни мустаҳкамлаш, такрорлаш, баҳолашга, мустақил, танқидий фикрлашни, ностандарт тафаккурни шакллантиришга хизмат қилади.

S – (strength)	• кучли томонлари
W – (weakness)	• заиф, кучсиз томонлари
O – (opportunity)	• имкониятлари
T – (threat)	• тўсиқлар

ХУЛОСАЛАШ» (РЕЗЮМЕ, ВЕЕР) МЕТОДИ. Методнинг мақсади: Бу метод мураккаб, кўптармоқли, мумкин қадар, муаммоли характеридаги мавзуларни ўрганишга қаратилган. Методнинг моҳияти шундан иборатки, бунда мавзунинг турли тармоқлари бўйича бир хил ахборот берилади ва айни пайтда, уларнинг ҳар бири алоҳида аспектларда муҳокама этилади. Масалан, муаммо ижобий ва салбий томонлари, афзаллик, фазилат ва камчиликлари, фойда ва зарарлари бўйича ўрганилади. Бу интерфаол метод танқидий, таҳлилий, аниқ мантиқий фикрлашни муваффақиятли ривожлантиришга ҳамда ўқувчиларнинг мустақил ғоялари, фикрларини ёзма ва оғзаки шаклда тизимли баён этиш, ҳимоя қилишга имконият яратади. “Хулосалаш” методидан маъруза машғулотларида индивидуал ва жуфтликлардаги иш шаклида, амалий ва семинар машғулотларида кичик гуруҳлардаги иш шаклида мавзу юзасидан билимларни мустаҳкамлаш, таҳлили қилиш ва таққослаш мақсадида фойдаланиш мумкин.

Методни амалга ошириш тартиби:

- тренер-ўқитувчи иштирокчиларни 5-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратади;
- тренинг мақсади, шартлари ва тартиби билан иштирокчиларни таништиргач, ҳар бир гуруҳга умумий муаммони таҳлил қилиниши зарур бўлган қисмлари туширилган тарқатма материалларни тарқатади;
- ҳар бир гуруҳ ўзига берилган муаммони атрофлича таҳлил қилиб, ўз мулоҳазаларини тавсия этилаётган схема бўйича тарқатмага ёзма баён қилади;
- навбатдаги босқичда барча гуруҳлар ўз тақдимотларини ўтказадилар. Шундан сўнг, тренер томонидан таҳлиллар умумлаштирилади, зарурий ахборотлр билан тўлдирилади ва мавзу якунланади.

ЎЗАРО ЎРИН АЛМАШИНУВЧИ ЖУФТЛИКЛАР ВА ГУРУҲЛАР

Мақсади:

- тингловчиларни материалнинг тузилиши, асосий фикрларни белгилай олиш, эсда сақлаб қолиш мумкин бўлган шаклда уларни тасаввур эта олишга ўргатиш;

- нутқ маданиятини ривожлантириш;

- фасилитаторлик қобилиятини таркиб топтириш.

1. Биринчи босқичда педагог асосий фикрларни тасаввур этишнинг турли шакллари ҳақида ҳикоя қилиб беради.

Асосий фикрларни тасаввур этишнинг биринчи тури оддий – бу асосий фикрларни сўз ёки қисқа гаплар тарзида тасаввур этишдир. Мазкур сўз ёки гаплар устунлар тарзида номер қўйиш орқали ёзилади.

Асосий фикрларни тасаввур қилишнинг иккинчи шаклида ўзак белгилаб олинади ва ана шу ўзак атрофида асосий фикрлар жамланади.

Асосий фикрларни шакллантиришнинг учичнчи шакли – бу уларни қисқартириш ёки шартли белгилар билан алмаштиришдир.

2. Иккинчи босқичда тингловчилар кичик гуруҳларга бирлашадилар. Ҳар бир кичик гуруҳ ўзига берилган матнни олади ва уни ўқийди. Матнлар ҳаммада ҳар хил.

3. Шундан сўнг гуруҳда ҳар бир тингловчи мустақил равишда мазкур матнга доир таянч конспектни тузишади.

4. Навбатдаги босқичда тингловчилар жуфтликларда ўзларининг таянч конспектлари ҳақида фикр алмашишади. Мазкур босқичда ўзининг таянч конспектини ўзгартириш имконияти мавжуд.

5. Навбатдаги босқичда таянч конспект гуруҳий муҳокама этилади. Гуруҳ ўзаро келишган ҳолда қандайдир яратилган таянч конспектни қабул қилади. Мазкур босқичда гуруҳ бутун жамоанинг олдида “овоз чиқариб” айтиб берувчи тингловчини аниқлаб олиши керак.

6. Мазкур босқичда гуруҳнинг бир аъзоси аниқланган таянч конспект бўйича чиқиш қилади ва ўқилган матннинг мазмунини баён этади. Барча тингловчилар эшитишлари керак. Мазкур даврда меъёрларнинг бажарилишини таъминлайдиган техник экспертнинг мажбурияти намоён бўлади.

7. Биринчи гуруҳ аъзоси чиқишини тугатгандан сўнг бошқа гуруҳ савол бериши мумкин. Саволларга жавоб берилади. Мазкур турдаги иш баҳоланиши мумкин (баллар жадвалда қўйилади). Саволларнинг навбат билан берилишини техник эксперт йўлга қўяди.

8. Саккизинчи босқичда бошқа гуруҳнинг вакили агар асоси мавжуд бўлса, қилинган чиқишни тўлдиради.

9. Тўққизничи босқичда бошқа гуруҳ вакили чиқиш, саволларга жавоблар бўйича норозилигини ифода этади.

Ана шу ерда биринчи матн билан ишлаш якунланади. Педагог ёки илмий эксперт якунларни чиқаради.

Кейинги босқичда бошқа гуруҳ вакили ўзининг таянч конспектини намойиш этади. Мазкур ҳаракат ҳамма чиқишлар тугагунча давом этади.

Инсценировка якунларни чиқариш билан тугалланади. Ҳар бир гуруҳ тўплаган балларни ҳисоблаш ва жами баллар устунига ёзиб қўйилиши керак. Ана шу асосдан келиб чиқиб, ўринларни ҳам белгилаш мумкин.

Т-ЧИЗМА

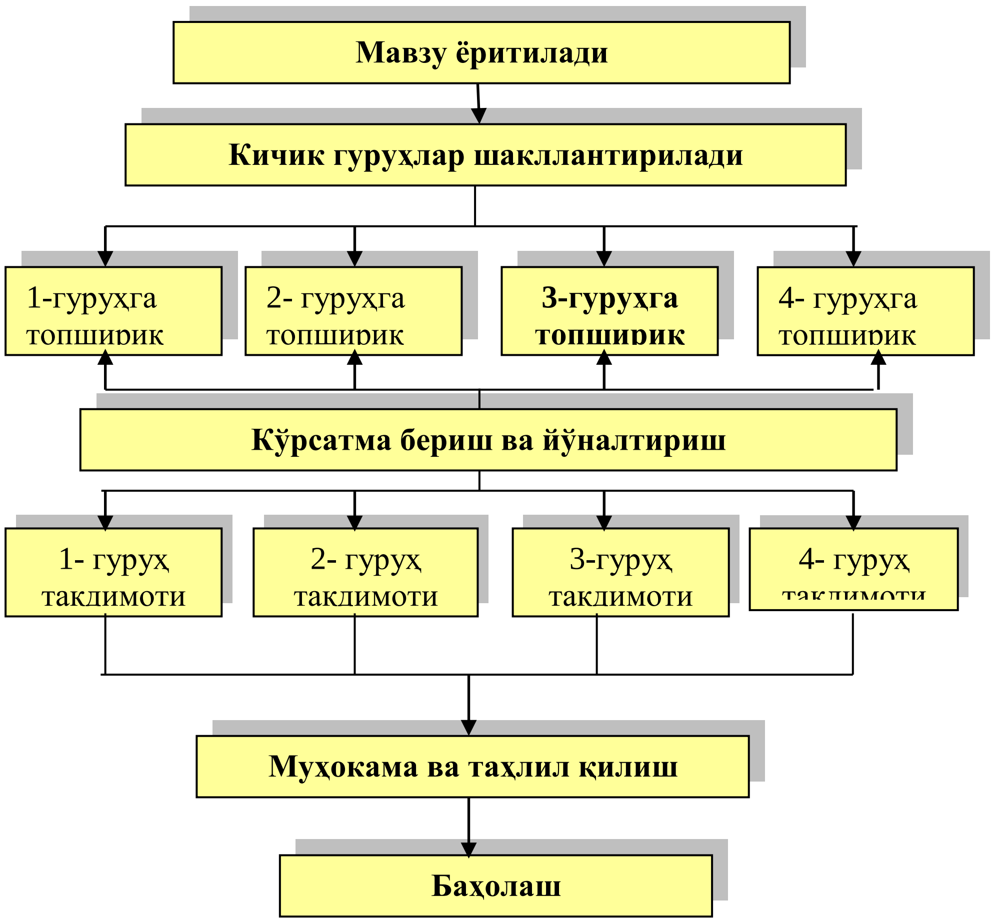
Т-чизма мунозара вақтида қўшалоқ жавоблар (ҳа/йўқ, тарафдор/қарши) ёки таққослаш-зид жавобларни ёзиш учун универсал график органайзер ҳисобланади. Масалан, “Педагогик лойиҳалаш шакллари” матнини “тарафдор ва қарши” тамойилига асосланиб ўқилганидан сўнг, бир жуфт тингловчи қуйида келтирилганидек, Т-чизмани тузиши ва беш дақиқадан кейин, чизманинг чап томонида педагогик лойиҳалаш шаклларининг афзалликларини ёзиши мумкин. Сўнгра беш дақиқа мобайнида улар бу фикрга қарши иложи борича кўп сабабни келтиришлари керак. Ана шу вақт охирида улар яна беш дақиқа мобайнида ўз Т-чизмаларини бошқа жуфтлик чизмалари билан таққослашлари мумкин.

Педагогик лойиҳалаш шаклларининг афзалликлари	**Педагогик лойиҳалаш шаклларининг камчиликлари**

“КИЧИК ГУРУҲЛАРДА ИШЛАШ” МЕТОДИ - таълим олувчиларни фаоллаштириш мақсадида уларни кичик гуруҳларга ажратган ҳолда ўқув материалини ўрганиш ёки берилган топшириқни бажаришга қаратилган дарсдаги ижодий иш.

Ушбу метод қўлланилганда таълим олувчи кичик гуруҳларда ишлаб, дарсда фаол иштирок этиш ҳуқуқига, бошловчи ролида бўлишга, бир-биридан ўрганишга ва турли нуқтаи- назарларни қадрлаш имконига эга бўлади.

“Кичик гуруҳларда ишлаш” методи қўлланилганда таълим берувчи бошқа интерфаол методларга қараганда вақтни тежаш имкониятига эга бўлади. Чунки таълим берувчи бир вақтнинг ўзида барча таълим олувчиларни мавзуга жалб эта олади ва баҳолай олади. Қуйида “Кичик гуруҳларда ишлаш” методининг тузилмаси келтирилган.



“Кичик гуруҳларда ишлаш” методининг тузилмаси

“Кичик гуруҳларда ишлаш” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Фаолият йўналиши аниқланади. Мавзу бўйича бир-бирига боғлиқ бўлган масалалар белгиланади.
2. Кичик гуруҳлар белгиланади. Таълим олувчилар гуруҳларга 3-6 кишидан бўлинишлари мумкин.
3. Кичик гуруҳлар топшириқни бажаришга киришадилар.
4. Таълим берувчи томонидан аниқ кўрсатмалар берилади ва йўналтириб турилади.
5. Кичик гуруҳлар тақдимот қиладилар.
6. Бажарилган топшириқлар муҳокама ва таҳлил қилинади.
7. Кичик гуруҳлар баҳоланади.

«Кичик гуруҳларда ишлаш» методининг афзаллиги:

- ўқитиш мазмунини яхши ўзлаштиришга олиб келади;
- мулоқотга киришиш кўникмасининг такомиллашишига олиб келади;
- вақтни тежаш имконияти мавжуд;
- барча таълим олувчилар жалб этилади;
- ўз-ўзини ва гуруҳлараро баҳолаш имконияти мавжуд бўлади.

«Кичик гуруҳларда ишлаш» методининг камчиликлари:

- баъзи кичик гуруҳларда кучсиз таълим олувчилар бўлганлиги сабабли кучли таълим олувчиларнинг ҳам паст баҳо олиш эҳтимоли бор;
- барча таълим олувчиларни назорат қилиш имконияти паст бўлади;
- гуруҳлараро ўзаро салбий рақобатлар пайдо бўлиб қолиши мумкин;
- гуруҳ ичида ўзаро низо пайдо бўлиши мумкин.

“АССЕСМЕНТ” МЕТОДИ. Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур техника орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташҳис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби: “Ассесмент” лардан маъруза машғулотларида талабаларнинг ёки қатнашчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, семинар, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассесментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

Намуна. Ҳар бир катакдаги тўғри жавоб 5 балл ёки 1-5 балгача баҳоланиши мумкин.

Тест

Аниқ мавжуд предметлар, воқеалар ва тузиладиган объектларнинг тавсифини аниқлаш ёки бошқариш...
А) Башоратлаш
В) Моделлаштириш
С) Конструкциялаш
Д) Режалаштириш

Қиёсий таҳлил

“Лойиҳалаш” ва “моделлаштириш” тушунчалари ўртасидаги ўхшашлик ва фарқли жиҳатларни таҳлил этинг.

Симптом

Педагогнинг лойиҳавий фаолиятга амалий тайёрлиги...

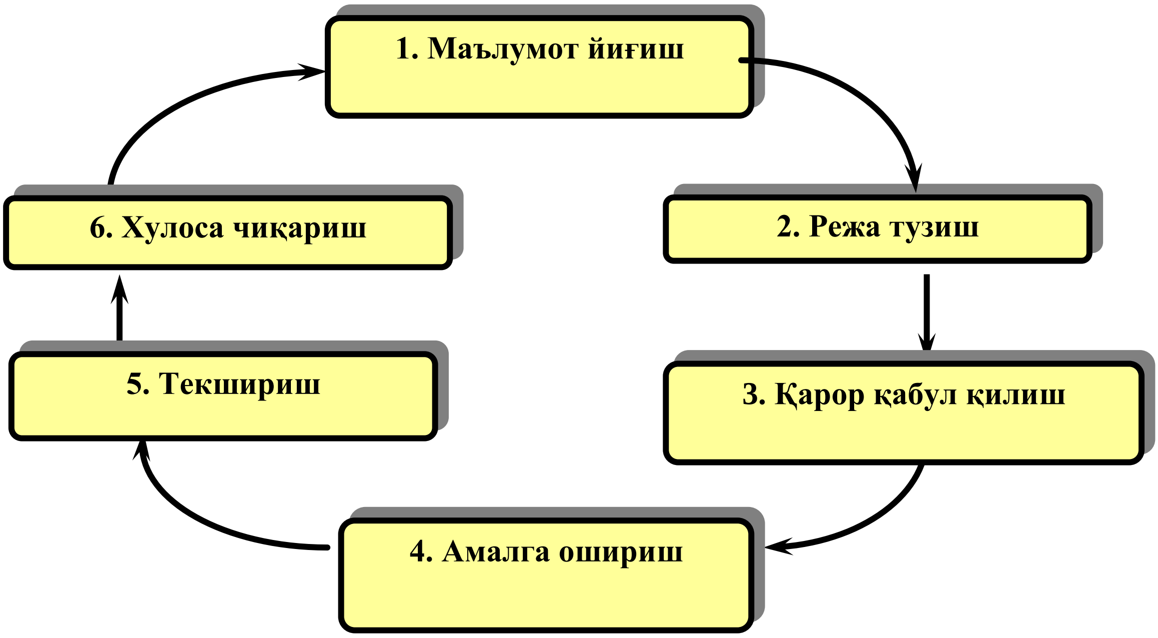
Амалий кўникма

Лойиҳавий фаолият алгоритмини тузинг.

“ЛОЙИҲА” МЕТОДИ - бу таълим олувчиларнинг индивидуал ёки гуруҳларда белгиланган вақт давомида, белгиланган мавзу бўйича ахборот йиғиш, тадқиқот ўтказиш ва амалга ошириш ишларини олиб боришидир. Бу методда таълим олувчилар режалаштириш, қарор қабул қилиш, амалга ошириш, текшириш ва хулоса чиқариш ва натижаларни баҳолаш жараёнларида иштирок этадилар. Лойиҳа ишлаб чиқиш якка тартибда ёки гуруҳий бўлиши мумкин, лекин ҳар бир лойиҳа ўқув гуруҳининг биргаликдаги фаолиятининг мувофиқлаштирилган натижасидир.

Лойиҳа ўрганишга хизмат қилиши, назарий билимларни амалиётга тадбиқ этиши, таълим олувчилар томонидан мустақил режалаштириш, ташкиллаштириш ва амалга ошириш имкониятини ярата оладиган бўлиши керак.

Қуйидаги чизмада “Лойиҳа” методининг босқичлари келтирилган.



“Лойиҳа” методининг босқичлари

“Лойиҳа” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Муҳандис-педагог лойиҳа иши бўйича топшириқларни ишлаб чиқади. Таълим олувчилар мустақил равишда дарслик, схемалар, тарқатма материаллар асосида топшириққа оид маълумотлар йиғадилар.

2. Таълим олувчилар мустақил равишда иш режасини ишлаб чиқадилар. Иш режасида таълим олувчилар иш босқичларини, уларга ажратилган вақт ва технологик кетма-кетлигини, материал, асбоб-ускуналарни режалаштиришлари лозим.

3. Кичик гуруҳлар иш режаларини тақдимот қиладилар. Таълим олувчилар иш режасига асосан топшириқни бажариш бўйича қарор қабул қиладилар. Таълим олувчилар муҳандис-педагог билан биргаликда қабул қилинган қарорлар бўйича эришиладиган натижаларни муҳокама қилишади. Бунда ҳар хил қарорлар таққосланиб, энг мақбул вариант танлаб олинади. Муҳандис-педагог таълим олувчилар билан биргаликда “Баҳолаш варақаси”ни ишлаб чиқади.

4. Таълим олувчилар топшириқни иш режаси асосида мустақил равишда амалга оширадилар. Улар индивидуал ёки кичик гуруҳларда ишлашлари мумкин.

5. Таълим олувчилар иш натижаларини ўзларини текширадилар. Бундан ташқари кичик гуруҳлар бир-бирларининг иш натижаларини

текширишга ҳам жалб этиладилар. Текширув натижаларини “Баҳолаш варақаси”да қайд этилади.

6. Муҳандис-педагог ва таълим олувчилар иш жараёнини ва натижаларни биргаликда якуний суҳбат давомида таҳлил қилишади. Ўқув амалиёти машғулотларида эришилган кўрсаткичларни меъёрий кўрсаткичлар билан таққослайди. Агарда меъёрий кўрсаткичларга эриша олинмаган бўлса, унинг сабаблари аниқланади.

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР

1-мавзу: 03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил етиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори мазмун-моҳияти ва ундан келиб чиққан вазифалар. (2 соат)

Режа:

1. 03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори мазмун-моҳияти
2. Қарордан келиб чиққан вазифалар

Таянч тушунчалаг: иқтидорли ёшлар, математика, халқаро олимпиадалар, педагогика, методика, қарор, вазифалар

1.1. 03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил етиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори мазмун-моҳияти

Мамлакатимизда истиқболли ёшларни қўллаб-қувватлаш, уларнинг иқтидорини рўёбга чиқариш, илмий-тадқиқот ва инновацион фаолиятини самарали йўлга қўйиш учун қўшимча шарт-шароитлар яратиш борасида изчил чора-тадбирлар амалга ошириб келинмоқда.

Шу билан бирга, улғайиб келаётган ёш авлоднинг илм эгаллашга бўлган иштиёқи ва интеллектуал салоҳиятини ошириш, шунингдек халқаро майдонда мамлакатимизнинг нуфузини янада юксалтириш учун иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини такомиллаштириш зарурати мавжуд.

Ёшларни амалга оширилаётган ислоҳотларнинг фаол иштирокчисига айлантириш, илм-фанни ўзлаштиришга бўлган рағбатини ошириш, изланувчанлик ва яратувчанлик фаолиятига кэнг жалб қилиш, жаҳон миқёсида Ватанимиз довруғини кэнг таратган аждодларга муносиб авлодни тарбиялаш мақсадида 03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори қабул қилинди.

Қарор билан Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги тизимининг белгиланган штатлар сони доирасида ушбу вазирлик тузилмасида 14 та штат бирлигидан иборат Фан олимпиадалари бўйича иқтидорли ўқувчилар билан ишлаш департаменти ташкил этилди ва унинг асосий вазифалари белгиланди.

Жумладан:

иқтидорли ўқувчи ёшларни аниқлаш, улар фаолиятини илмий ва услубий жиҳатдан таъминлаб бориш, соҳада илғор тажрибаларни оммалаштириш ва улар асосида таълим муассасалари учун тавсия ва қўлланмалар ишлаб чиқиш;

умумий ўрта таълим мактаблари, академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари ўқувчилари ўртасида маҳаллий ва халқаро, шу жумладан нодавлат фан олимпиадаларини ташкил этиш, уларнинг халқаро олимпиадалардаги иштирокини таъминлаш;

юқори малакали мутахассисларни жалб қилган ҳолда олимпиадалар учун доимий янги назорат материалларини ишлаб чиқиш;

халқаро олимпиадалар иштирокчиларини юқори малакали мутахассислар, шу жумладан олимлар, профессор-ўқитувчилар, хорижлик мутахассисларни жалб қилган ҳолда тайёрлаш, инглиз тили ва рус тили фанларидан мулоқот қилиш кўникмаларини шакллантириш мақсадида махсус курслар ташкил этиш;

Президентнинг 2019 йил 3 майдаги “Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорига мувофиқ фан олимпиадалари ғолибларини рағбатлантиришнинг янги тизими жорий этилди.

Қарорга кўра қуйидаги фан олимпиадаларида ғолибликни қўлга киритган ўқувчилар ва уларнинг ўқитувчилари бир марталик пул мукофотлари билан тақдирланади: Халқаро математика олимпиадаси (International Mathematical Olympiad (IMO)), Халқаро физика олимпиадаси (International Physics Olympiad (IPhO)), Халқаро кимё олимпиадаси (International Chemistry Olympiad (IChO)), Халқаро биология олимпиадаси (International Biology Olympiad (IBO)), Халқаро информатика олимпиадаси (International Olympiad in Informatics (IOI)).

Пул мукофотари миқдори:

1-ўрин (олтин медаль) учун – ўқувчига базавий ҳисоблаш миқдорининг

500 баравар (111,5 млн. сўм), ўқитувчисига – 450 баравар (100,35 млн. сўм);

2-ўрин (кумуш медаль) учун – ўқувчига базавий ҳисоблаш миқдорининг 300 баравар (66,9 млн. сўм), ўқитувчисига – 250 баравар (55,75 млн. сўм);

3-ўрин (бронза медаль) учун – ўқувчига базавий ҳисоблаш миқдорининг 200 баравар (44,6 млн. сўм), ўқитувчисига –150 бараварида (33,45 млн. сўм).

Халқаро фан олимпиадалари ғолибларини тайёрлаган ўқитувчилар ва таълим муассасаси директорлари навбатдаги ўқув йили учун директор жамғармасидан қуйидагича қўшимча устама оладилар: 1-ўрин (олтин медаль) учун – 200%; 2-ўрин (кумуш медаль) учун – 175%; 3-ўрин (бронза медаль) учун – 150%.

Юқоридаги нуфузли халқаро олимпиадаларда медал билан тақдирланган ўқувчилар Олий таълим муассасаларига имтиҳонларсиз имтиёзли равишда қабул қилинади.

Асосий олимпиадаларнинг республика босқичида ғолибликни қўлга киритган ўқувчилар ихтисослик фани бўйича давлат олий таълим муассасаларига кириш имтиҳонларида максимал балл олиш ҳуқуқини берувчи ва уч йил давомида амал қилувчи сертификат тақдим қилинади. Уларни тайёрлаган ўқитувчилар эса, қуйидагича бир марталик пул мукофотлари билан тақдирланади:

1-ўрин (олтин медаль) учун – базавий ҳисоблаш миқдорининг 50 бараварида (11,15 млн. сўм);

2-ўрин (кумуш медаль) учун – базавий ҳисоблаш миқдорининг 35 бараварида (7,8 млн. сўм);

3-ўрин (бронза медаль) учун – базавий ҳисоблаш миқдорининг 30 бараварида (6,69 млн. сўм).

Таълим муассасаларида ўқитувчи бўлиб фаолият юритаётган халқаро олимпиадалар ғолиблари лавозим маошига 150 фоиз, асосий олимпиадалар республика босқичи ғолиблари лавозим маошига ҳар ой 100 фоизлик устама ҳақи тўланади.

Олий таълим муассасасини тамомлаган олимпиада ғолиблари Вазирлар маҳкамаси ҳузуридаги Мутахассисларни хорижда тайёрлаш ва ватандошлар билан мулоқот қилиш бўйича “Эл-юрт умиди” жамғармаси томонидан шакллантириладиган истиқболли мутахассислар захирасига киритилади.

Бундан ташқари, юқорида таъкидланган қарорга мувофиқ математика, физика, кимё, биология ҳамда информатика ва ахборот технологиялари фанларидан ҳар йили бир марта ўтказиладиган қўшимча республика олимпиадаси жорий этилган бўлиб, унинг ғолибларига қуйидагича бир марталик пул мукофотлари белгиланган:

1-ўрин (олтин медаль) учун – ўқувчига базавий ҳисоблаш миқдорининг 100 (22,3 млн. сўм), ўқитувчисига – 80 баравар (17,8 млн. сўм);

2-ўрин (кумуш медаль) учун – ўқувчига базавий ҳисоблаш миқдорининг 85 (18,9 млн. сўм), ўқитувчисига – 65 баравар (14,49 млн. сўм);

3-ўрин (бронза медаль) учун – ўқувчига базавий ҳисоблаш миқдорининг 70 (15,6 млн. сўм), ўқитувчисига –50 бараварида (11,15 млн. сўм).

1.2. Қарордан келиб чиққан вазифалар

Педагог кадрлар тайёрловчи олий таълим муассасалари математика ва информатика таълим йўналиши битирувчилари қарорни рўёбга чиқаришда бевосита иштирок этишади. Шунинг учун олий таълим муассасалари юқори малакали кадрлар тайёрлашда олдида қўйидаги вазифалар турибди:

Педагог кадрлар тайёрловчи олий таълим муассасаларида талабаларга фанларни ўқитиш методикаси ва бошқа фанлардан ўқув дастурларини халқаро олимпиадалар талабларига мослаштириш, битирувчи талабаларга умумий ўрта таълим муассасаларига ишга келишда мазкур йўналишда тайёр ҳолда келишларини таъминлаш;

Иқтидорли ўқувчиларни танлаш ва мақсадли тайёрлаш бўйича инновацион методларини ишлаб чиқиш ва жорий этишга йўналтирилган илмий изланишлар олиб бориш;

Иқтидорли ўқувчилар билан ишлаш соҳасида халқаро алоқаларни ўрнатиш, фундаментал ва амалий тадқиқотлар ўтказиш, халқаро лойиҳаларни ишлаб чиқиш ва амалга ошириш, халқаро илмий анжуманлар ва симпозиумларни ташкил этиш ва ўтказишда иштирок этиш ;

Олимпиада натижаларини бошқа давлатлар натижалари билан қиёсий таққослаш;

соҳадаги илғор тажрибани оммалаштириш ва унинг асосида таълим муассасалари учун тавсиялар ва қўлланмалар ишлаб чиқишда иштирок этиш;

ўқитишнинг инновацион усулларидан фойдаланган ҳолда математика бўйича педагог кадрларнинг малакасини ошириш бўйича ўқув-услубий тавсиялар тайёрлаш.

Таълимнинг барча босқичларида олимпиадаларга мақсадли тайёрлаш тизиминини танқидий ўрганиш ва халқаро тажрибаларга асосланиб қайта кўриб чиқиш.

Ўқитувчининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини эгаллаш.

Математика олимпиада ва мусобақаларда тақдим этиладиган масалалар ечиш усулларини пухта ўрганиш.

Математика ўқув дастурлари ҳамда ўқув адабиётлари мазмунига ўзгартириш ва қўшимчалар киритиш;

Мавзуга оид саволлари

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон қарорига кўра Халқаро математика олимпиадаси (International Mathematical Olympiad (IMO)) кумуш медални қўлга киритган ўқувчига ва унинг ўқитувчисига қандай бир марталик пул мукофотлари билан тақдирланиши кўзда тутилган?

2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон қарорига кўра Халқаро математика олимпиадасида (International Mathematical Olympiad (IMO)) кумуш медал совриндорини тайёрлаган ўқитувчи ва таълим муассасаси директори навбатдаги ўқув йили учун директор жамғармасидан қандай миқдорла қўшимча устама оладилар?

3. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон қарорига кўра Халқаро информатика олимпиадаси (International Olympiad in Informatics (IOI)) кумуш медални қўлга киритган ўқувчига ва унинг ўқитувчисига қандай бир марталик пул мукофотлари билан тақдирланиши кўзда тутилган?

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сон Фармони.

2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 5 июлдаги “Ёшларга оид давлат сиёсати самарадорлигини ошириш ва Ўзбекистон ёшлар иттифоқи фаолиятини қўллаб-қувватлаш тўғрисида”ги 5106-сон Фармони.

3. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.

4. 03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил етиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори

5. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 29 апрелдаги ПФ-5712-сон “Ўзбекистон Республикаси халқ таълими тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги фармони

6. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 6 апрелдаги 187-сон “Умумий ўрта ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълимининг давлат таълим стандартларини тасдиқлаш тўғрисида”ги қарори

2-мавзу: Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашнинг холати ва замонавий тенденциялари. (2 соат)

Режа:

1. Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашнинг холати
2. Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашнинг замонавий тенденциялари.

Таянч тушунчалар: *иқтидогли ёшлаr, математика, халқаro олимпиадалар, мақсадли тайёrлаш, тепдепциялar*

2.1. Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашнинг холати

Мамлакатимизда барча соҳаларда олиб борилаётган ислоҳотлар йилдан-йилга ривожланиб бориши, ахборот коммуникация технологиялари жадаллик билан ривожланаётган, глобаллашув, дунё бозорида рақобат тобора кучайиб бораётган бир даврда, демократик тараққиёт, модернизация ва янгиланиш борасида белгиланган мақсадларга эришишда энг муҳим қадрият ва ҳал қилувчи куч бўлган билимли ва интеллектуал ривожланган авлодни тарбиялаш муҳим омил бўлмоқда.

Халқаро Математика Олимпиадаси дунёнинг ёш математиклари учун энг катта ва энг муҳим форум ҳисобланади. У спорт Олимпиадаси каби нуфузли бўлиб, унда иштирок этиш ҳар бир мамлакат учун катта шарафдир. Ҳар йили июль ойида, дунёнинг 100 дан ортиқ мамлакатидан келган 500-600 нафар иқтидорли ёшлар ўзаро беллашадилар, мулоқотда бўлишади ва тажриба алмашишади.

Биринчи халқаро Математика Олимпиадаси Брашовда 1959 йилда бўлиб ўтган ва унда Болгария, Венгрия, Шарқий Германия, Польша, Румыния, СССР, Чехословакия терма жамоалари иштирок этган.

Ўзбекистон жамоаси биринчи бор 1997 йили Аргентинада бўлиб ўтган Халқаро Математика Олимпиадасида 3 нафар иштирокчи ва 1 нафар раҳбар билан қатнашган, аммо совринли ўринлар бўлмаган.

Ушбу омадсиз иштирок натижасида ҳал қилиниши зарур бўлган масалалар, Олимпиадага бир жамоа сифатида иштирок этиш, иштирокчиларни тайёрлашдаги йўл қўйилган кўплаб муаммолар аниқланган.

Ўзбекистон халқ таълими вазирлиги томонидан бу муаммолар жиддий ўрганилди, уларни бартараф қилиш, олимпиадага пухта тайёргарлик кўриш ва иштирокчиларимиз учун барча шарт-шароитларни яратиб бериш бўйича кўплаб ижобий ишлар амалга оширилди.

Ўзбекистон терма жамоаси 1999 йилдан бошлаб Халқаро Математика олимпиадасида иштирок этиб келмоқда ва биринчи медални 2000 йилда Жанубий Кореяда қўлга киритдик.

Айни пайтда, бошқа мамлакатлар ва Олимпиада ташкилотчилари бизнинг мактаб ўқувчиларимизнинг математикадан билим даражаси анча юқори эканлигини тан олишди ва Ўзбекистон жамоаси улар учун жиддий рақиб эканлигини исботлади.

Ўзбекистон терма жамоаси ўтган даврда 19 марта Олимпиадада иштирок этиб, 9 та кумуш ва 27 та бронза медалларини қўлга киритганини тақдим этилган жадвалда кўришимиз мумкин. Бундан ташқари 30 дан ортиқ иштирокчилар Олимпиаданинг махсус дипломлари билан тақдирланди.

Халқаро Математик олимпиадасида Ўзбекистон катта ёшли талабалар миллий терма жамоаси натижалари

Иштирок этган йили, ташкилотчи-мамлакат	**Терма жамоа аъзолари сони**	**Кумуш медаль**	**Бронза медаль**
1997, Аргентина	3	0	0
1999, Руминия	6	0	0
2000, Жанубий Корея	6	0	2
2001, АҚШ	6	1	3
2002, Шотландия	6	0	0
2003, Япония	6	1	1
2004, Греция	6	0	3
2006, Словения	6	0	2
2007, Вьетнам	6	1	3
2008, Испания	6	0	4
2009, Германия	6	1	2
2010, Қозоғистон	6	4	1
2011, Нидерланд Қироллиги	6	0	1
2015, Таиланд	6	0	3
2016, Гонконг	6	0	1

2017, Бразилия	5	1	0
2018, Руминия	6	0	0
2019, Буюк Британия	6	0	1
2020, Россия (онлайн)	6	0	0
Жами	**104**	**9**	**27**

Дастлабки медалларни ва жами медалларнинг аксарият қисмини Бухоро вилоятининг машҳур Қоракул мактаб-интернатининг Ўзбекистонда хизмат кўрсатган ўқитувчи, ташаббускор математик устозимиз Т. Жумаев ўқувчилари томонидан қўлга киритилган бўлиб, бу қаторга сўнги йилларда бошқа вилоятлар ҳам қўшилиб, ғолиблар географиясининг кенгайиши диққатга сазовордир.

Халқаро Математика Олимпиадаси медаллари билан тақдирланганлар ўқувчилар

№	**ФИШ**	**Худуд**	**Иштирок этган йили**	**Медаллар**
1.	Умид Рахмонов	Бухоро	1999, 2000, 2001	Бронза(2000) и кумуш(2001) медали
2.	Ўткир Болтаев	Бухоро	2006, 2007	Бронза(2006) ва кумуш (2007) медали
3.	Диёра Салимова	Самарканд	2008, 2009	Бронза(2008) ва кумуш (2009) медали
4.	Дониёр Нафасов	Бухоро	2003	Кумуш медаль
5.	Зулфиддин Камолов	Бухоро	2000, 2001	Бронза (2000) ва Бронза (2001) медали
6.	Азизхон Назаров	Бухоро	2009,2010	Бронза (2009) ва Бронза (2010) медали
7.	Жафар Абдурахимов	Самарканд	2010	Кумуш медаль
8.	Иброхимбек Акрамов	Самарканд	2010	Кумуш медаль
9.	Зариф Ибрагимов	Самарканд	2010	Кумуш медаль
10.	Умидахон Жураева	Самарканд	2010	Кумуш медаль
11.	Абдумалик	Бухоро	2017	Кумуш медал

	Абдукаюмов			
12.	Нозим Комилов	Андижон	2001	Бронза медаль
13.	Умиджон Раджабов	Кашкадарё	2001	Бронза медаль
14.	Азиз Журакулов	Бухоро	2002, 2003	Бронза медаль (2003)
15.	Жалол Курбонов	Бухоро	2004	Бронза медаль
16.	Бекзод Тиллаев	Бухоро	2004	Бронза медаль
17.	Зафар Жумаев	Бухоро	2004	Бронза медаль
18.	Жавлонбек Бозоров	Бухоро	2006	Бронза медаль
19.	Бахриддин Абдиев	Кашкадарё	2007	Бронза медаль
20.	Озод Зойиров	Бухоро	2007	Бронза медаль
21.	Хамрозжон Чуянов	Бухоро	2007	Бронза медаль
22.	Шерзод Сафоев	Бухоро	2008	Бронза медаль
23.	Фарход Хайдаров	Наманган	2008	Бронза медаль
24.	Алишер Эшонкулов	Навоий	2008	Бронза медаль
25.	Аброр Пирнапасов	Бухоро	2008, 2009	Бронза медаль (2009)
26.	Жавлон Исомуродов	Бухоро	2011	Бронза медаль
27.	Жамшид Яхшиев	Бухоро	2015	Бронза медаль
28.	Аббос Мухаммедов	Бухоро	2015	Бронза медаль
29.	Сардор Базарбаев	Тошкент ш	2015	Бронза медаль
30.	Хуршид Жураев	Тошкент ш	2016	Бронза медаль
31.	Жасурбек Имомов	Бухоро	2019	Бронза медаль
	Жами			**27 та бронза ва 9 та кумуш медаллар**

Жадвалда кўриб турганингиздек, энг кўп ғолиблар Бухоро вилоятидан, 5 нафар Самарқанддан, 2 нафардан Тошкент шаҳри ва Қашқадарё вилоятидан ҳамда Андижон, Навоий, Наманган, Фарғона вилоятларидан 1 нафардан иштирок этишган.

Терма жамоа аъзо-қизлари Самарқанд шаҳридан Умидахон Жўраева, Муҳаё Аҳматова, Диёра Салимовалар, Мафтуна Саматбоева Ҳукуматимиз томонидан Зулфия номидаги Давлат мукофоти, Бухоро вилоятидан Умид Рахмонов Шухрат медали, Тошкент шаҳридан Сардор Базарбаев ва Бухоро вилоятидан Жасурбек Имомов Мард ўғлон Давлат мукофоти билан тақдирландилар.

20 йилдан буён бу олимпиадаларга ўқувчиларимизнинг Она юрти шарафини ҳимоя қилиш учун бор кучи ва билими билан ғолибликка интилиши, иштиёқини ўлчаб бўлмайди. Буларнинг бари бизга давлатимиз томонидан яратиб берилган шароит ва азиз устозларнинг фидокорона меҳнати самарасидир. Аммо, олдимизда яна бир поғона марра- олтин медални қўлга киритиш марраси турибди ва биз иқтидорлилар билан тизимли ишлашни янада яхшиласак, ўқувчиларимиз ғолиблар шохсупасининг чуққисига кўтарилиши ҳеч гап эмас.

Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашнинг холатини танқидий қараб чиқайлик.

Қуйидаги муаммолар ҳал этилмаган.

1. Педагог кадрлар тайёрловчи олий таълим муассасаларида талабаларга қизиқарли математика ва олимпиада масалаларига бағишланган мавзулар асосий фан сифатида ўқитилмайди ва шунинг учун битирувчи талабаларимиз умумий ўрта таълим муассасаларига ишга келишда мазкур йўналишда тайёр эмас.
2. Иқтидорли ўқувчиларни танлаш ва мақсадли тайёрлаш бўйича инновацион методлари ишлаб чиқилмаган ва жорий этишга йўналтирилган илмий изланишлар олиб борилмаяпти.
3. Иқтидорли ўқувчилар билан ишлаш соҳасида халқаро алоқалар ўрнатилмаган, фундаментал ва амалий тадқиқотлар ўтказилмаяпти.
4. Олимпиада натижаларини бошқа давлатлар натижалари билан қиёсий таққосланмаяпти, камчиликлар таҳлил қилинмаяпти.
5. Соҳадаги илғор тажрибани оммалаштириш ва унинг асосида таълим муассасалари учун тавсиялар ва қўлланмалар деярли ишлаб чиқилмаган.
6. Ўқитишнинг инновацион усулларидан фойдаланган ҳолда математика бўйича педагог кадрларнинг малакасини ошириш бўйича ўқув-услубий тавсиялар тайёрланмаган.
7. Ўқитувчининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини

ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини эгаллаш бўйича бўйича ўқув-услубий тавсиялар тайёрланмаган.

8. Математика олимпиада ва мусобақаларда тақдим этиладиган масалалар ечиш усулларини пухта ўрганилмаган, асосий урғу тестларга берияпти.

9. Иҳтисослаштирилган таълим муассасалари учун математика ўқув дастурлари ҳамда ўқув адабиётлари мазмунига ўзгартириш ва қўшимчалар киритилмаган.

2.2. Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашнинг замонавий тенденциялари.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” қарорига мувофиқ ҳар бир туманда (шаҳарда) математика фанини чуқурлаштириб ўқитишга ихтисослаштирилган мактаблар очилиши кўзда тутилган.

2008 йил 7 августдаги Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг “Айрим фанлар чуқур ўрганиладиган давлат ихтисослаштирилган умумтаълим муассасалари фаолиятини такомиллаштириш тўғрисида”ги 173-сонли қарорида ихтисослаштирилган умумтаълим муассасасининг асосий вазифалари белгиланган:

умумий ўрта таълимнинг чуқурлаштирилган фанлари бўйича ўқувчиларнинг давлат таълим стандартлари талабларидан ошадиган чуқур таълим тайёргарлигини таъминлаш;

ўқувчиларнинг ижодий салоҳиятини намоён қилиш ва фаоллаштириш;

ҳар бир ўқувчининг индивидуал хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда мустақил тадқиқотчилик фаолияти кўникмаларини шакллантириш ва ривожлантириш;

профессионал дастур таълимларини онгли танлаш ва кейинчалик ўзлаштириш учун асос яратиш.

Юкланган вазифаларни бажариш учун ихтисослаштирилган синф ва ихтисослаштирилган умумтаълим муассасаси қуйидаги функцияларни амалга оширади:

республика аҳолисининг болаларни ихтисослаштирилган чуқур ўқитишга бўлган эҳтиёжини таъминлаш;

ўқувчиларнинг қобилиятлари, қизиқишларини ҳисобга олган ҳолда умумий ва ихтисослаштирилган шахсга йўналтирилган ўқитишнинг таълим дастурларини амалга ошириш;

ўқувчиларнинг иқтидори ва камол топиши динамикасининг психологик-педагогик диагностикасини амалга ошириш;

таълимнинг узвийлиги ва узлуксизлиги асосида интенсив интеллектуал ривожлантиришни, чуқурлаштирилган ихтисослаштирилган ўқитишни таъминлаш;

асосий ва қўшимча таълим дастурларини ишлаб чиқиш ва улар интеграциясини амалга ошириш, лойиҳадаги ўқитишга ўтган ҳолда таълим жараёнини индивидуаллаштириш ва табақалаштириш;

таълим жараёнига инновация, педагогика ва замонавий ахборот-коммуникация технологияларини жорий этиш;

ўқувчиларнинг маълумоти даражаси ошишига, самарали тайёрланишига, олий таълим муассасаларига киришига ёрдам берадиган шарт-шароитлар яратиш;

ўқувчиларнинг республика ва халқаро семинарлар, конференциялар, фестиваллар ва бошқа интеллектуал-ижодий тадбирларда иштирок этиши учун шарт-шароитлар яратиш;

иқтидор ва истеъдодни аниқлаш ҳамда камол топтириш бўйича ўқувчиларни фанлар олимпиадалари, танловлар ва бошқа тадбирларда қатнашишга тайёрлаш;

ўқувчиларнинг илмий гуруҳларини ташкил этиш ва фаолиятини йўлга қўйиш.

Шу вазифалар ўқувчиларнинг қобилиятлари, қизиқишларини ҳисобга олган ҳолда умумий ва ихтисослаштирилган шахсга йўналтирилган ўқитишнинг асосий ва қўшимча таълим дастурларини ишлаб чиқиш ва уларнинг интеграциясини таъминлаш, ўқувчиларни фанлар олимпиадалари ва мусобақаларга тайёрлаш бўйича илмий асосланган ва натижаларни кафолатлайдиган методикаларни, адабиётларни яратиш муаммоларини ҳал этишга чорламоқда.

Шу билан бирга математика фанидан иқтидор ва қобилият тушунчаларига, чуқурлаштирилган таълимни ташкил этишга оид педагогик ва психологик қарашларнинг кўплиги ҳамда улардан айримлари бир-бирини инкор қилиши натижасида ҳосил бўлган қийинчиликларга эътиборни қаратиш лозим.

Бундан ташқари, математикага ихтисослаштирилган умумтаълим муассасаларини замонавий педагогик методикалар ва технологияларни эгаллаган малакали педагог кадрлар билан таъминлаш муаммоси педагогика олий таълим муассасалари олдида турибди. Бунинг учун тегишли таълим йўналиши ДТС, ўқув режалари, фан дастурларига илғор давлатлар тажрибаларини инобатга олган ҳолда тегишли тузатишларни киритиш мақсадга мувофиқ.

Математикани чуқур ўрганишга қаратилган таълимий концепциясини яратишга илғор тажрибаларга эга бўлган мутахассислар жалб қилинса, ўқувчиларнинг иқтидор ва истеъдодни аниқлаш ҳамда камол топтириш тизимини шакллантириш мақсадига эришилади.

Шу билан бирга қўйидаги амалий характердаги муаммолар ўз ечимини топиши лозим:

1. Математикадан ўқувчиларни тайёрлаш бўйича методик тавсияларни ишлаб чиқиш ва оммалаштириш
2. Математикадан олимпиада топшириқларнинг умумий тавсифи яратилмаган
3. Мактаб ўқувчиларини математикадан ностандарт масалаларни ечишга тайёрлаш бўйича методик тавсияларни ишлаб чиқиш ва оммалаштириш.
4. Математикадан асосий олимпиаданинг биринчи босқичига тайёрлашда фан ўқитувчининг роли ўрганилмаган.
5. Асосий олимпиадага оид асосий мавзулар (силлабус) белгиланмаган.
6. Математикадан олимпиада топшириқларини баҳолаш бўйича асосланган методик тавсияларни ишлаб чиқилмаган
7. Илғор давлатлар олимпиада топшириқлари таҳлили етарли эмас.
8. Асосий олимпиаданинг биринчи ва иккинчи босқичлари назорат материалларини шакллантириш бўйича методик тавсиялар ишлаб чиқилмаган.
9. Олимпиада мавзулари бўйича ўқув адабиётларни яратиш ва нашр қилиш.

Мавзуга оид саволлари

1**.** Биринчи Халқаро Математика Олимпиадаси Руминиянинг қайси шаҳрида бўлиб ўтган?

2. Ўзбекистон ўқувчилари биринчи марта иштирок этган Халқаро Математика Олимпиадаси қайси давлатда бўлиб ўтган?

3. Ўзбекистон ўқувчилари қайси давлатда бўлиб ўтган Халқаро Математика Олимпиадасида биринчи бронза медалини қўлга киритган?

Фойдаланилган адабиётлар

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” қарори

2. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2008 йил 7 августдаги “Айрим фанлар чуқур ўрганиладиган давлат ихтисослаштирилган умумтаълим муассасалари фаолиятини такомиллаштириш тўғрисида”ги 173-сонли қарори

3. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 6 апрелдаги 187-сон “Умумий ўрта ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълимининг давлат таълим стандартларини тасдиқлаш тўғрисида”ги қарори

Интернет ресурслари:

1. . http://www.ziyonet.uz – Ziyonet ахборот-таълим ресурслари портали
2. http://www.wikipedia.org – онлайн энциклопедия.
3. http://www.mccme.ru/ – Москва узлуксиз математик таълими маркази.

3-мавзу: Математика олимпиадаларга мақсадли тайёрлашда илғор миллий ва хорижий тажрибалар. (2 соат)

Режа:

3.1. Халқаро олимпиадаларга тайёрлаш бўйича мавзулар (силлабус)

3.2. Олимпиадада таклиф этилган масала ечимини баҳолаш

Таянч тушунчалар: *иқтидорли ёшлар, математика, халқаго олимпиадалар, мақсадли тайёрлаш, мавзулар, баҳолаш*

3.1. Халқаро олимпиадаларга тайёрлаш бўйича мавзулар (силлабус)

Қуйидаги мавзулар бўйича тайёрлаш тавсия этилади.

1. **Сонлар назарияси.**

Бўлиниш пазариясининг асослари . Евклид алгоритми. Арифметиканинг асосий теоремаси. Туб сонлар. Ферма туб сонлари.

Таққосламалар назарияси . Ферма, Вилсон ва Эйлер теоремалари. Қолдиқлар ҳақида Хитой теоремаси. Квадратик чегирмалар. Сонлар назариясининг асосий функциялари.

Диофант тенгламалари. Диофантнинг чизиқли тенгламалари ва системалари. Юқори даражали диофант тенгламалари. Каталан ва Пелл тенгламалари ва бошқалар.

2. **Алгебра.**

Кўпҳадлар . Кўпҳадларнинг бўлиниши. Кўпҳад илдизлари. Безу, Виет теоремалари. Кўпҳадлар арифметикасининг асосий теоремаси. Алгебранинг асосий теоремаси. Ҳақиқий, бутун ва рационал коэффициентли кўпҳадлар. Келтирилмайдиган кўпҳадлар. Кўп ўзгарувчили кўпҳадлар. Симметрик кўпҳадлар.

Тенгсизликлар . Ўрта қийматлар ҳақидаги классик тенгсизликлар. Коши-Буняковский-Шварц , Бернулли, Енсен, Гёльдер тенгсизликлари. Ҳосила тадбиқи. Мюрхед теоремаси.

Кетма-кетликлар. Рекуррент кетма-кетликлар. Қайтма кетма-кетликлар. Кетма-кетлик лимити. Қаторлар. Кетма-кетликнинг ҳосил қилиш функцияси.

Функциялар. Функция ҳоссалари ва уларни қўллаш. Функционал тенгламалар.

3. **Комбинаторика.**

Саралаш комбинаторикаси . Ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар, комбинациялар. Шпернер тўпламлари.

Комбинатор масалалар . Дирихле принципи. Экстремал қоида. Жуфт-тоқлик. Инвариантлар. Бўяш ва қоплашлар. Тортишлар ва қуйишлар. Ўйинлар ва мусобақалар. Стратегиялар ва алгоритмлар.

Графлар. Графлар назариясининг тили. Графларнинг энг содда турлари ва сонли характеристикалари. Дилворт теоремаси. Рамсей назарияси.

4. **Тўпламлар.**

Тўпламлар алгебраси . Тўпламлар назариясининг тили. Тўпламлар устида амаллар. Акслантиришлар. Тўпламларни бўлаклаш. Муносабатлар.

Тўплам қуввати. Чекли ва чексиз тўпламлар. Кантор-Бернштейн теоремаси. Тўғри чизиқда ва текисликда нуқталар тўпламлар турлари.

5. **Геометрия.**

Классик геометрия . Учбурчаклар геометрияси. Кўпбурчаклар, айланалар. Геометрик тенгсизликлар.

Апалитик геометрия . Координаталар методи. Векторлар ва уларнинг қўлланилиши. Массалар геометрияси. Геометрияда комплекс сонлар.

Синтетик геометрия . Геометрик алмаштиришлар. Ҳаракат. Шал теоремаси. Ўхшашлик. Гомотетия . Алмаштиришлар композициялари. Инверсия. Аффин ва проектив алмаштиришлар.

Комбинатор геометрия . Қавариқ шакллар. Қавариқ қобиқ. Хелли теоремаси. Шпернер леммаси

3.2. Олимпиадада таклиф этилган масала ечимини баҳолаш

Баҳолаш- ҳар қандай таълим бериш жараёнининг муҳим қисми ҳисобланади.

Баҳолаш тизимини оқилона ташкил этиш, юзага келиши мумкин бўлган муаммо ва камчиликларнинг, жумладан, ўқувчининг норозилигини олдини олиш, соғлом рақобатни таъминлашда услубий аҳамиятга эга бўлган вазифаларидан бири ҳисобланади.

Қуйида биз баҳолаш бўйича тавсияларни берамиз.

Математика фанидан таклиф этилган масала ечимининг намунавий баҳолаш мезонлари

№	Баҳолаш мезони	Баллар
1	Масала хатосиз ва камчиликларсиз ечилган	10
2	Масала тўлиқ ечилган, аммо ечимга таъсир кўрсатмайдиган 1 та майда камчиликка йўл қўйилган	9
3	Масала тўлиқ ечилган, аммо ечимга таъсир кўрсатмайдиган 2-3 та майда камчиликларга йўл қўйилган	8
4	Масала тўғри ечилган, аммо фикрлаш мантиғига таъсир кўрсатмаётган ҳоллар қаралмаган	7
5	Агар масала ечими икки-учта қадамдан иборат бўлса, шулардан мураккаброқ бўлган қадамлар тўғри қаралгани учун	6
6	Агар масала ечими икки-учта қадамдан иборат бўлса, шулардан осонроқ бўлган қадамлар тўғри қаралгани учун	5
7	Масала ғояси тўғри келтирилган, аммо ечим қадамларида муҳим хатоларга йўл қўйилган	4
8	Масала ечилмаган, аммо унинг ечимига олиб келиши мумкин бўлган фойдали тасдиқлар исботланган	3
9	Масала ечилмаган, аммо унинг ечимига олиб келиши мумкин бўлган фойдали тасдиқлар исботланмасдан келтирилган	2
10	Масала ечими нотўғри, аммо айрим ҳолларни қарашга ҳаракат қилинганлиги ёки ҳақиқатга яқин чизма келтирилган	1
11	Масала умуман ечилмаган ёки ечим бирорта ҳам фойдали тасдиқларга эга бўлмаган	0

Изоҳ.

1. Мазкур намунавий баҳолаш мезонлари асосида ҳар бир масаланинг ечими мазмунига қараб хусусий баҳолаш мезони тузилиши тавсия этилади

2. Ҳар қандай тўғри ечим максимал 10 балл билан баҳоланади. Бу ҳолда масала ечими узун бўлгани, ёки хакамларга маълум бўлган ечимдан фарқли

бўлгани, ёки дарсликда мавжуд тасдиқлар келтирилиб уларни қайта исботламаганлиги учун балларни камайтириш таъкикланади.

Намунавий баҳолаш мезонлари асосида ҳар бир масаланинг ечими мазмунига қараб ҳусусий баҳолаш мезони (намуна)

Масала. $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ кўпҳад $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$ шартларни қаноатлантиради. $P(12) + P(-8)$ қийматни ҳисобланг.

Масала ечими. $Q(x) = P(x) - 10x$ кўпҳад учун $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$ тенгликлар бажарилганлиги боис $Q(x) = P(x) - 10x = (x-1)(x-2)(x-3)(x-A)$ бўлади, бу ерда A - ҳақиқий сон. Демак, $P(12) + P(-8) = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot (12 - A) + 120 + (-9)(-10)(-11)(-8 - A) - 80 = 19840$.

Баҳолаш мезони .

1. a, b, c лар учун тенгламалар систэмаси ёзилса : **2 балл**

2. $P(x)$ учун Лагранж интерполяцион формуласи ёзилса : **2 балл**

3. $Q(x) = P(x) - 10x = (x-1)(x-2)(x-3)(x-A)$ ёзилса : **4 балл.**

3. $Q(x) = P(x) - 10x = (x-1)(x-2)(x-3)(x-A)$ исботланса : **6 балл.**

4. Тўлиқ ечим учун: **10 балл.**

Изоҳ. 1,2,3,4 бандлардаги bаллар қўшилмайди.

Мавзуга оид саволлари

1. Диофант тенгламалари ларга оид олимпиада масалалари математиканинг қайси бўлимига тегишли?

2. Коши-Буняковский-Шварц тенгсизлигига оид олимпиада масалалари математиканинг қайси бўлимига тегишли?

3. Дирихле принципига оид олимпиада масалалари математиканинг қайси бўлимига тегишли?

Фойдаланилган адабиётлар

4. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 6 апрелдаги 187-сон “Умумий ўрта ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълимининг давлат таълим стандартларини тасдиқлаш тўғрисида”ги қарори

Интернет ресурслари:

5. . http://www.ziyonet.uz – Ziyonet ахборот-таълим ресурслари портали

6. http://www.wikipedia.org – онлайн энциклопедия.

7. http://www.mccme.ru/ – Москва узлуксиз математик таълими маркази.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-амалий машғулот

Мавзу: Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда алгебра ва сонлар назариясига оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси. (2 соат)

Ишнинг мақсади: Тингловчиларга Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда тақдим этиладиган масалалар мавзулари ҳамда танланган мавзу бўйича масалалар ечиш методикаси билан таништириш

Амалий машғулот топшириқлари

Кўпҳадлар . Кўпҳадларнинг бўлиниши. Кўпҳад илдизлари. Безу, Виет теоремалари. Кўпҳадлар арифметикасининг асосий теоремаси. Алгебранинг асосий теоремаси. Ҳақиқий, бутун ва рационал коэффициентли кўпҳадлар. Келтирилмайдиган кўпҳадлар. Кўп ўзгарувчили кўпҳадлар. Симметрик кўпҳадлар.

Тенгсизликлар . Ўрта қийматлар ҳақидаги классик тенгсизликлар. Коши-Буняковский-Шварц , Бернулли, Енсен, Гёльдер тенгсизликлари. Ҳосила тадбиқи. Мюрхед теоремаси.

Кетма-кетликлар. Рекуррент кетма-кетликлар. Қайтма кетма-кетликлар. Кетма-кетлик лимити. Қаторлар. Кетма-кетликнинг ҳосил қилиш функцияси.

Функциялар. Функция ҳоссалари ва уларни қўллаш. Функционал тенгламалар.

Функционал тенгламаларни ечишнинг асосий усуллари.

Функционал тенгламалар кўплаб математика олимпиадаларида тақдим этилиб, уларда берилган шу тенгламаларни қаноатлантирадиган функцияларни топиш талаб қилинади. Шуни айтиш жоизки, функционал тенгламаларни ечиш учун умумий усул мавжуд бўлмасдан, ҳар бир тенгламага алоҳида қарашни талаб қилади. Айрим усуллар ўзининг мураккаблиги билан ажралиб туради.

1-мисол. Барча $x, y \in R$ лар учун

$$f(x+y) = x + yf(x) + (1-x)y \qquad (1)$$

Тенгламани қаноатлантирадиган $f : R \to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши: $f(x)$ функция (1) тенгламани барча $x, y \in R$ лар учун қаноатлантирсин.

Ҳусусий ҳолда $y=0$ деб олсак, $f(x)=x$ тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, $f(x)=x$ функциядан фарқли ҳеч қандай функция (1) тенгламани қаноатлантириши мумкин эмас. Аммо бу мулоҳазадан $f(x)=x$ ечим бўлиши келиб чиқмайди. Уни ечим бўлишини исботлаш учун $f(x)=x$ функция (1) ни қаноатлантиришини текшириш лозим.

Текшириш: $x+y=x+yx+(1-x)y$.

Демак, $f(x)=x$ функция (1) тенгламанинг ечими бўлади.

Жавоб: $f(x)=x$, $x\in R$.

Қуйидаги мисол функсионал тенгламадан топилган функцияни уни қаноатлантиришини текшириш муҳимлигини кўрсатади.

2-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун

$$f(x+y)=x+yf(x)+(1-\sin x)y \tag{2}$$

тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши: Ҳудди 1-мисолдек $y=0$ деб олсак, $f(x)=x$ тенгликни ҳосил қиламиз. $f(x)=x$ функцияни (2) га қуямиз.

Текшириш: $x+y\neq x+yx+(1-\sin x)y$.

Демак, $f(x)=x$ функция (2) тенгламанинг ечими бўлмайди.

Жавоб: Ечим мавжуд эмас.

3-мисол. $x,y\neq 0,\ x,y\neq 2013$ лар учун $(2013-x)\cdot f(x)-2x\cdot f(2013-x)=1$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\setminus\{0,2013\}\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши: $x=2013-t$, $x=t$ деб олсак қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} t\cdot f(2013-t)-2(2013-t)\cdot f(t)=1 \\ (2013-t)\cdot f(t)-2t\cdot f(2013-t)=1 \end{cases}.$$

1-тенгламани 2 га кўпайтирамиз:

$$\begin{cases} 2t\cdot f(2013-t)-4(2013-t)\cdot f(t)=2 \\ (2013-t)\cdot f(t)-2t\cdot f(2013-t)=1 \end{cases}$$

Охирги системадаги тенгламаларни қўшамиз: $-3(2013-t)\cdot f(t)=3$.

$t\neq 0,2013$ бўлганлиги учун $f(t)=\dfrac{1}{t-2013}$.

Ҳосил бўлган $f(x)=\dfrac{1}{x-2013}$ функцияни берилган тенгламани қаноатлантиришини кўрсатиш қолди. Ҳақиқатдан ҳам

$$(2013-x)\cdot\frac{1}{x-2013}-2x\cdot\left(\frac{1}{-x}\right)=-1+2=1 .$$

Демак, $f(x)=\dfrac{1}{x-2013}$, $x\neq 0,2013$, функция берилган тенгламанинг ечимидир.

Жавоб: $f(x)=\dfrac{1}{x-2013}$; $x\in R\setminus\{0,2003\}$.

4-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун $f(xy)=y^{2013}\cdot f(x)$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши: $x=1\Rightarrow f(y)=y^{2013}f(1)$. $f(1)=a=const$, деб олсак, у ҳолда $f(x)=a\cdot x^{2013}$. бўлади.

Текшириш: $a\cdot x^{2013}\cdot y^{2013}=y^{2013}\cdot a\cdot x^{2013}$. Демак, $f(x)=a\cdot x^{2013}$, $a=const$, кўринишдаги функция $f(xy)=y^{2013}\cdot f(x)$ тенгламанинг ечими бўлади.

Жавоб: $f(x)=a\cdot x^{2013}$, $a=const$.

5-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун $f(x+y)+f(y-x)=(y+2)\cdot f(x)+y(2y-x^2)$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши: $x=0 \Rightarrow f(y)+f(y)=(y+2)\cdot f(0)+2y^2$. $a=f(0)$ дэсак, $f(y)=y^2+\dfrac{ay}{2}+a$ тенгликка эга бўламиз. Натижани тенгламага қўямиз:

$$(x+y)^2+\frac{a}{2}(x+y)+a+(y-x)^2+\frac{a}{2}(y-x)+a=(y+2)(x^2+\frac{ax}{2}+a)+y(2y-x^2)$$

Соддалаштириб, барча x,y лар учун $ax(\dfrac{y}{2}+1)=0$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан $a=0$. Натижада $f(x)=x^2$ ни ҳосил қиламиз. Бу функция берилган тенгламани қаноатлантириши равшан.

Жавоб: $f(x)=x^2$.

6-мисол . Барча $x,y\in R$ лар учун $f(xy)=\sin y\cdot f(x)$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши: $x=1\Rightarrow f(y)=\sin y\cdot f(1)$. $a=f(1)$ белгилаш кирицак, $f(y)=a\cdot\sin y$ га эга бўламиз. Натижани берилган тенгламага қўямиз:
$a\cdot\sin(xy)=a\cdot\sin y\cdot\sin x \Leftrightarrow a(\sin(xy)-\sin y\cdot\sin x)=0$

Бу тенглик барча x,y лар учун бажарилганлиги боис, $a=0$ бўлади. Демак, $f(x)\equiv 0$.

Жавоб: $f(x)\equiv 0$.

7-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун $f(x+y)-f(x-y)=4xy$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши: $x+y=u$, $x-y=v$ деб олсак янги $f(u)-f(v)=u^2-v^2$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламада $v=0$ дэсак $f(u)=u^2+f(0)$, яъни $f(x)=x^2+a$ функцияни ҳосил қиламиз, бу ерда $a=f(0)$.

Бу функцияни тенгламага қўямиз:

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

Жавоб: $f(x)=x^2+a$, $a=const.$

8-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун $f(x+y)+f(x-y)=2x^2+2y^2$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши: $y=0\Rightarrow$ $f(x)+f(x)=2x^2$, $f(x)=x^2$

Натижани берилган тенгламага қўямиз: $(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)$

Жавоб: $f(x)=x^2$

9-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун $f(x+y)+f(x-y)-2f(x)(1+y)=2xy(3y-x^2)$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши:

1) $x=t$, $y=t$ $\Rightarrow$ $f(2t)+f(0)-2f(t)(1+t)=2t^3(3-t)$

2) $x=t$, $y=-t$ $\Rightarrow$ $f(0)+f(2t)-2f(t)(1-t)=2t^3(3+t)$

Ҳосил бўлган $\begin{cases} f(2t)-2f(t)(1+t)=6t^3-2t^4-f(0) \\ f(2t)-2f(t)(1-t)=6t^3+2t^4-f(0) \end{cases}$ системадан $2f(t)(1+t-1+t)=4t^4$ тенглама ҳосил бўлиб, ундан $f(t)=t^3$ ни топамиз.

$f(x)=x^3$ функция берилган тенгламани қаноатлантиришини текширамиз:

$$(x+y)^3+(x-y)^3-2x^3(1+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-2x^3-2x^3y=$$
$$=3xy^2+3xy^2-2x^3y=6xy^2-2x^3y=2xy(3y-x^2)$$

Жавоб: $f(x)=x^3$

10-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши:

1) $x=0,\ y=t\ \Rightarrow\ f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t$

2) $x=\dfrac{\pi}{2}+t$, $y=\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ f(\pi+t)+f(t)=2f\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)\cos\dfrac{\pi}{2}$

3) $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=\dfrac{\pi}{2}+t\ \Rightarrow\ f(\pi+t)+f(1-t)=-2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin t$

Демак, $\begin{cases} f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t \\ f(\pi+t)+f(t)=0 \\ f(\pi+t)+f(-t)=-2f(\pi/2)\sin t \end{cases}$

Системанинг иккинчи тенгламасидан учинчи тенгламасини айирсак қуйидаги системага эга бўламиз: $\begin{cases} f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t \\ f(t)-f(-t)=2f(\pi/2)\sin t \end{cases}$.

Бу системанинг тенгламаларини қўшсак, $2f(t)=2f(0)\cos t+2f(\pi/2)\sin t$.

$a=f(0)$, $b=f(\pi/2)$ белгилашлардан сўнг $f(t)=a\cos t+b\sin t$ га эга бўламиз.

$f(x)=a\cos x+b\sin x$ функция берилган тенгламани қаноатлантиришини текширамиз:

$$a\cos(x+y)+b\sin(x+y)+a\cos(x-y)+b\sin(x-y)=2a\cos x\cos y+2b\sin x\sin y=$$
$$=(2a\cos x+2b\sin y)\cos y$$

Жавоб: $f(x)=a\cos x+b\sin x$, $a=const$, $b=const$

11-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун $f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши:

$$\begin{aligned} &1)\quad x=0,\ y=t \ \Rightarrow\ f(t)+2f(-t)=3f(0)-t \\ &2)\quad x=t,\ y=2t \ \Rightarrow\ f(3t)+2f(-t)=3f(t)-2t \\ &3)\quad x=t,\ y=-2t \Rightarrow\ f(-t)+2f(3t)=3f(t)+2t \end{aligned}$$

Демак,

$$\begin{cases} f(t)+2f(-t)=3f(0)-t \\ f(3t)+2f(-t)=3f(t)-2t \\ f(-t)+2f(3t)=3f(t)+2t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(t)+2f(-t)=3f(0)-t \\ 3f(t)=3f(t)-6t \end{cases} \Rightarrow\quad f(t)=t+a,\quad a=f(0)$$

Равшанки, $f(x)=x+a$ функция тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб: $f(x)=x+a$.

12-мисол. Барча $x,y\in R$ лар учун $f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2$ тенгламани қаноатлантирадиган $f:R\to R$ функциялар топилсин.

Ечилиши:

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad x=0,\ y=t \ \Rightarrow\ f(t)-2f(-t)+f(0)-2f(t)=t-2 \\ &2)\quad x=t,\ y=2t \ \Rightarrow\ f(3t)-2f(-t)+f(t)-2f(2t)=2t-2 \\ &3)\quad x=2t,\ y=t \Rightarrow\ f(3t)-2f(t)+f(2t)-2f(t)=t-2 \\ &4)\quad x=t,\ \ y=t \ \Rightarrow\ f(2t)-2f(0)+f(t)-2f(t)=t-2 \end{aligned}\right\}$$

Бу ердан $f(t)=t+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}$

Текширамиз:

$$x+y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}-2(x-y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3})+x+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3}-2(y+\frac{7}{3}f(0)-\frac{4}{3})=y-2 \Rightarrow f(0)=1$$

Демак, $f(x)=x+1$.

Жавоб: $f(x)=x+1$.

Сонлар назариясига оид масалалар тизими

Бўлиниш назариясининг асослари. Евклид алгоритми. Арифметиканинг асосий теоремаси. Туб сонлар. Ферма туб сонлари.

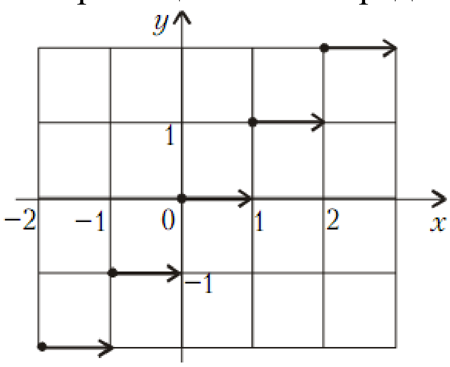
Таққосламалар назарияси. Ферма, Вилсон ва Эйлер теоремалари. Қолдиқлар ҳақида Хитой теоремаси. Квадратик чегирмалар. Сонлар назариясининг асосий функциялари.

Диофант тенгламалари. Диофантнинг чизиқли тенгламалари ва системалари. Юқори даражали диофант тенгламалари. Каталан ва Пелл тенгламалари ва бошқалар.

Таъриф. Ҳақиқий x соннинг $[x]$ *бутун қисми* деб, x дан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади.

Масалан, [-1,5]=-2, [-1]= -1, [0]=0, [1,5]=1, [π]=3.

Умуман олганда, таърифга биноан, $[x]= k$ тенглик қуйидагини билдиради: *к* сон $k \leq x< k+1$ шартни қаноатлантирадиган бутун сондир.



1-расм

$y=[x]$ функциянинг графиги зинасимон кўринишга эга (1-расм).

$\{x\}=x-[x]$ тенглик билан $x \in R$ сонининг *каср қисми* аниқланади.

Масалан, $\{-0,3\}=0,7,\ \left\{-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2},\ \left\{\sqrt{2}\right\}=\sqrt{2}-1,\ \{-2\sqrt{5}\}=2-\sqrt{2},\ \{1\}=0.$

Хоссалар:

1) $[x]\leq x;$ 2) $[x+a]=[x]+a,$ 3) $[x+y]\geq[x]+[y]$

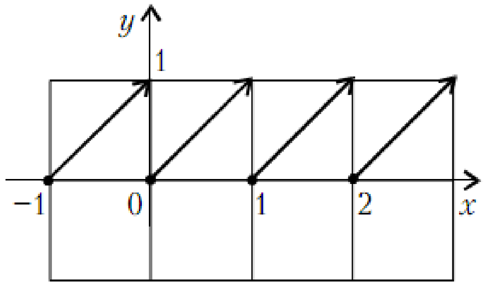
бу ерда a ихтиёрий бутун , x, y – ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

3) $\{x\}=x$ тенглик $0\leq x<1$ бўлгандагина бажарилади;

4) $\{x\}=\{y\}$ тенглик x-y=n (бу ерда n-бутун сон) бўлгандагина бажарилади;

5) Ихтиёрий x учун $\{x+1\}=\{x\}$ бўлади.

Шундай қилиб, $y=\{x\}$ функция энг кичик даври 1 га тенг бўлган даврий функциядир. Унинг графиги 2-расмда келтирилган.



2-расм

1-масала. (II Сорос олимпиадаси). $x^2-10[x]+9=0$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, $[x]=k$ булсин. $k\ge 0$ еканлиги тушунарли.

$x\ge k$ бўлганлиги учун $x\ge 0$. Натижада $x^2-10x+9\le 0$ тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Бундан $1\le x\le 9$ келиб чиқади, бундан $1\le k\le 9$. x^2+9 сон 10 га бўлинувчи бутун сондир. Текширишлар шуни кўрсатадики, $1;\ \sqrt{61};\ \ \sqrt{71};\ \ 9$ сонлар тенгламани қаноатлантиради.

Жавоб. $1;\ \sqrt{61};\ \ \sqrt{71};\ \ 9$. #

2-масала . $\left[\dfrac{2x+1}{3}\right]=[x]$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, $[x]=k$. У ҳолда

$$\begin{cases} k\le \dfrac{2x+1}{3}<k+1 \\ k\le x<k+1 \end{cases}$$

Тенг кучли системани ёзамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-1}{2}\le x<\dfrac{3k+2}{2} \\ k\le x<k+1 \end{cases} \qquad (*)$$

Бундан k қуйидаги тенгсизликни қаноатлантириши келиб чиқади:

$$\frac{3k-1}{2}<k+1,\quad k<\frac{3k+2}{2}.$$

Яъни: – 2<k <3.

Шундай қилиб, k -1; 0; 1; 2 қийматларга эга бўлиши мумкин. Ушбу қийматларни кетма-кет (*) системага қўйиб ва ҳосил бўлган тенгсизикларни ечиб, қуйидаги жавобни топамиз.

Жавоб. $-1\le x<-\frac{1}{2};\ \ 0\le x<2;\quad \frac{5}{2}\le x<3.$ #

3-масала. $[x^2]=2[x]$ тенгламани ечинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, [x]= k, {x}=α. У ҳолда $к$≥0, α ≥0 ва

$\left[(k+\alpha)^2\right]=2[k+\alpha]$,

Шундан сўнг қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$[2k\alpha+\alpha^2]=2k-k^2$

$к$≥0, α ≥0 бўлгани учун бу тенгламанинг чап томони манфий эмас.

Демак, $2k-k^2\ge 0$ ва k сони бутун сон бўлгани учун у фақат 0, 1 ёки 2 қийматларга эга бўлиши мумкин.

k =0 бўлганда 0≤α <1. Бундан [α^2]=0 ни ҳосил қиламиз. Демак, 0≤x<1 келиб чиқади.

k =1 бўлганда қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$[2\alpha+\alpha^2]=1$

Бу $1\le 2\alpha+\alpha^2<2,\quad 0\le\alpha<1$ системани беради, бундан $\sqrt{2}-1\le\alpha<1,\quad \sqrt{2}\le x<2$ келиб чиқади.

Ниҳоят, $к$=2 бўлганда $\left[4\alpha+\alpha^2\right]=0$ тенгламага эга бўламиз, бу эса $0<4\alpha+\alpha^2<1,\ 0<\alpha<1$ системага тенг кучлидир. Унинг ечими – $0\le\alpha<\sqrt{5}-2,\quad 2\le x<\sqrt{5}$ келиб чиқади.

Ҳосил бўлган 0≤x<1, $\sqrt{2}\le x<2$ ва $2\le x<\sqrt{5}$ оралиқларни бирлаштириб жавобни ёзамиз.

Жавоб. $0\le x<1,\qquad \sqrt{2}\le x<\sqrt{5}$. #

4-масала. (V Сорос олимпиадаси).

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3,9 \\ y+[z]+\{x\}=3,5 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}$$

системани ечинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, $a=[x]$, $\alpha=\{x\}$, $b=[y]$, $\beta=\{y\}$, $c=[z]$, $\gamma=\{z\}$, бу ерда a,b,c – бутун сонлар, $0\le\alpha<1,\ 0\le\beta<1,\ 0\le\gamma<1.$ Ушбу белгилашлардан сўнг система қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} a+\alpha+b+\gamma=3{,}9 \\ b+\beta+c+\alpha=3{,}5 \\ c+\gamma+a+\beta=2 \end{cases}$$

Тенгламаларни қўшиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$2(a+b+c+\alpha+\beta+\gamma)=9{,}4$,

яъни:

$a+b+c+\alpha+\beta+\gamma=4{,}7$

Ҳосил бўлган тенгламадан биринчи, иккинчи ва учинчи тенгламаларни кетма-кет айириб қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} c+\beta=0{,}8 \\ a+\gamma=1{,}2 \\ b+\alpha=2{,}7 \end{cases}$$

бундан $c=0$, $\beta=0{,}8$, $a=1$, $\gamma=0{,}2$, $b=2$, $\alpha=0{,}7$ еканлиги келиб чиқади.

Жавоб. $x=1{,}7;\ y=2{,}8;\ z=0{,}2.$ #

5-масала. Қуйидаги кетма-кетликни кўрамиз 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4, ...

(Кетма-кетликда битттa бир, иккита икки, учта уч, тўртта тўрт, бешта беш ва хоказо). Қайси сон

а) 2002– нчи; б) n – нчи ўринда туради?

Ечилиши. Фараз қилайлик, $x_n=k$ - n – нчи ҳад. Берилган кетма-кетликда $к$ сони биринчи пайдо бўлгунча қадар $1+2+3+\ldots+к-1=\dfrac{k(k-1)}{2}$ сон кетма-кетлиги ёзилади. Охирги $к$ сон $\dfrac{k(k+1)}{2}$ -нчи ўринда туради. Шунинг учун

$$\frac{k(k-1)}{2}<n\le\frac{k(k+1)}{2}.$$

Бундан

$$k^2-k<2n\le k^2+k$$

келиб чиқади.

Охирги ҳосил бўлган тенгсизликнинг унг ва чап кисмига $\frac{1}{4}$ ни қўшиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$k^2-k+\frac{1}{4}<2n<k^2+k+\frac{1}{4},$$

$$(k-\frac{1}{2})^2<2n<(k+\frac{1}{2})^2.$$

У ҳолда

$$k-\frac{1}{2}<\sqrt{2n}<k+\frac{1}{2},$$

Бундан:

$$k<\sqrt{2n}+\frac{1}{2}<k+1.$$

Натижада,

$$x_n=\left[\sqrt{2n}+\frac{1}{2}\right]$$

Берилган кетма-кетликнинг n-ҳадини ҳисоблаш формуласини ҳосил қилдик. Хусусан, $x_{2002}=63$. #

Эслатма. Берилган x сондан кичик ва n натурал сонга бўлинадиган $k=\left[\frac{x}{n}\right]$ та натурал сон мавжудлигини аниқлаш қийин эмас.

Бу содда эслатма сонлар назарияси учун муҳим битта формулани ҳосил қилиш имкониятини беради. Дастлаб қуйидаги масалани ечамиз.

6-масала . 100! сон иккининг қайси даражасига бўлинади?

Ечилиши. 1,2,…,100 сонлар орасида қуйидагилар мавжуд:

$\frac{100}{2}=50$ та жуфт сон,

$\frac{100}{4}=25$ та 4 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{8}\right]=12$ та 8 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{16}\right]=6$ та 16 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{32}\right]=3$ та 32 га каррали сон.

$\left[\frac{100}{64}\right]=1$ та 64 га каррали сон.

Бундан $100!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdot\cdot 100$ кўпайтмада жами 50+25+12+6+3+1=97 та 2 сони қатнашади, яъни: 100! сон 2^{97} бўлинади ва 2^{98} га бўлинмайди.

Жавоб. 97 . #

Бу масала натижасини умумлаштирамиз.

7-масала (Лежандр формуласи). $n!$ сон p туб соннинг қайси даражасига бўлинади?

Ечилиши. Худди юқоригидек, агар $p^m \le n < p^{m+1}$, бўлса, у ҳолда $n!$ ни каноник ёйилмасида p нинг даража кўрсаткичи $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^m}\right]$ га тенг.

Баъзи ҳолда қуйидаги ёзув қўлланилади:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots,$$

чунки ёзилган йиғиндида бирор жойдан бошлаб барча қўшилувчилар нолга тенг бўлади. #

8-масала . Агар $x>0$ ва n натурал сон бўлса, у ҳолда $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$ бўлишини исботланг.

Ечилиши. Равшанки, ($\alpha;\beta$) оралиқда $[\beta]-[\alpha]$ та бутун сонлар жойлашган. Ҳақиқатдан ҳам, агар *м* бутун сон $\alpha < m < \beta$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $[\alpha]+1 \le m < [\beta]$.

Ҳудди шундай, ($\alpha;\beta$) оралиқда $\left[\frac{\beta}{x}\right]-\left[\frac{\alpha}{x}\right]$ та берилган $x>0$ га каррали сонлар жойлашган.

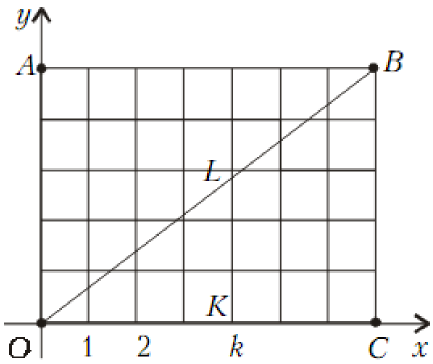
x дан кичик ва *n* га бўлинадиган натурал сонларни кўрамиз. Бундай сонлар жами $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]-\left[\frac{0}{n}\right]$ та. Аммо $[x]$ дан катта бўлмаган ва *n* га бўлинадиган сонлар ҳам $\left[\frac{x}{n}\right]$ та. Тенглик исботланди. #

9-масала . *p* ва *q* –ўзаро бутун туб сонлар учун

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

эканлигини исботланг.

Ечилиши. *XOY* текисликда бутун координатали $(x;y)$ нуқталар тўпламини кўрамиз, бунда $1\le x\le q-1,\ 1\le y\le p-1$ шарт бажарилсин.



3-расм

Бу тўплам *OABC* тўғри тўртбурчакнинг ичида ётиб (3-расм), жами $(p-1)(q-1)$ та нукталарга эга. Ушбу тўғри тўртбурчакнинг диагоналида *O* ва *B* нуқталардан бошқа бутун координаталарга эга бўлган нуқталар мавжуд эмас. Ҳақиқатдан ҳам , агар бутун координатали $(m;\ p)$ нуқта *OB* да ётса (бу ерда 1<m<*q*), у ҳолда $tg\angle BOC=\frac{n}{m}=\frac{p}{q}$, яъни: $qn=mp$. *q* ва *p* ўзаро туб сонлар бўлганлиги сабабли *n* сон *p* га, *m* сон эса q га каррали, яъни, $m\ge q,\ n\ge p$. Зиддият. Шунинг учун *OBC* учбурчакда қаралаётган бутун координатали нуқталарнинг тенг ярми, яъни $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ таси ётади.

Енди биз ушбу миқдорни бошқача усул билан ҳисоблаймиз.

$x=k$ (*k* – ўзгарувчи натурал сон) бўлса, у ҳолда *KL* кесмада жами $\left[\frac{p}{q}k\right]$ та бутун координатали нуқта ётади (3 расм).

$1\le x\le q-1,\ 1\le y\le p-1$ бўлгани учун *к* сонни ўзгартириб, учбурчакда ётган бутун координатали нуқталар умумий сони қуйидагича аниқланади:

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

Демак,

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

тенглик исботланди. #

Изоҳ. Худди шундай

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

формулани исботлаш мумкин.

10-масала (Хермит[1] формуласи). n - натурал, x - ҳақиқий сонлар учун

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

тенгликни исботланг.

Ечилиши. n сонини фиксирлаб,

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$$

функцияни қараймиз.

У ҳолда $f(x+\frac{1}{n})=\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-[nx+1]$.

Ихтиёрий бутун k учун $[x+k]=[x]$формулани қўллаб барча ҳақиқий x қийматларида

$$f(x+\frac{1}{n})=f(x)$$

тенглик бажарилишини ҳосил қиламиз.

Демак, $y=f(x)$ функция даврий функция бўлади ва у $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$ оралиқда айнан нолга тенг бўлишини текшириш қийин эмас.

Бундан $y=f(x)$ функция барча ҳақиқий x қийматларида нолга тенг бўлиши келиб чиқади. #

11-масала . $a)\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$; $\left\{(2+\sqrt{3})^{2002}\right\}>\underbrace{0,9\ldots9}_{1001}$ сонлар тоқ еканлигини исботланг.

Ечилиши. $(2+\sqrt{3})^{2002}$ ифодада қавсни очиб $(2+\sqrt{3})^{2002}=A+B\sqrt{3}$ ни ҳосил қиламиз, бу ерда *A* ва *B* – натурал сонлар. Бундан

$$(2-\sqrt{3})^{2002}=A-B\sqrt{3}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{2002}}.$$

[1] Charli Xermit (1822-1901 y.y.)- fransiyalik matematik.

Бу ҳолда

$$(2+\sqrt{3})^{2002}+(2-\sqrt{3})^{2002}=2A$$

бўлади.

Бундан

$$(2+\sqrt{3})^{2002}=2A-1+1-(2-\sqrt{3})^{2002}$$

келиб чиқади.

Натижада, $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]=2A-1$ - тоқ сон, яъни

$$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}=1-\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}$$

еканлиги келиб чиқади.

Ҳосил бўлган тенгликнинг ўнг қисмини баҳолаймиз:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}=\frac{1}{\left(7+2\sqrt{3}\right)^{1001}}<\frac{1}{10^{1001}}.$$

Шунинг учун $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>\underbrace{0,9...9}_{1001}$. #

<u>*Таъриф*</u>. $\vartheta : N \to R$ нол бўлмаган функция *мультидликатив* дейилади, агар

a ,b ўзаро туб сонлар учун $\vartheta(ab)=\vartheta(a)\vartheta(b)$ тенглик бажарилса.

Мисоллар. а) $\vartheta(a)=1\ \forall a\in N$; b) $\vartheta(a)=a\ \forall a\in N$, b) $\vartheta(a)=a^{-1}\ \forall a\in N$ тенгликлар билан аниқланган функциялар мультипликатив бўлади.

12-масала. $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$ -мультипликатив функциялар бўлсин, у ҳолда :

а) $\vartheta(1)=1$;

б) Мультипликатив функциялар $\vartheta_1\ \vartheta_2$ кўпайтмаси мультипликатив функция бўлади;

с) Агар $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ бўлса, у ҳолда $\vartheta(a)=\vartheta(p_1^{\alpha_1})\ \vartheta(p_2^{\alpha_2})\ldots\vartheta(p_n^{\alpha_n})$;

д) Агар $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ бўлса , у ҳолда қуйидаги *асосий айпият* бажарилади.

$$\sum_{d|a}\vartheta(\partial)=\prod_{i=1}^{n}(1+\vartheta(p_i)+\vartheta(p_i^2)+...+\vartheta(p_i^{\alpha_i}))$$

Ечилиши. а) нинг исботи a ва 1 сони ўзаро туб бўлганидан келиб чиқади.

б) *a, b* ўзаро туб сонларни фиксирлаймиз. ϑ_1, ϑ_2 –мультипликатив функциялар учун қуйидаги тенгликлар бажарилади:

$(\vartheta_1 \vartheta_2)(ab) = \vartheta_1(ab)\vartheta_2(ab) = \vartheta_1(a)\vartheta_1(b)\ \vartheta_2(a)\vartheta_2(b) = (\vartheta_1 \vartheta_2)(a)\ (\vartheta_1 \vartheta_2)(b)$

Демак, иккита мультипликатив функция кўпайтмаси мультипликатив функция бўлади. Индуксия усули билан ушбу мулоҳаза бир нечта кўпайтувчилар учун исботланиши равшан.

с) нинг ростлиги $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, …, $p_n^{\alpha_n}$ сонларининг ўзаро тублигидан келиб чиқади.

д) Агар *a* натурал сонининг каноник ёйилмаси $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ бўлса, у ҳолда *a* нинг ҳар қандай бўлувчиси $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ ёйилмага эга бўлади, бунда

$0 \le \beta_k \le \alpha_k$, $k=1,2,\dots,n$.

с) дан қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\vartheta(p_i)+\vartheta(p_i^2)+\dots+\vartheta(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \sum_{0\le\beta_k\le\alpha_k} \vartheta(p_1^{\beta_1})\vartheta(p_2^{\beta_2})\dots\vartheta(p_n^{\beta_n}) = \sum_{0\le\beta_k\le\alpha_k} \vartheta(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}\dots p_n^{\beta_n}) = \sum_{d|a} \vartheta(\partial).$$

13-масала. $\theta(a)$ – ихтиёрий мультипликатив функция учун

$$\chi(a) = \sum_{d|a}\theta(d),$$

функция ҳам мультипликатив бўлади.

Ечилиши.

$(a,b)=1$, $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_{k+1}^{\beta_1} p_{k+2}^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ бўлсин. У ҳолда

Асосий айниятга кўра

$$\chi(ab) =$$

$$= \sum_{d|ab}\theta(d) = \prod_{i=1}^{n}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+\dots+\theta(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+\dots+\theta(p_i^{\alpha_i}))\prod_{i=k+1}^{n}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+\dots+\theta(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \theta(a)\theta(b)$$

#

Натижа. Сонлар назариясида қуйидаги мультипликатив функциялар катта аҳамиятга эга: a натурал сонининг натурал бўлувчилар $\tau(a)$ сони ва $\sigma(a)$ йиғиндиси.

Улар қуйидагича аниқланади: $\tau(a) = \sum_{d|a} 1$, $\sigma(a) = \sum_{d|a} \partial$

($\sum_{d|a}$ белги a нинг барча бўлувчилар бўйича йиғиндини билдиради).

Асосий айният ва геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндисини ифодаловчи формула билан фойдаланиб a натурал сонининг натурал бўлувчилар $\tau(a)$ сони ва $\sigma(a)$ йиғиндиси учун

$\tau(a)=\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)$ ва $\sigma(a) = \prod_{i=1}^{n}(1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right)$

формулалар ўринлилигига амин бўламиз.

Ҳақиқатдан ҳам, $p_i^{\alpha_i}$ нинг бўлувчилари $1, p_i, \ldots, p_i^{\alpha_i}$ бўлгани учун

$\tau(p_i^{\alpha_i}) = \alpha_i + 1$, $\sigma(p_i^{\alpha_i}) = 1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$

бўлади. Функцияларни мультипликативлигидан

$$\tau(a) = \tau(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}) = \prod_{i=1}^{n}\tau(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)$$

$$\sigma(a) = \sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}) = \prod_{i=1}^{n}\sigma(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n}(1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

формулалар келиб чиқади.

14-масала. p ва q – турли туб сонлар бўлсин. Қуйидаги сонлар нечта натурал бўлувчига эга?

а)pq;

b)p^2q;

c)p^2q^2;

d) p^mq^n?

Ечилиши. а) Равшанки, pq соннинг бўлувчилари 1, p, q ва pq сонлар бўлади. Демак, $\tau(pq) = 4$

б) p^2q соннинг бўлувчилари 1, p, p^2 , q, qp, qp^2 сонлар бўлади. Демак, $\tau(p^2q) = 6$

c) p^2q^2 соннинг икки қатор бўлувчиларини ёзамиз:

$$1, p, p^2,$$
$$1, q, q^2.$$

Қолган бўлувчилар бу иккита қатордаги ақалли биттадан олинган сонларнинг кўпайтмаларидан ҳосил бўлади. Бундай сонлар жами 9 та. Демак, $\tau(p^2q^2) = 9$.

д) p^mq^n соннинг икки қатор бўлувчиларини ёзамиз:

$1, p, p^2, ..., p^m,$
$1, q, q^2, ..., q^n.$

Қолган бўлувчилар бу иккита қатордаги ақалли биттадан олинган сонларнинг кўпайтмаларидан ҳосил бўлади. Бундай сонлар жами $(m + 1)(n + 1)$ та. Демак, $\tau(p^mq^n) = (m+1)(n+1)$.

Жавоb:

а) 4;

б) 6;

с) 9;

д) $(m + 1)(n + 1)$. #

15-масала. Шундай натурал сонлар топилсинки, улар айнан олтита натурал бўлувчига эга бўлиб, бу бўлувчиларнинг йиғиндиси 3500 га тенг.

Ечилиши. p натурал сон айнан олтита натурал бўлувчига эга бўлса, у $p = p^5$

(бу ерда p – туб) ёки $n = p^2q$ (бу ерда p ва q – турли туб сонлар) кўринишга эга.

Биринчи ҳолда

$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$ ёки $p(1+ p + p^2+ p^3+ p^4)=3500-1= 3499$.

3499 сони 2, 3, 5 ва 7 га бўлинмайди, шунинг учун $p > 10$. Бунда $p+(1+ p + p^2+ p^3+ p^4)>10^5>3499$ тенгсизлик ўринли.

Демак, бу ҳол ўринли бўлмайди.

Иккинчи ҳолда $1+ p + p^2+ p + p\,q+ p^2q = 3500$, яъни $(1+p+p^2)(1+q) = 5^3 \cdot 7 \cdot 4$.

Биринчи кўпайтувчи 2 га ва 5 га бўлинмайди. (Бу учун қолдиқларни текшириш етарли).

$1 + p + p^2 > 1$ бўлгани учун $1 + p + p^2 = 7$. Демак, $p = 2$ ва $q = 499$. 2 ва 499 сонлар туб бўлгани учун $n = 2^2 \cdot 499 = 1996$. #

16-масала . 30 га бўлинадиган ва айнан 30 та турли бўлувчига эга бўлган натурал сонлар топилсин.

Ечилиши. $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ бўлсин.

Бу сон 30 га бўлинганлиги учун каноник ёйилмага албатта $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ва $p_3 = 5$ туб сонлар киради, демак $k \geq 3$.

Бундан $(r_1 + 1)(r_2 + 1)(r_3 + 1) \ldots (r_к + 1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ва $k \leq 3$ келиб чиқади. Демак, $k = 3$ ва (r_1, r_2, r_3) учлик 1, 2, 4 сонларнинг ўрин алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлади. Бундан n учун қуйидаги қийматларни ҳосил қиламиз:

$2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$, $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5^4$, $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$, $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. #

17-масала . $\tau(1) + \tau(2) + \ldots + \tau(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]$ ни исботланг.

Ечилиши.

$\{1, 2, \ldots, n\}$ тўпламда k натурал сонига бўлинадиган сонлар $k, 2k, \ldots, \left[\frac{n}{k}\right]k$ кўринишга эга бўлиб, уларнинг умумий сони $\left[\frac{n}{k}\right]$ га тенг.

Демак,

1 га каррали сонлар жами $\left[\frac{n}{1}\right]$ та;

2 га каррали сонлар жами $\left[\frac{n}{2}\right]$ та;

....

n га каррали сонлар жами $\left[\frac{n}{n}\right]$ та бўлади.

Буларнинг йиғиндиси $\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \ldots + \tau(n)$ га тенг. #

Яна битта фойдали муносабатни исботлаймиз.

18-масала . $\sigma(1) + \sigma(2) + \ldots + \sigma(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right].$

Ечилиши. $\{1, 2, ..., n\}$ тўпламда k натурал сонига бўлинадиган сонлар $k, 2k, ..., \left[\frac{n}{k}\right]k$ кўринишга эга бўлиб, уларнинг умумий сони $\left[\frac{n}{k}\right]$ га тенг. Шунинг учун айнан k га тенг бўлган бўлувчилар йиғиндиси $k\left[\frac{n}{k}\right]$ га тенг.

Демак, 1 га тенг бўлган бўлувчилар йиғиндиси $\left[\frac{n}{1}\right]=n$ га , *2* га тенг бўлган бўлувчилар йиғиндиси $2\left[\frac{n}{2}\right]$ га , ..., n га тенг бўлган бўлувчилар йиғиндиси $n\left[\frac{n}{n}\right]$ га тенг. Буларни ҳаммасини қўшиб чиқсак, исботланилаётган тенгликнинг чап қисмини ҳосил қиламиз. #

19-масала. Исталган n учун $\sigma(6n) \le 12\sigma(n)$ тенгсизликни исботланг.

б) n нинг қандай қийматларида $\sigma(6n) = 12\sigma(n)$ тенглик бажарилади?

Ечилиши. а) n нинг барча бўлувчилари $1 = d_1, d_2, ..., d_k = n$ бўлсин. У ҳолда $6n$ нинг барча бўлувчилари $d_1, d_2, ..., d_k$, $2d_1, 2d_2, ..., 2d_k$, $3d_1, 3d_2, ..., 3d_k$, $6d_1, 6d_2, ..., 6d_k$ сонлар бўлади. Лекин улар орасида ўзаро тенглари бўлиши мумкин. Агар n нинг бўлувчилари орасида 2 ҳам, 3 ҳам бўлмаса, у ҳолда улар орасида тенглари бўлмайди. Бундан, $\sigma(n) = d_1 + d_2 + ... + d_k$ бўлгани учун $\sigma(6n) \le \sigma(n) + 2\sigma(n) + 3\sigma(n) + 6\sigma(n) = 12\sigma(n)$.

б) $\sigma(6n) = 12\sigma(n)$ бўлиши учун n сони 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлинмаслиги керак. #

20-масала. Ихтиёрий $n \ge 2$ учун

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right)$$

формула ўринли.

Ечилиши.

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 1 & , k \mid n \\ 0, & k \nmid n \end{cases},$$

демак ,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=\sum_{k|n}1=\tau(n)\ .\ \#$$

Изоҳ. n туб бўлганида $\tau(n)=2$ бўлгани учун, қўйидагига эга бўламиз. n туб бўлиши учун

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=2$$

тенглик бажарилиши зарур ва етарли.

21-масала. Ихтиёрий $n\geq 2$ учун

$$\sigma(n)=\sum_{k=1}^{n}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)$$

формула ўринли.

Ечилиши.

$$\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=\begin{cases}1 & ,k\,|\,n\\ 0, & k \nmid n\end{cases},$$

демак ,

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=\sum_{k|n}k=\sigma(n)\ .\ \#$$

Изоҳ. n туб бўлганида $\sigma(n)=n+1$ бўлгани учун, қуйидагига эга бўламиз.

n туб бўлиши учун

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=n+1$$

тенглик бажарилиши зарур ва етарли.

$\varphi(x)$ орқали $\{1, 2, ..., x\}$ тўплам ичида жойлашган ва x сони билан ўзаро туб бўлган сонлар сонини белгилаймиз.

Адабиётларда $\varphi(x)$ функция *Эйлер*[2] *функцияси* деб юритилади.

p – туб сон бўлсин. Юқорида биз қуйидаги тасдиқларни исботладик.

а) p дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар $p-1$ та.

б) p^2 дан кичик ва у билан ўзаро туб бўлган натурал сонлар p^2-p та.

Демак, $\varphi(p)=p-1$, $\varphi(p^2)=p^2-p$.

Туб бўлмаган

$x=p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_k^{a_k}$

[2] Eyler Leonard (1707-1783 y.y.) – shveytsariyalik matematik, mexanik, fizik, astronom. Kompleks ŏzgaruvchili funksiyalar nazariyasi va differentsial geometriya sohalarning asoschilaridan biri.

сонлардаги Эйлер функциясининг қиймати қуйидагича ҳисобланади:

$$\varphi(x) = x\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Бу тенгликдан Эйлер функцияси мультипликатив функция бўлиши ҳамда

$$\varphi(p^k) = p^k\left(1-\frac{1}{p}\right) = p^k - p^{k-1}$$

формула келиб чиқади.

22-масала (Гаусс айнияти). $\sum_{d|x}\varphi(d) = x$ айниятни исботланг.

Ечилиши. $x = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$ **.** Мультипликатив функциялар учун асосий айниятга кўра,

$$\sum_{d|x}\varphi(d) = (1+\varphi(p_1)+\varphi(p_1^2)+\ldots+\varphi(p_1^{a_1})\ldots =$$

$$= \{1+(p_1-1)+(p_1^2-p_1)+\ldots+(p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1})\}\ldots =$$

$$= p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k} = x.$$

Айният исботланди. #

23-масала. Қуйидаги тенгликларни исботланг.

а) φ (a) φ (b) = φ ((a, b)) φ ([a, b]);

б) φ (ab) φ ((a, b)) = φ (a) φ (b)(a, b).

Ечилиши. а) Мультипликативликдан фойдаланиб, a ва b сонлар битта туб соннинг даражалари бўлган ҳолни қараймиз: a = p^α, b = p^β ($\alpha \geqslant \beta \geqslant$ 0). У ҳолда φ (a) φ (b) = φ ((a, b)) φ ([a, b]) тенглик [a, b] = a = p^α, (a, b) = b =p^β тенгликлардан келиб чиқади.

б) Мультипликативликдан фойдаланиб, a ва b сонлар битта туб соннинг даражалари бўлган ҳолни қараймиз: a = p^α, b = p^β ($\alpha \geqslant \beta \geqslant$ 0). Берилган тенглик

φ ($p^{\alpha+\beta}$) φ (p^β) = φ (p^α) φ (p^β) p^β.

тенгликка тенгкучли. Бу тенглик эса $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$ тенгликдан келиб чиқади. #

Фойдаланган адабиётлар

1. Юнусова Д. Бўлажак математика ўқитувчисини инновацион фаолиятга тайѐрлаш назарияси ва амалиѐти. Монография. – Тошкент: Фан, 2009. – 165 б.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic : The IMO Compendium 1959-2009, Springer, 2011.
3. M. Becheanu : International Mathematical Olympiads 1959-2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001.
4. E. Lozansky, C. Rousseau : Winning Solutions, Springer-Verlag, New York, 1996.
5. E.J. Barbeau : Polynomials , Springer-Verlag, 2003.
6. Z. Cvetkovski : Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems , Springer, 2012.
7. T. Andreescu, D. Andrica : An Introduction to the Diophantine Equations, GIL Publishing House, Zalau, 2002.
8. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng : 104 Number Theory Problems, Birkhauser, Boston 2006
9. Sh. Ismailov, O. Ibrogimov. Tengsizliklar-II. Isbotlashning zamonaviy usullari. T.: ”Huquq va jamiyat”.2008.

2-амалий машғулот

Мавзу: Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда комбинаторикага оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси. (2 соат)

Ишнинг мақсади: Тингловчиларга Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда тақдим этиладиган масалалар мавзулари ҳамда танланган мавзу бўйича масалалар ечиш методикаси билан танишлириш

Амалий машғулот топшириқлари

Саралаш комбинаторикаси. Ўринлаштиришлар, ўрин алмаштиришлар, комбинациялар. Шпернер тўпламлари.

Комбинатор масалалар. Дирихле принципи. Экстремал қоида. Жуфт-тоқлик. Инвариантлар. Бўяш ва қоплашлар. Тортишлар ва қуйишлар. Ўйинлар ва мусобақалар. Стратегиялар ва алгоритмлар.

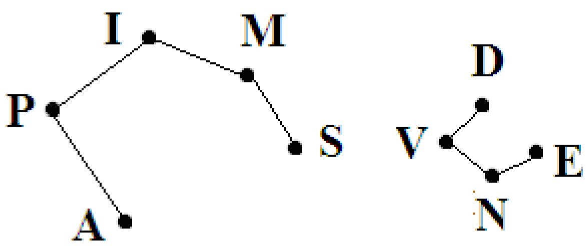
Графлар. Графлар назариясининг тили. Графларнинг энг содда турлари ва сонли характеристикалари. Дилворт теоремаси. Рамсей назарияси.

Масалаларни ечишда объектларни нуқталар, улар орасидаги боғланишларни эса чизиқлар билан тасвирлаш анча қулайлик туғдиради.

<u>1-масала.</u> Маҳаллада 9 та хонадон бор. Маълумки, Икром ва Алишер – Пулатнинг қўшнилари, Мурод - Икром ва Самандарнинг қўшниси, Вали – Дониёр ва Нозимнинг қўшниси, Еркин эса Нозимнинг қўшниси. Бошқа қўшнилар йўқ. Пўлат деворлардан ошиб Нозимникига бора оладими?

(Умумий деворга эга бўлган ҳонадонлар қўшни ҳисобланади.)

□ Хонадонларни нуқталар билан тасвирлаймиз ва қўшни ҳонадонларни кесишмайдиган чизиқлар билан туташтирамиз (1-расм). Расмдан Пўлат деворлардан ошиб Нозимникига бора олмаслиги кўриниб турибди.



1-расм

■

Нуқталар ва уларнинг айримларини тутуштиришган чизиқлардан ташкил топган шакл *граф* дейилади. Нуқталар графнинг *учлари*, туташтирувчи чизиқлар эса *қирралаги* дейилади.

Графнинг қирра билан туташтирилган иккита учи *қўшни учлар* дейилади. Иккита учни туташтирган қирралар кетма-кетлиги *йўл* дейилади.

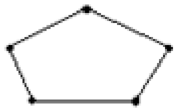
1-масалада графнинг P ва N учларини туташтирувчи йўл мавжуд эмаслиги исботланган.

Графлар назарияси ҳозирги кунда математиканинг энг жадал ривожланаётган соҳасига айланди. Графлар назарияси бўйича тадқиқотлар натижалари инсон фаолиятининг турли соҳаларида қўлланилади. Улардан баъзилари қуйидагилардир: бошқотирмаларни ҳал қилиш; қизиқарли ўйинлар; йўллар, електр занжирлари, интеграл схемалар ва бошқариш тизимларини лойиҳалаштириш; автоматлар, блок-схемалар ва компютер дастурларини тадқиқ қилиш ва ҳоказо.

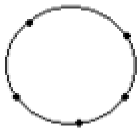
<u>2-масала.</u> 5 нафар болалар гуруҳида ҳар бир бола айнан 2 нафар бола билан таниш бўлиши мумкинми?

□

Тегишли граф чизайлик:



ёки

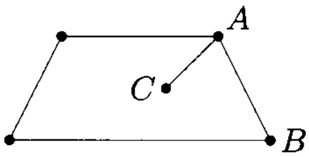


.

Демак, масаладаги вазият бўлиши мумкин екан.

■

Граф учидан чиққан қирралар сони унинг *даражаси* дейилади. Масалан, 2- расмда тасвирланган графда A учнинг даражаси 3 га, B учнинг даражаси 2 га, C учнинг даражаси эса 1 га тенг.



2-расм

Даражаси тоқ сон бўлган уч *тоқ уч*, даражаси жуфт сон бўлган уч *жуфт уч* дейилади. 2-расмдаги графда фақат A ва C учлар тоқ учлар, қолган учлар эса жуфт учлар бўлади.

3- масала.

a) Фирмада 50 та компютер ўрнатилган. Улардан айримлари сим билан туташтирилган бўлиши керак. Ҳар бир компютердан 8 та сим чиқиши лозим бўлса, жами нечта сим керак?

b) Графда 40 та уч, ҳар бирининг даражаси 7 га тенг. Графнинг қирралари нечта?

c) Концертда ҳар бир ашулани биргаликда иккита санъаткор ижро етди, бунда ҳеч қандай жуфтлик саҳнага биргаликда бир мартадан кў чиқмаган. Жами бўлиб концертда 12 нафар санъаткор иштирок етди, бунда ҳар бири 5 марта ашула куйлади. Жами нечта ашула ижро етилди?

□

Жавоб: a) 200 та сим; b) 140 та қирра c) 30 та ашула

a) Симнинг иккита учи бор. Ҳар бир компютердан 8 та сим чиққан. Демак, жами $50 \cdot 8 = 400$ та уч ва $\frac{400}{2} = 200$ та сим керак.

b) Фикримизда ҳар бир қиррани сим деб, ҳар бир учни эса компютер деб фараз қилайлик. Бунда графнинг қирралари сони $\frac{40\cdot 7}{2}=140$ га тенг.

c) Бирга ижро етган икки нафар санъаткорни қирра билан туташтирамиз. Ҳар бирининг даражаси 5 га тенг бўлган 12 та учли граф ҳосил бўлади. Бунда ҳар бир қирра битта ашулага мос. Олдингиларга кўра графнинг қирралари сони $\frac{12\cdot 5}{2}=30$ га тенг, яъни жами 30 та ашула ижро етилди. ■

Юқоридаги масалага ўхшаб мулоҳаза юритсак қуйидаги теоремани ҳосил қиламиз:

1-Теорема . *Графнинг дагажалари йиғиндиси қирралаг сонининг иккалангнига тенг.*

□ Графда n та уч, ҳар бирининг даражаси, яъни ҳар биридан чиққан қирралар сони $d_1, d_2, ..., d_n$ бўлсин. Ҳар бир қирра иккита учни туташтиргани учун графнинг қирралари сони $\frac{d_1+d_2+...+d_n}{2}$ га тенг. ■

Натижа. *Ггафдаги учлаг дагажалаги йиғиндиси жуфт bўлади.*

4- масала. Графнинг учлари қуйидаги даражаларга эга бўлиши мумкинми:

а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;

б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;

с) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

□

а) 8 та учи бор графда 8 даражали уч мавжуд бўлиши мумкин эмас.

б) Агар ҳар бир уч билан туташган иккита уч мавжуд бўлса, у ҳолда қолган учларнинг ҳар бири даражаси 2 дан кичик бўла олмайди.

с) Учларнинг даражалари йиғиндиси жуфт бўлиши керак.

■

5-масала. Маҳаллага 13 та телефон ўрнатилмоқда. Ҳар бир телефон айнан 7 та телефон билан сим орқали уланиши мумкинми?
□

Мос бўлган графда 13 та учун бўлиб, улардан ҳар бири даражаси 7 га тенг. Шу графнинг даражалари йиғиндиси $13\cdot 7=91$ тоқ сонга тенг. 2-теореманинг натижасига кўра бундай ҳолат бўлиши мумкин эмас.

■

6-масала. Мамлакатнинг ҳар бир шаҳридан айнан 3 та йўл чиқмоқда. Мамлакатда жами бўлиб 100 та йўл бўлиши мумкинми?

□

Мамлакатда κ та шаҳар бўлса, у ҳолда жами $\frac{3k}{2}$ та йўл бор. Бу ифода эса ҳеч қандай κ учун 100 га тенг бўлмайди.

■

2-теорема. Ихтиёрий графда тоқ учлар сони жуфт сон бўлади. □ Тескарисини фараз қилайлик. Қандайдир графда тоқ учлар сони тоқ бўлсин. У ҳолда шу *г*рафнинг даражалари йиғиндиси тоқ бўлиши шарт. Бу эса олдинги теореманинг натижасига зид. Демак, фаразимиз нотуғри, яъни ихтиёрий графда тоқ учлар сони жуфт бўлади. ■

Бу теорема граф учлари даражаларининг йиғиндисини ҳисобламасликка имкон беради.

7-масала. Ер сайёрасида яшаган ва тоқ марта қўл бериб сўрашган инсонлар сони жуфт еканлигини исботланг.

□ Ҳар бир инсонни граф учи деб фараз қилайлик. Агар у бошқа инсон билан қўл бериб сурашса, шу икки инсонни қирра билан туташтирамиз. 2-теоремага кўра тоқ учлар, яъни тоқ марта қўл бериб сўрашган инсонлар сони жуфт бўлади. ■

Изоҳ. Бу масала 2-теореманинг ўзгинаси, фақат у бошқа тилда ифодаланган. Шунинг учун 2-теорема математикада “Қўл бериб сўрашишлар ҳақидаги теорема” дэган ном билан машҳур.

8-масала. Синфда 30 нафар ўқувчи ўқийди. Шулардан 9 нафари 3 тадан, , 11 нафари - 4 тадан, 10 нафари эса 5 тадан дўстга эга бўлиши мумкинми?

□

30 та учли графни қараймиз. Бу ҳолда 9 та учининг даражаси 3 га, 11 та учининг даражаси 4 га, 10 та учининг даражаси 5 га тенг бўлиши керак. Демак, тоқ учлари сони $9+10=19$ га тенг. 19 – тоқ сон бўлгани учун бу ҳолат 2- теоремага зид.

■

9-масала. Миттибой Диснейленд паркидан келиб, у ердаги кўлда 7 та орол борлигини ҳамда оролларнинг ҳар биридан 1, 3 ёки 5 та кўприк чиққанини айтди. Шу кўприклардан камида бири кўлнинг ташқарисига чиққани ростми?

□ Ҳа, тўғри. Тескарисини фараз қилайлик, яъни ороллар кўприк орқали бир-бир билан тутштирилган бўлиб, ҳеч қандай кўприк кўл ташқарисига чиқмасин. Бу дэгани, ҳосил бўлган графда фақат 7 та уч бўлиб, уларнинг барчасининг даражалари тоқ бўлади (чунки 1,3 ва 5 – тоқ сонлар). Бу эса 2-теоремага зид.

■

<u>10- масала.</u> Текисликда 9 та кесма шундай чизилиши керакки, улардан ҳар бири айнан 3 та бошқа кесма билан кесишсин. Бу ишни амалга оширса бўладими?

□

Мумкин эмас. Ҳар бир учга кесмани мос қўйиб, граф ясаймиз. Бунда агар иккита кесма кесишса, мос бўлган учларни қирра билан туташтирамиз. Натижада ҳосил бўлган графда 9 та тоқ уч бўлиб, бундай графнинг мавжудлиги 2-теоремага зид.

■

<u>11- масала.</u> Синфдаги 10 нафар ўғил болалардан ҳар бири 8 нафар синфдош қизларга биттадан гул совға қилди. Ҳар бир қиз 5 тадан гул олган бўлса, қизлар сони нечага тенг?

□ Вазиятга мос графда қирралар сонини аниқлайлик. 10 нафар ўғил болалардан ҳар бири 8 тадан гул совға қилгани учун, жами 80 та гул совға қилинди. Ҳар бир қиз 5 тадан гул олган, демак жами 16 нафар қиз бўлган.

■

<u>12-масала.</u> Сеҳрли мамлакатда Карабаслар ва Барабаслар яшайди. Ҳар бир Карабас 6 та Карабас ва 9 та Барабас билан таниш. Ҳар бир Барабас 10 та Карабас ва 7 та Барабас билан таниш. Мамлакатда ким кўпроқ: Карабасларлarми ё Барабасларми?

□

Ҳар бир Карабасни унга таниш бўлган Карабас ва Барабас билан қирра ёрдамида туташтирамиз. У ҳолда ҳар бир Карабасдан 9 та, ҳар бир Барабасдан эса 10 та қирра чиқади. Демак, қирралар сони бир вақтда Карабаслар сонидан 9 марта, Барабаслар сонидан эса 10 марта кўпроқ. Демак, Карабаслар сони Барабаслар сонидан $\frac{10}{9}$ марта кўпроқ бўлади.

■

Топшириқ. 11- ва 12- масалаларни графлар тилига ўгиринг.

<u>Машқлар.</u>

1. Синфда 20 нафар ўқувчи бор. Синфдаги ҳар бир ўғил бола ҳар бир

синфдош қизга биттадан гул совға қилди.

a) Энг кўпи билан нечта гул совға қилинган?

b) Агар синфда 21 нафар ўқувчи бўлса, жавоб қандай бўлади?

2. Мамлакатда 100 та шаҳар бор. Ҳар бир шаҳардан 4 та йўл чиққан. Мамлакатда жами нечта йўл бор?

3. Маҳаллада 15 та телефон бор. Шулардан 4 тасининг ҳар бири 3 та бошқа телефонлар билан уланган, 8 тасининг ҳар бири 6 та бошқа телефонлар билан уланган, 3 таси ҳар бири 5 та бошқа телефонлар билан уланган бўлиши мумкинми?

4. Графнинг ҳар бир учидан 3 тадан қирра чиқмоқда. Ундаги қирралар сони 2018 та бўлиши мумкинми?

5. Сехрли мамлакатда ҳар қандай шаҳар айнан 5 та бошқа шаҳар билан авиарейс орқали туташтирилган..

a) Мамлакатда 10 та шаҳар бўлса, авиарейслар схэмасини чизиб беринг.

b) Мамлакатда 50 та шаҳар бўлса, авиарейслар нечта бўлади?

c) 46 та авиарейс бўлган шаҳар мавжудми?

6. Шаҳмат мусобақасида бир нечта шахматчи тоқ сондаги партияларни ўйнашди. Бундай шахматчилар сони жуфт еканлигини исботланг.

7. Оролда 15 та давлат бор. Уларнинг ҳар бирида камида битта қўшни давлат – ҳамкор давлат. Шундай давлат борки, ундаги ҳамкор қўшни давлатлар сони жуфтлигини исботланг.

8. Ўзга сайёраликларда қўллари сони иҳтиёрий бўлиши мумкин. Бир кун улар барчаси қўлларини шундай туташтиришдики, бунда бўш қўл қолмади.
Тоқ сондаги қўлларга эга бўлган ўзга сайёраликлар сони жуфт еканлигини исботланг.

9. 77 та телефондан ҳар бири айнан 15 та телефон билан уланган. Бундай бўлиши мумкинми?

10. Фермада ҳар бир бола айнан 3 та қўйига ем берди. Ҳар бир қўй 3 та

боладан ем олганини маълум бўлди. Болалар сони қўйлар сонига тенг бўлишини исботланг.

11. 6 та компютердан ҳар иккитаси ўзининг сими билан туташган. Шу симларни 5 та турли рангга бўямоқчи. Ҳар бир компютердан 5 та турли рангдаги симлар чиқадиган бўяш мумкинми?

Жавоблар.

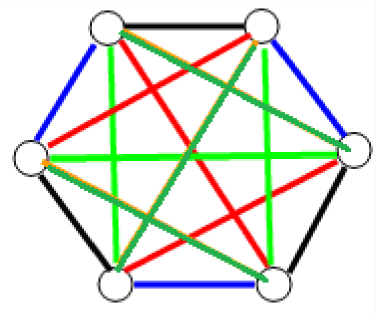
1. а) 100; б) 110

2. $100 \cdot 4 : 2 = 200$.

5. б) $50 \cdot 5 : 2 = 125$.

10. Ҳар бир қўй ва уни боққан бола орасида ип тортамиз. Ҳар бир қўйдан 3 та ип, ҳар бир боладан ҳам 3 та ип чиққан. Иплар сони бир вақтда болалар сонидан 3 марта, қўйлар сонидан ҳам 3 марта кўп. Демак, болалар сони қўйлар сонига тенг.

11.



Геометрик комбинатор масалалардан намуналар

Ўқувчиларда математикага бўлган қизиқишларини орттириш, таянч компетенцияларни шакллантириш учун таълим жараёнида амалий ва ностандарт характердаги масалалардан фойдаланмасдан бўлмайди. Бундай масалаларни ечиш ўқувчиларда анализ, синтез, аналогия, умумлаштириш, дедукция ва индукция каби мантиқий мушоҳада юритиш фаолиятини, интуиция, егилувчанлик ва мослашувчанлик каби фазилатларни ривожлантириб, ўқувчиларни олинган натижалар устида танқидий фикрлашга ўргатади. Кўпинча ностандарт характердаги масалаларни ечими дархол топилмасдан, бир неча бор уринишлар натижасидагина аниқланишлиги сабабли, бу мақсадга еришиш учун тиришқоқ бўлишликни, яъни шахснинг иродалилик каби жуда аҳамиятли сифатларни таркиб топишига имкон беради. Ва ниҳоят, энг асосийси: бундай масалаларни ечилиши ўқувчиларга натижага эришилганлик билан, ва шунингдек ечим йўлининг гўзаллиги ва анъанавий эмаслиги билан боғлиқ бўлган катта емоционал завқ берилиши катта аҳамиятга эга. Қуйида биз нисбатан янги бўлган йўналиш – комбинатор геометрия масалаларидан намуналарни келтирмоқдамиз.

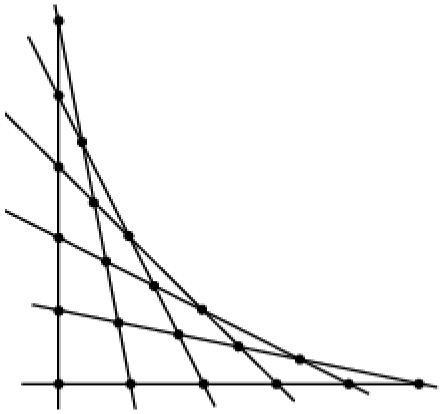
1. Текисликда n та нуқта шундай жойлашганки, улардан хеч қайси учтаси битта тўғри чизиқда ётмайди. Шу нуқталарнинг турли жуфтликларидан жами бўлиб нечта тўғри чизиқлар ўтади?

Ечилиши. Масала шартини қаноатлантирадиган нуқталарни A_1, …, A_n деб белгилаймиз. Бундай нуқталар мавжуд, мисол тариқасида битта айланада ётган n та нуқтани олишимиз мумкин. A_1 нуқтани қолган нуқталар билан n – 1 та тўғри чизиқ билан туташтиришимиз мумкин. Жами нуқталар n та бўлгани сабабли, масала шартини қаноатлантирадиган тўғри чизиқлар сони $n(n – 1)$ та бўлиши керак. Аммо бундай санашда биз ҳар бир тўғри чизиқни икки марта санаб чиққанимиз боис n та нуқталарнинг турли жуфтликларидан жами бўлиб $\frac{n(n-1)}{2}$ та тўғри чизиқ ўтишини ҳосил қиламиз.

Жавоб. $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. n та тўғри чизиқлар энг кўпи билан нечта нуқтада кесишиши мумкин?

Ечилиши. Равшанки, n та тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталари сони энг катта бўлши учун қуйидаги ҳолат бўлиши керак (расмга қаранг).



1) Ҳар бир тўғри чизиқ қолган тўғри чизиқлардан ҳар бири билан кесишади.

2) Хеч қандай учта тўғри чизиқ битта умумий нуқтага эга эмас.

Бу ҳолатда ҳар бир тўғри чизиқ қолган тўғри чизиқлар билан n – 1 та кесишиш нуқтадага эга. Олдинги масаладек, жами бўлиб $\frac{n(n-1)}{2}$ та нуқтага эга бўламиз.

Жавоб. $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Битта нуқтада кесишадиган n та туғри чизиқ текисликни нечта қисмга ажратади?

Жавоб. $2n$.

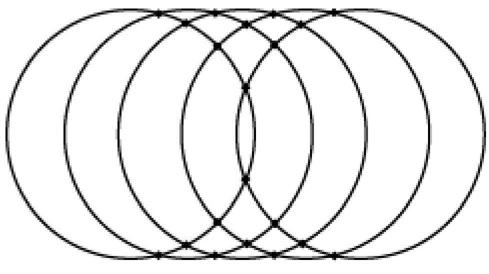
4. n та ўзаро кесишадиган тўғри чизиқлардан хеч қайси учтаси умумий нуқтага эга бўлмаса, текисликни нечта қисмга ажратади?

Ечилиши. Бир нечта берилган тўғри чизиққа биттасини қўшсак текислик қисмлари нечтага кўпайишини аниқлаймиз. Масалан, иккита ўзаро кесишадиган тўғри чизиққа учинчи тўғри чизиқни қўшсак, мавжуд тўртта текислик қисмлардан учтаси янги тўғри чизиқ билан тенг иккига бўлинади. Демак, ҳосил бўлган текислик қисмлари сони 7 = 4 + 3 га тенг бўлади.

Умумий ҳолда, $n-1$ та тўғри чизиққа n-чи тўғри чизиқни қўшсак, мавжуд текислик қисмларидан $n-1$ таси янги тўғри чизиқ билан тенг иккига бўлинади. Шунинг учун янги ҳосил бўлган текисликлар қисмлари сони n га кўпаяди. Демак, n та ўзаро кесишадиган тўғри чизиқлардан хеч қайси учтаси умумий нуқтага эга бўлмаса, текисликни $4+3+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2}+1.$ та қисмга ажратади.

5. n та айлана энг кўпи билан нечта кесишиш нуқтага эга бўлиши мумкин?

Ечилиши. Равшанки, n та айланаларнинг кесишиш нуқталари сони энг катта бўлши учун қуйидаги ҳолат бўлиши керак (расмга қаранг).



1) Ҳар бир айлана қолган айланалардан ҳар бири билан кесишади.

2) Хеч қандай учта айлана битта умумий нуқтага эга эмас.

Бу ҳолатда ҳар бир айлана қолган айланалар билан $2(n-1)$ та кесишиш нуқтадага эга. Демак, жами бўлиб $n(n-1)$ та нуқтага эга бўламиз.

6. n та айланадан ҳар бири қолган айланалардан ҳар бири билан

кесишиб, бунда хеч қандай учта айлана битта умумий нуқтага эга эмас бўлсин. Бу айланалар текисликни нечта қисмга ажратади?

Ечилиши. Бир нечта берилган айланага биттасини қўшсак текислик қисмлари нечтага кўпайишини аниқлаймиз. Масалан, иккита ўзаро кесишадиган айланага учинчи айланани қўшсак, мавжуд тўртта текислик қисмлари янги тўғри чизиқ билан тенг иккига бўлинади. Демак, ҳосил бўлган текислик қисмлари сони 8 =4 + 4 га тенг бўлади. Енди шу учта айланага тўртинчисини қўшсак мавжуд олтита текислик қисмлари янги тўғри чизиқ билан тенг иккига бўлинади. Демак, ҳосил бўлган текислик қисмлари сони 14 =8 + 6 га тенг бўлади.

Умумий ҳолда, $n-1$ та тўғри чизиққа n-чи тўғри чизиқни қўшсак, мавжуд текислик қисмларидан $n-1$ таси янги тўғри чизиқ билан тенг иккига бўлинади. Шунинг учун янги ҳосил бўлган текисликлар қисмлари сони $2(n-1)$ га кўпаяди. Демак, n та ўзаро кесишадиган тўғри чизиқлардан хеч қайси учтаси умумий нуқтага эга бўлмаса, текисликни

$$4 +4 + 6+ \ldots +2(n-1) = 2(2 +2 + 3 + \ldots +(n-1) = n(n-1) +2$$

та қисмга ажратади.

7. n-бурчак нечта диагоналга эга?

Кўпбурчак учларини $A_1, \ldots, A_n$ деб белгилаймиз. A_1 нуқтадан 3 та диагонал ўтади. Демак, n та нуқтадан $\frac{n(n-3)}{2}$. та диагонал ўтади.

Жавоб. $\frac{n(n-3)}{2}$.

7. Диагоналлар сони томонлари сонига тенг бўлган кўпбурчаклар мавжудми?

$\frac{n(n-3)}{2}=n,$ тенгликдан $n = 5$ еканлиги келиб чиқади.

8. Тўғри чизиқ учбурчакнинг барча томонларини кесиб ўта оладими?

Геометрия аксиомаларига кўра ҳар бир тўғри чизиқ текисликни яримтекисликка бўлади. Бунда агар икки нуқта текисликнинг турли яримтекисликларга тегишли бўлса, у ҳолда уларни туташтирувчи кесма шу тўғри чизиқ билан кесишади. Агар икки нуқта текисликнинг битта яримтекисликга тегишли бўлса, у ҳолда уларни туташтирувчи кесма шу тўғри чизиқ билан кесишмайди.

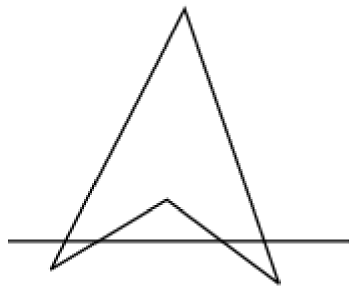
Тўғри чизиғимиз ABC учбурчакни AB ва AC томонларини кессин. Бу ҳолда A ва B нуқталар турли яримтекисликларида ётади. A ва C нуқталар ҳам бу тўғри чизиқдан турли яримтекисликларда ётади. Шунинг учун B ва C

нуқталар битта яримтекисликда ётади ва *BC* кесма бу тўғри чизиқ билан кесишмайди.

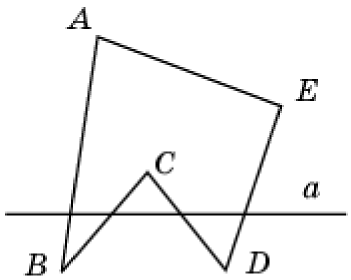
Жавоб: йўқ.

9. Тўғри чизиқ тўртбурчакнинг барча томонларини кесиб ўта оладими?

Жавоб: Ҳа. Расмга қаранг.



10. Тўғри чизиқ тўртбурчакнинг барча томонларини кесиб ўта оладими?



a тўғри чизиқ *АВСДЕ* бешбурчак *АВ*, *ВС*, *СД* ва *ДЕ* томонларини кессин (расмга қаранг). *a* тўғри чизиқ *АЕ* томонни кэса олмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, *А* ва *В*, *В* ва *С*, *С* ва *Д*, *Д* ва *Е* нуқталар *a* тўғри чизиқ ҳосил қилган турли яримтекисликларда ётади. Демак, *А* ва *Е* нуқталар *a* тўғри чизиқ ҳосил қилган битта яримтекисликда ётади. Шунинг учун *АЕ* кесма *a* тўғри чизиқ билан кесишмайди.

Фойдаланган адабиётлар

1. Юнусова Д. Бўлажак математика ўқитувчисини инновацион фаолиятга тайѐрлаш назарияси ва амалиѐти. Монография. – Тошкент: Фан, 2009. – 165 б.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic : The IMO Compendium 1959-2009, Springer, 2011.
3. M. Becheanu : International Mathematical Olympiads 1959-2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001.
4. E. Lozansky, C. Rousseau : Winning Solutions, Springer-Verlag, New York, 1996.
5. T. Andreescu, Z. Feng : 102 Combinatorial Problems, Birkhauser

Boston, 2002.

3-амалий машғулот

Мавзу: Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда геометрияга оид масалалар тизими ва уларни ечиш методикаси. (2 соат)

Ишнинг мақсади: Тингловчиларга Халқаро математика олимпиадалари ва мусобақаларда тақдим этиладиган масалалар мавзулари ҳамда танланган мавзу бўйича масалалар ечиш методикаси билан танишлириш

Амалий машғулот топшириқлари

Классик геометрия . Учбурчаклар геометрияси. Кўпбурчаклар, айланалар. Геометрик тенгсизликлар.

Аналитик геометрия . Координаталар методи. Векторлар ва уларнинг қўлланилиши. Массалар геометрияси. Геометрияда комплекс сонлар.

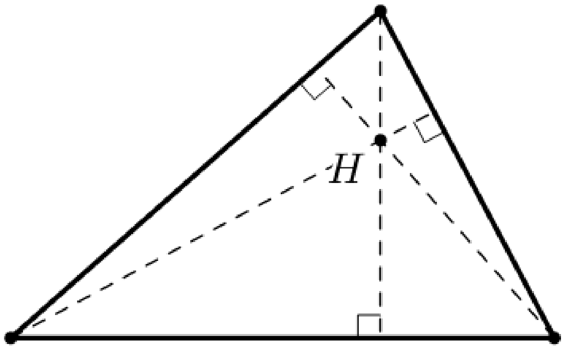
Синтетик геометрия . Геометрик алмаштиришлар. Ҳаракат. Шал теоремаси. Ўхшашлик. Гомотетия . Алмаштиришлар композициялари. Инверсия. Аффин ва проектив алмаштиришлар.

Комбинатор геометгия . Қаварик шакллар. Қаварик қобиқ. Хелли теоремаси. Шпернер леммаси

“Учбурчакнинг ажойиб нуқталари” иборасини маъносини ёритишга ҳаракат қиламиз. Барчамизга маълумки, учта учбурчак ички бурчаклар биссектрисалари нуқталарда бир нуқтада, яъни ички чизилган айлана марказида кесишади. Худди шундай учбурчак медианалари ва баландликлари, ҳамда томонларнинг ўрта перпендикулярлари бир нуқтада кесишиши маълум. Ҳосил бўлган барча нуқталар ажойиб нуқталар деб атаймиз. Уларнинг ажойиблиги шунда билиниб турибдики, мос бўлган учта тўғри чизик одатдагидек учта нуқтада эмас, балким битта нуқтада кесишади.

Баландликлар кесишиш нуқтаси (ортомарказ)

Таъриф. Учбурчак баландликларининг кесишиш нуқтаси учбурчакнинг ортомаркази дейилади.

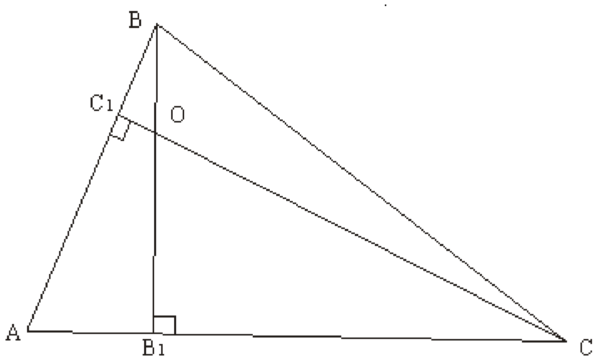


1-масала. ABC учбурчакнинг ортомаркази BB_1 баландликни учдан бўйлаб a ва b кесмаларга ажратиб, уларнинг нисбати $\frac{a}{b}=\frac{\cos\angle B}{\cos\angle A\cos\angle C}$ га тенг бўлади.

Ечилиши. ABC учбурчакда BB_1 ва CC_1 -баландликлар, O –уларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин.

1) $\Delta\ BC_1O$ – тўғри бурчакли учбурчак, ва

$$BO=\frac{BC_1}{\cos\angle ABO}=\frac{BC_1}{\cos(90^0-\angle A)}=\frac{BC_1}{\sin\angle A}.$$



2) $\Delta\ BC_1C$ – тўғри бурчакли учбурчак, ва

$$BC_1=BC\cos\angle B=a\cos\angle B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO=\frac{a\cos\angle B}{\sin\angle A}=\frac{b\cos\angle B}{\sin\angle B}=\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}$$

Чунки синуслар теоремасига кўра $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{c}{\sin\angle C}$.

3)

$$OB_1=BB_1=BO=c\sin\angle A=\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}=\frac{c(\sin\angle A\sin\angle B)}{\sin\angle C}=\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}.$$

4)

$$\frac{BO}{OB_1}=\frac{b\cos\angle B}{\sin\angle A}:\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}=\frac{c\cos\angle B}{\sin\angle C}:\frac{c\cos\angle A\cos\angle C}{\sin\angle C}.$$

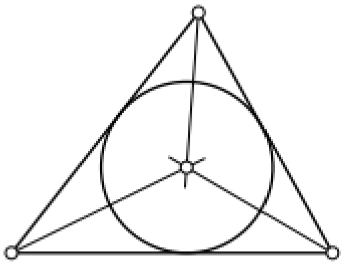
Бу ердан

$$\frac{BO}{OB_1} = \frac{\cos \angle B}{\cos \angle A \cos \angle C}. \qquad (*)$$

Еслатма. Агар бурчаклардан бири ўтмас бўлса, (*) даги мос бўлган косинуснинг модули олинади.

Биссектрисалар кесишиш нуқтаси (имарказ)

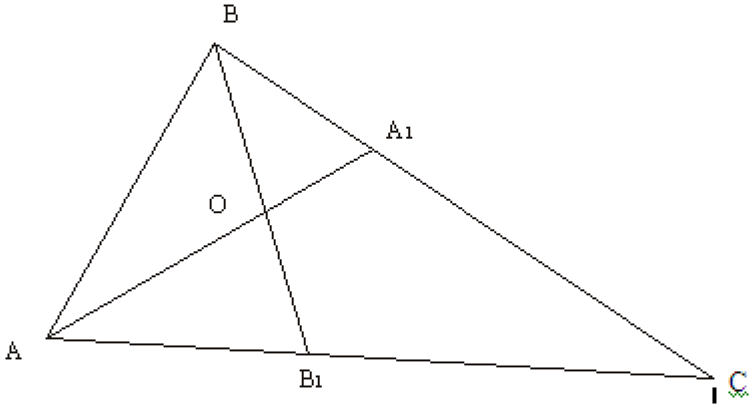
Таъриф. Биссектрисалар кесишиш нуқтаси имарказ деб аталади.



2-масала. Агар O – ABC учбурчакнинг имаркази бўлса, у ҳолда

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{b+c}{a},$$

бу ерда AA_1 – биссектриса, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.



Ечилиши.

1) $\Delta\ ABC$ да AA_1 – биссектриса , шунинг учун

$AB : AC = BA_1 : CA_1 = BA_1 : (BC - BA_1)$ ва $BA_1 = \dfrac{ac}{b+c}$.

2) $\Delta\ ABA_1$ да BO – биссектриса , шунинг учун

$AO : OA_1 = BA : BA_1$ ва $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{b+c}{a}$. (**)

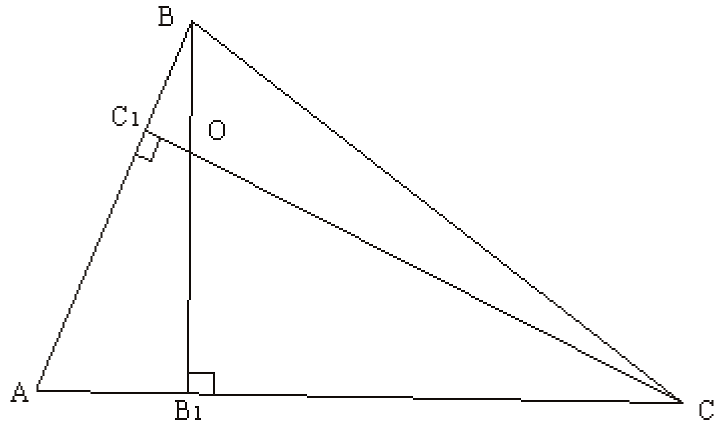
Учбурчак учидан ортомарказ ва имарказгача бўлган масофалар.

Дастлаб учбурчак учидан ортомарказгача бўлган масофани топамиз.

3-масала. ABC учбурчакда BB_1 ва CC_1 -баландликлар, O –уларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин.

OB ни топинг.

Ечилиши.



1-масаладаги 2 -қадамидан $BO = b|ctg\angle B| = 2R|\cos\angle B|$

Келиб чиқади. Содда ҳисоб-китоблардан сўнг

$$BO = \frac{|\cos\angle C|}{\sin\angle A \sin\angle B} BB_1$$

формулани ҳосил қиламиз.

4-масала. Агар ABC учбурчакда $AC = 5\sqrt{7},\ CB = 4\sqrt{7},\ BA = 6\sqrt{7}$ бўлса B учдан баландликларнинг кесишиш нуқтасигача бўлган масофани топинг.

Ечилиши.

Косинуслар теоремасидан $\cos B = \frac{6}{16}$. Демак,

$$\sin B = \frac{5\sqrt{7}}{16}, \quad ctgB = \frac{9}{5\sqrt{7}}.$$

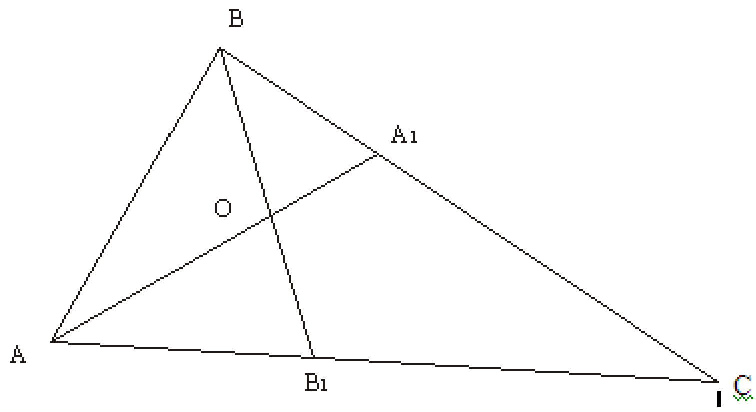
Шунинг учун $BO = 9$.

Енди учбурчак учидан имарказгача бўлган масофани топамиз.

5-масала. ABC учбурчакда $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, AA_1 - биссектриса, O –биссектрисалар кесишиш нуқтаси бўлсин.

AO ни топинг.

Ечилиши.



2-масаладан $AO = \dfrac{b+c}{a+b+c} AA_1$.

$$AA_1 = \sqrt{\frac{ab(b+c-a)(a+b+c)}{b+c}}$$ бўлгани учун

$$AO = \sqrt{\frac{cb(b+c-a)}{b+c+a}} = \sqrt{\frac{cb(p-a)}{p}}\left(p - \frac{a+b+c}{2}\right)$$

Еслатма. $AO^2 = bc - 4Rr$ формула ҳам ўринли, бу ерда R ва r – мос равишда ABC га ташқи ва ички чизилган айланалар радиуслари .

6-масала. ABC учбурчакда AB = 8 см, BC = 7 см, CA = 6 см. A нуқтадан биссектрисалар кесишиш нуқтасигача бўлган масофани топинг.

Ечилиши.

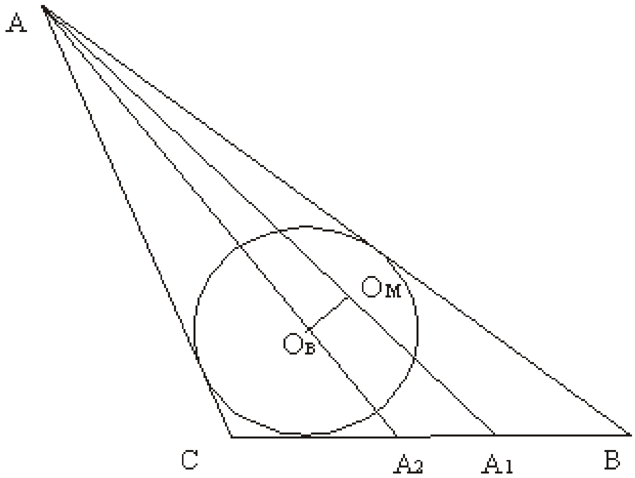
Равшанки AA_1 = 6 см. 2-масаладан фойдаланамиз:

$$AO = \frac{b+c}{a+b+c} AA_2 = 4см.$$

Ажойиб нуқталар орасидаги масофалар

Еслатамиз, медианалар кесишиш нуқтаси учбурчакнинг оғирлик маркази деб юритилади. Имарказ ва оғирлик маркази орасидаги масофани топамиз.

7-масала. ABC учбурчакда O_B ва O_M нуқталар мос равишда ички чизилган айлана маркази ва медианалар кесишиш нуқтаси бўлсин. O_BO_M. ни топинг.



Ечилиши.

$\overline{AC}=\overline{b},\ \overline{AB}=\overline{c},\ \angle CAB=\alpha.$

1) Медианалар ҳоссаларига кўра $\overline{AO_M}=\frac{2}{3}\overline{AA_1}=\frac{2}{3}\frac{\overline{b}+\overline{c}}{2}=\frac{\overline{b}+\overline{c}}{3}.$

2) 2-масаладаги (**) формулага кўра
$AO_B : O_BA_2 = (b+c) : a$, шунинг учун $AO_B : AA_2 = (b + c) : (b + c + a)$.
Учбурчак биссектрисаси ҳоссасига кўра $AC : AB = CA_2 : A_2B$,

яъни $CA_2=\frac{b\cdot CB}{b+c}$.

Демак,

$$\overline{AO_B}=\frac{b+c}{a+b+c}\overline{AA_2},$$

$$\overline{AA_2}=\overline{AC}+\overline{CA_2}=\overline{b}+\frac{b}{b+c}\overline{CB}=\frac{c}{b+c}\overline{b}+\frac{c}{b+c}\overline{c}.$$

Бундан $\overline{AO_B}=\frac{c}{a+b+c}\overline{b}+\frac{b}{a+b+c}\overline{c}.$

3) Расмдан $\overline{O_MO_B}=\frac{1}{3(a+b+c)}\left((2c-a-b)\overline{b}+(2b-a-c)\overline{c}\right).$

4) Векторларнинг скаляр квадрати учун $2bc\cos\alpha = b^2+c^2-a^2$.
Бундан

$$O_MO_B^2=\frac{4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}{9(a+b+c)^2}+\frac{-5abc(a+b+c)+ab^2+a^2b+ac^2+a^2c}{9(a+b+c)^2}+$$

$$+\frac{bc^2+b^2c-a^4-b^4-c^4}{9(a+b+c)^2}.$$

Соддалаштиришлардан сўнг $O_MO_B^2=\frac{p^2+5r^2-16Rr}{9}$, бу ерда R ва r –

мос равишда ABC га ташқи ва ички чизилган айланалар радиуслари .

Енди ҳисоблашга доир масалани ечамиз.

8-масала. $AC = 6$, $AB = 8$, $BC = 7$. Ички чизилган айлана маркази ва медианалар кесишиш нуқтаси орасидаги масофани топинг.

Ечилиши.

2 –масалага кўра $AO_B : O_BA_2 = 14 : 7 = 2 : 1$ ва $OA_B : AA_2 = 2 : 3$.

Биссектриса ҳоссасидан $AC : AB = CA_2 : A_2B$, яъни $CA_2 = \frac{3CB}{7}$.

Демак, $\overline{AO_B} = \frac{8}{21}\bar{b} + \frac{6}{21}\bar{c}$. $\overline{O_MO_B} = \frac{1}{21}\left(\bar{b} - \bar{c}\right)$.

Векторнинг скаляр квадрати учун $2bc\cos\alpha = b^2+c^2 - a^2$.

Аммо $2bc\cos\alpha = 51$, демак $\left(O_MO_B\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Жавоb: $O_MO_B = \frac{1}{3}$.

Изоҳ. Бу масалада $O_MO_B \in A_1A_2$, чунки $OA_B : AA_2 = 2 : 3 = AO_M : AA_1$.

$$\text{Демак,}\quad O_MO_B = \frac{2A_2A_1}{3} = \frac{2\left(CA_1 - CA_2\right)}{3},\quad O_MO_B = \frac{1}{3}.$$

9-масала. ABC учбурчакда O_B ва O_M нуқталар мос равишда ички чизилган айлана маркази ва медианалар кесишиш нуқтаси бўлсин.

Вектор тушунчасидан фойдланмасдан O_BO_M. ни топинг.

Ечилиши.

1) $AA_1 = m_a$, $AO_M = \frac{2AA_1}{3}$.

2) Биссектрисани топамиз:

$AA_2 = l_a$ бўлса , 2-масаладан $CA_2 = \frac{ab}{b+c}$; $AO_B = \frac{(b+c)l_a}{a+b+c}$.

3) $A_1A_2 = CA_1 - CA_2 = \frac{ac}{2(b+c)}$.

4) ΔA_1AA_2 да барча томонлар узунлиги маълум, шунинг учун A_1AA_2 бурчак косинусини топиш мумкин.

5) $\Delta\ O_MAO_B$ да косинуслар теоремасидан фойдаланиб O_MO_B ни топамиз.

10-масала. $AC = 9$, $AB = 18$, $BC = 21$. O_MO_B – ?

Ечилиши.

1) Медиана $AA_1 = 1{,}5\sqrt{41}$ ва $AO_M = \sqrt{41}$.

2) Биссектриса $AA_2 = 8;\ CA_2 = 7;\ AO_B = \frac{9}{2}.$

3) Бундан $A_1A_2 = \frac{7}{2}.$

4) Худди шундай $\triangle A_1AA_2$: $\cos A_1AA_2 = \frac{6}{\sqrt{41}}.$

5) $\Delta\ O_MAO_B$ да косинуслар теоремасидан фойдаланиб $O_MO_B^2 = \frac{29}{4}$ ни топамиз.

Жавоb: $O_MO_B = \frac{\sqrt{29}}{2}.$

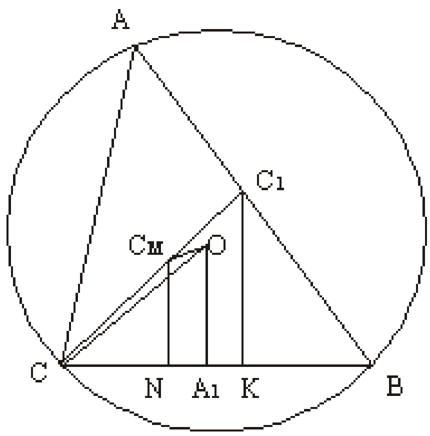
11-масала. Ташқи чизилган айлана маркази ва медианалар кесишиш нуқтаси орасидаги масофани топинг.

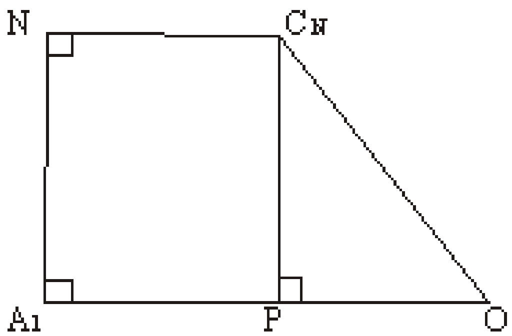
Ечилиши.

O – ташқи чизилган айлана маркази, OM – медианалар кесишиш нуқтаси, A_1 ва C_1 мос равишда AB ва BC томонларнинг ўрталари бўлсин .

1) ΔC_1KB да $BC_1 = \frac{c}{2},\ C_1K = 0{,}5c\sin\beta,\ KB = 0{,}5c\cos\beta.$

У ҳолда $CK=a–0{,}5c\ coc\ \beta$





2) $\Delta\ CC_1K$ ва $\Delta\ CO_MN$ ўхшаш. Бундан $CN : CK = NO_M : KC_1 = 2 : 3$,

ва $CN = \frac{2}{3}a - \frac{c\cos\beta}{3},\ NO_M = \frac{c\sin\beta}{3} = \frac{bc}{6R}\ \left(\sin\beta = \frac{b}{2R}\right).$

3) 2) дан

$NA_1 = CA_1 - CN = \ldots = \frac{2c\cos\beta - a}{6}.$

4) $\angle\ A = \alpha$, $\angle\ COB = 2\alpha$, $\angle\ COA = \alpha$, $OA_1 = R\text{coc}\ \alpha$.

5) $OP = OA_1 - NO_M = R\cos\alpha - \frac{bc}{6R} = \frac{6R^2\cos\alpha - bc}{6R}.$

6) $\Delta\ OPO_M$ да Пифагор теоремасига кўра

$$O_MO^2 = O_MP_2^2 + PO^2 = A_1N^2 + PO^2 = \frac{r^2(2c\cos\beta - a)^2 + (6R^2\cos\alpha - bc)^2}{36R^2}$$

Косинуслар теоремаси: $2ac\cos\beta = a^2+c^2-b^2$, $2bc\cos\alpha = b^2+c^2-a^2$;

синуслар теоремаси: $\sin\beta = \frac{b}{2R}$, $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$.

Бундан $O_MO^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

12-масала. $AB = 30$, $BC = 28$, $CA = 26$. Ташқи чизилган айлана маркази ва медианалар кесишиш нуқтаси орасидаги масофани топинг

Ечилиши. 1) Герон формуласига кўра, $S = 336$, $R = \frac{65}{4}$.

2) $\sin\alpha = \frac{33}{65}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

3) $\Delta\ C_1KB$ да $BC_1 = 15$, $C_1K = 12$, $KB = 9$, демак $CK = 19$.

4) $\Delta\ CC_1K$ ва $\Delta\ CO_MN$ ўхшаш. Демак, $CN : CK = NO_M : KC_1 = 2 : 3$,

ва $NA_1 = CA_1 - CN = \frac{4}{3}$.

$OA_1 = R\cos\alpha = \frac{33}{4}$, $OP = \frac{1}{4}$.

5) $\Delta\ OPO_M$ да Пифагор теоремасига кўра $O_MO^2 = O_MP^2 + PO^2 = \frac{265}{144}$.

Жавоb: $O_MO = \frac{\sqrt{265}}{12}$.

13-масала (Эйлер формуласи). Ички ва ташқи чизилган айланалар марказлари орасидаги масофани топинг.

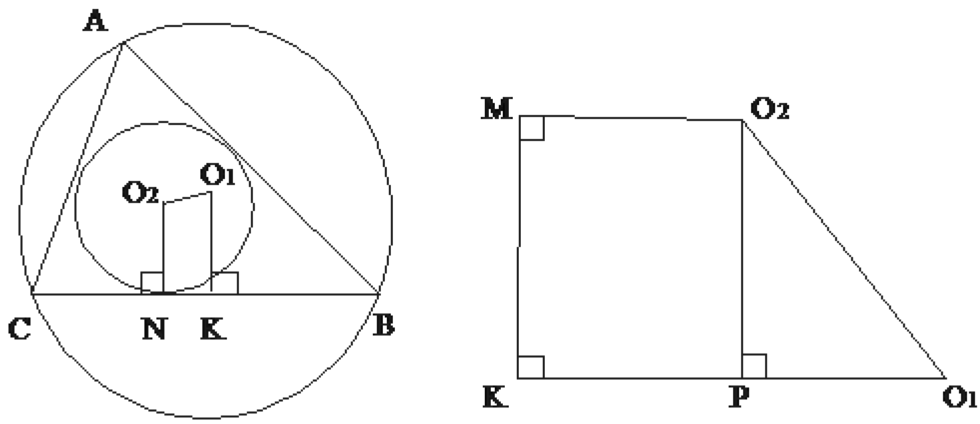
Ечилиши.

O_1 – ташқи чизилган айлана маркази, O_2 – ички чизилган айлана маркази бўлсин.

1) $\angle A = \alpha$, $\angle CO_1B = 2\alpha$, шунинг учун $\angle BO_1K = \alpha$, $O_1K = R\cos\alpha$ ва $BK = \frac{a}{2}$.

2) O_2 – ички чизилган айлана маркази бўлгани боис $O_2M = r$.

3) A, B, C нуқталардан ташқи чизилган айланага иккитадан ўринма ўтказилаганлиги боис, ўринмалар ҳоссасидан $BK = p - b$.



Шунинг учун

$$KM=\frac{a}{2}-(p-b)=\frac{b-c}{2}.$$

4) $O_1P = R\cos\alpha - r$.

5) $\Delta\ O_1PO_2$ да Пифагор теоремасига кўра

$O_1O_2^2 = O_1P^2 + O_2P = O_1P^2 + KM^2$,

$$O_1O_2^2=\frac{(R\cos\alpha-r)^2+(b-c)^2}{4}=\frac{r^2-2Rr\cos\alpha+R^2\cos^2\alpha+(b-c)^2}{4}=$$

$$=\frac{R^2-2rR+r^2+2Rr(1-\cos\alpha)-R^2\sin^2\alpha+(b-c)^2}{4}.$$

Соддалаштирамиз

$$\frac{2Rr(1-\cos\alpha)-R^2\sin^2\alpha+(b-c)^2}{4}=$$

$$=\frac{2s\cdot abc\cdot 2}{(a+b+c)\cdot 4S}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)-\frac{a^2}{4}+\frac{(b-c)^2}{4}=$$

$$=\frac{a\left(a^2-(b-c)^2\right)}{2(a+b+c)}-\frac{a^2-(b-c)^2}{4}=\frac{\left(a^2-(b-c)^2\right)(a-b-c)}{4(a+b+c)}=$$

$$=\frac{-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4(a+b+c)^2}=-\frac{S^2}{p^2}=-r^2.$$

Демак, $O_1O_2^2 = R^2 - 2Rr$.

14-масала. Қандай учбурчакда ички ва ташқи чизилган айланалар марказлари устма-уст тушади?

Ечилиши. Ички ва ташқи чизилган айланалар марказлари устма-уст тушса, ўрта перпендикулярлар кесишиш нуқтаси ва биссектрисалар кесишиш нуқтаси устма-уст тушади. Демак, ўрта перпендикулярлар ва биссектрисалар устма-уст тушади. Бу эса фақат тенг томонли мунтазам учбурчакда бўлиши мумкин.

15-масала. ABC учбурчакнинг BC,CA ва AB томонларида $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ ва $CA_1 = CB_1$ шартни қаноатлантирадиган A_1,B_1 ва C_1 нуқталар олинган. Учбурчак томонлари ички чизилган айлана билан A_1,B_1 ва C_1 нуқталарда ўринишини исботланг.

Ечилиши. $AC_1 = AB_1 = x$, $BA_1 = BC_1 = й$ ва $CA_1 = CB_1 = з$ бўлсин. У ҳолда $a = й+з$, $b = з+x$ ва $c = x + й$. Бундан $з = (a+b - c)|2$. Демак, берилган ABC учбурчак учун A_1 ва B_1 нуқталар ҳолати бир қийматли аниқланади. Худди шундай C_1 нуқта ҳолати бир қийматли аниқланади. Учбурчак томонлари ички чизилган айлана билан уриниш нуқталари масала шартида берилган муносабатларни қаноатлантириши равшан.

16-масала. O_a,O_b ва O_c нуқталар ABC учбурчакка ташқи –ички чизилган айланалар марказлари бўлсин. A,B ва C нуқталар $O_aO_bO_c$ учбурча баландликларининг асослари бўлишини исботланг.

Ечилиши. CO_a ва CO_b ўқлар C учнинг ташқи бурчаклари биссектрисалари бўлгани боис, C нуқта O_aO_b тўғри чизиқда ётиши ҳамда $\angle O_aCB = \angle O_bCA$ тенглик бажарилиши келиб чиқади. биссектриса BCA бурчак биссектрисаси CO_c бўлгани учун, $\angle BCO_c = \angle ACO_c$. Бу тенгликларни қўшиб чиқсак $\angle O_aCO_c = \angle O_cCO_b$ ни ҳосил қиламиз, яъни O_cC — $O_aO_bO_c$ учбурчак баландлиги. Худди шундай O_aA ва O_bB – баландликлар бўлиши исбот қилинади.

17-масала. ABC учбурчак BC томони ташқи чизилган айлананинг O марказидан $90°+□A/2$ бурчак остида, ички-ташқи чизилган айлананинг O_a марказида эса $90° – □A/2$ бурчак остида кўринишини исботланг.

Ечилиши. Равшанки,

$$□BOC = 180° – □CBO – □BCO = 180° – □B/2 – □C/2 = 90° + □A/2,$$

$$□BO_aC = 180° – □BOC,$$

чунки $□OBO_a = □OCO_a = 90°$.

18-масала. ABC учбурчак ичида

$□PAB : □PAC = □PCA : □PCB = □PBC : □PBA = x$

муносабатларни қаноатлантирадиган P нуқта олинган. $x = 1$ бўлишини исботланг.

Ечилиши. ABC учбурчакда AA_1,BB_1 ва CC_1- биссектрисалар бўлсин, O — уларнинг кесишиш нуқтаси. $x > 1$ деб фараз қиламиз. У ҳолда $□PAB > □PAC$, яъни P нуқта AA_1C учбурчак ичида жойлашган. Худди шундай P нуқта CC_1B ва BB_1A учбурчаклар ичида жойлашганлиги кўрсатилади. Аммо, юқоридаги учбурчаклар ягона O умумий нуқтага эга бўлганлигидан зиддиятга келдик. $x < 1$ ҳол худди шундай қаралади.

Фойдаланган адабиётлар

1. Юнусова Д. Бўлажак математика ўқитувчисини инновацион фаолиятга тайѐрлаш назарияси ва амалиѐти. Монография. – Тошкент: Фан, 2009. – 165 б.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic : The IMO Compendium 1959-2009, Springer, 2011.
3. M. Becheanu : International Mathematical Olympiads 1959-2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001.
4. E. Lozansky, C. Rousseau : Winning Solutions, Springer-Verlag, New York, 1996.

V. ГЛОССАРИЙ

Ўзбек тилида	Рус тилида	Инглиз тилида	Изоҳ
Халқаро Олимпиада	Международная Олимпиада	International olympiad	Бир нечта давлат ўқувчилари, талабаларнинг бирор фан соҳаси бўйича билимларини синаш мусобақаси, кўрик, танлов
Тренер	Тренер	Coach	Маълум йўналишда таълим олиш, машқлар бажариш бўйича тренинг машғулотларини олиб бориш (раҳбарлик қилиш) учун махсус тайѐргарликка эга мутахассис
Ўқитиш методи	Метод обучения	Method of training	Таълим жараѐнида таълим берувчи ва таълим олувчилаларнинг кутилган мақсадга эришишга қаратилган биргаликдаги фаолияти
Методология	Методология	Methodology	МЕТОДОЛОГИЯ (метод ва…логия сўзларидан) — тадқиқотчининг назарий ва амалий фаолиятини ташкил этиш, тиклаш тамойиллари ва усуллари тизими

			ҳамда бундай тизим ҳақидаги таълимот.
Алгебра	Алгебра	Algebra	Катталиклар устида бажариладиган амаллар юзасидан умумий қоидаларни ўрганадиган ва бунда катталикнинг сон қийматини ўрнига бошқа шартли белгилар (ҳарфлар) қўллаш орқали, иш юритиладиган математика бўлими
Комбинаторика	Комбинаторика	Combinatorics	КОМБИНАТОРИКА (лот. combinare – бирлаштириш) , комбинатор анализ, комбинатор математика — математиканинг чекли тўпламлар устида бажариладиган амалларни ўрганадиган бўлими.
Математика	Математика	Mathematics	МАТЕМАТИКА (юн. mathematike, mathema — билим, фан) — аниқ мантиқий мушоҳадаларга асосланган билимлар ҳақидаги фан.
Геометрия	Геометрия	Geometry	ГЕОМЕТРИЯ (гео… ва метрия) — математиканинг предмет шакллари ва шаклий

			муносабатларини ўрганадиган бўлими.
Масала	Масала	Problem	ўқувчиларга муайян фанлардан билим бериш ва уларда кўникмалар ҳосил қилиш ҳамда билимларни текшириш методларидан бири.
Истеъдод	Талант	Talent	ИСТЕЪДОД, талант — ниҳоятда зўр қобилият, бирор соҳада юксак даражадаги лаёқат.

VI. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари:

1. Каримов И.А. Юксак маънавият – енгилмас куч. -Т.: “Маънавият”. 2008.-176 б.

2. Каримов И.А. Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида. -Т.: “Ўзбекистон”. 2011. -440 б.

3. Каримов И.А. Она юртимиз бахти иқболи ва буюк келажаги йўлида хизмат қилиш – энг олий саодатдир. –Т:. “Ўзбекистон”, 2015. – 302 б.

4. Мирзиёев Ш.М. “Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз” мавзусидаги Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқи. – Т.: “Ўзбекистон”, 2016. – 56 б.

5. Мирзиёев Ш.М. “Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш – юрт тараққиёти ва халқ фаровонлиги гарови” мавзусидаги Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маърузаси. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 48 б.

6. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, қатъий тартиб-интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. –Т.: “Ўзбекистон”. – 2017.– 102 б.

7. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб ҳалқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б.

8. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз. – Т.: “Ўзбекистон”, 2017. – 591 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

9. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2018.

10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сон Фармони.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 5 июлдаги “Ёшларга оид давлат сиёсати самарадорлигини ошириш ва Ўзбекистон ёшлар иттифоқи фаолиятини қўллаб-қувватлаш тўғрисида”ги 5106-сон Фармони.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта

тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги 4732-сон Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ- 5789-сонли Фармони.

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 11 июлдаги “Олий ва ўрта маҳсус таълим соҳасида бошқарувни ислоҳ қилиш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5763-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 11 июлдаги “ Олий ва ўрта маҳсус таълим тизимига бошқарувнинг янги тамойилларини жорий этиш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4391-сонли Қарори.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 2 февралдаги “Коррупцияга қарши курашиш тўғрисида”ги Ўзбекистон Республикаси Қонунининг қоидаларини амалга ошириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2752-сонли Қарори.

17. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сонли Қарори.

18. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 26 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 278-сонли Қарори.

19. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2015 йил 3 декабрдаги “Олий ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълими муассасаларининг бошқарув кадрлари захирасини мақсадли ўқитишни ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 351-сонли Қарори.

20. 03.05.2019 й. Ўзбекистон Республикаси Президентининг ПҚ-4306-сон "Иқтидорли ёшларни аниқлаш ва юқори малакали кадрлар тайёрлашнинг узлуксиз тизимини ташкил етиш чора-тадбирлари тўғрисида"ги Қарори

21. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 29 апрелдаги ПФ-5712-сон “Ўзбекистон Республикаси халқ таълими тизимини 2030 йилгача ривожлантириш концепциясини тасдиқлаш тўғрисида”ги фармони

22. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 6 апрелдаги 187-сон “Умумий ўрта ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълимининг давлат таълим стандартларини тасдиқлаш тўғрисида”ги карори

23. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” карори

24. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2008 йил 7 августдаги “Айрим фанлар чуқур ўрганиладиган давлат ихтисослаштирилган умумтаълим муассасалари фаолиятини такомиллаштириш тўғрисида”ги 173-сонли қарори

25. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 6 апрелдаги 187-сон “Умумий ўрта ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълимининг давлат таълим стандартларини тасдиқлаш тўғрисида”ги қарори

III. Махсус адабиётлар.

26. Юнусова Д. Математикани ўқитишнинг замонавий технологиялари. Дарслик. – Тошкент: Фан ва технология, 2011. – 200 б.

27. Юнусова Д.И.Узлуксиз таълим тизими математика ўқитувчисини тайѐрлашнинг назарий асослари. Монография. –Тошкент: Фан ва технология, 2008. – 160 б.

28. Юнусова Д. Бўлажак математика ўқитувчисини инновацион фаолиятга тайѐрлаш назарияси ва амалиѐти. Монография. – Тошкент: Фан, 2009. – 165 б.

29. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic : The IMO Compendium 1959-2009, Springer, 2011.

30. M. Becheanu : International Mathematical Olympiads 1959-2000. Problems. Solutions. Results, Academic Distribution Center, Freeland, USA, 2001.

31. E. Lozansky, C. Rousseau : Winning Solutions, Springer-Verlag, New York, 1996.

32. T. Andreescu, V. Cartoaje, G. Dospinescu, M. Lascu : Old and New Inequalities , GIL Publishing House, 2004.

33. E.J. Barbeau : Polynomials , Springer-Verlag, 2003.

34. Z. Cvetkovski : Inequalities - Theorems, Techniques and Selected Problems , Springer, 2012.

35. T. Andreescu, Z. Feng : 103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser Boston, 2004.

36. I.F. Sharygin : Problems in Plane Geometry, Imported Pubn, 1988.

37. T. Andreescu, D. Andrica : An Introduction to the Diophantine Equations, GIL Publishing House, Zalau, 2002.

38. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng : 104 Number Theory Problems, Birkhauser, Boston 2006

39. T. Andreescu, Z. Feng : 102 Combinatorial Problems, Birkhauser Boston, 2002.

IV. Интернет сайтлар

40. http://edu.uz – Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги.

41. http://lex.uz – Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.

42. http://bimm.uz – Олий таълим тизими педагог ва раҳбар кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини оширишни ташкил этиш бош илмий-методик маркази.

43. http://ziyonet.uz – Таълим портали ZiyoNET

44. http://natlib.uz – Алишер Навоий номидаги Ўзбекистон Миллий кутубхонаси.