

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ГОЛОВНОЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ПО
ОРГАНИЗАЦИИ ПЕРЕПОДГОТОВКИ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ И РУКОВОДЯЩИХ
КАДРОВ СИСТЕМЫ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**ОТРАСЛЕВОЙ ЦЕНТР ПЕРЕПОДГОТОВКИ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ ПРИ
ТАШКЕНТСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ТЕХНИЧЕСКОМ
УНИВЕРСИТЕТЕ**

УЧЕБНО–МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

по модулю

«ТЕОРИЯ СОВРЕМЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ»

направление

**«ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
ИНЖЕНЕРИИ»**

ТАШКЕНТ -2019

Данный учебно-методический комплекс разработан на основании учебного плана и программы утвержденного приказом Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан №1023 от 2 ноября. 2019 года

Разработал: И.Х Сиддиков- д.т.н. профессор кафедры
«Системы обработки информации и управления»
ТГТУ

Рецензент: Ж.Мухитдинов - д.т.н. профессор кафедры
«Автоматизация производств» ТГТУ

Данный учебно-методический комплекс рекомендован к изданию Советом Ташкентского государственного технического университета (протокол № 1 от 24 сентября 2019 года)

СОДЕРЖАНИЕ

I.	Рабочая программа	4
II.	Интерактивные методы обучения, используемые в модуле....	11
III.	Теоретические материалы.....	15
IV.	Практические материалы.....	105
V.	Банк кейсов	138
VI.	Глоссарий	141
VII.	Список литературы	147

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Введения

Программа составлена на основе указа ПФ-4732 от 12 июня 2015 года Президентом Республики Узбекистан «О мерах улучшения системы переподготовки и повышения квалификации руководящих и педагогических кадров высших учебных заведений», цель которой является улучшение, переподготовка и суть процесса повышения квалификации на основе современных требований, а так же поставленная задача регулярно повышать профессиональную компетентность педагогических кадров высших учебных заведений.

Рабочая программа включает в себя изучение теоретических и практических основ теории управления, средства, методы, структуру, организацию и проведение занятий по модулю.

Цель и задачи модуля

Целью изучения модуля «Теория современного управления» является овладение системой знаний, практических умений и навыков, обеспечивающих совершенствование и подготовку к высокопрофессиональной деятельности, а также содействие формированию у слушателей знаний и умений анализа и синтеза систем автоматического управления в терминах метода пространства состояний.

Задачи модуля «Теория современного управления» являются:

- изучение методов анализа систем автоматического управления;
- изучение методов синтеза систем автоматического управления;
- изучение пространства состояний и приводятся формы описания динамических систем;
- изучение векторно-матричных моделей систем управления в непрерывном и дискретном времени.

Требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам по модулю

Слушатель, в пределах задач модуля «Теория современного управления» должен:

иметь представление и охарактеризовать:

- основные принципы и концепции построения систем автоматического регулирования и управления;
- математический аппарат теории автоматического управления;
- методы анализа и синтеза систем автоматического регулирования и управления;
- основные проблемы и перспективы направления развития теории автоматического регулирования.

знать и уметь:

- составлять математические описания автоматических систем регулирования и управления;
- осуществлять анализ устойчивости и качества автоматических систем регулирования и управления;
- обоснованно выбирать структуры и схемы автоматического регулирования и управления;
- осуществлять параметрическую оптимизацию регулирующих и управляющих устройств;
- синтезировать законы и алгоритмы оптимального управления объектами.

владеть навыками:

- построения векторно-матричных моделей объектов и систем управления в непрерывном и дискретном времени;
- использования математического аппарата матричной алгебры для анализа и синтеза систем управления;

- решения практических задач построения современных систем управления с наблюдателями состояния;
- проведения расчетов и моделирования систем автоматического регулирования в пакетах математических программ (Matlab).

Рекомендации по организации и проведения модуля

При проведении обучения запланировано использование современных методов, педагогических и информационно-коммуникативных технологий:

- лекции запланировано проводить в форме презентаций с использованием современных компьютерных технологий;
- при проведении практических занятий предусмотрены применение технических средств, экспресс-запросов, тестов, опросов, мозгового штурма, группового мышления, работы с небольшими группами, и других методов интерактивного обучения как «Диаграмма Венна», «Кластер» и «Кейс-стади».

Взаимосвязь учебного модуля с другими модулями

Изучение модуля «Теория современного управления» базируется в основном на учебном материале следующих дисциплин: «Технологические измерения и приборы», и «Автоматизация технологических процессов»,

Роль модуля в системе высшего образования

Происходящие коренные изменения в системе образования, особенно научно-техническое развитие определяет роль модуля «Теория современного управления» в системе высшего образования.

Организация эффективного и плодотворного образования путем создания новых инновационных технологий обучения дисциплин направления модуля «Теория современного управления» и их применения в системе образования помогает системно увеличить качество образования. Отдельное внимание обосновывается формированием знаний, умений и навыков применения современных информационных технологий и

педагогических программных средств, информационно-коммуникационных технологий в процессе учебно-воспитательной деятельности.

Распределение часов по модулю

№	Темы	Итого	Теоретические	Практические	Выездные занятия
1.	Математическое описание система автоматического управления (САУ) и их характеристики.	10	2	2	6
2.	Анализ качества линейных непрерывных система автоматического управления (САУ).	4	2	2	
3.	Линейные стационарные системы автоматического управления при случайных воздействиях.	4	2	2	
4.	Нелинейные системы автоматического управления	4	2	2	
5.	Синтез системы управления	2		2	
	Итого:	24	8	10	6

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

1 -тема: Математическое описание система автоматического управления (САУ) и их характеристики

Математические модели система автоматического управления (САУ).
 Передаточные функции система автоматического управления (САУ).
 Динамические характеристики система автоматического управления (САУ).

2-тема: Анализ качества линейных непрерывных система автоматического управления (САУ)

Показатели качества система автоматического управления (САУ).
 Методы построения переходной функции. Коэффициенты ошибок.
 Интегральные оценки качества.

3 -тема: Линейные стационарные системы автоматического управления при случайных воздействиях

Случайные функции и их характеристики. Связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями на входе и выходе линейной динамической системы. Анализ динамической точности система автоматического управления (САУ). Формирование сигнала с заданной спектральной плотностью. Синтез оптимальных передаточных функций система автоматического управления (САУ) при случайных воздействиях.

4 –тема Нелинейные системы автоматического управления.

Определение и особенности нелинейных систем. Метод фазовых портретов. Метод гармонической линеаризации. Применение метода гармонической линеаризации к исследованию вибрационной помехоустойчивости систем управления ЛА. Исследование устойчивости нелинейных систем. Определение и особенности нелинейных систем.

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1- практическое занятие: Математическое описание система автоматического управления (САУ) и их характеристики

Математические модели система автоматического управления (САУ). Передаточные функции система автоматического управления (САУ). Динамические характеристики система автоматического управления (САУ).

2- практическое занятие: Анализ качества линейных непрерывных система автоматического управления (САУ).

Показатели качества система автоматического управления (САУ). Методы построения переходной функции. Коэффициенты ошибок. Интегральные оценки качества

3- практическое занятие: Линейные стационарные системы автоматического управления при случайных воздействиях.

Анализ динамической точности система автоматического управления (САУ). Формирование сигнала с заданной спектральной плотностью. Синтез оптимальных передаточных функций система автоматического управления (САУ) при случайных воздействиях.

4-тема: Устойчивость линейных систем с обратной связью.

Анализ устойчивости динамических систем на основе теорем. Устойчивость нелинейных систем. Решение систем третьего порядка ($n=3$).

5- практическое занятие: Синтез системы управления.

Для электромеханического объекта с упругой передачей механического движения от вала электродвигателя к валу рабочего механизма, численные значения параметров, выполняется синтез оптимального управления и безынерционного регулятора состояния

Выездные занятия

Тема: Математическое описание система автоматического управления (САУ) и их характеристики. Знакомство слушателей с лабораториями фирмы ООО “Химавтоматика” в области автоматизация технологических процессов (4- часа)

Формы обучения

Форма обучения отражает такие внешние стороны учебного процесса, как способ его существования: порядок и режим; способ организации обучения: лекция, семинар, самостоятельная работа и пр; способ организации совместной деятельности обучающего и обучающихся: фронтальная, коллективная, групповая, индивидуальная.

При обучения важным является выбор формы организации учебной деятельности участников:

- Коллективная – коллективное, совместное выполнение общего учебного задания всеми студентами. Характер полученного результата: итог коллективного творчества.

- Групповая – совместное выполнение единого задания в малых группах. Характер полученного результата: итог группового сотрудничества на основе вклада каждого.

- Индивидуальная – индивидуальное выполнение учебного задания. Характер полученного результата: итог индивидуального творчества. Обычно предшествует групповой работе.

II. ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МОДУЛЕ

Интерактивная лекция

Интерактивная лекция представляет собой выступление преподавателя перед аудиторией с применением следующих интерактивных форм обучения: 1. Управляемая дискуссия или беседа.

2. Демонстрация слайдов или учебных фильмов.

3. Мозговой штурм.

4. Мотивационная речь и др.

Дискуссия

Дискуссия как интерактивный метод обучения означает исследование или разбор. Учебной дискуссией называется целенаправленное, коллективное обсуждение конкретной проблемы, сопровождающееся обменом идеями, суждениями, мнениями в группе. Эффективность использования учебной дискуссии как метода обучения определяется целым рядом факторов: актуальность выбранной проблемы; сопоставление различных позиций участников дискуссии; информированность, компетентность и научная корректность диспутантов.

Применения метода в учебный процесс

1. Ознакомить слушателей с правилами дискуссии. Определить порядок и регламент выступлений, вопросов и ответов.

2. Организовать деятельность обучающихся, поставить разнообразные проблемные ситуации и вопросы по теме, формировать и поддерживать информационное поле.

3. При завершении дискуссии короткое резюме изложить устно, либо показать с заранее подготовленного слайда. Обобщать и комментировать полученную информацию. Отвечать на возникшие вопросы, сообщать необходимую дополнительную информацию.

Проблемные вопросы для дискуссии по теме «Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем».

1. Какие свойства системы управления можно описать в пространстве состояний?

2. Какие преимущества дают описания динамических систем в пространстве состояний?

"Мозговой штурм"

Мозговой штурм (брейнсторминг - мозговая атака) – метод коллективной генерации идеи решения научной или практической задачи.

Во время мозгового штурма участники стремятся совместно решить сложную проблему: высказывают свое мнение по решению задачи (генерируют), отбирают наиболее соответствующие, эффективные и оптимальные идеи без критики остальных вариантов, обсуждают отобранные идеи и развивают их, а также оцениваются возможности их обоснования или опровержения.

Основная цель мозговых атак – активизация учебной деятельности, самостоятельное изучение проблемы и развитие мотивации его решения, культура общения, формирование коммуникативных навыков, избавление от инерции мышления и преодоление привычного хода мышления при решении творческой задачи.

- **Прямой коллективный мозговой штурм** – обеспечивает сбор максимального числа мнений насколько это возможно. Вся группа исследования (не более 20 человек) занимается решением одной проблемы.

- **Массовый мозговой штурм** – дает возможность резко повысить эффективность генерации идей в большой аудитории, разделенной на микрогруппы.

- В каждой группе решается один из аспектов проблемы.

Применения метода в учебный процесс

Вопросы для «Мозгового штурма»

Пример 1 Модель системы получено с высокой адекватностью но параметры рассчитанные на основе модуля не подходят реальному объекту.

Вопрос: Дайте своё мнение по этому поводу. Приведите обоснование. Укажите возможные варианты выхода из положения.

Диаграмма Венна

Графический органайзеры - методы и инструменты демонстрационного представления информации. “Диаграмма Венна” создает возможность систематизировать сведения, полученные в процессе самостоятельного чтения и слушания лекций. Позволяет формировать способность связывать новые данные с ранее полученными а также уметь, сравнит и сопоставляет данных.

Применения метода в учебный процесс

Дайте общие показатели состояний в дискретном времени и в виде сигнального графа?



Кейс-стади (англ. case – набор, конкретная ситуация, stadi-обучение) – это метод обучения, основанный на реальной ситуации из жизни организации или же искусственно созданной ситуации, воссоздающей типичные проблемы, возникающие в организационной жизни и требующей от обучающихся поиска целесообразного решения.

Пример занятия по методу «Кейс-стади» Этапы работы над ситуацией в аудитории

Этапы	Содержание работы
1-этап	индивидуальное изучение текста ситуации и проанализировать ситуацию.
2-этап	разобраться в сути проблем, выделять варианты правильных и ошибочных решений.
3-этап	работа в составе малой группы, предложить возможные решения и выбрать лучшее из них, обсуждать с членами группы выбирать оптимального решения, принимать коллективные решения.
4-этап	представление «решений» каждой малой группы, общая дискуссия, вопросы, выступление преподавателя, его анализ ситуации.

Мини кейс: При эксплуатации цеха водяного охлаждения, система автоматики регулирования уровня система вышла из стабильной работы. Основными причинами неустойчивости приводятся неправильно рассчитанные параметры регулятора.

Задание кейса

1: Проанализируйте систему управления

Исходные данные:

А) экспериментальная переходная функция ОУ.

<i>t</i>	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
<i>h(t)</i>	0	0.01	0.1	0.2	0.3	0.38	0.45	0.5	0.58	0.63	0.7	0.75	0.8	0.85	0.85

2: Рассчитайте переходную функцию системы.

III. МАТЕРИАЛЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Лекция: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ САУ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

План:

- 1.1. Математические модели САУ
- 1.2. Передаточные функции САУ
- 1.3. Динамические характеристики САУ

1.1. Математические модели САУ.

Математическим аппаратом исследования САУ являются дифференциальные уравнения, которые описывают движение системы и являются уравнениями динамики. Из уравнений динамики, положив все производные равными нулю, можно получить уравнения статики, которые описывают поведение системы в установившемся режиме.

Дифференциальные уравнения САУ и ее элементов, составленные в соответствии с физическими законами их функционирования и факторами, от которых зависят переменные уравнений, практически всегда являются нелинейными. Дифференциальные уравнения САУ, записанные в виде системы уравнений или одного дифференциального уравнения высокого порядка представляют собой математическую модель системы. Математическая модель является основой для анализа свойств системы и степени их соответствия поставленным требованиям. Итак, исходная математическая модель САУ является нелинейной. Отсутствие однозначных аналитических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений не позволяет создать какие-либо общие эффективные методы анализа и синтеза САУ. Именно это и послужило причиной развития идеи линеаризации, т.е. замены исходной нелинейной модели линейной, близкой по решению к исходной модели в определенном диапазоне изменения начальных условий и параметров. Линеаризация проводится по методу малого отклонения, который основан на разложении нелинейных функций в ряд Тейлора.

Пусть САУ описывается дифференциальным уравнением n – го порядка.

$$a_0 x^{(n)} + F(x, \dot{x}, \dots x^{(n-1)}) = F_1(g, \dot{g}, \dots g^{(m)}) \quad (1.1)$$

В этом выражении F и F_1 - некоторые нелинейные функции. Представим переменные, входящие в уравнение в следующем виде:

$$x = x_0 + \Delta x, \quad \dot{x} = \dot{x}_0 + \Delta \dot{x}, \dots, \quad x^{(n)} = x_0^{(n)} + \Delta x^{(n)}.$$

$$g = g_0 + \Delta g, \quad \dot{g} = \dot{g}_0 + \Delta \dot{g}, \dots, \quad g^{(m)} = g_0^{(m)} + \Delta g^{(m)}.$$

В этих выражениях нижний индекс “0” означает установившееся значение переменной, а знак Δ - отклонение переменной от установившегося значения. Разложим нелинейные функции в ряд Тейлора в окрестности установившегося режима.

$$F(x, \dot{x}, \dots x^{(n-1)}) = F(x_0, \dot{x}_0, \dots x_0^{(n-1)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^* \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)^* \Delta \dot{x} + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x^{(n-1)}} \right)^* \Delta x^{(n-1)} \right)^i + R_k.$$

$$F_1(g, \dot{g}, \dots, g^{(m)}) = F_1(g_0, \dot{g}_0, \dots, g_0^{(m)}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^k \frac{1}{i!} \left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial g} \right)^* \Delta g + \left(\frac{\partial F_1}{\partial \dot{g}} \right)^* \Delta \dot{g} + \dots + \left(\frac{\partial F_1}{\partial g^{(m)}} \right)^* \Delta g^{(m)} \right)^i + R_{k1}.$$

Индекс “*” около частных производных означает, что они вычислены в точке установившегося режима.

Допустим, что отклонения переменных от установившегося режима настолько малы, что остаточными членами, а так же членами, содержащими произведения отклонений и отклонения в степенях выше первой, можно пренебречь как бесконечно малыми высших порядков малости по сравнению с членами, содержащими отклонения в первой степени. В соответствии с этим предположением будем полагать, что $R_k = R_{k1} = 0$ и $i=1$.

Сделаем обозначения

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}\right)^* = a_{n-i}.$$

$$i = n-1, \dots, 0$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial g^{(j)}}\right)^* = b_{m-j}$$

$$j = m, \dots, 0.$$

С учетом сделанных предположений и обозначений дифференциальные уравнения системы примут вид

$$a_0 x_0^{(n)} + a_0 \Delta x^{(n)} + F(x_0, \dot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)}) +$$

$$+ a_1 \Delta x^{(n-1)} + a_2 \Delta x^{(n-2)} + \dots + a_{(n-1)} \Delta \dot{x} + a_n \Delta x =$$

$$= F_1(g_0, \dot{g}_0, \dots, g_0^m) + b_m \Delta g^{(m)} + b_1 \Delta g^{(m-1)} + \dots + b_m \Delta g.$$

В состав полученного выражения входит уравнение установившегося режима - первый и третий член в левой части и первый член в правой части. Установившееся движение нам задано и не представляет предмета исследования. Вычтем из полученного уравнения уравнение установившегося движения и получим уравнение в отклонениях, поведение которых нас и интересует. В дальнейшем, в целях сокращения записей, знак Δ будем опускать. Получим

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x =$$

$$b_0 g^{(m)} + b_1 g^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{g} + b_m g. \quad (1.2)$$

Полученное дифференциальное уравнение является линейным уравнением и определяет линейную модель системы. Отметим, что использовать линейную модель для исследования системы можно только при малых отклонениях переменных и поэтому часто говорят, что результаты исследований, полученных при использовании линейной модели справедливы только в малом.

Уравнение в отклонениях (1.2) описывает **возмущенное движение** системы, являющееся результатом действия каких-либо возмущений,

приводящих к появлению отклонений от установившегося режима. Уравнение установившегося режима описывает **невозмущенное движение**.

Сложность решения дифференциальных уравнений высокого порядка без применения вычислительной техники и невозможность на основании численных решений создать общие методы анализа и синтеза систем привели к широкому использованию методов, связанных с применением математического аппарата преобразований Лапласа и Фурье. Эти методы и составили сущность так называемой классической теории автоматического управления.

Необходимо отметить, что существуют нелинейные функции, которые невозможно линеаризовать по методу малого отклонения и, в этих случаях, используют специальные методы, разработанные для исследования нелинейных систем.

1.2. Передаточные функции САУ.

Понятие передаточной функции системы является основополагающим в классической теории автоматического управления (ТАУ), к изучению основ которой мы и приступаем.

Определение передаточной функции связано с преобразованием Лапласа и поэтому вначале приведем некоторые основные сведения из этого преобразования [1,13].

При использовании преобразования Лапласа некоторой функции времени $x(t)$ ставится в однозначное соответствие функция $X(s)$, где s -оператор Лапласа. Функция времени $x(t)$ называется оригиналом, а функция $X(s)$ ее изображением. Изображение и оригинал связаны соотношением

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Приведем некоторые теоремы преобразования Лапласа, которые будут использованы при изложении курса.

1. Теорема линейности. Для любых действительных или комплексных

$$Af(t) + Bg(t) \Rightarrow AF(s) + BG(s) . \quad (1.3)$$

Знак $\Rightarrow$ означает соответствие изображения оригиналу.

2. Теорема запаздывания. Для любого постоянного $\tau > 0$

$$f(t - \tau) \Rightarrow e^{-s\tau} F(s) .$$

(1.4)

3. Теорема дифференцирования оригинала.

Если $f(t) \Rightarrow F(s)$, то

$$\dot{f}(t) \Rightarrow sF(s) - f(0). \quad (1.5)$$

Применив эту теорему к производным высших порядков, получим

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (1.6)$$

6)

При нулевых начальных условиях выражение (1.6) упрощается

$$f^{(n)} \Rightarrow s^n F(s).$$

(1.7)

4. Теорема интегрирования оригинала. Если $f(t) \Rightarrow F(s)$ и

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt, \text{ то}$$

$$g(t) \Rightarrow \frac{F(s)}{s}. \quad (1.8)$$

5. Теорема о начальном значении оригинала.

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (1.9)$$

6. Теорема о конечном значении оригинала.

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (1.10)$$

Перейдем к определению передаточной функции. Пусть система или какое-либо звено ее описываются дифференциальным уравнением вида (1.2). Полагая начальные условия нулевыми, перейдем в этом уравнении к изображениям по Лапласу. В соответствии с теоремой 3 получим

$$\begin{aligned} a_0 s^n X(s) + a_1 s^{n-1} X(s) + \dots + a_{n-1} s X(s) + a_n X(s) = \\ = b_0 s^m G(s) + b_1 s^{m-1} G(s) + \dots + b_{m-1} s G(s) + b_m G(s). \end{aligned}$$

Вынесем в полученном выражении за скобки изображения переменной и входного воздействия и сделаем обозначения

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n.$$

$$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m.$$

С учетом этих обозначений исходное дифференциальное уравнение в изображениях по Лапласу получит вид

$$A(s)X(s) = B(s)G(s) .$$

(1.11)

Определим теперь зависимость выходной величины от входного воздействия

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} G(s) = W(s)G(s) .$$

(1.12)

Передаточной функцией системы (звена) $W(s)$ называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.

Требование нулевых начальных условий не вносит принципиальных трудностей. В случае $x(0)^{(k)} \neq 0$, при переходе к изображениям используют теорему 3 в форме (1.6), переносят члены, соответствующие начальным условиям в правую часть уравнения и считают их возмущающими воздействиями, относительно которых получают передаточные функции.

Будем полагать, что все элементы в схеме замкнутой САУ (рис.2) описываются уравнениями вида (1.2). Некоторым исключением в данном случае является уравнение объекта управления, в правую часть которого

необходимо добавить оператор $\sum_{i=0}^k m_k f^{(k-i)}$, определяющий

возмущающее воздействие. В соответствии с принципом суперпозиции, справедливым только для линейных систем, уравнение объекта управления в изображениях по Лапласу при нулевых начальных условиях запишется в виде

$$A_0(s)X(s) = B_0(s)R(s) + M(s)F(s) .$$

В этом выражении $M(s) = m_0 s^k + m_1 s^{k-1} + \dots + m_k$.

Тогда можно записать

$$W_0(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{B_0(s)}{A_0(s)} - \text{передаточная функция объекта}$$

управления по регулируемому воздействию.

$$W_{of}(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{M(s)}{A_o(s)} - \text{передаточная функция}$$

объекта управления по возмущению. Аналогично для других элементов схемы запишем

$$W_1(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{B_1(s)}{A_1(s)} - \text{передаточная функция логико-}$$

вычислительной подсистемы;

$$W_2(s) = \frac{R(s)}{U(s)} = \frac{B_2(s)}{A_2(s)} - \text{передаточная функция}$$

исполнительной подсистемы;

$$W_{oc}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{B_{oc}(s)}{A_{oc}(s)} - \text{передаточная функция цепи}$$

обратной связи (информационно-измерительной подсистемы).

Теперь схему замкнутой САУ можно изобразить, так как показано на рис.1.1.

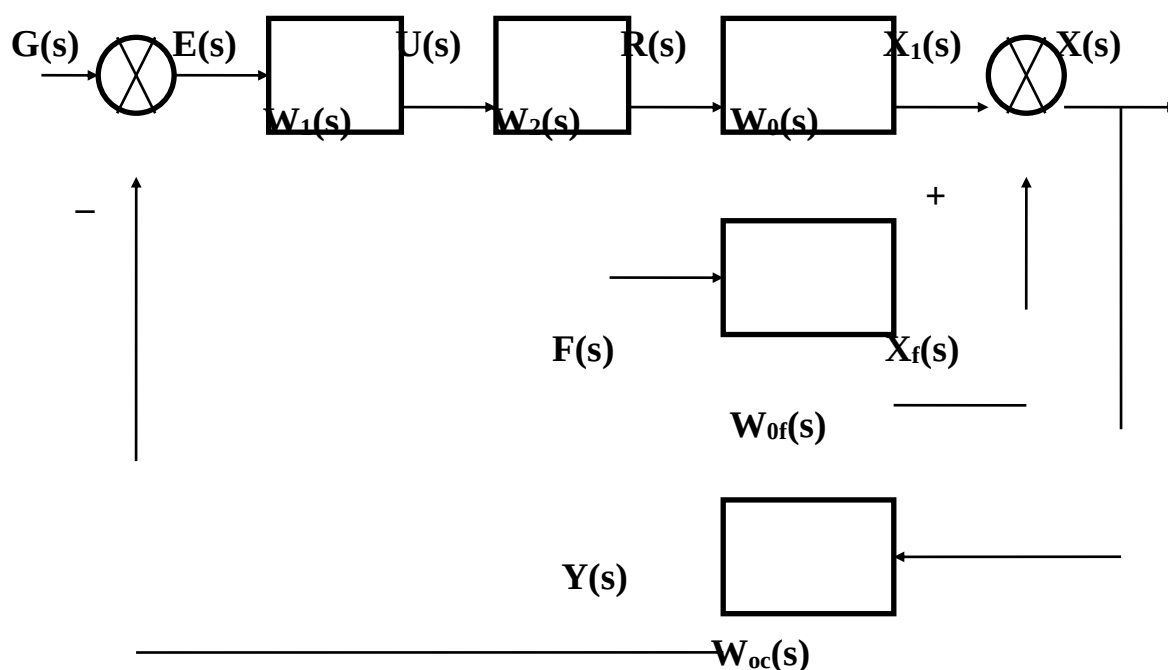


Рис.1.1. Структурная схема САУ.

Схема системы автоматического управления, изображенная в виде соединения передаточных функций составляющих ее звеньев, называется структурной схемой.

На основании полученной схемы и выражений (1.11) и (1.12) составим систему уравнений.

$$\left. \begin{aligned} X(s) - W_o(s)R(s) &= W_{of}(s)F(s) \\ R(s) - W_2(s)U(s) &= 0 \\ U(s) - W_1(s)E(s) &= 0 \\ Y(s) - W_{oc}(s)X(s) &= 0 \\ E(s) + W_{oc}(s)X(s) &= G(s) \end{aligned} \right\}. \quad (1.13)$$

Составим и раскроем характеристический определитель системы (1.13).

$$D(s) = 1 + W_1(s)W_2(s)W_o(s)W_{oc}(s). \quad (1.14)$$

Так как звенья с передаточными функциями $W_1(s)$, $W_2(s)$, $W_o(s)$ входят в прямую цепь регулирования, то передаточная функция $W_n(s) = W_1(s)W_2(s)W_o(s)$ называется передаточной функцией прямой цепи. Составив и раскрыв замещенный определитель по отношению к регулируемой величине, получим

$$R_x(s) = W_n(s)G(s) + W_{of}(s)F(s).$$

Тогда

$$X(s) = \frac{W_n(s)}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)} G(s) + \frac{W_{of}(s)}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)} F(s). \quad (1.15)$$

Передаточная функция $\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W_n(s)}{1 + W_n(s)W_{oc}(s)}$

называется передаточной функцией замкнутой системы по задающему (регулирующему) воздействию.

Передаточная функция $W(s) = W_n(s)W_{oc}(s)$ называется передаточной функцией разомкнутой системы.

Передаточная функция $\Phi_f(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{W_{of}(s)}{1 + W(s)}$ называется

передаточной функцией замкнутой системы по возмущению.

Составим и раскроем замещенный определитель относительно ошибки регулирования $E(s)$

$$R_\varepsilon(s) = G(s) + W_{oc}(s)W_{of}(s)F(s).$$

Тогда $E(s) = \frac{1}{1 + W(s)}G(s) + \frac{W_{oc}(s)W_{of}(s)}{1 + W(s)}F(s).$ (1.16)

Передаточная функция $\Phi_\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1 + W(s)}$

называется передаточной функцией замкнутой системы по ошибке от задающего воздействия.

Передаточная функция $\Phi_{\varepsilon f}(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{W_{oc}(s)W_{of}(s)}{1 + W(s)}$

называется передаточной функцией замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия.

Нетрудно видеть, что при единичной обратной связи, т.е. при $W_{oc}(s)=1$, выполняется равенство

$$\Phi_\varepsilon(s) = 1 - \Phi(s). \quad (1.17)$$

1.3. Динамические характеристики САУ.

1.3.1. Временные характеристики САУ.

Временные характеристики представляют собой зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на ее вход некоторого типового воздействия. В ТАУ используются два вида временных характеристик:

- переходная характеристика (переходная функция);
- импульсная переходная характеристика (функция веса).

Переходной характеристикой $h(t)$ называется зависимость выходного сигнала системы от времени при подаче на ее вход единичного ступенчатого воздействия **$1(t)$** (рис.1.2) Данное входное воздействие определяется выражением $g(t)$

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

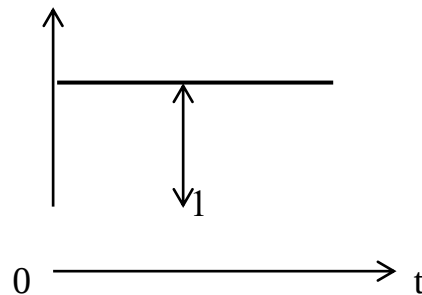


Рис.1.2

Изображение по Лапласу единичного ступенчатого воздействия
будет

$$1(t) \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

Обозначим изображение переходной функции как **$H(s)$** , а передаточную функцию системы как **$W(s)$** и получим

$$H(s) = W(s) \frac{1}{s}. \quad (1.19)$$

Переходная функция может быть определена по ее изображению использованием формулы обратного преобразования Лапласа, в частности с помощью таблиц преобразования Лапласа.

При неединичном ступенчатом воздействии $g(t)=N1(t)$, где $N=const$, в соответствии с принципом суперпозиции выходная реакция системы будет

$$x(t) = Nh(t). \quad (1.20)$$

Импульсной переходной характеристикой (ИПХ) или **функцией веса** системы $k(t)$ называется зависимость выходной величины от времени при подаче на вход воздействия в виде дельта- функции $\delta(t-\tau)$, которая определяется следующим образом:

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ \infty & \text{при } t = \tau \\ 0 & \text{при } t > \tau \end{cases} \quad (1.21)$$

Определим основное свойство дельта- функции и ее связь с единичным ступенчатым воздействием. Допустим, что имеется некоторая функция $g(t-\tau)$ определяется выражением

$$g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ \frac{t}{a} & \text{при } \tau < t < a \\ 1 & \text{при } t > a \end{cases} \quad (1.22)$$

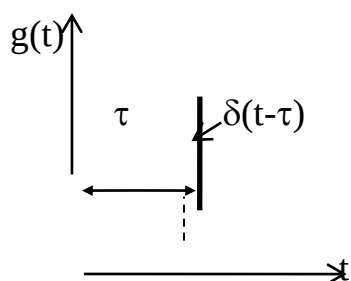


Рис.1.3. Дельта- функция

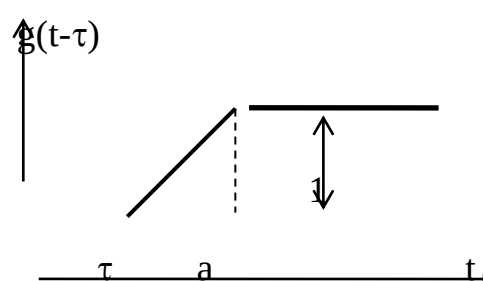


Рис.1.4. Функция $g(t-\tau)$

Найдем производную от функции $g(t-\tau)$.

$$g(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ \frac{1}{a} & \text{при } \tau < t < a \\ 0 & \text{при } t > a \end{cases} \quad (1.23)$$

Очевидно, что графически эта производная представляет собой прямоугольный импульс (рис.1.5), амплитуда которого возрастает с уменьшением величины a , а длительность уменьшается. Площадь этого прямоугольника постоянна и равна единице.

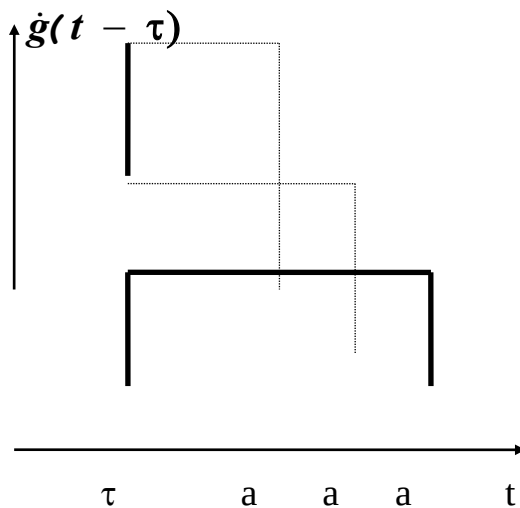


Рис. 1.5. График функции $\dot{g}(t - \tau)$.

Из выражений (1.22), (1.23) и рисунков 1.3, 1.4 и 1.5 следует, что в пределе при $a \rightarrow 0$ функция $g(t-\tau)$ стремится к единичному ступенчатому воздействию, т.е.

$$\lim_{a \rightarrow 0} g(t - \tau) = 1(t - \tau),$$

а предел функции $\dot{g}(t - \tau)$ равен бесконечности

$$\lim_{a \rightarrow 0} \dot{g}(t - \tau) = \infty = \lim_{t \rightarrow \tau} \delta(t - \tau).$$

Отсюда можно сделать следующие выводы:

$$\left. \begin{aligned} \delta(t - \tau) &= \dot{1}(t - \tau) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

В частном случае, когда $\tau=0$ изображение дельта- функции равно

$$L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d}{dt}1(t)\right\} = 1, \text{ т.е. } \delta(s)=1.$$

Отсюда следует, что изображение функции веса определяется выражением

$$K(s) = W(s). \quad (1.25)$$

Следовательно

$$k(t) \Rightarrow W(s). \quad (1.26)$$

Функция веса системы может быть определена так же, как и переходная функция, или путем дифференцирования переходной функции в соответствии с первой формулой выражений (1.24).

Пример. Найти переходную функцию и функцию веса системы, имеющей передаточную функцию

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Изображение переходной функции будет

$$H(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{k}{s(Ts + 1)} = k \frac{\alpha}{s(s + \alpha)},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{T}.$$

Используя таблицы преобразования Лапласа, по полученному изображению найдем оригинал переходной функции

$$h(t) = k(1 - e^{-\alpha t}) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Для изображения функции веса можно записать

$$K(s) = \frac{k}{Ts + 1} = k \frac{\alpha}{s + \alpha} \text{ и по таблицам изображений Лапласа}$$

получим

$$k(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \text{ Аналогичный результат получим дифференцированием}$$

выражения для переходной функции.

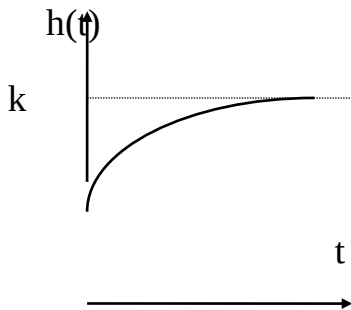


Рис. 1.6. Переходная функция.

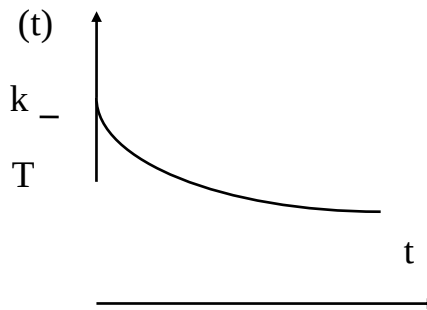


Рис.1.7. Функция веса.

Импульсную переходную характеристику удобно использовать для определения реакции системы на некоторое воздействие $f(t)$ произвольного вида

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) k(t - \tau) d\tau.$$

(1.27)

Естественно, что сигнал на выходе физически реализуемой системы не может появиться раньше входного сигнала, т.е. $k(t)=0$ при $t<0$. С точки зрения преобразования Лапласа это соответствует условию

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = 0.$$

(1.28)

Если

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n},$$

(1.29)

то условие (1.28) выполняется только при $m < n$. Это и есть выражение принципа физической реализуемости системы.

1.3.2. Частотные характеристики САУ.

Пусть входное воздействие $g(t)$ представляет собой гармоническую функцию вида

$$g(t) = G_m \cos \omega t.$$

Используя формулу Эйлера, можно записать

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}.$$

Тогда входное воздействие можно представить в виде суммы двух воздействий

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) = \frac{G_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{G_m}{2} e^{-j\omega t}.$$

(1.30)

Дифференциальное уравнение системы в изображениях по Лапласу запишется в виде

$$A(s)X(s) = B(s)G(s), \quad (1.31)$$

где полином $A(s)$ имеет порядок n , а полином $B(s)$ -порядок m .

Пусть на вход системы подано воздействие вида $g_1(t)$. Частное решение дифференциального уравнения будем искать в виде

$$x_1(t) = \frac{G_m}{2} W(j\omega) e^{j\omega t}.$$

Здесь $W(j\omega)$ - некоторая функция частоты ω .

Подставив $g_1(t)$ и $x_1(t)$ в (1.31), сократив полученное выражение на $G_m/2$ и $e^{j\omega t}$, получим

$$\begin{aligned} (a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n)W(j\omega) = \\ = b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m. \end{aligned}$$

Отсюда

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}. \quad (1.32)$$

Сравнивая (1.32) и (1.29), можно заключить, что функция $W(j\omega)$ получается из передаточной функции $W(s)$ простой заменой $s=j\omega$. Эта замена с математической точки зрения означает переход от преобразования Лапласа к преобразованию Фурье [1,13].

Функция $W(j\omega)$ называется частотной передаточной функцией системы. Комплексную функцию $W(j\omega)$ представим в виде

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.33)$$

Тогда

$$x_1(t) = \frac{G_m}{2} A(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}.$$

Если в (1.31) подставить функцию $g_2(t) = \frac{G_m}{2} e^{-j\omega t}$, то после преобразований аналогичных предыдущим, получим

$$x_2(t) = \frac{G_m}{2} A(\omega) e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}.$$

В соответствии с принципом суперпозиции

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = G_m A(\omega) \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2} = \\
 &= G_m A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) .
 \end{aligned}
 \tag{1.34}$$

Это выражение показывает, что вынужденные колебания, вызываемые в устойчивой линейной динамической системе гармоническим входным воздействием, представляют собой гармоническую функцию времени, имеющую ту же частоту, что и входное воздействие, но отличающуюся от последнего по амплитуде и по фазе.

Зависимость отношения $A(\omega)$ амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного сигнала от частоты называется **амплитудной частотной характеристикой (АЧХ)** системы.

Зависимость фазового сдвига $\varphi(\omega)$ между входным и выходным сигналами от частоты называется **фазовой частотной характеристикой (ФЧХ)** системы.

С этой точки зрения частотную передаточную функцию $W(j\omega)$ называют также **амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ)** системы.

Методика определения частотных характеристик системы следующая.

1). В передаточной функции системы делают замену $s=j\omega$ и полученную АФЧХ представляют в виде суммы вещественной и мнимой частей.

$$W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) .$$

Функцию $U(\omega)$ называют **вещественной частотной характеристикой**, а функцию $V(\omega)$ - **мнимой частотной характеристикой**.

2). Определяют АЧХ и ФЧХ.

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} .
 \tag{1.35}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}. \quad (1.36)$$

Пример. Определить частотные характеристики для звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Делаем замену $s=j\omega$

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{1 + jT\omega} = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \\ &= \frac{k(1 - jT\omega)}{1 + T^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = -k \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} T\omega.$$

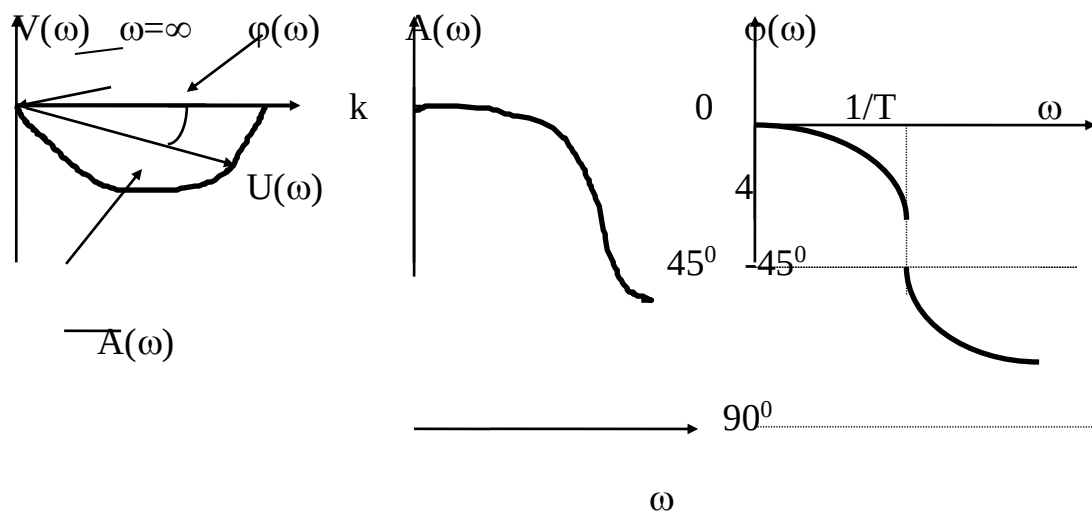


Рис. 1.8. Частотные характеристики звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Частотные характеристики широко используются при анализе и синтезе САУ и составляют основу рассматриваемой классической теории автоматического управления.

1.3.3. Логарифмические частотные характеристики САУ.

Существенным недостатком рассмотренных выше частотных характеристик является то, что графически они, особенно для систем высокого порядка, являются кривыми достаточно сложной формы, что затрудняет их построение и использование для анализа систем. В целях исключения этого недостатка в большинстве случаев нашли применение логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ).

Логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАХ) называется кривая, соответствующая выражению

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) \quad (1.37)$$

и построенная в логарифмическом масштабе частот.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФХ) называется фазовая частотная характеристика $\varphi(\omega)$, построенная в логарифмическом масштабе частот.

Величина $L(\omega)$ измеряется в децибелах, а $\varphi(\omega)$ - в градусах или радианах. Единицами измерения логарифмической оси частот являются октавы и декады.

Октавой называется интервал частот, соответствующий изменению частоты в два раза и равный $\lg 2 = 0.3010$. Декадой называется интервал частот, соответствующий изменению частоты в десять раз и равный $\lg 10 = 1$. Легко подсчитать, что одна декада содержит 3.32 октавы. Точка, соответствующая значению частоты, равному нулю, лежит слева в бесконечности, т.к. $\lg 0 = -\infty$. Поэтому ось ординат проводится через любую точку оси частот так, чтобы справа располагалась та часть ЛЧХ, которую нужно исследовать.

Можно рекомендовать следующую методику построения логарифмической сетки координат. Вначале ось частот разбивается на

декады и октавы, причем **каждая декада разбивается на октавы отдельно**. Для удобства инженерной практики под точками этой оси пишут не значения логарифмов частот, а сами частоты.

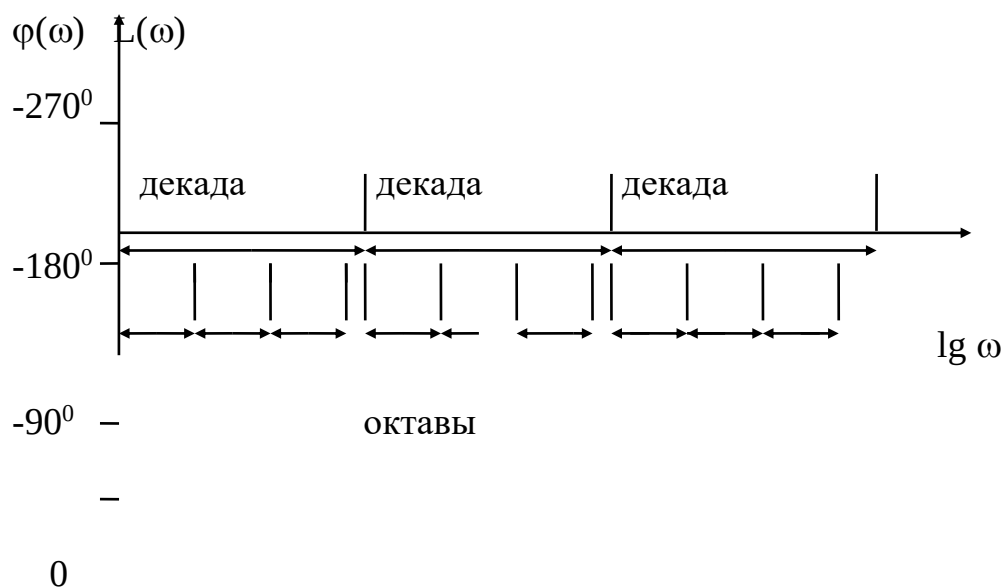


Рис. 1.9. Оси логарифмической системы координат.

Рекомендуется ось ординат в отношении фазовой характеристики располагать так, чтобы с точкой начала координат совпадало значение фазы, равное -180° , положительное направление шло вниз, а отрицательное - вверх. Общепринятое расположение оси фазы не является ошибкой, но рекомендованное здесь расположение во многих случаях облегчает применение для анализа и синтеза систем разработанных графоаналитических методов.

Если исследуемая точка частоты не совпадает ни с октавой, ни с декадой, то ее положение на оси частот по отношению к началу координат или началу какой либо декады при избранном масштабе m [мм/дек] можно определить по формуле

$$\omega_x = m \lg \frac{\omega_x}{\omega_0}. \quad (1.38)$$

Здесь ω -частота, соответствующая началу координат или началу декады.

Обратная задача, т.е. определение значения частоты по положению соответствующей ей точки на оси частот, решается использованием формулы

$$\omega_x = \omega_0 10^{\omega_x / m}. \quad (1.39)$$

При построениях ЛЧХ вручную удобным является масштаб равный $m=50 \text{ мм/дек.}$

Во многих случаях передаточную функцию системы можно представить в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s).$$

Тогда
$$W(j\omega) = \prod_{i=1}^n W_i(j\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}.$$

В соответствии с правилами о логарифме произведения и произведении показательных функций получим

$$L(\omega) = 20 \lg \prod_{i=1}^n A_i(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega). \quad (1.40)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega). \quad (1.41)$$

Таким образом, логарифмические характеристики сложной системы могут быть получены суммированием ЛЧХ составляющих ее простых звеньев.

Пример. Определить ЛЧХ для САУ с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Используя результаты предыдущего примера, получим

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}} = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}.$$

При $\omega < \frac{1}{T}$ величина $T^2\omega^2 \ll 1$ и $L(\omega) \approx 20\lg k$. Это уравнение прямой, параллельной оси частот.

При $\omega > \frac{1}{T}$ величина $T^2\omega^2 \gg 1$ и $L(\omega) \approx 20\lg k - 20\lg T\omega$.

Это уравнение прямой имеющей наклон к оси частот, равный -20 дБ/дек и сопрягающейся с предыдущей прямой в точке $\omega_0 = 1/T$.

Таким образом, ЛАХ данной системы может приближенно построена в виде двух сопрягающихся отрезков прямых. Такая ЛАХ называется **асимптотической**. Возможность замены кривых асимптотическими ЛАХ является важным достоинством ЛЧХ. Ошибка при такой замене для большинства простых систем не велика и для рассматриваемой системы ее максимальное значение в точке $\omega = \omega_0$ не превышает 3 дБ.

Фазовая характеристика исследуемой системы определена выше.

Частота $\omega_0 = 1/T$ называется частотой сопряжения. Частота ω_c , при которой ЛАХ пересекает ось частот, что соответствует значению $A(\omega) = 1$, называется частотой среза системы.

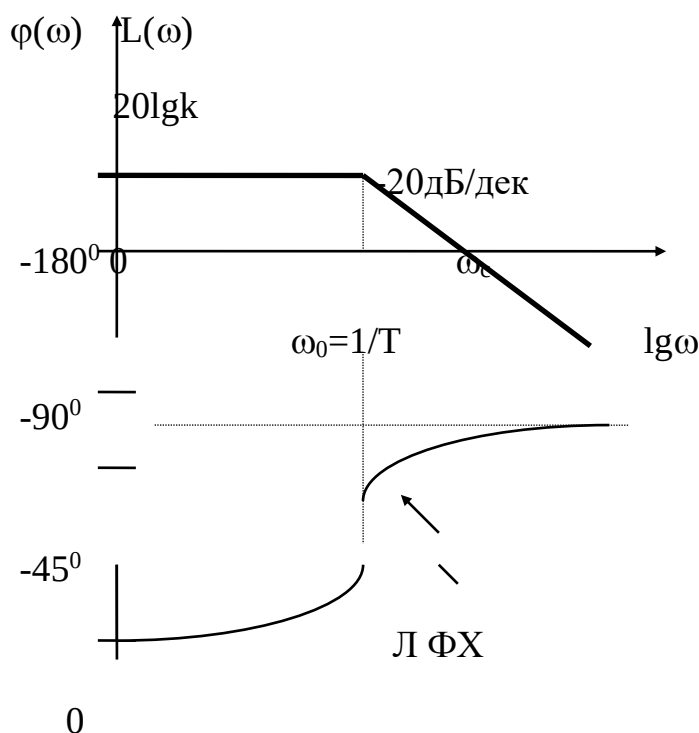


Рис. 1.10. ЛЧХ системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

В заключение отметим, что так как для физически реализуемых систем $n > m$, то

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega) = 0.$$

Это означает, что все реально осуществимые системы являются фильтрами нижних частот.

Контрольные вопросы к лекции № 1.

1. Какие переменные при построении математического описания системы принято называть

- а) входными переменными;
- б) выходными переменными;
- с) переменными состояния?

2. Математическое описание объекта с одним входом и одним выходом представлено структурной схемой, содержащей q элементов, представленных передаточной функцией общего вида

$$H_i(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_p s^p}{a_0 + a_1 s + \dots + a_r s^r}$$

Как в этом случае можно определить размерность пространства состояния N_x для описания этого объекта?

3. Математическое описание объекта с двумя входами $u_1(t)$, $u_2(t)$ и одним выходом $y(t)$ представлено следующим уравнением в операторной форме

$$Y(s) = \frac{1}{1 + T_1 s + T_1 T_2 s^2} U_1(s) + \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s + T_1 T_2 s^2} U_2(s)$$

Какова в этом случае будет размерность пространства состояния n для описания этого объекта?

4. Выберите из приведенных ниже записей возможные формы представления уравнения состояния для непрерывных систем.

- а) $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t];$
- б) $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u};$
- с) $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Q}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t];$
- д) $\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u};$
- е) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u};$
- ж) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u};$
- з) $\mathbf{L}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{u}.$

5. Объект управления имеет r – входов, m - выходов, его математическое описание в непрерывном времени содержит n дифференциальных уравнений первого порядка. Какова в этом случае будет размерность матрицы состояния?

6. Сформируйте векторно-матричную модель фильтра, электрическая схема которого представлена на рис. 1.6.

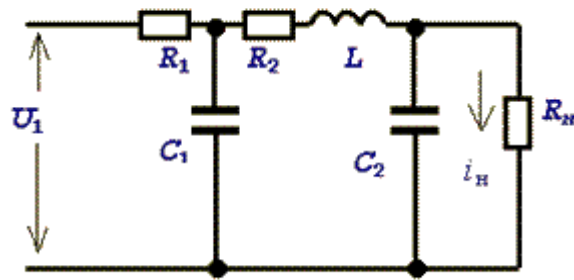


Рис. 1.6. Схема фильтра к заданию 6

Здесь следует учесть, что

- объект имеет один вход - U_1 один выход - i_H ; все параметры электрической схемы $R_1, R_2, L, C_1, C_2, R_H$ известны и являются постоянными;
- могут быть использованы следующие

$$T_1 = R_1 C_1; \quad T_2 = \frac{L}{R_2}; \quad T_3 = R_H C_2.$$

обозначения

7. При составлении математического описания динамических процессов в упругом электромеханическом объекте, включающем в себя электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения ($\Phi = \text{const}$) и механизм, модель которого представляется двухмассовой системой (см. пример 1.3), могут быть использованы следующие переменные:

- i_a - ток электродвигателя,
- Ω_1 - скорость вращения электродвигателя,
- M_y - упругий момент механизма,
- Ω_2 - скорость вращения механизма,
- φ - угол поворота ротора электродвигателя,
- l - линейное перемещение механизма.

Какие из этих переменных, и в какой последовательности включены в состав вектора состояния $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$ приведенной ниже векторно-матричной модели?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 & -27,7 & 0 & 0 \\ 18,4 & 0 & -22,2 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 9,62 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1048 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u;$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
2. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
4. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
6. К.Ю.Поляков. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2008. - 80 с.
7. www.labview.ru
8. www.matlab.com
9. www.ziyonet.uz
10. www.edu.uz

2-Лекция: АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ САУ

План:

1. Показатели качества САУ
2. Методы построения переходной функции
3. Коэффициенты ошибок
4. Интегральные оценки качества

1. Показатели качества САУ

Количественные оценки качества, так называемые прямые показатели качества, определяются по кривой переходного процесса (рис.4.1).

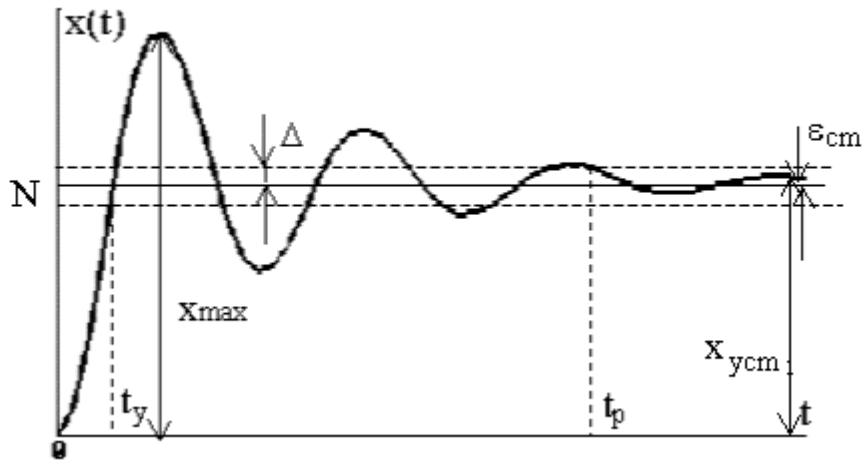


Рис.1. Переходная функция и показатели качества

Используются следующие прямые показатели качества:

- 1) величина перерегулирования σ ,

$$\sigma = \frac{x_{\max} - x_{ycm}}{x_{ycm}} 100 \%, \quad (4.1)$$

которая характеризует максимальное отклонение регулируемой величины от ее установившегося значения, которое может быть определено в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала

$$x_{ycm} = x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s);$$

- 2) время переходного процесса или время регулирования t_p – наименьшее значение времени, после которого имеет место неравенство

$$|x(t) - x(\infty)| \leq \Delta, \quad (4.2)$$

где Δ - заданная величина, обычно лежащая в пределах $\Delta=0.02-0.05$;

- 3) статическая ошибка ε_{cm} – величина отклонения установившегося значения регулируемой величины $x(\infty)$ от требуемого значения N

$$\varepsilon_{cm} = N - x(\infty) \quad (4.3)$$

или $\varepsilon_{cm} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$, где $E(s)$ – изображение ошибки;

4) время установления t_y – промежуток времени, по истечении которого регулируемая величина первый раз достигает установившегося значения.

Для определения качества системы могут использоваться и другие показатели, соответствующие решаемой задаче, например, число колебаний регулируемой величины за время регулирования, частота и период колебаний и т.д.

Во всех случаях необходимо построить переходную функцию.

2. Методы построения переходной функции

Изображение переходной функции имеет вид

$$H(s) = \Phi(s) \frac{1}{s}.$$

Оригинал переходной функции может быть получен использованием точных и приближенных методов. Будем рассматривать только точные методы, связанные с применением обратного преобразования Лапласа.

Построение переходной функции при использовании таблиц преобразования Лапласа начинается с представления ее изображения в виде произведения передаточных функций типовых звеньев.

$$H(s) = \frac{B(s)}{sD(s)} = \prod_{i=1}^n \frac{B_i(s)}{sD_i(s)}.$$

Затем это выражение преобразуется в сумму передаточных функций с неопределенными коэффициентами

$$H(s) = \frac{A}{s} + \sum_{i=1}^m \frac{B_i}{s + |\lambda_i|} + \sum_{k=1}^l \frac{C_k s + D_k}{s^2 + b_k s + c_k}.$$

(4.4)

В этом выражении A , B_i , C_k , D_k – неопределенные коэффициенты, λ_i – вещественные корни уравнения $D(s)=0$, а выражения $s^2+b_k s+c_k$ – соответствуют комплексно – сопряженным корням характеристического уравнения. Выражение (4.4) необходимо привести к общему знаменателю и числитель полученного выражения приравнять числителю изображения исходной переходной функции $B(s)$. Приравнявая члены при одинаковых степенях оператора s в левой и правой частях, получим систему уравнений

относительно неопределенных коэффициентов. Вычислив значения этих коэффициентов, обратимся к таблицам преобразования Лапласа и определим оригиналы слагаемых формулы (4.4). Отметим, что оригиналы, соответствующие первым двум членам суммы (4.4), определяются непосредственно из таблиц, определение оригиналов для третьего члена этой суммы могут потребоваться некоторые преобразования.

Оригинал переходной функции может быть получен использованием формулы обратного преобразования Лапласа, так называемой формулы разложения. В общем случае формула разложения имеет вид

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \left[(s - s_i)^{n_i} \frac{B(s_i)}{s_i D(s_i)} e^{s_i t} \right]^{(n_i - 1)}, \quad (4.5)$$

где s_i – корни уравнения $sD(s)=0$, n_i – кратность корней. В случае только простых корней, когда среди них имеются m вещественных корней и l пар комплексно – сопряженных корней, формула разложения принимает вид

$$h(t) = \frac{B(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^m \frac{B(s_i)}{s_i \dot{D}(s_i)} + 2 \sum_{k=1}^l A_k e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t + \varphi_k). \quad (4.6)$$

В этом выражении α_k и β_k – вещественная и мнимая части комплексно сопряженных корней, а $\dot{D}(s) = \frac{d}{ds} D(s)$. Амплитуда фаза колебательных составляющих определяются следующим образом:

$$\frac{B(s_k)}{s_k \dot{D}(s_k)} = U_k + jV_k,$$

$$A_k = \sqrt{U_k^2 + V_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg \frac{V_k}{U_k}.$$

При вычислениях по этим формулам, в первую подставляется только один из пары комплексно – сопряженных корней. При вычислении фазового сдвига необходимо учитывать квадрант, в котором находится вектор $A_k e^{j\varphi_k}$.

Пример. Построить переходную функцию замкнутой системы управления углом тангажа и определить показатели качества.

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{k_v k_c (T_1 s + 1)}{d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4},$$

где все коэффициенты заданы или вычислены ранее. Корни характеристического уравнения равны:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -0.49; \lambda_2 = -4.608; \\ \lambda_{3,4} &= -4.538 \pm j41.37 = -\alpha \pm j\beta.\end{aligned}$$

1). Построение переходной функции табличным методом.

Изображение переходной функции можно представить в виде:

$$\begin{aligned}H(s) &= \Phi(s) \frac{1}{s} = \frac{k_v k_c (T_1 s + 1)}{d_0 (s + |\lambda_1|)(s + |\lambda_2|)(s^2 + bs + c)} = \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s + |\lambda_1|} + \frac{B_2}{s + |\lambda_2|} + \frac{C_3 s + D_3}{s^2 + bs + c}.\end{aligned}$$

Здесь $b=2\alpha$, $c=\alpha^2+\beta^2$.

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и приравняем числитель этого выражения к числителю исходного изображения переходной функции. Приравняв члены при одинаковых степенях оператора s в правой и левой частях, получим систему линейных уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Из этой системы сразу определяется $A=1$, после чего решается система 4-го порядка.

$$\left. \begin{aligned}B_1 + B_2 + C_3 &= -1 \\ 13.684 B_1 + 9.566 B_2 + 5.098 C_3 + D_3 &= -14.174 \\ 1773.892 B_1 + 1736.517 B_2 + 2.258 C_3 + 5.098 D_3 &= -1780.597 \\ 7981.379 B_1 + 848.714 B_2 + 2.258 D_3 &= -1807.1077.\end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы дает:

$$B_1 = -0.1318 ; B_2 = -0.8789 ;$$

$$C_3 = 0.01076 ; D_3 = -4.02 .$$

Три первых слагаемых изображения переходной функции являются табличными. Необходимо преобразовать к табличному виду четвертое слагаемое.

$$\frac{C_3 s + D_3}{s^2 + bs + c} = \frac{C_3 s + D_3}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} = C_3 \frac{s + D_3 / C_3}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} =$$

$$= C_3 \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + C_3 \frac{D_3 / C_3 - \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} =$$

$$= C_3 \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{C_3 (D_3 / C_3 - \alpha)}{\beta} \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} .$$

Полученные слагаемые являются табличными. Подставив численные значения параметров и используя таблицы преобразования Лапласа, получим выражение для переходной функции

$$h(t) = 1 - 0.1318 e^{-0.49t} - 0.8789 e^{-4.608t} + 0.01076 e^{-4.538t} \cos 41.37t - 0.098 e^{-4.538t} \sin 41.37t .$$

2). Построение переходной функции с использованием формулы разложения.

Вначале определим составляющие процесса, соответствующие вещественным корням.

$$\frac{B(s_1)}{s_1 \dot{D}(s_1)} = -0.1319 ; \quad \frac{B(s_2)}{s_2 \dot{D}(s_2)} = -0.8788 .$$

Для колебательной составляющей получим

$$\frac{B(s_3)}{s_3 \dot{D}(s_3)} = -0.0147 + j0.0472 ,$$

$$A_3 = 0.0494 .$$

Так как вектор этой составляющей находится во втором квадранте, то

$$\varphi_3 = \pi - \arctg \frac{0.0472}{0.0147} = 1.8725 .$$

Следовательно

$$h(t) = 1 - 0.1319 e^{-0.49t} - 0.0878 e^{-4.608t} + \\ + 0.0988 e^{-4.538t} \cos(41.37t + 1.8725).$$

Переходные процессы, полученные различными способами совпадают с точностью до арифметических вычислений. Кривая переходной функции показана на рис.4.2. Переходный процесс практически монотонный. Колебательная составляющая фактически ни как себя не проявляет ввиду крайне малой амплитуды. Перерегулирование отсутствует: $\sigma = 0$. Время регулирования, определенное при $\Delta = 0.05$, приближенно равно 2.2 с., что для системы автоматического регулирования угла тангажа в большинстве случаев является вполне приемлемым.

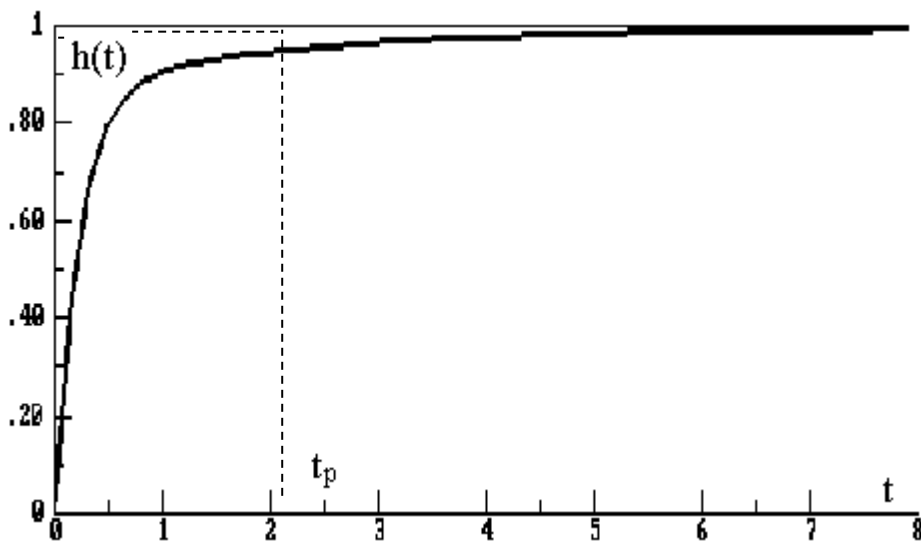


Рис.4.2. Переходная функция системы регулирования угла тангажа

4.3. Коэффициенты ошибок.

Точность САУ в установившемся режиме, при относительно медленно изменяющихся воздействиях, может быть оценена с помощью коэффициентов ошибок. Изображение ошибки определяется выражением

$$E(s) = \Phi_{\varepsilon}(s)G(s). E(s) = \Phi_{\varepsilon}(s)G(s).$$

Разложим передаточную функцию системы по ошибке в степенной ряд в окрестности точки $s=0$. Отметим, что при $s \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ и именно поэтому мы говорим о точности в установившемся режиме.

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = C_0 + C_1 s + \frac{C_2}{2!} s^2 + \dots + \frac{C_i}{i!} s^i + \dots \quad (4.7)$$

Обозначим: $K_i = \frac{C_i}{i!}$ и получим

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = K_0 + K_1 s + K_2 s^2 + \dots + K_i s^i + \dots, \quad (4.8)$$

$$E(s) = (K_0 + K_1 s + K_2 s^2 + \dots + K_i s^i + \dots) G(s)$$

Учитывая, что оператор s , умноженный на изображение самой величины, является символом дифференцирования, можно для оригиналов записать

$$\varepsilon(t) = K_0 g(t) + K_1 \dot{g}(t) + K_2 g^{(2)}(t) + \dots + K_i g^{(i)}(t) + \dots \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) определяет зависимость ошибки регулирования от различных составляющих входного воздействия и коэффициенты K_i получили название коэффициентов ошибок:

- K_0 - коэффициент ошибки по положению;
- K_1 - коэффициент ошибки по скорости;
- K_2 - коэффициент ошибки по ускорению и т.д.

Из (4.8) следует, что

$$K_i(s) = \frac{1}{s^i} \left\{ \Phi_{\varepsilon}(s) - \sum_{m=0}^{i-1} K_m s^m \right\}.$$

Численные значения коэффициентов ошибок определяются из этого выражения при $s \rightarrow 0$.

$$K_i = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^i} \left\{ \Phi_{\varepsilon}(s) - \sum_{m=0}^{i-1} K_m s^m \right\}. \quad (4.10)$$

Очевидно, что $K_0 = \Phi_{\varepsilon}(0)$.

Входное воздействие можно представить в виде степенного ряда

$$g(t) = g_0 + g_1 t + \frac{g_2}{2} t^2 + \dots + \frac{g_m}{m!} t^m,$$

где g_0 – постоянная величина, характеризующая начальное значение, $g_1 = \text{const}$ – скорость изменения входного воздействия, $g_2 = \text{const}$ – ускорение и т.д. Тогда

$$G(s) = \frac{g_0}{s} + g_1 \frac{1}{s^2} + \frac{g_2}{2} \frac{1}{s^3} + \dots + \frac{g_m}{m!} \frac{1}{s^{m+1}}.$$

Пусть передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{B(s)}{s^\nu A(s)},$$

где ν – порядок астатизма системы. Для передаточной функции замкнутой системы по ошибке получим

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^\nu A(s)}{s^\nu A(s) + B(s)}.$$

Изображение ошибки запишется в виде

$$E(s) = \frac{s^\nu A(s)}{s^\nu A(s) + B(s)} \left(\frac{g_0}{s} + \frac{g_1}{s^2} + \frac{g_2}{2!} \frac{1}{s^3} + \dots + \frac{g_m}{m!} \frac{1}{s^{m+1}} \right).$$

Отсюда следует, что если порядок астатизма больше порядка старшей производной воздействия, т.е. $\nu > m$, то ошибка в установившемся режиме будет равна нулю. Если $\nu = m$, то установившаяся ошибка будет равна постоянной величине, называемой статической ошибкой. И если $\nu < m$, то при $t \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow \infty$. В отношении коэффициентов ошибок последнее выражение позволяет сделать следующие выводы.

- 1). Если система статическая, т.е. $\nu = 0$, то существуют все составляющие ошибки и все коэффициенты ошибок не равны нулю, т.к. $K_0 = \Phi_\varepsilon(0) \neq 0$.
- 2). Система с астатизмом 1-го порядка, $\nu = 1$, не имеет ошибки по положению и $K_0 = 0$.
- 3). Система с астатизмом 2-го порядка, $\nu = 2$, не имеет ошибок по положению и по скорости и $K_0 = 0, K_1 = 0$.

Этот список можно продолжить. Таким образом, повышение порядка астатизма повышает точность системы в установившемся режиме. Но повышение порядка астатизма снижает запасы устойчивости, т.к. введение интегрирующих звеньев увеличивает фазовое запаздывание (снижает частоту ω_π). Поэтому на практике порядок астатизма выше

второго не применяют, а чаще всего ограничиваются астатизмом первого порядка, используя для повышения точности другие способы.

4.4. Интегральные оценки качества.

Интегральные оценки характеризуют качество протекания переходных процессов. Наибольшее распространение получили две интегральные оценки

$$J_0 = \int_0^{\infty} [x(t) - x(\infty)]^2 dt = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\infty} \left\{ [x(t) - x(\infty)]^2 + \tau^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\varepsilon^2(t) + \tau^2 \left(\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right)^2 \right] dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Интеграл (4.11) определяет площадь под кривой квадрата динамической ошибки. Чем меньше этот интеграл, тем быстрее затухает переходный процесс и, следовательно, интеграл J_0 служит мерой быстродействия системы. В ряде случаев система, удовлетворяющая условию минимума J_0 , имеет значительную колебательность переходного процесса. Для уменьшения колебательности можно попробовать воспользоваться оценкой J_1 . Представим этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\infty} \left[\varepsilon(t) + \tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]^2 dt - \int_0^{\infty} 2\tau \varepsilon(t) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\varepsilon(t) + \tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]^2 dt - \tau \varepsilon^2(t) \Big|_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Последний член в полученном выражении является постоянной величиной и, если считать, что при $t \rightarrow \infty$ ошибка $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, то он равен $\tau \varepsilon^2(0)$. Минимальное значение интеграл J_1 будет иметь, если подинтегральное выражение будет равно нулю, т.е.

$$\tau \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon(t) = 0 \quad (4.13)$$

Решение этого дифференциального уравнения будет

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) e^{-t/\tau} \quad (4.14)$$

При подаче на вход системы единичного ступенчатого воздействия начальное значение ошибки $\varepsilon(0)=1$ и можно рекомендовать следующую методику выбора величины постоянной времени τ .

1) выберем из каких – либо соображений время регулирования t_p и величину Δ , по уровню которой выбирается это время, т.е. $\varepsilon(t_p) = e^{-t_p/\tau} = \Delta$;

1) определим логарифм натуральный от полученного выражения

$$-\frac{t_p}{\tau} = \ln \Delta.$$

Отсюда получим $\tau = -\frac{t_p}{\ln \Delta}.$

Рассмотрим методику вычисления интегральных оценок при единичном ступенчатом воздействии на входе системы. Если $\Phi(s)=B(s)/D(s)$ – передаточная функция замкнутой системы, то [8,14,15]

$$X(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{d_0 s^n + d_1 s^{n-1} + \dots + d_{n-1} s + d_n} \cdot \frac{1}{s}.$$

Если система устойчива, то

$$J_0 = \frac{1}{2d_n^2 \Delta} (B_m \Delta_m + B_{m-1} \Delta_{m-1} + \dots + B_0 \Delta_0 - 2b_m b_{m-1} \Delta). \quad (4.15)$$

В этом выражении: $B_m = b_m^2$;

$$B_{m-1} = b_m^2;$$

$$B_{m-1} = b_{m-1}^2 - 2b_m b_{m-2};$$

.

.

$$B_k = b_k^2 - 2b_{k-1} b_{k+1} + \dots + 2(-1)^k b_m b_{2k};$$

$$B_0 = b_0^2.$$

Определитель Δ составляется из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы следующим образом

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_n & -d_{n-2} & d_{n-4} & -d_{n-6} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_{n-1} & -d_{n-3} & d_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -d_n & d_{n-2} & -d_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -d_{n-1} & d_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d_1 \end{vmatrix}.$$

Все определители Δ_k ($k=0,1,\dots,m$) получаются из Δ заменой $(m+1-k)$ – го столбца столбцом вида $(d_{n-1}, d_n, 0, 0, 0, 0, \dots, 0)$.

Интеграл J_1 можно записать в виде суммы двух интегралов

$$J_1 = J_0 + J_{01},$$

где
$$J_{01} = \tau^2 \int_0^\infty \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt.$$

Если учесть, что $\frac{dx}{dt} \rightarrow sX(s) = s\Phi(s) \frac{1}{s}$, то можно сделать вывод, что в новой передаточной функции порядок числителя увеличиться на единицу, т.е. $m=m+1$ и свободный член $b_m=0$. Для вычисления интеграла J_{01} теперь можно воспользоваться выражением (4.15).

Недостатками интегральных оценок являются невозможность получения прямых показателей качества и высокая сложность вычислительных процедур. Достоинство – это возможность выразить интегральные оценки как функции параметров системы и, воспользовавшись известными методами поиска экстремума, определить значения этих параметров, дающие минимум избранной оценке. Именно это и послужило развитию аналитических методов синтеза систем автоматического управления, основанных на минимизации квадратичных интегральных оценок.

Контрольные вопросы к лекции № 2.

1. Для построения дискретной модели непрерывного объекта 5-го порядка используется алгоритм вычисления матричной экспоненты с

помощью степенного ряда 25 степени ($i=0, 1, \dots, 25$). Какую максимальную степень (k) матрицы $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^k$) при этом необходимо вычислить?

2. Укажите основной недостаток алгоритма вычисления матричной экспоненты с помощью степенного ряда.

3. Назовите главное достоинство символьно-численного алгоритма формирования дискретной векторно-матричной модели.

4. При каких условиях для вычисления матрицы состояния Φ дискретной ВММ с помощью символьно-численного алгоритма дважды используются одинаковые матричные коэффициенты, т.е. $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k+1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
2. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
4. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
6. К.Ю.Поляков. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2008. - 80 с.
7. www.labview.ru
8. www.matlab.com
9. www.ziyonet.uz
10. www.edu.uz

3-Лекция: ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

План:

1. Случайные функции и их характеристики
2. Связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями на входе и выходе линейной динамической системы
3. Анализ динамической точности САУ
4. Формирование сигнала с заданной спектральной плотностью
5. Синтез оптимальных передаточных функций САУ при случайных воздействиях

При изучении основ теории автоматического управления ранее предполагалось, что задающие и возмущающие воздействия представляют собой известные функции времени. Во многих практических случаях необходимо исследовать качество работы САУ, когда указанные выше воздействия являются случайными функциями, т.е. когда понятие о переходном процессе теряет смысл.

Это направление ТАУ основывается на методах теории случайных функций и математической статистики.

1. Случайные функции и их характеристики.

Функция, которая при каждом данном значении независимой переменной является случайной величиной, называется случайной функцией. Случайные функции, для которых независимой переменной является время, часто называют стохастическими процессами.

Основными характеристиками случайной функции (СФ) являются математическое ожидание M , дисперсия D и корреляционная функция K .

Математическое ожидание определяется выражением

$$M \{ x(t) \} = m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x,t) dx. \quad (1)$$

Дисперсия

$$\begin{aligned}
D\{x(t)\} &= M\left\{\left[x(t)-m_x(t)\right]^2\right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)-m_x(t)\right]^2 f(x,t) dx.
\end{aligned} \tag{2}$$

Физический смысл понятия корреляционной функции заключается в определении вероятности того, что в момент времени t_2 случайная функция примет значение x_2 , если в момент $t_1 \leq t_2$ она получила значение x_1 .

$$\begin{aligned}
K_x(t_1, t_2) &= M\left\{\left[x(t_1)-m_x(t_1)\right]\left[x(t_2)-m_x(t_2)\right]\right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t_1)-m_x(t_1)\right]\left[x(t_2)-m_x(t_2)\right] f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $x_1 = x(t_1)$, а $x_2 = x(t_2)$.

В приведенных выражениях:

$f(x, t)$ – одномерный дифференциальный закон распределения,

$f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ – двумерный дифференциальный закон распределения.

В теории СФ математическое ожидание называют начальным моментом первого порядка, дисперсию-центральным моментом второго порядка, а корреляционную функцию - смешанным центральным моментом второго порядка. Раздел теории СФ, оперирующий только с моментами первых двух порядков, носит название корреляционной теории случайных функций.

Наиболее важным свойством СФ, определяющим возможность применения особых методов исследования, является зависимость или независимость свойств ее от начала отсчета времени. В соответствии с этим различают

стационарные и нестационарные случайные функции. Для стационарных СФ все многомерные законы распределения зависят от

взаимного расположения моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n$, но не от самих значений этих величин (стационарность в узком смысле). Если этому условию удовлетворяют только моменты первых двух порядков то СФ называется стационарной в широком смысле. Процессы преобразования именно стационарных в широком смысле СФ системами автоматического управления мы и будем рассматривать, называя в дальнейшем эти СФ просто стационарными.

По определению стационарной СФ ее математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция является функцией только промежутка времени $\tau = t_2 - t_1$, а не самих моментов отсчета времени.

$$m_x = const; \quad D_x = const;$$

$$K_x(\tau) = M \{ [x(t) - m_x] [x(t + \tau) - m_x] \} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x] [x(t + \tau) - m_x] f(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (4)$$

Основные свойства корреляционной функции:

1. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_x(\tau) = K_x(\infty) = 0$.
2. $K_x(0) = D_x$.
3. $K_x(0) \geq |K_x(\tau)|$ – не возрастающая функция.
4. $K_x(\tau) = K_x(-\tau)$ – четная функция.

Важной характеристикой стационарной СФ является ее спектральная плотность S , которая связана с корреляционной функцией преобразованием Фурье.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (5)$$

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6)$$

Учитывая свойство 2, получим

$$D_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega. \quad (7)$$

Стационарный случайный процесс обладает эргодическим свойством. Это означает, что все его статистические характеристики могут быть определены по одной реализации достаточно большой длительности, либо по ансамблю относительно коротких реализаций.

В практических приложениях широкое распространение получил стационарный случайный процесс типа “белый шум”, для которого

$$K_X(\tau) = N\delta(\tau), \quad (8)$$

где $N = \text{const}$, $\delta(\tau)$ – дельта-функция.

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} N\delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = N. \quad (9)$$

Важное прикладное значение такого сигнала состоит в том, что анализ систем относительно случайных сигналов произвольной формы с помощью специальных формирующих фильтров можно заменить анализом относительно белого шума, что значительно упрощает решение задачи.

До сих пор мы рассматривали одну случайную функцию. Рассмотрим теперь в рамках корреляционной теории систему двух стационарных случайных функций X и Y . Так как первый и второй моменты каждой СФ в отдельности представляют собой уже изученные математические ожидания и корреляционные функции, то остается рассмотреть второй смешанный момент ординат различных СФ, взятых в различные моменты времени – так называемую взаимную корреляционную функцию.

$$K_{xy}(t_1, t_2) = M \left\{ [x(t_1) - m_x] [y(t_2) - m_y] \right\}$$

Если взаимная корреляционная функция зависит только от промежутка времени $\tau = t_2 - t_1$, а не от самих моментов времени, то говорят, что указанные СФ стационарно связаны и их взаимную корреляционную функцию можно записать в следующем виде

$$K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x][y(t + \tau) - m_y] f(x, y, \tau) dx dy. \quad (10)$$

Для взаимной корреляционной функции справедливо равенство

$$K_{xy}(\tau) = K_{yx}(-\tau) \quad (11)$$

Остальные свойства взаимной корреляционной функции аналогичны свойствам обычной, как часто говорят-автокорреляционной функции. Если к взаимной корреляционной функции применить преобразование Фурье, то получим взаимную спектральную плотность.

3.2.Связь между корреляционными функциями и спектральными плотностями величин на входе и выходе линейной динамической системы.

Пусть на вход САУ с передаточной функцией $\Phi(s)$ и функцией веса $k(t)$ поступает случайный стационарный сигнал $g(t)$, имеющий корреляционную функцию $K_g(\tau)$ и спектральную плотность $S_g(\omega)$ (рисунок 6.1).

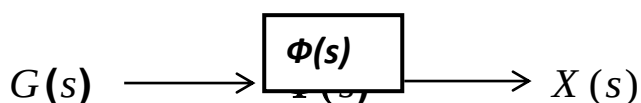


Рис. 1. САУ при случайном воздействии на входе

Известно, что выходной сигнал определяется выражением

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \theta) k(\theta) d\theta \quad - \quad (12)$$

Тогда математическое ожидание сигнала на выходе будет

$$m_x = M \{ x(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} M \{ g(t-\theta) \} k(\theta) d\theta = m_g \int_{-\infty}^{\infty} k(\theta) d\theta.$$

Так как функция веса является оригиналом передаточной функции, то в соответствии с теоремой о конечном значении оригинала получим

$$m_x = m_g \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \Phi(s) = m_g \Phi(0). \quad (13)$$

Умножим обе части выражения (6.12) на $g(t-\tau)$

$$x(t)g(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)g(t-\theta)k(\theta)d\theta.$$

Применив к этому выражению операцию математического ожидания, получим

$$K_{xg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_g(\tau-\theta)k(\theta)d\theta \quad (14)$$

Умножив обе части (6.12) на $x(t+\tau)$ и применив снова операцию математического ожидания, можно записать

$$M \{ x(t+\tau)x(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} M \{ g(t-\theta)x(t+\tau) \} k(\theta)d\theta \quad \text{или}$$

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xg}(\tau+\theta)k(\theta)d\theta \quad (15)$$

Применив к выражению (6.14) преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} S_{xg}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_g(\tau-\theta)k(\theta)d\theta \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_g(\tau-\theta)k(\theta)d\theta \right] e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega\theta} e^{j\omega\theta} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} k(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta * \int_{-\infty}^{\infty} K_g(\tau-\theta) e^{-j\omega(\tau-\theta)} d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда

$$S_{xg}(\omega) = \Phi(j\omega)S_g(\omega) \quad (16)$$

С помощью преобразования Фурье, после аналогичных преобразований, из выражения (6.15) получим

$$S_x(\omega) = \Phi(-j\omega)S_{xg}(\omega) \quad (17)$$

Подставим (6.16) в (6.17) и будем иметь

$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) \quad (18)$$

Спектральная плотность сигнала на выходе линейной динамической системы равна спектральной плотности входного сигнала, умноженной на квадрат амплитудно-фазовой частотной характеристики системы.

Зная спектральную плотность, по выше приведенным формулам можно определить корреляционную функцию и дисперсию выходного сигнала.

3.3. Анализ динамической точности САУ.

Задача состоит в оценке динамической точности САУ, т.е. при непрерывно случайным образом изменяющихся воздействиях. Мерой динамической точности принято считать среднее квадратическое отклонение, которое определяется как

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \quad (19)$$

Критерий минимума среднего квадратического отклонения (СКО) эффективен для широкого класса систем, но он не является универсальным, так как обеспечивает малое значение лишь средней, а не мгновенной ошибки. Поэтому в системах, где недопустимы большие, хотя и кратковременные ошибки, желательно задачу о целесообразном выборе передаточной функции системы решать не только на основе критерия минимума СКО, а с учетом ошибок в режиме переходного процесса.

Пусть на вход системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии $W(s)$ поступает полезный случайный сигнал $g(t) \Rightarrow G(s)$, имеющий спектральную плотность $S_g(\omega)$.

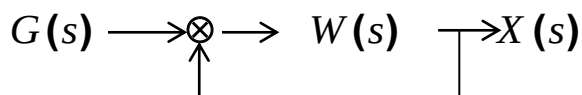


Рис 2. Система со случайным сигналом на входе

Передаточная функция системы по ошибке от задающего воздействия будет

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + W(s)}$$

Спектральная плотность ошибки определится как

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |\Phi_{\varepsilon}(j\omega)|^2 S_g(\omega) \quad (20)$$

Далее определяются дисперсия и СКО.

Система может находиться одновременно под воздействием двух случайных сигналов: полезного $-\alpha(t)$ и возмущающего $-n(t)$, приложенных в одной точке, т.е. $g(t) = \alpha(t) + n(t)$. Очевидно, что в этом случае

$$X(s) = \Phi(s)\alpha(s) + \Phi(s)N(s)$$

В данном случае передаточная функция замкнутой системы по возмущению совпадает с передаточной функцией по задающему воздействию. Ошибка системы определяется как разность между полезным (задающим) воздействием и управляемой величиной.

$$E(s) = \alpha(s) - X(s).$$

Отсюда

$$X(s) = \alpha(s) - E(s) = \Phi(s)\alpha(s) + \Phi(s)N(s)$$

$$E(s) = (1 - \Phi(s))\alpha(s) - \Phi(s)N(s) = E_{\alpha}(s) - E_n(s).$$

В этих выражениях

$E_{\alpha}(s) = (1 - \Phi(s))\alpha(s) = \Phi_{\varepsilon}(s)\alpha(s)$ – составляющая ошибки от задающего воздействия;

$E_n(s) = \Phi(s)N(s)$ – составляющая ошибки, вызванная помехой.

Если полезный сигнал и помеха некоррелированы, то спектральная плотность ошибки будет

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |\Phi_{\varepsilon}(j\omega)|^2 S_{\alpha}(\omega) + |\Phi(j\omega)|^2 S_n(\omega) \quad (21)$$

Рассмотрим случай, когда задающее и возмущающее воздействия приложены в различных точках (рис.6.3).

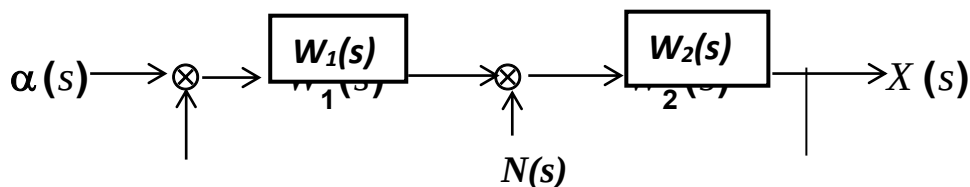


Рис. 6.3. Система с воздействиями в разных точках

Уравнения элементов системы в соответствии со схемой будут

$$E(s) = \alpha(s) - X(s)$$

$$X(s) = W_1(s)W_2(s)E(s) + W_2(s)N(s)$$

Определив из первого уравнения $X(s)$ и подставив во второе, найдем

$$(1 + W_1(s)W_2(s))E(s) = \alpha(s) - W_2(s)N(s)$$

Отсюда

$$E(s) = \frac{1}{1 + W(s)}\alpha(s) - \frac{W_2(s)}{1 + W(s)}.$$

В этом выражении $W(s) = W_1(s)W_2(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы;

$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1+W(s)}$ – передаточная функция замкнутой САУ по ошибке от задающего воздействия.

Обозначим через $\Phi_n(s) = \frac{W_2(s)}{1+W(s)}$ – передаточную функцию замкнутой системы по помехе. Если полезный сигнал и помеха не коррелированы, то можно записать

$$S_{\varepsilon}(\omega) = |\Phi_{\varepsilon}(j\omega)|^2 S_{\alpha}(\omega) + |\Phi_n(j\omega)|^2 S_n(\omega) \quad (22)$$

Далее по прежнему следует вычисление дисперсии и СКО.

В практических приложениях вычисление интеграла вида

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega$$

может вызвать существенные трудности. Для облегчения решения задачи от этот интеграл приводится к специальному табличному виду. Методика приведения и значения табличных интегралов приводятся в приложениях.

3.4. Формирование сигнала с заданной спектральной плотностью.

В ряде случаев теоретического и экспериментального исследования установившихся случайных процессов оказывается целесообразным свести приложенные к системе воздействия к одному и тому же типовому воздействию, в качестве которого выбирается белый шум.

Естественно, что при этом схема исследования должна быть преобразована таким образом, чтобы реализуемый ею установившийся случайный процесс $x(t)$ имел бы такие же значения характеристик (корреляционной функции, спектральной плотности и математического ожидания), которые совпадали бы с их реальными значениями. Преобразование это может быть осуществлено с помощью стационарного формирующего устройства, параметры которого должны выбираться так, чтобы образующийся на выходе его установившийся случайный процесс под влиянием приложенного ко входу белого шума обладал бы

характеристиками реального входного воздействия. Схемы, поясняющие описанное преобразование показаны на рисунках 4а и 6.4b.

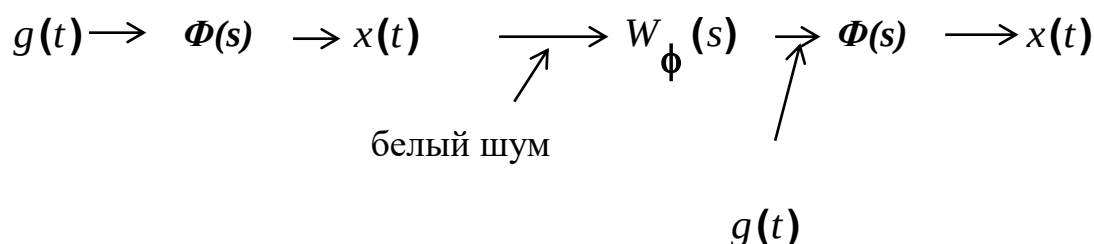


Рис. 4а. Случайный сигнал Рис.4б. Белый шум на входе

на входе системы

формирующего фильтра

Так как спектральная плотность является четной дробно-рациональной функцией частоты, то она может быть представлена в виде двух комплексно-сопряженных сомножителей

$$S_g(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 \quad (23)$$

Потребуем, чтобы спектральная плотность реального случайного сигнала была равна

$$S_g(\omega) = N |W_\phi(j\omega)|^2 \quad (24)$$

Из (23) и (24) находится амплитудно-фазовая частотная характеристика формирующего фильтра

$$W_\phi(j\omega) = \frac{\Psi(j\omega)}{\sqrt{N}} \quad (25)$$

Отметим, что установившиеся случайные процессы в реальной системе и в системе с формирующим устройством эквивалентны друг другу лишь по своим первым и вторым моментам и могут значительно различаться по моментам более высоких порядков. Однако, если воздействие в реальной

системе и процесс на выходе формирующего устройства являются нормальными случайными функциями, то они полностью соответствуют друг другу.

3.5. Синтез оптимальных передаточных функций САУ при случайных воздействиях.

Выше было показано, что если на входе системы помимо управляющего есть и возмущающее воздействие (помеха), то ошибка такой системы состоит из двух составляющих. Часто оказывается, что стремление уменьшить одну составляющую приводит к увеличению второй и наоборот. Задача синтеза и состоит в том, чтобы обеспечить минимально возможную сумму обеих составляющих.

Возможны несколько способов решения задачи синтеза. Первый и наиболее простой применим, если уже известна структура системы. В этом случае необходимо, используя выше приведенные выражения определить СКО как функцию варьируемых параметров системы и обычным методом определить их значения, дающие минимум ошибки. Еще один способ применим когда полезный сигнал имеет более низкочастотный спектр, чем помеха (рис.5).

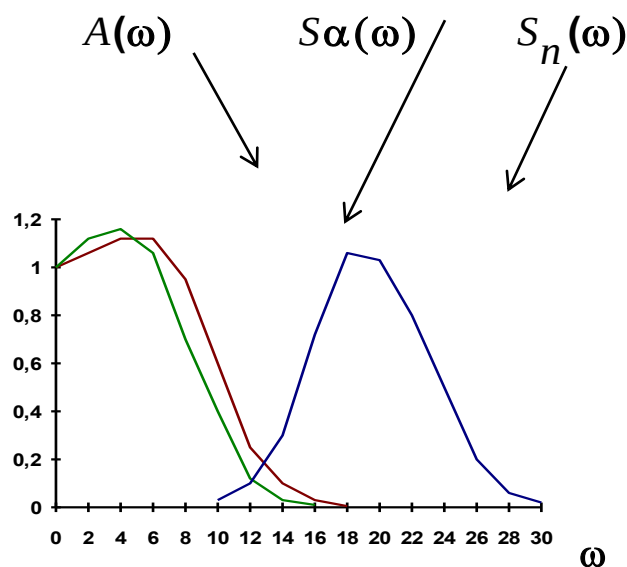


Рис.5. АЧХ системы спектральные плотности полезного сигнала и помехи

В этом случае полоса пропускания системы должна быть выбрана достаточно широкой для обеспечения необходимой точности воспроизведения полезного сигнала, но такой ширины, чтобы полностью отфильтровать помехи.

В наиболее общем случае, когда спектры полезного сигнала и помехи накладываются друг на друга систему строят так, чтобы ее частотная характеристика максимально приближалась к спектральной характеристике полезного сигнала.

Рассмотрим методику определения оптимальной передаточной функции по критерию минимума СКО, когда структура системы неизвестна, а известна только передаточная функция неизменяемой части.

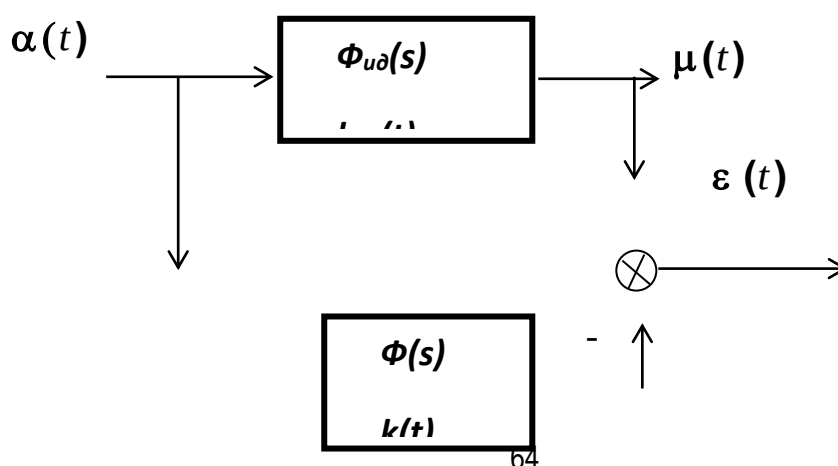
При определении оптимальной частотной характеристики замкнутой САУ $\Phi(j\omega)$ по критерию минимума СКО между идеальным сигналом $\mu(t)$ и оптимальным сигналом $x(t)$, предположим, что:

1) идеальная частотная характеристика $\Phi_{уд}(s)$ или идеальная функция веса $k_{уд}(t)$ известны;

2) полезный сигнал $\alpha(t)$ и помеха $n(t)$ являются стационарными эргодическими случайными процессами с нулевым математическим ожиданием и их корреляционные функции и спектральные плотности известны;

3) на время переходного процесса ограничения не накладываются, т.е. решение ищется в классе систем с “бесконечной памятью”.

Схема постановки задачи приведена на рисунке 6.



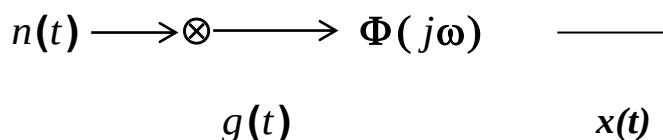


Рис. 6. Схема синтеза оптимальной САУ

Необходимое условие, которому должна удовлетворять оптимальная импульсная переходная функция $k(t)$ получена Н.Винером в виде интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} K_g(\tau - \theta)k(\theta)d\theta = K_{\mu g}(\tau) \quad (26)$$

при $\tau \geq 0$.

Корреляционная функция суммарного сигнала на входе определяется выражением

$$K_g(\tau) = K_{\alpha}(\tau) + K_n(\tau) + K_{\alpha n}(\tau) + K_{n\alpha}(\tau).$$

Условие $\tau \geq 0$ отражает принцип физической осуществимости системы. Если полезный сигнал и помеха некоррелированы, то

$$K_{\alpha n}(\tau) = K_{n\alpha}(\tau) = 0.$$

Уравнение (26) можно преобразовать к виду

$$K_{\mu g}(\tau) - \int_0^{\infty} K_g(\tau - \theta)k(\theta)d\theta = q(\tau), \quad (27)$$

где $q(\tau)$ – некоторая функция, равная нулю при $\tau \geq 0$. Это условие приводит к тому, что функция $Q(j\omega)$, связанная с $q(\tau)$ преобразованием Фурье, не будет содержать полюсов в верхней полуплоскости плоскости ω . Преобразование Фурье дает возможность перейти к спектральным плотностям.

$$S_{\mu g}(\omega) - \Phi(j\omega)S_g(\omega) = Q(\omega) \quad (28)$$

Предположим, что спектральная плотность входного сигнала имеет дробно-рациональный вид и может быть представлена в виде

$$S_g(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega) = \Psi(j\omega)\Psi^*(j\omega) \quad (29)$$

Здесь $\Psi(j\omega)$ имеет все нули и полюсы в верхней полуплоскости, а $\Psi^*(j\omega)$ - в нижней полуплоскости плоскости ω . Разделим (28) на $\Psi^*(j\omega)$ и получим

$$\frac{S_{\mu g}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} - \Phi(j\omega)\Psi(j\omega) = \frac{Q(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} \quad (30)$$

Дробь в левой части выражения (6.30) можно преобразовать к виду суммы

$$\frac{S_{\mu g}(\omega)}{\Psi^*(j\omega)} = B(j\omega) = B^+(j\omega) + B^-(j\omega), \text{ причем } B^+(j\omega) \text{ имеет}$$

все нули и полюсы только в верхней полуплоскости, а $B^-(j\omega)$ - только в нижней полуплоскости плоскости ω . С учетом этого выражение (6.30) преобразуем к виду

$$B^+(j\omega) + B^-(j\omega) - \Phi(j\omega)\Psi(j\omega) = \frac{Q(\omega)}{\Psi^*(j\omega)}$$

Последнее выражение справедливо для всей плоскости ω . Однако, поскольку необходимо выполнение условия физической реализуемости $\tau \geq 0$, то решение ищется только в верхней полуплоскости и указанное выражение принимает вид

$$B^+(j\omega) - \Phi(j\omega)\Psi(j\omega) = 0.$$

Отсюда для амплитудно-фазовой характеристики замкнутой САУ получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{B^+(j\omega)}{\Psi(j\omega)}. \quad (31)$$

Передаточная функция замкнутой САУ $\Phi(s) = \Phi(j\omega)|_{j\omega=s}$. По этой передаточной функции определяется передаточная функция разомкнутой

системы, а затем, с учетом известной передаточной функции неизменяемой части, находится передаточная функция корректирующего устройства.

Пример.

Полезный сигнал и помеха заданы своими корреляционными функциями:

$$K_{\alpha}(\tau) = a^2 e^{-|\tau|}; \quad K_n(\tau) = b^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Полезный сигнал и помеха не коррелированы. Идеальная передаточная функция $\Phi_{уд}(j\omega) = 1$, т.е. должна быть решена задача оптимальной фильтрации.

Прежде всего определим спектральные плотности.

$$\begin{aligned} S_n(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} b^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 b^2 e^{(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} b^2 e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau = \\ &= \frac{b^2}{\alpha-j\omega} + \frac{b^2}{\alpha+j\omega} = \frac{2b^2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$S_{\alpha}(\omega) = \frac{2a^2}{1 + \omega^2}.$$

Далее процесс решения задачи Винера состоит из следующих операций:

1. Вычислим

$$S_g(\omega) = S_{\alpha}(\omega) + S_n(\omega) = \frac{\beta^2 + \gamma^2 \omega^2}{(1 + \omega^2)(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Здесь $\beta^2 = 2a^2\alpha^2 + 2b^2\alpha$; $\gamma^2 = 2a^2 + 2b^2\alpha$.

Разложим эту функцию на комплексно-сопряженные множители

$$S_g(\omega) = \frac{\gamma\omega - j\beta}{(\omega - j)(\omega - j\alpha)} * \frac{\gamma\omega + j\beta}{(\omega + j)(\omega + j\alpha)}$$

Отсюда

$$\Psi(j\omega) = \frac{\gamma\omega - j\beta}{(\omega - j)(\omega - j\alpha)},$$

$$\Psi^*(j\omega) = \frac{\gamma\omega + j\beta}{(\omega + j)(\omega + j\alpha)}.$$

2. Вычислим взаимную спектральную плотность

$$S_{\mu g}(\omega) = \Phi_{ud}(j\omega) S_{\alpha}(\omega) = \frac{2a^2}{1+\omega^2} \cdot \Phi$$

$$B(j\omega) = \frac{2a^2(\omega + j\alpha)}{(\omega - j)(\gamma\omega + j\beta)}.$$

3. Определим функцию $B^+(j\omega)$.

$$B(j\omega) = \frac{A_1}{\omega - j} + \frac{A_2}{(\gamma\omega + j\beta)}$$

Приведя к общему знаменателю и приравнявая числители этого и предыдущего выражений, получим систему уравнений, из решения которой будем иметь

$$A_1 = \frac{2a^2(1+\alpha)}{(\gamma+\beta)}, \quad B^+(j\omega) = \frac{2a^2(1+\alpha)}{(\gamma+\beta)(\omega - j)}.$$

4. Вычислим частотную характеристику оптимальной системы

$$\Phi(j\omega) = \frac{B^+(j\omega)}{\Psi(j\omega)} = \frac{2a^2(1+\alpha)}{(\gamma+\beta)} * \frac{(j\omega) + \alpha}{\gamma(j\omega) + \beta}.$$

Контрольные вопросы к лекции № 3.

1. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

$$Q_v = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}, \quad Q_v = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2 C \\ \dots \\ A^{n-1} C \end{bmatrix},$$

Определите состояние $x(2)$?

2. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad u(k) = 0.5k + 1.$$

Определите такую управляющую последовательность, что

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Для каких систем понятия достижимости и управляемости эквивалентны?

4. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Оцените достижимость, наблюдаемость и управляемость этой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
2. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
4. Дорф Р., Бишоп Р. *Современные системы управления*. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. *Теория систем автоматического управления*. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
6. К.Ю.Поляков. *Теория автоматического управления. Часть I*. -СПб.: 2008. - 80 с.
7. www.labview.ru
8. www.matlab.com
9. www.ziyonet.uz
10. www.edu.uz

4-Лекция.

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

План:

1. Определение и особенности нелинейных систем
2. Метод фазовых портретов
3. Метод гармонической линеаризации
4. Применение метода гармонической линеаризации к исследованию вибрационной помехоустойчивости систем управления ЛА
5. Исследование устойчивости нелинейных систем
6. Определение и особенности нелинейных систем.

Нелинейной называется такая САУ, у которой зависимость между входными и выходными переменными одного или нескольких элементов описывается нелинейными уравнениями.

Все реальные элементы и системы, строго говоря нелинейны, и к понятию линейной системы приходят путем линеаризации. Но на практике встречаются такие нелинейные элементы, к которым операция линеаризации по малому отклонению не применима. Такие нелинейности называют существенными. На рис.7.1. приведены примеры таких нелинейностей. На рис.7.1а показана характеристика идеального реле, на рис.7.2б – характеристика с зоной насыщения, на рис.7.1в – нелинейная характеристика типа “модуль”.

Нелинейные системы, по сравнению, с линейными обладают целым рядом особенностей.

Прежде всего, к нелинейным дифференциальным уравнениям не применим принцип суперпозиции. Нелинейные дифференциальные уравнения не имеют каких – либо общих методик решения. Для исследования нелинейных дифференциальных уравнений нельзя использовать аппарат преобразований Лапласа и Фурье.

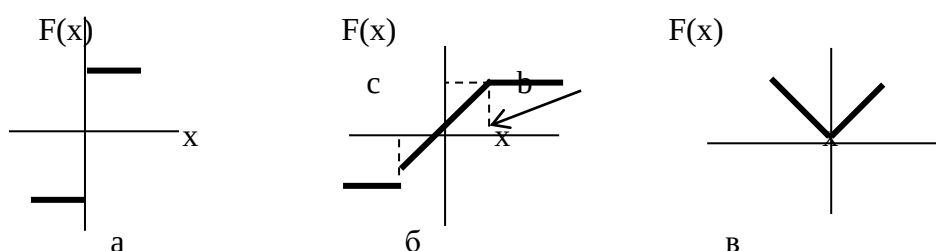


Рис.4.1. Примеры существенных нелинейностей.

Судить об устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений на основании теорем Ляпунова, по дифференциальным уравнениям линеаризованных систем, можно только при малых отклонениях от установившегося движения, т.е. можно судить только об устойчивости в малом. Между тем, нелинейная система, устойчивая в малом, может быть неустойчивой при больших отклонениях. Различают, кроме устойчивости в малом, следующие виды устойчивости нелинейных систем.

Система называется устойчивой в большом, если она устойчива при больших конечных по величине отклонениях. Система называется устойчивой в целом, если она устойчива при любых, не ограниченных по величине, начальных отклонениях. Если система асимптотически устойчива в целом, то ее называют абсолютно устойчивой.

Особенностью нелинейных систем является возникновение в них, при некоторых начальных условиях, гармонических колебаний с определенной амплитудой и частотой, так называемых предельных циклов. Если предельный цикл устойчив, т.е. к нему сходятся все траектории сверху и снизу в определенном диапазоне начальных условий, то он называется автоколебаниями. Амплитуда и частота автоколебаний зависят только от параметров системы.

Рассмотрим некоторые методы исследования нелинейных САУ.

4.2. Метод фазовых портретов.

Дифференциальное уравнение системы автоматического управления может быть преобразовано в систему n дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.1)$$

с начальными условиями $x_i(0)$. Величины $x_i(t)$ можно рассматривать как координаты некоторой точки M , называемой изображающей точкой, в n – мерном пространстве. Изображающая точка при изменении координат описывает в этом пространстве некоторую кривую, которая называется фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий, полученных при различных начальных условиях, называется фазовым портретом системы. Наглядное представление фазовых траекторий возможно только для систем, порядок которых не выше второго, или для систем, которые могут быть сведены к системам второго порядка. Исследование поведения нелинейных систем, ниже излагаемым методом, возможно только для автономных стационарных систем. Система является автономной, если ее правая часть явно не зависит от времени.

Уравнение автономной системы 2-го порядка можно записать в виде

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}). \quad (7.2)$$

Полагая $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, получим

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = f(x_1, x_2) \end{array} \right\}. \quad (7.3)$$

Фазовыми координатами являются выходная переменная системы x_1 и скорость ее изменения x_2 . Разделим второе уравнение системы на первое и получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) однозначно определяет касательную к фазовой траектории во всех точках, кроме тех, в которых одновременно выполняются равенства

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1, x_2) = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}. \quad (7.5)$$

В этих точках, которые называются особыми точками, не существует определенного направления касательной к траектории. В особых точках фазовые координаты равны нулю, следовательно, в этих точках система находится в положении равновесия. Для определения особых точек необходимо решить систему (7.5).

Выясним характер особых точек и оценим устойчивость положения равновесия системы в окрестности этих точек. Пусть $x_1(0)$ и $x_2=0$ есть координаты особой точки. Линеаризуем систему (7.3) в окрестности особой точки, полагая

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(0) + \eta, \\ x_2 &= \zeta. \end{aligned}$$

Тогда

$$f(x_1, x_2) = f(x_1(0), 0) + a\eta + b\zeta, \quad (7.6)$$

где $a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(0), 0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(0), 0)$, с точностью до малых не выше

первого порядка малости. Подставим выражение (7.6) в (7.3) и, принимая во внимание, что координаты особой точки удовлетворяют уравнениям (7.5), получим систему уравнений первого приближения

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\eta} = \zeta \\ \dot{\zeta} = a\eta + b\zeta \end{array} \right\}. \quad (7.7)$$

Решив эту систему уравнений, можно определить движение линеаризованной системы и ее фазовые траектории вблизи особой точки и оценить устойчивость положения равновесия. Нужно сразу сказать, что особых точек может быть несколько и судить об устойчивости каждого такого положения равновесия по линеаризованным уравнениям можно только в малом, т.е. при малых отклонениях координат изображающей точки от него. Если при этих малых отклонениях фазовые координаты системы стремятся к особой точке или остаются в непосредственной близости от нее, то данное положение равновесия устойчиво и область отклонений, при которых это утверждение справедливо, называется областью притяжения рассматриваемой особой точки.

Системе (7.7) соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - b\lambda - a = 0. \quad (7.8)$$

Движение системы вблизи от особой точки определяется типом корней уравнения (7.8).

1). Корни комплексно – сопряженные: $\lambda = h \pm j\omega$. Решение системы имеет в этом случае вид

$$\eta = m e^{ht} \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\zeta = m h e^{ht} \sin(\omega t + \varphi) + m \omega e^{ht} \cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь m и φ - постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями. Изображающая точка стремится к началу координат (особой точке) при $t \rightarrow \infty$, если $h < 0$, и удаляется от него, если $h > 0$. Фазовые траектории для таких случаев приведены на рис. 7.2а и 7.2б. Особая точка такого рода называется **фокусом**. При $h < 0$ имеет место устойчивый фокус, при $h > 0$ – неустойчивый фокус.

2). Корни вещественные одного знака. Решение системы (7.7) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \eta &= m_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \zeta &= m_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Движение является апериодическим. Изображающая точка асимптотически приближается к особой точке, если λ_1 и λ_2 отрицательны, и удаляется от нее, если λ_1 и λ_2 положительны. В частных случаях, когда $m_2 = 0$, из (7.9) получим

$$\zeta = \lambda_1 \eta, \quad (7.10)$$

а когда $m_1 = 0$,

$$\zeta = \lambda_2 \eta. \quad (7.11)$$

Уравнения (7.10) и (7.11) определяют прямые, по которым движется изображающая точка в указанных случаях. Чтобы получить уравнение фазовых траекторий в общем случае, исключим из уравнений (7.9) время t . Для этого умножим первое уравнение сначала на λ_1 и вычтем из второго, а затем умножим первое уравнение на λ_2 и снова вычтем его из второго. В результате получим

$$\zeta - \lambda_1 \eta = m_2 e^{\lambda_2 t} (\lambda_2 - \lambda_1),$$

$$\zeta - \lambda_2 \eta = m_1 e^{\lambda_1 t} (\lambda_1 - \lambda_2),$$

откуда, исключая t путем логарифмирования, находим уравнение фазовых траекторий в виде

$$\zeta - \lambda_1 \eta = c (\zeta - \lambda_2 \eta)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad (7.12)$$

где

$$\frac{1}{c} = \frac{m_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}{m_2(\lambda_2 - \lambda_1)}. \quad (7.13)$$

Определив из уравнения производную $d\zeta/d\eta$ в особой точке, можно убедиться, что все фазовые траектории касаются в особой точке той из прямых (7.10) и (7.11), которая соответствует меньшему по абсолютной величине из корней характеристического уравнения. Фазовые траектории, соответствующие этому случаю показаны на рис.7.2в и рис.7.2г. Особая точка такого типа называется **узлом**. Если корни характеристического уравнения отрицательны, то имеет место устойчивый узел, если корни положительны – неустойчивый узел.

3). Корни чисто мнимые: $\lambda = \pm j\omega$ Решение системы (7.7) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \eta &= m \sin(\omega t + \varphi) \\ \zeta &= m \omega \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\}. \quad (7.14)$$

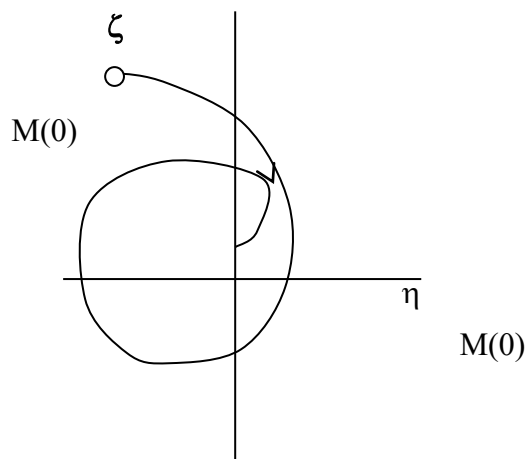
Из (7.14) нетрудно получить уравнение фазовых траекторий

$$\frac{\eta^2}{m^2} + \frac{\zeta^2}{m^2 \omega^2} = 1. \quad (7.15)$$

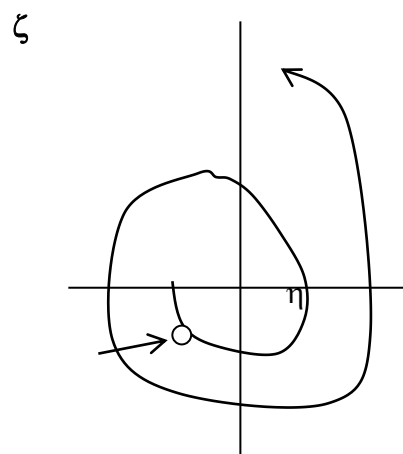
Это уравнение определяет семейство эллипсов с полуосями m и $m\omega$ (рис.7.2д).

Такая особая точка называется **центром**. Такие фазовые траектории определяют наличие в системе незатухающих гармонических колебаний, т.е. соответствуют предельному циклу. Дальнейшие исследования заключаются в оценке устойчивости каждого предельного цикла. Если предельный цикл устойчив, то в системе происходят автоколебания. Если система имеет несколько предельных циклов, соответствующих одной и той же особой точке, то неустойчивые и устойчивые предельные циклы всегда чередуются.

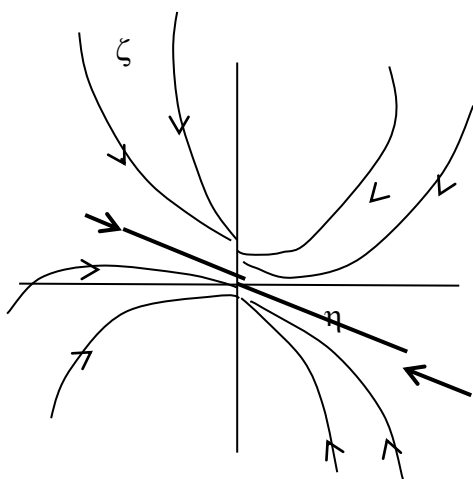
4). Корни вещественные, различных знаков ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$). Прямые (7.10) и (7.11) являются в данном случае асимптотами для фазовых траекторий. Т.к. $\lambda_2 > 0$, то где бы не находилась изображающая точка в начальный момент, в конечном итоге она всегда будет удаляться от положения равновесия. Исключение составляет случай движения точно по асимптоте, но при малейшем отклонении от нее изображающая точка начнет удаляться от положения равновесия. Такая особая точка называется **седлом**, она всегда соответствует положению неустойчивого равновесия. Фазовые траектории такого типа приведены на рис. 7.2е. Таким образом, сутью данного метода является выделение особых точек, построение фазовых траекторий и исследование фазового портрета системы с целью определения областей устойчивости и областей притяжения устойчивых предельных циклов. Статическая характеристика нелинейного звена делит плоскость на участки, где дифференциальные уравнения системы имеют различный вид. Указанная характеристика называется, с этой точки зрения линией переключения.



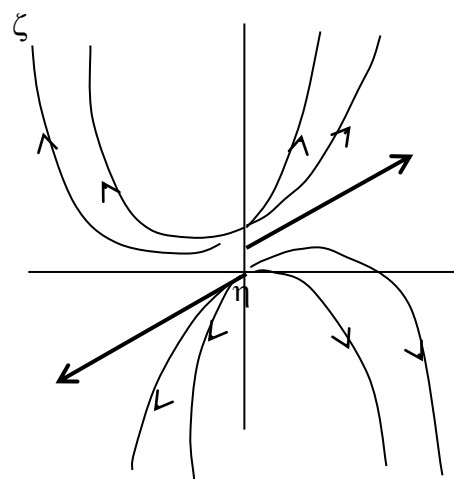
а)



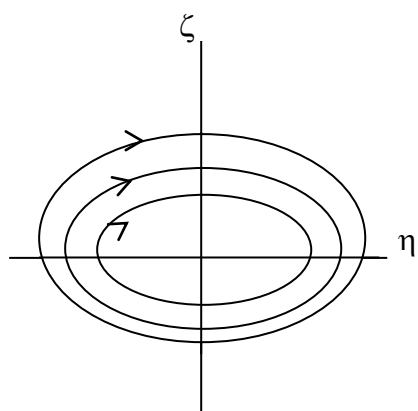
б)



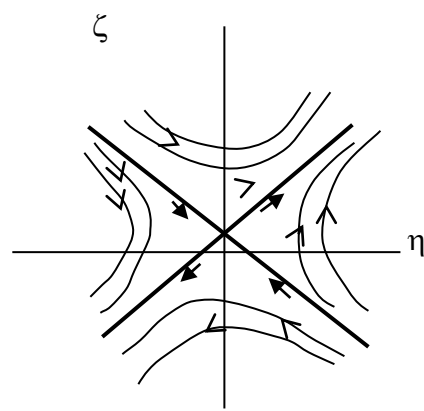
в)



г)



д)



е)

Рис. 7.2. Типы особых точек фазовой плоскости

Поэтому при построении фазовых траекторий необходимо помнить, что при переходе через линию переключения конечные значения переменных предыдущего участка являются начальными условиями для последующего участка.

Пример. Исследовать методом фазовых портретов систему стабилизации космического аппарата, структурная схема которой показана на рис.7.3.

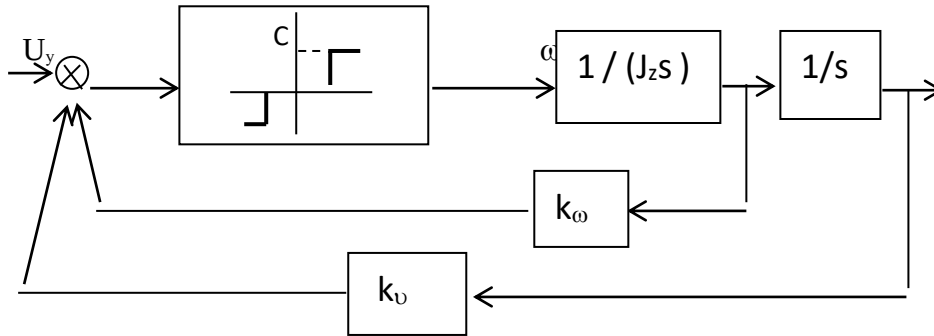


Рис. 7.3. Структурная схема системы стабилизации КА

Нелинейный элемент формирует момент, воздействующий на космический аппарат (КА) и этот момент определяется выражением

$$M = \begin{cases} C \operatorname{sign} U_y \text{ при } |U_y| \geq b \\ 0 \text{ при } |U_y| < b. \end{cases}$$

Система уравнений, составленная по структурной схеме, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \omega_z \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{M}{J_z} \end{aligned} \right\}.$$

В этих выражениях J_z – момент инерции КА. Очевидно, что

$$M = M(U_y) = M(-k_v \psi - k_\omega \omega_z) = M(\psi, \omega_z).$$

Из системы уравнений получим уравнение фазовых траекторий

$$\frac{d\omega_z}{d\psi} = \frac{M(\psi, \omega_z)}{J_z \omega_z}.$$

Решив систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} M(\psi, \omega_z) &= 0 \\ \omega_z &= 0 \end{aligned} \right\},$$

получим, что координаты особой точки (0,0) соответствуют началу координат. Решение системы уравнений при $|U_y| \geq b$ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_z(t) &= \omega_z(0) + \frac{M}{J_z} t \\ \psi(t) &= \psi(0) + \omega_z(0)t + \frac{M}{2J_z} t^2 \end{aligned} \right\}.$$

При $|U_y| < b$ получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_z(t) &= \omega_z(0) \\ \psi(t) &= \psi(0) + \omega_z(0)t \end{aligned} \right\}.$$

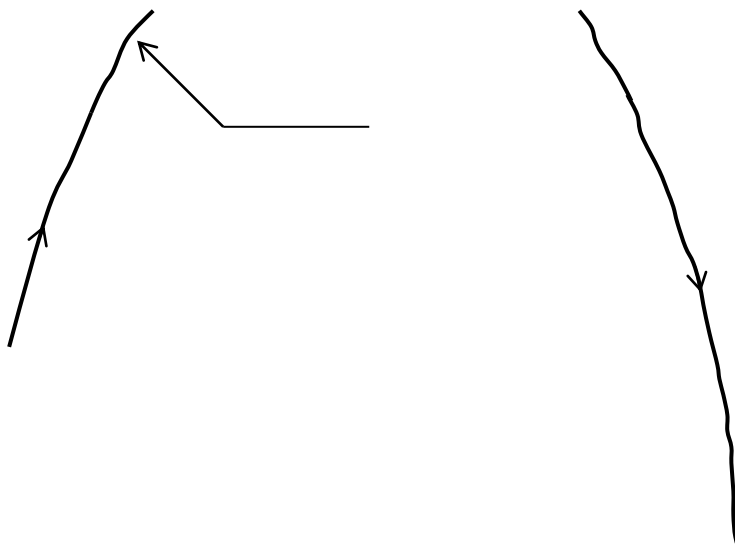
Линия переключения определяется уравнением

$$|k_\psi \psi + k_\omega \omega_z| = b.$$

Выберем следующие численные значения параметров системы

$$C=40 \text{ Нм}, J_z=1.05 \text{ кгм}^2, b=\pm 2 \text{ В}, k_\psi=0.5 \text{ В/град}, k_\omega=0.1 \text{ В/град/с}.$$

По определенным решениям системы уравнений и с учетом ранее сделанных замечаний по величине начальных условий при переходе через линию переключения, построим фазовые траектории для $\psi(0)=-10 \text{ град}$. и $\psi(0)=-6 \text{ град}$.



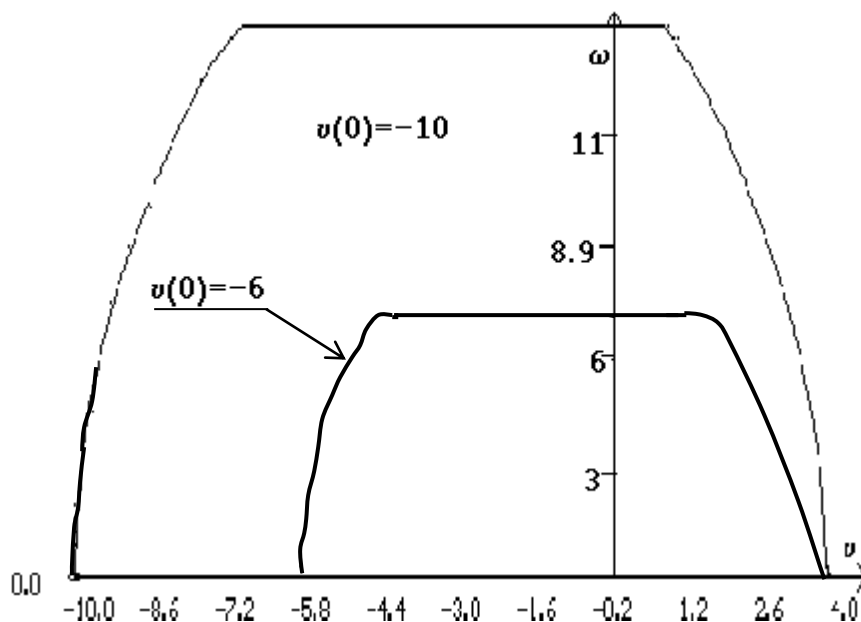


Рис. 7.4. Фазовые траектории системы стабилизации КА

Анализ полученных фазовых траекторий показывает, что они близки к типу устойчивого фокуса, но система по окончании процесса регулирования приходит не в особую точку, а в некоторую ее окрестность, определяемую из уравнения линии переключения при $\omega_z = 0$. В рассматриваемой задаче точка покоя имеет координаты $(\pm 4 \text{ град.}, 0)$.

4.3. Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации позволяет с достаточной для практики точностью исследовать устойчивость и точность нелинейных систем, используя методы, разработанные для линейных систем. Метод дает возможность определить наличие автоколебаний, а также их частоту и амплитуду.

Нелинейная система представляется в виде соединения линейной и нелинейной части (рис. 7.5).

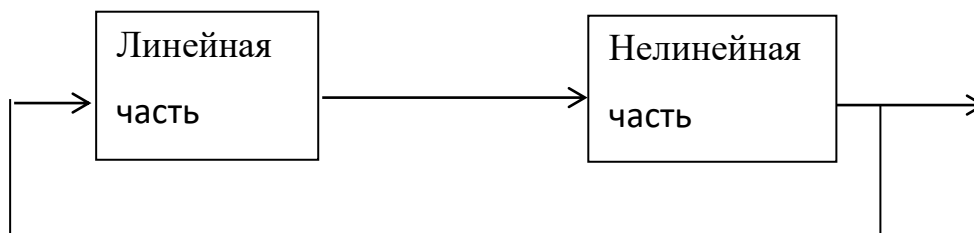


Рис.7.5. Схема нелинейной системы

Выходной сигнал нелинейной части системы в общем случае определяется выражением

$$y = F(x, \dot{x}). \quad (7.16)$$

Обозначим как $W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$ передаточную функцию линейной части. Система уравнений примет вид

$$\left. \begin{aligned} Q(s)x + R(s)y &= 0 \\ y &= F(x, sx) \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Найдем условия, при которых на выходе линейной части системы возникают гармонические колебания вида

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (7.18)$$

В этом случае сигнал $y(t)$ нелинейной части будет представлять собой также периодическую функцию, но отличную от синусоиды. Эту функцию можно разложить в ряд Фурье

$$y(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \sin i\omega t + b_i \cos \omega t). \quad (7.19)$$

В этом выражении a_i и b_i – коэффициенты Фурье. Для симметричных нелинейностей $F_0=0$.

Основным условием, которое накладывает метод на линейную часть системы, является условие фильтра нижних частот. Считается, что линейная часть пропускает только первую гармонику колебаний. Данное допущение позволяет считать высшие гармоники в (7.19) несущественными и ограничиться рассмотрением только первой гармоники сигнала $y(t)$.

$$y(t) = a(A, \omega) \sin \omega t + b(A, \omega) \cos \omega t. \quad (7.20)$$

Из (7.18) следует, что $\sin \omega t = \frac{x(t)}{A}$ и т.к. $\frac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos \omega t$, то выражение

(7.20) можно переписать в виде

$$y(t) = \frac{a(A, \omega)}{A} x(t) + \frac{b(A, \omega)}{A\omega} \frac{dx(t)}{dt}. \quad (7.21)$$

Первое уравнение системы (7.17) примет вид

$$(Q(s) + R(s)(q(A, \omega) + \frac{q_1(A, \omega)}{\omega} s)) X(s) = 0. \quad (7.22)$$

В этом выражении

$$\left. \begin{aligned} q(A, \omega) &= \frac{a(A, \omega)}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \sin \psi d\psi \\ q_1(A, \omega) &= \frac{b(A, \omega)}{\pi A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, A \omega \cos \psi) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

$$\psi = \omega t.$$

Результат замены нелинейности $F(x, sx)$ выражением

$$(q(A, \omega) + \frac{q_1(A, \omega)}{\omega} s) X(s)$$

и называется гармонической линеаризацией. Величины q и q_1 называются коэффициентами гармонической линеаризации или просто гармоническими коэффициентами. Для однозначных нелинейностей обычно $q_1=0$. Формулы для гармонических коэффициентов, соответствующих типовым нелинейностям, приводятся в приложениях.

Принципиальное отличие гармонической линеаризации от обычной состоит в том, что при обычной линеаризации нелинейную характеристику заменяют прямой линией с определенной постоянной крутизной, а при гармонической линеаризации – прямой линией, крутизна которой зависит от амплитуды входного сигнала нелинейного элемента.

Рассмотрим методику определения амплитуды и частоты автоколебаний.

1). В характеристическом уравнении системы, полученном из (7.22) делаем замену $s=j\omega$ и получим

$$Q(j\omega) + R(j\omega)(q(A, \omega) + jq_1(A, \omega)) = 0.$$

2). Из полученного выражения выделяем вещественную и мнимую части и приравняем их нулю, что, по критерию Михайлова, соответствует нахождению системы на колебательной границе устойчивости.

$$\left. \begin{aligned} U(q, q_1, \omega) &= 0 \\ V(q, q_1, \omega) &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

3). Решение этой системы дает частоту и значения гармонических коэффициентов. Если эти значения вещественны и положительны, то в системе существует предельный цикл. По значениям гармонических коэффициентов можно определить амплитуду предельного цикла.

4). Общим признаком устойчивости предельного цикла, т.е. существования автоколебаний, является равенство нулю предпоследнего определителя Гурвица при полученных значениях амплитуды и частоты предельного цикла. Часто более удобно использовать условие устойчивости предельного цикла, в основе которого лежит критерий устойчивости Михайлова.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)^* \left(\frac{\partial V}{\partial \omega}\right)^* - \left(\frac{\partial U}{\partial \omega}\right)^* \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)^* > 0. \quad (7.24)$$

Если это неравенство выполняется, то предельный цикл устойчив и в системе существуют автоколебания с определенными выше амплитудой и частотой. Индекс "*" означает, что производные вычислены при уже известных значениях гармонических коэффициентах, амплитуды и частоты.

Пример. Допустим, что в уже рассмотренной выше системе стабилизации угла тангажа самолета рулевой привод нелинейный и его структурная схема имеет вид, показанный на рис. 7.6.

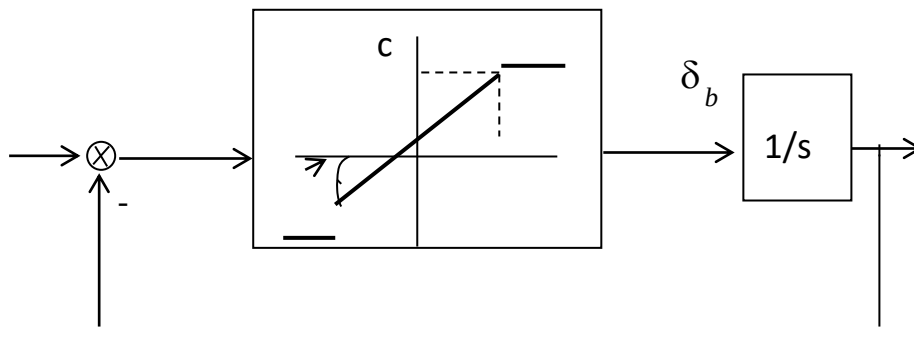


Рис.7.6. Схема нелинейного рулевого привода

Зададим следующие параметры нелинейности скоростной характеристик рулевого привода: $b = 0.12$, $k_1 = \operatorname{tg} \alpha = c/b = 6.7$. Коэффициенты гармонической линеаризации этой нелинейности определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} q(A) &= \frac{2k_1}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right) \\ q_1(A) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Заменив в схеме нелинейную характеристику гармоническим коэффициентом, получим передаточную функцию рулевого привода

$$W_{pn}(A) = \frac{q(A)}{s + q(A)}.$$

Подставим эту передаточную функцию в структурную схему системы стабилизации угла тангажа и определим передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(s) = \frac{k_v k_c q(A)(T_1 s + 1)}{d_0 s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s + d_4}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
d_0 &= T^2; \\
d_1 &= T^2 q(A) + 2T\zeta; \\
d_2 &= 1 + (2T\zeta + k_c k_\omega T_1) q(A); \\
d_3 &= (1 + k_c k_\omega + k_c k_v T_1) q(A); \\
d_4 &= k_c k_v q(A).
\end{aligned}$$

В характеристическом уравнении замкнутой системы сделаем замену $s = j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части.

$$\left. \begin{aligned}
U(\omega) &= d_0 \omega^4 - d_2 \omega^2 + d_4 = 0 \\
V(\omega) &= -d_1 \omega^3 + d_3 \omega = 0
\end{aligned} \right\}.$$

Из второго уравнения системы получим выражение для частоты: $\omega^2 = \frac{d_3}{d_1}$, и

подставив его в первое уравнение, после преобразований получим

$$d_0 d_3^2 - d_1 d_2 d_3 + d_4 d_1^2 = 0.$$

Подставив сюда ранее определенные выражения для коэффициентов характеристического уравнения, можно получить квадратное уравнение относительно гармонического коэффициента, решив которое, найдем

$$\begin{aligned}
q_1 &= 2.7277, \\
q_2 &= 0.3103.
\end{aligned}$$

По этим значениям можно вычислить для двух случаев все коэффициенты характеристического уравнения и определить частоты, соответствующие каждому значению $q(A)$. Получим: $\omega_1 = 20.948$, $\omega_2 = 10.534$.

Оба значения гармонического коэффициента и соответствующие частоты вещественны и положительны. Следовательно, в системе существуют два предельных цикла. Значения амплитуды предельного цикла определяются численно путем

подбора такого значения $\frac{b}{A}$, при котором формула для коэффициента

гармонической линеаризации дает значение, равное ранее вычисленному. В рассматриваемом случае получим

$$1). \frac{b}{A} = 0.3255, \quad A = 0.3687.$$

$$2). \frac{b}{A} = 0.0364, \quad A = 3.2967.$$

Теперь оценим устойчивость предельных циклов. Используем неравенство, полученное из критерия Михайлова, для чего определим

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial A} &= -\omega^2 (2T\zeta + k_c k_\omega T_1) \frac{\partial q}{\partial A} + k_c k_v \frac{\partial q}{\partial A}; \\ \frac{\partial U}{\partial \omega} &= 4d_0 \omega^3 - 2d_2 \omega; \\ \frac{\partial V}{\partial A} &= -d_0 \omega^3 \frac{\partial q}{\partial A} + \omega (1 + k_c k_\omega + k_c k_v T_1) \frac{\partial q}{\partial A}; \\ \frac{\partial V}{\partial \omega} &= -3d_1 \omega^2 + d_3.\end{aligned}$$

Производная от коэффициента гармонической линеаризации, входящая в полученные выражения, вычисляется по формуле

$$\frac{\partial q}{\partial A} = \frac{2k_1}{\pi} \left\{ -\frac{b}{A^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}} - \frac{b}{A^2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} + \frac{b^3}{A^4 \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}}} \right\}.$$

Расчеты по выше приведенным формулам показывают, что первый предельный цикл не устойчив и возникает он при $\nu(0) \approx 0.1166 (\approx 6.7^\circ)$. Если начальное отклонение меньше указанного, то процесс на входе нелинейного элемента затухает (рис.7. 7) и система устойчива.



Рис. 7.7. Процесс на входе нелинейного элемента

Если начальное значение угла тангажа больше указанного, то процессы сходятся ко второму предельному циклу, который устойчив и, таким образом в системе возникают автоколебания (рис. 7.8).

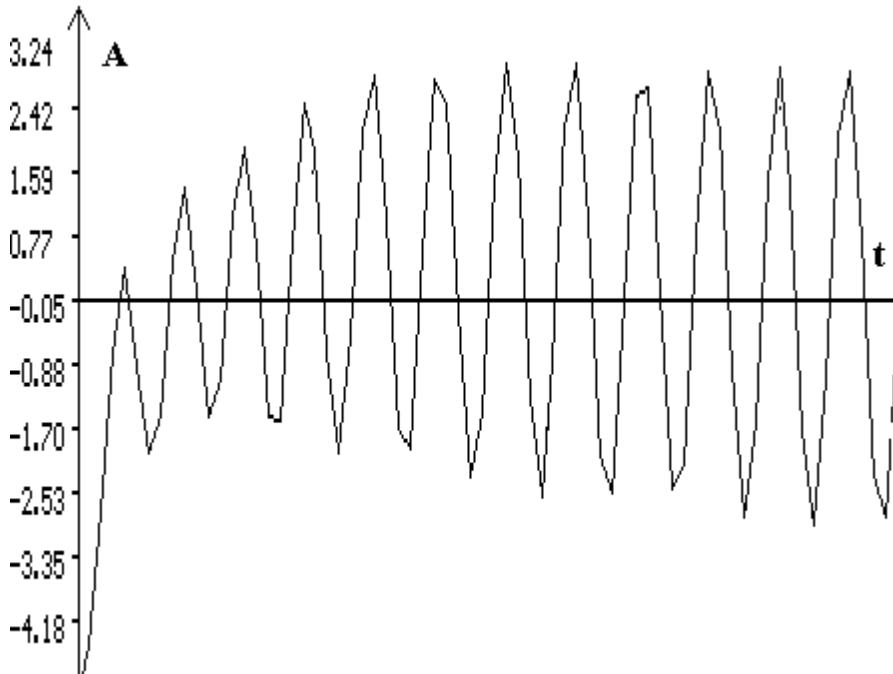


Рис. 7.8. Автоколебания на входе нелинейности

Путем моделирования определено, что область притяжения устойчивого предельного цикла лежит приблизительно в пределах $\psi(0) \approx 0.1167 - 1.4 (\approx 6.71^\circ - 80.2^\circ)$.

4.4. Применение метода гармонической линеаризации к исследованию вибрационной помехоустойчивости систем управления летательными аппаратами.

Корпус летательного аппарата (ЛА) под воздействием управляющих и возмущающих сил и моментов совершает упругие колебания. Частотный спектр этих колебаний имеет вид множества ярко выраженных тонов. Упругие колебания воспринимаются гироскопическими приборами измерительной системы, которые и вводят их в контур управления. Несмотря на малую амплитуду, упругие колебания, частотный спектр которых значительно выше частот полезного сигнала, могут привести к серьезным нарушениям процесса управления.

Для каждого тона упругих колебаний, вызванных регулирующим воздействием, можно передаточную функцию ЛА и представить структурную схему канала системы управления, например, канала тангажа, в виде, показанном на рис.7.9. На этой схеме передаточная функция, определяющая зависимость тона упругих колебаний от отклонения рулевого органа обозначена как $W_i(s)$ и имеет вид:

$$W_i(s) = \frac{\alpha_i}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

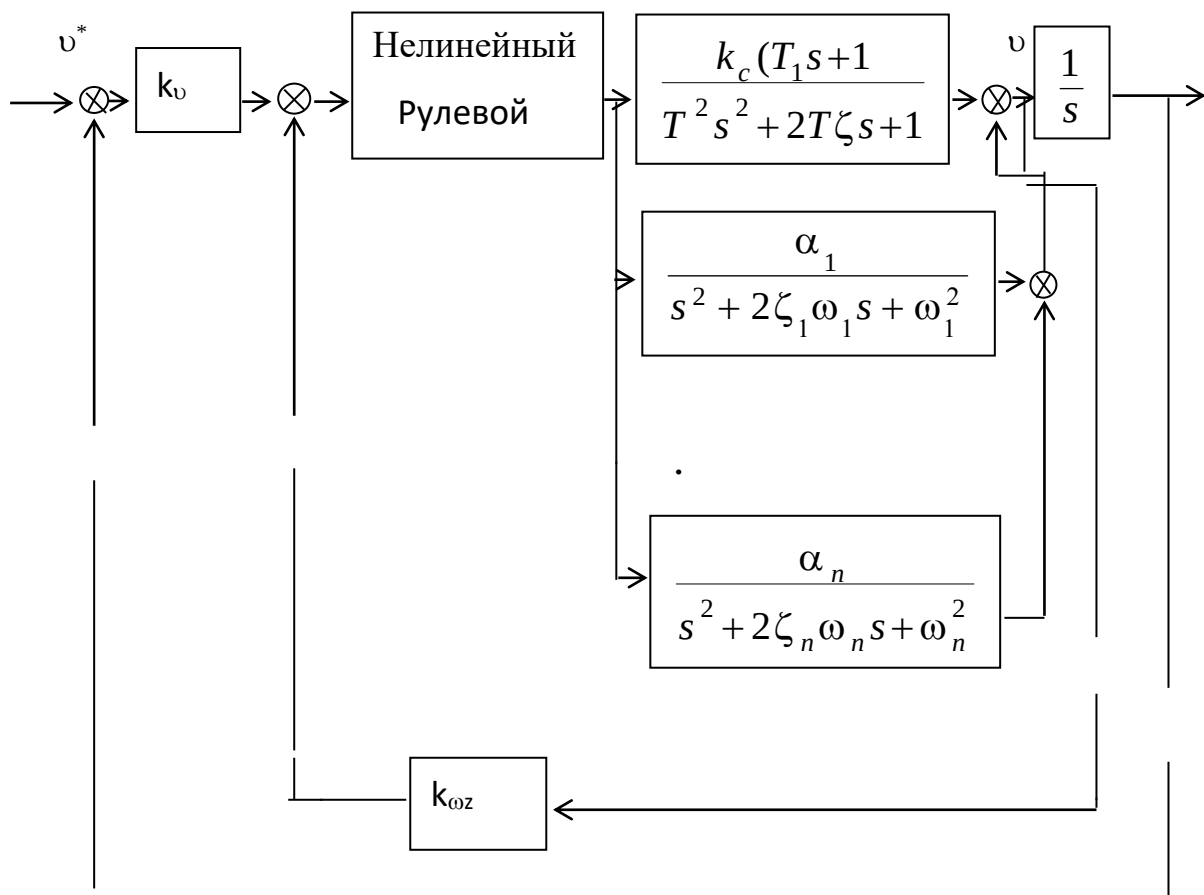


Рис.7.9. Система стабилизации угла тангажа с учетом упругих колебаний

С возрастанием порядкового номера тона упругих колебаний амплитуда их быстро убывает и в практических приложениях учитывают обычно не более двух – трех первых тонов.

В состав рулевого привода и объекта управления входят интегрирующие звенья, которые практически подавляют сигналы упругих колебаний. Это дает возможность считать упругие колебания внешней высокочастотной помехой вида $f_b(t) = B \sin \Omega_b t$, поступающей на входы измерительных устройств и через них на вход нелинейного элемента рулевого привода. В структуре высокочастотного сигнала, вызванного упругими колебаниями, особую роль играет выходной сигнал датчика угловой скорости (ДУС), пропорциональный производной от сигнала $f_b(t)$:

$$\omega_{duc} = k_{\omega_z} \left(\omega_z + \frac{df_b(t)}{dt} \right) = k_{\omega_z} \omega_z + k_{\omega_z} B \Omega_b \cos \Omega_b t,$$

и в котором амплитуда сигнала упругих колебаний возрастает в Ω_b раз.

В такой постановке можно считать, что на входах системы действуют два сигнала – полезный низкочастотный сигнал $f(t)$ и высокочастотный сигнал от упругих

колебаний $f_b(t)$. Представив систему в виде соединения линейной и нелинейной частей, по аналогии с предыдущим, ее уравнение получим в виде

$$Q(s)X(s) + R(s)F(x, s) = S(s)f(t) + S_b(s)f_b(t). \quad (7.26)$$

При учете того, что спектр частот упругих колебаний значительно выше частоты полезного сигнала, решение уравнения (7.26) будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x^0(t) + x^*(t), \\ x^*(t) &= A_b \sin(\Omega_b t + \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

В этом выражении $x^0(t)$ – низкочастотная (полезная) составляющая решения, $x^*(t)$ – высокочастотная составляющая решения от упругих колебаний. Подставим (7.27) в (7.26) и получим уравнение системы в виде

$$Q(s)X(s) + R(s)F(x^0, A_b, \Omega_b) = S(s)f(t) + S_b(s)f_b(t). \quad (7.28)$$

Разложим нелинейную функцию в ряд Фурье и считая, что линейная часть является фильтром нижних частот, учтем только первую гармонику разложения

$$\begin{aligned} F(x^0, A_b, \Omega_b) &= F^0(x^0, A_b, \Omega_b) + a \sin \psi + b \cos \psi, \\ \psi &= \Omega_b t. \end{aligned}$$

В этом выражении

$$F(x^0, A_b, \Omega_b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) d\psi \quad (7.29)$$

По аналогии с предыдущим обозначим гармонические коэффициенты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q(x^0, A_b, \Omega_b) &= \frac{1}{\pi A_b} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) \sin \psi d\psi, \\ q_1(x^0, A_b, \Omega_b) &= \frac{1}{\pi A_b} \int_0^{2\pi} F(x^0 + A_b \sin \psi, A_b \Omega_b \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Исходное уравнение (7.28) разделится на два уравнения

$$\left. \begin{aligned} Q(s)x^0 + R(s)F^0(x^0, A_b, \Omega_b) &= S(s)f(t), \\ Q(s)x^* + R(s) \left[q(x^0, A_b, \Omega_b) + \frac{q_1(x^0, A_b, \Omega_b)}{\Omega_b} s \right] x^* &= S_b(s)f_b(t). \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

Первое уравнение системы определяет медленную (полезную) составляющую сигнала на выходе линейной части, а второе – вынужденную вибрационную составляющую. Функция F^0 называется функцией смещения. Она зависит от параметров вынужденных колебаний, вызванных упругими деформациями, и именно это определяет их влияние на процесс управления по полезному сигналу. Линеаризуем функцию смещения в окрестности точки $x^0=0$. Такая линеаризация справедлива, т.к. в устойчивой системе при $t \rightarrow \infty$ должно выполняться условие $x^0 \rightarrow 0$.

$$k_n(A_b, \Omega_b) = \left(\frac{\partial F^0}{\partial x_0} \right)_{x^0=0} \quad (7.32)$$

Коэффициент k_n называется нелинейным коэффициентом усиления по медленной составляющей. Выражения для коэффициентов гармонической линеаризации в условиях двухчастотного сигнала и нелинейного коэффициента усиления приводятся в справочной литературе. Например, для нелинейности насыщения скоростной характеристики рулевого привода (рис. 7.6) нелинейный коэффициент усиления определяется по формуле [11]

$$k_n = \frac{2k_1}{\pi} \arcsin \frac{b}{A_b}. \quad (7.33)$$

Этот пример позволяет сделать вывод, справедливый и для других типов нелинейных элементов, что чем больше амплитуда вынужденных колебаний, тем меньше нелинейный коэффициент усиления k_n . Если объект управления устойчив, то уменьшение этого коэффициента вызовет только изменение масштаба процессов, связанное с возможным ухудшением качества системы. Если объект неустойчив, т.е. система имеет АФЧХ 2 – го рода, то уменьшение k_n вызывает снижение запасов устойчивости и, при дальнейшем увеличении амплитуды упругих колебаний, к потере устойчивости.

Во втором уравнении системы (7.31) выразим переменную $f_s(t)$ через $x^*(t)$.

$$f_b(t) = B \sin(\Omega_b t + \varphi - \varphi) = B \cos \varphi \sin(\Omega_b t + \varphi) - \\ - B \sin \varphi \cos(\Omega_b t + \varphi).$$

Принимая во внимание, что $sx^* = A_b \Omega_b \cos(\Omega_b t + \varphi)$ и учитывая второе уравнение системы (7.27), получим

$$\cos(\Omega_b t + \varphi) = \frac{sx^*}{A_b \Omega_b}, \\ \sin(\Omega_b t + \varphi) = \frac{x^*}{A_b}.$$

Тогда

$$f_b(t) = \frac{B}{A_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_b} s \right) x^*.$$

Подставим это выражение во второе уравнение системы (7.31) и после элементарных преобразований получим

$$\left[Q(s) - \frac{S_b(s)}{A_b} \left(\cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\Omega_b} \right) + R(s) \left(q + \frac{q_1}{\Omega_b} \right) \right] x^* = 0.$$

Часть последнего выражения, заключенная в квадратные скобки, является характеристическим уравнением замкнутой гармонически линеаризованной системы и, после подстановки в него $s = j\Omega_b$ дает возможность определить амплитуду и фазу вынужденных колебаний на входе нелинейного элемента системы. По этим данным вычисляется нелинейный коэффициент усиления и по характеристическому уравнению замкнутой системы по медленной составляющей

$$Q(s) + k_H R(s) = 0$$

судят о ее устойчивости.

Пример. Ракета – носитель “Авангард” на 75 – й секунде полета имеет передаточную функцию

$$W_p(s) = \frac{k_p (T_1 s + 1)}{(T_2 s + 1)(T_3 s - 1)(T_4 s - 1)},$$

где $k_p = 4.48$, $T_1 = 19.12$, $T_2 = 0.66$, $T_3 = 25.25$, $T_4 = 0.69$.

Объект управления неустойчив и имеет два полюса в правой полуплоскости. Структурная схема системы стабилизации угла тангажа показана на рис.7.10.

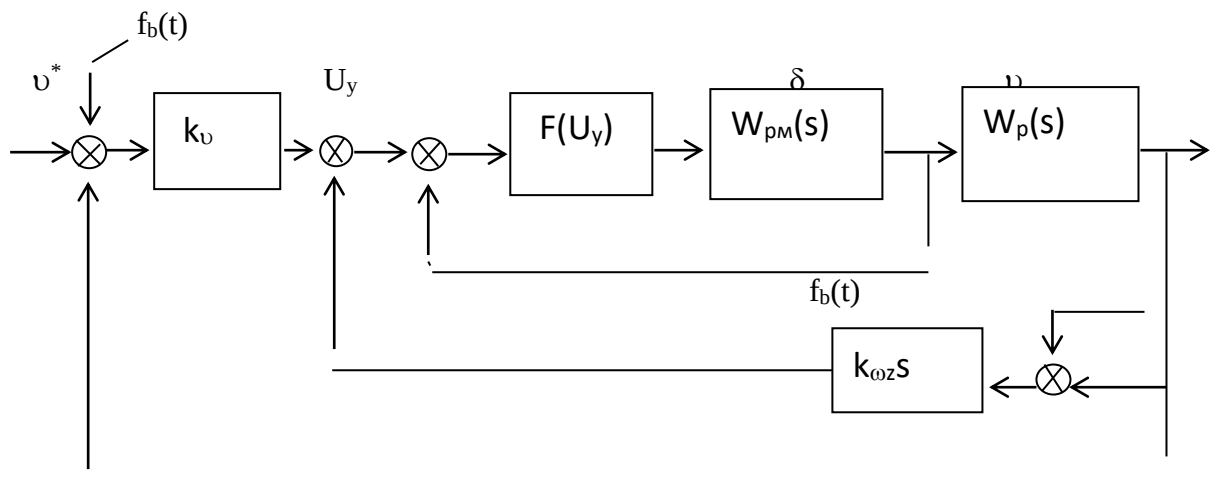


Рис. 7.10. Структурная схема нелинейной системы стабилизации ракеты

Нелинейная характеристика насыщения скоростной характеристики показана на рис. 7.6. Передаточная функция рулевой машины избрана в виде

$$W_{pm}(s) = \frac{1}{s(T_{pm}s + 1)}, \text{ где } T_{pm} = 0.08.$$

Параметры нелинейной характеристики: $k_1 = 10$, $b = 0.035$.

Рассмотрим методику оценки вибрационной помехоустойчивости.

1). Определяем амплитуду вибрационной составляющей на входе нелинейного элемента.

$$\begin{aligned} x^*(t) &= B(k_v \sin \Omega_b t + k_{\omega z} \Omega_b \cos \Omega_b t) = \\ &= B \sqrt{k_v^2 + (k_{\omega z} \Omega_b)^2} \sin(\Omega_b t + \arctg \frac{k_{\omega z} \Omega_b}{k_v}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$A_b = B \sqrt{k_v^2 + (k_{\omega z} \Omega_b)^2}.$$

2). Заменяем нелинейную характеристику нелинейным коэффициентом усиления и определяем передаточную функцию замкнутой гармонически линеаризованной системы.

$$\Phi(s) = \frac{k_n k_v k_p (T_1 s + 1)}{d_0 s^5 + d_1 s^4 + d_2 s^3 + d_3 s^2 + d_4 s + d_5}, \text{ где}$$

$$d_0 = T_2 T_3 T_4 T_{pm}, \quad d_1 = T_{pm} (T_3 T_4 - T_2 (T_3 + T_4)) + T_2 T_3 T_4,$$

$$d_2 = k_n T_2 T_3 T_4 + (T_3 T_4 - T_2 (T_3 + T_4)) + T_{pm} (T_2 - T_3 - T_4),$$

$$d_3 = T_{pm} + T_2 - T_3 - T_4 + k_n (T_3 T_4 - T_2 (T_3 + T_4)) + k_n k_p k_{\omega z} T_1,$$

$$d_4 = 1 + k_n (T_2 - T_3 - T_4) + k_n k_{\omega z} k_p + k_n k_v k_p T_1,$$

$$d_5 = k_n (1 + k_v k_p).$$

3) Используя критерии устойчивости Гурвица или Михайлова определяем минимальное значение нелинейного коэффициента усиления $(k_n)_{min}$, при котором система попадает на границу устойчивости. Получим $(k_n)_{min} = 3.9$.

4) Используя (7.33) определяем максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний на входе нелинейности

$$(A_b)_{\max} = \frac{b}{\sin \frac{(k_H)_{\min} \pi}{2k_1}} = 0.608.$$

5). В системе стабилизации рассматриваемого объекта учитываются два тона колебаний с частотами

$$\Omega_{b1} = 25.4 \frac{1}{c},$$

$$\Omega_{b2} = 62.5 \frac{1}{c}.$$

Для этих частот определим максимально возможные амплитуды упругих колебаний

$$(B)_{\max} = \frac{(A_b)_{\max}}{\sqrt{k_v^2 + (k_{\omega z} \Omega_b)^2}} = \begin{cases} 0.00396 \approx 13.6' \\ 0.0016 \approx 5.6'. \end{cases}$$

Допустимые, с точки зрения достижения границы устойчивости, амплитуды упругих колебаний очень малы, а если учесть требование гарантированных запасов устойчивости, то они будут еще меньше.

7.5. Исследование устойчивости нелинейных систем

7.5.1. Второй метод Ляпунова.

Выдающийся русский математик Александр Михайлович Ляпунов в конце 19-го века разработал весьма общий метод исследования на устойчивость решений систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(7.34)

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

получивший в дальнейшем название второго или прямого метода Ляпунова.

Прежде чем давать точные формулировки, кратко рассмотрим идею метода.

Предположим, что на устойчивость исследуется точка покоя $x_i = 0$, где

$i=1,2,\dots,n$ системы (7.34). Если бы с возрастанием t точки всех траекторий приближались к началу координат или хотя бы не удалялись от него, то очевидно, рассматриваемая точка покоя была бы устойчивой.

Проверка выполнения этого условия не требует знания решений системы уравнений (7.34). Действительно, если ρ – расстояние от точки траектории $x_i(t)$ до начала координат, то

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)} \quad \text{и}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} f_i. \quad (7.35)$$

Правая часть в (7.35) является известной функцией времени и координат процесса и, следовательно, можно исследовать ее знак. Если окажется,

что $\frac{d\rho}{dt} \leq 0$, то точки на всех траекториях не удаляются от начала координат при возрастании времени и точка покоя $x_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) устойчива.

Вместо $\frac{d\rho}{dt}$ обычно вычисляют для упрощения дифференцирования производную $\frac{d(\rho^2)}{dt} = 2\rho \frac{d\rho}{dt}$, знак которой совпадает с $\frac{d\rho}{dt}$.

Однако точка покоя может быть устойчивой и даже асимптотически устойчивой и при немонотонном приближении к ней точек траектории с возрастанием времени. Для того, чтобы убедиться в этом достаточно взглянуть на траектории типа центра или устойчивого фокуса, рассмотренные при изучении метода фазовых портретов. Поэтому вместо функций ρ А.М. Ляпунов рассматривал некоторые функции $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, являющиеся в некотором смысле «обобщенными

расстояниями» до начала координат. Каждая V -функция определена в некоторой области G , заданной неравенством

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < L,$$

где L -некоторая постоянная величина.

Прямой метод Ляпунова об изучении устойчивости сводится к построению таких функций V векторной переменной $X(x_1, \dots, x_n)$, полные производные которых по времени, вычисленные согласно (7.34), обладают некоторыми специфическими свойствами.

Всякую функцию V назовем знакопостоянной, если она, кроме нулевых значений, принимает всюду в области G значения только одного знака.

Всякую знакопостоянную функцию, принимающую нулевое значение только в начале координат, назовем знакоопределенной и учитывая ее знак- определенно положительной или определенно отрицательной.

Наряду с функциями V будем рассматривать их полные производные по времени

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i. \quad (7.36)$$

Ляпуновым были доказаны следующие две фундаментальные теоремы:

Теорема 1. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V , производная (7.36) которой в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема 2. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V , производная (3) которой в силу этих уравнений была бы функцией

знакоопределенной противоположного с V знака, то невозмущенное движение устойчиво асимптотически.

Функции V , удовлетворяющие условиям этих теорем, называются функциями Ляпунова.

Пример 1. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3y + 6xy \\ \frac{dy}{dt} &= 7x - 14x^2y \end{aligned} \right\}$$

Выберем функцию Ляпунова в виде $V=7x^2+3y^2$. Эта функция является знакопостоянной. Ее производная

$$\frac{dV}{dt} = 14x(-3y + 6xy^2) + 6y(7x - 14x^2y) \equiv 0.$$

Условия теоремы 1 выполнены, следовательно точка покоя устойчива.

Пример 2. Исследовать на устойчивость точку покоя $x \equiv 0, y \equiv 0$ системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)x + kb(t)y \\ \frac{dy}{dt} &= -b(t)x + c(t)y \end{aligned} \right\},$$

$$a(t) \leq 0, c(t) \leq 0, k > 0.$$

Функцию Ляпунова выберем в виде $V=x^2+ky^2$. Найдем производную:

$$\frac{dV}{dt} = 2x[a(t)x+kb(t)y]+2ky[-b(t)x+c(t)y]=2[a(t)x^2+kc(t)y^2] \leq 0.$$

Выполнены условия теоремы 2, следовательно, рассматриваемая точка покоя асимптотически устойчива.

Трудность применения прямого метода Ляпунова к решению прикладных задач связана с отсутствием широко разработанных общих приемов построения функций Ляпунова в тех или иных случаях. Наибольшее распространение для анализа устойчивости систем автоматического управления (САУ) находят функции Ляпунова в виде квадратичных форм

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j \quad (7.37)$$

$$p_{ij} = p_{ji}$$

В матричной форме можно записать

$$V = x^T P x ,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{pmatrix} .$$

Квадратичная форма, представленная в виде (7.37) или соответствующей ей матрицы P является знакопостоянной- положительно определенной, если $x^T P x > 0$, отрицательно определенной, если $x^T P x < 0$, или знакоопределенной- знакоположительной, если $x^T P x \geq 0$ и знакоотрицательной, если $x^T P x \leq 0$.

Укажем признаки, по которым можно проверить, - какое из указанных выше свойств имеет изучаемая квадратичная форма или соответствующая ей матрица. Найдем собственные числа матрицы $P - \lambda_i$, решив известное уравнение $\det(\lambda I - P) = 0$, где I -единичная матрица. Если

все собственные числа рассматриваемой матрицы строго больше нуля, то квадратичная форма определенно положительная, если все собственные числа строго отрицательны, то квадратичная форма определенно отрицательная. При $\lambda_i \geq 0$ квадратичная форма знакоположительна, а при $\lambda_i \leq 0$ - знакоотрицательна.

Сформулируем еще один признак определенной положительности квадратичной формы, известный как критерий Сильвестра.

Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы каждый из угловых (диагональных) миноров

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{kk} \end{vmatrix},$$

$$k=1,2,\dots,n.$$

матрицы P был положителен.

Если задача о построении функций Ляпунова для какого-либо класса систем решена, то прямой метод можно рассматривать как наиболее эффективный метод исследования устойчивости. Его особая ценность проявляется в тех случаях, когда интересуются исследованием устойчивости в большом, т.е. при любых конечных отклонениях. Кроме того, этот метод может применяться к изучению устойчивости тех систем управления, которые содержат существенно нелинейные и неаналитические (разрывные) характеристики. Во всех этих случаях возможность применения метода первого приближения исключена.

Следует помнить, что если какая-либо задача об устойчивости в теории управления может быть решена прямым методом, то это решение не будет однозначным. Действительно, функции Ляпунова определены столь общими свойствами, что их может быть построено бесчисленное множество. Следовательно, условия устойчивости, к которым приводит прямой метод, являются условиями достаточными и их нарушение еще не будет означать неустойчивости системы. Мы уже говорили о том, что свобода выбора функций Ляпунова позволяет строить критерии устойчивости систем, в которых некоторые нелинейные элементы не могут

быть точно охарактеризованы. Любой другой известный метод исследования устойчивости не дает возможности решить задачу об устойчивости в большом в этом случае. Но полученное решение, в силу указанной многозначности функций Ляпунова и отсутствия условия необходимости, может оказаться неконструктивным, т.е. таким, которое предъявляет чрезмерно высокие требования к параметрам регулятора, реализовать которые практически невозможно.

Вопрос о конструктивности решений задачи прямым методом в каждом конкретном случае следует подвергать особому рассмотрению.

Некоторые методы построения функций Ляпунова изложены в [1,3,5].

7.5.2. Критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова.

Абсолютная устойчивость- это устойчивость в целом нелинейной системы при задании ее нелинейностей принадлежностью к определенному классу. При этом понимается задание нелинейности не конкретной характеристикой, а в более общем виде- с точностью только до определения ее класса. Типичным случаем такого задания является задание статической нелинейной характеристики тем, что она должна находиться в пределах определеннго угла между осью абсцисс и некоторой прямой, как показано на рис.7.11. При этом конкретная форма нелинейной характеристики может быть любой, в том числе и непостоянной. При таком определении характеристики говорят, что она задана в угле $(0,k)$. Здесь 0 и k - тангенсы углов наклона линий, ограничивающих этот угол.

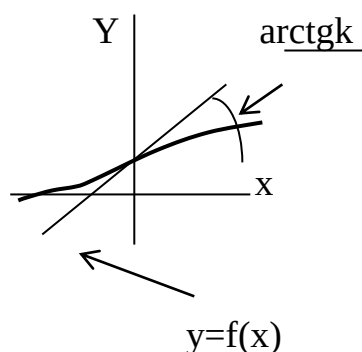
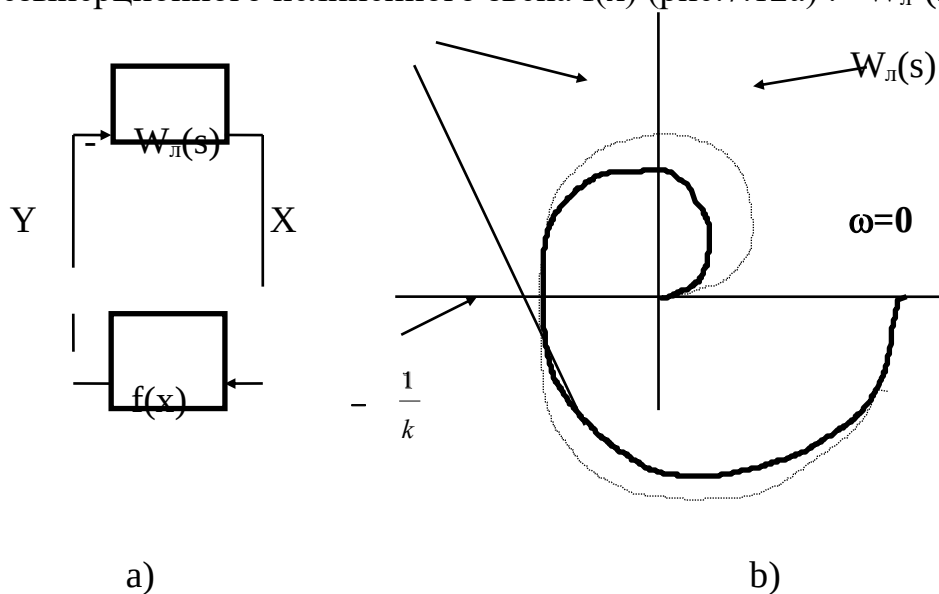


Рис.7.11. Нелинейная характеристика, заданная в угле $(0,k)$

Исследование систем при таком неконкретном задании нелинейностей вызвано не только чисто математическими соображениями в

смысле упрощения задачи, но имеет и практический смысл в тех случаях, когда нелинейности известны неточно или могут изменяться.

Критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова, предложенный в 1959г., относится к системам, которые можно представить в виде соединения линейной части с передаточной функцией $W_{\text{л}}(s)$ и безынерционного нелинейного звена $f(x)$ (рис.7.12а). $W_{\text{л}}^*(s)$ j



• Рис.7.12.Структурная схема системы и преобразованная АФЧХ

Характеристика нелинейного звена является однозначной и лежит в угле $(0,k)$. Минус на входе $W_{\text{л}}(s)$ показывает, что обратная связь в системе отрицательна. Для суждения об устойчивости по этому критерию используется преобразованная амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W_{\text{л}}^*(j\omega) = \text{Re}W_{\text{л}}(j\omega) + j\omega \text{Im} W_{\text{л}}(j\omega) \quad (7.38)$$

Эта характеристика получается из АФЧХ $W_{\text{л}}(j\omega)$ линейной части системы путем умножения ординат последней на текущее значение частоты ω (рис.7.12b).

Рассмотрим вначале критерий В.М.Попова, когда линейная часть системы устойчива.

Нелинейная система абсолютно устойчива, если при устойчивой линейной части системы через точку $(-1/k, j0)$ можно провести хотя бы одну прямую линию так, чтобы вся характеристика $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ находилась от нее справа. Такая линия называется линией Попова. На рис.7.12b показан случай, когда имеет место абсолютная устойчивость.

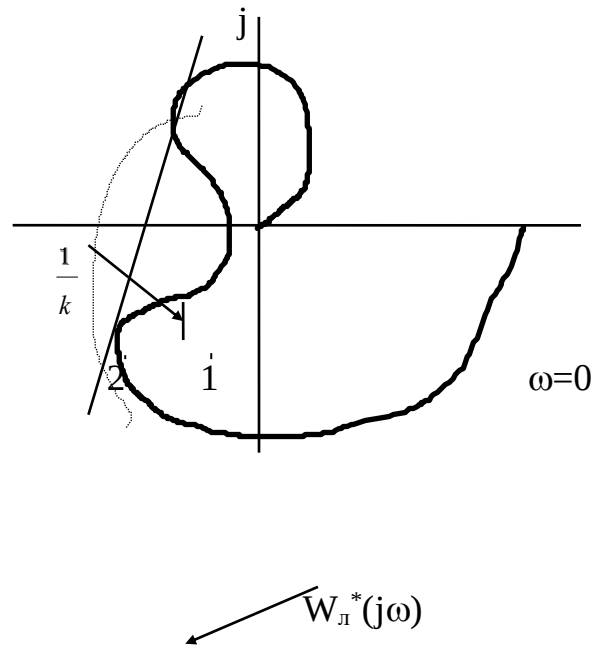


Рис. 7.13. АФЧХ системы, не обладающей абсолютной устойчивостью

В случае сплошной линии на рис.7.13, критерий абсолютной устойчивости не выполняется. Разумеется, тем более он не выполняется, если характеристика $W_L^*(j\omega)$ охватывает точку $(-1/k, j0)$ (пунктир на рис.7.13).

Критерий В.М.Попова является достаточным, т.е. он дает часть области абсолютной устойчивости и его невыполнение может не означать отсутствия абсолютной устойчивости в какой – либо другой области.

Представляет интерес сравнить условия абсолютной устойчивости В.М.Попова с условиями устойчивости линейной системы, получаемой при предположении, что характеристика $f(x)$ в угле $(0,k)$ является линейной. Это значит, что нелинейное звено $f(x)$ заменяется идеальным линейным звеном с коэффициентом передачи k_0 , лежащим в пределах $0 \leq k_0 \leq k$.

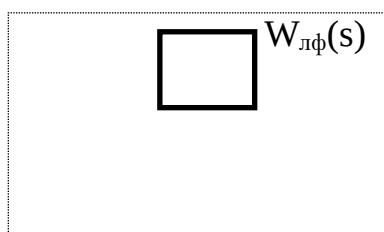
Передаточная функция для такой разомкнутой системы равна $k_0 W_L(s)$. Согласно критерию Найквиста, условие устойчивости рассматриваемой линейной системы заключается в том, что АФЧХ $k_0 W_L(j\omega)$ не должна охватывать точку

$(-1, j0)$. Это эквивалентно условию, что АФЧХ $W_L(j\omega)$ линейной части системы не охватывает точку $(-1/k, j0)$. Действительно, граница устойчивости по Найквисту соответствует равенству $k_0 W_L(j\omega) = -1$, т.е. $W_L(j\omega) = -1/k_0$. При изменении величины k_0 в диапазоне от 0 до k точка $(-1/k_0, j0)$ перемещается по действительной оси $-\infty$ до $-1/k_0$. Поэтому условием устойчивости линейной системы при $k_0 = 0 \div k$ является прохождение характеристики $W_L(j\omega)$ через действительную ось правее точки $(1/k, j0)$, т.е. непересечение ею действительной оси левее этой точки.

Характеристики $W_L(j\omega)$ и $W_L^*(j\omega)$ имеют одинаковые действительные части и, следовательно, пересекают действительную ось в одних и тех же точках. Поэтому сформулированное условие устойчивости линейной системы полностью относится и к характеристике $W_L^*(j\omega)$.

Таким образом, достаточное условие устойчивости при произвольной форме однозначной нелинейной характеристики $f(x)$ в угле $(0, k)$ оказывается строже необходимого и достаточного условия в случае линейной характеристики $f(x)$ в этом угле тем, что помимо необходимости нахождения характеристики $W_L^*(j\omega)$ правее точки $(-1/k, j0)$ требует еще возможности проведения через эту точку линии Попова. Например, в случае АФЧХ, изображенной на рис.7.13 сплошной линией, система устойчива при линейной характеристике в угле $(0, k)$, но не обладает абсолютной устойчивостью. Точка 1 на действительной оси определяет критический по устойчивости коэффициент передачи k_0 для линейной системы, а точка 2 – критическое значение k по условию абсолютной устойчивости в случае произвольной нелинейной характеристики $f(x)$. Таким образом, при произвольной форме $W_L^*(j\omega)$ абсолютная устойчивость обеспечивается в меньшем угле, чем устойчивость в случае линейной системы.

Для того, чтобы распространить рассмотренный критерий на системы с неустойчивой линейной частью, преобразуем предварительную схему системы, как это показано на рис.7.14а. Здесь в схему введены два фиктивных звена с коэффициентом передачи k_ϕ . Они ничего не изменяют в системе, так как их выходные сигналы взаимно компенсируют друг друга на входе линейной части системы.



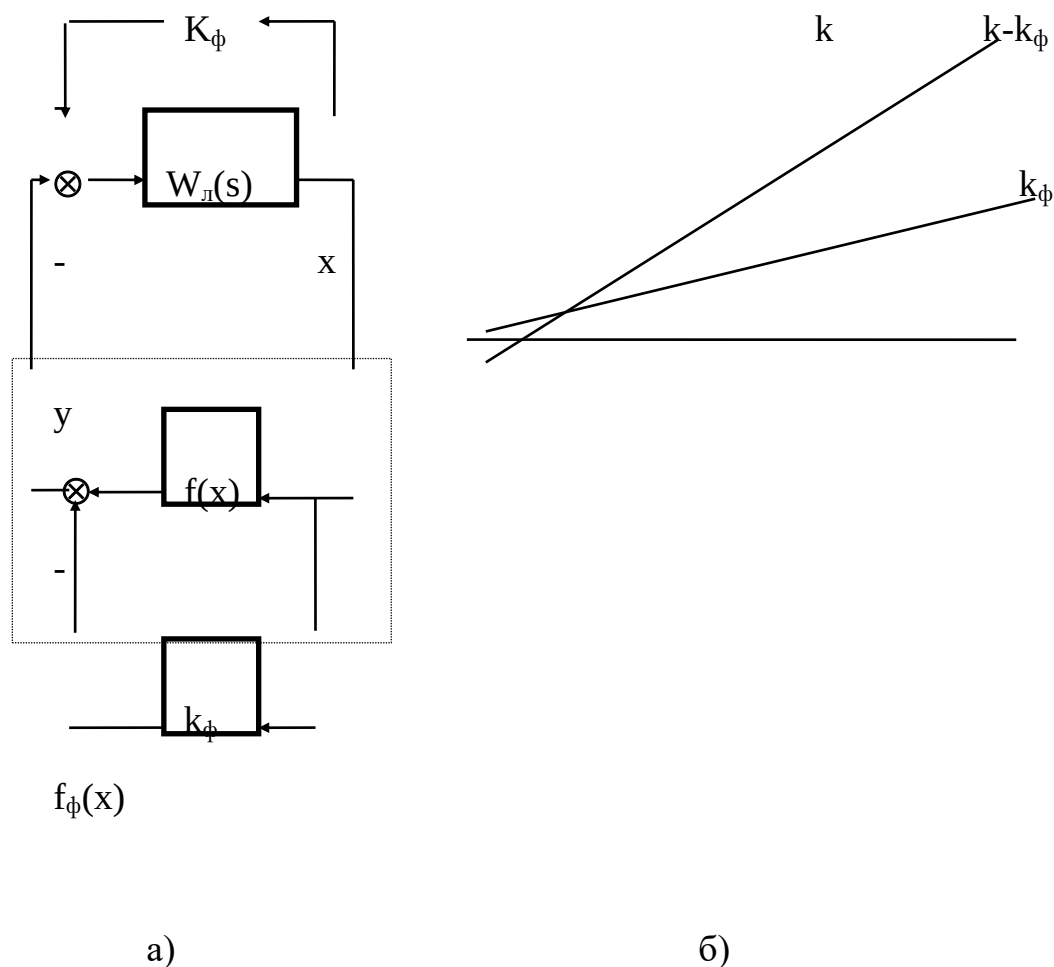


Рис.7.14. Система с неустойчивой линейной частью

В результате получаем систему, состоящую из линейной части с передаточной функцией

$$W_{л\phi}(s) = \frac{W_{л}(s)}{1 + k_{\phi} W_{л}(s)} \quad (7.39)$$

и нелинейной части с характеристикой

$$f_{\phi}(x) = f(x) - k_{\phi} x \quad (7.40)$$

Выберем величину коэффициента передачи k_{ϕ} такой, чтобы за счет введенной отрицательной обратной связи вокруг $W_{л}(s)$ новая линейная часть оказалась устойчивой, т.е. все полюсы передаточной функции $W_{л\phi}(s)$ были левыми.

Отметим сразу, что если последнее не может быть осуществлено, то это уже означает отрицательный ответ на вопрос об абсолютной устойчивости исходной системы, так как при этом она оказывается неустойчивой даже при линейной характеристике $f(x)$ любого наклона.

Применим к преобразованной системе с устойчивой линейной частью критерий абсолютной устойчивости В.М.Попова и получим следующее условие абсолютной устойчивости исходной системы с неустойчивой линейной частью:

система абсолютно устойчива, если через точку $(-1/(k-k_\phi), j0)$ можно провести прямую линию, проходящую слева от характеристики $W_{\phi}^*(j\omega)$. Абсцисса указанной точки определена в соответствии с соотношением (7.40). При этом k определяется углом, в котором задана характеристика $f(x)$.

В соответствии с критерием В.М.Попова характеристика $f_\phi(x)$ должна лежать в угле, ограниченном с одной стороны осью абсцисс. С учетом (7.40) это означает, что характеристика $f(x)$ должна лежать вне угла $(0, k_\phi)$. Таким образом, сформулированный критерий должен быть дополнен требованием, чтобы характеристика $f(x)$ лежала в угле (k_ϕ, k) , как показано на рис.7.14б. Характеристика $f_\phi(x)$ при этом будет лежать в угле $(0, (k-k_\phi))$.

В частном случае, когда передаточная функция $W_\lambda(s)$ линейной части имеет мнимые или нулевые полюсы при остальных левых полюсах, изложенный критерий абсолютной устойчивости совпадает с ранее сформулированным для случая устойчивой линейной части, но должен быть дополнен двумя следующими условиями.

Во-первых, должна обеспечиваться так называемая **предельная устойчивость**, под которой понимается устойчивость линейной системы с передаточной функцией $kW_\lambda(s)$ при $k \rightarrow \infty$.

Во-вторых, исключается касание характеристикой нелинейного звена оси абсцисс, т.е. абсолютная устойчивость рассматривается в угле (ε, k) , где ε -бесконечно малая величина.

Критерий В.М.Попова можно распространить на более общий случай нелинейности, когда характеристика $f(x)$ лежит в угле (k_1, k_2) , где k_1 может быть как положительным, так и отрицательным (рис.7.15а). Этот

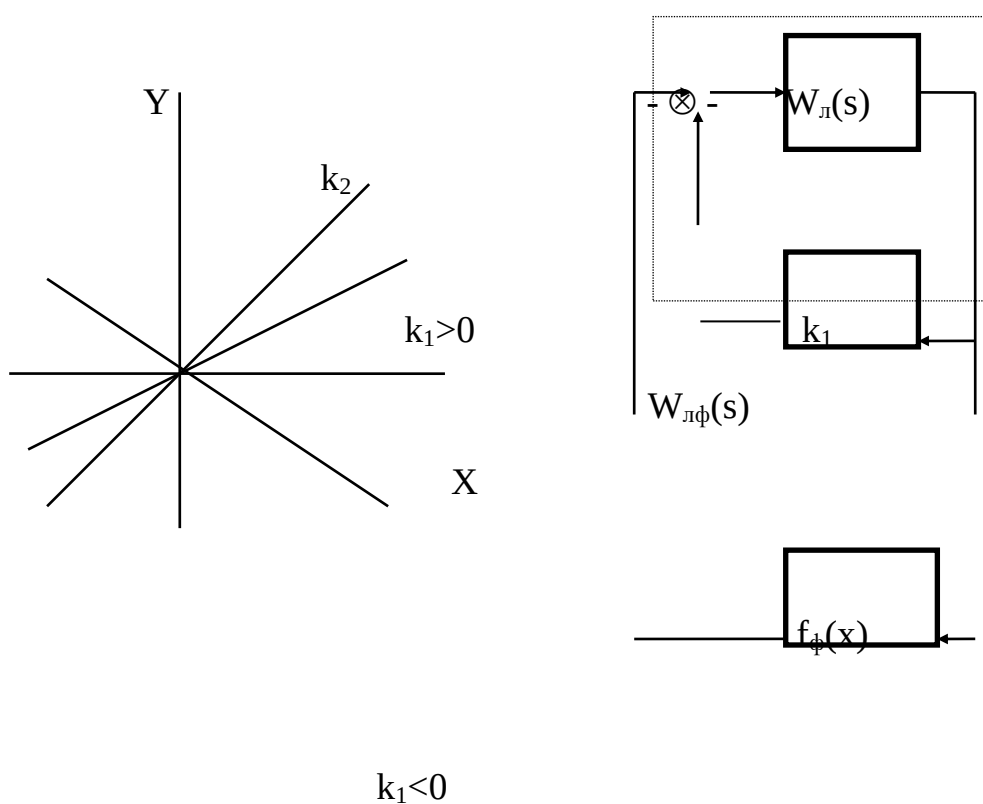
случай сводится к основному случаю с характеристикой $f(x)$ в угле $(0, k)$, если представить нелинейность в следующем виде:

$$f(x) = f_{\phi}(x) + k_1 x$$

(7.41)

Очевидно, что новая нелинейность $f_{\phi}(x)$ лежит в угле $(0, k)$, где $k = k_2 - k_1$.

В результате получим схему, приведенную на рис.7.15б, где нелинейность $f_{\phi}(x)$ лежит в угле $(0, k)$, а линейная часть имеет передаточную функцию



а) б)
Рис.7.15. Оценка абсолютной устойчивости при произвольном угле (k_1, k_2)

$$W_{л\phi}(s) = \frac{W_{л}(s)}{1 + k_1 W_{л}(s)} \quad (7.42)$$

Пример. Определить, будет ли абсолютно устойчивой система, если передаточная функция линейной части определяется выражением

$$W_{\text{л}}(s) = \frac{200}{s(0.0001s^2 + 0.101s + 1)},$$

а нелинейная характеристика показана на рис.7.16а.

Преобразованная АФЧХ линейной части приводится к виду

$$W_{\text{л}}^*(j\omega) = \operatorname{Re} W_{\text{л}}(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} W_{\text{л}}(j\omega) =$$

$$= -\frac{20.2}{0.01\omega^2 + (1 - 0.0001\omega^2)^2} - j\frac{200(1 - 0.0001\omega^2)}{0.01\omega^2 + (1 - 0.0001\omega^2)^2}.$$

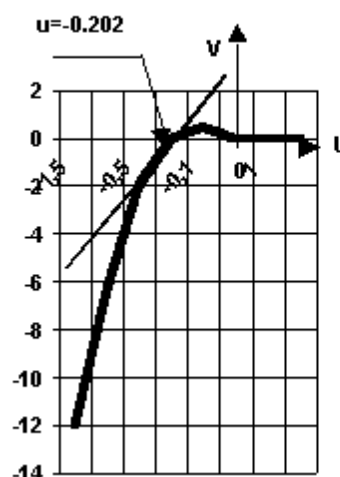
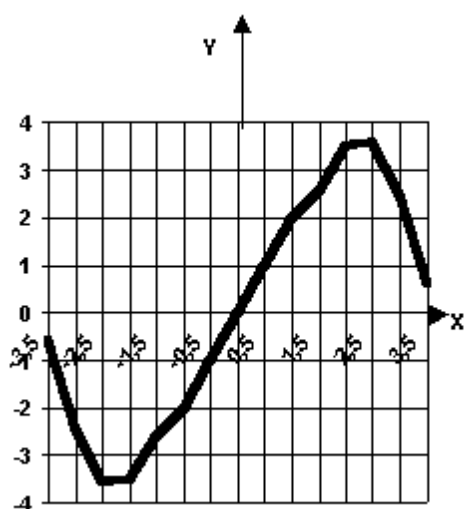


Рис.7.16а. Нелинейная характеристика

Рис.7.16б. График $W_{\text{л}}^*(j\omega)$

График $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ изображен на рис.7.16б. Предельная точка, через которую может пройти прямая Попова при условии, что $W_{\text{л}}^*(j\omega)$ будет располагаться справа, имеет абсциссу -0.202. Это означает, что если нелинейная характеристика однозначна и находится в пределах $0 < \alpha < \alpha_{\max}$, где $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{0.202} = 78.6^\circ$, то система абсолютно устойчива независимо от формы нелинейной характеристики. С доказательством критерия В.М. Попова и его применением в

некоторых частных случаях, например, при ограниченных воздействиях на входе системы, можно ознакомиться в [5,17].

Основное достоинство метода исследования абсолютной устойчивости замкнутых систем, имеющих вид показанный на рис.7.11, при отсутствии входного сигнала заключается в том, что для его применения достаточно знать лишь частотные характеристики линейной части, а поэтому он пригоден для анализа систем высокого порядка.

IV.Практические занятия.

Практическая работа № 1. Математическое описание система автоматического управления (САУ) и их характеристики.

Общее задание.

Линеаризовать уравнения статики и динамики в окрестностях номинальных режимов.

Пример. Линеаризация нелинейного ДУ.

$$3xy - 4x^2 + 1,5 \frac{dx}{dt} y = 5 \frac{dy}{dt} + y$$

Данное ДУ является нелинейным из-за наличия произведений переменных x и y . Линеаризируем его в окрестности точки с координатами $x_0 = 1, x'_0 = 0, y'_0 = 0$. Для определения недостающего начального условия y_0 подставим данные значения в ДУ:

$$3y_0 - 4 + 0 = 0 + y_0 \quad \text{откуда} \quad y_0 = 2.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F = 3xy - 4x^2 + 1,5x'y - 5y' - y$$

и определим все ее производные при заданных начальных условиях:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_0 = (3y - 8x)|_0 = 3 \cdot 2 - 8 \cdot 1 = -2,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0 = (3x + 1,5x' - 1)|_0 = 3 \cdot 1 + 1,5 \cdot 0 - 1 = 2,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x'} \right|_0 = (1,5y)|_0 = 1,5 \cdot 2 = 3,$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_0 = -5.$$

Теперь, используя полученные коэффициенты, можно записать окончательное линейное ДУ:

$$-5 \cdot \Delta y' + 2 \cdot \Delta y + 3 \cdot \Delta x' - 2 \cdot \Delta x = 0.$$



Линеаризация ДУ, заданного в явном виде относительно y , т.е. $y = F(x)$ производится по формуле

$$y = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial F}{\partial x''} \Delta x'' + \dots,$$

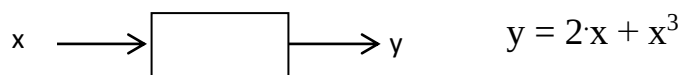
то есть, в данном случае нет необходимости искать производные по y .

Варианты заданий.

Вариант № 1

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$x_n = 2$$



2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима

$x_n = 2$ и определить передаточную функцию звена

$$y^{(2)} + y \cdot y^{(1)} + y^3 = 2 \cdot x^2.$$

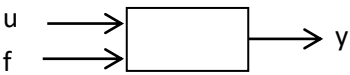
Вариант № 2

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$x_H = 1$$


$$y = 2 \cdot x^2 + x^5$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена



$$y^{(2)} + y \cdot y^{(1)} = 2 \cdot u \cdot f + f,$$

$$u_H = f_H = 0, \quad y_H = 2.$$

Вариант № 3

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима



$$y = 2 \cdot u^2 \cdot f + f^3 + 2 \cdot u^2$$

$$u_H = 0,5; \quad f_H = 1$$

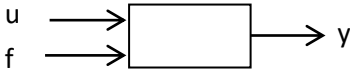
2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(2)} + 2 \cdot y \cdot y^{(1)} + y = 2 \cdot u^{(1)} \cdot f + u^3,$$

$$u_H = 1, \quad f_H = 2.$$

Вариант № 4

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима



$$y = u \cdot f + u^2$$

$$u_H = 1; \quad f_H = 2.$$

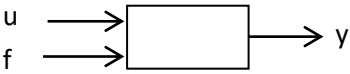
2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(2)} + y \cdot y^{(1)} + y^3 = u^{(1)} \cdot f + u \cdot f + u^2,$$

$$u_H = 1, \quad f_H = 2.$$

Вариант № 5

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима



$$2 \cdot u \cdot \sqrt{y} - f = 0$$

$$u_H = 2; \quad f_H = 1.$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(1)} + y + y \cdot u - 2 \cdot u \cdot f + u^{(1)} = 0,$$

$$u_H = 0,5, \quad f_H = 1.$$

Вариант № 6

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима $x_H = 1$

$$x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad y^2 + yx^2 - 2 \cdot x = 0.$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$\begin{array}{c} u \\ f \end{array} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad y^{(1)} + y = 2 \cdot u \cdot f + u^{(1)},$$

$$u_H = 0,5; \quad f_H = 2.$$

Вариант № 7

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad x_H = 2$$

$$y^2 - 2 \cdot u \cdot x - x^3 - 4 = 0.$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(2)} + y \cdot y^{(1)} + y^2 = 2 \cdot x.$$

Вариант № 8

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad x_H = 1$$

$$y = 4 \cdot x^2 + x^3.$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$\begin{array}{c} u \longrightarrow \\ f \longrightarrow \end{array} \boxed{} \longrightarrow y \quad y^{(1)} \cdot (1 + y) + y = u \cdot u^{(1)} + f \cdot f^{(1)},$$

$$u_n = 2; \quad f_n = 1.$$

Вариант № 9

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad x_n = 2$$

$$y = 2 \cdot x^2 + x.$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$\begin{array}{c} u \longrightarrow \\ f \longrightarrow \end{array} \boxed{} \longrightarrow y \quad y^{(1)} \cdot (2 + y) + y = u^2 \cdot u^{(1)} + f,$$

$$u_n = 0,5; \quad f_n = 1.$$

Вариант № 10

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad x_n = 2$$

$$y = 2 \cdot x \cdot (1 + x^2).$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(2)} + y \cdot y^{(1)} + y = 2 \cdot x^3 + x \cdot x^{(1)}.$$

Вариант № 11

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$x \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad x_n = 3$$

$$y = 2 \cdot x \cdot (3 + x)$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y \cdot y^{(1)} + y = 2 \cdot x^3 + x \cdot x^{(1)}.$$

Вариант № 12

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{c} u \longrightarrow \\ f \longrightarrow \end{array} \boxed{} \longrightarrow y \quad \begin{array}{l} u \cdot \sqrt{y} - 2f \cdot y = 0 \\ u_H = 2; \quad f_H = 1. \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$\begin{array}{l} y^{(1)} + y + u - u \cdot f + u^{(1)} = 0, \\ u_H = 1; \quad f_H = 1. \end{array}$$

Вариант № 13

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{c} x \longrightarrow \end{array} \boxed{} \longrightarrow y \quad \begin{array}{l} x_H = 1 \\ y^2 - y \cdot x^2 - 2 \cdot x = 0. \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$\begin{array}{l} y^{(1)} + y \cdot y^{(1)} = 2 \cdot x - 8 \cdot x^3; \\ x_H = 2; \quad y_H = 2. \end{array}$$

Вариант № 14

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{c} u \longrightarrow \\ f \longrightarrow \end{array} \boxed{} \longrightarrow y \quad \begin{array}{l} 2 \cdot \sqrt{y} + u \cdot f \cdot y = 0 \\ u_H = -2; \quad f_H = 1. \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(1)} + y^{(1)} \cdot y^2 + y = u \cdot u^{(1)} + f \cdot f^{(1)},$$

$$u_n = 1; \quad f_n = 2.$$

Вариант № 15

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\ & & x_n = 2 \\ & & y = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3. \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$\begin{array}{ccc} u & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\ f & \longrightarrow & \\ & & y^{(1)} \cdot (1 + 2 \cdot y) + y = u \cdot u^{(1)} + f \cdot f^{(1)}, \\ & & u_n = 2; \quad f_n = 1. \end{array}$$

Вариант № 16

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\ & & x_n = 1 \\ & & y = 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x. \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$\begin{array}{ccc} u & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\ f & \longrightarrow & \\ & & y^{(1)} \cdot (2 + 3 \cdot y) + y = u^2 \cdot u^{(1)} + 2 \cdot f, \\ & & u_n = 1; \quad f_n = 1. \end{array}$$

Вариант № 17

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\ & & x_n = 3 \\ & & y = 2 \cdot x \cdot (1 + x^2). \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(2)} + 2 \cdot y \cdot y^{(1)} + y = x^3 + 3 \cdot x \cdot x^{(1)}.$$

Вариант № 18

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{ccc}
 x & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\
 & & x_H = 1 \\
 & & y = 2 \cdot x \cdot (10 + x).
 \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$5y \cdot y^{(1)} + y = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x \cdot x^{(1)}.$$

Вариант № 19

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{ccc}
 u & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\
 f & \longrightarrow & u \cdot \sqrt{y} - 5 \cdot f \cdot y = 0 \\
 & & u_H = 1; \quad f_H = 2.
 \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(1)} + y + u - 2 \cdot u \cdot f + u^{(1)} = 0,$$

$$u_H = 0.5; \quad f_H = 1.$$

Вариант № 20

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{ccc}
 x & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\
 & & x_H = 2 \\
 & & y^2 - 4y \cdot x^2 - x = 0.
 \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(1)} + y \cdot y^{(1)} = 3 \cdot x - 5 \cdot x^3;$$

$$x_H = 2; \quad y_H = 1.$$

Вариант № 21

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{ccc}
 u & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow y \\
 f & \longrightarrow & 2 \cdot \sqrt{y} + 2 \cdot u \cdot f \cdot y = 0
 \end{array}$$

$$u_H = 2; \quad f_H = 2.$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(1)} + y^{(1)} \cdot y^2 + y = u \cdot u^{(1)} + f \cdot f^{(1)},$$

$$u_H = 1; \quad f_H = 1.$$

Вариант № 22

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

$$\begin{array}{c} u \\ f \end{array} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad \begin{array}{l} 4 \cdot \sqrt{y} + u \cdot f \cdot y = 0 \\ u_H = -2; \quad f_H = -1. \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

$$y^{(1)} + y^{(1)} \cdot y^2 + y = u \cdot u^{(1)} + f \cdot f^{(1)},$$

$$u_H = 1; \quad f_H = 1.$$

Вариант № 23

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима

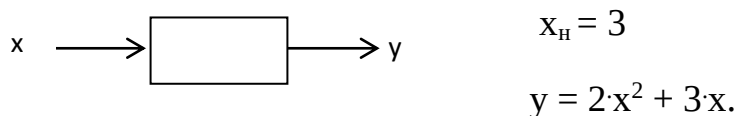
$$\begin{array}{c} x \end{array} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad \begin{array}{l} x_H = 1 \\ y = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3. \end{array}$$

2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена

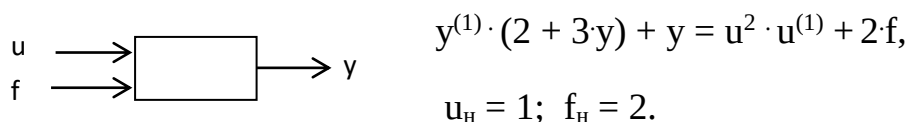
$$\begin{array}{c} u \\ f \end{array} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y \quad \begin{array}{l} y^{(1)} \cdot (1 + 2 \cdot y) + y = u \cdot u^{(1)} + f \cdot f^{(1)}, \\ u_H = 2; \quad f_H = 2. \end{array}$$

Вариант № 24

1. Линеаризовать уравнение статики в окрестности номинального режима



2. Линеаризовать уравнение динамики в окрестности номинального режима и определить передаточную функцию звена



Практическая работа № 2 Анализ качества линейных непрерывных система автоматического управления

Общее задание.

1. По заданным дифференциальным уравнениям определить операторные уравнения при нулевых начальных условиях, передаточные функции, структурные схемы звеньев, характеристические уравнения и их корни. Показать распределение корней на комплексной плоскости.

Оценить устойчивость каждого из звеньев.

2. По заданной передаточной функции записать дифференциальное уравнение.

Пример решения задания 1

Дано дифференциальное уравнение, характеризующее динамику технологического объекта,

$$6,25 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + y = 9x - 1,2 \frac{dx}{dt} - 5 \frac{du}{dt}.$$

Если обозначить $Y(s)$, $X(s)$ и $U(s)$ как изображения сигналов y , x и u соответственно, то операторное уравнение (при нулевых начальных условиях) в данном случае примет вид:

$$6,25s^2 Y(s) + 4sY(s) + Y(s) = 9X(s) - 1,2sX(s) - 5sU(s).$$

Данное уравнение можно преобразовать, вынеся $Y(s)$ и $X(s)$ за скобки:

$$Y(s) \cdot (6,25s^2 + 4s + 1) = X(s) \cdot (9 - 1,2s) - 5sU(s).$$

Отсюда получено:

$$Y(s) = \frac{9 - 1,2s}{6,25s^2 + 4s + 1} X(s) - \frac{5s}{6,25s^2 + 4s + 1} U(s).$$

Если обозначить передаточные функции объекта как

$$W_x(s) = \frac{9 - 1,2s}{6,25s^2 + 4s + 1} \quad \text{и} \quad W_u(s) = \frac{5s}{6,25s^2 + 4s + 1},$$

то получается уравнение $Y(s) = W_x(s) \cdot X(s) + W_u(s) \cdot U(s)$. Структурная схема объекта приведена на рисунке 1.

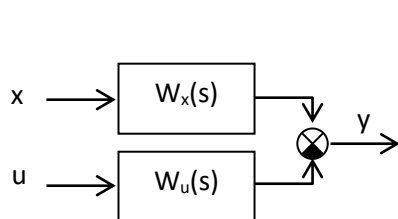


Рис. 1

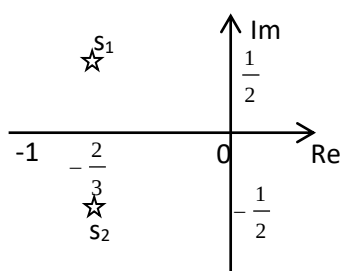


Рис. 2

Полученные передаточные функции имеют одинаковые знаменатели, называемые характеристическими выражениями:

$$A(s) = 6,25s^2 + 4s + 1.$$

Если приравнять данное выражение к нулю, то образуется характеристическое уравнение $6,25s^2 + 4s + 1 = 0$, корни которого

$$s_1 = -\frac{2}{3} + j\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad s_2 = -\frac{2}{3} - j\frac{1}{2}.$$

Распределение корней на комплексной плоскости показано на рис. 2. По рисунку видно, что корни лежат в левой полуплоскости, следовательно, объект **устойчив**. ♦

Пример решения задания 2

Дана передаточная функция вида

$$W(s) = \frac{7s^3 + 5,5}{(s - 0,5)(3s^2 + 2)}.$$

Для записи дифференциального уравнения необходимо учесть, что по определению $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, откуда получено:

$$W(s) = \frac{7s^3 + 5,5}{(s - 0,5)(3s^2 + 2)} = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

$$Y(s)(s - 0,5)(3s^2 + 2) = X(s)(7s^3 + 5,5),$$

$$Y(s)(3s^3 + 2s - 1,5s^2 - 1) = X(s)(7s + 5,5),$$

$$3s^3 Y(s) + 2s Y(s) - 1,5s^2 Y(s) - Y(s) = 7s X(s) + 5,5 X(s).$$

Теперь, если применить обратное преобразование Лапласа, получается:

$$3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{dy}{dt} - 1,5 \frac{d^2 y}{dt^2} - y = 7 \frac{d^3 x}{dt^3} + 5,5 x . \blacklozenge$$

Варианты заданий.

Вариант № 1

$$1. \quad \text{а)} \quad 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + y = 2x + \frac{du}{dt}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2;$$

$$\text{б)} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + y = \frac{dx}{dt} + 3x + 2f - \frac{du}{dt}; \quad y(0) = 10; \quad y'(0) = 6.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{3s + 5}{(s - 2)(s^2 + 3)}.$$

Вариант № 2

$$1. \quad \text{а)} \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 2 \frac{du}{dt}; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 0;$$

$$\text{б)} \quad 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + 2u; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 2; \quad y''(0) = 1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s - 12}.$$

Вариант № 3

$$1. \quad \text{a)} \quad 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} - 3f; \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 1;$$

$$\text{б)} \quad 2 \frac{dy}{dt} + y = -4u + 2f - 0.1 \frac{dx}{dt}; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = -18.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{s-10}{(s-2)(s+5)}.$$

Вариант № 4

$$1. \quad \text{a)} \quad 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 0.5 \cdot y = 2 \frac{du}{dt} + 4u + \frac{df}{dt}; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 2;$$

$$\text{б)} \quad -2 \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \cdot y - 2 \frac{dx}{dt} - x = 0; \quad y(0) = 15; \quad y'(0) = -2.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{4 \cdot s}{s^3 + 3 \cdot s - 1}.$$

Вариант № 5

$$1. \quad \text{a)} \quad y + \frac{dy}{dt} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \cdot u + 3 \frac{df}{dt} + f; \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = -11;$$

$$\text{б)} \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{dy}{dt} - x + \frac{df}{dt} = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2; \quad y''(0) = -1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{s^2 + 1}{(s-3)(s+2)(s+0.5)}.$$

Вариант № 6

$$1. \quad \text{a)} \quad \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{dy}{dt} - x + \frac{df}{dt} = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2; \quad y''(0) = -1;$$

$$\text{б)} \quad 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + 2 \cdot x - 10f; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = -10; \quad y''(0) = 1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{3s+8}{s^2+5}.$$

Вариант № 7

$$1. \quad \text{a)} \quad 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 6 \frac{du}{dt} + u; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 7;$$

$$\text{б)} 16 \frac{d^2 y}{dt^2} + y + 8 \frac{dy}{dt} = 5 \frac{df}{dt} - 7f - x; \quad y(0) = -3; \quad y'(0) = 5.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{5}{2s^2 + 3s + 16}.$$

Вариант № 8

$$1. \quad \text{а)} y - 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 3x + \frac{d^2 f}{dt^2}; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 4;$$

$$\text{б)} 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + y = 4 \frac{dx}{dt} + u - 5f; \quad y(0) = 9; \quad y'(0) = -4.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{3s - 4}{(s^2 + 1)(s - 2)}.$$

Вариант № 9

$$1. \quad \text{а)} 1.25 \frac{d^3 y}{dt^3} - 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + \frac{df}{dt} - 3f = 0; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 3; \quad y''(0) = 1;$$

$$\text{б)} 10y + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} - 3x = 4 \frac{df}{dt} + 5u; \quad y(0) = 0.5; \quad y'(0) = 1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{5s^2}{(s - 1)(s^2 + 3)}.$$

Вариант № 10

$$1. \quad \text{а)} 3 \frac{dy}{dt} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^3 y}{dt^3} = 3 \frac{df}{dt} - 2f + x; \quad y(0) = y''(0) = 10; \quad y'(0) = 1;$$

$$\text{б)} 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 12y - 2 \frac{dx}{dt} + x = f; \quad y(0) = 9; \quad y'(0) = -1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{3s + 1}{(s - 11)(s + 7)}.$$

Вариант № 11

$$1. \quad \text{а)} \frac{d^3 y}{dt^3} - 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - u = 2 \frac{d^2 u}{dt^2}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 1;$$

$$\text{б)} y + 9 \frac{d^3 y}{dt^3} = \frac{dx}{dt} + f - 3 \frac{d^2 u}{dt^2}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0; \quad y''(0) = 12.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{s-4}{(s-1)(s^2+12)}.$$

Вариант № 12

$$1. \quad \text{а) } \frac{d^2 y}{dt^2} + y = \frac{dx}{dt} + 3 \cdot x + 2 \cdot f - \frac{du}{dt}; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = 3;$$

$$\text{б) } \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 2 \frac{du}{dt}; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{2 \cdot s + 1}{(s+2)(s+3)}.$$

Вариант № 13

$$1. \quad \text{а) } 2 \frac{dy}{dt} + y = -4u + 2f - 0.1 \frac{dx}{dt}; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 8;$$

$$\text{б) } 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 0.5y = 2 \frac{du}{dt} + 4u + \frac{df}{dt}; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 2.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{3s+5}{(s-2)(s^2+3)}.$$

Вариант № 14

$$1. \quad \text{а) } -2 \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - x + 4y = 0; \quad y(0) = 7; \quad y'(0) = -2;$$

$$\text{б) } y + \frac{dy}{dt} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} = 2u + 3 \frac{df}{dt} + f; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = -1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{3s}{s^2 + 2s + 5}.$$

Вариант № 15

$$1. \quad \text{а) } \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{dy}{dt} - x + \frac{df}{dt} = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2; \quad y''(0) = -3;$$

$$\text{б) } 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} + 2x - 10f; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = -1; \quad y''(0) = 1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{s+9}{s(s^2+3)}.$$

Вариант № 16

1. а) $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 6 \frac{du}{dt} + u$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$;

б) $16 \frac{d^2 y}{dt^2} + y + 8 \frac{dy}{dt} = 5 \frac{df}{dt} - 7 f - x$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 4$.

2. $W(s) = \frac{s-5}{3(s-2)s^2}$.

Вариант № 17

1. а) $y - 2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 3x + \frac{d^2 f}{dt^2}$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 1$;

б) $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + y = 4 \frac{dx}{dt} + u - 5 f$; $y(0) = 3$; $y'(0) = -2$.

2. $W(s) = \frac{3s^2}{(s-1)(s^2+5)}$.

Вариант № 18

1. а) $10y + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} - 3x = 4 \frac{df}{dt} + 5u$; $y(0) = 5$; $y'(0) = 1$;

б) $3 \frac{dy}{dt} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{d^3 y}{dt^3} = 3 \frac{df}{dt} - 2 f + x$; $y(0) = y''(0) = 4$; $y'(0) = 2$.

2. $W(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s^2+3s)}$.

Вариант № 19

1. а) $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 12y - 2 \frac{dx}{dt} + x = f$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -2$;

б) $3 \frac{dy}{dt} - 6y = \frac{dx}{dt} - x + 8f$; $y(0) = -2$; $y'(0) = 4$.

2. $W(s) = \frac{3s+5}{(s-2)(s^2+3)}$.

Вариант № 20

1. а) $\frac{d^3 y}{dt^3} - 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - u = 2 \frac{d^2 u}{dt^2}; y(0) = 0; \quad y'(0) = -2; \quad y''(0) = 1;$
- б) $y + 9 \frac{d^3 y}{dt^3} = \frac{dx}{dt} + f - 3 \frac{d^2 u}{dt^2}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0; \quad y''(0) = 2.$
2. $W(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+7}.$

Вариант № 21

1. а) $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \frac{dx}{dt} + 3x + 2f - \frac{du}{dt}; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = 4;$
- б) $6 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} - 3f; \quad y(0) = 3; \quad y'(0) = 2.$
2. $W(s) = \frac{2s+1}{s(s^2+3)}.$

Вариант № 22

1. а) $\frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{dy}{dt} - x + \frac{df}{dt} = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 2; \quad y''(0) = -1;$
- б) $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + y = 4 \frac{dx}{dt} + u - 5f; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = -2.$
2. $W(s) = \frac{2s}{s^3+3s^2+4s+10}.$

Вариант № 23

1. а) $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \frac{dx}{dt} + 3x + 2f - \frac{du}{dt}; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 4;$
- б) $\frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 2 \frac{du}{dt}; \quad y(0) = -1; \quad y'(0) = 2.$
2. $W(s) = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)}.$

Вариант № 24

1. а) $2 \frac{dy}{dt} + y = -4u + 2f - 0.1 \frac{dx}{dt}; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 4;$

$$б) 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 0.5y = 2 \frac{du}{dt} + 4u + \frac{df}{dt}; \quad y(0) = -3; \quad y'(0) = 1.$$

$$2. \quad W(s) = \frac{3s + 5}{(s - 2)(s^2 + 3)}.$$

Практическая работа № 3

Линейные стационарные системы автоматического управления при случайных воздействиях.

Общее задание.

По заданным изображениям $Y(s)$ получить оригиналы $y(t)$.

Пример. Случай обратного преобразования Лапласа при наличии комплексных корней.

Изображение выходного сигнала $Y(s)$ имеет вид

$$Y(s) = \frac{5,75}{s(1,8s^3 + 5,22s^2 + 4,3s + 6,75)}.$$

Корни знаменателя включают нулевой корень, действительный и пару комплексных корней: $s_0 = 0$; $s_1 = -2,54$; $s_{2,3} = -0,18 \pm j \cdot 1,20$.

Изображение $Y(s)$ разбивается на сумму четырех дробей:

$$Y(s) = Y_0(s) + Y_1(s) + Y_{2,3}(s) = \frac{M_0}{s} + \frac{M_1}{s - s_1} + \left(\frac{M_2}{s - s_2} + \frac{M_3}{s - s_3} \right).$$

Тогда оригинал $y(t)$, согласно табл. 1.1 и 1.2, имеет вид:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_{2,3}(t) = M_0 + M_1 \cdot e^{s_1 t} + 2 e^{\alpha t} [C \cdot \cos(\omega t) - D \cdot \sin(\omega t)],$$

где α и ω - действительная и мнимая части пары комплексных корней $s_{2,3}$, C и D - действительная и мнимая части пары коэффициентов M_2 и M_3 .

Для корня $s_0 = 0$:

$$M_0 = \frac{B(0)}{A_1(0)} = \frac{5,75}{1,8s^3 + 5,22s^2 + 4,3s + 6,75} \Big|_{s=0} = \frac{5,75}{6,75} = 0,85 ,$$

$$Y_0(s) = \frac{M_0}{s} = \frac{0,85}{s} ,$$

$$y_0(t) = M_0 = 0,85;$$

Для корня $s_1 = -2,54$:

$$M_1 = \frac{B(s)}{A'(s)} \Big|_{s=s_1} = \frac{5,75}{(1,8s^4 + 5,22s^3 + 4,3s^2 + 6,75s)'} \Big|_{s=s_1} = ,$$

$$= \frac{5,75}{7,2s^3 + 15,66s^2 + 8,6s + 6,75} \Big|_{s=s_1} = -0,18 ,$$

$$Y_1(s) = \frac{M_1}{s - s_1} = \frac{-0,18}{s + 2,54} ,$$

$$y_1(t) = M_1 * e^{s_1 t} = -0,18 * e^{-2,54 t} ;$$

в) для корней $s_{2,3} = -0,18 \pm j \cdot 1,20$:

$$M_2 = \frac{B(s)}{A'(s)} \Big|_{s=s_2} = \frac{5,75}{(1,8s^4 + 5,22s^3 + 4,3s^2 + 6,75s)'} \Big|_{s=s_2} = ,$$

$$= \frac{5,75}{7,2s^3 + 15,66s^2 + 8,6s + 6,75} \Big|_{s=s_2} = -0,34 + j \cdot 0,24 ,$$

$$Y_{2,3}(s) = \frac{M_2}{s - s_2} + \frac{M_3}{s - s_3} = \frac{-0,34 + j \cdot 0,24}{s + 0,18 + j \cdot 1,20} + \frac{-0,34 - j \cdot 0,24}{s + 0,18 - j \cdot 1,20} ,$$

$$y_{2,3}(t) = 2 e^{-0,18t} [-0,34 \cos(1,20 t) - 0,24 \sin(1,20 t)].$$

В итоге получаем оригинал:

$$y(t) = 0,85 - 0,18 e^{-2,54 t} - 2 e^{-0,18 t} [0,34 \cos(1,20 t) + 0,24 \sin(1,20 t)]. \blacklozenge$$

Варианты заданий.

Вариант № 1

$$\text{a) } Y(s) = \frac{3s + 5}{(s - 2)(s + 4)(s - 1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s^2 - s - 6)};$$

Вариант № 2

$$\text{a) } Y(s) = \frac{0.16}{s(s^2 + s + 0.16)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{8(3s + 1)s}{(s^2 + s + 1)(s + 1)^2}.$$

Вариант № 3

$$\text{a) } Y(s) = \frac{5(4s + 1)}{s(9s^2 + s + 1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{6s(s + 1)}{(3s + 1)(4s^2 + s + 1)};$$

Вариант № 4

$$\text{a) } Y(s) = \frac{0.5}{s(s^2 + s + 0.5)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{(3s + 1)^2}{(5s + 1)(s^2 + s + 1)}.$$

Вариант № 5

$$\text{a) } Y(s) = \frac{6s + 1}{(4s + 1)^2(4s^2 + s + 1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{5(s + 1)}{(9s^2 + 3s + 1)(3s + 1)};$$

Вариант № 6

$$\text{a) } Y(s) = \frac{5(3s + 1)}{(s + 1)(4s^2 + s + 1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{5s(s + 1)}{(6s + 1)^2(9s^2 + s + 1)}.$$

Вариант № 7

$$\text{a) } Y(s) = \frac{5(s + 1)}{(9s^2 + s + 1)(3s + 1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{3s}{(5s + 1)(s^2 + s + 1)};$$

Вариант № 8

$$\text{a) } Y(s) = \frac{5(3s + 1)}{(s^2 + s + 1)s}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{5(s + 1)}{s(9s^2 + s + 1)}.$$

Вариант № 9

$$\text{a) } Y(s) = \frac{5(4s + 1)}{s^2 + 4s + 5}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{s - 4}{s(s^2 + 2s + 2)};$$

Вариант № 10

а) $Y(s) = \frac{2s-1}{(s-1)(s-2)^2};$

б) $Y(s) = \frac{10}{s(s-1)^3}.$

Вариант № 11

а) $Y(s) = \frac{6s+1}{(s+1)^2(4s^2+s+1)};$

б) $Y(s) = \frac{(2s+1)s}{(s+1)^2(4s^2+2s+1)};$

Вариант № 12

а) $Y(s) = \frac{5s(s+1)}{(3s^2+6s-24)(2s+1)};$

б) $Y(s) = \frac{6s+5}{(s-2)(s+5)(s+1)}.$

Вариант № 13

а) $Y(s) = \frac{s^2-s+1}{s(s^2-s+5)};$

б) $Y(s) = \frac{2s-1}{s(s^2+2s+5)};$

Вариант № 14

а) $Y(s) = \frac{8(s^2-1)}{(s^2+s-1)(s+1)^2};$

б) $Y(s) = \frac{4s-1}{s(s^2-3s+2)}.$

Вариант № 15

а) $Y(s) = \frac{s(s+3)}{(2s+1)(s+1)^2};$

б) $Y(s) = \frac{24}{s(s^2-s-6)};$

Вариант № 16

а) $Y(s) = \frac{4s+1}{(5s+1)(s^2+1)};$

б) $Y(s) = \frac{(2s+1)s}{(s+1)^2(4s^2+2s+1)}.$

Вариант № 17

а) $Y(s) = \frac{5s(s+1)}{(3s^2+6s-24)(2s+1)};$

б) $Y(s) = \frac{5(2s+1)}{(s+1)(s^2-s+1)};$

Вариант № 18

а) $Y(s) = \frac{5s(s+1)}{(6s+1)^2(9s^2+s+1)};$

б) $Y(s) = \frac{5(3s+1)}{(4s^2+s+1)(s+1)}.$

Вариант № 19

$$\text{a) } Y(s) = \frac{3s}{(4s+1)(8s^2+8s+1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{3s+1}{5(16s^2+4s+1)s};$$

Вариант № 20

$$\text{a) } Y(s) = \frac{2(s+1)}{s(20s^2+12s+1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{5s(s+1)}{9s^2+3s+1}.$$

Вариант № 21

$$\text{a) } Y(s) = \frac{4}{(s+1)(4s^2+s+1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{2s+1}{(s-4)(s-2)^2};$$

Вариант № 22

$$\text{a) } Y(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-1)^3}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{(10s+1)(s-1)}{(5s+1)^2(9s^2+3s+1)}.$$

Вариант № 23

$$\text{a) } Y(s) = \frac{5(4s+1)}{s(9s^2+s+1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{0.5}{s(s^2+s+0.5)};$$

Вариант № 24

$$\text{a) } Y(s) = \frac{6s+1}{(4s+1)^2(4s^2+s+1)}; \quad \text{б) } Y(s) = \frac{5(3s+1)}{(s+1)(4s^2+s+1)}.$$

Практическая работа № 4

Устойчивость линейных систем с обратной связью

Общее задание.

По заданным передаточным функциям определить частотные характеристики (АФХ, АЧХ и ФЧХ).

Пример.

Дана передаточная функция

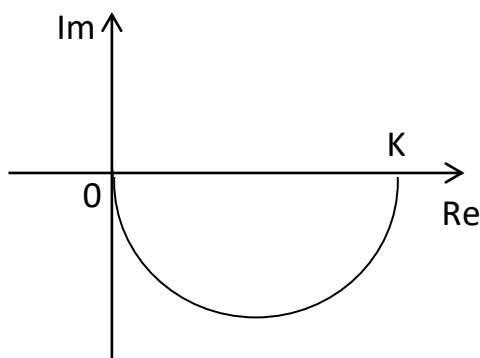
$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}.$$

При $s = j\omega$ имеем:

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{1 + jT\omega} = \frac{K(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \frac{K - j\omega KT}{1 + \omega^2 T^2} =$$

$$= \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{j\omega KT}{1 + \omega^2 T^2} = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega).$$

Изменяя ω от 0 до ∞ , можно построить АФХ (см. рисунок). ♦



Для построения АЧХ и ФЧХ используются формулы:

$$A(\omega) = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}.$$

Формулы получения АФХ по АЧХ и ФЧХ:

$$\text{Re}(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega),$$

$$\text{Im}(\omega) = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega).$$

Варианты заданий.

Вариант № 1

а) $W(s) = 2s$;

б) $W(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)}$

$K=3; T_1=2; T_2=3; T_3=4.$

Вариант № 2

а) $W(s) = 4s^2$;

б) $W(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{(T_2s + 1)^2},$

где $K=3; T_1=2; T_2=3.$

Вариант № 3

а) $W(s) = \frac{1}{s}$;

б) $W(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)^2}$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 4

а) $W(s) = \frac{1}{s^2}$;

б) $W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)^2}$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 5

а) $W(s) = 2s + 1$;

б) $W(s) = \frac{Ks}{(Ts + 1)^2}$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 6

а) $W(s) = 2s - 1$;

б) $W(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^2}$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 7

а) $W(s) = 2 + \frac{1}{s}$;

б) $W(s) = \frac{T_1s + 1}{(T_2s + 1)^2}$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 8

а) $W(s) = 3 - \frac{1}{s}$;

б) $W(s) = \frac{T_1s + 1}{s(T_2s + 1)^2}$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 9

а) $W(s) = -2 + \frac{1}{s}$;

б) $W(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)^2}$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 10

$$a) W(s) = -4 - \frac{1}{s};$$

$$б) W(s) = \frac{s}{(Ts + 1)^2}$$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 11

$$a) W(s) = s + \frac{1}{s};$$

$$б) W(s) = \frac{1}{(Ts + 1)^2}$$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 12

$$a) W(s) = 5s - \frac{1}{s};$$

$$б) W(s) = \frac{Ks}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 13

$$a) W(s) = s^2 + \frac{1}{s};$$

$$б) W(s) = \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 14

$$a) W(s) = 2s^2 - \frac{3}{s};$$

$$б) W(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{(T_2s + 1)}$$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 15

$$a) W(s) = s + \frac{1}{s^2};$$

$$б) W(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 16

$$a) W(s) = s - \frac{2}{s^2};$$

$$б) W(s) = \frac{Ks(T_1s + 1)}{T_2s + 1}$$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 17

а) $W(s) = 6s - \frac{2}{s}$;

б) $W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 18

а) $W(s) = 5s + \frac{3}{s}$;

б) $W(s) = \frac{Ks}{Ts + 1}$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 19

а) $W(s) = 7s^2 - \frac{3}{s}$;

б) $W(s) = \frac{K}{Ts + 1}$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 20

а) $W(s) = 4s^2 + 2s - 1$;

б) $W(s) = \frac{T_1s + 1}{T_2s + 1}$

где $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 21

а) $W(s) = 2s^2 - 3s + 5$;

б) $W(s) = \frac{T_1s + 1}{s(T_2s + 1)}$

где $T_1=2$; $T_2=3$.

Вариант № 22

а) $W(s) = 3s^2 - s$;

б) $W(s) = \frac{s}{Ts + 1}$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 23

$$\text{а) } W(s) = 3s^2 + s; \quad \text{б) } W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

где $K=3$; $T=2$.

Вариант № 24

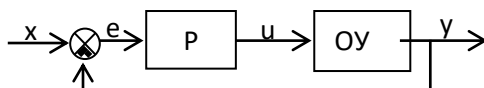
$$\text{а) } W(s) = 7s^2 + \frac{3}{s}; \quad \text{б) } W(s) = \frac{Ks}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

где $K=3$; $T_1=2$; $T_2=3$.

Практическая работа № 5

Синтез системы управления.

Общее задание.



Дана одноконтурная АСР, для которой определена передаточная функция регулятора (Р) с настройками и дифференциальное уравнение объекта управления (ОУ). Требуется определить:

- передаточную функцию разомкнутой системы $W_{\infty}(s)$,
- характеристическое выражение замкнутой системы (ХВЗС),
- передаточные функции замкнутой системы $\Phi_z(s)$ – по заданию,
 $\Phi_b(s)$ – по возмущению, $\Phi_e(s)$ – по ошибке,
- коэффициенты усиления АСР,
- устойчивость системы.

Пример решения задания.

Дан ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 2 + \frac{1}{s}$ и объект управления, описываемый дифференциальным уравнением

$$2 \frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 u}{dt^2} + 4 \frac{du}{dt} + u.$$

Определяется передаточная функция объекта:

$$W_{об}(s) = \frac{s^2 + 4s + 1}{2s^3 + 3s^2 + s}.$$

Тогда передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_{\infty}(s) = W_p(s) \cdot W_{об}(s) = \left(2 + \frac{1}{s}\right) \cdot \frac{s^2 + 4s + 1}{2s^3 + 3s^2 + s} = \frac{2s^3 + 9s^2 + 6s + 1}{2s^4 + 3s^3 + s^2} = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

ХВЗС:

$$D(s) = A(s) + B(s) = 2s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s^3 + 9s^2 + 6s + 1 = 2s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 6s + 1.$$

Передаточные функции замкнутой системы:

$$\Phi_3(s) = \frac{W_{\infty}(s)}{1 + W_{\infty}(s)} = \frac{B(s)}{D(s)} = \frac{2s^3 + 9s^2 + 6s + 1}{2s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 6s + 1} \text{ - по заданию,}$$

$$\Phi_E(s) = \frac{1}{1 + W_{\infty}(s)} = \frac{A(s)}{D(s)} = \frac{2s^4 + 3s^3 + s^2}{2s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 6s + 1} \text{ - по ошибке,}$$

$$\Phi_B(s) = \frac{W_{об}(s)}{1 + W_{\infty}(s)} = \frac{\frac{s^2 + 4s + 1}{2s^3 + 3s^2 + s}}{1 + \frac{2s^3 + 9s^2 + 6s + 1}{2s^4 + 3s^3 + s^2}} = \frac{s^3 + 4s^2 + s}{2s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 6s + 1} \text{ - по}$$

возмущению.

7

По передаточным функциям определяются коэффициенты усиления путем подстановки в них $s = 0$:

$$K_3 = \Phi_3(0) = 1 \text{ - по заданию;}$$

$$K_E = \Phi_E(0) = 0 \text{ - по ошибке;}$$

$$K_B = \Phi_B(0) = 0 \text{ - по возмущению.}$$

Устойчивость АСР определяется по критерию Гурвица.

Поскольку коэффициенты ХВЗС $a_4 = 2$, $a_3 = 5$, $a_2 = 10$, $a_1 = 6$, $a_0 = 1$ (степень полинома $n = 4$), то матрица Гурвица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

(обратите внимание на сходство строк матрицы: 1 с 3 и 2 с 4).

Определители:

$$\Delta_1 = 5 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = 5 * 10 - 2 * 6 = 38 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (5 * 10 * 6 + 6 * 1 * 0 + 2 * 5 * 0) - (0 * 10 * 0 + 5 * 5 * 1 + 2 * 6 * 6) =$$

$$= 209 > 0$$

$$\Delta_4 = 1 * \Delta_3 = 1 * 209 > 0.$$

Поскольку все определители положительны, то АСР **устойчива**. ♦

Варианты заданий.

Вариант № 1

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 4 + \frac{4}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $16 \frac{d^3 y}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} + u$.

Вариант № 2

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 5 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = u$.

Вариант № 3

Р - П-регулятор с ПФ вида $W_p = 0,5$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u$.

Вариант № 4

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 2 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $27 \frac{d^3 y}{dt^3} + 27 \frac{d^2 y}{dt^2} + 9 \frac{dy}{dt} + y = 5u$.

Вариант № 5

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 1 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $8 \frac{d^3 y}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 8u$.

Вариант № 6

Р - П-регулятор с ПФ вида $W_p = 4$;

дифференциальное уравнение ОУ: $\frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} = 2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3 \frac{du}{dt} + u$.

Вариант № 7

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 5 + \frac{5}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $12 \frac{d^3 y}{dt^3} + 10 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = u$.

Вариант № 8

Р - П-регулятор с ПФ вида $W_p = 8$;

дифференциальное уравнение ОУ: $7 \frac{d^3 y}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + 9 \frac{dy}{dt} + y = 5 \frac{du}{dt} + u$.

Вариант № 9

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 4 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + 2y = 4u$.

Вариант № 10

Р - И-регулятор с ПФ вида $W_p = \frac{3}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $2 \frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \frac{d^2 u}{dt^2} + 4 \frac{du}{dt} + u$.

Вариант № 11

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 1 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + y = 2u$.

Вариант № 12

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 1 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $10 \frac{d^3 y}{dt^3} + 7 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 4u$.

Вариант № 13

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 5 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^3 y}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + y = 4u$.

Вариант № 14

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 1 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $25 \frac{d^3 y}{dt^3} + 10 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2u$.

Вариант № 15

Р - И-регулятор с ПФ вида $W_p = \frac{3}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 2 \frac{du}{dt} + u$.

Вариант № 16

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 1 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $10 \frac{d^3 y}{dt^3} + 7 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = 8u$.

Вариант № 17

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 1 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 3u$.

Вариант № 18

Р - П-регулятор с ПФ вида $W_p = 2$;

дифференциальное уравнение ОУ: $3 \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + y = 4 \frac{du}{dt} + u$.

Вариант № 19

Р - П-регулятор с ПФ вида $W_p = 4$;

дифференциальное уравнение ОУ:

$$7 \frac{d^3 y}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + 9 \frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u.$$

Вариант № 20

Р - И-регулятор с ПФ вида $W_p = \frac{3}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + y = u$.

Вариант № 21

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 2 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + y = u$.

Вариант № 22

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 1 + \frac{4}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $16 \frac{d^3 y}{dt^3} + 8 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} + u$.

Вариант № 23

Р - ПИ-регулятор с ПФ вида $W_p = 0,5 + \frac{1}{s}$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = u$.

Вариант № 24

Р - П-регулятор с ПФ вида $W_p = 0,1$;

дифференциальное уравнение ОУ: $4 \frac{d^3 y}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6 \frac{dy}{dt} + y = \frac{du}{dt} + u$.

V. БАНК КЕЙСОВ

Кейс №1: Бетонный завод фирмы «ТЕКА» производит бетон различных марок. В зависимости от заказа, может производить бетон для дорог, бетонных плит, фундаментов, а также песко-бетон для различных отделочных работ. Имеет 5 резервуара, для воды, песка, цемента, щебня и добавки. Весь процесс полностью автоматизирован, и управляется контроллером. Весь процесс контролируется оператором через Персональный Компьютер. В процессе работы возникла проблема. Выходит, ошибка на экране монитора: *«Резервуар воды полный. Освободить резервуар»*. Получается, что по факту резервуар пустой, но сигнал идет что он полный, в итоге автоматический режим не работает. Приходится работать в ручном режиме. Вопрос: Как вы думаете, какие факторы могли повлиять появление такого рода ошибки?

Бетонный завод фирмы «ТЕКА»



Последовательность решения задачи:

Этапы	Задачи для выполнения
1.	Изучите весь технологический процесс
2.	Подробно изучить схему всего производства, а также все устройства
3.	Проверьте работоспособность всех датчиков весов воды, а также прибор, который соединён с весами воды
4.	Проверьте связь между прибором весов воды и контроллером.
5.	Если прибор вышел из строя, замените его новым

	прибором, и повторите всю последовательность и примите самый доступный решения задачи .
--	---

Кейс №2: Сталепрокатный завод производит стальные листы трех различных размеров: 100 дюймов, 80 дюймов и 55 дюймов. Поступил заказ на стальные листы размером 45, 30 и 18 дюймов в количестве 150, 200 и 185 штук соответственно. Каким образом компания должна разрезать стальные листы, чтобы минимизировать отходы? Учтите, что желательно также при раскрое не получать слишком много лишних листов с размерами, заданными данным заказчиком. Приведите наилучшее решение для случая, когда заказанные в этот раз размеры встречаются при заказах довольно часто и для случая, когда полученный заказ совершенно нестандартный.

Последовательность решения задачи:

Этапы	Задачи для выполнения
1.	Изучите весь технологический процесс
2.	Подробно изучите схему управление производства, а также все её устройства
3.	Проверьте работоспособность всех датчиков
4.	Найдите решение для разработки стандартного заказа
5.	Найдите самое оптимальное решения задачи .

Сталепрокатный завод

Сталепрокатный завод						
Вариант раскроя	Лист проката	Размер листа, дюймов			Остаток	Число листов
		45	30	18		
1	100	2	0	0	10	0
2	100	1	1	1	7	0
3	100	1	0	3	1	44
4	100	0	3	0	10	0
5	100	0	2	2	4	0
6	100	0	1	3	16	0
7	100	0	0	5	10	0
8	80	1	1	0	5	106
9	80	1	0	1	17	0
10	80	0	2	1	2	47
11	80	0	1	2	14	0
12	80	0	0	4	8	0
13	55	1	0	0	10	0
14	55	0	1	1	7	0

15	55	0	0	3	1	2
	Получено листов	150	200	185	670	Всего
	Заказ	150	200	185		

Кейс №3: При эксплуатации цеха воденого охлаждения, система автоматики регулирования уровня системы вышла из стабильной работы. Основными причинами неустойчивости приводятся неправильно рассчитанные параметры регулятора.

Задание кейса

1: Проанализируйте систему управления

2: Рассчитайте переходную функцию системы.

Исходные данные:

А) экспериментальная переходная функция ОУ.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$h(t)$	0	0.01	0.1	0.2	0.3	0.38	0.45	0.55	0.68	0.73	0.77	0.8	0.85	0.88	0.9

Этапы работы над ситуацией в аудитории

Этапы	Содержание работы
1-этап	индивидуальное изучение текста ситуации и проанализировать ситуацию.
2-этап	разобраться в сути проблем, выделять варианты правильных и ошибочных решений.
3-этап	работа в составе малой группы, предложить возможные решения и выбрать лучшее из них, обсуждать с членами группы выбирать оптимального решения, принимать коллективные решения.
4-этап	представление «решений» каждой малой группы, общая дискуссия, вопросы, выступление преподавателя, его анализ ситуации.

VI. ГЛОССАРИЙ

Term / Термин	Пояснение на русском	Description in English
Алгоритм / Algorithm	Набор (математических) инструкций или процедур для выполнения конкретной задачи, такие как определение меры, принимаемые системой автоматизации.	A set of (mathematical) instructions or procedures for carrying out a specific task such as defining the steps taken by an automation system.
Барьер / Barrier	Перегородка или разделение, используемый для изоляции или изоляции электрического схемы или электрические дуги (как определено в NEMA Standard Pub. No. ICS 2, 1988).	A partition or separation used for the insulation or isolation of electric circuits or electric arcs (as defined in NEMA Standard Pub. No. ICS 2, 1988).
Бод / Baud	Единица скорости передачи сигналов равно числу дискретных состояний или сигнала событий в секунду. Там, где один бит кодируется на каждой сигнализации события, число бод совпадает с числом бит / с. См дибит (стр).	A unit of signaling speed equal to the number of discrete conditions or signal events per second. Where one bit is encoded on each signaling event, the number of baud is the same as the number of bit/s. See dibit (page).
Булева алгебра / Boolean algebra	Алгебраический метод манипулирования логических уравнений.	An algebraic method of manipulating logic equations.
Газоанализатор / Analyzer	Прибор, предназначенный для получения информации о значении концентрации измеряемого компонента или суммы компонентов в анализируемой газовой смеси.	An instrument designed to obtain information about the value of the concentration of the measured component or the amount of components in the test gas mixture.
Гибкая система управления / Flexible control	Перенастраиваемая в широком диапазоне система управления,	Readjusted in a wide range of control system, created on the basis of electron -

system	создаваемая на базе электронно-вычислительных машин с комплектом программ управления, адресующих сигналы управления приводным механизмам для обеспечения заданных законов движения исполнительных звеньев.	computers with a set of control programs, the address driving mechanisms of control signals for the given laws of motion actuators.
Датчик / Sensor	Средство измерения, преобразующее ту или иную физическую величину (например, температуру, скорость, давление, электрическое напряжение и др.) в сигнал для регистрации, передачи, обработки, хранения этой информации.	Measuring instrument, transforming one or another physical quantity (eg, temperature, velocity, pressure, voltage, and others.) Into a signal for recording , transmission, processing and storage of this information
Двоичный / Binary	Базовая - 2 система нумерации (используя только цифры 0 и 1) .	A base-2 numbering system (using only the digits 0 and 1).
Действительная производительность / Actual performance	Это производительность действующих автоматов и автоматических линий. Реальный уровень технологической, цикловой и фактической производительности характеризует степень реализации замысла проектировщиков линии и может значительно отличаться от проектных значений, а также быть переменным во времени эксплуатации.	This is the performance of existing machines and automatic lines. The actual level of the process, the cycle and the actual performance characterizes the degree of realization of the designers design the line and may significantly differ from the design values, as well as to be variable in the time of operation
Динамическая погрешность / Dynamic error	Это добавочная погрешность измерительного	This extra error transducer that occurs when measuring changes over time parameter .

	преобразователя, возникающая при измерение изменяющего во времени параметра	
Динамической характеристики / Dynamic properties	Такой элемента называется зависимость изменения во времени выходной величины (X _{вых}) в переходном режиме при определенном изменении входной величины.	This element is called the dependence of the change in the output value of time (X out) in transition mode for a certain change in the input variable.
Единичное производство / A single production	Неопределенное множество не повторяющихся операций выполняемых одним исполнителем, Кзо больше 40.	Undefined set of non- recurring transactions carried out by a contractor , for more than 40 QSOs .
Жесткая система управления / Push rod system	Не переналаживаемая или переналаживаемая в узких пределах система управления, создаваемая на базе кинематических цепей машин и механизмов, обеспечивающих заданные законы движения исполнительных звеньев.	Not readjusted or readjusted in a narrow range management system, created on the basis of the machinery of the kinematic chain , providing a predetermined laws of motion actuators.
Завод / Factory	Объединение цехов и участков по видам совместно выпускаемой продукции.	Combining shops and sites by type of co- products.
Запасная батарея / Battery backup	Батарея или набор батарей, которые будут обеспечивать питание памяти только тогда, когда основной источник питания выключен .	A battery or set of batteries that will provide power to memory only when the main power source is off.
Канал / Channel	Путь для сигнала. Несколько каналов могут совместно использовать общую связь.	A path for a signal. Several channels may share a common link
Комбинационная логика / Combinational logic	Логика , в котором состояние каждого выхода контролируется только	Logic in which the state of each output is controlled only by the states of inputs

	состояниями входы и задержки переключения переходов , возникающие в логическом пути . Сравнить последовательной логики	and the switching-transition delays encountered in the logic path. Compare sequential logic
Конкурентоспособность / competitiveness	Это совокупность показателей качества и стоимости товаров, определяющая их предпочтительность для потребителя.	This set of indicators of the quality and value of the goods is determined by their preference for the consumer .
Линия / Line	Расположение оборудования в порядке выполнения операций.	The location of the equipment in the order of operations
Маршрутное описание технологического процесса / Route description of the process	Сокращенное описание всех технологических операций в маршрутной карте в последовательности их выполнения без указания переходов и технологических режимов.	Short description of all process steps in the route map in order of their performance without transitions and technological modes.
Массовое производство / Mass production	Одна операция выполняется одним или несколькими исполнителями в течении всего отчетного периода, меньше 1.	One operation is performed by one or more performers during the reporting period , the is less than 1.
Метод регулирования / Control method	Заключается в достижении точности замыкающего звена за счет регулирования одного или нескольких составляющих звеньев.	It is to achieve the accuracy of the closing level by adjusting one or more of the constituent units .
Механизация / Mechanization	применение энергии неживой природы в производственных процессах, управляемых людьми.	The use of inanimate nature of energy in the production process , controlled by people.
Модифицирование / Modification	Приспособление изделия к новым условиям работы без изменения конструкции:	Device products to the new conditions of work without changing the design : cold-resistant materials , anti-

	хладостойкие материалы, антикоррозионные материалы, дополнительные системы и способы подготовки рабочего тела, специальные покрытия, уплотнения и т.п.	corrosion materials , additional systems and methods for the preparation of the working fluid , special coatings , seals , etc.
Объекты автоматизации / Automation objects	Объекты автоматизации являются объектами СА Process Automation, что дизайнеры используют контент для создания контента. Объекты автоматизации включают в себя календарь, пользовательский значок, пользовательский оператор, набор данных, форма запроса взаимодействия, упаковка, процесс, процесс часы, ресурсы, график, и начать форму запроса.	Automation objects are the CA Process Automation objects that content designers use to create content. Automation objects include calendar, custom icon, custom operator, dataset, interaction request form, package, process, process watch, resources, schedule, and start request form.
Плата (карта) / Board (card)	1) печатная плата. 2) Узел печатных печатных плат – в ощущение, что (печатная) плата физически основным компонентом Печатная плата в сборе .	1) A printed-circuit board. 2) A printed-circuit-board assembly — in the sense that the (printed-circuit) board is physically the main component of a printed-circuit-board assembly.
Пустой блок пространства / Blank unit space	Блок пространство не оборудован , чтобы принять будущий блок (как определено в NEMA Стандартный Pub	Unit space not equipped to accept a future unit (as defined in NEMA Standard Pub. No. ICS 2, 1988).
Раздвоенный / Bifurcated	Что-то, что ответвляется в 2-х ветвей (например, раздвоенная терминал).	Something that branches off into 2 branches (e.g., a bifurcated terminal).
Точка остановки / breakpoint	Точки останова отладки помощи, которая приостанавливает выполнение запущенного процесса на Операторы ,	A breakpoint is a debugging aid that pauses the execution of a running process at the operators that are set with a

	которые устанавливаются с точки останова . Точек останова позволяет дизайнерам контента просмотреть данные и схему последовательности операций процесса для проверки правильного поведения до завершения их изменения.	breakpoint. A breakpoint lets content designers inspect the data and flow of a process to validate the correct behavior before finalizing their changes.
--	---	---

VII. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Каримов И.А. Ўзбекистон мустақилликка эришиш оstonасида. - Т.:“Ўзбекистон”, 2011.

2. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажакимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамыз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.

3. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

4. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон, 2019.

5. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни.

6. Ўзбекистон Республикасининг “Коррупцияга қарши курашиш тўғрисида”ги Қонуни.

7. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПФ-4732-сонли Фармони.

8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.

9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 3 февралдаги “Хотин-қизларни қўллаб-қувватлаш ва оила институтини мустаҳкамлаш соҳасидаги фаолиятни тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5325-сонли Фармони.

10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июндаги “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 11 июлдаги «Олий ва ўрта махсус таълим тизимида бошқарувнинг янги тамойилларини жорий этиш чора-тадбирлари тўғрисида» ги ПҚ-4391- сонли Қарори.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 11 июлдаги «Олий ва ўрта махсус таълим соҳасида бошқарувни ислоҳ қилиш чора-тадбирлари *тўғрисида» ги ПФ-5763-сон фармони.*

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 августдаги

“Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли [фармони](#).

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиqlаш тўғрисида”ги 2018 йил 21 сентябрдаги ПФ-5544-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 майдаги “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 2 февралдаги “Коррупцияга қарши курашиш тўғрисида”ги Ўзбекистон Республикаси Қонунининг қоидаларини амалга ошириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2752-сонли қарори.

17. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сонли қарори.

18. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Олий маълумотли мутахассислар тайёрлаш сифатини оширишда иқтисодиёт соҳалари ва тармоқларининг иштирокини янада кенгайтириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 27 июлдаги ПҚ-3151-сонли қарори.

19. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Нодавлат таълим хизматлари кўрсатиш фаолиятини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 15 сентябрдаги ПҚ-3276-сонли қарори.

20. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Олий таълим муассасаларида таълим сифатини ошириш ва уларнинг мамлакатда амалга оширилаётган кенг қамровли ислохотларда фаол иштирокини таъминлаш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 2018 йил 5 июндаги ПҚ-3775-сонли қарори.

21. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 26 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 278-сонли Қарори.

Основные литературы:

1. Richard C. Dorf., Robert H. Bishop *Modern Control Systems* , Twelfth edition 2010. – 890 с.
2. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.

3. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
4. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
6. К.Ю.Поляков. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2008. - 80 с.

Ресурсы интернета:

1. www.labview.ru
2. www.matlab.com
3. www.ziyonet.uz
4. www.edu.uz