ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ МАРКАЗИ

“АЛГЕБРАИК ТИЗИМЛАР”

модули бўйича

Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тузувчи: **А.Х.Худойбердиев**

Тошкент 2019

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

**«Тасдиклайман»
Тармок (минтакавий)
маркази директори
И.Х.Хамиджонов
____
_________ 2019 йил**

“АЛГЕБРАИК ТИЗИМЛАР”
МОДУЛИ БЎЙИЧА

ИШЧИ ЎҚУВ ДАСТУРИ

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси йўналиши: Математика

Тингловчилар контингенти: Олий таълим муассасаларининг профессор-ўқитувчилари

Тошкент – 2019

Мазкур ишчи дастур Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йилнинг 2 ноябрдаги 1023 - сонли буйруги билан тасдиқланган намунавий ўқув режа ва дастур асосида ишлаб чиқилган

Тузувчи:	ЎзМУ, ф-м.ф.н., профессор А.Х.Худойбердиев
Тақризчи:	ЎзМУ, ф-м.ф.н., доцент Э.П.Норматов

Ишчи ўқув дастур ЎзМУ нинг Кенгашининг 2019 йил 29 августдаги 1 - сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган

КИРИШ

Дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли, 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сонли Фармонлари, шунингдек 2017 йил 20 апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ–2909-сонли қарори ҳамда 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789 – сонли Фармонида белгиланган устувор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини такомиллаштиришни мақсад қилади.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг катталиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизимини самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ва амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет элнинг илғор тажрибаларни ўрганиш ва илмий-тадқиқот натижаларини таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидар. «Алгебраик тизимлар» модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

«Алгебраик тизимлар » курсининг мақсади тингловчиларни замонавий алгебраик тизимлар ва уларни ўқитишнинг замонавий технологиялари, таълимдаги инновациялар билан таништириш ва ана шу инновациялар ва технологиялардан маҳорат билан фойдаланиш малакасини шакллантиришдир.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“**Алгебрик тизимлар**” **модулининг мақсади:** математика йўналиши бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курс тингловчиларини алгебранинг ривожланаётган замонавий соҳаларини ўқитишдаги замонавий педагогик ва инновацион технологиялар, модулли технологиялар ҳақидаги билимларини такомиллаштириш, бу борадаги муаммоларни аниқлаш, таҳлил этиш ва баҳолаш. Илмий тадқиқот натижаларини ўрганиш ва амалда қўллаш кўникма ва малакаларини шакллантириш.

“Алгебрик тизимлар” модулининг вазифалари:

- Тингловчиларга математиканинг янги илмий йўналишлари ва бу соҳалардаги олинган натижалар таҳлили, келиб чиқиш тарихи тўғрисида маълумотлар бериш, замонавий модулли технологияларидан фойдаланиб тингловчиларни мазкур йўналишда малакасини оширишга кўмаклашиш;
- Таълим-тарбия жараёнида модулли технологияларни қўллашнинг афзалликларини ёритиш ва тингловчиларда улардан фойдаланиш технологиялари билан таништириш;
- Математиканинг ривожланиш тенденцияларини таҳлил этиш ва юксак малакали мутахассис кадрлар тайёрлаш борасидагиислоҳотларни амалга ошириш жараёнида илғор хориж тажрибасини ўрганиш, улардан самарали фойдаланиш маҳоратини шакллантиришдан иборат.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

“**Алгебрик тизимлар**” модулини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

- модуль,ўқитиш модулли, кредит,рейтинг тушунчаси;

-технологиялаштириш қоидалари, тамойиллар;

-назорат жараёнини ташкил этиш;

-интерфаол технологиялар ва улардан самарали фойдаланиш ҳақида **билимларга эга бўлиши**;

Тингловчи:

-педагогик фаолият жараёнини модуллаштириш;

-назорат жараёнини тез ва самарали ўтказа олиш;

-назоратнинг турли шаклларидан самарали фойдаланиш;

-интерфаол методларни мақсадли равишда тўғри танлаш ва фойдаланиш;

кўникмаларини эгаллаши;

Тингловчи:

-ўқув курсини модулини тузиш;

-ахборотни структуралаштириш;

-талабаларнинг мустақил амалий фаолиятни ташкил этиш;

-кириш ва чиқиш назоратини ташкил этиш эришилган натижаларини таҳлил этиш;

-интерфаол методлардан фойдаланиш;

малакаларини эгаллаши;

Тингловчи:

-ўз соҳасига оид ахборотни мантиқий блокларга ажратиш ва аниқ, лўнда, тушунарли равишда баён этиш;

-модулли ёндашув асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;

-технологик ёндашув асосида таълим ва тарбия жараёнини бошқариш;
-коммуникативликни ва мустақил фаолиятни ташкил этиш юзасидан **компетенцияларни эгаллаши лозим.**

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“**Алгебрик тизимлар**” модули маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари ва илмий ютуқларни қўллаш назарда тутилган:

Назарий машғулотларда замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан фойдаланилади;

Ўтказиладиган амалий машғулотларда ва кўчма машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“**Алгебрик тизимлар**” модули ўқув режадаги биринчи блок ва мутаххасислик фанларининг барча соҳалари билан ўзвий боғланган ҳолда педагогларнинг умумий тайёргарлик даражасини оширишга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар алгебранинг асосий мавзулари бўйича таълим жараёнини ташкил этишда технологик ёндашув асосларини ва бу борадаги илғор тажрибани, илмий ютуқларни ўрганадилар, уларни таҳлил этиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

МОДУЛНИНГ МАЗМУНИ

Алгебрани ўқитишда ишлатиладиган мавжуд амалий дастурлар, уларнинг бўлимлари, уларнинг ишлатилиши, Maple, Matematica, mathcard пакетлари. Математик дастурлар пакети Maple ёрдамида алгебрадан дарсларни ташкил қилиш. Алгебрадаги асосий тушунчаларни ва таърифларни киритиш методикаси, улардан фойдаланиш, уларнинг таҳлили. Акслантиришлар. Группалар. Қисм группалар. Нормал қисм группалар. Изоморфизм. Гомоморфизм. Халқа. Халқанинг умумий хоссалари. Халқанинг идеаллари. Майдон ва унинг хоссалари. Чекли майдон. Банах алгебраси. Гомоморфизмлар. Коммутатив Банах алгебралари. Спектр ва резольвента. Идеаллар. Гелъфанд тасвирлари. С* алгебралар. Алгебраларнинг турлари ва уларнинг таснифлаш усуллари; бунда математиканинг амалий дастурлар пакетидан фойдаланиш. Алгебра ва сонлар назариясининг классик муаммолари ва ҳозирги кундаги долзарб масалалари. Замонавий алгебра муаммолари бўйича сўнгги йилларда хорижда ва республикамизда ўрганилаётган долзарб муаммолар ва уларнинг ечимларининг таҳлили.

“Алгебрик тизимлар” модул бўйича соатлар тақсимоти

№	Модул мавзулари	Аудитория		
		Жами	жумладан	
			Назарий	Амалий
1.	Группалар.	6	2	4
2.	Ҳалқа ва майдонлар.	6	2	4
3.	Ҳалқалар гомоморфизмлари.	4	2	2
	Жами 16 соат	**16**	**6**	**10**

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙМАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу Группалар.

Группалар. Бинар амал. Ярим группа. Моноид. Группа. Группа турлари. Қисм группа. Қисм группа бўйича қўшни синфлар. Циклик группалар. Нормал қисм группалар. Фактор группа. Группа гомоморфизми ва изоморфизми. Группалар гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теоремалар. Группанинг тўпламдаги таъсири. Орбита. Стационар қисм группалар.

2-Мавзу: Ҳалқа ва майдонлар.

Ҳалқа ва майдонлар. Ҳалқа ва майдон тушунчаси. Ҳалқа турлари. Қисм-ҳалқа. Қисм-майдон. Ҳалқа чап ва ўнг идеаллари. Чекли хосил қилинган идеаллар. Бош идеал. Бош идеаллар ҳалқаси.. Фактор ҳалқалар.

3-Мавзу: Ҳалқалар гомоморфизмлари

Ҳалқалар гомоморфизмлари. Ҳалқа гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема. Идеал турлари. Чекли майдонлар ва уларнинг татбиқлари..

Ўқитиш шакллари

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва тушунчаларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (кўрилаётган лойиҳа ечимлари бўйича таклиф бериш қобилиятини ошириш, эшитиш, идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);
- баҳс ва мунозаралар (масалалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Каримов И.А. Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида. -Т.: “Ўзбекистон”. 2011. - 440 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб ҳалқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

4. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон. 2018.
5. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни.
6. Ўзбекистон Республикасининг “Коррупцияга қарши курашиш тўғрисида”ги Қонуни.
7. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПФ-4732-сонли Фармони.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.
9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 3 февралдаги “Хотин-қизларни қўллаб-қувватлаш ва оила институтини мустаҳкамлаш соҳасидаги фаолиятни тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5325-сонли Фармони.
10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июндаги “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий

университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 11 июлдаги «Олий ва ўрта махсус таълим тизимига бошқарувнинг янги тамойилларини жорий этиш чора-тадбирлари тўғрисида »ги ПҚ-4391- сонли Қарори.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 11 июлдаги «Олий ва ўрта махсус таълим соҳасида бошқарувни ислоҳ қилиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПФ-5763-сон Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги 2018 йил 21 сентябрдаги ПФ-5544-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 майдаги “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 2 февралдаги “Коррупцияга қарши курашиш тўғрисида”ги Ўзбекистон Республикаси Қонунининг қоидаларини амалга ошириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2752-сонли Қарори.

17. Ўзбекистон Республикаси Президентининг "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сонли Қарори.

18. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Олий маълумотли мутахассислар тайёрлаш сифатини оширишда иқтисодиёт соҳалари ва тармоқларининг иштирокини янада кенгайтириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 27 июлдаги ПҚ-3151-сонли Қарори.

19. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Нодавлат таълим хизматлари кўрсатиш фаолиятини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 15 сентябрдаги ПҚ-3276-сонли Қарори.

20. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Олий таълим муассасаларида таълим сифатини ошириш ва уларнинг мамлакатда амалга оширилаётган кенг қамровли ислоҳотларда фаол иштирокини таъминлаш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 2018 йил 5 июндаги ПҚ-3775-сонли Қарори.

21. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 26 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 278-сонли Қарори.

Ш. Махсус адабиётлар

22. Sadullaev A. Pluripotential theory. Application. Palmarium academic

publishing. Germany. 2012

23. Brian S. Tomson Theory of integral. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, British Columbia 2012

24. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-нашри, 1-қ.- М.,”Наука”, 1976.

25. Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Х. Комплекс анализ. (маърузалар). – Т.,”Университет” ,1998.

26. Тўйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К. Дополнительные главы анализа. «Университет», Ташкент 2015.

27. Туйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К., Джумабаев Д.Х., Китманов А.М., Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанидан мустақил ишлар, Т. “Мумтоз сўз”, 2018.

28. Садуллаев А., Худойбергангов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм (комплекс анализ).- Т., “Ўзбекистон”, 2000.

29. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3-нашри. – М. “Наука”, 1975.

30. Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Сборник задач по теории аналитических функций, 2-нашри. –М., “Наука” 1972.

31. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-нашри. –М., ”Наука”, 1973.

32. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М. “Наука”, 1976.

33. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

34. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

35. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.

36. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length (n–1) and their derivations. // Journal of Algebra. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488.

37. Barnes D.W. On Levi's theorem for Leibniz algebras. // Bull. Austr. Math. Soc., – 2012. - Vol. 86. - № 2. – P. 184-185.

IV. Интернет сайтлар

38. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги: www.edu.uz.

39. Бош илмий-методик марказ: www.bimm.uz

40. www. Ziyonet. Uz

41. www.arxiv.org

42. www.ams.mathscinet.org

43. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm/

44. http://www.ruscommech.ru/

45. http://www.knigapoisk.ru/book

46. www.natlib.uz
47. www.twirpx.com

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДИ.

“SWOT-таҳлил” методи.

Методнинг мақсади: мавжуд назарий билимлар ва амалий тажрибаларни таҳлил қилиш, таққослаш орқали муаммони ҳал этиш йўлларни топишга, билимларни мустаҳкамлаш, такрорлаш, баҳолашга, мустақил, танқидий фикрлашни, ностандарт тафаккурни шакллантиришга хизмат қилади.

S	Алгебраик тизимга тегишли усуллардан фойдаланишнинг кучли томонлари	Алгебраик системалар яъни аниқ ечимларини топиш имкониятини беради.
W	Алгебраик тизимга тегишли усуллардан фойдаланишнинг кучсиз томонлари	Алгебраик системаларнинг ечимларини ўрганишда ҳар доим ҳам қўллаб бўлмайди.
O	Алгебраик тизим фанининг усулларидан фойдаланиш имкониятлари	Ҳар доим ҳам умумий ечимни аниқлаб бўлмасада, алгебраик усуллари ёрдамида хусусий ечимларни аниқлаш имконияти мавжуд.
T	Тўсиқлар (ташқи)	Алгебраик усулларни эркинлик даражаси юқори бўлган тизимларга қўлланилганда таҳлил қилишнинг мураккаблиги.

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-МАЪРУЗА. Группалар.

РЕЖА:

1. Группа ва унинг асосий хоссалари. Мисоллар.
2. Қисм группа, циклик группалар.
3. Нормал қисм группа, Группаларнинг гомоморфизми.

Таянч сўзлар: ***группа, бинар муносабат, ярим группа, коммутатив группа, тривиал группа, моноид, гомоморфизм, мономорфизм, эпиморфизм, изоморфизм.***

Берилган $M\neq\emptyset$ тўпламда бинар муносабат бирор α: $M\times M\rightarrow M$ акслантириш ёрдамида аниқланиб, ҳар бир (x, y) $(x, y\in M)$ жуфтлик учун $z=\alpha(x, y)\in M$ элемент мос қуйилади. Одатдабинарамали$\circ$, $\times$,$\cdot$, $\bullet$, …, кабибелгиларбиланифодаланади, мисолучун$z=x\circ y$.

Агар M тўпламда аниқланган бинарамали “$\circ$“ ассоциативлик шартини қаноатлантирса, яъни

$$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\quad \forall x, y, z\in M,$$

у ҳолда $(M, \circ)$ жуфтлик ярим группа дейилади.

Агар $(G, \circ)$яримгруппада қуйидаги шартлар бажарилса, у холда у группа дейилади:

(G1) $\exists$нейтрал элементнинг мавжудлиги, яъни $\exists\ e\in G$, $\forall g\in G$ учун

$$g\circ e = e\circ g = g;$$

(G2) $\forall g\in G$ элемент учун, тескари элемент деб аталувчи $g\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g=e$ шартни қаноатлантирувчи элементнинг мавжудлиги.

Ҳар қандай G группа ягона нейтрал элементга эга ва ҳар бир $g\in G$ учун ягона тескари элемент мавжуд.

Группада қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$(g^{-1})^{-1}=g$, $\quad (g_1\circ g_2\circ \ldots \circ g_k)^{-1}=g_k^{-1}\circ g_{k-1}^{-1}\circ\ldots \circ g_1^{-1}$.

Группа элементининг бутун даражасини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$g^n=g \circ g \circ \dots \circ g$ (n - марта),

$g^{-n}=g^{-1}\circ g^{-1}\circ \dots \circ g^{-1}=(g^n)^{-1}$, $n\in N$,

$g^0=e$, $g^n\circ g^m=g^{n+m}$, $(g^n)^m=g^{n+m}$, $n, m\in Z$.

Группанинг айрим элементлари учун $g \circ f \neq f \circ g$. Агар $g \circ f = f \circ g$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда f ва g элементлар ўрин алмашувчан дейилади.

Агар G группанинг ихтиёрий икки элементи ўриналмашувчан бўлса, у ҳолда G группа коммутатив ёки Абел группаси дейилади.

Группада амал баъзан · белги (агар группа Абел группаси бўлса + белги) билан ифодаланади ва кўпайтириш амали (қўшиш) дейилади. Группанинг нейтрал элементи бир (нол) дейилади, мос равишда 1 (ёки 0) билан белгиланади, бунда группа мультипликатив (аддитив) дейилади.

Аддитив группда a элементга тескари элемент қарама-қарши элемент дейилади ва – a каби белгиланади, a^n ўрнига na ёзилади, $n\in Z$.

Аддитивгруппаларгамисоллар

(Z, +), (Q, +), (R, +), (C, +) – аддитивгруппаларбўлади.

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўпҳадлар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

M(n, R) $n\times n$ матрицалар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади

R_n чизиқли фазо қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

C[a, b] – [a, b] кесмада аниқланган узлуксиз функциялар қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

Мультипликатив группаларга мисоллар

$Q^* = Q\backslash\{0\}$, $R^* = R\backslash\{0\}$, $C^* = C\backslash\{0\}$ – кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа.

M(n, R) детерминанти нолдан фарқли бўлган $n\times n$ матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа бўлади.

Бизасосан Gгруппанимультипликатив группа сифатидаўрганамиз.

Чекли группа учун $n=|G|$ сони G группа тартиби дейилади.

$E=\{e\}$ группанингтартибибиргатенг, у бирёкитривиалгруппа дейилади.

Чексизэлементлигруппанингтартибичексиз, яъничексизтартибли группа дейилади.

Фаразқилайлик, M, N – G группанингқисмтўпламларибўлсин. Қуйидагибелгилашларникиритамиз:

$$M^{-1}=\{m^{-1} : m\in M\}; \qquad MN=\{mn : m\in M, n\in N\}.$$

2. Қисм группа, циклик группалар.

G группанинг H қисм тўплами, G да аниқланган амалга нисбатан группа ташкил қилса, H тўплам G группанинг қисм тўплами дейилади.

Қуйидаги муносабатлар ўринли:

$(H \subset G$ қисм группа$) \Leftrightarrow (e \in H, HH \subset H, H^{-1}\subset H) \Leftrightarrow (e \in H, HH = H, H^{-1} = H)$.

Қисм группани қуйидагича белгилаймиз: $H \le G$.

Агар $H \le G$ ва $H \neq \{e\}$, $H \neq G$ бўлса, у ҳолда H хос қисмгруппа дейилади ва $H < G$ каби белгиланади.

Теорема 1.Ихтиёрийсондагиқисмгруппаларкесишмасиянақисм группа бўлади.

$M\subseteq G$ бўлсин.

Таъриф.$Mg=\{mg : m\in M\}$ тўплам M тўпламнинг $g\in G$биланўнггасурилишидейилади, $gM=\{gm : m\in M\}$ тўплам M тўпламнинг $g\in G$биланчапгасурилишидейилади.

$H \le G$ бўлсин, у ҳолда Hg – G группанинг H қисм группадаги ўнг қўшни, gH – чап қўшни синфлари дейилади, g элемент Hg ва gH учун вакил дейилади.

Маълумки, $g=eg=ge \in Hg \cap gH$ ва

$$Hg_1=Hg_2 \text{ ёки } f_1H=f_2H \Leftrightarrow \exists\ h_1, h_2\in H:\ g_2=h_1g_1,\ f_2=f_1h_2.$$

Ўнг ва чап қўшни синфлар кесишмаси бўш бўлмаслиги мумкин, аммо бир томонли қўшни синфлар Hg_1 ва Hg_2 (ёки f_1H ва f_2H) ёки устма-уст тушади ёки кесишмайди.

Ихтиёрий қисм группа бир вақтда чап ва ўнг қўшни синф бўлади: H=eH=He, аммо қўшни синфлар орасида бошқа қисмгруппалар мавжуд эмас. Барча қўшни синфлар бир хил кувватга эга- |H|.

Теорема 2. Ҳар хил бир томонли қўшни синфлар тўпламининг қуввати |G : H| томонларнинг танланишига боғлиқ эмас.

Ушбу |G:H| қиймат H қисмгруппанинг G группадагииндексидебюритилади.

Чеклииндексларқуйидагихоссаниқаноатлантиради:
агар $K \leq H \leq G$, у ҳолда |G:H| |H:K| = |G:K|.

Хусусан, Лагранж теоремасиўринлидир.

H –G чеклигруппанингқисмгруппасибўлсин, у ҳолда

$$|G|=|H|\ |G:H|.$$

G – группа берилганбўлсин, $g, h\in G$.

$gh= hgh^{-1}\in G$ элемент h элемент ёрдамидаg элементгақўшмадейилади.

g_1ваg_2элементлар учун $\exists$ $h\in G$ элемент топилиб, $g_1h=g_2$бўлса, g_1элемент g_2элементнинг G группадагиқўшмасидейилади. У ҳолда g_2 элемент g_1элементгақўшмабўлади: чунки $g_1=g_2h^{-1}$.

Тасдиқ.Қўшмаликмуносабати – G группа элементларинингэквивалентликмуносабатидир.

Исбот: $g=ge$, $g_1h=g_2 \rightarrow g_2=g_1h$, $g_1h=g_2$, $g_2k=g_3 \rightarrow g_1h_k=g_3$. □

G группа элементлари ўзаро кесишмайдиган [g] эквивалентлик синфларга ажралади, бу синфлар қўшмалик синфлари деб юритилади. Уларнинг ичида битта элементли [e] синф ҳам мавжуд.

GАбель группаси$\Leftrightarrow$унингбарчақўшмаликсинфларибиттаэлеменлидир.

$M\subseteq G$ бўлсин. $Mg=\{mg \mid m\in M\}$ тўплам $g\in G$элемент ёрдамида тузилган M нинг қўшма тўплами дейилади.

$g\in G$ элемент $h\in G$ элементни марказлаштиради дейилади, агар $hg=h$, яъни $gh=hg$.

$M\subseteq G$ қисмтўпламнингмарказлаштирувчиси (централизатори) $CG(M)$ қуйидагичааниқланади:

$$CG(M)=\{ g\in G : gm=mg \forall m\in M\}.$$

Агар $M=G$ бўлса, у ҳолда $C(G)= CG(M)$ қисм группа G группа маркази дейилади.

$g\in G$ элемент $M\subseteq G$ қисм тўпламни нормалаштиради дейилади, агар$Mg=M$, яъни $\forall m\in M : mg\in M$ и $\forall m1\in M \exists m2\in M : m2g=m1$.

$M\subseteq G$ қисмтўпламнингнормализатори $NG(M)$ қуйидагичааниқланади:

$NG(M)=\{ g\in G : Mg=M\}$.

$NG(M)$ – G нингқисмгруппасидир.

Тасдиқ. $H \le G \Rightarrow H \le NG(H)$ ва $CG(M) \le NG(M)$.

Исбот: $h\in H \Rightarrow Hh=hHh^{-1}\subset H$ ва $\forall x\in H$ учун $x=h(h^{-1}xh)h^{-1}$, яъни

$$\exists\ y = h^{-1}xh\in H : x= h\text{-}1yh=yh.$$

Демак $Hh=H$. $h\in CG(M) \Rightarrow mh=m \ \forall m\in M \Rightarrow Mh=M \Rightarrow h\in NG(M)$. □

2-МАЪРУЗА. Ҳалқа ва майдонлар.

РЕЖА:

1. Ҳалқа тушунчаси. Қисм ҳалқалар
2. Ҳалқанинг турлари
3. Майдон. Қисм майдонлар

Таъриф. Бўш бўлмаган К тўпламда иккита алгебраик (бинар) амал: + (қўшиш) ва * (кўпайтириш)аниқланган бўлиб, қуйидаги

(К1) (К,+) – Абел группа;

(К2) (К,*) – яримгруппа;

(К3) $(a+b)* c=a* c+b* c,\ c* (a+b)=c* a+c* b,\ \forall a,b,c\in K$.

шартлар бажарилса, К *ҳалқа* деб юритилади.

Ушбу (К,+) структура (ёки тизим)ҳалқанинг*аддитив группаси,* (К,*) эса*мультипликатив яримгруппасидейилади.*

Агар (К,*) *моноид*(бирли яримгруппа)бўлса (К,+,*) *бирли ҳалқа* дейилади.

Майдоннинг бирлик элементи одатда 1 билан белгиланади. Баъзан бирлик элементнинг мавжудлиги майдоннинг таърифида талаб этилади.

Айрим назарияларда ҳалқанинг таърифида (К2) аксиома қатнашмайди, ёки (К2) аксиома бошқа бирор аксиома билан алмаштирилади. Бундай ҳолларда ҳалқа *ноассоциатив ҳалқа* деб юритилади.

Биз асосан одатдаги (ассоциатив) ҳалқаларни ўрганамиз.

К ҳалқанинг L қисм тўплами *қисмҳалқа* дейилади, агар $x, y\in L \Rightarrow x\text{-}y\in L$ и $x\cdot y\in L$.

Ихтиёрий сондаги қисмҳалқалар кесишмаси қисмҳалқа бўлади. Натижада, бирор $T\subset K$ қисмтўпалам ёрдамида ҳосил қилинган $<T>\subset K$ қисмҳалқа тўғрисида гапириш мумкин, бу қисмҳалқа T ни ўз ичига олувчи барча қисмҳалқаларнинг кесишмасидир. Агар T –яримҳалқа бўлса, у ҳолда $<T>=T$.

К ҳалқа*коммутатив*дейилади, агар $xy=yx$, $\forall x, y\in K$ бўлса.

Мисоллар. 1) (Z,+,·). m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами m**Z, Z** нинг қисмҳалқаси бўлади;

2) (**Q**,+,·) – рационал сонлар ҳалқаси;

3) (**R**,+,·) – ҳақиқий сонлар ҳалқаси. **Z** ва **Q** тўпламлар **R** нинг бирлик яримҳалқасидир;

4) $M_n(\mathbf{R})$–**R** майдонустида аниқланган nxn матрицалар ҳалқаси, бирли ҳалқа бўлади. n> 1 да$M_n(R)$ - нокоммутатив, $M_n(Q)$, $M_n(Z)$ – яримҳалқа;

5) **К**коммутатив ҳалқаустида аниқланган nxn матрицалар $M_n(\mathbf{K})$ ҳалқаси,

6) Функциялар ҳалқаси. X –ихтиёрий тўплам, **К**- ҳалқа. Барча f: $X\rightarrow\mathbf{K}$ функциялар $K^x=\{f: X\rightarrow\mathbf{K}\}$ тўплами f+g*йиғинди*ваfg кўпайтма:

$$(f+g)(x)=f(x)\oplus g(x),\ (fg)(x)=f(x)\otimes g(x),$$

амалларига нисбатан ҳалқа бўлади, бу ерда $\oplus$, $\otimes$– **К** ҳалқадаги амаллар.

Агар 0 ва 1**К**ҳалқанинг нол ва бирлик элементи бўлса, у ҳолда 0_x: $x\rightarrow 0$ ва 1_x: $x\rightarrow 1$ –ўзгармас функциялар K^x ҳалқанинг ноли ва бири бўлади.

Агар К –коммутатив бўлса, у ҳолда K^x – коммутатив.

Агар К=**R**ёкиX=[0.1] бўлса, $K^x = \mathbf{R}^{[0.1]}$ –[0; 1] да аниқланган барча ҳақиқий функциялар ҳалқасидир. У ўз ичига қуйидаги қисмҳалқаларни олади:

B[0.1] – барча чегараланган ҳақиқий функциялар ҳалқаси;

C[0.1] – барча ҳақиқий узлуксиз функциялар ҳалқаси.

$x \to a \in R, \forall x \in X$ўзгармас функцияларR ҳалқага изоморф бўлган яримҳалқа ҳосил қилади.

7) ихтиёрий (A,+) аддитив группадаушбу $xy=0, \forall x,y \in A$ кўпайтириш амалини киритиш мумкин. Натижада, *кўпайтма нол бўлган ҳалқа* ҳосил бўлади. Хоссалари:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, $\forall a \in K$;
2. $a+0=a \Rightarrow a(a+0)=aa \Rightarrow a^2+a\cdot 0=a^2 \Rightarrow a\cdot 0=0$ (шунга ўхшаш $0\cdot a=0$);
3. $0=1 \Rightarrow a=a\cdot 1=a\cdot 0=0, \forall a \in K$, яъни K={0}. Натижада, нетривиал ҳалқа учун $0 \neq 1$.
4. (-a)b=a(-b)=-(ab).

Исбот. $0= a\cdot 0=a(b-b)=ab+a(-b) \Rightarrow a(-b)=(-ab)-(-a)=a \Rightarrow (-a)(-b)=ab$. □

5. Дистрибутивликнинг умумий қонуни:

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ (индукцияга кўра).

Хусусан, $n(ab)=(na)b=a(nb), \forall n \in \mathbf{Z}$.

Z, **Q**, **R**, **C** ҳалқаларда $ab=0 \Rightarrow a=$ёки $b=0$, аммо

а) $M_n(R)$ҳалқа$ab=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$;

в) Z_4ҳалқада $2 \otimes 2=0$;

с) R^2ҳалқада (1,0)(0,1)=0 ва б.

Фараз қилайлик К- ҳалқа, L – идеал бўлсин. K/Lнинг элементлари a+L қўшни синфлардир, $a \in K$ (L модул бўйича қолдиқ синфлар дейилади).

Қўшиш: $(a+L) \oplus (b+L)=(a+b)L$, $-(a+L)=-a+L$.

Кўпайтириш: $(a+L)\otimes(b+L)=ab+L$.

Кўпайтиришнинг корректлиги: $a`=a+x$, $b`=b+y$, $x, y\in L$ $a`b`=ab+ay+xb+xy=$ $=ab+z$, бу ерда $z=ay+xb+xy\in L$, чунки L – идеал, яъни $a`b`$ битта ab нинг қўшни синфига тегишлидир. □

$\bar{a} = a+L \Rightarrow \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a} \otimes \bar{b} = \overline{a\cdot b}$.

Хусусан, $\bar{0}=L$, $\bar{1}=1+L$ (агар 1 мавжуд бўлса).

K/L учун ҳалқанинг барча хоссалари осон текширилади.

Шундай қилиб $\pi : a\to \bar{a}$ акслантириш $K\to K`=K/L$ эпиморфизм бўлади ва $Ker\pi=L$.

Тасдиқ. K ҳалқанинг ихтиёрий гомоморф образи, L= kerf идеал бўйича тузилган K/ ker f фактор ҳалқага изоморфдир.

Исбот. Агар $f : K \to K`$ гомоморфизм бўлсин. У ҳолда $f(K) \subset K`$ ни K` сифатида қараймиз: $K`=f(K)$, яъни f – эпиморфизм. L=Ker f бўлсин ва $\bar{K}=K/L$. У ҳолда $a`\in K` \Leftrightarrow a+L= \bar{a}$, бунда $a`=f(a)$ акслантириш K` ва $\bar{K}$ ҳалқалар изоморфизимини ҳосил қилади:

$\alpha(\bar{a} \oplus \bar{b})=\alpha(\overline{a+b})= =f(a+b)=f(a)+f(b)=\alpha(\bar{a})+\alpha(\bar{b})$.

$$\alpha(\bar{a}\otimes \bar{b})=\alpha(\bar{a}\,\bar{b})=f(ab)=f(a)f(b)=\alpha(\bar{a})\cdot\alpha(\bar{b}),$$

яъни α – гомоморфизм, $\alpha(\bar{K})=f(K)=K`$. Демак, $\alpha$ - эпиморфизм. Агар $\alpha(\bar{a})=\bar{0}$ бўлса, у ҳолда $f(a)=0$, яъни $a\in L=Ker f= \bar{a} = \bar{0}$ . Демак, $\alpha$-мономорфизм. Натижада, $\alpha$ акслантириш $K`=f(K)$ ва K/L фактор ҳалқа орасида изоморфизмдир, яъни K ҳалқанинг ихтиёрий гомоморф образи, L= kerf идеал бўйича тузилган K/ ker f фактор ҳалқага изоморфдир. □

Теорема. *(ҳалқанинг гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема)* K ҳалқанинг ихтиёрий L идеали K/L фактор тўплам устида ҳалқанинг структурасини аниқлайди, бунда K/L фактор ҳалқа K ҳалқанинг ядроси L бўлган гомоморфизмнинг образи бўлади. Тескариси, K ҳалқанинг ҳар бир гомоморф образи $K`=f(K)$ ушбу K/ker f фактор ҳалқага изоморфдир.

Таъриф. K ҳалқа бўлсин. Агар $a, b\in K$, $a\neq0$, $b\neq0$ учун $ab=0$ бўлса, у ҳолда *a* нолнинг *чап*, *b* эса *ўнг* бўлувчиси дейилади. Коммутатив ҳалқада эсааа ва *b нолнинг бўлувчилари* дейилади.

Ихтиёрий $K\neq 0$ ҳалқада, 0 нол элемент нолнинг (тривиал) бўлувчиси бўлади.

Нолнинг нолдан фарқли бўлувчиси бўлмаган $1\neq 0$ бирли коммутатив ҳалқа *бутунли ҳалқа* дейилади.

Теорема.Бирли нотривиал коммутатив K ҳалқа бутунлик соҳаси бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар ҳалқада *қисқартириш қонуни* ўринли бўлса:$ab=ac,\ a\neq 0 \Rightarrow b=c,\ \forall a, b, c \in K$.

Мисол.$s=\{x=(x_1,x_2, \ldots, x_n, \ldots),\ x_i\in \mathbf{R}\}$ – ҳақиқий сонлардан тузилган кет-кетликлар фазоси ва K – барча $a: s \to s$ чизиқли акслантиришлар ҳалқаси бўлсин. s да амаллар координаталар бўйича аниланган. Kҳалқада қўшиш ва операторларсуперпозицияси (композицияси) амалларини қуйидагича аниқлаймиз: $(a_1\oplus a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x)$, $(a_1\otimes a_2)(x)=a_2(a_1(x))$, $x\in s$.

$a_i : s\to s$операторлар қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

$$a_2: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ldots).$$

У ҳолда,

$$a_1\otimes a_2 :x=(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ldots) \to (0, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

$$a_2\oplus a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

яъни$a_2\oplus a_1=1$ –айний оператор.

Демак, $a_1\oplus a_2\neq 1$, $a_2\oplus a_1=1$, яъниa_1ўнг (чап бўлмаган), a_2эса чап (ўнг бўлмаган) K даги бирнинг бўлувчиларидир.

$M_n=M_n(\mathbf{R})$ матрицалар ҳалқасида тескариланувчан элнментлар, бу тескариланувчан матрицалардир(яъни нолдан фарқли детерменинантга эга бўлган марицалар). Тескариланувчан элемент нолнинг бўлувчиси бўлаолмайди:

$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow (a^{-1}a)b=0 \Rightarrow b=0$, (шунга ўхшаш, $ba=0 \Rightarrow b=0$).

Теорема.Бирли элементли **K** ҳалқанинг тескариланувчан элементлари тўплами кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил этади(ушбу группа

U(K) каби белгиланади) .

Изоҳ. $M_n(\mathbf{R})$ ҳалқада чап ва ўнг тескариланувчанлик тушунчаси тескариланувчанлик тушунчаси билан бир хил. Чунки, $ab=1$, $a, b\in M_n(R)\Rightarrow \det(a)\det(b) = \det(ab) = 1$, яъни. $\det(a)\neq 0$ ва $\det(b)\neq 0$, демак. a ваb тескариланувчан.Хусусан, $ab=1\Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1}\Rightarrow b=a^{-1}$. □

Агар Кҳалқа аксиомаларидаги (К2) аксиомани янада кучлироқ қуйидаги аксиомага алмаштирсак:

(К2`) кўпайтириш амалига нисбатан $K^*=K\setminus\{0\}$ тўплам группа бўлади;у ҳолда K *бўлиш амали ўринли бўлган ҳалқа ёки жисм дейилади.*

Шундай қилиб, бўлиш амали ўринли бўлган ҳалқада нолнинг бўлувчилари мавжуд эмас ва нолдан фарқли ихтиёрийэлемент тескариланувчан.

Агар жисм коммутатив бўлса, у *майдон* деб юритилади.

Таъриф.Бирли коммутатив **P** ҳалқа майдон дейилади, агар $1\neq 0$ бўлибҳар бир $a\neq 0$ элемент тескариланувчан бўлса. $P^*=U(\mathbf{P})$группа**P** майдоннинг мультипликативгруппаси дейилади.

ab^{-1}кўпайтмани одатда $\frac{a}{b}$(ёки a/b) каср кўринишда ёзамиз. Бу каср $bx=a$ тенгламанинг ягона ечимидир($b\neq 0$).

Тасдиқ. P ҳалқада аниқланган “каср” амали қуйидаги қоидаларга бўйсунади:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad = bc,\ (b, d \neq 0); \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\ (b, d \neq 0);$$

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b},\ (b\neq 0); \frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ (bd\neq 0);$$

$$(\frac{a}{b^{-1}})^{-1}=\frac{b}{a^{-1}}.$$

Таъриф. P майдон учун **F**$\subset$**P** қисммайдон дейилади, агар **F** тўплам **P** да қисмҳалқа бўлиб, **F** майдон ташкил қилса.

Мисол. $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Ушбу $\mathbf{F} \subset \mathbf{P}$ҳолатда, **P**майдон **F**майдоннинг кнегайтмаси дейилади.

Таърифга кўра $0,1 \in \mathbf{P}$ва $0,1 \in \mathbf{F}$ ҳамда мос равишда **F** нинг бири ва ноли бўлади.

$\mathbf{F} \subset \mathbf{P}$қисммайдон ва$a \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{F}$бўлсин. **P**майдоннинг **F**ваa ни ўз ичига олувчи барча қисммайдонларининг кесишмаси $\mathbf{F}_1$, $\{\mathbf{F}, a\}$ тўпламни ўз ичига олувчи энг кичик майдон бўлади ва $\mathbf{F}_1$майдон **F**майдонгаa элементни бирлаштириш(улаш) билан ҳосил қилинган майдон дейилади ва $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(a)$каби белгиланади.

Агар $\mathbf{F}_1$майдон **F** қисм майдонга $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{P}$элементларни бирлаштириш билан ҳосил қилинган бўлса биз $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ каби ёзамиз.

Мисол. $Q(\sqrt{2}) = \{c\colon c = a + b\sqrt{2},\ a, b \in Q\}$.

Исбот. $(\sqrt{2})^2 = 2$, $\dfrac{1}{a + b\sqrt{2}} = \dfrac{a}{a^2 - 2b^2} - \dfrac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$,

бунда $a + b\sqrt{2} \neq 0$. □

Шунга ўхшаш,

$Q(\sqrt{3}) = \{c\colon c = a + b\sqrt{3},\ a, b \in Q\}$, $Q(\sqrt{5}) = \{c\colon c = a + b\sqrt{5},\ a, b \in Q\}$.

Pва **P'** майдонлар изоморф дейилади, агар улар ҳалқа сифатида изоморф бўлса. Таърифга кўра, ихтиёрий $f\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}'$ изоморфизм учун $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Ихтиёрий нолдан фарқли гомоморфизм мономорфизм бўлади.Чунки,

$$a \neq 0,\ f(a) = 0 \Rightarrow f(1) = f(aa^{-1}) = f(a)f(a^{-1}) = 0.$$

Натижада, $\forall\, b \in \mathbf{P}$, $f(b) = f(b1) = f(b)f(1) = 0$, яъни $\mathrm{Ker} f = \mathbf{P}$.

Майдонлар назариясида майдонлар *автоморфизмлири* муҳим аҳамиятга эга бўлиб, Галуа назариясининг асосий инструментларидан бири ҳисобланади.

Майдонларни кенгайтириш жараёни жуда узун тарихга эга:

$$1 \to \{n\} \to \mathbf{N} \to \{\mathbf{N}, 0\} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbf{R} \to \mathbf{C}.$$

Q$\rightarrow$**R**алгебраик жараён эмас (тўлдиришнинг узлуксизиги).

p-адик сонлар майдони –**Q** ни бошқа бир метрика ёрдамида тўлдиришдир.

3-МАЪРУЗА. Ҳалқалар гомоморфизмлари

РЕЖА:

4. Ҳалқа тушунчаси.Ҳалқанинг гомоморфизмлари ва идеаллари.
5. Ҳалқанинг турлари
6. Майдон. Майдонлар характеристикаси.

Таянч сўзлар: ***ҳалқа, майдон, бинар муносабат, гомоморфизм, мономорфизм, эпиморфизм, изоморфизм.***

Ҳалқа. Ҳалқанинг гомоморфизмлари ва идеаллари

Таъриф.Бўш бўлмаган К тўпламда иккита алгебраик (бинар) амал: + (қўшиш) ва * (кўпайтириш)аниқланган бўлиб, қуйидаги

(К1) (К,+) – Абел группа;

(К2) (К,*) – яримгруппа;

(К3) $(a+b)*c=a*c+b*c$, $c*(a+b)=c*a+c*b$, $\forall a,b,c\in K$.

шартлар бажарилса, К *ҳалқа* деб юритилади.

Ушбу (К,+) структура (ёки тизим)ҳалқанинг*аддитив группаси,* (К,*) эса*мультипликатив яримгруппасидейилади.*

Агар (К,*) *моноид*(бирли яримгруппа)бўлса (К,+,*) *бирли ҳалқа* дейилади.

Майдоннинг бирлик элементи одатда 1 билан белгиланади. Баъзан бирлик элементнинг мавжудлиги майдоннинг таърифида талаб этилади.

Айрим назарияларда ҳалқанинг таърифида (К2) аксиома қатнашмайди, ёки (К2) аксиома бошқа бирор аксиома билан алмаштирилади. Бундай ҳолларда ҳалқа *ноассоциатив ҳалқа* деб юритилади.

Биз асосан одатдаги (ассоциатив) ҳалқаларни ўрганамиз.

К ҳалқанинг L қисм тўплами *қисмҳалқа* дейилади, агар $x, y\in L \Rightarrow x\text{-}y\in L$ и $x\cdot y\in L$.

Ихтиёрий сондаги қисмҳалқалар кесишмаси қисмҳалқа бўлади. Натижада, бирор $T\subset K$ қисмтўпалам ёрдамида ҳосил қилинган $<T>\subset K$ қисмҳалқа тўғрисида гапириш мумкин, бу қисмҳалқа Т ни ўз ичига олувчи барча қисмҳалқаларнинг кесишмасидир. Агар Т –яримҳалқа бўлса, у ҳолда <Т>=Т.

К ҳалқа*коммутатив*дейилади, агар $xy=yx$, $\forall x, y\in K$ бўлса.

Мисоллар. 1) $(Z,+,\cdot)$. m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами m**Z, Z** нинг қисмҳалқаси бўлади;

2) $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ – рационал сонлар ҳалқаси;

3) $(\mathbf{R},+,\cdot)$ – ҳақиқий сонлар ҳалқаси. **Z** ва **Q** тўпламлар **R** нинг бирлик яримҳалқасидир;

4) $M_n(\mathbf{R})$–**R** майдонустида аниқланган nxn матрицалар ҳалқаси, бирли ҳалқа бўлади. $n>1$ да$M_n(R)$ - нокоммутатив, $M_n(Q)$, $M_n(Z)$ – яримҳалқа;

5) **К**коммутатив ҳалқаустида аниқланган nxn матрицалар $M_n(\mathbf{K})$ ҳалқаси,

6) Функциялар ҳалқаси. X –ихтиёрий тўплам, **К**- ҳалқа. Барча $f: X\to\mathbf{K}$ функциялар $K^x=\{f: X\to\mathbf{K}\}$ тўплами f+g*йиғинди*ваfg кўпайтма:

$$(f+g)(x)=f(x)\oplus g(x),\ (fg)(x)=f(x)\otimes g(x),$$

амалларига нисбатан ҳалқа бўлади, бу ерда $\oplus$, $\otimes$– **К** ҳалқадаги амаллар.

Агар 0 ва 1**К**ҳалқанинг нол ва бирлик элементи бўлса, у ҳолда 0_x: $x\to 0$ ва 1_x: $x\to 1$ –ўзгармас функциялар K^x ҳалқанинг ноли ва бири бўлади.

Агар К –коммутатив бўлса, у ҳолда K^x – коммутатив.

Агар К=**R**ёкиX=[0.1] бўлса, $K^x = \mathbf{R}^{[0.1]}$ –[0; 1] да аниқланган барча ҳақиқий функциялар ҳалқасидир. У ўз ичига қуйидаги қисмҳалқаларни олади:

B[0.1] – барча чегараланган ҳақиқий функциялар ҳалқаси;

C[0.1] – барча ҳақиқий узлуксиз функциялар ҳалқаси.

$x\to a\in R, \forall x\in X$ўзгармас функцияларR ҳалқага изоморф бўлган яримҳалқа ҳосил қилади.

7) ихтиёрий (A,+) аддитив группадаушбу $xy=0, \forall x,y\in A$ кўпайтириш амалини киритиш мумкин. Натижада, *кўпайтма нол бўлган ҳалқа* ҳосил бўлади. Хоссалари:

5. $a^m a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $a\cdot 0=0\cdot a=0$, $\forall a\in K$;
6. $a+0=a \Rightarrow a(a+0)=aa \Rightarrow a^2+a\cdot 0=a^2 \Rightarrow a\cdot 0=0$ (шунга ўхшаш $0\cdot a=0$);

7. $0=1 \Rightarrow a=a\cdot 1=a\cdot 0=0, \forall a\in K$, яъни $K=\{0\}$. Натижада, нетривиал ҳалқа учун $0\neq 1$.
8. $(-a)b=a(-b)=-(ab)$.

Исбот. $0= a\cdot 0=a(b-b)=ab+a(-b) \Rightarrow a(-b)=(-ab)-(-a)=a \Rightarrow (-a)(-b)=ab$. □

5. Дистрибутивликнинг умумий қонуни:

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ (индукцияга кўра).

Хусусан, $n(ab)=(na)b=a(nb), \forall n\in \mathbf{Z}$.

Фараз қилайлик $(K,+,\cdot)$ ва $(K`,\oplus,\otimes)$ ҳалқа бўлсин. $f: K\to K`$ акслантириш *гомоморфизм*дейилади,агар

$$f(a+b)=f(a)\oplus f(b),$$

$$f(a\cdot b)=f(a)\otimes f(b), \forall a,b\in K .$$

Демак, $f(0)=0`$, $f(na)=nf(a), \forall n\in \mathbf{Z}$.

$Kerf = \{a\in K : f(a)=0`\}$ –К да яримҳалқа. Kerf тўплам f нинг ядроси(ўзаги) дейилади.

Умуман, $L=Kerf \Rightarrow Lx\subset L, \forall x\in K$.

Исбот. $\forall x\in K$, $l\in L$учун $f(lx)=f(l)\otimes f(x)=0`f(x)=0`$, яъни $lx\in L$. □

Шунга ўхшаш, $xL\subset L, \forall x\in K$, яъни$LK\subset L$ва$KL\subset L$.

Бундай Lяримҳалқалар (икки томонлама) *идеал* деб юритилади.

$f: K\to K`$ гомоморфизм *мономорфизм*дейилади, агар $Kerf =\{0\}$ бўлса. *Эпиморфизм дейилади*, агар$Imf=\{f(x), x\in K\}=f(K)=K`$ бўлса. *Изоморфизмом дейилади*, агар f мономорфизм ваэпиморфизмбўлса,бундай ҳолда$K\cong K`$ каби белгиланади.

Мисоллар. 1) $f: \mathbf{Z}\to \mathbf{Z}_m$ эпиморфизм бўлади ва $Kerf=m\mathbf{Z}$, $m\mathbf{Z}$- $\mathbf{Z}$да идеал(умуман $\mathbf{Z}$да ихтиёрий қисмҳалқа $m\mathbf{Z}$кўринишга эга, яъни идеал);

2) $M_2(\mathbf{Z})$ –$\mathbf{Z}$майдон бўйича 2x2 матрицалар ҳалқаси.$K_0=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\delta\in Z\right\}$ яримҳалқа бўлади, идеал

эмас: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \notin K_0$;

3) Коммутатив ҳалқада идеал қуриш методлари:

а) $\forall a \in K$, aK –Книнг идеали бўлади: $ax+ay=a(x+y)$, $(ax)y=a(xy)$. aK идеал $a\in K$ элемент ёрдамида тузилган асосий идеал деб юритилади.

2. Ҳалқанинг турлари

Z, **Q**, **R**, **C**ҳалқаларда $ab=0 \Rightarrow a=$ёки $b=0$, аммо

а) $M_n(R)$ҳалқа$ab=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$;

в) Z_4ҳалқада $2\otimes 2=0$;

с) R^2ҳалқада $(1,0)(0,1)=0$ ва б.

Таъриф. К ҳалқа бўлсин. Агар a, $b\in K$, $a\neq 0$, $b\neq 0$ учун $ab=0$ бўлса, у ҳолда*а*нолнинг *чап*, *b* эса *ўнг* бўлувчиси дейилади. Коммутатив ҳалқада эса*а*ва *b нолнинг бўлувчилари* дейилади.

Ихтиёрий $K\neq 0$ ҳалқада, 0 нол элемент нолнинг (тривиал) бўлувчиси бўлади.

Нолнинг нолдан фарқли бўлувчиси бўлмаган $1\neq 0$ бирли коммутатив ҳалқа *бутунли ҳалқа* дейилади.

Теорема.Бирли нотривиал коммутатив К ҳалқа бутунлик соҳаси бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар ҳалқада *қисқартириш қонуни* ўринли бўлса:$ab=ac$, $a\neq 0 \Rightarrow b=c$, $\forall a, b, c \in K$.

Мисол.$s=\{x=(x_1,x_2, \ldots, x_n, \ldots), x_i\in \mathbf{R}\}$ – ҳақиқий сонлардан тузилган кет-кетликлар фазоси ва К – барча $a: s \to s$ чизиқли акслантиришлар ҳалқаси бўлсин. s да амаллар координаталар бўйича аниланган. Кҳалқада қўшиш ва операторларсуперпозицияси (композицияси) амалларини қуйидагича аниқлаймиз: $(a_1\oplus a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x)$, $(a_1\otimes a_2)(x)=a_2(a_1(x))$, $x\in s$.

$a_i : s\to s$операторлар қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

$$a_2: x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \to (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots).$$

У ҳолда,

$$a_1 \otimes a_2 : x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \to (0, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots),$$

$$a_2 \oplus a_1: x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \to (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots),$$

яъни$a_2 \oplus a_1=1$ –айний оператор.

Демак, $a_1 \oplus a_2 \neq 1$, $a_2 \oplus a_1=1$, яъниa_1ўнг (чап бўлмаган), a_2эса чап (ўнг бўлмаган) К даги бирнинг бўлувчиларидир.

$M_n=M_n(\mathbf{R})$ матрицалар ҳалқасида тескариланувчан элнментлар, бу тескариланувчан матрицалардир(яъни нолдан фарқли детерменинантга эга бўлган марицалар). Тескариланувчан элемент нолнинг бўлувчиси бўлаолмайди:

$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow (a^{-1}a)b=0 \Rightarrow b=0$, (шунга ўхшаш, $ba=0 \Rightarrow b=0$).

Теорема.Бирли элементли **К** ҳалқанинг тескариланувчан элементлари тўплами кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил этади(ушбу группа U(K) каби белгиланади) .

Изоҳ. $M_n(\mathbf{R})$ ҳалқада чап ва ўнг тескариланувчанлик тушунчаси тескариланувчанлик тушунчаси билан бир хил. Чунки, $ab=1$, a, $b \in M_n(R) \Rightarrow \det(a)\det(b) = \det(ab) = 1$, яъни. $\det(a) \neq 0$ ва $\det(b) \neq 0$, демак. a ваb тескариланувчан.Хусусан, $ab=1 \Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1} \Rightarrow b=a^{-1}$. □

Агар Кҳалқа аксиомаларидаги (К2) аксиомани янада кучлироқ қуйидаги аксиомага алмаштирсак:

(К2`) кўпайтириш амалига нисбатан $K^*=K\setminus\{0\}$ тўплам группа бўлади;у ҳолда К *бўлиш амали ўринли бўлган ҳалқа ёки жисм дейилади.*

Шундай қилиб, бўлиш амали ўринли бўлган ҳалқада нолнинг бўлувчилари мавжуд эмас ва нолдан фарқли ихтиёрийэлемент тескариланувчан.

Агар жисм коммутатив бўлса, у *майдон* деб юритилади.

Таъриф.Бирли коммутатив **Р** ҳалқа майдон дейилади, агар $1 \neq 0$ бўлибҳар бир $a \neq 0$ элемент тескариланувчан бўлса. $P^*=U(\mathbf{P})$группа**Р**

майдоннинг мультипликативгруппаси дейилади.

ab^{-1}кўпайтмани одатда $\frac{a}{b}$(ёки a/b) каср кўринишда ёзамиз. Бу каср bx=a тенгламанинг ягона ечимидир($b\neq 0$).

Тасдиқ. P ҳалқада аниқланган “каср” амали қуйидаги қоидаларга бўйсунади:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad = bc,\ (b,\ d\neq 0);\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\ \ (b,\ d\neq 0);$$

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b},\ \ (b\neq 0);\ \frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \ (bd\neq 0);$$

$$\left(\frac{a}{b^{-1}}\right)^{-1}=\frac{b}{a^{-1}}.$$

Таъриф. P майдон учун **F**$\subset$**P** қисм майдон дейилади, агар **F** тўплам **P** да қисм ҳалқа бўлиб, **F** майдон ташкил қилса.

Мисол.Q $\subset$**R** $\subset$**C**.

Ушбу **F** $\subset$**P**ҳолатда, **P**майдон **F**майдоннинг кнегайтмаси дейилади.

Таърифга кўра $0,1\in$**P**ва $0,1\in$**F** ҳамда мос равишда **F** нинг бири ва ноли бўлади.

F$\subset$**P**қисммайдон ва$a\in$**P\F**бўлсин. **P**майдоннинг **F**ваa ни ўз ичига олувчи барча қисммайдонларининг кесишмаси **F₁**, {**F**, a} тўпламни ўз ичига олувчи энг кичик майдон бўлади ва $\mathbf{F}_1$майдон **F**майдонгаa элементни бирлаштириш(улаш) билан ҳосил қилинган майдон дейилади ва $\mathbf{F}_1=\mathbf{F}(a)$каби белгиланади.

Агар $\mathbf{F}_1$майдон **F** қисм майдонга $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\in$**P**элементларни бирлаштириш билан ҳосил қилинган бўлса биз $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ каби ёзамиз.

Мисол. $Q(\sqrt{2}) = \{c:\ c=a + b\sqrt{2},\ a,\ b\in Q\}$.

Исбот. $(\sqrt{2})^2 = 2,\ \frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$

бунда $a+b\sqrt{2} \neq 0$. □

Шунга ўхшаш,

$Q(\sqrt{3}) = \{c: c=a + b\sqrt{3},\ a, b\in Q\}$, $Q(\sqrt{5}) = \{c: c=a + b\sqrt{5},\ a, b\in Q\}$.

Pва **P**’ майдонлар изоморф дейилади, агар улар ҳалқа сифатида изоморф бўлса. Таърифга кўра, ихтиёрий f: **P**→**P**’ изоморфизм учун f(0) = 0, f(1) = 1.

Ихтиёрий нолдан фарқли гомоморфизм мономорфизм бўлади.Чунки,

$$a\neq 0,\ f(a)=0 \Rightarrow f(1)=f(aa^{-1})=f(a)f(a^{-1})=0.$$

Натижада, $\forall\ b\in \mathbf{P}$, f(b) = f(b1) = f(b)f(1)= 0, яъни Kerf = **P**.

Майдонлар назариясида майдонлар *автоморфизмлири* муҳим аҳамиятга эга бўлиб, Галуа назариясининг асосий инструментларидан бири ҳисобланади.

Майдонларни кенгайтириш жараёни жуда узун тарихга эга:

$$1\rightarrow \{n\} \rightarrow \mathbf{N}\rightarrow \{\mathbf{N}, 0\} \rightarrow \mathbf{Z}\rightarrow \mathbf{Q}\rightarrow \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbf{R}\rightarrow \mathbf{C}.$$

Q→**R**алгебраик жараён эмас (тўлдиришнинг узлуксизиги).

p-адик сонлар майдони –**Q**ни бошқа бир метрика ёрдамида тўлдиришдир.

Майдон. Майдонлар характеристикаси

m модулининг қолдиқларидан ушбу амал билан $\overline{k}+\overline{l}=\overline{k+l}$, $\overline{k}\overline{l}=\overline{kl}$ тузилган $\mathbf{Z}_m$ ҳалқани қараймиз:

$$\overline{0},\overline{1},\overline{2},...\overline{m-1}.$$

Агар st=m бўлса, у ҳолда $\overline{s}\cdot\overline{t}=\overline{0}$, $\overline{s}$ ва $\overline{t}$ - $\mathbf{Z}_m$ даги нолнинг бўлувчиларидир.

Демак, агарбўлувчи мавжуд бўлса(m≠1), яъниm–туб бўлмаса, у ҳолда$\mathbf{Z}_m$ майдон ташкил этмайди.

p–туб сон бўлсин. Кўрсатиш мумкиники, $\mathbf{Z}_p$- майдон. Фараз қилайлик $\overline{s}\neq\overline{0}$ (яъниsсони p га бўлинмайди). $\overline{s}'\in Z_p^*$ тескари элемент мавжудлигини кўрсатамиз.

Қуйидаги сонларни қараймиз

$$\overline{s},\ \overline{2s},\ \overline{3s},\ ...,\overline{(p-1)s}. \qquad (*)$$

Барчаси нолдан фарқли, чункиs$\not\equiv$0(modp) $\Rightarrow$ks$\not\equiv$ 0(modp), агарk = 1, 2, …, p-1 бўлса. Бундан ташқари (*) даги барча элементлар бир-биридан фарқли, чунки агар $\overline{ks}=\overline{ls}$, k<s бўлса, у ҳолда $\left(\overline{l-k}\right)s=\overline{0}$, бу мумкин эмас (бизда l-k<p). Шунинг учун, Поэтому в (*) да қанча ҳар хил элементлар бўлса, ушбу

$$\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ ...,\ \overline{p-1} \qquad (**)$$

тўпламда ҳам шунча элементлар бор, чъни (*) тўплам (**) нинг шунчаки ўриналмаштиришидан тузилган. Натижада (*) да $\overline{s's}=\overline{1}$ни қаноатлантирувчи элемент мавжуддир (1 ≤s’ ≤p-1). Демак,$\overline{s's}=\overline{1}$, яъни. $\overline{s'}=\overline{s}^{-1}$ - тескари элемент.

Шундай қилиб қуйидаги теорема исботланди

Теорема. Қолдиқлар ҳалқаси Z_m майдон бўлиши учун m=p–туб сон бўлиши зарур ва етарли.

Натижа. (Ферманинг кичик теоремаси).p–туб сонга бўлинмайдиган ихтиёрий m бутун сон учун қуйидаги муносабат ўринлидир: $m^{p-1}\equiv 1$ (modp). Длялюбою целого числа m, не делящегося m простое число римеет место сравнение: $m^{p-1}\equiv 1$ (modp).

Исбот. $\mathbf{Z}_p$ *м*айдон мультипликативгруппаси $\mathbf{Z}_p^*$ нинг тартибир-1 га тенг. Лагранж теоремасига кўрар-1 сони$\mathbf{Z}_p^*$даги ихтиёрий элемент тартибига бўлинади (яъни$\mathbf{Z}_p^*$га тегишли ихтиёрий элемент p-1 даражаси $\overline{1}$ га тенг), яъни

$$\left(\overline{m}\right)^{p-1}=\overline{1}\Rightarrow\overline{m^{p-1}}-\overline{1}=\overline{0}\Rightarrow\overline{m^{p-1}-1}=\overline{0}\Rightarrow m^{p-1}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),\text{яъни}$$

$$m^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p). \qquad \square$$

Таъриф.Хос қисммайдонга эга бўлмаган майдон *содда майдон* деб юритилади.

Теорема.Ҳар бир **P** майдон ягона $\mathbf{P_0}$ содда қисммайдонга эга. Бу содда майдон **Q** га ёки $\mathbf{Z_p}$ га изоморфдир(р бирор туб сон).

Исбот. Агар **P'** ва**P''** ҳар хил содда қисммайдонлар бўлса, у ҳолда $\mathbf{P_0}=\mathbf{P'}\cap\mathbf{P''}$ қисммайдон (бўш эмас, чунки 0, 1 $\in\mathbf{P}_0$) , ва $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{P'}$, $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{P''}$, бу **P'** ва **P''** нинг содда эканлигига зиддир. Натижада, содда қисммайдон ягонадир (умуман $P_0 = \bigcap_\alpha P_\alpha$ - **P** даги барча қисммайдонлар).

$1\in\mathbf{P}_0$ бир элемент учун $n\cdot 1 = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}$. Ҳалқа аксиомаларидан қуйидагилар келиб чиқади:

$$s1 + t1 = (s + t)1,$$

$$(s1)\,(t1) = (st)1,\ \ \forall s, t\in\mathbf{Z}.$$

Z ҳалқани **P** майдонга f акслантиришни қарайлик**:**

$$f(n) = n1.$$

fҳалқаниггомоморфизмидир. ЯдроKerf**Z**да идеал бўлиб, Kerf = m **Z**, бирор $m\geq 0$, $m\in\mathbf{Z}$ учун.

Агарm=0 бўлса,у ҳолдаKerf ={0} ваf - изоморфизм**Z**ни**P**нинг ичига акслантириш бўлади.

Шунинг учун, $\mathbf{Z}\subset\mathbf{P}$ ни қисмҳалқа деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолдаs1/t1, (s, $t\in$**Z)** каср **P** да маънога эга (чунки**P**майдон) ваулар **Z** ни ўз ичига олувчи **P** даги энг кичик $\mathbf{P}_0$ қисмҳалқани ҳосил қилади ва$\mathbf{P}_0 \approx \mathbf{Q}$.

Агар m> 0 бўлса, у ҳолда $f^* : \bar{k} = \{k\}_m \to f(k)$акслантириш $\mathbf{Z}_m$ни **P**ичига изоморф акслантиради. Маълумки,**P**да нолнинг бўлувчилари йўқ, у ҳолда ва $\mathbf{Z}_m$да ҳам нолнинг бўлувчилари йўқ. Юқоридаги теоремага кўра m = p–туб сон, яъни$\mathbf{Z}_p$- майдон. Натижада, $f^*(\mathbf{Z}_p)$ –**P** да содда қисммайдон, яъни$\mathbf{P}_0 \approx \mathbf{Z}_p$.

□

Таъриф. **P**майдон *нолхарактеристикага*эга дейилади, агар унинг$\mathbf{P}_0$содда қисммайдони **Q**га изоморф бўлса.

Таъриф.P майдон р*соддахарактеристикага*эга дейилади, агар унинг$\mathbf{P}_0$содда қисммайдони $\mathbf{Z}_p$га изоморф бўлса.

Мос равишда char **P**=0 ёки char **P** = p > 0 каби белгилаймиз.

Агар $\mathbf{Z}_p$ - майдон сифатида қараалса, одатда $\mathbf{F}_p$ ёки GF(p) (Galois Field - Галуа майдони) каби белгиланади.

Шундай (чекли) GF(p) майон мавжудки, унинг элементлари учун $q = p^n$тенглик ўринлидир, бу ерда p- туб сон, n –мусбат бутун сон.

Мисол.Тўртта элементли GF(4)={0, 1, α, β}группаниқараймиз:

+	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

*	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Назорат саволлари

1.Бинар амаллар.

2. Яримгруппа ва моноидлар.

3. Тескариланувчи элементлар.

4. Группалар. Таърифи ва мисоллар.

5. Группаларнинг гомоморфизм ва изоморфизмлари.

6. Қисм-группалар ва фактор группалар.

7. Ҳалқалар ва бутунлик соҳалари.

8. Ҳалқаларнинг гомоморфизмлари ва идеаллари.

9. Майдон таърифи, мисоллар.

Адабиёт

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1 – Амалий машғулот

Группалар

1. Қуйидаги группалар аддитив группалар эканлигини кўрсатинг.

(Z, +), (Q, +), (R, +), (C, +)

2. $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўпҳадлар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлишини кўрсатинг.

3. M(n, R) n×n матрицалар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлишини кўрсатинг.

4. R_n чизиқли фазо қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

5. C[a, b] – [a, b] кесмада аниқланган узлуксиз функциялар қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

6. *Қуйидаги группалар мультипликатив группалар эканлигини кўрсатинг*

$Q^* = Q\setminus\{0\}$, $R^* = R\setminus\{0\}$, $C^* = C\setminus\{0\}$

7. M(n, R)   детерминанти нолдан фарқли бўлган n×n матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа бўлади.

8**.** Ихтиёрий сондаги қисмгруппаларнинг кесишмаси яна қисм группа бўлишини кўрсатинг.

1) (Z,+,·). m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами m**Z, Z** нинг қисмҳалқаси бўлади;

2) (**Q**,+,·) – рационал сонлар ҳалқаси;

3) (**R**,+,·) – ҳақиқий сонлар ҳалқаси. **Z** ва **Q** тўпламлар **R** нинг бирлик яримҳалқасидир;

4) M_n(**R**)–**R** майдонустида аниқланган nxn матрицалар ҳалқаси, бирли ҳалқа бўлади. n> 1 даM_n(R) - нокоммутатив, M_n(Q) , M_n(Z) – яримҳалқа;

5) **К**коммутатив ҳалқаустида аниқланган nxn матрицалар M_n(**К**) ҳалқаси,

6) Функциялар ҳалқаси. X –ихтиёрий тўплам, **К-** ҳалқа. Барча f: X→**K** функциялар K^x={f: X→**K**} тўплами f+g*йиғинди*ваfg кўпайтма:

$$(f+g)(x)=f(x)\oplus g(x),\ (fg)(x)=f(x)\otimes g(x),$$

амалларига нисбатан ҳалқа бўлади, бу ерда $\oplus$, $\otimes$– **К** ҳалқадаги амаллар.

7) Агар 0 ва 1**К**ҳалқанинг нол ва бирлик элементи бўлса, у ҳолда 0_x: $x\to 0$ ва 1_x: $x\to 1$ –ўзгармас функциялар K^x ҳалқанинг ноли ва бири бўлади.

Агар К –коммутатив бўлса, у ҳолда K^x – коммутатив.

Агар К=**R**ёкиX=[0.1] бўлса, K^x = $\mathbf{R}^{[0.1]}$ –[0; 1] да аниқланган барча ҳақиқий функциялар ҳалқасидир. У ўз ичига қуйидаги қисмҳалқаларни олади:

B[0.1] – барча чегараланган ҳақиқий функциялар ҳалқаси;

C[0.1] – барча ҳақиқий узлуксиз функциялар ҳалқаси.

8) **Z**, **Q**, **R**, **C** ҳалқаларда ab=0 $\Rightarrow$ a=ёки b=0, аммо

a) $M_n(R)$ҳалқаab=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0$;

в) Z_4 ҳалқада $2\otimes 2=0$;

c) R^2 ҳалқада (1,0)(0,1)=0 ва б.

Мисоллар. 1) f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_m$эпиморфизм бўлади ва Kerf=m**Z**, m**Z**- **Z**да идеал(умуман **Z**да ихтиёрий қисмҳалқа m**Z**кўринишга эга, яъни идеал);

2) $M_2(\mathbf{Z})$ –**Z**майдон бўйича 2x2 матрицалар ҳалқаси.K_0=$\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\delta\in Z\right\}$яримҳалқа бўлади, идеал эмас: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & 0\end{pmatrix}\notin K_0$;

3) Коммутатив ҳалқада идеал қуриш методлари:

a) $\forall a\in K$, aK –Книнг идеали бўлади: ax+ay=a(x+y), (ax)y=a(xy). aK идеал $a\in K$ элемент ёрдамида тузилган асосий идеал деб юритилади.

Мисол. s={x=(x_1,x_2, …, x_n, …), $x_i\in\mathbf{R}$} – ҳақиқий сонлардан тузилган кет-кетликлар фазоси ва К – барча a: s $\to$ s чизиқли акслантиришлар ҳалқаси бўлсин. s да амаллар координаталар бўйича аниланган. Кҳалқада қўшиш ва операторларсуперпозицияси (композицияси) амалларини қуйидагича аниқлаймиз: $(a_1\oplus a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x)$, $(a_1\otimes a_2)(x)=a_2(a_1(x))$, $x\in s$.

$a_i : s\to s$операторлар қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

$$a_2: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ldots).$$

У ҳолда,

$$a_1\otimes a_2 :x=(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ldots) \to (0, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

$$a_2\oplus a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

яъни$a_2\oplus a_1=1$ –айний оператор.

Демак, $a_1\oplus a_2\neq 1$, $a_2\oplus a_1=1$, яъниa_1ўнг (чап бўлмаган), a_2эса чап (ўнг бўлмаган) К даги бирнинг бўлувчиларидир.

$M_n=M_n(\mathbf{R})$ матрицалар ҳалқасида тескариланувчан элементлар, бу тескариланувчан матрицалардир(яъни нолдан фарқли детерменинантга эга бўлган марицалар). Тескариланувчан элемент нолнинг бўлувчиси бўлаолмайди:

$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow (a^{-1}a)b=0 \Rightarrow b=0$, (шунга ўхшаш, $ba=0 \Rightarrow b=0$).

Мисол. $Q(\sqrt{2}) = \{c: c=a + b\sqrt{2}, a, b\in Q\}$.

$$. (\sqrt{2})^2 = 2, \ \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$$

Мисол. Тўртта элементли $GF(4)=\{0, 1, \alpha, \beta\}$группаниқараймиз:

+	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

*	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

2-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ

Халқа ва майдонлар

Ҳалқа.Майдон.Ҳалқа турлари

1) f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_m$ эпиморфизм бўлади ва Kerf = m**Z**, m**Z** – **Z**да идеал(умуман **Z**да ихтиёрий қисмҳалқа m**Z**кўринишга эга, яъни идеал);

2) $M_2(\mathbf{Z})$ –**Z**майдон бўйича 2x2 матрицалар ҳалқаси.$K_0=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\delta\in Z\right\}$ яримҳалқа бўлади, идеал эмас: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & 0\end{pmatrix}\notin K_0$;

3) Коммутатив ҳалқада идеал қуриш методлари:

a) $\forall a\in K$, aK –Книнг идеали бўлади: ax+ay=a(x+y), (ax)y=a(xy). aK идеал $a\in K$ элемент ёрдамида тузилган асосий идеал деб юритилади.

1) **P** майдоннинг ихтиёрий **F** кенгайтмаси **P** майдон устида аниқланган коммутатив ва ассоциатив бирли алгебра бўлади :

Q майдоннинг **F** = **Q**($\sqrt{2}$) кенгайтмасини қарасак, у 2 ўлчамли алгебра бўлади;

Q майдоннинг кенгайтмаси **R** чексиз ўлчамли алгебра бўлади.

R майдоннинг кенгайтмаси **C** 2 ўлчамли алгебра бўлади.

2) Коэффициентлари **P** майдонга тегишли бўлган n та ўзгарувчили K=**P**[x_1, x_2, …, x_n] кўпҳадлар ҳалқаси **P** майдон устида чексиз ўлчамли коммутатив ассоциатив алгебрадир. Бунда

$$K = K_0 \oplus K_1 \oplus \ \dots$$

Яъни, K – биржинсли, даражаси m (K_0 = **P**) бўлган кўпҳадлар K_m қимфазоларининг тўғри йиғиндисидан иборатдир, бу ерда

$$K_i\,K_j \subset K_{i+j}.$$

Бундай ёйилмага эга бўлган алгебралар, *градуирланган алгебра* дейилади.

3) элементлари **P** майдонга тегишли бўлган барча nxn квадрат

матрицалар тщплами $M_n(\mathbf{P})$, **P** майдон устида ўлчами n^2 бўлган алгебра бўлади.

Бу алгебранинг базичи сифатида қуйидаги матрицаларни олиш мумкин:

$$\left\{E_{ij} / i, j = \overline{1,n}\right\},$$

Бу ерда E_{ij} – матрица i – сатр ва j – устун кесишмасида 1 (P майдоннинг **1** элементи), бошқа элементлари 0 га тенг матрица. Маълумки, бу базис элементлари қуйидаги кўпайтириш қонунига бўйсунади.

$$E_{ik} E_{lj} = \delta_{kl} E_{ij}.$$

Маълумки, ихтиёрий $(a_{i,j}) \in M_n(P)$ матрица E_{ik} ларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади

$$\left(a_{ij}\right) = \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

Бу алгбранинг бирлик элементи қуйидаги бирлик матрицадан иборат бўлади

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Маълумки, λE кўринишидаги элемент $M_n(\mathbf{P})$ алгебранинг ихтиёрий элементи билан ўрин алмашинувчи бўлади, яъни λE элемент $Z(M_n(\mathbf{P}))$ марказда ётади.

Мисол 1. C(X) – тўплам X топологик фазодаги узлуксиз фунциялар тўплами бўлсин. C(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш λf, $f+g$, fg амалларига нисбатан коммутатив алгебра ташкил қилади.

2. Айтайлик X – чизиқли фазо бўлсин, L(X) орқали X да аниқланган барча чизиқли алмаштиришлар $B: X \to X$ тўпламини белгилаймиз. L(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва суперпозиция λB, $A+B$, $A \circ B$ амалларига нисбатан алгебра ташкил қилади. L(X) алгебра коммутатив бўлиши учун X

бир ўлчамли бўлиши зарур ва етарли.

Агар X – чекли ўлчамли бўлса, у холда $L(X)=M_n(\mathbf{C})$ бўлади. L(X) даги амаллар матрицаларни қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш амаллари билан устма-уст тушади.

3. Агар X – банах фазоси бўлса, B(X) орқали барча чегараланган операторли белгиласак B(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш λB, $A+B$, $A\circ B$ амалларига нисбатан алгебра ташкил қилади.

Мисол. 1. C(X) бирлик элементли халқа бўлади, бу ерда айний фукнция бирлик элемент вазифасини бажаради.

2. L(X) ва B(X) алгебралар хам бирлик элементли халқа бўлади, бу ерда айний e=E – оператор бирлик элемент вазифасини бажаради

3-АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ

Ҳалқалар гомоморфизмлари.

Мисоллар. 1) f: $\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Z}_m$эпиморфизм бўлади ва $\mathrm{Ker}f=m\mathbf{Z}$, $m\mathbf{Z}$- $\mathbf{Z}$да идеал(умуман $\mathbf{Z}$да ихтиёрий қисмҳалқа $m\mathbf{Z}$кўринишга эга, яъни идеал);

2) $M_2(\mathbf{Z})$ –$\mathbf{Z}$майдон бўйича 2x2 матрицалар ҳалқаси.$K_0=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\delta\in Z\right\}$ яримҳалқа бўлади, идеал эмас: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & 0\end{pmatrix}\notin K_0$;

3) Коммутатив ҳалқада идеал қуриш методлари:

a) $\forall a\in K$, aK –Книнг идеали бўлади: ax+ay=a(x+y), (ax)y=a(xy). aK идеал $a\in K$ элемент ёрдамида тузилган асосий идеал деб юритилади.

Мисол. $s=\{x=(x_1,x_2, \ldots, x_n, \ldots), x_i\in\mathbf{R}\}$ – ҳақиқий сонлардан тузилган кет-кетликлар фазоси ва K – барча a: $s\rightarrow s$ чизиқли акслантиришлар ҳалқаси бўлсин. s да амаллар координаталар бўйича аниланган. Кҳалқада қўшиш ва операторларсуперпозицияси (композицияси) амалларини қуйидагича аниқлаймиз: $(a_1\oplus a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x)$, $(a_1\otimes a_2)(x)=a_2(a_1(x))$, $x\in s$.

$a_i : s \to s$операторлар қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$a_1 : x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \to (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots),$$

$$a_2 : x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \to (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots).$$

У ҳолда,

$$a_1 \otimes a_2 : x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \to (0, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots),$$

$$a_2 \oplus a_1 : x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \to (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots),$$

яъни$a_2 \oplus a_1=1$ –айний оператор.

Демак, $a_1 \oplus a_2 \neq 1$, $a_2 \oplus a_1=1$, яъниa_1ўнг (чап бўлмаган), a_2эса чап (ўнг бўлмаган) К даги бирнинг бўлувчиларидир.

$M_n=M_n(\mathbf{R})$ матрицалар ҳалқасида тескариланувчан элементлар, бу тескариланувчан матрицалардир(яъни нолдан фарқли детерменинантга эга бўлган марицалар). Тескариланувчан элемент нолнинг бўлувчиси бўлаолмайди:

$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow (a^{-1}a)b=0 \Rightarrow b=0$, (шунга ўхшаш, $ba=0 \Rightarrow b=0$).

Мисол. $Q(\sqrt{2}) = \{c: c=a + b\sqrt{2},\ a, b \in Q\}$.

$$.\ (\sqrt{2})^2 = 2,\ \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$$

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

1 – МАВЗУ
Группа, қисм группа, циклик группа

1. Қуйидаги группалар аддитив группалар эканлигини кўрсатинг.

(Z, +), (Q, +), (R, +), (C, +)

2. $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ кўпҳадлар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлишини кўрсатинг.

3. M(n, R) $n\times n$ матрицалар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлишини кўрсатинг.

4. R_n чизиқли фазо қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

5. C[a, b] – [a, b] кесмада аниқланган узлуксиз функциялар қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

6. . Қуйидаги группалар мультипликатив группалар эканлигини кўрсатинг

$Q^* = Q\setminus\{0\}$, $R^* = R\setminus\{0\}$, $C^* = C\setminus\{0\}$

7. M(n, R) детерминанти нолдан фарқли бўлган $n\times n$ матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа бўлади.

8**.** Ихтиёрий сондаги қисмгруппаларнинг кесишмаси яна қисм группа бўлишини кўрсатинг.

1) $(Z,+,\cdot)$. m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами m**Z, Z** нинг қисмҳалқаси бўлади;

2) (**Q**,+,·) – рационал сонлар ҳалқаси;

3) (**R**,+,·) – ҳақиқий сонлар ҳалқаси. **Z** ва **Q** тўпламлар **R** нинг бирлик яримҳалқасидир;

4) M_n(**R**)–**R** майдонустида аниқланган nxn матрицалар ҳалқаси, бирли ҳалқа бўлади. n> 1 да$M_n(R)$ - нокоммутатив, $M_n(Q)$, $M_n(Z)$ – яримҳалқа;

5) **К**коммутатив ҳалқаустида аниқланган nxn матрицалар M_n(**К**) ҳалқаси,

6) Функциялар ҳалқаси. X –ихтиёрий тўплам, **К**- ҳалқа. Барча f: X→**K** функциялар K^x={f: X→**K**} тўплами f+g*йиғинди*ваfg кўпайтма:

$$(f+g)(x)=f(x)\oplus g(x),\ (fg)(x)=f(x)\otimes g(x),$$

амалларига нисбатан ҳалқа бўлади, бу ерда $\oplus$, $\otimes$– **К** ҳалқадаги амаллар.

7) Агар 0 ва 1**К**ҳалқанинг нол ва бирлик элементи бўлса, у ҳолда 0_x: $x\rightarrow 0$ ва 1_x: $x\rightarrow 1$ –ўзгармас функциялар K^x ҳалқанинг ноли ва бири бўлади.

Агар К –коммутатив бўлса, у ҳолда K^x – коммутатив.

Агар К=**R**ёкиX=[0.1] бўлса, K^x = $\mathbf{R}^{[0.1]}$ –[0; 1] да аниқланган барча ҳақиқий функциялар ҳалқасидир. У ўз ичига қуйидаги қисмҳалқаларни олади:

B[0.1] – барча чегараланган ҳақиқий функциялар ҳалқаси;

C[0.1] – барча ҳақиқий узлуксиз функциялар ҳалқаси.

8) **Z**, **Q**, **R**, **C** ҳалқаларда ab=0 $\Rightarrow$ a=ёки b=0, аммо

а) $M_n(R)$ҳалқаab=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0$;

в) Z_4 ҳалқада $2\otimes 2=0$;

с) R^2 ҳалқада (1,0)(0,1)=0 ва б.

2- МАВЗУ

Халқа ва майдонлар, қисм халқалар

1) f: $\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Z}_m$ эпиморфизм бўлади ва Kerf = m**Z**, m**Z** – **Z**да идеал(умуман **Z**да ихтиёрий қисмҳалқа m**Z**кўринишга эга, яъни идеал);

2) $M_2(\mathbf{Z})$ –**Z**майдон бўйича 2х2 матрицалар ҳалқаси.$K_0=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\delta\in Z\right\}$ яримҳалқа бўлади, идеал эмас: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & 0\end{pmatrix}\notin K_0$;

3) Коммутатив ҳалқада идеал қуриш методлари:

а) $\forall a\in K$, aK –Книнг идеали бўлади: ax+ay=a(x+y), (ax)y=a(xy). aK идеал $a\in K$ элемент ёрдамида тузилган асосий идеал деб юритилади.

1) **P** майдоннинг ихтиёрий **F** кенгайтмаси **P** майдон устида аниқланган коммутатив ва ассоциатив бирли алгебра бўлади :

Q майдоннинг **F** = **Q**($\sqrt{2}$) кенгайтмасини қарасак, у 2 ўлчамли алгебра бўлади;

Q майдоннинг кенгайтмаси **R** чексиз ўлчамли алгебра бўлади.

R майдоннинг кенгайтмаси **C** 2 ўлчамли алгебра бўлади.

2) Коэффициентлари **P** майдонга тегишли бўлган n та ўзгарувчили K=**P**[x_1, x_2, …, x_n] кўпҳадлар ҳалқаси **P** майдон устида чексиз ўлчамли коммутатив ассоциатив алгебрадир. Бунда

$$K = K_0 \oplus K_1 \oplus \ \ldots$$

Яъни, K – биржинсли, даражаси m (K_0 = **P**) бўлган кўпҳадлар K_m қимфазоларининг тўғри йиғиндисидан иборатдир, бу ерда

$$K_i K_j \subset K_{i+j}.$$

Бундай ёйилмага эга бўлган алгебралар, *градуирланган алгебра* дейилади.

3) элементлари **P** майдонга тегишли бўлган барча nxn квадрат матрицалар тщплами M_n(**P**), **P** майдон устида ўлчами n^2 бўлган алгебра бўлади.

Бу алгебранинг базичи сифатида қуйидаги матрицаларни олиш мумкин:

$$\left\{E_{ij} / i, j = \overline{1, n}\right\},$$

Бу ерда E_{ij} – матрица i – сатр ва j – устун кесишмасида 1 (P майдоннинг **1** элементи), бошқа элементлари 0 га тенг матрица. Маълумки, бу базис элементлари қуйидаги кўпайтириш қонунига бўйсунади.

$$E_{ik} E_{lj} = \delta_{kl} E_{ij}.$$

Маълумки, ихтиёрий ($a_{i,j}$) $\in$ M_n(P) матрица E_{ik} ларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади

$$\left(a_{ij}\right) = \sum_{i.\, j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}\,.$$

Бу алгбранинг бирлик элементи қуйидаги бирлик матрицадан иборат бўлади

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Маълумки, λE кўринишидаги элемент $M_n(\mathbf{P})$ алгебранинг ихтиёрий элементи билан ўрин алмашинувчи бўлади, яъни λE элемент $Z(M_n(\mathbf{P}))$ марказда ётади.

Мисол 1. C(X) – тўплам X топологик фазодаги узлуксиз фунциялар тўплами бўлсин. C(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш λf, $f+g$, fg амалларига нисбатан коммутатив алгебра ташкил қилади.

2. Айтайлик X – чизиқли фазо бўлсин, L(X) орқали X да аниқланган барча чизиқли алмаштиришлар $B: X \to X$ тўпламини белгилаймиз. L(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва суперпозиция λB, $A+B$, $A \circ B$ амалларига нисбатан алгебра ташкил қилади. L(X) алгебра коммутатив бўлиши учун X бир ўлчамли бўлиши зарур ва етарли.

Агар X – чекли ўлчамли бўлса, у холда $L(X)=M_n(\mathbf{C})$ бўлади. L(X) даги амаллар мтрицаларни қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш амаллари билан устма-уст тушади.

3. Агар X – банах фазоси бўлса, B(X) орқали барча чегараланган операторли белгиласак B(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш λB, $A+B$, $A \circ B$ амалларига нисбатан алгебра ташкил қилади.

Мисол. 1. C(X) бирлик элементли халқа бўлади, бу ерда айний фукнция бирлик элемент вазифасини бажаради.

2. L(X) ва B(X) алгебралар хам бирлик элементли халқа бўлади, бу ерда айний e=E – оператор бирлик элемент вазифасини бажаради

3- МАВЗУ

Ҳалқалар гомоморфизмлари

$Q^* = Q\setminus\{0\}$, $R^* = R\setminus\{0\}$, $C^* = C\setminus\{0\}$

M(n, R)   детерминанти нолдан фарқли бўлган $n\times n$ матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа бўлади.

Ихтиёрий сондаги қисмгруппаларнинг кесишмаси яна қисм группа бўлишини кўрсатинг.

1) (Z,+,·). m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами m**Z, Z** нинг қисм ҳалқаси бўлади;

2) (**Q**,+,·) – рационал сонлар ҳалқаси;

3) (**R**,+,·) – ҳақиқий сонлар ҳалқаси. **Z** ва **Q** тўпламлар **R** нинг бирлик яримҳалқасидир;

4) M_n(**R**)–**R** майдонустида аниқланган nxn матрицалар ҳалқаси, бирли ҳалқа бўлади. n> 1 даM_n(R) - нокоммутатив, M_n(Q) , M_n(Z) – яримҳалқа;

5) **К**коммутатив ҳалқаустида аниқланган nxn матрицалар M_n(**К**) ҳалқаси,

6) Функциялар ҳалқаси. X –ихтиёрий тўплам, **К**- ҳалқа. Барча f: X→**K** функциялар K^x={f: X→**K**} тўплами f+g *йиғинди* ва fg кўпайтма:

$$(f+g)(x)=f(x)\oplus g(x),\ (fg)(x)=f(x)\otimes g(x),$$

амалларига нисбатан ҳалқа бўлади, бу ерда ⊕, ⊗– **К** ҳалқадаги амаллар.

7) Агар 0 ва 1**К**ҳалқанинг нол ва бирлик элементи бўлса, у ҳолда 0_x: x→ 0 ва 1_x: x→ 1 –ўзгармас функциялар K^x ҳалқанинг ноли ва бири бўлади.

Агар К –коммутатив бўлса, у ҳолда K^x – коммутатив.

Агар К=**R**ёкиX=[0.1] бўлса, K^x = $\mathbf{R}^{[0.1]}$ –[0; 1] да аниқланган барча ҳақиқий функциялар ҳалқасидир. У ўз ичига қуйидаги қисмҳалқаларни олади:

B[0.1] – барча чегараланган ҳақиқий функциялар ҳалқаси;

C[0.1] – барча ҳақиқий узлуксиз функциялар ҳалқаси.

8) **Z**, **Q**, **R**, **C** ҳалқаларда ab=0 ⇒ a=ёки b=0, аммо

а) M_n(R) ҳалқа ab=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$;

в) Z_4 ҳалқада $2\otimes 2=0$;

с) R^2 ҳалқада (1,0)(0,1)=0 ва б.

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Группа, ҳалқа ва майдонлар
Қисм группа. Қўшни синфлар.Фактор группа
Бутунлик соҳаси.Бош идеаллар ҳалқалар
Ассоциатив алгебралар хақида тушунчалар
Фактор ҳалқалар
Ноассоциатив алгебраларнинг турлари ва уларнинг таснифлаш

VII. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
бинар муносабат	бирор α: M×M →M акслантириш ёрдамида аниқланиб, ҳар бир (x, y) (x, y∈M) жуфтлик учун z=α(x, y)∈M элемент мос қуйиладигон мослик.	The map α: M×M →M, wich correspond to each par of (x, y) to element z=α(x, y)∈M.
ярим группа	ассоциативлик шартини қаноатлантирадиган бинарамали ва M тўплам.	The set with the operation which satisfy the assosiative low.
группа	ягона нейтрал элементга эга ва ҳар бир g∈G учун ягона тескари элементи мавжуд ярим группа	The semigroup which have unique unit element and any element g∈G has an inverse.
ҳалқа	иккита алгебраик (бинар) амал: + (қўшиш) ва * (кўпайтириш)аниқланган бўлиб (К1) (К,+) – Абелъ группа; (К2) (К,*) – яримгруппа; (К3) (a+b)* c=a* c+b* c, c* (a+b)=c* a+c* b, ∀a,b,c∈К. шартлар бажариладиган К тўплам.	The set with the two binary operation + (addition) and * (multiplication) (К1) (К,+) – Abelian group; (К2) (К,*) – semi-group; (К3) (a+b)* c=a* c+b* c, c* (a+b)=c* a+c* b, ∀a,b,c∈К.
бирли ҳалқа	бирлик элементнинг мавжуд ҳалқа	The ring with a unit element
идеал	ax∈I ∀a∈I, x∈ R шартни қаноатлактирадиган қисм тўплам	The subset of R that for any a∈I, x∈ R, ax∈I
алгебра	бирор (A, +, *) ҳалқада қўшимча бинар амал аниқланса	The ring (A, +, *) with another bunary operation
ассоциатив алгебра	ассоциатив (A, +, *) ҳалқа	The ring (A, +, *) with assosiative condition

коммутатив алгебра	коммутатив (A, +, *) халқа	The ring (A, +, *) with commutative condition
алгебранинг маркази	$a \in A$: $ax = xa$, $\forall x \in A$ шартни қаноатлантирадиган элементлар тўплами.	The subset, which any element $a \in A$: satisfying the condition $ax = xa$, $\forall x \in A$
Ли алгебраси -	$x,y,z \in G$ учун $[x, x] = 0$ ва $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] =0$ шартлари ўринли бўлган алгебра	The algebra with the following condition $[x, x] = 0$ and $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] =0$ for any elements $x,y,z \in G$
Зинбиел алгебраси	$x,y,z \in A$ элементи учун $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) + x\circ(z\circ y)$ тенглик ўринли бўлган алгебра.	The algebra with the following condition $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) + x\circ(z\circ y)$ for any elements $x,y,z \in A$
Лейбниц алгебраси	$x, y, z \in L$ элементлар учун $[x, [y, z]] = [[x, y], z] – [[x, z], y]$ айниятни бажарадиган *L* алгебра	The algebra with the following condition $[x, [y, z]] = [[x, y], z] – [[x, z], y]$ for any elements $x,y,z \in A$
дифференциаллаш	$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$ шартини бажарувчи d чизиқли акслантириш	The linear map with the condition $d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$
ечимли алгебра	$L^{(n)} = 0$ бўладиган *L* алгебра	The algebra with condition $L^{(n)} = 0$
нильпотентли	$L^s=0$ бўладиган *L* алгебра	The algebra with condition $L^s=0$
нилрадикали	алгебранинг максимал нилпотент идеали	The maximal nilpotent ideal of algebra

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

2. Меъёрий- ҳуқуқий хужжатлар.

II. Махсус адабиётлар.

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.
3. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.
4. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length (n–1) and their derivations. // Journal of Algebra. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488.
5. Barnes D.W. On Levi's theorem for Leibniz algebras. // Bull. Austr. Math. Soc., – 2012. - Vol. 86. - № 2. – P. 184-185.

Интернет ресурслар

1. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm
2. http://www.ruscommech.ru
3. http://www.knigapoisk.ru/book
4. www.natlib.uz
5. www.twirpx.com