ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

«АНАЛИЗНИНГ МАХСУС БОБЛАРИ»

МОДУЛИ БЎЙИЧА

Ў Қ У В – У С Л У Б И Й   М А Ж М У А

Тошкент – 2019

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

«Тасдиқлайман»
Тармоқ (минтақавий)
маркази директори
И.Хамиджонов
____
“___” _____ 2019 йил

“МАТЕМАТИК АНАЛИЗНИНГ МАХСУС БОБЛАРИ”
МОДУЛИ БЎЙИЧА

ИШЧИ ЎҚУВ ДАСТУРИ

Қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси йўналиши: Математика

Тингловчилар контингенти: Олий таълим муассасаларининг профессор-ўқитувчилари

Тошкент – 2019

Мазкур ишчи дастур Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йилнинг 2 ноябрдаги 1023 - сонли буйруғи билан тасдиқланган намунавий ўқув режа ва дастур асосида ишлаб чиқилган

Тузувчи: ЎзМУ, ф-м.ф.н., профессор
Ж.К.Тишабаев

Тақризчи: ЎзМУ, ф-м.ф.д., профессор
А.К.Варисов

Ишчи ўқув дастур ЎзМУ нинг Кенгашининг 2019 йил 29 августдаги 1 - сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган

КИРИШ

Дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли, 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сонли Фармонлари, шунингдек 2017 йил 20 апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ–2909-сонли қарори ҳамда 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789 – сонли Фармонида белгиланган устувор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касб маҳорати ҳамда инновацион компетентлигини ривожлантириш, соҳага оид илғор хорижий тажрибалар, янги билим ва малакаларни ўзлаштириш, шунингдек амалиётга жорий этиш кўникмаларини такомиллаштиришни мақсад қилади.

Мазкур дастур ривожланган хорижий давлатларнинг олий таълим соҳасида эришган ютуқлари ҳамда орттирган тажрибалари асосида “Математика” қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналиши учун тайёрланган намунавий ўқув режа ҳамда дастур мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан куроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир.

Дастур мазмуни олий таълимнинг норматив-ҳуқуқий асослари ва қонунчилик нормалари, илғор таълим технологиялари ва педагогик маҳорат, таълим жараёнларида ахборот-коммуникация технологияларини қўллаш, амалий хорижий тил, тизимли таҳлил ва қарор қабул қилиш асослари, махсус фанлар негизида илмий ва амалий тадқиқотлар, технологик тараққиёт ва ўқув жараёнини ташкил этишнинг замонавий услублари бўйича сўнгги ютуқлар, педагогнинг касбий компетентлиги ва креативлиги, глобал Интернет тармоғи, мультимедиа тизимлари ва масофадан ўқитиш усулларини ўзлаштириш бўйича янги билим, кўникма ва малакаларини шакллантиришни назарда тутади.

Дастур доирасида берилаётган мавзулар таълим соҳаси бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш мазмуни, сифати ва уларнинг тайёргарлигига қўйиладиган умумий малака талаблари ва ўқув режалари асосида шакллантирилган бўлиб, унинг мазмуни жамият ривожи ва таълим–тарбия жараёнининг инновацион масалалари, олий таълимнинг норматив-ҳуқуқий асослари ва қонунчилик ҳужжатлари, илғор таълим технологиялари ва педагогик маҳорат, таълим жараёнларида ахборот-коммуникация технологияларини қўллаш, амалий хорижий тил, тизимли таҳлил ва қарор қабул қилиш асослари, махсус фанлар негизида илмий ва амалий тадқиқотлар, ўқув жараёнини ташкил этишнинг замонавий услублари бўйича сўнгги ютуқлар, педагогнинг креатив компетентлигини ривожлантириш, глобал Интернет тармоғи, мультимедиа тизимларидан фойдаланиш ва масофавий ўқитишнинг замонавий шаклларини қўллаш бўйича тегишли билим, кўникма, малака ва компетенцияларни ривожлантиришга йўналтирилган. Қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналишининг ўзига хос хусусиятлари ҳамда долзарб масалаларидан келиб чиққан ҳолда дастурда тингловчиларнинг махсус фанлар доирасидаги билим, кўникма, малака ҳамда компетенцияларига қўйиладиган талаблар такомиллаштирилиши мумкин.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Математик анализнинг махсус боблари” модулининг мақсади: педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси тингловчиларини механика соҳасидаги энг сўнгги ютуқлар, муаммолар ва уларни ҳал этиш йўлларини аниқлаш усуллари, шунингдек, натижаларни амалий аҳамиятлари ва ишлаб чиқариш объектларида қўллаш йўлларини ўрганиш ҳисобланади.

Модулнинг вазифаси тингловчиларда математиканинг зарурий маълумотлари мажмуаси (тушунчалар, тасдиқлар ва уларнинг исботи, амалий масалаларни ечиш усуллари ва бошқалар) бўйича кўникмаларни шакллантириш ва янада ривожлантиришдан иборат.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

“Математик анализнинг махсус боблари” модулини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

- математик ва комплекс анализ ва унинг бўлимлари, уни ўқитиш бўйича янги технологияларни билиши;
- математик ва комплекс анализнинг муаммолари ва унинг ривожланиш истиқболлари;
- математик ва комплекс анализ ва уни ўқитиш бўйича янги назарий билимларга эга бўлиши;

Тингловчи:

- математик ва комплекс анализнинг амалиётга татбиқлари;
- чекли вариацияли функциялар, Стилтьес интеграли ва уларнинг хоссаларидан фойдаланиш;
- голоморф ва гармоник функциялар хамда уларнинг хоссаларидан фойдаланиш;
- Элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлардан фойдаланиш амалий кўникмаларини эгаллаши лозим.

Тингловчи:

- илмий тадқиқот ишларининг натижаларини тахлил қилиш;
- ўқув масканларида фан соҳаси ихтисослигидан келиб чиқиб педагогик фаолиятни режалаштириш ва амалга ошириш;

- математика фанлари соҳаларида методик ҳамда экспертлик ишларини олиб бориш ***компетенцияларига*** эга бўлиши лозим.

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“Математик анализнинг махсус боблари” курси маъруза ва амалий (семинар) машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган семинар машғулотларда техник воситалардан, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, коллоквиум ўтказиш ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Математик анализнинг махсус боблари” модули мазмуни ўқув режадаги “Таълимда ахборот-коммуникацион технологиялар” ўқув модули билан узвий боғланган ҳолда механиканинг долзарб муаммолари бўйича педагогларнинг касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар туташ муҳитлар, гидротехник иншоотлар, экспериментал механика, техника, қурилиш ва ишлаб чиқаришнинг бошқа соҳаларида учрайдиган муаммоларни тадқиқ қилиш йўлларини ўрганиш, уларни таҳлил қилиш ва амалда қўллашга касбий компетентликка эга бўладилар.

“Математик анализнинг махсус боблари” модул бўйича соатлар тақсимоти

<table>
<tr><td rowspan="3">№</td><td rowspan="3">Модул мавзулари</td><td colspan="3">Аудитория</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Жами</td><td colspan="2">жумладан</td></tr>
<tr><td>Назарий</td><td>Амалий</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Чекли вариацияли функциянинг таърифи, мисоллар, хоссалари.</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Комплекс аргументли функциялар</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Голоморф ва гармоник функциялар.</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Жами</td><td>16</td><td>6</td><td>10</td></tr>
</table>

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙМАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-мавзу: Чекли вариацияли функциянинг таърифи, мисоллар, хоссалари.

Чекли вариацияли функциянинг таърифи, мисоллар, хоссалари. Чекли вариацияга эга бўлган функциялар синфи. Чекли вариацияли фукциялар учун зарурий ва етарли шартлар.Тўғриланувчи чизиқлар ва Жордан теоремаси.

Стилтьес интегралининг таърифи ва унинг мавжудлик шарти. Стилтьес интегралининг хоссалари. Стилтьес интегралини ҳисоблаш. Стилтьес интегралини геометрик маъноси. Стилтьес интегралини баҳолаш. Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.

2-мавзу: Комплекс аргументли функциялар.

Комплекс аргументли функциялар Голоморф функциялар ва уларнинг хоссалари. Конформ акслантришлар. Чизикли функция, каср-чизикли функция, даражали функция, Жуковский функцияси, кўрсатикичли функция. тригонометрик функциялар.

3-мавзу: Гармоник функциялар.

Гармоник функциялар. Хоссалари. Гармоник функция ва голоморф функциялар орасидаги боғланиш. Пуассон формуласи. Гармоник функцияни синфга тегишлилиги. Харнак теоремаси.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модулни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, педагогик технологиялар ва ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва интерфаол педагогик (Ақлий хужим, Венн диаграммаси, концептуал жадвал) усул ва технологиялардан фойдаланилади;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, график органайзерлардан, кейслардан фойдаланиш, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, блиц-сўровлардан ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

I. Ўзбекистон Республикаси Президентининг асарлари

1. Каримов И.А. Ўзбекистон мустақилликка эришиш остонасида. -Т.: “Ўзбекистон”. 2011. - 440 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб ҳалқимиз билан бирга қурамиз. – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 488 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Миллий тараққиёт йўлимизни қатъият билан давом эттириб, янги босқичга кўтарамиз – Т.: “Ўзбекистон”. 2017. – 592 б.

II. Норматив-ҳуқуқий ҳужжатлар

4. Ўзбекистон Республикасининг Конституцияси. – Т.: Ўзбекистон. 2018.
5. Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни.
6. Ўзбекистон Республикасининг “Коррупцияга қарши курашиш тўғрисида”ги Қонуни.
7. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муасасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПФ-4732-сонли Фармони.
8. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар

стратегияси тўғрисида”ги 4947-сонли Фармони.

9. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 3 февралдаги “Хотин-қизларни қўллаб-қувватлаш ва оила институтини мустаҳкамлаш соҳасидаги фаолиятни тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5325-сонли Фармони.

10. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 17 июндаги “2019-2023 йилларда Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида талаб юқори бўлган малакали кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан такомиллаштириш ва илмий салоҳиятини ривожлантири чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4358-сонли Қарори.

11. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 11 июлдаги «Олий ва ўрта махсус таълим тизимига бошқарувнинг янги тамойилларини жорий этиш чора-тадбирлари тўғрисида »ги ПҚ-4391- сонли Қарори.

12. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 11 июлдаги «Олий ва ўрта махсус таълим соҳасида бошқарувни ислоҳ қилиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПФ-5763-сон Фармони.

13. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 августдаги “Олий таълим муассасалари раҳбар ва педагог кадрларининг узлуксиз малакасини ошириш тизимини жорий этиш тўғрисида”ги ПФ-5789-сонли Фармони.

14. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “2019-2021 йилларда Ўзбекистон Республикасини инновацион ривожлантириш стратегиясини тасдиқлаш тўғрисида”ги 2018 йил 21 сентябрдаги ПФ-5544-сонли Фармони.

15. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 27 майдаги “Ўзбекистон Республикасида коррупцияга қарши курашиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-5729-сон Фармони.

16. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 2 февралдаги “Коррупцияга қарши курашиш тўғрисида”ги Ўзбекистон Республикаси Қонунининг қоидаларини амалга ошириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2752-сонли Қарори.

17. Ўзбекистон Республикаси Президентининг "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сонли Қарори.

18. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Олий маълумотли мутахассислар тайёрлаш сифатини оширишда иқтисодиёт соҳалари ва тармоқларининг иштирокини янада кенгайтириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 27 июлдаги ПҚ-3151-сонли Қарори.

19. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Нодавлат таълим хизматлари кўрсатиш фаолиятини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 2017 йил 15 сентябрдаги ПҚ-3276-сонли Қарори.

20. Ўзбекистон Республикаси Президентининг “Олий таълим муассасаларида таълим сифатини ошириш ва уларнинг мамлакатда амалга оширилаётган кенг қамровли ислоҳотларда фаол иштирокини таъминлаш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги 2018 йил 5 июндаги ПҚ-3775-сонли Қарори.

21. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 26 сентябрдаги “Олий таълим муассасалари педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 278-сонли Қарори.

Ш. Махсус адабиётлар

22. Sadullaev A. Pluripotential theory. Application. Palmarium academic publishing. Germany. 2012

23. Brian S. Tomson Theory of integral. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, British Columbia 2012

24. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. 2-нашри, 1-қ.-М.,”Наука”, 1976.

25. Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Х. Комплекс анализ. (маърузалар). – Т.,”Университет” ,1998.

26. Тўйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К. Дополнительные главы анализа. «Университет», Ташкент 2015.

27. Туйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К., Джумабаев Д.Х., Китманов А.М., Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанидан мустақил ишлар, Т. “Мумтоз сўз”, 2018.

28. Садуллаев А., Худойбергангов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Тўйчиев Т. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм (комплекс анализ).- Т., “Ўзбекистон”, 2000.

29. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3-нашри. – М. “Наука”, 1975.

30. Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Сборник задач по теории аналитических функций, 2-нашри. –М., “Наука” 1972.

31. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. 4-нашри. –М., ”Наука”, 1973.

32. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М. “Наука”, 1976.

33. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. -М., “Просвещение”, 1977.

34. Клочко Т.В., Парфенова Н.Д. Решение задач комплексного анализа средствами Maple. Харьков. 2009.

35. Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. БХВ-Санкт-Петербург. 2001.

36. J.Stewart. Calculus, Broks/Cole, Cengage Learing,2012.

37. J. W. Brown, Ruel V. Churchill. Complex variables and applications. McGraw-Hill. 2009.

38. John H. Mathews, Russell W. Howell. Complex Analysis for Mathematics and Engineering. California State UniversityFullerton. Jones and Bartlett Publishers Canada.1997.

39. Charles Walkden. Complex Analysis. MATH20101. 2016

40. Christian Berg. Complex Analysis. Department of Mathematical Sciences. København. 2012.

IV. Интернет сайтлар

41. Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги: www.edu.uz.
42. Бош илмий-методик марказ: www.bimm.uz
43. www. Ziyonet. Uz
44. www.arxiv.org
45. www.ams.mathscinet.org
46. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm/
47. http://www.ruscommech.ru/
48. http://www.knigapoisk.ru/book
49. www.natlib.uz
50. www.twirpx.com

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“ФСМУ” методи

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

“Брифинг” методи

“Брифинг” – (инг. briefing – қисқа) бирор-бир масала ёки саволнинг муҳокамасига бағишланган қисқа пресс-конференция.

Ўтказиш босқичлари:

1. Тақдимот қисми.

2. Муҳокама жараёни (савол-жавоблар асосида).

Брифинглардан тренинг якунларини таҳлил қилишда фойдаланиш мумкин. Шунингдек, амалий ўйинларнинг бир шакли сифатида қатнашчилар билан бирга долзарб мавзу ёки муаммо муҳокамасига бағишланган брифинглар ташкил этиш мумкин бўлади. Талабалар ёки тингловчилар томонидан яратилган мобил иловаларнинг тақдимотини ўтказишда ҳам фойдаланиш мумкин.

III. НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР МАТЕРИАЛЛАРИ

1-мавзу: ЧЕКЛИ ВАРИАЦИЯЛИ ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.

РЕЖА:

1.1. Чекли вариацияли функциянинг таърифи. Чекли вариацияли функциялар синфи.
1.2. Чекли вариацияли функцияларнинг хоссалари.
1.3. Чекли вариацияли фукциялар учун зарурий ва етарли шартлар.
1.4. Тўғриланувчи чизиқлар. Жордан теоремаси.

Таянч иборалар: *чекли вариация, ўзгариши чегараланган функция, функциянинг тўлиқ вариацияси, мажоранта.*

1.1. Чекли вариацияли функциянинг таърифи. Чекли вариацияли функциялар синфи

Айтайлик, $f(x)$ функция чекли $[a;b]$ оралиқда аниқланган бўлсин. Бу оралиқни ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$$

тенгсизликларни қаноатлартирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида n та оралиққа бўламиз ва қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \qquad (1)$$

__**1-таъриф.**__ *Агар (1)-йиғиндилар $\forall n \in N$ учун юқоридан текис чегараланган бўлса, унда $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада* ***чекли вариацияга эга*** *ёки* ***ўзгариши чегараланган функция*** *дейилади. Шу йиғиндиларнинг аниқ юқори чегарасига*

функциянинг тўлиқ вариацияси *ёки* ***тўлиқ ўзгариши*** *деб аталади ҳамда у* $\bigvee_a^b f(x)$ *каби белгиланади:*

$$\bigvee_a^b f(x) := \sup\{\vartheta_n\} \qquad (2)$$

Баъзи ҳолларда $f(x)$ функциянинг чексиз ораликдаги (масалан, $[a,+\infty)$ ораликдаги) вариацияси тўғрисида ҳам гапириш мумкин бўлади. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ ораликда берилган бўлсин. **[1]**

2-таъриф. *Агар* $f(x)$ *функция* $\forall[a,A]\subset[a,+\infty)$ *ораликда чекли вариацияга эга бўлиб,* $\bigvee_a^A f(x)$ *тўлиқ вариациялар текис чегараланган бўлса, унда* $f(x)$ *функция* $[a,+\infty)$ *ораликда чекли вариацияга эга, деб аталади ҳамда:*

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A>a}\left\{\bigvee_a^A f(x)\right\} \qquad (3)$$

*деб қабул қилинади***.** **[1-3]**

Изох. $f(x)$ *функциянинг чекли вариацияга эга бўлишида унинг узлуксизлиги мутлақо аҳамиятга эга эмас.*

Мисоллар. 1) $[a;b]$ кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади.

◀ **а)** $[a;b]$ – чекли бўлсин. $\Rightarrow$

$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| =$ (функция монотон бўлгани учун модуллар йиғиндиси йиғиндининг модулига тенг бўлади) $= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]\right| =$

$$\left|f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})\right| = \left|f(x_n) - f(x_0)\right| =$$

$$\left|f(b) - f(a)\right| \Rightarrow \bigvee_a^b f(x) = Sup\{\vartheta_n\} = \left|f(b) - f(a)\right|.$$

б) $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ ораликда берилган бўлсин. $\Rightarrow$

$$\mathop{V}_{a}^{+\infty} f(x) := \sup_{A>a}\left\{\mathop{V}_{a}^{A} f(x)\right\} = \sup_{A>a}\{|f(A)-f(a)|\} = |f(+\infty)-f(a)|,$$

бу ерда $f(+\infty)=\lim\limits_{A\to\infty} f(A)$.►

2) Энди узлуксиз, лекин чекли вариацияга эга бўлмаган функцияга мисол келтирамиз.

◄ Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \quad \text{бўлса,} \\ 0, & \text{агар} \quad x=0, \quad \text{бўлса} \end{cases}$$

функцияни $[0;1]$ кесмада караймиз. Қуйидаги:

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар ёрдамида $[0;1]$ кесмани оралиқларга ажратамиз ва (1)-йиғиндини ҳисоблаймиз ҳамда ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\vartheta_n=\sum|f(x_{k+1})-f(x_k)|=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\mathop{V}_{0}^{1} f(x)=\sup\{\vartheta_n\}=\sup_{n}\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}=+\infty. \ ►$$

Чекли вариацияли функциялар синфи.

Аввалги пунктда кўрганимиздек $[a;b]$ кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади. Бу хоссадан фойдаланиб, чекли вариацияли функциялар синфини кенгайтириш мумкин.

1-теорема. $[a;b]$ *кесмада берилган* $f(x)$ *функция шу кесмада бўлакли монотон бўлса, яъни:*

$$[a,b]=\bigcup_{k=0}^{m-1}[a_k,a_{k+1}],\ (a_0=a,\ a_m=b)$$

бўлиб, $f(x)$ *функция ҳар бир* $[a_k,a_{k+1}]$ *кесмада монотон бўлса, унда* $f(x)$ *функция* [a,b] *кесмада чекли вариацияга эга бўлади.* **[2]**

◄ $[a;b]$ кесманинг ихтиёрий бўлинишини олиб:

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1} - f(x_k) \right|$$

йиғинди тузамиз. Бу бўлинишга $a_k (k = \overline{0,m})$ нуқталарни қўшиб, $[a;b]$ кесманинг янги бўлинишини оламиз. Янги бўлиниш учун:

$$\overline{\vartheta}_{n(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \left| f(a_{k+1}) - f(a_k) \right| = B$$

бўлиб, $\vartheta_n \le \overline{\vartheta}_{n(m)}$ тенгсизлик бажарилади. Демак, $\sup\{\vartheta_n\} \le B \Rightarrow f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга.►

<u>2-теорема</u>. *Агар* $f(x)$ *функция* $[a;b]$ *кесмада Липщиц шартини қаноатлантирса, яъни шундай L>0 сон топилсаки, ихтиёрий* $x, \overline{x} \in [a,b]$ *нуқталар учун:*

$$\left| f(\overline{x}) - f(x) \right| \le L \cdot \left| \overline{x} - x \right| \qquad (4)$$

тенгсизлик бажарилса, унда $f(x)$ *функция [a,b] кесмада чекли вариацияли функция бўлади ва:*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \le L \cdot (b-a)$$

тенгсизлик бажарилади. **[1]**

◄ $\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| \overset{(4)}{\le} L \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = L \cdot (b-a), \quad \forall n \in \mathrm{N}$ учун $\Rightarrow$

$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) \le L \cdot (b-a)$ ►

<u>3-теорема.</u> А*гар* $f(x)$ *функция* $[a;b]$ *кесмада чегараланган ҳосилага эга бўлса, унда* $f(x)$ *функция* $[a;b]$ *кесмада чекли вариацияга эга бўлади.* **[1-2]**

◄ Теорема шартига кўра шундай ўзгармас $L > 0$ сон топиладики, $\forall x \in [a,b]$ учун

$$\left| f'(x) \right| \le L$$

тенгсизлик бажарилади. $\forall x, \overline{x} \in [a,b]$ нуқталар олиб $[x; \overline{x}]$ (ёки $[\overline{x}; x]$) кесмада Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасидан фойдаланамиз:

$$\left| f(\bar{x}) - f(x) \right| = \left| f'(\xi) \cdot (\bar{x} - x) \right| \le L \cdot \left| (\bar{x} - x) \right|.$$

Демак, $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада Липщиц шартини қаноатлантирар экан. Унда 2-теоремага кўра у чекли вариацияга эга бўлади. ►

4-теорема. *Агар $[a;b]$ кесмада аникланган $f(x)$ функцияни шу кесмада ушбу*

$$f(x) = c + \int_a^x \phi(t)dt \tag{5}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу ерда $\phi(t)$ функция [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи функция, у ҳолда $f(x)$ функция шу кесмада чекли вариацияга эга бўлиб,

$$\bigvee_a^b f(x) \le \int_a^b |\phi(t)| dt$$

тенгсизлик бажарилади ***[1,3].***

◄ Теореманинг исботи ушбу:

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(t)dt \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\phi(t)| dt \le \int_a^b |\phi(t)| dt$$

тенгсизликдан келиб чиқади. ►

1.2. Чекли вариацияли функцияларнинг хоссалари.

Айтайлик, чекли [a,b] кесма берилган бўлсин.

5-теорема. *[a,b] кесмадаги ихтиёрий чекли вариацияли функциялар шу кесмада чегараланган бўлади.*

◄ $\forall x' \in (a,b]$ нуқта оламиз. Унда шартга кўра:

$$\vartheta_2 = \left| f(x') - f(a) \right| + \left| f(b) - f(x') \right| \le \bigvee_a^b f(x) \tag{6}$$

бўлади. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| f(x') \right| = \left| f(x') - f(a) + f(a) \right| \le \left| f(x') - f(a) \right| + \left| f(a) \right| \overset{(6)}{\le} \bigvee_a^b f(x) + \left| f(a) \right| = M \Rightarrow$$

$f(x)$ чегараланган. ►

6-теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлса, унда:*

а) $f(x)\pm g(x)$;

б) $f(x)\cdot g(x)$

функциялар ҳам шу кесмада чекли вариацияли бўлади.

7-теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлиб, шу кесмада* $|g(x)|\geq c>0$ *бўлса, унда* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *нисбат ҳам [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлади.*

8-теорема. *Айтайлик,* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада аниқланган ва* $c\in(a,b)$ *бўлсин. Агар* $f(x)$ *функция [a,b] да чекли вариацияли бўлса, унда у [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияли бўлади ва аксинча. Шунингдек,*

$$\mathop{V}_{a}^{b} f(x)=\mathop{V}_{a}^{c} f(x)+\mathop{V}_{c}^{b} f(x) \tag{7}$$

тенглик бажарилади.

◄ Фараз қилайлик $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлсин [a,c] ва [c,b] ораликнинг ҳар бирини $\forall$ усул билан алохида кесмаларга ажратамиз:

$$a=y_0<y_1<y_2<\dots y_m=c;\quad c=z_0<z_1<z_2<\dots z_\ell=b \tag{8}$$

Натижада, бутун [a,b] кесма ҳам қисмларга ажралади. [a,c] ва [c,b] кесмалар учун қуйидаги йиғиндиларни тузамиз:

$$\vartheta_1^{(m)}=\sum_{\kappa=0}^{m-1}\left|f(y_{k+1})-f(y_k)\right|;\qquad \vartheta_2^{\ell}=\sum_{i=0}^{\ell-1}\left|f(z_{i+1})-f(z_i)\right| .$$

$\Rightarrow[a,b]$ учун $\vartheta_n=\vartheta_1^{(m)}+\vartheta_2^{\ell}$ бўлади. $\Rightarrow \vartheta_1^{(m)}+\vartheta_2^{(1)}=\vartheta_n\leq\mathop{V}_{a}^{b} f(x)\Rightarrow\ \vartheta_1^{(m)}\leq\mathop{V}_{a}^{b} f(x)$

ва

$$\vartheta_2^{(\ell)}\leq\mathop{V}_{a}^{b} f(x).\Rightarrow$$

$f(x)$ функция [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга ва қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \le \bigvee_a^b f(x) \qquad (9)$$

Энди фараз қилайлик, $f(x)$ функция [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга бўлсин. [a,b] кесманинг ихтиёрий бўлинишини оламиз. Агар с нуқта бўлиниш нуқталарига кирмаса, унда с ни ҳам бўлиниш нуқталарига қўшамиз. Натижада, ϑ_n йиғинди фақат катталашиши мумкин:

$$\vartheta_n \le \vartheta_1^{(m)} + \vartheta_2^{\ell} \le \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга ва:

$$\bigvee_a^b f(x) \le \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \qquad (10)$$

тенгсизлик бажарилади. (9)- ва (10)-тенгсизликлардан (7)-тенгсизлик келиб чиқади. ►

Бу теоремадан натижа сифатида қуйидаги хосса келиб чиқади.

9-теорема. *Агар* $f(x)$ *фукнция* [a,b] *кесмада чекли вариацияга эга бўлса, унда ихтиёрий* $x \in [a,b]$ *учун:*

$$g(x) = \bigvee_a^x f(t)$$

тўлиқ вариация х ўзгарувчининг монотон ўсувчи ва чегараланган фукцияси бўлади.

1.3. Чекли вариацияли фукциялар учун зарурий ва етарли шартлар.

Айтайлик, $f(x)$ функция [a,b] оралиқда аниқланган бўлсин. Бу параграфда биз берилган $f(x)$ функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши мезонларини келтирамиз.

10-теорема. *$f(x)$ функциянинг [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун шу кесмада монотон ўсувчи ва чегараланган шундай $F(x)$ функциянинг мавжуд бўлиб ихтиёрий $[x', x''] \subset [a,b]$ кесмада:*

$$\left| f(x'') - f(x') \right| \le F(x'') - F(x') \qquad (11)$$

*тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли**[1,2]**.*

Шундай хоссага эга бўлган $F(x)$ функцияга $f(x)$ функция учун **мажоранта** дейилади.

11-теорема. *$f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун уни шу оралиқда иккита монотон ўсувчи ва чегараланган функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлиши зарур ва етарли:*

$$f(x) = g(x) - h(x) \qquad (12)$$

◄ **Зарурлиги.** Айтайлик, $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлсин. Унда 10-теоремага кўра шундай мажоранта $F(x)$ топиладики, унинг учун (11)- тенгсизлик бажарилади. Тузилишига кўра $F(x)$ функция монотон ўсувчи ва чегараланган. Агар:

$$g(x) = F(x) \text{ ва } h(x) = F(x) - f(x)$$

деб белгиласак, $f(x) = g(x) - h(x)$ бўлади ҳамда қуйидаги муносабат бажарилади:

$$h(x'') - h(x') = \left[F(x'') - F(x')\right] - \left[f(x'') - f(x')\right] \overset{(11)}{\ge} 0,$$

$x'' \ge x$ ва $x'', x' \in [a,b]$ $\Rightarrow h(x) \uparrow$ ва чегараланган, чунки:

$$|h(x)| \le |F(x)| + |f(x)| \le M .$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар [a,b] кесмада монотон ўсувчи ва (12)-тенгсизлик бажарилсин.

$$F(x) = g(x) + h(x)$$

деб олиб, унинг $f(x)$ учун мажоранта бўлишини кўрсатамиз:

$$\left|f(x'')-f(x')\right|=\left|\left[g(x'')-g(x')\right]-\left[h(x'')-h(x')\right]\right|\le\left|g(x'')-g(x')\right|+$$

$$+\left|h(x'')-h(x')\right|=\left[g(x'')-g(x'')\right]+\left[h(x'')-h(x')\right]=\left[g(x'')+h(x'')\right]-$$

$$-\left[g(x')+h(x')\right]=F(x'')-F(x')\ \Rightarrow\ F(x) \text{ – мажоранта.}$$

Унда 10-теоремага кўра $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлади.►

<u>Натижа</u>. *Агар $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлса,унда $\forall x_0\in\left[a,b\right]$ нуктада унинг чекли бир томонли лимитлари мавжуд:*

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x);\qquad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x) \tag{13}$$

◄ 11-теоремага кўра шундай ўсувчи ва чегараланган $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар топиладики,

$$f(x)=g(x)-h(x)$$

тенглик бажарилади. Математик анализ курсидан маълумки, монотон функциялар учун чекли:

$$\lim_{x\to x_0\pm 0}g(x)=g(x_0\pm 0) \text{ ва } \lim_{x\to x_0\pm 0}h(x)=h(x_0\pm 0)$$

лар мавжуд $\Rightarrow$ **(13)**. ►

1.4. Тўғриланувчи чизиқлар. Жордан теоремаси.

<u>12-теорема.</u> *$f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияли функция бўлиб, $x_0\in\left[a,b\right]$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, унда:*

$$g(x)=\bigvee_a^x f(t)$$

функция ҳам x_0 нуктада узлуксиз бўлади.

◄ $x_0<b$ деб фараз қиламиз ва $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз эканлигини исботлаймиз. $\forall\varepsilon>0$ сон олиб, $\left[x_0;b\right]$ кесмани ушбу:

$$x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай нуқталар ёрдамида кесмаларга ажратамизки, натижада:

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| > \bigvee_{x_0}^{b} f(t) - \varepsilon \qquad (14)$$

тенгсизлик бажарилсин.

$f(x) \in C\{x_0\}$, бўлгани учун, x_1 нуқтани x_0 нуқтага шундай яқин олиш мумкинки, $\left|f(x_1) - f(x_0)\right| < \varepsilon$ бўлсин. Унда (14) га кўра:

$$\bigvee_{x_0}^{b} f(t) < \varepsilon + \vartheta_n = \varepsilon + \sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| = \varepsilon + \left|f(x_1) - f(x_0)\right| +$$
$$+\bigvee_{k=1}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| < \varepsilon + \varepsilon + \bigvee_{k=1}^{n-1}\left|f(x_{k+1}) - f(x_k)\right| \le 2\varepsilon + \bigvee_{x_1}^{b}\left|f(t)\right|$$

бўлади. Демак, $\bigvee_{x_0}^{b} f(t) - \bigvee_{x_1}^{b} f(t) < 2\varepsilon$ ёки $\bigvee_{x_0}^{x_1} f(x) < 2\varepsilon$ муносабат ўринли. $\Rightarrow$

$g(x_1) - g(x_0) < 2\varepsilon$. $g(x)$ функция ўсувчи бўлгани учун $\Rightarrow$

$$0 \le g(x_0 + 0) - g(x_0) < 2\varepsilon$$

Бу тенгсизлик ва ε нинг ихтиёрийлигидан фойдалансак,

$$g(x_0 + 0) = g(x_0)$$

тенгликни, яъни $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз эканлигини ҳосил қиламиз.

$x_0 > a$ бўлган ҳолда $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада чапдан узлуксиз эканлиги ҳам шу каби кўрсатилади.►

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чикади.

Натижа. *[a,b] кесмадаги чекли вариацияли узлуксиз* $f(x)$ *функцияни шу кесмада иккита узлуксиз, ўсувчи функциянинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин:*

$$f(x) = g(x) - h(x).$$

13-теорема. *Айтайлик,* $f(x) \in C[a,b]$ *бўлсин. [a,b] кесмани ушбу*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида қисмларга ажратамиз ва:

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1}) - f(x_k)\right]$$

йиғиндини оламиз. Унда, агар:

$$\lambda = \max_{k=\overline{0,n-1}} (x_{k+1} - x_k)$$

бўлса, Ушбу:

$$\lim_{\lambda\to 0} \vartheta_n = \bigvee_a^b f(x) \tag{15}$$

тенглик ўринли бўлади.

◀ Бизга маълумки,

$$\bigvee_a^b f(x) = \sup\{\vartheta_n\}$$

ва бўлиниш нуқталарига нисбатан $\{\vartheta_n\}\uparrow$. Демак, теоремани исботлаш учун ушбу:

$$\sup\{\vartheta_n\} = \lim_{\lambda\to 0}\vartheta_n \tag{16}$$

тенгликнинг бажарилишини кўрсатиш кифоя.

Фараз қилайлик,

$$Sup\{\vartheta_n\} = A \tag{12}$$

бўлсин. Унда аниқ юқори чегаранинг таърифга кўра қуйидагиларни хосил қиламиз:

1) $\forall n \in N$ учун $\vartheta_n \le A$

2) $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам $\exists n_0 \in N$ топиладики,

$\vartheta_{n_0} > A - \varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

$\{\vartheta_n\}\uparrow$. $\Rightarrow$ $\forall n > n_0$ учун $\vartheta_n > A - \varepsilon$ булади.

Демак , $\forall n > n_0$ учун:

$$A - \varepsilon < \vartheta_n \le A < A + \varepsilon$$

экан. $\Rightarrow$ Кетма-кетлик лимитининг таърифига кўра:

$$\lim_{\lambda\to 0}\vartheta_n = A \tag{18}$$

тенглик ўринли. (17) ва (18) дан $\Rightarrow$ (16). ▶

Чекли вариацияли функция тушунчаси эгри чизиқнинг тўғриланувчилиги масаласида ўз татбиқини топган.

Айтайлик,

$$\overset{\cup}{AB} = (L): \begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t), \quad t \in [t_0; T] \end{cases} \qquad (19)$$

содда эгри чизиқ берилган бўлиб, $\phi(t), \psi(t) \in C[t_0; T]$ бўлсин. Фараз қилайлик, t параметр t_0 дан T га қараб ўзгарганда, унга L эгри чизиқда мос келувчи:

$$(x, y) = (\phi(t), \quad \psi(t))$$

нуқта A нуқтадан B нуқтага қараб ўзгарсин.

$[t_0; T]$ кесмада ушбу: $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталарни олиб, уларга (L) эгри чизиқда мос келган нуқталарни $A = A_0 < A_1 < A_2 < \ldots < A_n = B$ деб белгилаймиз. Бу нуқталарни кетма-кет туташтириш натижасида (L) эгри чизиққа чизилган синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқнинг периметри:

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{[\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)]^2 + [\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k)]^2} \qquad (20)$$

тенглик ёрдамида ифодаланади.

<u>3-таъриф</u>. *Агар ушбу:*

$$\lim_{\lambda \to 0} P_n = L \qquad (\lambda = \max_{k=0,\overline{n-1}} (t_{k+1} - t_k))$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, унда (L) эгри чизиқ ***тўғриланувчи чизи****қ дейилади ҳамда лимитнинг қиймати L га унинг* ***узунлиги*** *деб аталади.*

<u>14-теорема</u> ***(Жордан теоремаси).*** *(19)-эгри чизиқнинг туғриланувчи бўлиши учун $\phi(t)$ ва $\psi(t)$ фунцияларнинг $[t_0; T]$ оралиқда чекли вариацияга эга бўлиши зарур ва етарли.*

Эгри чизик ёйи узунлигини $L = L(t)$ деб уни $[t_0; t]$ оралиқда қараймиз. Унда $L(t) \uparrow$ бўлади ва $\Delta t > 0$ бўлганда $\Delta L = L(t + \Delta t) - L(t)$ учун:

$$0 < \Delta L < \bigvee_t^{t+\Delta t} \varphi(t) + \bigvee_t^{t+\Delta t} \psi(t)$$

тенгсизликлар бажарилади. $\Rightarrow$ Узлуксиз тўғриланувчи эгри чизиқ учун $L(t)$ функция t параметрининг узлуксиз функцияси бўлади.

Назорат саволлари:

1. Чекли вариацияли функциялар таърифи.
2. Функциянинг тўлиқ вариацияси нима?
3. Чекли вариацияли функциялар синфи.
4. Чекли вариацияли фукциялар учун зарурий шартлар.
5. Чекли вариацияли фукциялар учун етарли шартлар.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Туйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К., Кутлимуратов А.Р., Каримов Ж.Ж. Дополнителные главы анализа, Т. “Университет”. 2015.
2. Brian S. Tomson Theory of integral. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, 2012.

2-мавзу: Стилтьес интеграли ва унинг хоссалари.

РЕЖА:

2.1. Стилтьес интегралининг таърифи ва унинг мавжудлик шарти.

2.2. Стилтьес интегралининг хоссалари.

2.3.Стилтьес интегралини ҳисоблаш.

2.4. Стилтьес интегралининг геометрик маъноси ва интегрални баҳолаш.

2.5.Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.

Таянч иборалар: *Стилтьес интеграли, бўлаклаб интеграллаш усули, текис яқинлашиш.*

2.1. Стилтьес интегралининг таърифи ва унинг мавжудлик шарти.

Стилтьес интеграли Риман интегралининг табиий умумлашмаси бўлиб, қуйидагича аниқланади. Айтайлик, [a,b] кесмада 2 та чегараланган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. [a,b] кесмани ушбу:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = \mathrm{b}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида n та $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, қисмларга ажратамиз. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ва $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$ деб белгилаймиз. $\forall \xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ нуқта олиб, ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k) \qquad (21)$$

(1)-йиғиндига **Стилтьеснинг интеграл йиғиндиси** дейилади.

<u>1-таъриф</u>. *Агар* $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=I$ *мавжуд ва чекли бўлиб, унинг қиймати [a,b] кесманинг бўлиниш усулига ҳамда ундаги* ξ_k *нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, унда шу сонга* $f(x)$ ***функциянинг*** $g(x)$ ***функция бўйича Стилтьес интеграли*** *дейилади ва* $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ *каби белгиланади* ***[1-3]***.

Демак,

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x):=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k). \qquad (22)$$

Агар (22)-интеграл мавжуд **бўлса**, унда $f(x)$ **функция** [a,b] **кесмада** $g(x)$ **функция бўйича интегралланувчи** деб аталади.

Энди Стилтьес интегралининг мавжудлик шартини аниқлаймиз. Фараз қилайлик, $g(x)$ функция монотон ўсувчи бўлсин. У ҳолда $\Delta x_k>0$ бўлганда $\Delta g(x)>0$ бўлади. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\begin{gathered} m_k=\inf_{[x_k,x_{k+1}]}\{f(x)\}, \qquad M_k=\sup_{[x_k,x_{k+1}]}\{f(x)\}, \\ \underline{S}=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta g(x_k), \qquad \overline{S}=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta g(x_k). \end{gathered} \qquad (23)$$

<u>2-таъриф</u>. $\underline{S}$ *ва* $\overline{S}$ *йиғиндилар мос равишда* ***Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йиғиндилари*** *деб аталади* **.**

Оддий Дарбу йиғиндилари каби бу йиғиндилар ҳам қуйидаги хоссаларга эга.

1^0**.** *Агар [a,b] кесманинг бўлиниш нуқталарига янгилари қўшилса, унда* $\underline{S}$ *фақат ортиши,* $\overline{S}$ *эса камайиши мумкин.*

Демак, $\underline{\{S\}}\uparrow$ ва $\{\overline{S}\}\downarrow$.

2^0. *Дарбу–Стилтьеснинг ихтиёрий қуйи йиғиндиси унинг ихтиёрий юкори йиғиндисидан катта бўла олмайди (агар у бошқа бўлинишга мос келса ҳам).*

Агар ушбу:

$$I_* = Sup\left\{\underline{S}\right\} \quad \text{ва} \quad I^* = \inf\left\{\overline{S}\right\}$$

тенгликлар ёрдамида Дарбу–Стилтьеснинг **қуйи ва юқори интегралларини** аниқласак, унда:

$$\underline{S} \le I_* \le I^* \le \overline{S}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликлар ва Дарбу - Стилтьес йиғиндиларидан фойдаланиб, оддий Риман интеграли ҳолидаги каби қуйидаги теорема осонгина исботланади.

<u>1-теорема.</u> *Стилтьес интегралининг мавжуд бўлиши учун ушбу:*

$$\lim_{\lambda\to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$$

ёки:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta g(x_k) = 0 \tag{24}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли $(\omega_k = M_k - m_k)$.

Стилтьес интеграли мавжуд бўлган функциялар синфи

<u>2-теорема.</u> *Агар* $f(x) \in C[a,b]$ *бўлиб,* $g(x)$ *функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлса, у холда:*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) \tag{25}$$

*Стилтьес интеграли мавжуд бўлади***[1,3].**

◄ $f(x) \in C[a,b]$ $\Rightarrow$ Кантор теоремасига кўра текис узлуксиз $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, [a,b] кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажратилганда, $f(x)$ функциянинг шу бўлаклардаги тебраниши ω_k учун ушбу: $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$ тенгсизлик бажарилади. Энди [a,b] кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган қисмларга ажратамиз. $\Rightarrow$ $\lambda<\delta$ ва $\omega_k<\dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}.\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{k=0}^{n-1}\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\cdot\left[g(b)-g(a\right]=\varepsilon \ \Rightarrow\ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)=0\ \Rightarrow$$

(25)-интеграл мавжуд.►

<u>3-теорема</u>. *Агар* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб,* $g(x)$ *функция Липщиц шартини қаноатлантирса, яъни:*

$$\left|g(\bar{x})-g(x)\right|\le L\cdot(\bar{x}-x)$$
$$(L=const, a\le x\le \bar{x}\le b) \qquad (26)$$

тенгсизлик бажарилса, унда (5)-Стилтьес интеграли мавжуд бўлади[1,3].

◄ а) Аввал хоссани $g(x)$ функция (6)-шартни бажаришдан ташқари монотон ўсувчи бўлган ҳол учун исботлаймиз.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)<\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]\overset{(6)}{\le} L\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(x_{\kappa+1}-x_k)=$$
$$=L\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k \qquad (27)$$

$f(x)$ функция [a,b] да Риман маъносида интегралланувчи бўлгани учун $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k=0$ ва мос равишда (27)-тенгсизликка кўра $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k)=0$ бўлади. $\Rightarrow$ (25)-интеграл мавжуд**.**

б) Умумий ҳол. Липщиц шартини каноатлантирувчи $g(x)$ функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$g(x)=L\cdot x-\left[L\cdot x-g(x)\right]=g_1(x)-g_2(x). \qquad (28)$$

(28)-тенгликдаги $g_1(x)=L\cdot x$ функция Липшиц шартини қаноатлантириши билан бир қаторда монотон ўсувчи ҳам бўлади. Шу шартларни $g_2(x)=L\cdot x-g(x)$ функция хам бажаради. Дархақиқат, $a\le x\le\bar{x}\le b$ учун:

$$g_2(\bar{x})-g_2(x)=L(\bar{x}-x)-\left[g(\bar{x})-g(x)\right]\overset{(6)}{\geq}L\cdot(\bar{x}-x)-L\cdot(\bar{x}-x)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \{g_2(x)\}\uparrow$$

ва

$$\left|g_2(\bar{x})-g_2(x)\right|\leq L(\bar{x}-x)+\left|g_2(\bar{x})-g_2(x)\right|\overset{(6)}{\leq}L(\bar{x}-x)+L(\bar{x}-x)=$$
$$=2L(\bar{x}-x).$$

а) ҳолга кўра $g_1(x)$ ва $g_2(x)$ лар учун (24) шарт бажарилади $\Rightarrow$ (24)-шарт $g(x)$ функция учун ҳам бажарилади $\Rightarrow$ (25)-интеграл мавжуд. ►

4-теорема. *Агар $f(x)$ функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функцияни ушбу:*

$$g(x)=c+\int_a^x \phi(t)dt, \tag{29}$$

бу ерда $\phi(x)-[a,b]$ кесмада абсолют интегралланувчи функция, кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, унда (25)-интеграл мавжуд бўлади.

2.2. Стилтьес интегралининг хоссалари.

Стилтьес интегралининг таърифидан тўғридан тўғри қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

1^0. $(S)\int_a^b dg(x)=g(b)-g(a).$

2^0. $(S)\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]dg(x)=(S)\int_a^b f_1(x)dg(x)\pm(S)\int_a^b f_2(x)dg(x).$

3^0. $(S)\int_a^b f(x)d\left[g_1(x)\pm g_2(x)\right]=(S)\int_a^b f(x)dg_1(x)\pm(S)\int_a^b f(x)dg_2(x).$

4^0. $(S)\int_a^b k\cdot f(x)d(\ell\cdot g(x))=(S)k\cdot\ell\int_a^b f(x)dg(x).$

5^0. $(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(S)\int_a^c f(x)dg(x)+(S)\int_c^b f(x)dg(x) \quad (a<c<b)$

Мисол. [-1;1] кесмада берилган ушбу:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар} \quad -1\le x\le 0 \quad \text{бўлса},\\ 1, & \text{агар} \quad 0<x\le 1 \quad \text{бўлса}\end{cases} \quad \text{ва} \quad g(x)=\begin{cases}0, & \text{агар} \quad -1\le x<0 \quad \text{бўлса},\\ 1, & \text{агар} \quad 0\le x\le 1 \quad \text{бўлса}\end{cases}$$

функцияларни оламиз. Унда $(S)\int\limits_{-1}^{0} f(x)dg(x)$ ва $(S)\int\limits_{0}^{1} f(x)dg(x)$ интеграллар мавжуд ва нолга тенг бўлади, чунки иккала ҳолда ҳам Стилтьес йиғиндисида қатнашган ҳадлар 0 га тенг. Энди $(S)\int\limits_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ интегралнинг мавжуд эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун [-1;1] кесманинг шундай бўлинишини оламизки, 0 нуқта бўлиниш нуқтаси бўлмасин. Интеграл йиғиндини тузамиз: $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)=$((айтайлик, $0\in[x_k,x_{k+1}]$ бўлсин $\Rightarrow$ $x_k<0<x_{k+1}$ $\Rightarrow$ йиғиндидаги k-чи қўшилувчидан бошқа ҳаммаси нолга тенг бўлади, чунки $i\neq k$ да

$$\Delta g(x_i)=g(x_{i+1})-g(x_i)=0))=f(\xi_k)\cdot\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]=f(\xi_k)\cdot(1-0)=$$

$$=f(\xi_k)=\begin{cases}0, & \text{агар} \quad \xi_k<0 \quad \text{бўлса},\\ 1, & \text{агар} \quad \xi_k>0 \quad \text{бўлса}\end{cases} \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}\sigma-\nexists \Rightarrow (S)\int\limits_{-1}^{1} f(x)dg(x)-\nexists$$

2.3. Стилтьес интегралини хисоблаш.

5-теорема. $f(x)$ *функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб,* $g(x)$ *функция ушбу*

$$g(x)=c+\int\limits_{a}^{x}\varphi(t)dt$$

кўринишда ифодалансин, бу ерда $\varphi(t)$ *функция [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи функция. У ҳолда*

$$(S)\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x)=(R)\int\limits_{a}^{b} f(x)\varphi(x)dx \qquad (30)$$

тенглик ўринли бўлади.

◄(30)-тенгликнинг ўнг томонидаги Риман интеграли теорема шартига кўра мавжуд. Стилтьес интеграли мавжудлиги эса 8-пунктдаги 4-теоремада исботланган. Энди фақат (30)-тенгликнинг ўринли эканлигини исботлаш керак.

Умумийликка зиён келтирмаган ҳолда $\varphi(x) > 0$ деб фараз қиламиз, чунки ихтиёрий $\varphi(x)$ функцияни иккита мусбат $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

Бунинг учун

$$\varphi_1(x) = \frac{|\varphi(x)| + \varphi(x)}{2} \quad \text{ва} \quad \varphi_2(x) = \frac{|\varphi(x)| - \varphi(x)}{2}$$

деб олиш кифоя**.**

Одатдаги усул билан Стилтьес йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right] = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k)\varphi(x)dx \tag{31}$$

Иккинчи томондан

$$(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \tag{32}$$

тенглик ўринли.(31) дан (32) ни айирамиз ва айирмани бахолаймиз:

$$\left|\sigma - (R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(\xi_k) - f(x)\right]\varphi(x)dx\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|f(\xi_k) - f(x)\right|\varphi(x)dx = ((x \in \left[x_k, x_{k+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f(\xi_k) - f(x)\right| \le \omega_k)) \le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) \tag{33}$$

Шартга кўра $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ - мавжуд $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta g(x_k) = 0 \overset{(15)}{\Rightarrow} \lim_{\lambda\to 0} \sigma = \int_a^b f(x)dx \Rightarrow \quad (30).►$$

Исботланган теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теорема хам осон исботланади.

6-теорема. *Айтайлик, $f(x)$ функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи, $g(x) \in C[a,b]$, $g(x)$ функция учун [a,b] кесманинг чекли сондаги нуқталардан ташқари барча нуқталарида $g'(x)$ ҳосила мавжуд бўлиб, $g'(x)$ ҳосила [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи бўлсин. Унда*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{34}$$

бўлади.

◄Теорема шартини қаноатлантирувчи $g(x)$ функция учун

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)dt$$

формула ўринли бўлади. Унда $\varphi(t)=g'(t)$ бўлган ҳолда 5-теоремага кўра (34)–тенгликни ҳосил қиламиз.►

Энди $g(x)$ функция узилишга эга бўлган ҳолда Стилтьес интегралини хисоблашни ўрганамиз.

Уни узилишига эга бўлган **«стандарт»** $\rho(x)$ функциядан бошлаймиз.

$$\rho(x)=\begin{cases}0, & агар \quad x\le 0 \quad бўлса,\\ 1, & агар \quad x>0 \quad бўлса\end{cases}$$

$\rho(x)$ функция $x=0$ нуқтада 1-тур узилишга эга бўлиб, унинг шу нуқтадаги сакраши

$$\rho(+0)-\rho(0)=1$$

бўлади.

$\rho(x)$ функцияси каби, ушбу

$$\rho(x-c)=\begin{cases}0, & агар \quad x\le c \quad бўлса,\\ 1, & агар \quad x>c \quad бўлса\end{cases}$$

ва

$$\rho(c-x)=\begin{cases}0, & агар \quad x<c \quad бўлса,\\ 1, & агар \quad x\ge c \quad бўлса\end{cases}$$

функциялар ҳам $x=c$ нуқтада 1-тур узилишга эга бўлиб, уларнинг шу нуқтадаги сакраши мос равишда 1 ва –1 га тенг бўлади.

$f(x)$ функцияни $x=c$ нуктада узлуксиз деб фараз қиламиз ва

$$(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c)$$

интегрални ҳисоблаймиз. Бу ерда $a\le c<b$ ($c=b$ бўлганда интеграл $=0$ бўлади).

Стилтьес йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta\rho(x_i-c)$$

Фараз қилайлик, $c\in[x_k,x_{k+1}]$ $(x_k\le c<x_{k+1})$ бўлсин. Унда $i\ne k$ бўлганда $\Delta\rho(x_i-c)=0$ ва $\Delta\rho(x_k-c)=0$ бўлади. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \sigma=f(\xi_k)\Delta\rho(x_k-c)=f(\xi_k)\Rightarrow(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c)=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\lim_{\lambda\to 0} f(\xi_k)=f(c).$$

Демак,

$$(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c)=f(c)\quad (a\le c<b) \tag{35}$$

тенглик ўринли бўлар экан. Худди шу каби

$$(S)\int_a^b f(x)d\rho(c-x)=-f(c)\quad (a<c\le b) \tag{36}$$

эканлигини хосил қиламиз ($c=a$ бўлганда бу интеграл $=0$ бўлади).

Энди биз қайсидир маънода 6-теоремани умумлаштирувчи теоремани исботлаш имкониятига эгамиз.

7-теорема. *Фараз қилайлик,* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар [a,b] кесмада берилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1) $f(x) \in C[a,b]$,

2) $g(x) \in C\left([a,b] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \{c_k\}\right)$ *ва*

$a = c_0 < c_1 < ... < c_m = b$ *нуқталар* $g(x)$ *функциянинг 1- тур узилиш нуқталари,*

3) чекли сондаги нуқталардан ташқарида $g'(x)$ *ҳосила мавжуд,*

4) $g'(x)$ *ҳосила [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи.*

У ҳолда $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ *Стилтьес интеграли мавжуд бўлади ва қуйидаги тенглик бажарилади*:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(a)\cdot[g(a+0) - g(a)] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\cdot[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)\cdot[g(b) - g(b-0)] \qquad (37)$$

Изох. А*гар* $g(x) \in C[a,b]$ *бўлса, унда (37)- формула (34)-формулага айланади, яъни 7-теоремадан* 6*-теорема келиб чиқади.*

7-теореманинг исботи.

Ёзувни соддалаштириш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\alpha_k^+ = g(c_k+0) - g(c_k), \quad (k = \overline{0, m-1})$$

$$\alpha_k^- = g(c_k) - g(c_k-0), \quad (k = \overline{1, m})$$

Унда $1 \le k \le m-1$ учун

$$\alpha_k^+ - \alpha_k^- = g(c_k+0) - g(c_k-0)$$

бўлади. Қуйидаги ёрдамчи функцияни оламиз:

$$g_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k^+ \rho(x - c_k) - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^- \rho(c_k - x)$$

Аниқланган $g_1(x)$ функция $g(x)$ функциянинг барча узилишларини ўзида сақлайди ва

$$g_2(x) = g(x) - g_1(x)$$

функция узлуксиз функция бўлади.

Дархақиқат,

1) $x \ne c_k$ бўлса, $g_2(x)$ функция узлуксиз функцияларнинг айирмаси сифатида узлуксиз бўлади;

2) $x = c_k$ бўлсин. Аввал $g_2(x)$ функциянинг $c_k (k < m)$ нуктада ўнгдан узлуксиз бўлишини кўрсатамиз. $x \in [c_k, c_k + 0)$ бўлсин $\Rightarrow$

$$g_2(x) = g(x) - \alpha_k^+ \rho(x - c_k) \Rightarrow$$

$$g_2(c_k) = g(c_k) - \alpha_k^+ \underset{0}{\rho(0)} = g(c_k).$$

Иккинчи томондан,

$$\lim_{x\to c_k+0} g_2(x) = \lim_{x\to c_k+0}\left[g(x)-\alpha_k^+\rho_1(x)-c_k)\right] = g(c_k+0)-\alpha_k^+ =$$
$$= g(c_k+0)-[g(c_k+0)-g(c_k)] = g(c_k).$$

$\Rightarrow$ $g_2(x)$ функция $x=c_k$ нуқтада ўнгдан узлуксиз. Худди шунга ўхшаш $g_2(x)$ функциянинг c_k $(k>0)$ нуқтада чапдан узлуксизлиги хам кўрсатилади. $\Rightarrow$

$$g_2(x)\in C\{c_k\} \Rightarrow g_2(x)\in C[a,b].$$

Агар $x\neq c_k$ нуқта олинса, унда бу нуқтанинг бирор атрофида аниқланишига кўра $g_1(x)$ функция ўзгармас қийматни қабул қилади. $\Rightarrow$ $g'(x)=0$ $\Rightarrow$ $x\neq c_k$ Нуқтада $g_2'(x)=g'(x)$ бўлади (албатта бу тенглик $g'(x)$ мавжуд бўлган нуқталарда қаралади).

Узлуксиз бўлган $g_2(x)$ функция учун аввалги 6-теоремага кўра Стильтес интеграли мавжуд бўлади:

$$(S)\int_a^b f(x)dg_2(x) = (R)\int_a^b f(x)dg_2'(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{38}$$

Энди (17) ва (18)-тенгликлардан фойдаланиб, куйидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$(S)\int_a^b f(x)dg_1(x) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\cdot(S)\int_a^b f(x)d\rho(x-c_k)-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\cdot(S)\int_a^b f(x)d\rho(c_k-x) = \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k^+\cdot f(c_k)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^-\cdot f(c_k) =$$
$$= f(a)\cdot[g(a+0)-g(a)]+\sum_{k=0}^{m-1} f(c_k)\cdot[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+$$
$$+ f(b)\cdot[g(b)-g(b-0)] \tag{39}$$

(38) ва (33)–тенгликларни хадлаб кўшиш ёрдамида исботлашимиз керак бўлган (37)–тенгликни хосил қиламиз.▶

Стилтьес интеграли учун бўлаклаб интеграллаш формуласи.

8-теорема. ***Агар*** $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ ***ва*** $(S)\int_a^b g(x)df(x)$ ***Стилтьес*** *интегралларидан бири мавжуд бўлса, унда иккинчиси ҳам мавжуд бўлади ва ушбу бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли:*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - (S)\int_a^b g(x)df(x) \tag{40}$$

Стилтьес интегралини ҳисоблашга доир мисоллар.

Аввалги пунктда кўрганимиздек, маълум шартлар бажарилганда Стильтес интегралини ҳисоблаш учун қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)\phi(x)dx, \tag{41}$$

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx, \tag{42}$$

ва

$$\begin{gathered}(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx+f(a)\cdot\left[g(a+0)-g(a)\right]+\\ +\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\cdot\left[g(c_k+0)-g(c_k-0)\right]+f(b)\cdot\left[g(b)-g(b-0)\right]\end{gathered} \tag{43}$$

Шу формулалардан фойдаланиб мисоллар ечамиз.

1-мисол. *Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_0^2 x^2 d\ell n(1+x)$; *б)* $(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x$; *в)* $(S)\int_{-1}^{1} xdarctgx$.

◀ **а)** $(S)\int_0^2 x^2 d\ln(1+x)$ =(((12) - формуладан фойдаланамиз))

$$=(R)\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx= =\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^2=2-2+\ln 3=\ln 3.$$

б) $(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x=$ $(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx=\left(\begin{pmatrix} u=x & & du=dx \\ dv=\cos xdx & \Rightarrow & v=\sin x\end{pmatrix}\right)=$

$$=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1.$$

в) $(S)\int_{-1}^{1} xd\,\mathrm{arctg}x=$ $(R)\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{-1}^{1}=0$. ▶

2-мисол. *Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_{-1}^{3} xdg(x)$, *бу ерда*

$$g(x)=\begin{cases} 0, & \textit{агар} \quad x=-1 \quad \textit{бўлса}, \\ 1, & \textit{агар} \quad -1<x<2 \quad \textit{бўлса}, \\ -1, & \textit{агар} \quad 2\le x\le 3 \quad \textit{бўлса}; \end{cases}$$

ва

б) $(S)\int_{0}^{2} x^2dg(x)$, *бу ерда*

$$g(x)=\begin{cases} -1, & \textit{агар} \quad 0\le x<\frac{1}{2} \quad \textit{бўлса}, \\ 0, & \textit{агар} \quad \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2} \quad \textit{бўлса}, \\ 2, & \textit{агар} \quad x=\frac{3}{2} \quad \textit{бўлса}, \\ -2, & \textit{агар} \quad \frac{3}{2}<x\le 2 \quad \textit{бўлса}. \end{cases}$$

◀**а)** $g(x)$функциянинг $x=-1$ нуқтадаги сакраши 1га, $x=2$ нуқтадаги сакраши –2 га тенг хамда $x\ne -1;2$ нуқталарда $g'(x)=0$. Унда (13)-формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x)=-1\cdot(1-0)+2(-1-1)=-1-4=-5$$

б) $g(x)$ функциянинг $x=\frac{1}{2}$ нуқтадаги сакраши 1га, $x=\frac{3}{2}$ нуқтадаги сакраши -2 га тенг ва $x\ne\frac{1}{2};\frac{3}{2}$ бўлганда $g'(x)=0$. Интегрални (13) – формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$(S)\int_{0}^{2} x^2dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(0+1)+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2-0)=\frac{1}{4}-\frac{18}{4}=-\frac{17}{4}.$$ ▶

<u>**3-мисол.**</u> *Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_{-2}^{2} xdg(x)$, ***б)*** $(S)\int_{-2}^{2} x^2dg(x)$, ***в)*** $(S)\int_{-2}^{2} (x^3+1)dg(x)$.

Бу ерда

$$g(x)=\begin{cases} x+2, & агар \ \ -2\le x\le -1 \ \ бўлса, \\ 2, & агар \ \ -1<x<0 \ \ бўлса, \\ x^2+3, & агар \ \ 0\le x\le 2 \ \ бўлса. \end{cases}$$

◄ $g(x)$ функциянинг $x=-1$ ва $x=0$ нуқталаридаги сакраши 1 га тенг ҳамда:

$$g'(x)=\begin{cases} 1, & агар \ \ -2\le x<-1 \ \ бўлса, \\ 0, & агар \ \ -1<x<0 \ \ бўлса, \\ 2x, & агар \ \ 0<x\le 2 \ \ бўлса. \end{cases}$$

а) $(S)\int\limits_{-2}^{2} xdg(x)=\int\limits_{-2}^{-1} xdx+\int\limits_{0}^{2} x\cdot 2xdx+(-1)\cdot(2-1)+0\cdot(3-2)=$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1}+\frac{2}{3}x^3\Big|_{0}^{2}-1=\frac{1}{2}-2+\frac{16}{3}-1=\frac{17}{6}.$$

б) $(S)\int\limits_{-2}^{2} x^2dg(x)\overset{(24)}{=}\int\limits_{-2}^{-1} x^2dx+\int\limits_{0}^{2} x^2 2xdx+(-1)^2\cdot 1+$

$$+0\cdot 1=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{-1}+\frac{x^4}{2}\Big|_{0}^{2}+1=-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}+8+1=11\frac{1}{3}.$$

в) $(S)\int\limits_{-2}^{2}\left(x^3+1\right)dg\left(x\right)\overset{(24)}{=}\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^3+1\right)dx+\int\limits_{0}^{2}\left(x^3+1\right)2xdx+$

$$+\left[\left(-1\right)^3+1\right]\cdot 1+\left(0^3+1\right)\cdot 1=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Big|_{-2}^{-1}+2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}+0+1=$$

$$=\frac{1}{4}-1-4+2+\frac{64}{5}+4=15\frac{1}{20}.$$ ►

2.4. Стилтьес интегралининг геометрик маъноси ва интегрални баҳолаш

Стилтьес интегралининг геометрик маъноси.

Айтайлик, $f(t)$ ва $g(t)$ функциялар бирор $T=[a,b]$ ораликда аниқланган бўлиб, қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $f(t)\in C(T)$ ва $f(t)>0$,

2) $g(t)$ функция T да қатъий ўсувчи бўлиб, узилиш нуқталарига (сакрашларга) эга бўлиши ҳам мумкин.

Ушбу

$$(S)\int_a^b f(t)dg(t) \tag{44}$$

Стилтьес интегралини қараймиз. Қуйидаги

$$\begin{cases} x=g(t), \\ y=f(t), \quad t\in T \end{cases} \tag{45}$$

параметрик тенгламалар текисликда бирор γ чизиқни, умуман олганда узилишга эга бўлган чизиқни аниқлайди.

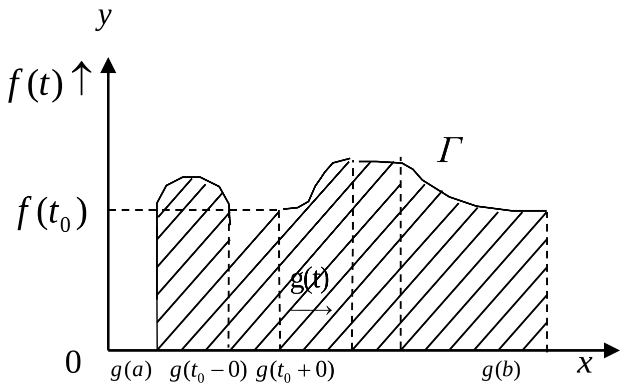
Агар бирор $t=t_0$ нуқтада $g(t)$ функция сакрашга эга бўлса,

$$g(t_0-0)<g(t_0+0)$$

бўлади. $g(t_0-0)$ ва $g(t_0+0)$ нуқталарга $y=f(t)$ функция ОУ ўқидаги 1 та $f(t_0)$ нуқтани мос қўяди**.**

$(g(t_0-0),\ f(t_0))$ ва $(g(t_0+0),\ f(t_0))$ нуқталарни кесма ёрдамида туташтирилса, бу кесма ОХ ўқига параллел бўлади ва γ чизиқни t_0 нуқтадаги сакрашидан қутиламиз**.**

Бошқа сакраш нуқталарида хам шу жараённи амалга оширсак, γ чизик узлуксиз чизиққа айланади. Хосил бўлган чизиқни Γ деб белгилаймиз. (1-чизма)



1-чизма.

Энди (44)-интегралнинг қиймати юқоридан Γ чизик, қуйидан ОХ ўқи, ён ёқларидан $x=g(a)$ ва $x=g(b)$ вертикал чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзига тенг бўлишини кўрамиз.

◀ $T=[a,b]$ кесмани ушбу $a=t_0<t_1<...t_k<t_{k+1}<...<t_n=b$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида қисмларга ажратамиз. Натижада, OX уқидаги $[g(a); g(b)]$ кесма ҳам

$$g(a) < g(t_1) < ...g(t_k) < g(t_{k+1}) < ... < g(b)$$

нуқталар ёрдамида қисмларга ажралади.

$$m_k = \inf_{[t_k, t_{k+1}]}\{f(t)\} \text{ ва } M_k = \sup_{[t_k, t_{k+1}]}\{f(t)\}$$

деб белгилаб, Стилтьес - Дарбунинг қуйи ва юқори йиғиндиларини тузамиз:

$$\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(t_k), \quad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(t_k)$$

Бу йиғиндиларнинг қийматлари мос равишда берилган шаклниниг ичида ётган ва уни ўз ичига олган кўпбурчакларнинг юзаларига тенг бўлади. (44)-интеграл мавжуд бўлгани учун

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \underline{S} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \overline{S} = S = (S)\int_a^b f(t)dg(t)$$

бўлади.►

Стилтьес интеграли учун ўрта қиймат ҳақида теорема.

Фараз қилайлик, [a,b] кесмада берилган $f(x)$ функция чегараланган бўлсин:

$$m \le f(x) \le M.$$

9- теорема. *Агар [a,b] кесмада берилган $f(x)$ функция монотон ўсувчи бўлиб, $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ Стилтьес интеграли мавжуд бўлса, у ҳолда ушбу*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = \mu \cdot [g(b) - g(a)] \tag{46}$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда $m \le \mu \le M$.

◄[a,b] кесмани оралиқларга бўлиб, Стилтьеснинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k).$$

Бу тенглик ва $m \le f(x) \le M$ тенгсизликдан фойдалансак, қуйидаги тенгсизликка келамиз:

$$m \cdot [g(b) - g(a)] \le \sigma \le M[g(b) - g(a)]$$

Бу тенгсизликда $\lambda \to 0$ да лимитга ўтиб

$$m \cdot [g(b) - g(a)] \le (S)\int_a^b f(x)dg(x) \le M \cdot [g(b) - g(a)]$$

ёки

$$m \le \frac{(S)\int_a^b f(x)dg(x)}{g(b) - g(a)} \le M$$

эканлигини топамиз. Агар

$$\mu = \frac{(S)\int_a^b f(x)dg(x)}{g(b)-g(a)}$$

деб белгиласак, $m \le \mu \le M$ бўлиб, охирги тенгликдан исбот қилишимиз керак бўлган (46)–тенглик келиб чиқади.▶

Натижа. Агар 9-теоремада $f(x) \in C[a,b]$ бўлса, унда шундай $c \in [a,b]$ нуқта топиладики,

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = f(c)\cdot[g(b)-g(a)]$$

тенглик бажарилади.

Стильтес интегралини ўрганиш жараёнида амалиётда $f(x)$ функция узлуксиз ва $g(x)$ функция чекли вариацияга эга бўлган ҳол мухим ахамиятга эга. Бундай ҳолда Стилтьес интегралини қуйидагича баҳолаш мумкин.

<u>**10-теорема.**</u> *Агар $f(x) \in C[a,b]$ ва $g(x)$ чекли вариацияли функция бўлса, унда:*

$$\left|(S)\int_a^b f(x)dg(x)\right| \le M\cdot V \tag{47}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу ерда:

$$M = \max_{a\le x\le b}|f(x)|, \quad V = \bigvee_a^b g(x).$$

◀ Стилтьес йиғиндисини тузиб, уни баҳолаймиз:

$$\begin{gathered}|\sigma| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)\right| = \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\cdot|\Delta g(x_k)| \le \\ \le M\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)| \le M\bigvee_a^b g(x) = M\cdot V \underset{\lambda\to 0}{\Rightarrow}\end{gathered} \tag{48}$$

▶

<u>**11-теорема**</u>. $f(x) \in C[a,b]$, $g(x)$ - *чекли вариацияли функция ва* $I = (S)\int_a^b f(x)dg(x)$ *бўлсин. Унда* $\forall\varepsilon > 0$ *учун* $\exists\delta > 0$: $\lambda < \delta$ *бўлганда:*

$$\left|\sigma - I\right| \le \varepsilon \cdot \bigvee_a^b g(x) \tag{49}$$

бўлади.

2.5. Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.

12-теорема. *Фараз килайлик,* [a,b] *кесмада* $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,...)$ *функционал кетма-кетлик берилган бўлиб,* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

бўлсин. Агар:

1) $f_n(x) \in C[a,b]$,

2) $n \to \infty$ *да* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$,

3) $g(x)$*-чекли вариацияли функция бўлса, у ҳолда:*

$$\lim_{n\to\infty} (S)\int_a^b f_n(x)dg(x) = (S)\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dg(x) = (S)\int_a^b f(x)dg(x) \tag{50}$$

бўлади.

◄ $n \to \infty$ да $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, бўлгани учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон топиладики, $\forall n > n_0$ ва барча $x \in [a,b]$ лар учун

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади. Унда 15-пунктдаги (29)-тенгсизликка кўра $n > n_0$ бўлганда қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered} \left|(S)\int_a^b f_n(x)dg(x) - (S)\int_a^b f(x)dg(x)\right| = \\ = \left|(S)\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dg(x)\right| \le \varepsilon \cdot \bigvee_a^b g(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \end{gathered} \tag{51}$$

13-теорема. *Фараз қилайлик,* $[a,b]$ *кесмада* $f(x)$ *функция ва* $\{g_n(x)\}$ $(n=1,2,...)$ *функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1) $f(x) \in C[a,b]$,

2) $g_n(x)\quad (n=1,2,...)$*-чекли вариацияли функциялар,*

3) $\overset{b}{\underset{a}{V}} g_n(x) \le V \quad (n=1,2,...),$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$.

У ҳолда:

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_a^b f(x)dg_n(x) = (S)\int_a^b f(xdg(x) \qquad (52)$$

бўлади.

Назорат саволлари:

1. Стилтьес интегралининг таърифини келтиринг.
2. Стилтьес интегралининг мавжудлик шарти.
3. Стилтьес интегралининг хоссаларини келтиринг.
4. Стилтьес интегралининг ҳисоблаш формулаларини келтиринг.
5. Стилтьес интегралини баҳолаш

Фойдаланилган адабиётлар:

3. Туйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К., Кутлимуратов А.Р., Каримов Ж.Ж. Дополнителные главы анализа, Т. “Университет”. 2015.
4. Brian S. Tomson Theory of integral. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, 2012.

3-мавзу: Голоморф ва гармоник функциялар.

РЕЖА:

3.1. Комплекс аргументли функциялар.
3.2. Комплекс аргументли функциянинг дифференциалланувчанлиги. Голоморф функциялар ва уларнинг хоссалари.
3.3. Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъноси. Конформ акслантиришлар.
3.4. Гармоник функциялар ва уларнинг хоссалари.

Таянч иборалар: *голоморф функция, конформ акслантриш, гармоник функция.*

3.1. Комплекс аргументли функциялар.

Комплекс сонлар текислиги C да бирор E тўплам берилган бўлсин.

1-Таъриф. *Агар E тўпламдаги ҳар бир z комплекс сонга f қоида ёки қонунга кўра битта w комплекс сон мос қўйилган бўлса, E тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва у*

$$f : z \to w \qquad \text{ёки} \qquad w = f(z)$$

каби белгиланади.

Бунда E тўплам функциянинг ***аниқланиш тўплами***, z ***эркли ўзгарувчи ёки функция аргументи***, w эса z узгарувчининг ***функцияси*** дейилади.

Айтайлик $w = f(z)$ функция бирор E (E$\subset$C) тўпламда берилган бўлсин. Бу функцияни

$$w = f(x+iy) = u + iv \qquad (x \in R, y \in R)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Бу эса E тўпламда икки ўзгарувчили иккита

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

функцияларнинг аниқланишига олиб келади. Бундан битта комплекс ўзгарувчили $w = f(z)$ функциянинг берилиши иккита икки ўзгарувчили ҳақиқий функциялар

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

берилишига эквивалент булиши келиб чикди.

$w = f(z)$ функция $E \subset C$ тўпламда берилган бўлиб, z ўзгарувчи E тўпламда ўзгарганда функциянинг мос қийматларидан иборат тўплам

$$F = \{ f(z) : z \in E \}$$

бўлсин. Бу тўпламга функциянинг ***қийматлари тўплами*** дейилади.

$E \subset C$ тўпламда $w = f(z)$ функциянинг берилиши Oxy комплекс текислигидаги E тўпламни (тўплам нуқталарини) Ouv комплекс текислигидаги F тўпламга (тўплам нуқталарига) акс эттиришдан иборат. Шу сабабли $w = f(z)$ ни E тўпламни F тўпламга ***акслантириш*** дейилади.

Одатда $w = f(z)$ функцияни геометрик тасвирлаш учун бу акслантриш ёрдамида аниқланган E ва F тўпламлар мос равишда Oxy ва Ouv комплекс текислигида чизилади.

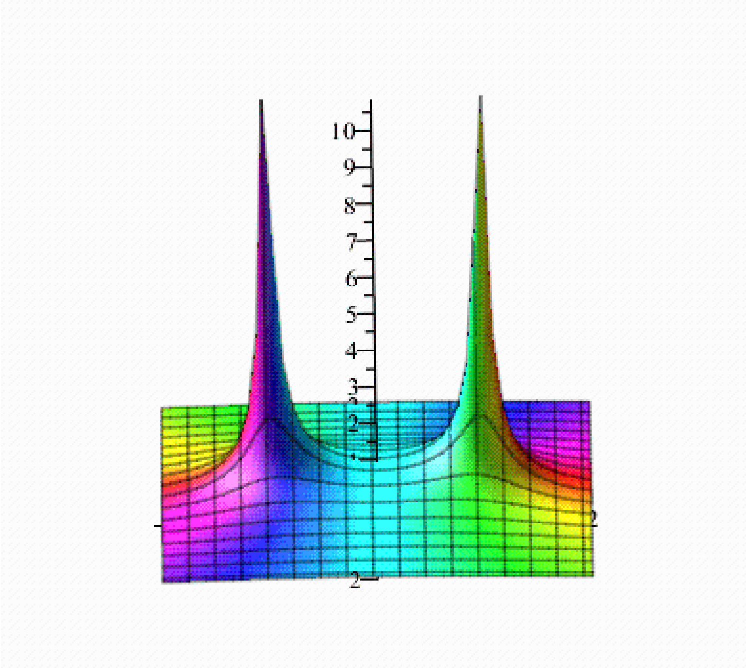
Баъзида функцияни геометрик тасвирлаш учун бошқача усул ҳам қўлланилади. Уч ўлчовли (x, y, ρ) фазода $\rho = |f(z)|$ сирт чизилади. Бу сиртга $w = f(z)$ функциянинг **рельефи** деб аталади.

Мисол тариқасида $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ функциянинг рельефини Maple математик пакетидан фойдаланиб чизамиз.

$with(plots):$

$> f := z \rightarrow \dfrac{1}{1+z^2};$

$> complexplot3d(f, -2-2I..2+2I, grid = [50, 50])$



7-чизма

$w = f(z)$ функция E тўпламда (E$\subset$C) берилган бўлиб, F эса шу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин

$$F = \{f(z) : z \in E\}.$$

Сўнгра F тўпламда ўз навбатида бирор $\zeta = \varphi(w)$ функция берилган бўлсин. Натижада E тўпламдан олинган ҳар бир z га F тўпламда битта $w(f : z \to w)$ сон ва F тўпламдан олинган бундай w сонга битта $\zeta(\varphi : w \to \zeta)$ сон $(\zeta \in C)$ мос қўйилади. Демак, E тўпламдан олинган ҳар бир z га битта ζ сон мос қўйилиб, $\zeta = \varphi(f(z))$ функция ҳосил бўлади. Бундай функция ***мураккаб функция*** дейилади.

$w = f(z)$ функция E тўпламда берилган бўлиб, F тўплам эса шу функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин. F тўпламдан олинган ҳар бир w комплекс сонга E тўпламда фақат битта z сонни мос қўядиган функцияга $w = f(z)$ функцияга нисбатан ***тескари функция*** дейилади ва у $z = f^{-1}(w)$ каби белгиланади.

2-Таъриф. *Агар аргумент z нинг E тўпламдан олинган ихтиерий z_1 ва z_2 қийматлари учун $z_1 \neq z_2$ бўлишидан $f(z_1) \neq f(z_2)$ бўлиши келиб чиқса, $f(z)$ функция E тўпламда **бир япроқли** (ёки **бир варақли**) функция деб аталади.*

Мисол. $f(z) = \dfrac{1}{2z-3}$ функцияни $E = \{z \in: C;\ |z| < \dfrac{3}{2}\}$ доирада бир япроқлиликка текширинг.

$\triangleleft$ Фараз қилайлик, $z_1, z_2 \in$E лар учун $f(z_1) = f(z_2)$, яъни

$\frac{1}{2z_1-3}=\frac{1}{2z_2-3}$ бўлсин $.\Rightarrow 2z_1-3=2z_2-3\Rightarrow z_1=z_2.\Rightarrow f(z)$ функция Е тўпламда бир япроқли.$\triangleright$

Фараз қилайлик $w=f(z)$ функция Е$\subset$С тўпламда берилган бўлиб, z_0 нуқта шу Е тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

3-Таъриф. *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *сон учун* $\exists\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ *сон топилсаки, аргумент z нинг* $0<|z-z_0|<\delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи барча* $z\in E$ *қийматларида* $|f(z)-A|<\varepsilon$ *тенгсизлик бажарилса, у ҳолда А комплекс сон* $f(z)$ *функциянинг* $z\to z_0$ *даги* ***лимити*** *деб аталади ва*

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A$$

каби белгиланади.

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ функциянинг лимитини ҳисоблаш $u(x,y)$ ва $v(x,y)$ ларнинг лимитларини ҳисоблашга келтирилиши мумкин.

1-Теорема. $w=f(z)$ *функция* $z\to z_0(z_0=x_0+iy_0)$ *да* $A=\alpha+i\beta$ *лимитга эга* ($\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$) *бўлиши учун*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=\alpha,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=\beta$$

бўлиши зарур ва етарли.

Айтайлик $w=f(z)$ функция Е$\subset$С тўпламда берилган бўлиб, z_0 нуқта шу Е тўпламнинг ўзига тегишли бўлган лимит нуқтаси бўлсин.

4-Таъриф. *Агар* $\forall\varepsilon>0$ *учун* $\exists\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ *сон топилсаки, аргумент z нинг* $|z-z_0|<\delta$ *тенгсизликни қаноатлатирувчи барча* $z\in E$ *қийматларида*

$$|f(z)-f(z_0)<\varepsilon|$$

тенгсизлик бажарилса у ҳолда $f(z)$ *функция* z_0 *нуктада узлуксиз деб аталади.*

(Равшанки ,бу холда $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ булади)

Одатда $z-z_0$ айирма *функция* ***аргументининг орттирмаси*** дейилади, уни Δz каби белгиланади: $\Delta z=z-z_0$, $f(z)-f(z_0)$ айирма эса ***функция орттирмаси*** дейилиб уни Δf каби белгиланади:

$$\Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Шу тушунчалардан фойдаланиб, z_0 нуқтадаги функция узлуксизлиги 4-таърифини қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f = 0$$

бўлса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада ***узлуксиз*** дейилади.

5-Таъриф. *Агар $f(z)$ функция Е тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция Е тўпламда узлуксиз дейилади.*

2-Теорема. $f(z) = u(x.y) + iv(x,y)$ *функциянинг* $z_0 = x_0 + iy_0$ *нуқтада узлуксиз бўлиши учун* $u = u(x,y)$ *ҳамда* $v = v(x,y)$ *функцияларнинг* (x_0, y_0) *нуҳтада узлуксиз бўлиши зарур ва етарли.*

$w = f(z)$ функция $E \subset C$ тўпламда берилган бўлсин.

6-Таъриф. *Агар* $\forall \varepsilon > 0$ *сон учун* $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *сон топилсаки, Е тўпламнинг* $\left|z' - z''\right| < \delta$ *тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий* $z', z'' \in E$ *нуқталарида*

$$\left| f(z') - f(z'') \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(z)$ *функция* E *тўпламда* ***текис узлуксиз*** *дейилади.*

3-Теорема. (Кантор теоремаси). *Агар* $f(z)$ *функция чегараланган ёпиқ тўпламда узлуксиз бўлса, функция шу тўпламда текис узлуксиз бўлади.*

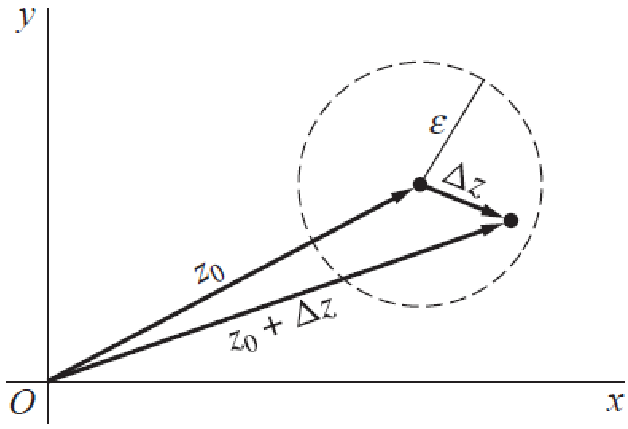
3.2. Комплекс аргументли функциянинг дифференциалланувчанлиги. Голоморф функциялар ва уларнинг хоссалари.

Функциянинг дифференциалланувчилиги. **Коши-Риман шартлари**.

Бирор $E \subset C$ соҳада $w = f(z)$ функция берилган бўлсин**.** Ихтиерий $z_0 \in E$ нуқта олиб, унга шундай Δz орттирма берайликки**,** $z_0 + \Delta z \in E$ бўлсин**.** Натижада**,** $f(z)$ функция **ҳ**ам z_0 нуктада

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

орттирмасига эга бўлади**.**



9-chizma

1-Таъриф. *Агар* $\Delta z \to 0$ *да* $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ *нисбатнинг лимити*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит комплекс ўзгарувчили $f(z)$ *функциянинг* z_0 *нуқтадаги* ***ҳ****осиласи деб аталади ва* $f'(z_0)$ *каби белгиланади****:***

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (11)$$

Фараз қилайлик, $f(z) = u(x.y) + iv(x.y)$ функция $z_0 = x_0 + iy_0$ **(**$z_0 \in C$**)** нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин**.**

2-Таъриф. *Агар* $u(x, y)$ *ва* $v(x, y)$ *функциялар* x, y *ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида* (x_0, y_0) *нуқтада дифференциалланувчи бўлса,* $f(z)$ *функция* z_0 *нуқтада ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи дейилади.*

Бу ҳолда $du(x_0, y_0) + idv(x_0, y_0)$ ифода $f(z)$ функциянинг z_0 нуқтадаги *дифференциали* дейилади:

$$df = du + idv.$$

Теорема. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *функциянинг* z_0 *нуқтада* $f'(z_0)$ *ҳосилага эга бўлиши учун бу функциянинг* $z_0(x_0, y_0)$ *нуқтада ҳақиқий анализ маъносида дифференциалланувчи бўлиб,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad (12)$$

шартларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Одатда (12) шартлар *Коши-Риман шартлари* дейилади.

Комплекс анализда ушбу $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

белгилашлар ёрдамида $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ функциянинг тўла

дифференциали $df = du + idv$, $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$

кўринишда қулай ифодаланади.

Юқорида келтирилган (12) – Коши-Риман шартлари

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad (13)$$

тенгликка эквивалент бўлади.

Агар $w = f(z)$ функция z_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, бу нуқтада $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ бўлиб,

f нинг ҳосиласи $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}$, дифференциали эса

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz = f'(z_0)dz$$

кўринишда бўлади. Комплекс анализда ҳосилага эга бўлган функциялар *C – дифференциалланувчи* функциялар дейилади.

Амалиётда функцияларни С-дифференциалланувчиликка текширишда Коши-Риман шартларидан фойдаланилади.

Қутб координатлар системасида

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)+iv(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$$

функция учун Коши-Риман шартлари

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial\rho}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\end{cases}\tag{14}$$

кўринишда бўлади.

Фараз қилайлик, $w=f(z)$ функция бирор $E\subset C$ соҳада берилган бўлсин.

3-Таъриф. *Агар $f(z)$ функция $z_0\in C$ нуқтанинг бирор $U(z_0,\varepsilon)$ атрофида С-дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $f(z)$ функция z_0 нуқтада голоморф функция дейилади.*

4-Таъриф. *Агар $f(z)$ функция Е соҳанинг ҳар бир нуқтасида голоморф бўлса, функция Е соҳада голоморф дейилади.*

Одатда Е соҳада голоморф функциялар синфи $O(E)$ каби белгиланади.

5-Таъриф. *Агар $g(z)=f(\frac{1}{z})$ функция $z=0$ нуқтада голоморф бўлса, $f(z)$ функция* "∞" *нуқтада голоморф дейилади.*

6-Таъриф. *Агар $\overline{f(z)}$ функция $z_0\in C$ нуқтада голоморф бўлса, $f(z)$ функция z_0 нуқтада антиголоморф дейилади.*

3.3. Ҳосила модули ва аргументининг геометрик маъноси.

Конформ акслантиришлар.

Фараз қилайлик, $w=f(z)$ функция бирор $E\subset C$ соҳада берилган бўлсин. Уни (z) текисликнинг нуқталарини (w) текислик нуқталарига акслантириш деб қараймиз. Айтайлик, $w=f(z)$ функция $z_0\in E$ нуқтада $f'(z_0)$ $(f'(z_0)\neq 0)$ ҳосилага эга бўлсин. Унда $w=f(z)$ акслантириш ёрдамида $|z-z_0|=r$ айлана, чексиз кичик миқдор $o(|z-z_0|)$ эътиборга олинмаса

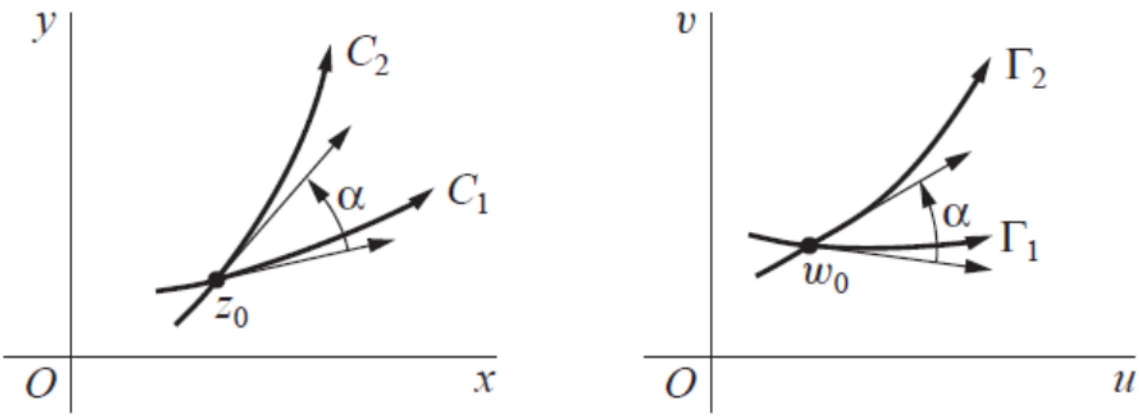
$$|w-w_0|=|f'(z_0)|\cdot r$$

айланага аксланади. Агар $|f'(z_0)|<1$ бўлса, унда $|z-z_0|=r$ *айлана сиқилади*, $|f'(z_0)|>1$ бўлганда эса *айлана чўзилади.*

Демак, функция ҳосиласининг модули $w=f(z)$ акслантиришда *«чўзилиш коэффициентини»* билдирар экан.

Энди $w=f(z)$ акслантириш z_0 нуқтадан ўтувчи γ силлиқ чизиқни (w) текисликдаги Γ чизиққа акслантирсин. Бу ҳолда функция ҳосиласининг аргументи $w=f(z)$ акслантиришда γ чизиқни қандай бурчакка буришини билдиради.

$f'(z_0)\neq 0$ бўлган ҳолда (z_0) нуқтадан ўтувчи икки C_1 ва C_2 эгри чизиқлар орасидаги бурчак α бўлса, $w=f(z)$ акслантиришда бу чизиқларнинг акслари Γ_1 ва Γ_2 лар орасидаги бурчак ҳам α га тенг бўлади.



Айтайлик, $w=f(z)$ функция $E\subset C$ соҳада берилган бўлиб, $z_0\in E$ бўлсин.

1-Таъриф. *Агар* $w=f(z)$ *акслантириш*

1) маркази z_0 *нуқтада бўлган чексиз кичик айланани чексиз кичик айланага ўтказиш хоссасига,*

2) z_0 *нуқтадан ўтувчи ҳар қандай иккита чизиқ орасидаги бурчакнинг миқдорини ҳам, йуналишини ҳам сақлаш хосссасига эга бўлса,* $w=f(z)$ *акслантириш* z_0 *нуқтада конформ акслантириш деб аталади.*

Агар бу таърифдги 2-шартда бурилиш бурчагининг миқдори ўзгармай, йуналиши қарама-қаршисига ўзгарса, бундай акслантириш *II-тур конформ акслантириш* дейилади.

2-Таъриф. *Агар* $E\subset C$ *соҳада аниқланган* $w=f(z)$ *акслантириш учун*

1) $w=f(z)$ *функция* E *соҳада бир япроқли функция,*

2) E *соҳанинг ҳар бир нуқтасида конформ бўлса, берилган акслантириш* E *соҳада конформ акслантириш деб аталади.*

Конформ акслантиришлар қуйидаги хоссаларга эга:

1) Конформ акслантиришга тескари бўлган акслантириш ҳам конформ акслантириш бўлади.

2) Чекли сондаги конформ акслантиришларнинг суперпозицияси яна конформ акслантириш бўлади.

Теорема. *Агар* $w = f(z)$ *акслантириш* $E \subset C$ *соҳада бир япроқли бўлиб,* $\forall z \in E$ *учун* $f'(z) \neq 0$ *бўлса, у ҳолда акслантириш шу соҳада конформ бўлади.*

3.4. Гармоник функциялар ва уларнинг асосий хоссалари.

Таъриф. Агар $D \subset \mathbb{C}$ соҳада берилган $u \in C^2(D)$ функция ушбу:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

тенгликни қаноатлантирса, функция D соҳада гармоник функция дейилади.

Бунда $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – Лаплас оператори .

D соҳада гармоник бўлган барча функциялар тўпламини $h(D)$ каби белгилаймиз.

Формал хусусий хосилалар: $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Гармоник функцияларнинг асосий хоссалари.

1. $f \in O(D)$ голоморф функциянинг хақиқий ва мавхум қисмлари гармоник фукциялар бўлади.

2. Агар $u(z) \in h(D)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $z^0 \in D$ нуқта ва унинг $B(z^0, r) \subset D$ атрофи учун унда голоморф $f(z)$ функция мавжуд бўлиб, $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$, $z \in B(z^0, r)$ бўлади.

Изох. Агар $u(z) \in h(D)$ ва D бир боғламли бўлса, у холда $f \in O(D)$ мавжуд ва $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$

3. Агар $u(z) \in h(D)$ ва D бир боғламли бўлса, у холда $v \in h(D)$ қўшма гармоник функция мавжуд

$$v(x,y) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C$$

4. Агар $u_k \in h(D)$ ва $c_k \in R$ бўлса, у холда $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k \in h(D)$

5. Хар қандай гармоник функция чексиз дифференциалланувчи.

6. Хар қандай $u(x,y)$ гармоник функция хақиқий аналитик, яъни хар бир $z_0 = x_0 + y_0 \in D$ нуқтанинг атрофида уни абсолют яқинлашувчи даражали қатор кўринишда ифодалаш мумкин

$$u(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}(x-x_0)^m (y-y_0)^n$$

7. (**Ягоналик теоремаси**). Агар $u,v \in h(D)$ бўлиб, $u(z) = v(z), z \in E$ бунда $E \subset D$ камида битта ички нуқтага эга тўплам бўлса, у холда $u(z) \equiv v(z), z \in D$ бўлади.

8. (**Ўрта қиймат хақидаги теорема**). Агар $u(z)$ функция $B(z^0, r) = \{z : |z - z^0| < r\}$ дорида гармоник бўлиб, унинг ёпилмасида узлуксиз бўлса, яъни:

$u(z) \in h(B(z^0, r)) \bigcap C(\overline{B(z^0, r)})$, у холда $u(z^0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(z^0 + re^{it})dt$ ўринли.

9. (**Максимум принципи**). Агар $u(z)$ функция D сохада гармоник бўлиб, унинг бирор $z^0 \in D$ нуқтасида экстремумга эришса, у холда у D сохада ўзгармас $u(z) \equiv const$ бўлади.

10. (**Лиувилль теоремаси**). Агар $u(z)$ функция $\mathbb{C}$ текисликда гармоник бўлиб, камида бир томондан чегараланган бўлса, у холда у $u(z) \equiv const$ бўлади.

11. (**Инвариантлик хосса**). Агар $u \in h(G)$ бўлиб, $f : D \to G$ голоморф бўлса, у холда $u \circ f \in h(D)$.

12. (**Харнак теоремаси**). Гармоник функцияларнинг монотон кетма-кетлиги D соҳа ичида ёки ∞ текис яқинлашади,ёки бирор гармоник фукцияга текис яқинлашади.

13.(**Пуассон формуласи**). Агар $u(z)$ функция $B(0,r)$ доирада гармоник бўлиб, унинг ёпилмасида узлуксиз бўлса,яъни:

$$u(z) \in h(B(0,r)) \bigcap C(\overline{B(0,r)}),$$

у ҳолда ушбу Пуассон формуласи:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{it} - z|^2} dt$$

Бошқа томондан, агар $\varphi(re^{it})$ функция $S(0,r)$ айланада узлуксиз бўлса, у ҳолда ушбу функция

$$u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(re^{it}) \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{it} - z|^2} dt \quad , \quad u(z) \in h(B(0,r)) \bigcap C(\overline{B(0,r)})$$ ва у $S(0,r)$

айланада φ билан устма-уст тушади.

14. (**Дирихле масаласи**). $\varphi \in C(\partial D)$, $\Delta u = 0,\ u\big|_{\partial D} = \varphi$

Яъни $u(z) \in h(D) \bigcap C(\overline{D})$ ва $u\big|_{\partial D} = \varphi$

15. Агар $u(z) \in C(D)$ ва хар қандай $z \in D$ нуқтада етарлича кичик r учун $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it}) dt$ ўринли бўлса, у холда $u(z) \in h(D)$

Назорат саволлари:

1. Комплекс аргументли функция, мураккаб ва тескари функция тушунчалари.
2. Бир япроқли функция таърифи ва унга мисоллар.
3. Комплекс аргументли функциянинг лимити ва узлуксизлиги.
4. Ҳакикий анализ маъносида дифференциалланувчилик таърифи.
5. C–дифференциалланувчилик таърифи.
6. Голоморф функциялар.
7. Гармоник функциялар.

8. Голоморф ва гармоник функциялар орасидаги боғланиш.
9. Қўшма гармоник функциялар ва уларни топиш.
10. Ҳосила модулининг геометрик маъноси.
11. Ҳосила аргументининг геометрик маъноси.
12. Нуқтада ва соҳада конформ акслантиришлар.

4-мавзу: Элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар

РЕЖА:

4.1. Чизиқли функция. Каср чизиқли функция.
4.2. Даражали функция. Жуковский функцияси.
4.3. Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар.
4.4. Кўп қийматли функциялар. Симметрия принципи.
4.5. Асосий элементар функциялар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар.

Таянч иборалар: *чизиқли функция, каср-чизиқли функция, даражали функция, Жуковский функцияси, тригонометрик функциялар, симметрия принципи.*

Конформ акслантиришлар назариясида асосан қуйидаги икки масала ўрганилади:

1-масала. С комплекс текисликдаги бирор Е соҳада (E$\subset$C) $w = f(z)$ акслантириш берилган ҳолда соҳанинг аксини, яъни $w(E)$ ни топиш.

2-масала. Иккита ихтиёрий $E \subset C_z$ $F \subset C_w$ соҳалар берилган ҳолда E соҳани F соҳага аксалантирувчи конформ $w = f(z)$ акслантиришни топиш.

Бу масалаларни хал қилишда қуйидаги тасдиқлардан фойдаланилади.

1-Теорема. (Риман теоремаси). *Агар E ва F лар мос равишда кенгайтирилган комплекс текислик $\overline{C_z}$ ҳамда $\overline{C_w}$ лардан олинган ва чегараси 2 та нуктадан кам бўлмаган бир боғламли соҳалар бўлса, E соҳани F соҳага конформ акслантирувчи $w = f(z)$ функция мавжуд.*

2-Теорема. (соҳанинг сакланиш принципи). *Агар $f(z)$ функция E соҳада голоморф бўлиб, $f(z) \neq const$ бўлса , $f(E)$ ҳам соҳа бўлади.*

Амалиётда кўпинча берилган E соҳани ўзидан соддароқ бўлган соҳага, масалан бирлик доира ёки юқори ярим текисликка конформ акслантириш масаласини ечиш талаб қилинади. Бу масалани ҳал қилишда биз комплекс аргументли элементар функциялар синфини, биринчи навбатда уларнинг геометрик хоссаларини татбик қилиш услубларини ўрганишимиз зарур.

4.1. Чизиқли функция. Каср чизиқли функция.

Чизиқли функция.

1-Таъриф. *Ушбу*

$$w = az + b \quad (a, b \in C \ , a \neq 0) \qquad (1)$$

кўринишдаги функция чизиқли функция (акслантириш) деб аталади.

Чизиқли функция C_z комплекс текисликни C_w комплекс текисликка конформ акслантиради.

Чизиқли функциянинг хусусий ҳолларини қараймиз:

1) Айтайлик,

$$w = z + b \quad (b \in C)$$

бўлсин. Бу функция параллел кўчиришни амалга оширади.

2) Айтайлик,

$$w = e^{i\alpha} \cdot z \quad (\alpha \in R)$$

бўлсин. Бу функция C_z текисликдаги хар бир z нуктани координата боши атрофида соат стрелкасига тескари йўналишда α бурчакка буришни амалга оширади.

Масалан,

$$w = iz = (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})z = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot z$$

функция координата боши атрофида 90^0 га,

$$w = -z$$

эса 180^0 га буришни амалга оширади.

3) Айтайлик,

$$w = kz \quad (k > 0)$$

бўлсин. Бу функция берилган соҳани унга ўхшаш соҳага чўзиб ($\kappa > 1$ да) ёки сиқиб ($\kappa < 1$ да) акслантиради.

Умуман ,

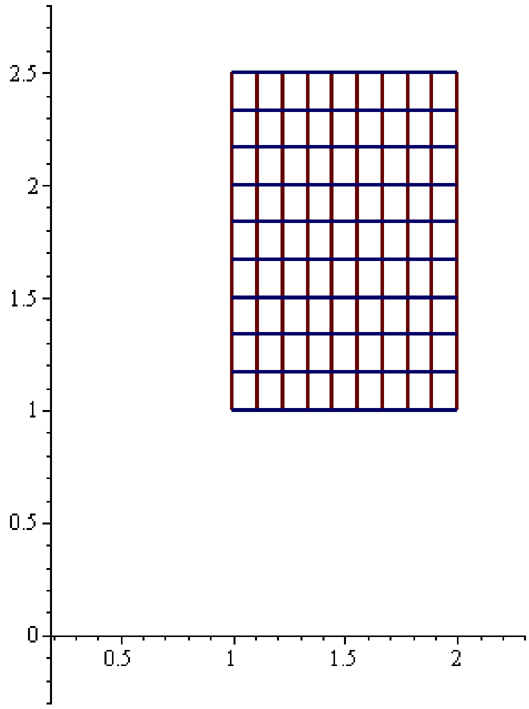
$$w = az + b \quad (a, b \in C)$$

функция ёрдамида бажариладиган акслантириш C_z текисликдаги соҳани «чўзиш», бирор бурчакка буриш ҳамда параллел кучиришни амалга оширади. Амалиётда бу функциянинг шу хоссаларидан фойдаланилади.

Мисол. $D = \{z \in C : 1 < \operatorname{Re} z < 2, 1 < \operatorname{Im} z < 2.5\}$ соҳани $w = (1+i)z + 2 - i$ акслантриш ёрдамида аксини топинг.

Бу мисолни Maple математик дастури ёрдамида ечиб кўрсатамиз.

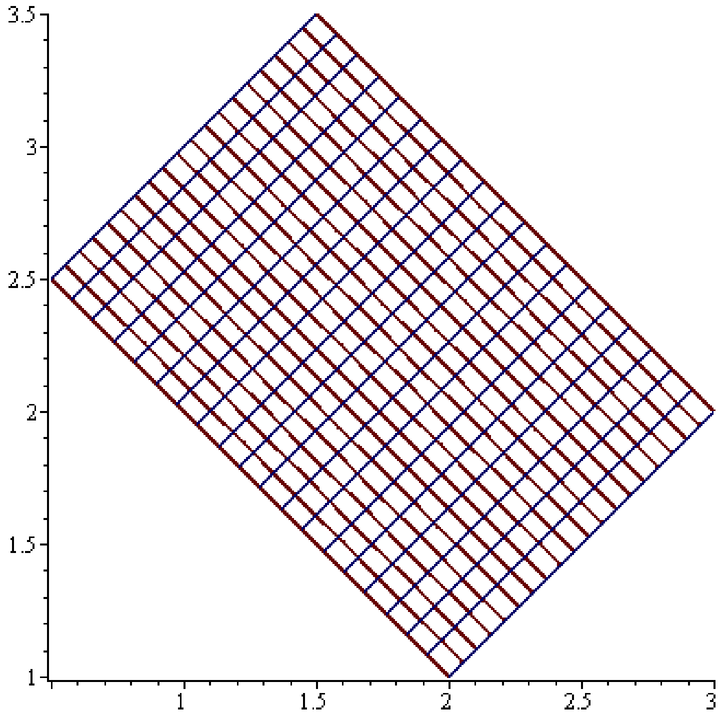
```
> with(plots) :
> conformal(z, z = 1 + I..2 +   2.5· I, 0.2 − 0.3·I..2.3 + 2.8·I, grid = [10, 10])
```



> $w := (1 + I) \cdot z + 2 - I$

$$w := (1 + \mathrm{I})\, z + 2 - \mathrm{I}$$

> $conformal(\mathrm{w}, \mathrm{z} = 1 + \mathrm{I} .. 2 + \ 2.5 \cdot \mathrm{I}, grid = [20, 20])$



20-чизма.

Фараз килайлик, $w = f(z)$ функция C текисликдаги бирор E соҳада берилган бўлсин.

2-Таъриф. *Агар* $a \in E$ *нуктада*

$$f(a) = a$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $z = a$ *нуқта* $w = f(z)$ *аксӑантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.*

$w = az + b$ чизиқли акслантириш $a \neq 1$ бўлганда иккита

$$z_1 = \infty, \ z_2 = \frac{b}{1-a}$$

қўзгалмас нуқталарга эга.

Агар $a = 1$ бўлса, $z = \infty$ шу чизиқли акслантиришнинг каррали қўзгалмас нуқтаси бўлади.

Каср чизиқли функция.

1-Таъриф. *Ушбу*

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (a,\ b,\ c,\ d \in C) \qquad (2)$$

кўринишдаги функция каср-чизиқли функция (каср-чизиқли акслантириш) деб аталади.

Бу таърифда $ad - bc \neq 0$ деб қараймиз, акс ҳолда $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ бўлиб, w функция ўзгармасга айланади.

Каср чизиқли функция кенгайтирилган $\overline{C}_z$ комплекс текисликни кенгайтирилган $\overline{C}_w$ комплекс текисликка конформ акслантиради.

Каср чизиқли акслантиришлар қатор хоссаларга эга.

1-Хосса. *Каср чизиқли акслантиришларнинг суперпозицияси яна каср чизиқли акслантириш бўлади; каср чизиқли акслантиришга тескари бўлган акслантириш ҳам каср чизиқли бўлади.*

2-Хосса. *Ихтиерий каср чизиқли акслантириш* $\overline{C}_z$ *даги айлана ёки тўғри чизиқни* $\overline{C}_w$ *даги айлана ёки тўғри чизиққа акслантиради.*

Бу хоссани каср чизиқли акслантиришнинг *доиравийлик хоссаси* дейилади (тўгри чизиқ одатда радиуси чексизга тенг бўлган айлана деб қаралади).

Изоҳ. Каср чизиқли функция ёрдамида айлана айланага ёки тўғри чизиққа аксланишини аниқлаш учун функциянинг махражини нолга айлантирувчи $z=-\frac{d}{c}$ нуқтанинг қаралаётган айланага тегишли ёки тегишли эмаслигини аниқлаш кифоядир.

Масалан,

$$w=\frac{1}{z-3}$$

акслантириш $\{z:|z|=2\}$ айланани айланага, $\{z:|z|=3\}$ айланани эса тўғри чизиққа ўтказади.

Текисликдаги γ тўгри чизиққа нисбатан симметрик нуқталар тушунчаси ўқувчига элементар математикадан маълум. Энди бу тушунчани айланага нисбатан келтирайлик.

2-Таъриф. *Агар* z_1 *ва* z_1^* *нуқталар учи*

$$\gamma=\{z\in C : |z-z_0|=R\}$$

айлана марказида бўлган битта нурда ётиб, улардан айлана марказигача бўлган масофалар купайтмаси γ *айлана радиусининг квадратига тенг бўлса, яъни*

$$\begin{cases}\arg(z_1^*-z_0)=\arg(z_1-z_0),\\ |z_1^*-z_0|\cdot|z_1-z_0|=R^2\end{cases}$$

тенгликлар ўринли бўлса, z_1 *ва* z_1^* *нуқталар С комплекс текисликдаги* γ ***айланага нисбатан симметрик нуқталар*** *дейилади.*

Агар z_1 ва z_1^* нукталар γ айланага нисбатан симметрик нуқталар бўлса,у холда

$$z_1^*-z_0=\frac{R^2}{\overline{z_1-z_0}} \qquad (3)$$

бўлади.

3-Хосса. *Ҳар кандай каср чизикли акслантириш натижасида* (z) *текисликдаги* γ *айлана ёки тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган* z_1 *ва* z_1^* *нукталарнинг акси* (w) *текисликда* γ *айлананинг акси бўлган* $w(\gamma)$ *айлана ёки тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган* w_1 *ва* w_1^* *нуқталардан иборат бўлади.*

Бу хосса каср-чизиқли акслантиришда ***симметрикликнинг сақланиш хоссаси*** дейилади.

4-Хосса. (z) *текисликда берилган ҳар хил* z_1, z_2, z_3 *нукталарни* (w) *текисликда берилган ҳар хил* w_1, w_2, w_3 *нуқталарга акслантирувчи каср чизиқли функция мавжуд ва у ягонадир.*

Бу акслантириш ушбу

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \qquad (4)$$

муносабатдан топилади. (4)–муносабатга ***ангармоник нисбат*** деб аталади.

5-Хосса. *Ушбу*

$$w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{z-\bar{a}}, \qquad \operatorname{Im} a>0 \qquad (5)$$

каср чизиқли функция юқори ярим текислик $\{\operatorname{Im} z>0\}$ *ни бирлик доира* $\{|w|<1\}$ *га акслантиради, бунда* θ *-ихтиёрий ҳақиқий сон.*

6-Хосса. *Ушбу*

$$w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad |a|<1 \qquad (6)$$

каср чизиқли функция (z) *текисликдаги бирлик доира* $\{|z|<1\}$ *ни* (w) *текисликдаги бирлик доира* $\{|w|<1\}$ *га акслантиради, бунда* θ *-ихтиерий ҳақиқий сон.*

Мисол. $D=\{z:\ \operatorname{Re} z>0, \operatorname{Im} z>0\}$ соҳани $w=\dfrac{1}{z}$ акслантриш ёрдамида аксини топинг.

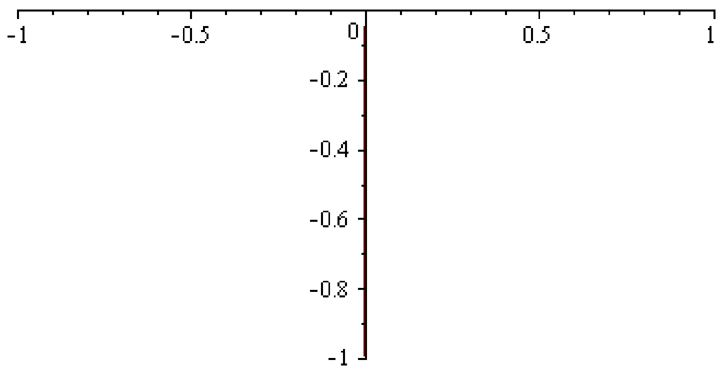
Бу мисолни Maple математик дастури ёрдамида ечиб кўрсатамиз.

$> with(plots):$

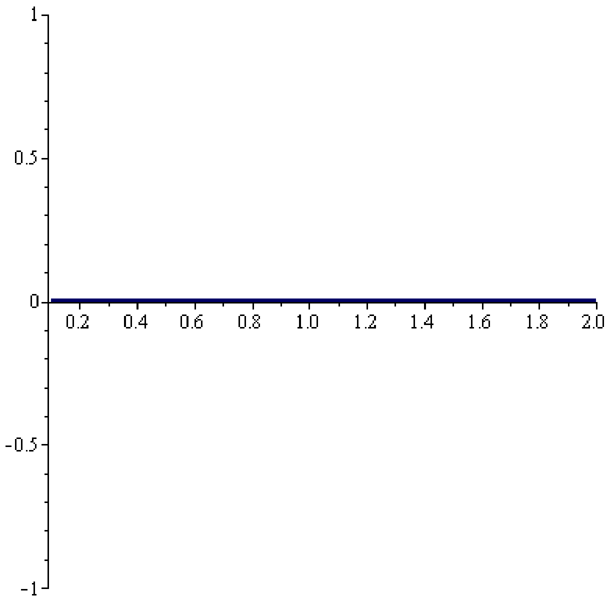
$> w := \frac{1}{z}$

$w := \frac{1}{z}$

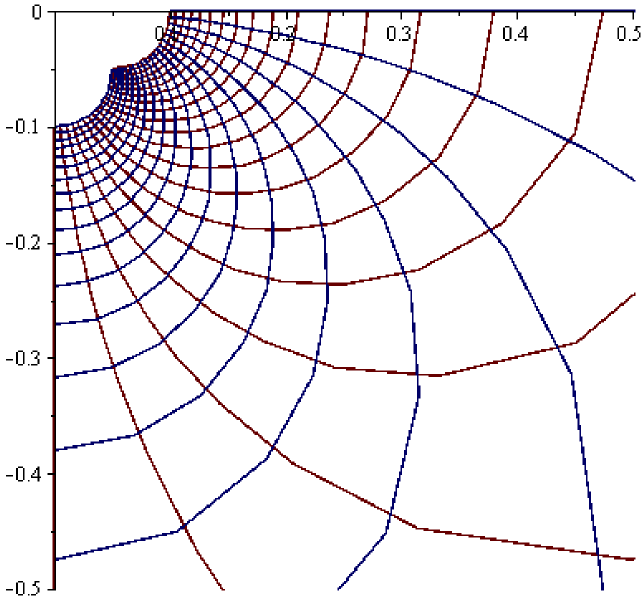
$> conformal(\mathrm{w}, \mathrm{z} = 0 + 0\cdot \mathrm{I}..0 + 20\cdot \mathrm{I}, \mathrm{grid} = [10, 10])$



> *conformal*(w, z = 0 + 0· I..10 + 0· I, grid = [10, 10])



> *conformal*(w, z = 0 + 0· I..10 + 10· I, 0 − 0.5·I..0.5, *grid* = [20, 20])



21-чизма

4.2. Даражали функция. Жуковский функцияси.

Даражали функция.

Таъриф. *Ушбу*

$$w = z^n \qquad (n \in N\,,\ n > 1)` \qquad (7)$$

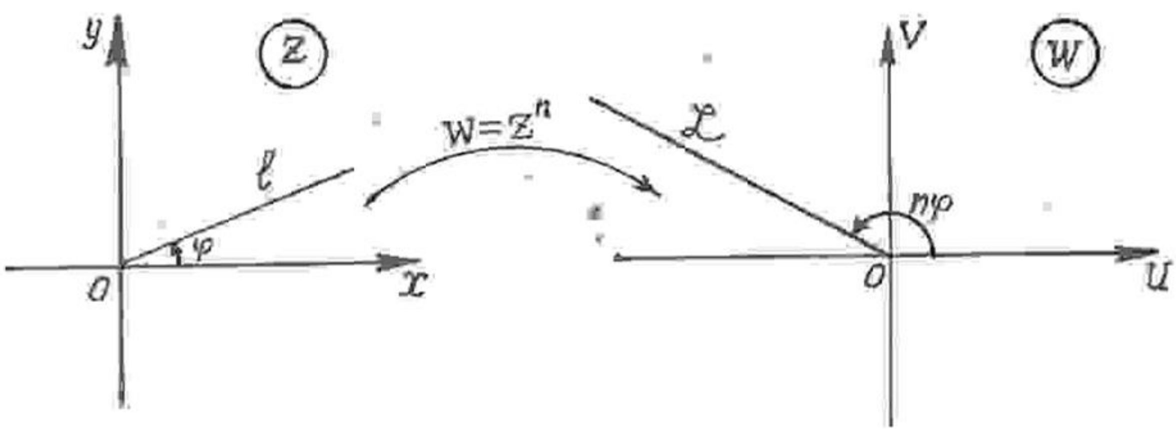
кўринишдаги функция даражали функция дейилади.

Даражали функция С да голоморф ва бу функция ёрдамида бажариладиган аксалантириш $\forall z \in C \setminus \{0\}$ нуқтада конформ бўлади: $w' = nz^{n-1}$ ҳосила $C \setminus \{0\}$ да нолдан фарқлидир.

Агар $z = re^{i\rho}$, $w = \rho e^{i\Psi}$ дейилса ,

$$\begin{cases} \rho = r^n\,, \\ \psi = n\varphi \end{cases} \qquad (8)$$

эканлигини кўрамиз. Бу тенгликлардан $w = z^n$ функция аргументи φ га тенг бўлган, 0 нуқтадан чиқувчи ℓ нурни, аргументи $n\varphi$ га тенг бўлган L нурга акслантиришини кўрамиз (8-чизма).



Агарда биз (z) текислигида орасидаги бурчаги $\dfrac{2\pi}{n}$ дан кичик бўлган координата бошидан чиқувчи иккита нур билан чегараланган D соҳани қарасак, $w = z^n$ функциянинг бу соҳада бир япроқли эканлигини кўрамиз.

Масалан, $w = z^n$ функция

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

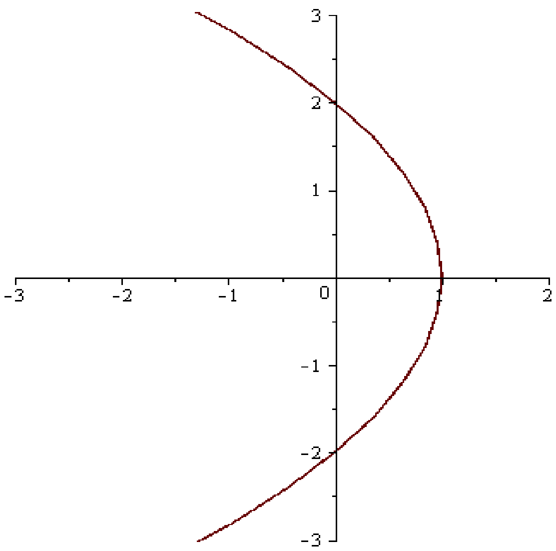
соҳанинг ҳар бирида бир япроқли, демак, конформ бўлиб, уларнинг ҳар бирини (w) текслигидаги $C \setminus R_+ = C \setminus [0,+\infty)$ соҳага акслантиради.

Амалиётда $w = z^n$ функциясидан бурчакли сохаларни узидан соддарок соҳаларга акслантиришда фойдаланилади.

Misol. $D = \{z:\ \operatorname{Re} z = 1\}$ *va* $G = \{z:\ \operatorname{Im} z = 1\}$ чизиқни $w = z^2$ акслантриш ёрдамида акси топилсинг.

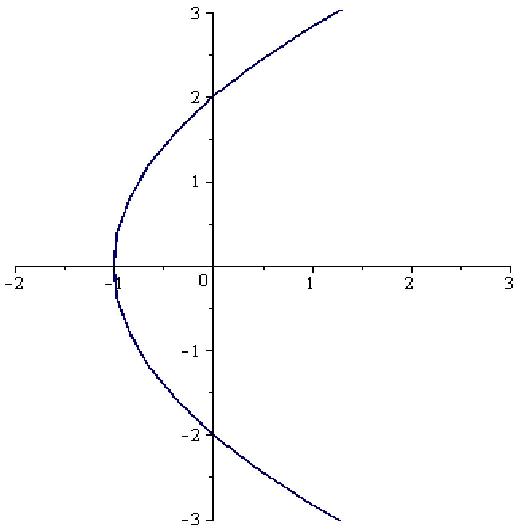
Бу мисолни Maple математик дастури ёрдамида ечиб кўрсатамиз.

```
> with(plots) :
> w := z^2
w := z^2
> conformal(w, z = 1 − 2·I..1 + 2·I, −3 − 3·I..2 + 3·I, grid = [20, 20])
```



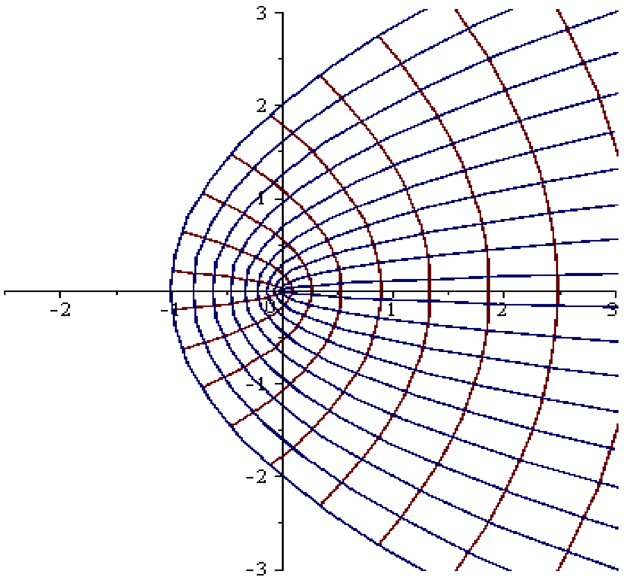
23- chizma

```
> conformal(w, z = −2 + I..2 + I, −2 − 3·I..3 + 3·I, grid = [20, 20])
```



24- chizma

> *conformal*(w, z=−2 − I ..2 + I, −2.5 − 3·I ..3 + 3·I, grid=[20, 20])



25- chizma

Жуковский функцияси.

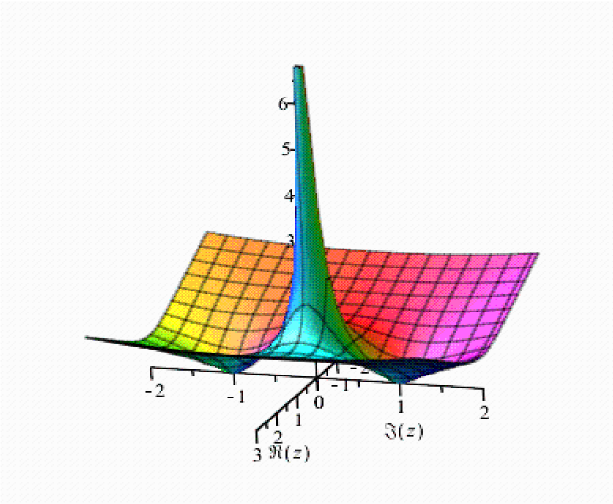
Таъриф. *Ушбу*

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \qquad (9)$$

функция Жуковский функцияси деб аталади.
Bu funksiyaning relyefi 26- chizmada tasvirlangan.

> $with(plots):$

> $complexplot3d\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=-3-2I..3+2I, grid=[50,50]\right)$



26- chizma

Бу функция $z=0$ ва $z=\infty$ нукталардан ташқари бутун текисликда *голоморф* функциядир.

Жуковский функциясининг ҳосиласи $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ бўлиб, $\{+1;-1\}$ нуқталардан ташқарида $w' \neq 0$ дир. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ функция ёрдамидаги акслантириш $\{+1;-1\}$ нуқталардан ташқарида ($z=0$, $z=\infty$ нукталарда ҳам) *конформдир.*

(9)–функция бирор $E \subset C$ соҳада бир япроқли бўлиши учун бу соҳа ушбу

$$z_1 \cdot z_2 = 1 \quad \cdot \qquad (10)$$

муносабатни каноатлантирувчи z_1 ва z_2 нукталарга эга бўлмаслиги зарур ва етарли.

Бундай соҳа сифатида $U=\{z\in C:|z|<1\}$ ёки $U^*=\{z\in C:|z|>1\}$ соҳаларни олиш мумкин. Жуковский функцияси бу соҳаларнинг ҳар бирини [-1; 1] кесманинг ташқарисига конформ акслантиради.

Агар Жуковский функциясида

$$z=re^{i\varphi}\ ,\quad w=u+iv$$

дейилса, унда

$$u+iv=\frac{1}{2}(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi})$$

бўлиб,

$$\begin{cases} u=\dfrac{1}{2}(r+\dfrac{1}{r})\cos\varphi. \\ \\ v=\dfrac{1}{2}(r-\dfrac{1}{r})\sin\varphi \end{cases} \qquad (11)$$

бўлади. (11) дан (9)-акслантириш учун қуйидагилар келиб чикади.

1) (z) текисликдаги $\{z\in C:|z|=r\ ,r>1\}$ айлана (w) текисликдаги фокуслари (-1; 0) ва (1; 0) нуқталарда, ярим ўқлари

$$a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$$

бўлган эллипсга аксланади.

2) (z) текисликдаги $\{z\in C:|z|=r,\ r<1\}$ айлана (w) текисликдаги фокуслари (-1; 0) ва (1; 0) нукталарда, ярим ўқлари

$$a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$$

бўлган эллипсга аксланади.

3) (z) текисликдаги $\{z\in C:\arg z=0\}$ нур (w) текисликдаги $\{w\in C:\arg w=0\}$ нурга, $\{z\in C:\arg z=\pi\}$ нур эса $\{w\in C:\arg w=\pi\}$ нурга аксланади.

4) (z) текисликдаги $\{z\in C:\arg z=\frac{\pi}{2}\}$ ҳамда $\{z\in C:\arg z=\frac{3\pi}{2}\}$ нурларнинг ҳар бири (w) текисликдаги $\{w\in C:\operatorname{Re} w=0\}$ тўғри чизиққа аксланади.

5) (z) текисликдаги

$$\{z \in C : \arg z = \varphi; \quad \varphi \neq 0 \ , \ \varphi \neq \frac{\pi}{2} \ , \ \ \varphi \neq \pi \ \varphi = \frac{3\pi}{2}\}$$

нур (w) текисликдаги ушбу

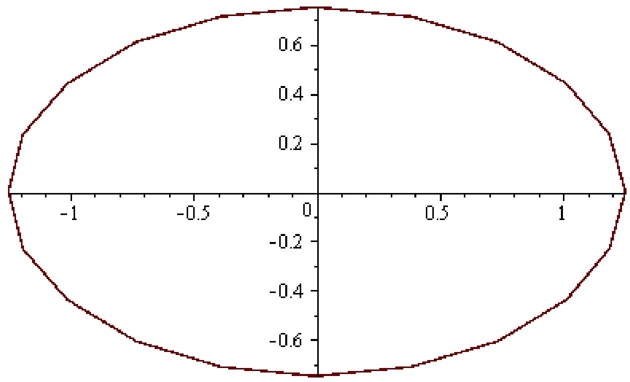
$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1$$

гиперболанинг мос «шохчасига» аксланади.

Endi bu xossalarni Maple matematik paketi yordamida keltiramiz.

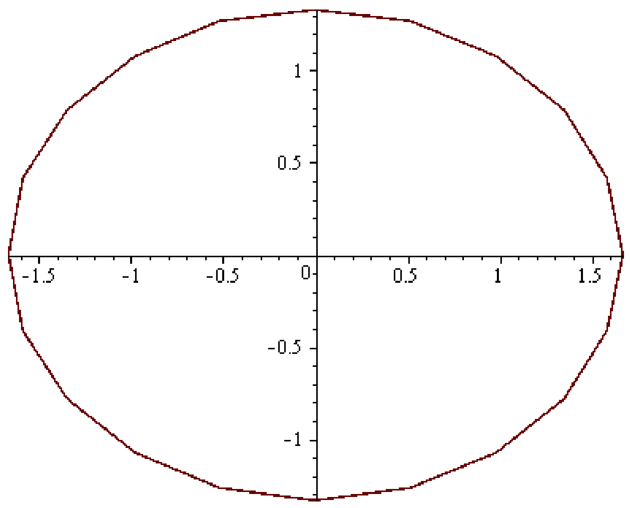
$> with(plots):$

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z = 2 - \pi\cdot I..2 + \pi\cdot I, grid = [20, 20], coords = \mathrm{polar}\right)$



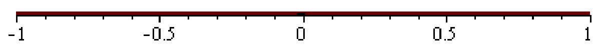
27- chizma

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z = \frac{1}{3} - \pi\cdot I..\frac{1}{3} + \pi\cdot I, grid = [20, 20], coords = \mathrm{polar}\right)$



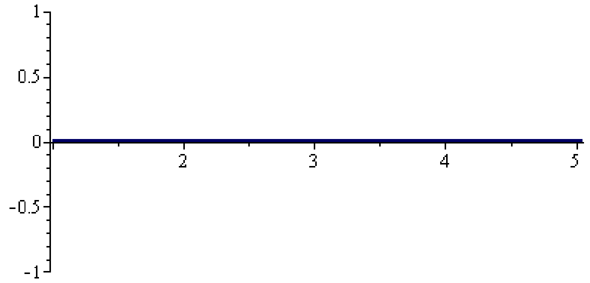
28- chizma

> $conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=1-\pi\cdot I..1+\pi\cdot I, grid=[20,20], coords=\mathrm{polar}\right)$



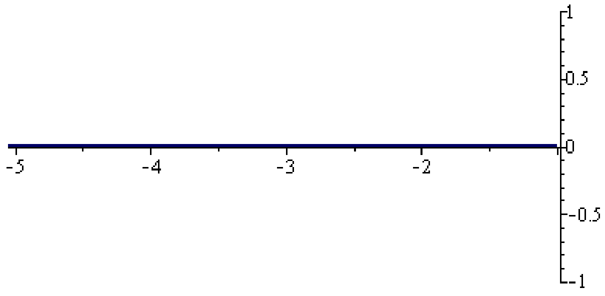
29- chizma

> $conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=0-0\cdot I..10+0\cdot I, grid=[50,50], coords=\mathrm{polar}\right)$



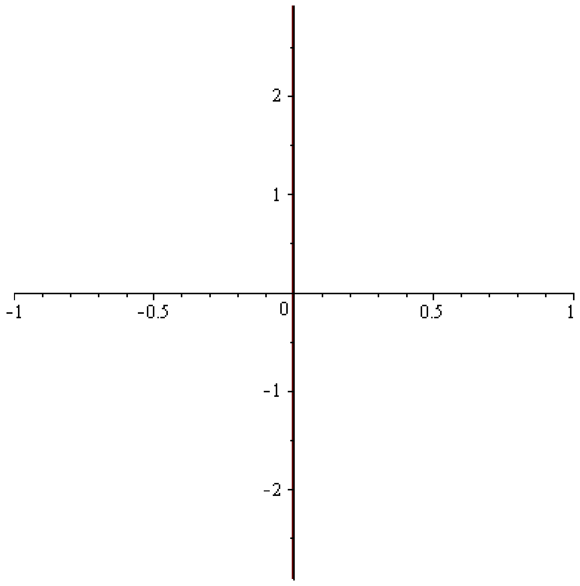
30- chizma

$> \ conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=-10-0\cdot I..0+0\cdot I, grid=[50,50], coords=\mathrm{polar}\right)$



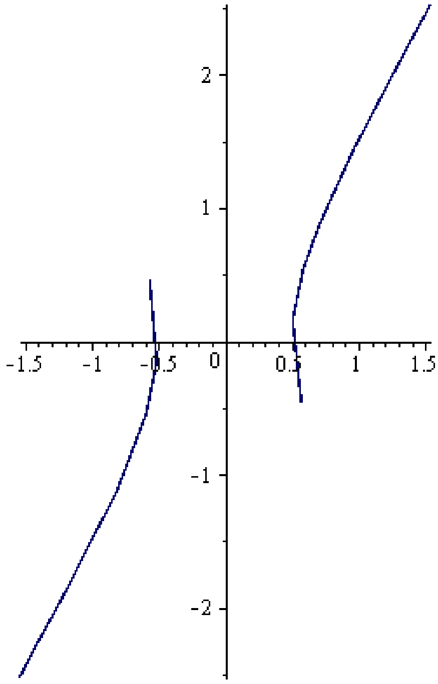
31- chizma

$> \ conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=0-6\,I..0+6\,I, grid=[20,20]\right)$



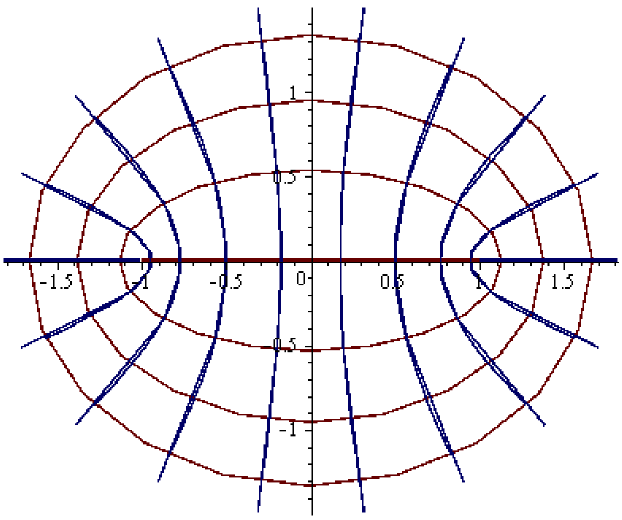
32- chizma

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=-6+\frac{\pi}{3}\cdot I..6+\frac{\pi}{3}\cdot I, grid=[20,20], coords=\mathrm{polar}\right)$



33- chizma

$> conformal\left(\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{1}{z}\right), z=-3-\pi\cdot I..3+\pi\cdot I, grid=[10,10], coords=\mathrm{polar}\right)$



4.3. Кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар.

Кўрсаткичли функция.

e^z **функцияси.**

Таъриф. *Ушбу*

$$e^z := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n \qquad (z\in C)$$

функция кўрсаткичли функция дейилади.

Агар $z = x + iy$ десак,

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (12)$$

тенглик ўринли.

Кўрсаткичли $w = e^z$ функция қуйидаги хоссаларга эга:

1) e^z функция C комплекс текисликда голоморф ва унинг ҳосиласи

$$(e^z)' = e^z$$

бўлади.

2) e^z функция учун

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2} \qquad (z_1\in C,\ z_2\in C)$$

бўлади.

3) e^z функция даврий бўлиб, унинг асосий даври $2\pi i$ булади:

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

4) $\forall z\in C$ учун $(e^z)'\neq 0$ бўлиб, $w = e^z$ функция ёрдамидаги акслантириш C текисликнинг ҳар бир нуқтасида конформ акслантириш бўлади.

(12)–тенгликка кўра, $\left|e^z\right| = e^x$, $\arg e^z = y$ бўлиб, $w = e^z$ функция (z) текисликдаги $\{x = x_0\}$ тўғри чизиқни $\{|w| = e^{x_0}\}$ айланага, $\{y = y_0\}$ тўғри чизиқни эса $\{\arg w = y_0\}$ нурга акслантиради. $w = e^z$ функция $\Pi_k = \{y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$, соҳада бир япроқли бўлади (бу ерда $y_0\in R$ бўлган ихтиёрий нуқта). Жумладан, $w = e^z$ функция ушбу

$$\Pi_k = \{z:\ 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi\}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...$$

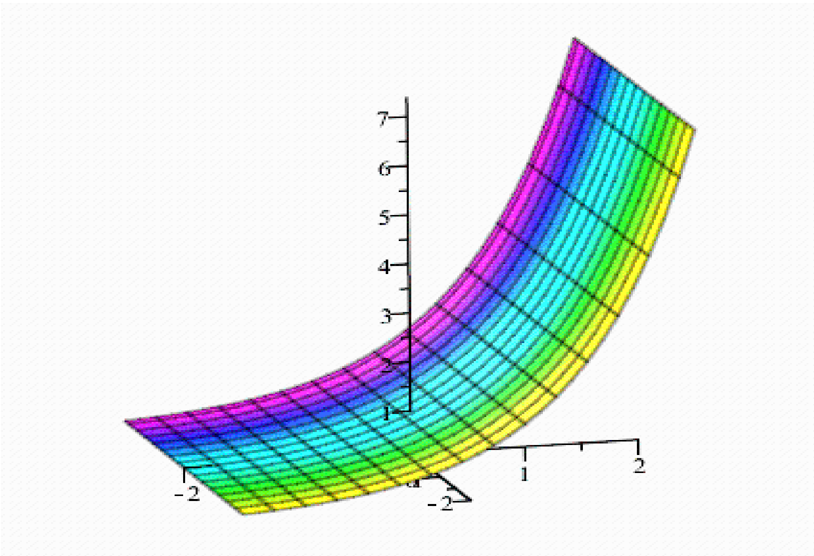
соҳаларнинг ҳар бирини (w) текисликдаги $C\setminus R_+$ га конформ акслантиради. Худди шунга ўхшаш $w=e^z$ функция $\{z:0<\operatorname{Im}z<\pi\}$ йўлакни юқори ярим текисликка конформ акслантиради.
Бу функциянинг релефи 34- чизмада тасвирланган.

> $with(plots):$

> > $w := z \to e^z;$

$$w := z \to e^z$$

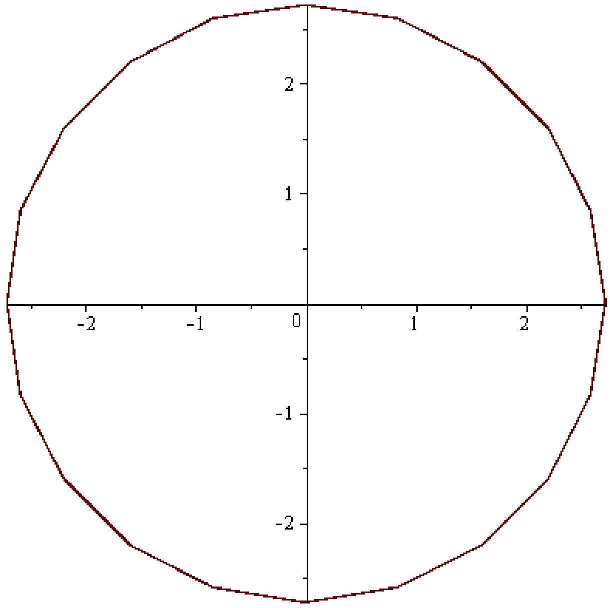
> $complexplot3d(w, -2-2I..2+2I, grid=[30,30]);$



34- chizma

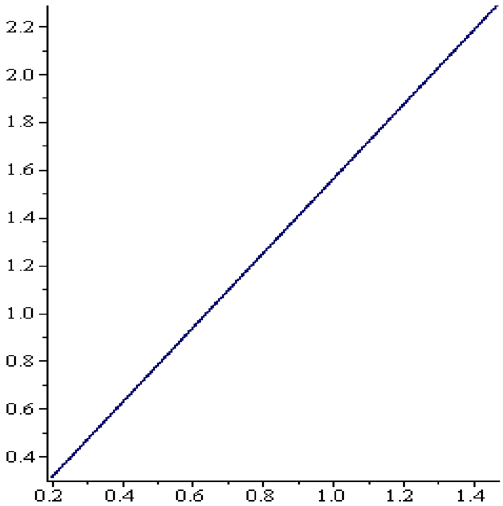
> $with(plots):$

> $conformal\left(e^z, z=1-\pi I..1+\pi I, grid=[20,20]\right)$



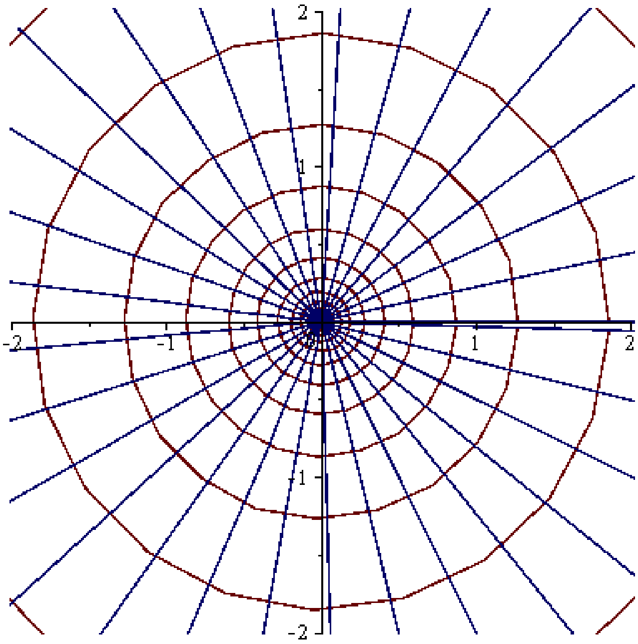
35- chizma

> $conformal\left(e^{z}, z=-1+I..1+I, grid=[20, 20]\right)$

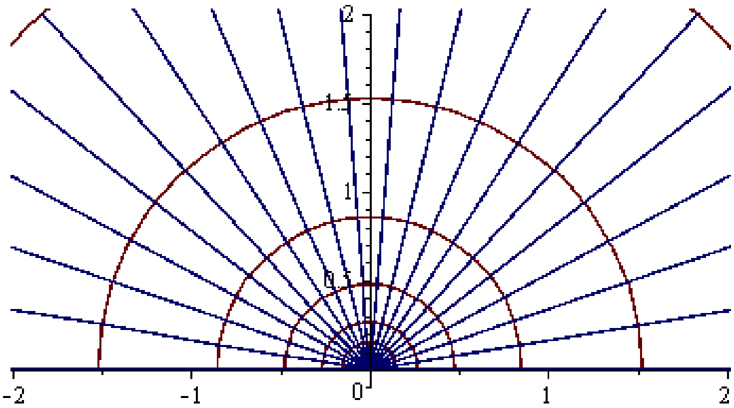


36- chizma

> $conformal\left(e^{z}, z=-10+0\cdot I..1+1.99\cdot \pi I, -2-2\cdot I..2+2\cdot I, grid=[30, 30]\right)$



> $conformal\left(e^{z}, z=-10+0\cdot I\,..1+\pi I, -2-0.1\,I\,..2+2\cdot I, grid=[20,20]\right)$



37- chizma

Тригонометрик функциялар.

(12)-тенгликда $x=0$ десак,

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i\sin y \end{cases}$$

тенгликларга эга бўлиб,бундан

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} \qquad (13)$$

ифодаларни ҳосил қиламиз (13)-формулалар ихтиёрий ҳақиқий сон учун ўринли бўлиб, улардан биз

$$w = \cos z, \quad w = \sin z$$

функцияларни аниқлашда фойдаланамиз.

Таъриф. *Ушбу*

$$\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \\ ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z} = \dfrac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{cases} \tag{14}$$

тенгликлар ёрдамида аниқланган функцияларга комплекс аргументли тригонометрик функциялар деб аталади.

Тригонометрик функцияларнинг асосий хоссаларини келтирамиз.

1) $\cos z$ ва $\sin z$ функциялар C комплекс текисликда голоморф ва уларнинг ҳосилалари

$$(\cos z)' = -\sin z,$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

бўлади.

2) tgz функция

$$\left\{ z \in C; \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

тўпламда, ctgz функция эса

$$\{ z \in C; \quad , z \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$$

тўпламда голоморф бўлади.

3) sinz, tgz, ctgz функциялар тоқ, cosz эса жуфт функция бўлади.

4) Триногометрик функциялар даврий бўлиб, cosz ва sinz нинг даври 2π га, tgz ва ctgz нинг даври π га тенгдир.

5) Ҳакикий ўзгарувчили тригонометрик функциялар орасидаги муносабатларни ифодаловчи формулаларнинг кўпчилиги комплекс ўзгарувчили бўлган ҳолда ҳам ўринли бўлади.

Изоҳ. Комплекс аргументли cosz ва sinz функцияларнинг ҳақиқий аргументли cosz ва sinz функциялардан фарқли томони шундаки, улар чегараланган бўлиши шарт эмас. Масалан w=cos z функциянинг комплекс текслик C да чегаранланмаганлигини кўрсатайлик,

$\triangleleft$ *Маълумки,*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad .$$

Бу тенгликда zқiу деб оламиз. Унда

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \infty$$

Бу эса wқcosz функциянинг *C* да чегараланмаганлигини билдиради $\triangleright$

6) Ушбу

cos(iz)=chz , isinz=-shz ,

cosz=ch(iz), sinz=-ish(iz)

муносабатлар ўринли, бунда

$$ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \;, \quad sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \;. \qquad (15)$$

Одатда, (15)-функциялар *гиперболик функциялар* дейилади.

7) Тригонометрик функциялар ёрдамида бажариладиган акслантиришлар бир нечта бизга маълум акслантиришларнинг композицияси натижасидан иборат бўлади.

Мисол. Ушбу

$$w = \sin z$$

функция ёрдамида бажариладиган акслантириш (z) текислигидаги

$$D = \{z \in C : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$$

соҳани (ярим йўлакни) (w) текисликдаги қандай соҳага акслантиради?

$\triangleleft$ Берилган $w = \sin z$ функция ёрдамида бажариладиган акслантириш бизга маълум бўлган

$$w_1 = iz \quad , \quad w_2 = e^{w_1} \quad , \quad w_3 = \frac{w_2}{i}$$

акслантиришлар композициясидан иборат бўлиб,

$$w = \sin z = \frac{1}{2}(w_3 + \frac{1}{w_3})$$

бўлади. Бинобарин, бу акслантиришларни, кетма-кет бажариш натижасида $w = \sin z$ учун $w(D)$ топилади:

1) D соха $w_1 = iz$ акслантириш натижада

$$D_1 = \{w_1 \in C : \mathrm{Re}\, w_1 < 0 \ , \qquad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}\, w_1 < \frac{\pi}{2}\}$$

соҳага ўтади.

2) D_1 соҳа $w_2 = e^{w_1}$ акслантириш натижасида

$$D_2 = \{w_2 \in C : |w_2| < 1 \ , \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}\}$$

ярим доирага ўтади.

3) D_2 соҳа $w_3 = \frac{w_2}{i}$ акслантириш натижасида

$$D_3 = \{w_3 \in C : |w_3| < 1 \, , \qquad \pi < \arg w_3 < 2\pi\}$$

соҳага ўтади.

4) D_3 соха $w = \sin z = \frac{1}{2}(w_3 + \frac{1}{w_3})$ акслантириш натижасида

$$w(D) = \{w \in C : \mathrm{Im}\, w > 0\}$$

соҳага ўтади.

Демак, $w = \sin z$ акслантириш (z) такисликдаги

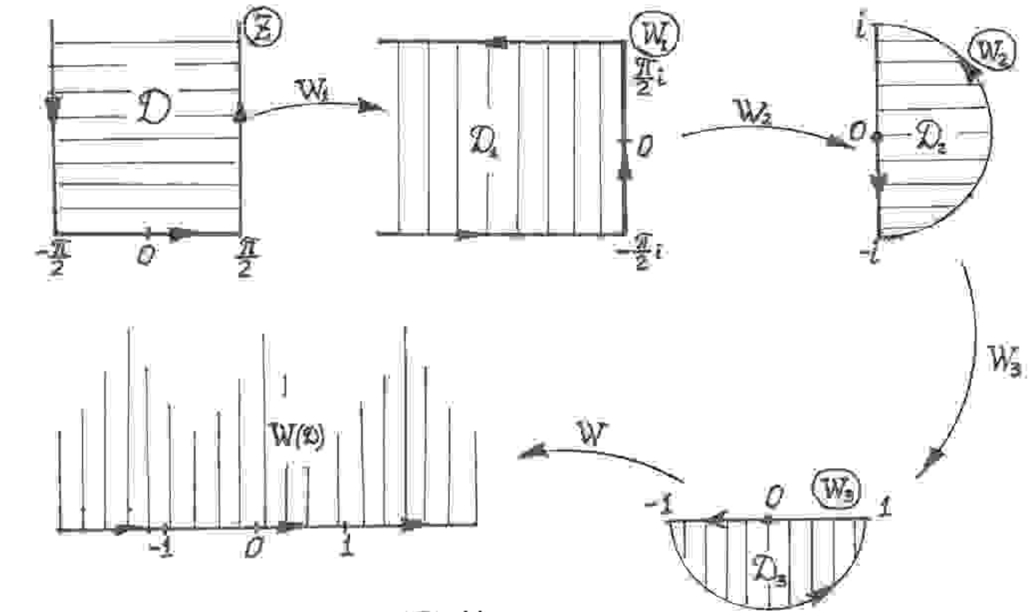
$$D = \{z \in C : -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}\, z < \frac{\pi}{2} \ , \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

соҳани (w) текисликдаги

$$w(D) = \{w \in C : \mathrm{Im}\, w > 0\}$$

юқори ярим текисликка акслантирар экан.

Олинган функциялар D соҳани қайси йўл билан $w(D)$ соҳага акслантириши 9-чизмада кўрсатилган ▹

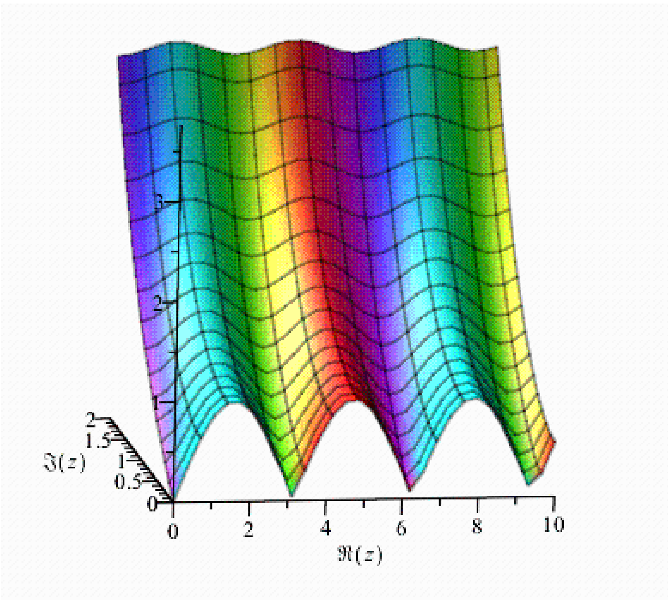


9-Чизма

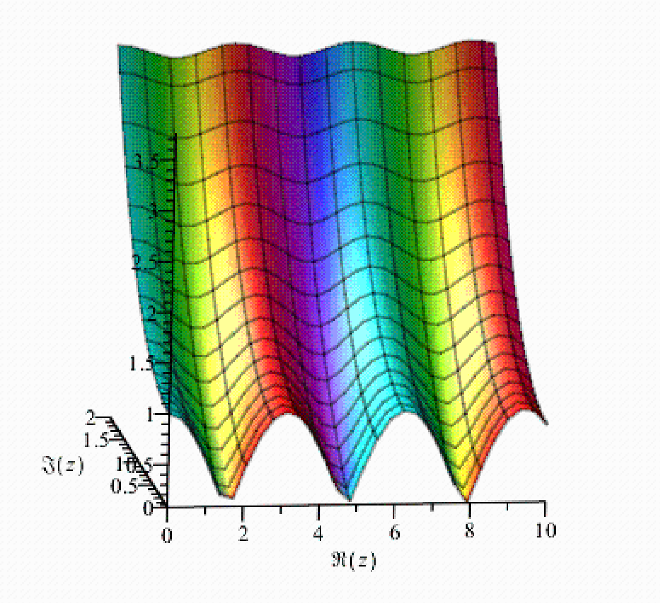
Бу функцияларнинг рельефларини келтирамиз.

> *with*(*plots*) :

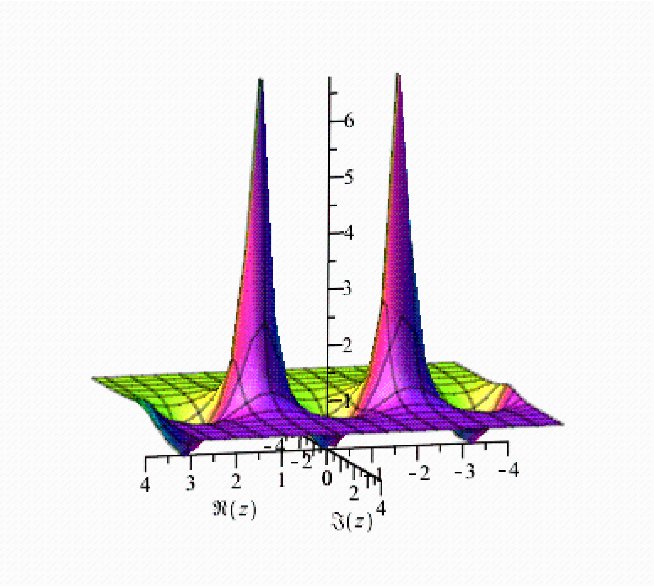
> *complexplot3d*(sin(z), $z = 10 - 0\,I..0 + 2\,I$, *grid* = [30, 30]);



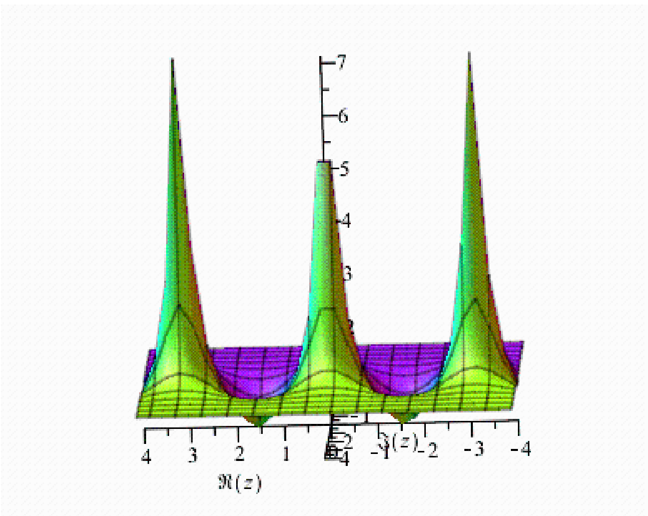
complexplot3d(cos(z), $z = 10 - 0\,I..0 + 2\,I$, *grid* = [30, 30])



> $complexplot3d(\tan(z), z = -4 - 4I..4 + 4I, grid = [30, 30])$

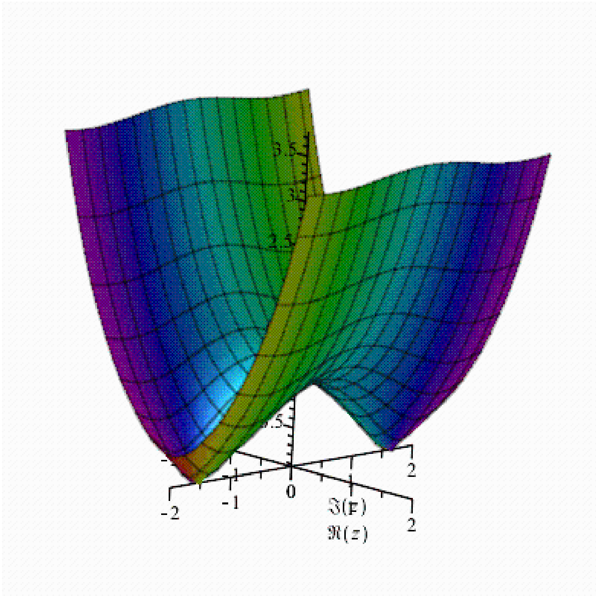


> $complexplot3d\left(\frac{1}{\tan(z)}, z = -4 - 4I..4 + 4I, grid = [30, 30]\right)$



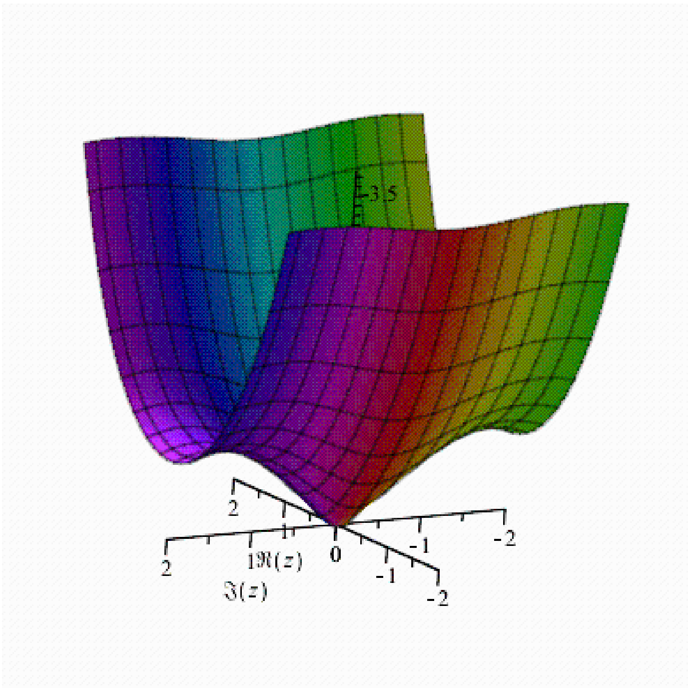
> $with(plots):$

> $complexplot3d(\cosh(z), z=-2-2I..2+2I, grid=[30,30]);$



38- chizma

> $complexplot3d(\sinh(z), z=-2-2I..2+2I, grid=[30,30])$



39- chizma

4.4. Кўп қийматли функциялар.

Комплекс аргументли функциялар назариясида голоморф функцияга тескари бўлган функцияни ўрганиш масаласи ҳам муҳим ўринда туради. Аксарият ҳолларда бундай функциялар бир қийматли бўлмай, аргументнинг битта қийматига бир нечта (баъзи ҳолда чексиз кўп) комплекс сон мос қўйилади. Бундай функцияларни қатъий математик асосда бериш йўлида комплекс анализга Риман сиртлари термини киритилади. Биз бу ерда энг содда кўп қийматли функцияларни қараш билан кифояланамиз.

а) $w = \sqrt[n]{z}$ $\quad (n \geq 2 - бутун\ \ сон)$ **функцияси.**

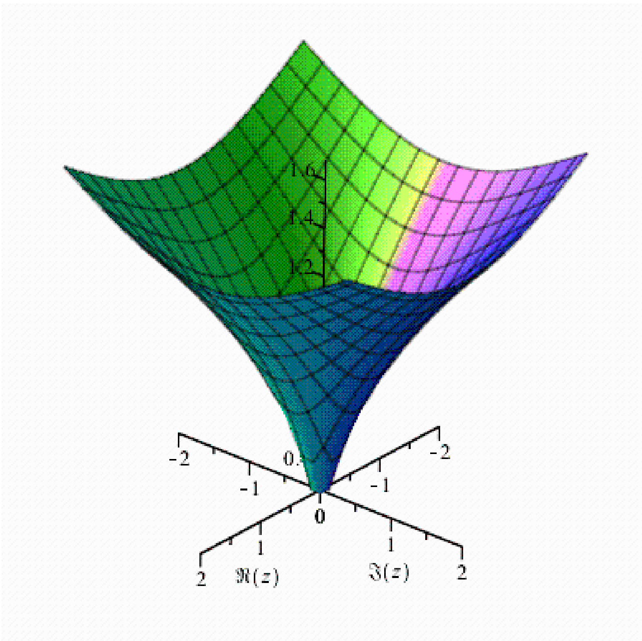
1-Таъриф. *Ушбу*

$$w^n = z \qquad (16)$$

тенгламанинг ечимларига z *комплекс соннинг* n-*даражали илдизлари дейилади ва* $w = \sqrt[n]{z}$ *каби белгиланади.*

$w = \sqrt{z}$ funksiyaning releyfi 41- chizmada tasvirlangan.

> $complexplot3d(\sqrt{z}, z = -2 - 2I..2 + 2I, grid = [30, 30])$



41- chizma

(16)–тенгламанинг ечимлари илдиз чиқариш учун *Муавр формуласига* кўра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n} i} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),\ k \in Z \qquad (17)$$

тенглик ёрдамида топилади. Бу ечимлар к нинг $0,1,2,....,(n-1)$ қийматларида бир-биридан фарқ қилиб, к-нинг бошқа қийматларида эса улар такрорланади. Шунинг учун ҳам $\sqrt[n]{z}$ n- та қийматли бўлиб, бу қийматлар

$$\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{\frac{\arg z+2k\pi}{n}\cdot i}, \qquad , \ k=0,1,2,\cdots,(n-1) \qquad (18)$$

дир.

$w=\sqrt[n]{z}$ нинг функционал хоссаларини ўрганишда қуйидаги содда, лекин муҳим теоремадан фойдаланилади.

Теорема. (Тескари функциянинг конформлиги ҳақидаги теорема). *Фараз қилайлик,* $w=f(z)$ *функция* (z) *текисликдаги D соҳани* (w) *текисликдаги G соҳага конформ акслантирувчи функция бўлсин. У ҳолда бу функцияга тескари бўлган* $z=f^{-1}(w)$ *функция G ни D га конформ акслантиради.*

Ўқувчига $z=w^n$ функциянинг бир япроқли бўладиган соҳалари 3^0-пунктдан маълум: $z=w^n$ функция ушбу ҳар бир

$$D_k=\{\frac{2k\pi}{n}<\arg w<\frac{2(k+1)\pi}{n}\}, \quad k=0,1,2,...,(n-1),$$

соҳада бир япроқли бўлиб, бу соҳани у $G=C\setminus R_+$ соҳага конформ акслантиради. $k=0$ десак $z=w^n$ функция

$$D_0=\{0<\arg w<\frac{2\pi}{n}\}$$

соҳани G га конформ акслантиради. Келтирилган теоремага кўра бу акслантиришнинг тескариси G *ни* D_0 га конформ акслантиради. Бу тескари функция (18) даги

$$\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\cdot\frac{\arg z}{n}}$$

га мос келиб, бу бир қийматли функцияга $\sqrt[n]{z}$ кўп қийматли функциянинг *0-тармоғи* дейилади ва у $(\sqrt[n]{z})_0$ каби белгиланади. Худди шундай $z=w^n$ функция

$$D_1=\{\frac{2\pi}{n}<\arg z<2\cdot\frac{2\pi}{n}\}$$

соҳани ҳам G га конформ акслантиради. Бу функциянинг тескариси G *ни* D_1 га акслантириб, унга $\sqrt[n]{z}$ нинг *1-тармоғи* дейилади ва у $(\sqrt[n]{z})_1$ каби белгиланади. Бу жараённи давом эттириб, $\sqrt[n]{z}$ кўп қийматли функциядан n та бир қийматли тармоқлар $(\sqrt[n]{z})_0,(\sqrt[n]{z})_1,...(\sqrt[n]{z})_{n-1}$ ларни ажрата оламиз. Бу ҳар бир $(\sqrt[n]{z})_k$, $k=0,1,...(n-1)$, тармоқ G да бир қийматли ва уни D_k соҳага конформ акслантиради.

Мисол. $D = C \setminus R_+$ соҳани бирлик доирага конформ акслантиринг.

$\lhd$ $(\sqrt{z})_0$ тармоқнинг хоссасига кўра $w_1 = (\sqrt{z})_0$ функция D ни юқори ярим текисликка конформ акслантиради. (5)-формулага кўра $w = \dfrac{w_1 - i}{w_1 + i}$ каср чизиқли функция юқори ярим текисликни бирлик доирага акслантиради. Демак $w = \dfrac{(\sqrt{z})_0 - i}{(\sqrt{z})_0 + i}$ функция $C \setminus R_+$ ни бирлик доирага конформ акслантиради $\rhd$

$w = \sqrt[n]{z}$ кўп қийматли функцияда $(\sqrt[n]{z})_0, (\sqrt[n]{z})_1, ..., (\sqrt[n]{z})_{n-1}$ бир қийматли функцияларнинг ҳосил қилиниши кўп қийматли функциялардан *тармоқ ажратиш* дейилиб, бу ерда биз тармоқ ажратишнинг битта услубини бердик. Бу тармоқлардан одатда $w = (\sqrt[n]{z})_0$ тармоқ кўп ишлатилади. Амалиётда бу функциялардан бурчак соҳаларни кичрайтириш (сиқиш) учун фойдаланилади.

Баъзи бир масалаларни ечишда кўп қийматли $w = \sqrt[n]{z}$ функциянинг бир қийматли тармоқларини берилган шартларга қараб ҳам ажратишга туғри келади. Масалан, $n = 2$ бўлганда, икки қийматли $w = \sqrt{z}$ функциянинг иккита бир қийматли $(w)_0$ *ва* $(w)_1$ тармоқларини қуйидагича ҳам ажратиш мумкин:

$$(w)_0 = \sqrt{z} \quad , \quad \sqrt{-1} = i \quad (\textit{ёки } \sqrt{1} = 1)$$

ва

$$(w)_1 = \sqrt{z} \quad , \quad \sqrt{-1} = -i \quad (\textit{ёки } \sqrt{1} = -1)$$

$(w)_0$ тармоқ $C \setminus R_+$ ни юқори ярим текисликка, $(w)_1$ тармоқ эса $C \setminus R_+$ ни қуйи ярим текисликка конформ акслантиради.

б) w=Lnz функцияси.

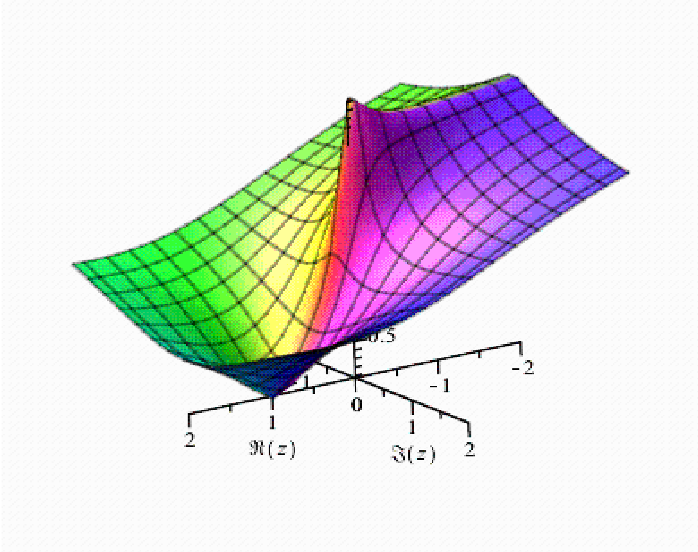
2-Таъриф. *Ушбу*

$$e^w = z \qquad (19)$$

тенгламанинг ечимлари z комплекс соннинг логарифми дейилади ва $w = Lnz$ *каби белгиланади.*

Bu funksiyaning releyfi 42- chizmada tasvirlangan.

```
> complexplot3d(ln(z), z=-2 - 2I..2 + 2I, grid = [30, 30])
```



42- chizma

(19)–тенгламани ечиш учун z *ни* $z = re^{i\varphi}$ кўринишда, w *ни эса* $w = u + iv$ шаклда ифодалаймиз:

$$e^{u+iv} = re^{i\varphi}.$$

Бунда $e^u = r$, $e^{iv} = e^{i\varphi}$ тенгликларга эга бўлиб, ечим $u = \ln r,\quad v = \varphi + 2k\pi,\quad k \in Z$ эканлигини кўрамиз. Демак,

$$w = Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\ ,\ \ k \in Z \qquad (20)$$

бўлиб, Lnz функция кўп қийматлидир.

e^w функция

$$\Pi_k = \{w \in C : 2k\pi < \operatorname{Im} w < 2(k+1)\pi\},\ k \in Z$$

соҳаларда бир япроқли ва бу соҳаларнинг ҳар бирини $C \setminus R_+$ га конформ акслантиришини биламиз. Тескари функциянинг конформлиги ҳақидаги теоремадан фойдалансак, биз $w = Lnz$ функциясидан чексиз кўп тармоқлар

$$w = (Lnz)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\ ,\ k \in Z$$

ни ажратиш мумкин эканлигини ҳосил қиламиз. Бу ҳар бир тармоқ $G = C \setminus R_+$ да голоморф бўлиб, уни Π_k йўлакка конформ акслантиради.

Келишувга кўра $(Lnz)_0 = \ln z$ деб белгиланади ва бу функцияга *Lnz функциянинг бош тармоғи* дейилади.

Мисол. $z_0 = i$ нуқтани $w_0 = \dfrac{5\pi i}{2}$ нуқтага ўтказадиган *логарифмнинг бир қийматли тармоғи* ёрдамида

$$D = \{z : z \notin (-\infty, 0]\}$$

соҳанинг аксини топинг.

◁ Lnz функциянинг

$$w=(Lnz)_k=\ln z+2k\pi i \quad , \quad k=0{,}1{,}2{,}...$$

тармоқларидан қайси бирини танлашимиз кераклигини

$$w(i)=\frac{5\pi i}{2}$$

шартдан аниқлаймиз:

$$\frac{5\pi i}{2}=\ln i+2k\pi i=\ln|i|+i\arg i+2k\pi i=i\cdot\frac{\pi}{2}+2k\pi i\,.$$

Бу ердан *кқ1* эканлигини топамиз. Демак, Lnz нинг керакли тармоғи

$$w=(Lnz)_1=\ln z+2\pi i$$

экан. $w_1=\ln z$ функция ёрдамида D соҳанинг

$$\{w_1:-\pi<\operatorname{Im}w_1<\pi\}$$

йўлакка аксланишини текшириш қийин эмас. $w=w_1+2\pi i$ функция ёрдамида эса йўлак

$$\{w:\pi<\operatorname{Im}w<3\pi\}$$

йўлакка аксланади▷

в) Комплекс сонни комплекс даражага кўтариш.

$w=Lnz$ функциясидан фойдаланиб, ихтиерий $z\neq 0$ ва a комплекс сонлар учун таърифга кўра

$$z^a=e^{aLnz}=e^{a[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]} \qquad (21)$$

деб қабул қилинади.

Масалан,

$$i^i=e^{iLni}=e^{i[\ln|i|+i(\arg i+2k\pi)]}=e^{i\cdot i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}=e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \quad ,k\in Z\,.$$

Демак, i^i нинг чексиз кўп қийматлари мавжуд бўлиб, уларнинг ҳаммаси ҳақиқий сонлардир.

(21)–муносабат ердамида биз ихтиерий комплекс сон учун

$$w=z^a$$

функциясини ўрганишимиз мумкин. Амалиетда a - ҳакикий сон бўлган ҳол кўп қўлланилиб, $w=z^a$ функция бурчак соҳаларни конформ аксланитиришда фойдалидир.

г) Тескари тригонометрик функциялар.

Комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида тескари функция тушунчаси ҳақиқий ўзгарувчили функциялар синфидаги каби киритилади.

Масалан,

$$w = Arc\cos z$$

функция $z = \cos w$ тенгламани қаноатлантирувчи барча w ларнинг қийматлари тўпламидан иборат, яъни $\cos z$ функцияга тескари функциядир.

$$Arc\sin z\ , \quad Arctgz\ , \quad Arcctgz$$

ва бошқа функциялар ҳам шунга ўхшаш аниқланади.

Таърифдан фойдаланиб

$$Arc\cos z = -iLn(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad (22)$$

тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатиш қийин эмас. Бу ерда илдизнинг барча қийматлари олинади.

(22)-тенгликдан кўриниб турибдики, логарифмик функция каби $Arc\cos z$ функция ҳам бир қийматли эмас. $Arc\cos z$ функциянинг бош қиймати $w = \arccos z$ деб олинади ва ушбу

$$w = \arccos z = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \qquad (23)$$

тенглик ёрдамида аниқланади.

$$w = Arc\cos z \text{ функция}$$

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

юқори ярим текисликда чексиз кўп қийматли бўлиб, (22)–тенгликдан фойдаланиб унинг бир қийматли тармоқларини ажратиш мумкин. Улар

$$(Arc\cos z)_k = -i(Ln(z + \sqrt{z^2 - 1}))_k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

тенглик ёрдамида аниқланади. Масалан, *к=0* бўлса,

$$(Arc\cos z)_0 = \arccos z = -i\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

функция

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$$

соҳани

$$\{w : 0 < \operatorname{Re} w < \pi, \quad \operatorname{Im} z < 0\}$$

ярим йўлакка конформ акслантиради.

Симметрия принципи.

Бир соҳани иккинчи соҳага конформ акслантиришда симметрия принципидан кенг фойдаланилади.

Фараз қилайлик, $f_1(z)$ функция D_1 соҳада ($D_1 \subset C$) берилган ҳамда шу соҳада конформ бўлсин. Бунда D_1 соҳанинг чегараси ∂D_1 нинг бирор қисми $\gamma(\gamma \subset \partial D_1)$ айлана ёйи ёки тўғри чизиқ кесмасидан иборат. Бу $f_1(z)$ акслантириш D_1 соҳани G_1 соҳага, γ чизиқни Г чизиққа (Г - айлана ёйи ёки тўғри чизиқ кесмаси) акслантирсин:

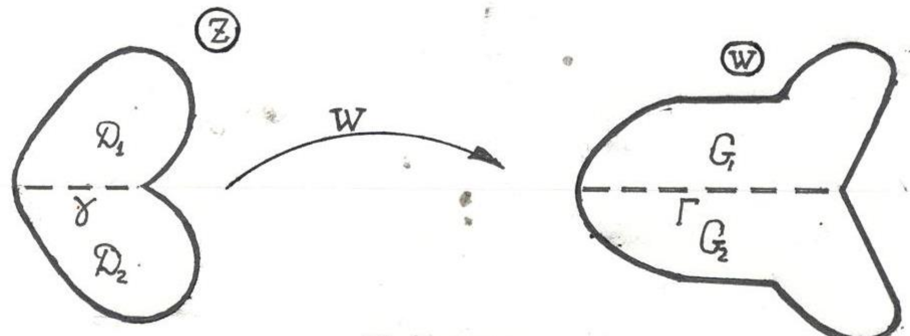
$$G_1 = f_1(D_{1,})$$

$$\varGamma = f_1(\gamma).$$

D_1 соҳанинг γ ёйга нисбатан симметрик бўлган соҳаси D_2, G_1 соҳанинг $\varGamma$ ёйга нисбати симметрик бўлган соҳаси эса G_2 бўлсин. $f_2(z)$ функцияни D_2 соҳада шундай аниқлаймизки, унинг қийматлари $f_1(z)$ функциянинг G_1 даги қийматларига $\varGamma$ ёйга нисбатан симметрик бўлган қийматларни қабул қилсин. У ҳолда $f_2(z)$ функция D_2 *ни* G_2 *га*, ушбу

$$w = \begin{cases} f_1(z) , & z \in D_1, \\ f_1(z) = f_2(z) , & z \in \gamma , \\ f_2(z) , & z \in D_2 \end{cases}$$

функция эса $D_1 \cup \gamma \cup D_2$ соҳани $G_1 \cup \varGamma \cup G_2$ соҳага конформ акслантиради (10-чизма).



10-Чизма

Одатда, юқоридаги тасдиқ *симметрия принципи* ёки *Риман–Шварц теоремаси* деб аталади.

Эслатма. Агар γ ва $\varGamma$ лар ҳақиқий ўқдаги кесмалар бўлса, у ҳолда $f_2(z)$ функция ушбу

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar{z})}$$

тенглик ёрдамида аниқланади.

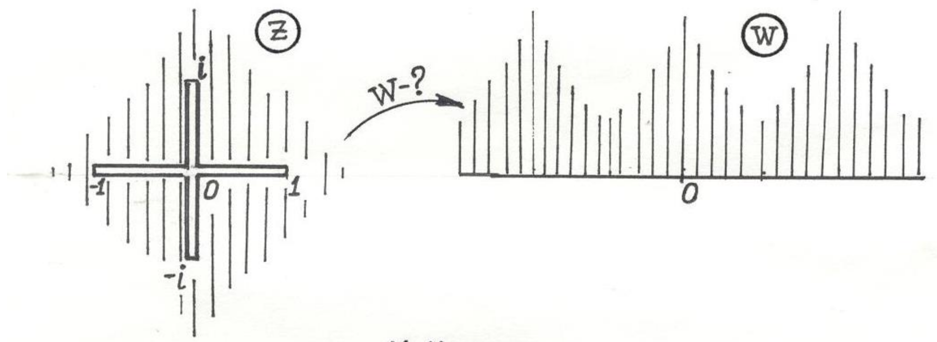
Мисол. Ушбу

$$D = \{z \in C : z \notin [-1;1],\ \ z \notin [-i;i]\}$$

соҳани юкори ярим текислик

$$\{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$$

ка конформ акслантирувчи $w = w(z)$ функцияни топинг (11-чизма).



11-Чизма

◃Қуйидаги

$$D_1 = \{z \in C : \operatorname{Im} z > 0\ ,\ z \notin [0,1]\}$$

соҳада

$$w_1 = z^2$$

функцияни қараймиз. Равшанки, бу акслантириш D_1 соҳада конформ бўлади.

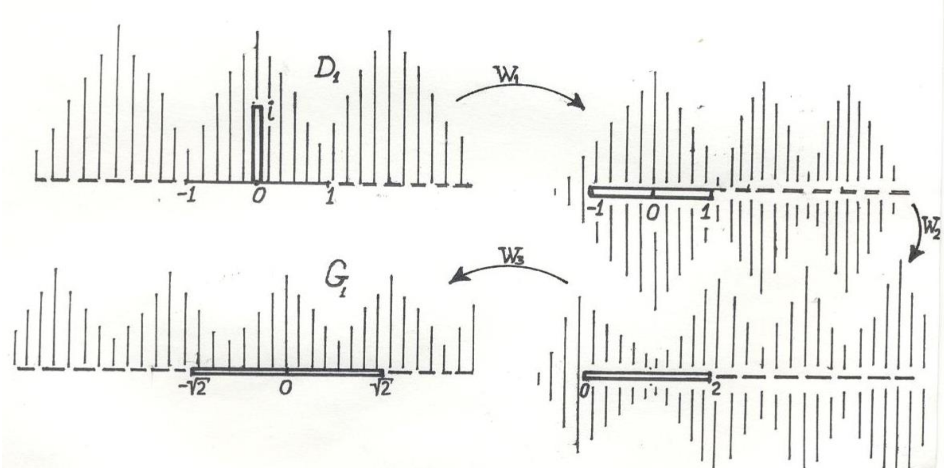
Энди D_1 соҳани юқори ярим текисликка акслантирамиз. Бу қуйидаги

$$w_1 = z^2$$

$$w_2 = w_1 + 1, \qquad (24)$$

$$w_3 = \sqrt{w_2}\ ,\quad \sqrt{-1} = i$$

акслантиришларни кетма-кет бажариш натижасида содир бўлади. ((24)– акслантиришларнинг бажарилиш жараёни 12-чизмада тасвирланган):



12-Чизма

Шундай қилиб, D_1 соҳа ушбу

$$w_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{w_1 + 1} = \sqrt{z^2 + 1} \ , \ \sqrt{-1} = i$$

функция ёрдамида

$$G_1 = \{w_3 \in C : \operatorname{Im} w_3 > 0\}$$

юқори ярим текисликка конформ аксланар экан. Энди симметрия принципидан фойдаланиб, D соҳани

$$w_3 = \sqrt{z^2 + 1} \ , \ \sqrt{-1} = i$$

функция ёрдамида

$$G = \{w_3 \in C : w_3 \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\}$$

соҳага конформ акслантирамиз. Бу соҳани юқори ярим текислик

$$\{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$$

ка конформ акслантириш қуйидаги

$$w_4 = \frac{w_3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - w_3},$$

$$w = \sqrt{w_4} \quad , \quad \sqrt{-1} = i$$

акслантиришларни кетма-кет бажарилиши натижасида амалга оширилади.

Демак, $D = \{z \in C : z \notin [-1;1], \ z \notin [-i; i]\}$ соҳани юқори ярим текислик $\{w \in C : \operatorname{Im} w > 0\}$ка конформ акслантирувчи функция

$$w = \sqrt{w_4} = \sqrt{\frac{w_3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - w_3}} = \sqrt{\frac{\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{z^2 + 1}}} \quad , \quad \sqrt{-1} = i$$

бўлади ▷

4.5. Асосий элементар функциялар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар

Биз бу пунктда амалиётда кўп учрайдиган асосий элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришларни бир жойга жамлаб чизмалардан фойдаланган ҳолда келтирамиз.

I. **Каср- чизиқли функция**.

1) Ангармоник нисбат.

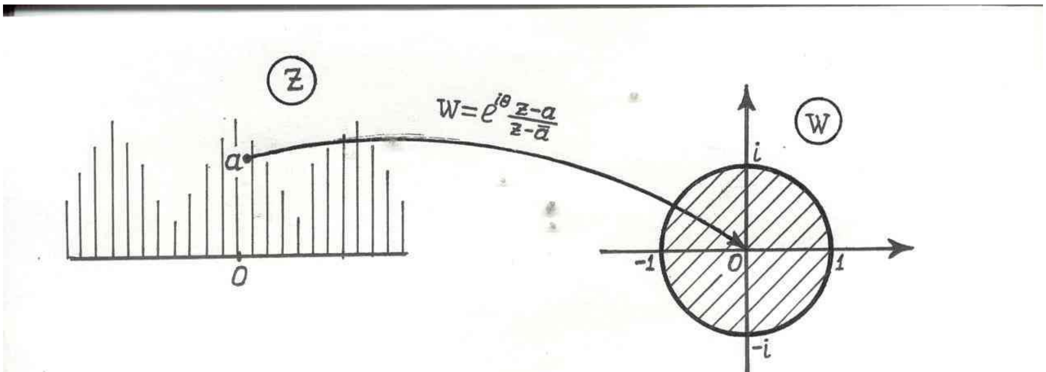
Берилган $z_1, z_2, z_3 \in C_z$ нуқталарни мос равишда $w_1, w_2, w_3 \in C_w$ нуқталарга акслантирувчи каср–чизиқли функция ушбу

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

ангармоник нисбатдан топилади.

2) $w=e^{i\theta}\cdot\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$, $\quad \operatorname{Im} a>0 \quad$ *ва* $\quad D=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$

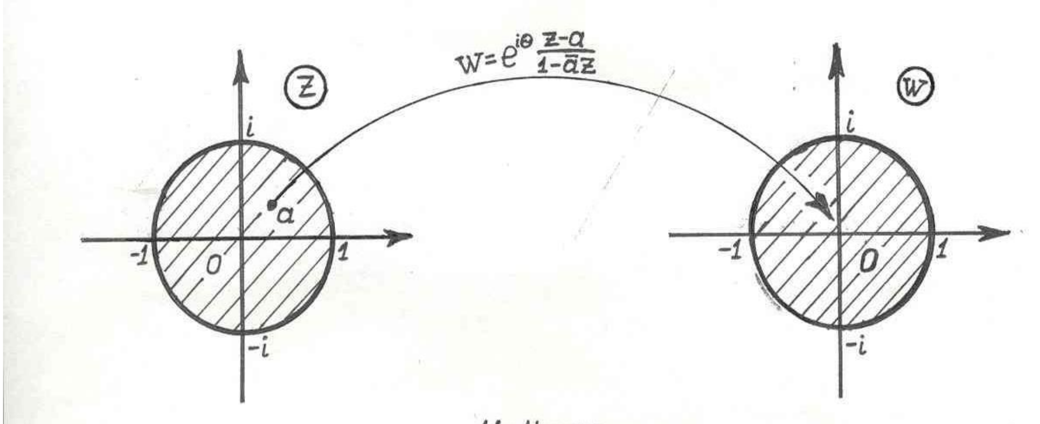
бўлса, $w(D)=\{w:|w|<1\}$ бўлади (13-чизма).



13–Чизма

$$3)\, w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \quad |a|<1 \quad ва \quad D=\{z:|z|<1\}$$

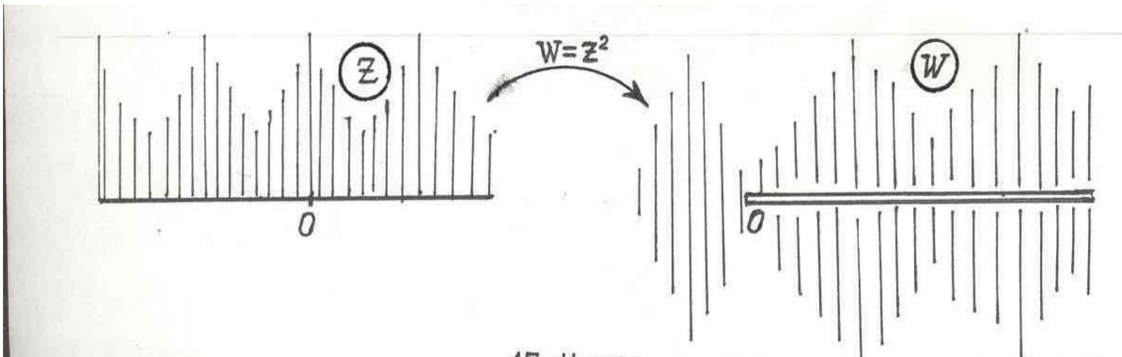
бўлса, $w(D)=\{w:|w|<1\}$ бўлади (14-чизма).



14-Чизма

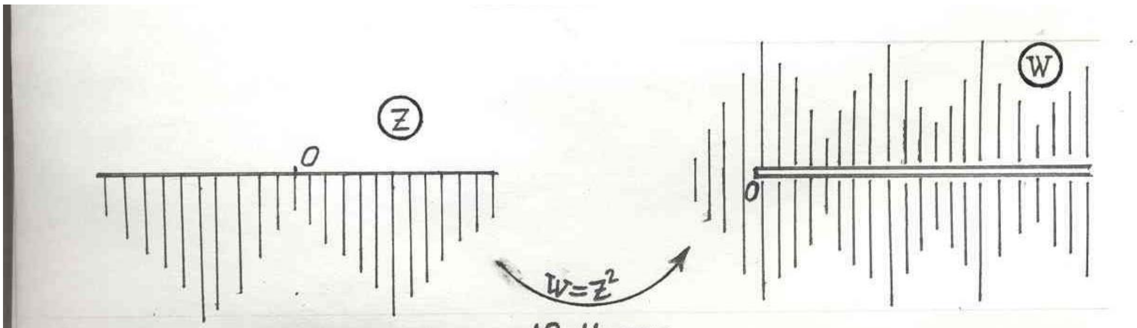
II. **Даражали функция ва унга тескари бўлган функциялар**.

1) $w=z^2$ *ва* $D=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ *булса,* $w(D)=C\setminus R_+$ бўлади (15-чизма).



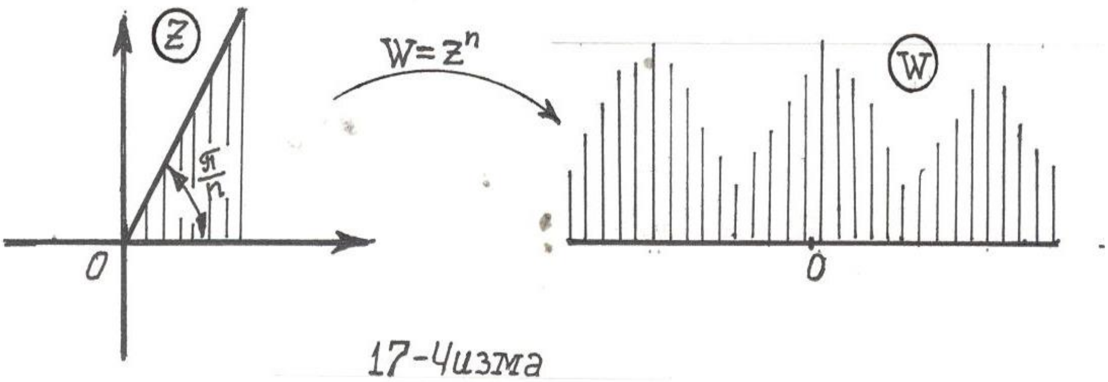
15-Чизма

2) $w=z^2$ *ва* $D=\{z:\operatorname{Im} z<0\}$ *булса,* $w(D)=C\setminus R_+$ бўлади (16-чизма).



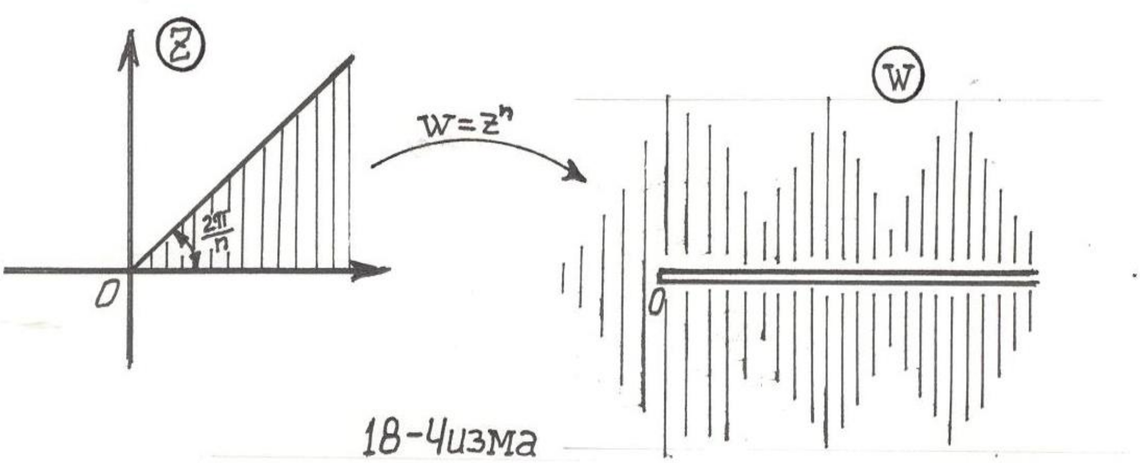
16-Чизма

3) $w=z^n$ *ва* $D=\{0:0<\arg z<\frac{\pi}{n}\}$ *булса,* $w(D)=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$ бўлади (17-чизма).



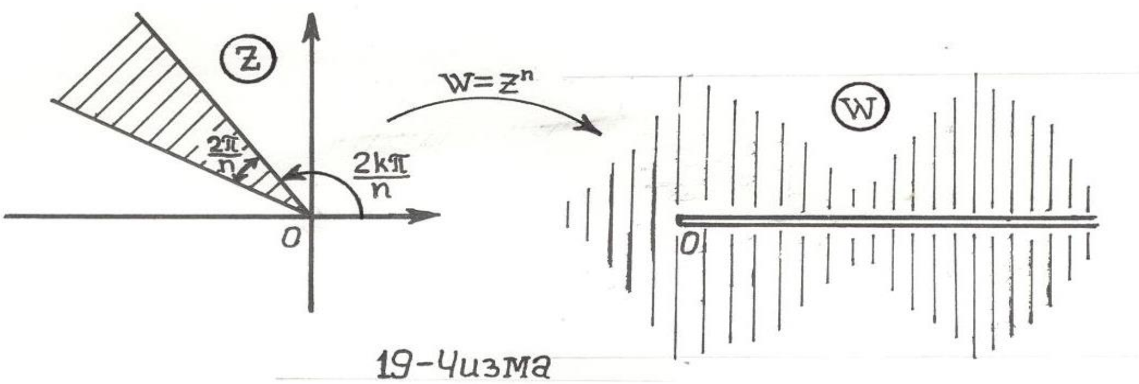
17-Чизма

4) $w = z^n$ *ва* $D = \{0 : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}\}$ *булса*, $w(D) = C \setminus R_+$ бўлади (18-чизма).



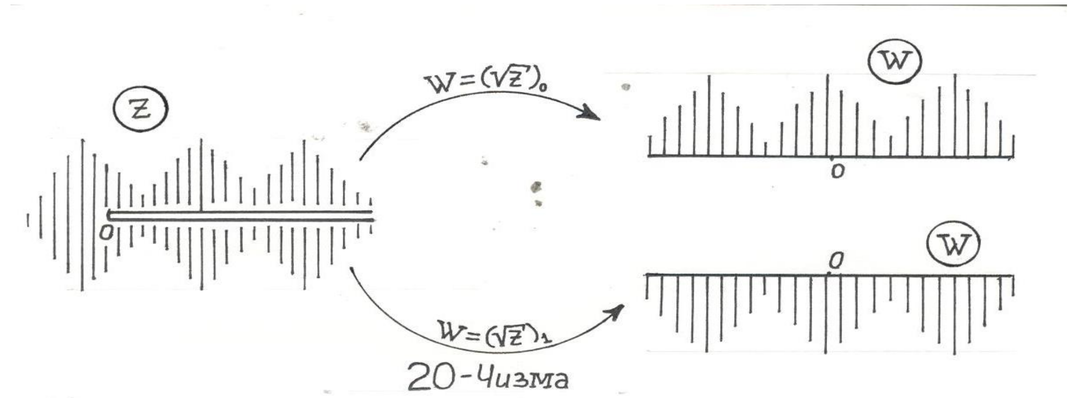
18-Чизма

5) $w = z^n$ *ва* $D = \left\{\frac{2k\pi}{n} < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n}\right\}$, $k = 0,1,\ldots n-1$, бўлса, $w(D) = C \setminus R_+$ бўлади (19-чизма).

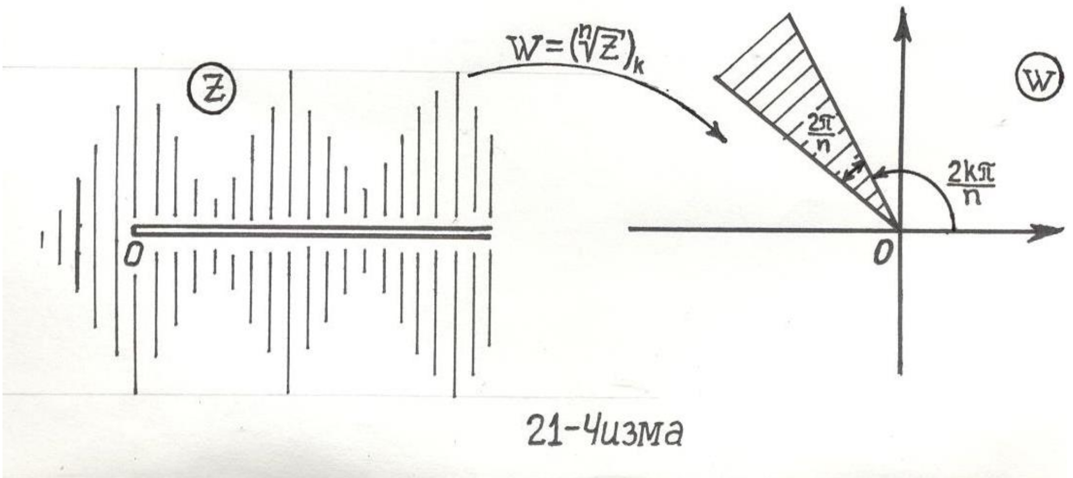


19-Чизма

6) $w=(\sqrt{z})_0$ $\;$ (*еки* $w=\sqrt{z}$, $\sqrt{-1}=i$) *ва* $D=C\setminus R_+$ ва бўлса, $w(D)=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$ ва $w=(\sqrt{z})_1$ (*еки* $w=\sqrt{z}$, $\sqrt{-1}=-i$) бўлса, $w(D)=\{w:\operatorname{Im} w<0\}$ бўлади (20-чизма).



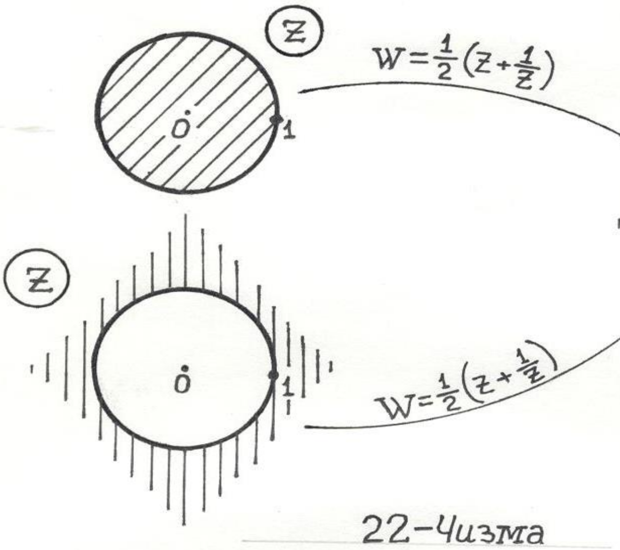
7) $w=(\sqrt[n]{z})_k$, $k=0,1,\dots n-1$ *ва* $D=C\setminus R_+$ бўлса, $w(D)=\{w:\dfrac{2k\pi}{n}<\arg w<\dfrac{2(k+1)\pi}{n}\}$ бўлади (21-чизма).



III. **Жуковский функцияси ва унга тескари функция**.

1) $w=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$ *ва* $D=\{z:|z|<1\}$ *булса* $w(D)=\{w:w\notin[-1;1]\}$ бўлади (22-чизма).

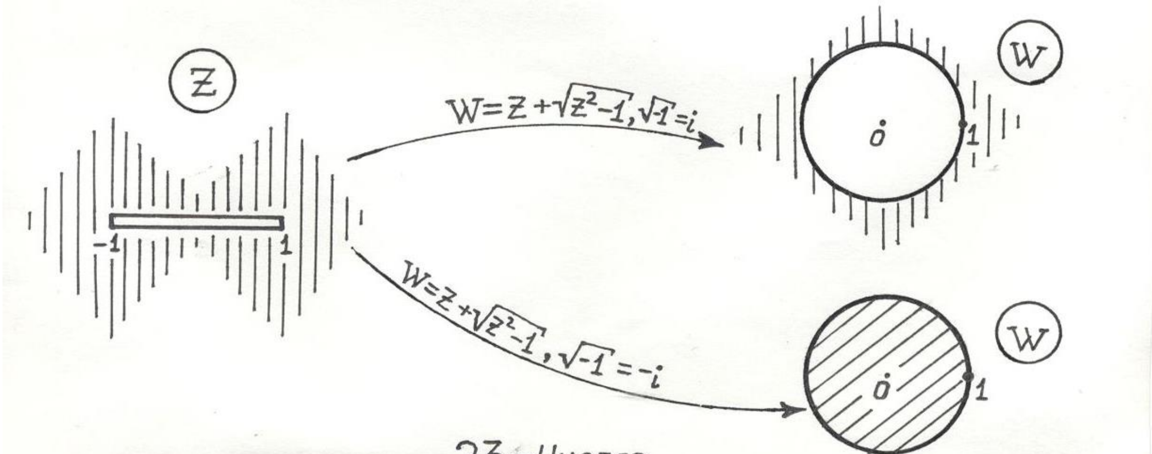
2) $w=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$ *ва* $D=\{z:|z|>1\}$ *булса* $w(D)=\{w:w\notin[-1;1]\}$ бўлади (22-чизма).



22-Чизма

3) $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$; $\sqrt{-1} = i$ (*еки* $w(\infty) = \infty$) *ва* $D = \{z : z \notin [-1;1]\}$ бўлса, $w(D) = \{w : |w| > 1\}$ бўлади (23-чизма).

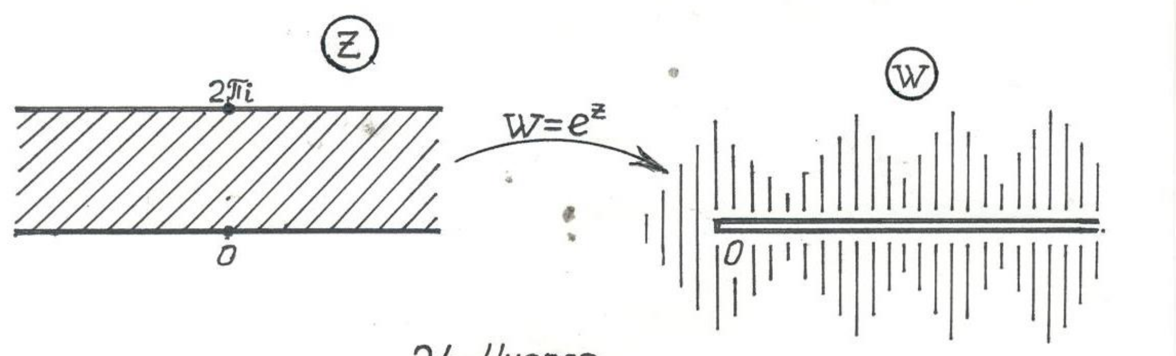
4) $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$; $\sqrt{-1} = -i$ (*еки* $w(\infty) = 0$) *ва* $D = \{z : z \notin [-1;1]\}$ бўлса, $w(D) = \{w : |w| < 1\}$ бўлади (23-чизма).



23-Чизма

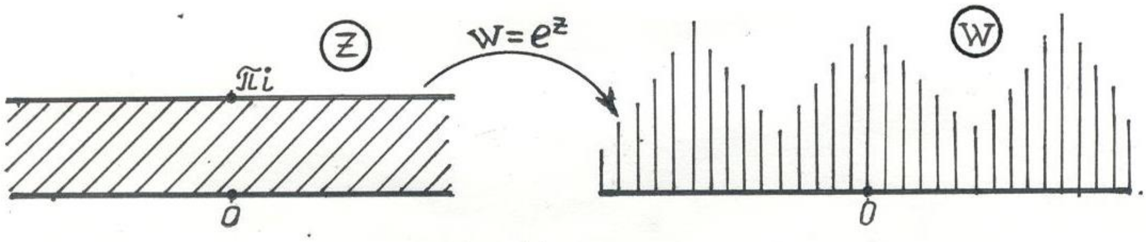
Кўрсатгичли ва логарифмик функциялар.

1) $w = e^z$ *ва* $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ *булса* $w(D) = C \setminus R_+$ бўлади (24-чизма).



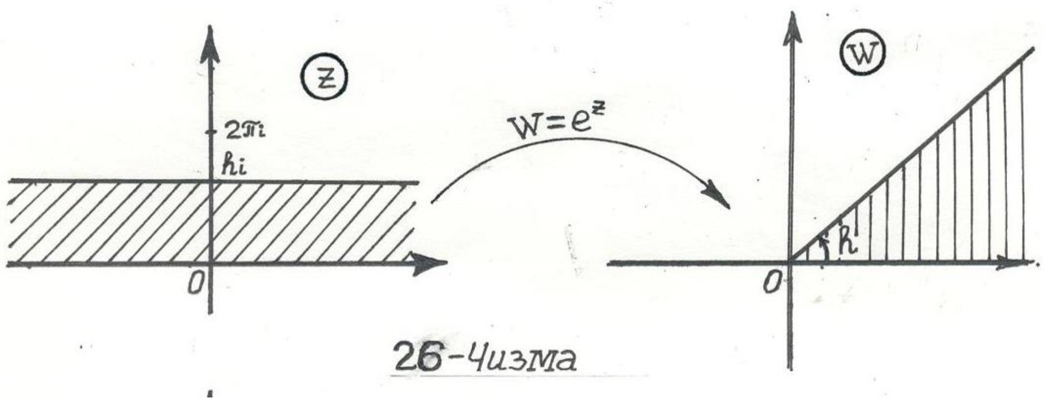
24-Чизма

2) $w = e^z$ *ва* $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ *булса* $w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ бўлади (25-чизма).



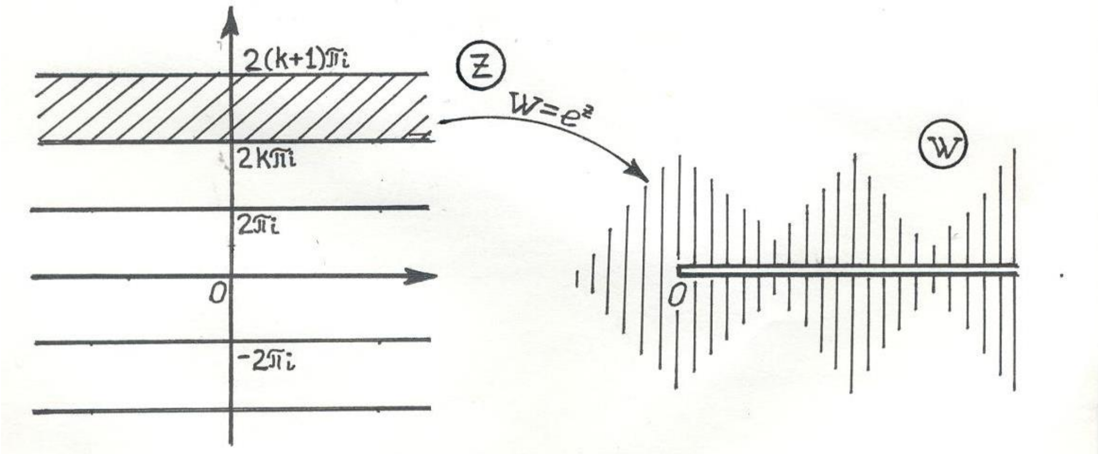
25-Чизма

3) $w = e^z$ *ва* $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < h,\ h < 2\pi\}$ бўлса, $w(D) = \{w : 0 < \arg w < h\}$ бўлади (26-чизма).



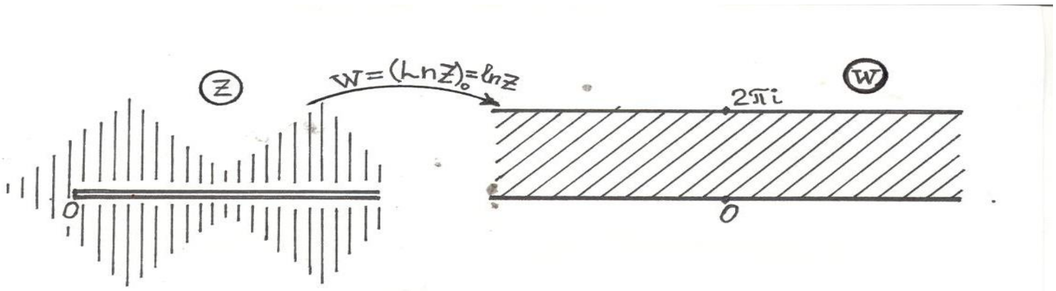
26-Чизма

4) $w = e^z$ *ва* $D = \{z : 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi\}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ бўлса, $w(D) = C \setminus R_+$ бўлади (27-чизма).



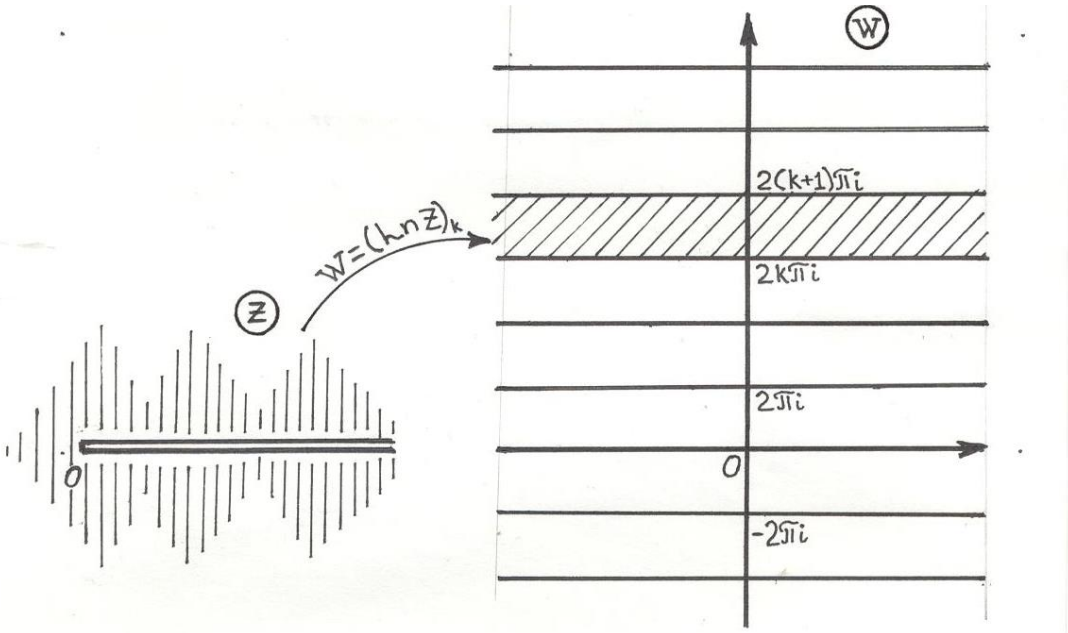
27-Чизма

5) $\quad w=(Lnz)_0=\ln z$ *ва* $D=C\setminus R_+$ *булса* $w(D)=\{w:0<\operatorname{Im}w<2\pi\}$ бўлади (28- чизма).



28-Чизма

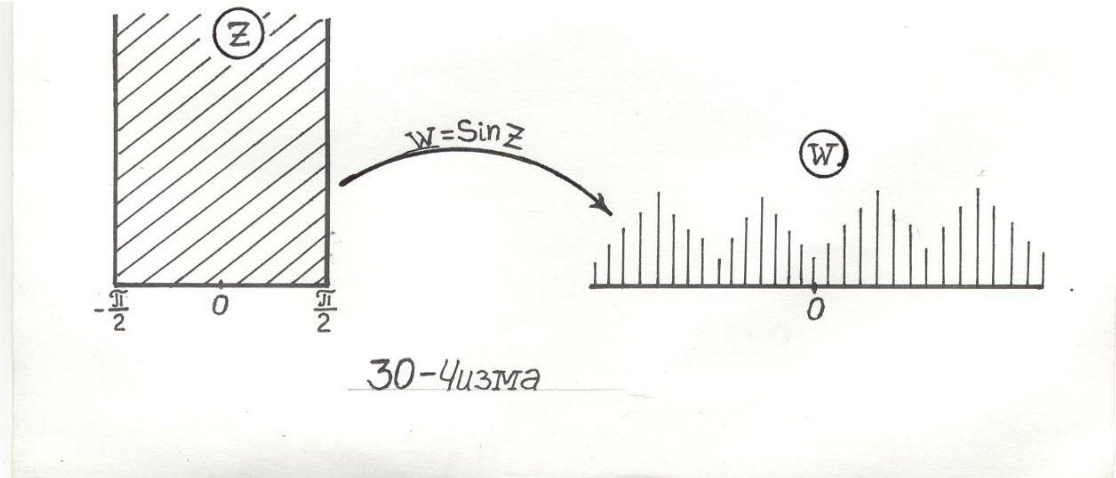
6) $\quad w=(Lnz)_k$ *ва* $D=C\setminus R_+$ *булса,* $w(D)=\{w:2k\pi<\operatorname{Im}w<2(k+1)\pi\}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ бўлади (29-чизма).



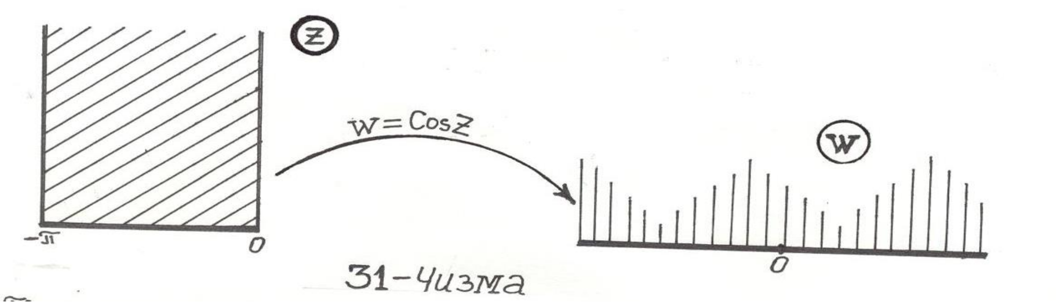
29-чизма.

V. Тригонометрик ва тескари тригонометрик функциялар.

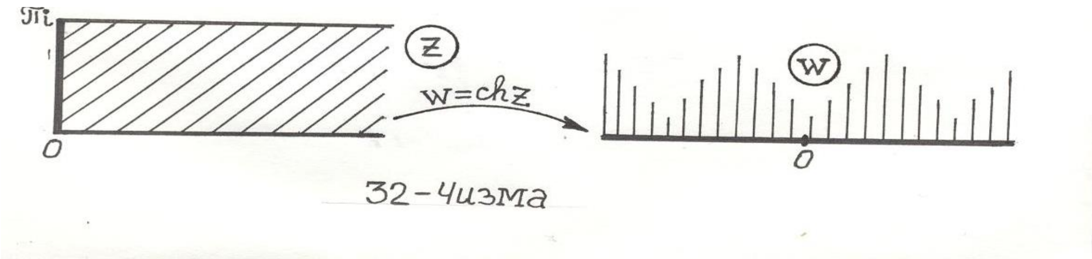
1) $w=\sin z$ *ва* $D=\left\{z:-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{Re} z<\dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z>0\right\}$ бўлса, $w(D)=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$ бўлади (30-чизма).



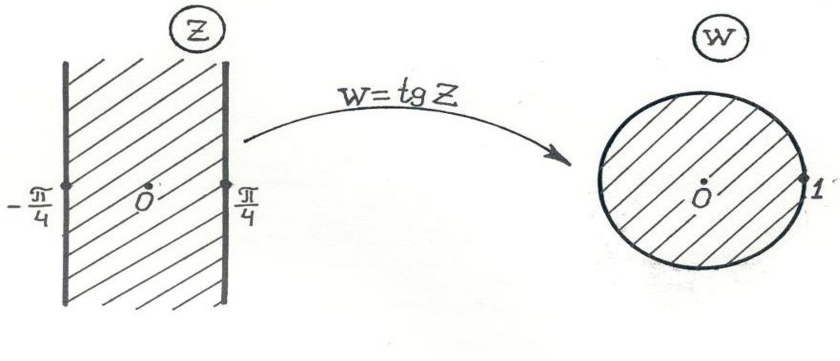
2) $w=\cos z$ *ва* $D=\{z:-\pi<\operatorname{Re} z<0, \operatorname{Im} z>0\}$ бўлса, $w(D)=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$ бўлади (31-чизма).



3) $w=chz$ *ва* $D=\{z:0<\operatorname{Im} z<\pi, \operatorname{Re} z>0\}$ бўлса, $w(D)=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$ бўлади (32-чизма).

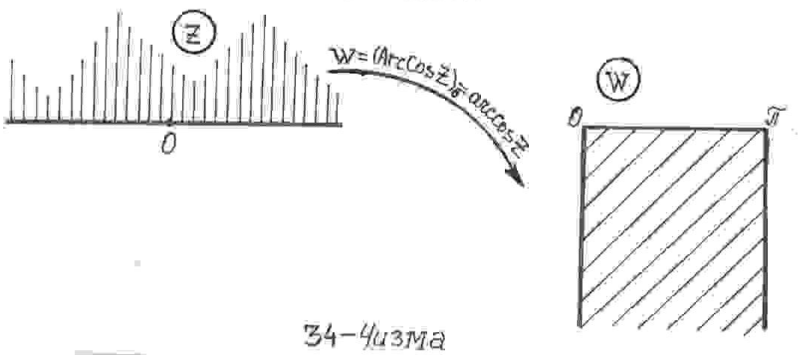


4) $w=tgz$ *ва* $D=\{z:-\dfrac{\pi}{4}<\operatorname{Re} z<\dfrac{\pi}{4}\}$ бўлса, $w(D)=\{w:|w|<1\}$ бўлади (33-чизма).



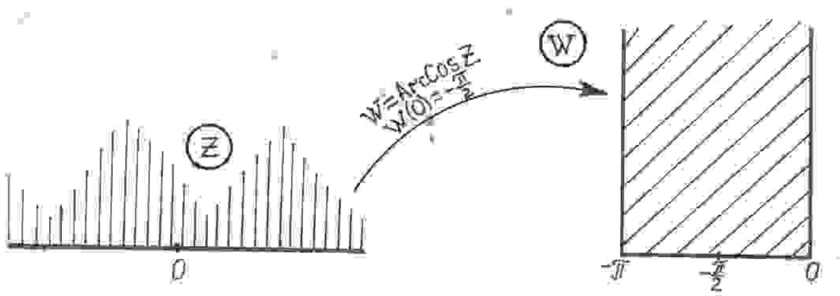
33-чизма

5) $w = (Arc\cos z)_0 = \arccos z$ *ва* $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса,
$w(D) = \{w_i : 0 < \operatorname{Re} w < \pi,\ \operatorname{Im} w < 0\}$ бўлади (34-чизма).



34-чизма

6) $w = Arc\cos z,\ w(0) = -\dfrac{\pi}{2}$ *ва* $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлса,
$w(D) = \{w : -\pi < \operatorname{Re} w < 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ бўлади (35- чизма).



35-чизма

Назорат саволлари:

1. Конформ акслантиришлар назариясининг асосий масалалари.
2. Риман теоремаси.
3. Соҳанинг сақланиш принципи.
4. Чизиқли функция ва унинг хоссалари.
5. Каср-чизиқли акслантиришнинг доиравийлик хоссаси.
6. Каср-чизиқли акслантиришда симметрикликнинг сақланиш хоссаси.
7. Ангармоник нисбат.
8. Юқори ярим текисликни бирлик доирага акслантирувчи каср-чизиқли функциянинг умумий кўриниши.
9. Бирлик доирани бирлик доирага акслантирувчи каср-чизиқли функциянинг умумий кўриниши.
10. Даражали функция ва унинг хоссалари.
11. Жуковский функцияси ва унинг хоссалари.
12. Курсаткичли функция ва унинг хоссалари.
13. Тригонометрик функциялар ва уларнинг хоссалари.
14. Даражали функцияга тескари бўлган $w=\sqrt[n]{z}$ $(n \geq 2 - \textit{бутун сон})$ функцияси.
15. $w = Ln\, z$ функцияси.
16. Комплекс сонни комплекс даражага кўтариш.
17. Тескари тригонометрик функциялар.
18. Симметрия принципи.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

- ва 2– амалий машғулотлар: Чекли вариацияли функциялар, функциянинг тўлиқ вариацияси ва уларнинг хоссалари

Ишдан мақсад: Математик ва комплекс анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, геомеханика ва бошқа соҳалардаги кенг қўлланилишини тушунтириш, чекли вариацияли функциянинг таърифи, функциянинг тўлиқ вариацияси, чекли вариацияли функцияларнинг монотон функция билан боғланиши, чекли вариацияли функциянинг узлуксиз функция билан боғланиши, чекли вариацияли функциянинг Липщиц шартини қаноатлантурувчи функция билан боғланиши, чекли вариацияли функциянинг дифференциаланувчи функция билан боғланиши, чекли вариацияли функциянинг абсолют интегралланувчи функция билан боғланиши, мажоранта функция, тўғриланувчи чизиқлар ва Жордан теоремасига оид мисол ва масалалар ечиш.

Ишни бажариш учун намуна:

<u>1-Мисол.</u> *Ушбу:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \quad \text{бўлса}, \\ 0, \quad \text{агар} \quad x=0, \quad \text{бўлса} & \end{cases}$$

функция ихтиёрий чекли [a,b] кесмада чекли вариацияга эга.

$> with(plots):$

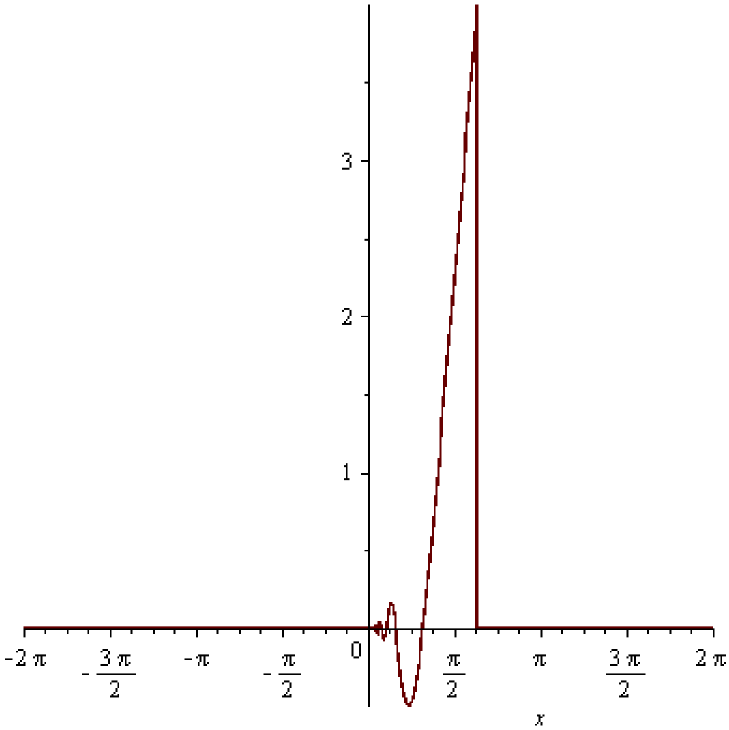
$$f := \begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & 0<x\leq 2 \\ 0 & x=0 \end{cases};$$

$>$

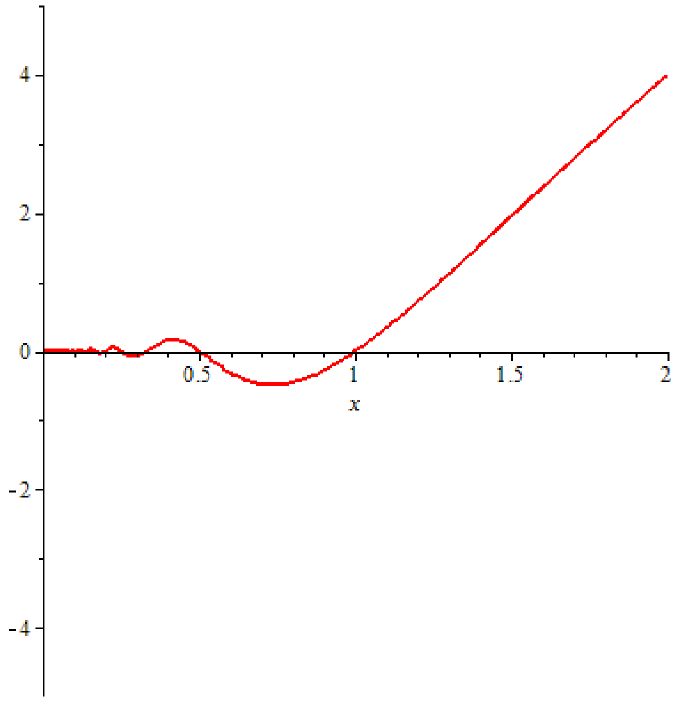
$$f := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & 0 < x \textbf{ and } x \le 2 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

> ;

> smartplot( );



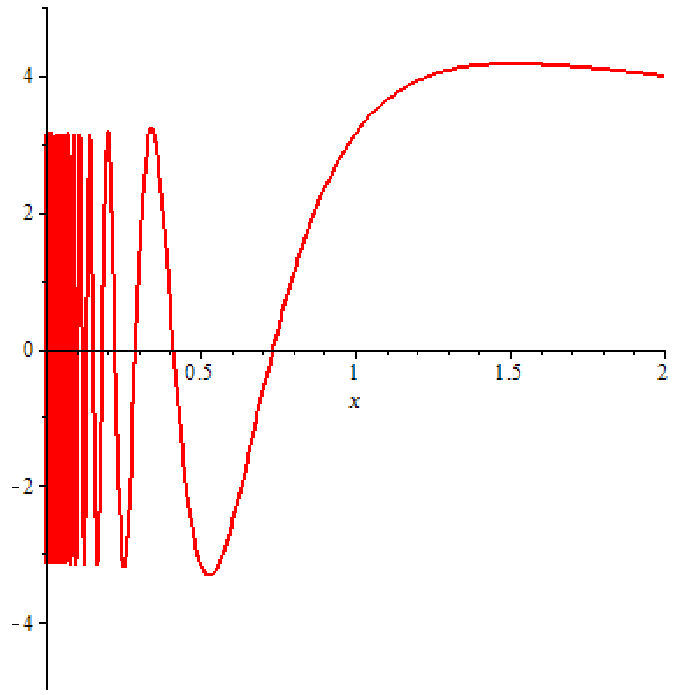
$plot(\mathrm{f}, \mathrm{x} = 0 \,..2, -5 \,..5, color = red, thickness = 2, discont = [\,usefdiscont = [\,bins = 35\,]\,], grid = [\,100, 100\,]\,);$



> $g := \frac{d}{dx} f;$

$$g := \begin{cases} 2\,x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\pi & 0 < x \text{ and } x \le 2 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

> *plot*(g, x = 0 ..2, −5 ..5, *color* = *red*, *thickness* = 2, *discont* = [*usefdiscont* = [*bins* = 35]], *grid* = [100, 100]);



◄3-теоремадан фойдаланиб кўрсатамиз:

$x \neq 0$ да $\quad f'(x) = 2xSin\dfrac{\pi}{x} - \pi Cos\dfrac{\pi}{x}$ $\quad$ ва

$x = 0$ да $\quad f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta x Sin\dfrac{\pi}{\Delta x} = 0$

бўлгани учун ихтиёрий чекли [a,b] кесмада ушбу:

$$|f'(x)| \leq 2 \cdot |b| + \pi = L$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Унда 3-теоремага кўра $f(x)$ функция [a,b] да чекли вариацияга эга.►

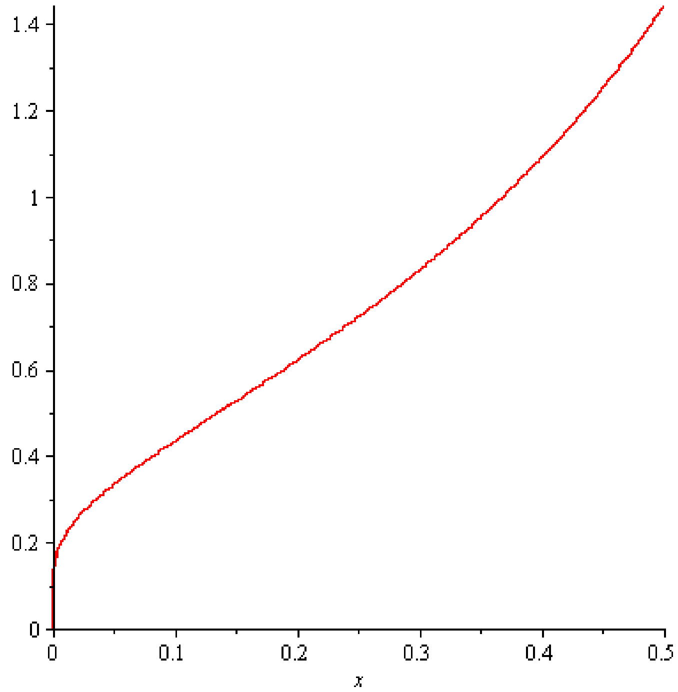
> $with(plots):$

> $v(x) := \begin{cases} \dfrac{-1}{\ln(x)} & 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $; \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{v(x)}{x};$

$$v := x \to piecewise\left(0 < x \textbf{ and } x \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{\ln(x)}, x = 0, 0\right)$$

$$undefined$$

> $plot\left(v(x), x = 0..\dfrac{1}{2}, color = [red]\right);$



> **Мисол 10**

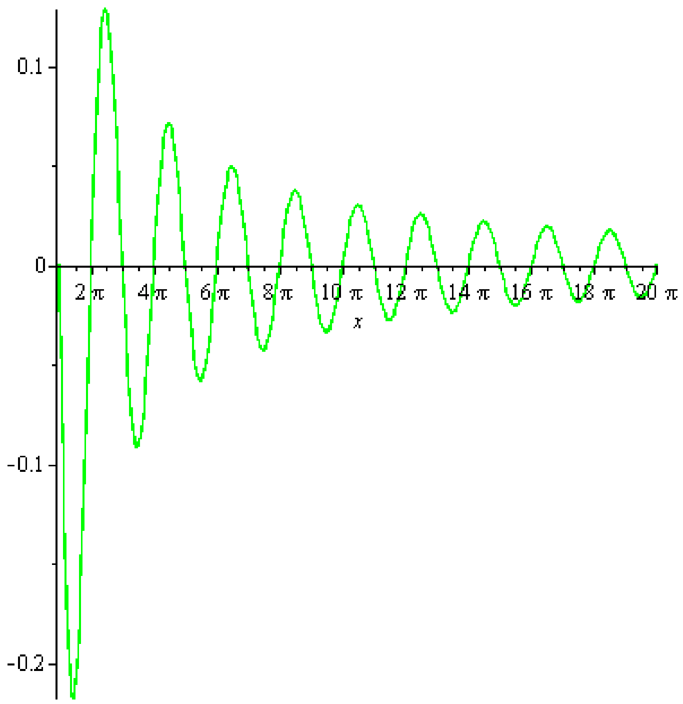
> $f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}; \qquad x \geq \pi$

$$f := x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\pi \leq x$$

> $with(plots)$:

> $plot(f(x), x = \ \mathrm{Pi} \,..\, 20 \cdot \mathrm{Pi}, color = [green]);$



>

> $\lim_{x \to \infty} f(x);$

$$0$$

> $\frac{d}{dx} f(x);$

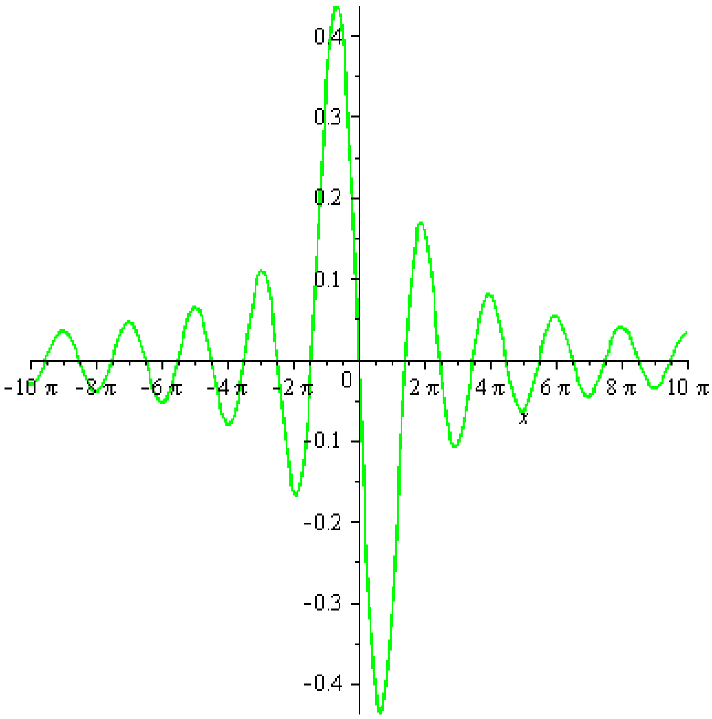
$$\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

> $g := x \to \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2};$

$$g := x \to \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

>

> $plot(g(x), x = -10 \cdot \mathrm{Pi} .. 10 \cdot \mathrm{Pi}, color = [green]);$



>

>

> Pi = $x0$ < $x1$ = 3 Pi / 2 < $x2$ = 2 Pi <...< $x2n$ − 1 = nPi − Pi / 2 < $x2n$ = nPi;

Pi = $x0$ < $x1$ = 3 Pi / 2 < $x2$ = 2 Pi <...< $x2n$ - 1

>

> $f(\pi)$;

$$0$$

> $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$;

$$-\frac{2}{3\pi}$$

> $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$;

$$\frac{2}{5\pi}$$

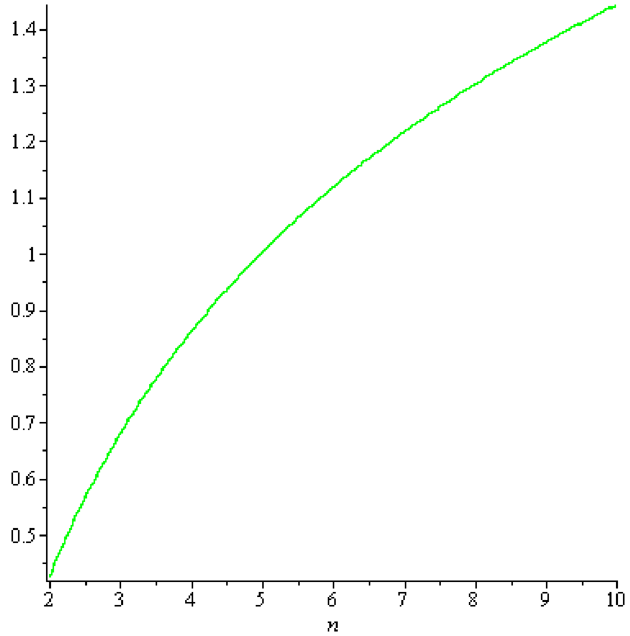
> *with*(*plots*) :

$> v(n) := \sum_{i=2}^{n} \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot i - 1} \right);$

$$v := n \rightarrow \sum_{i=2}^{n} \frac{4}{\pi \, (2\, i - 1)}$$

>

$> plot(v(n), n = 2 .. 10, color = [green]);$



>

$> \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot i - 1};$

$$\infty$$

>

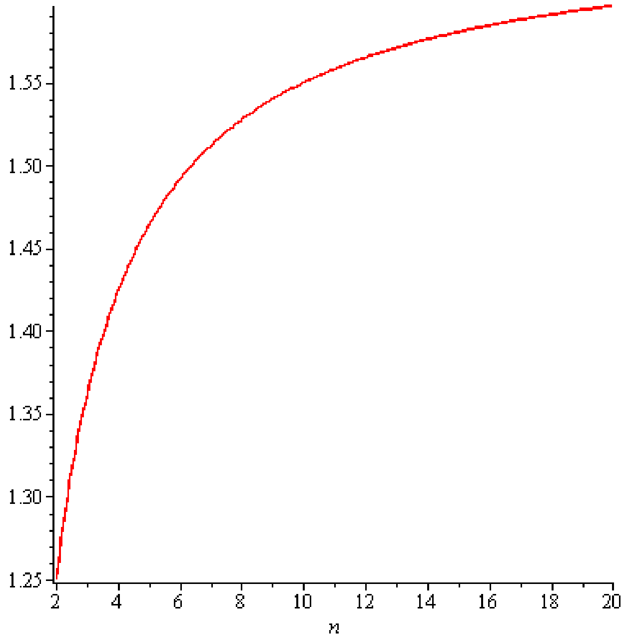
$> w(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2};$

$$w := n \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

>

>

> $plot(w(n), n = 2 .. 20, color = [red]);$



> **Мисол 14**

> $u := x \to piecewise(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, x^2, x = 1, 2, 1 < x \textbf{ and } x \leq 2, 3);$

$$u := x \to piecewise(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, x^2, x = 1, 2, 1 < x \textbf{ and } x \leq 2, 3)$$

> $w := x \to piecewise(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, 2 \cdot x^2, 1 \leq x \textbf{ and } x \leq 2, 2);$

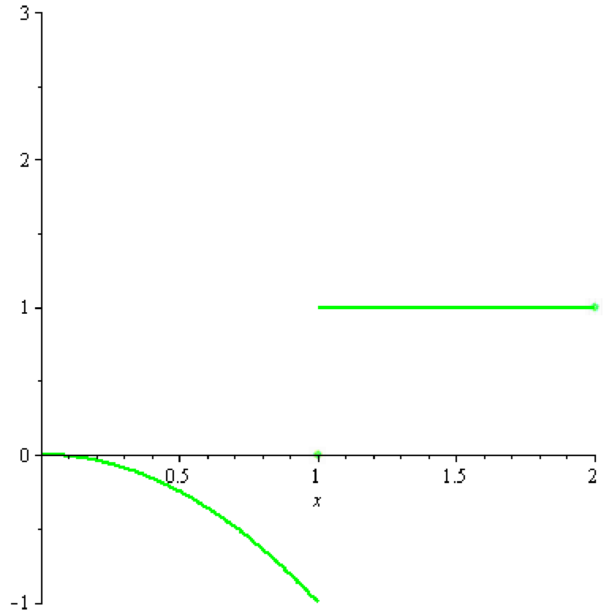
$$w := x \to piecewise(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, 2\,x^2, 1 \leq x \textbf{ and } x \leq 2, 2)$$

> $p := x \to piecewise(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, -x^2, x = 1, 0, 1 < x \textbf{ and } x \leq 2, 1);$

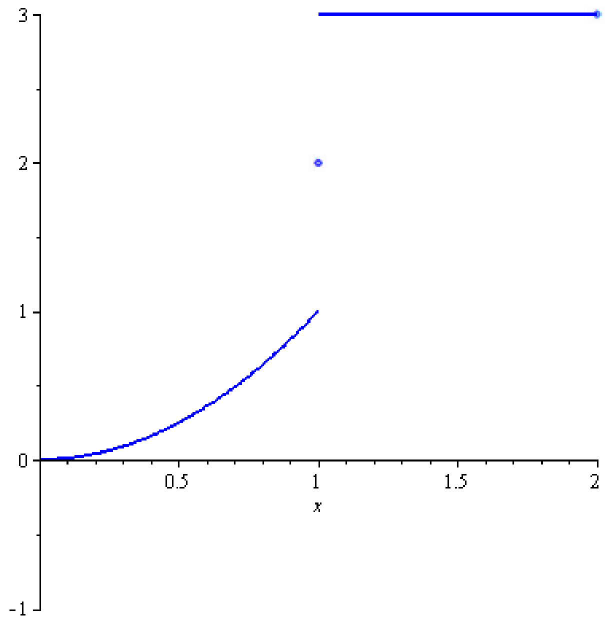
$$p := x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x < 1,\ -x^2,\ x = 1,\ 0,\ 1 < x \textbf{ and } x \leq 2,\ 1\right)$$

>

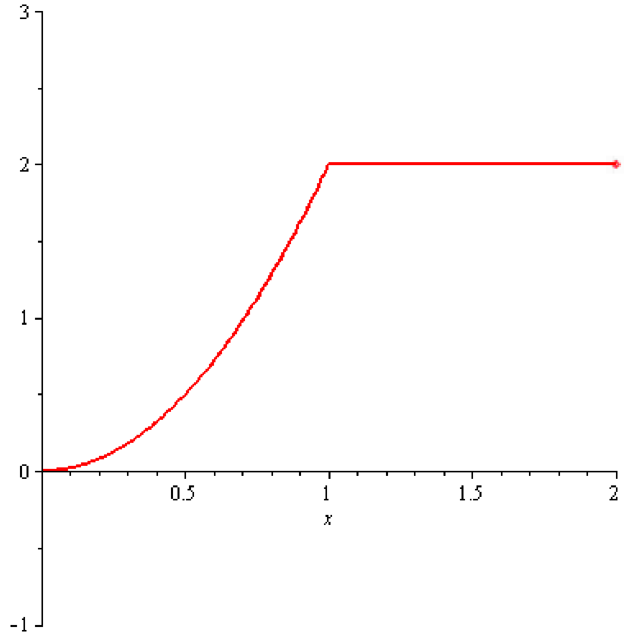
> $plot(p(x), x = 0 ..2, -1 ..3, color = green, thickness = 2, discont = true);$



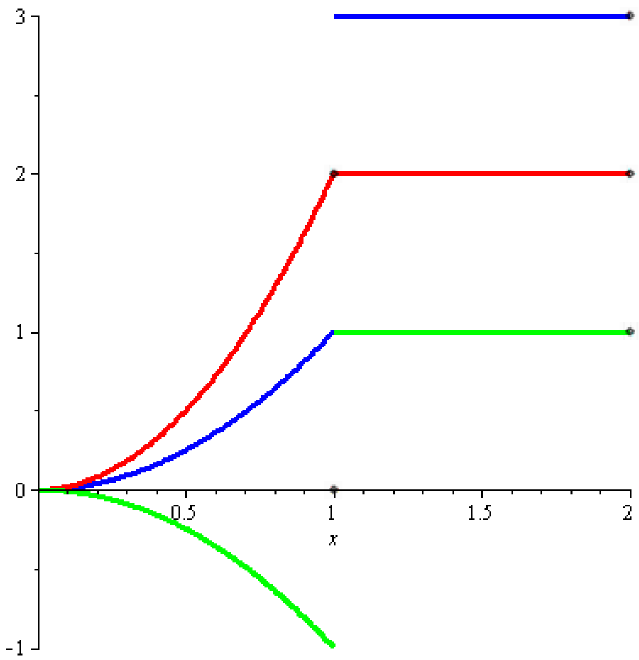
> $plot(u(x), x = 0 ..2, -1 ..3, color = blue, thickness = 2, discont = true);$



> $plot(w(x), x = 0..2, -1..3, color = red, thickness = 2,$
$discont = true);$



> $plot([u(x), w(x), p(x)], x = 0..2, -1..3, color = [blue,$
$red, green], thickness = 3, discont = true, grid$
$= [100, 100]);$



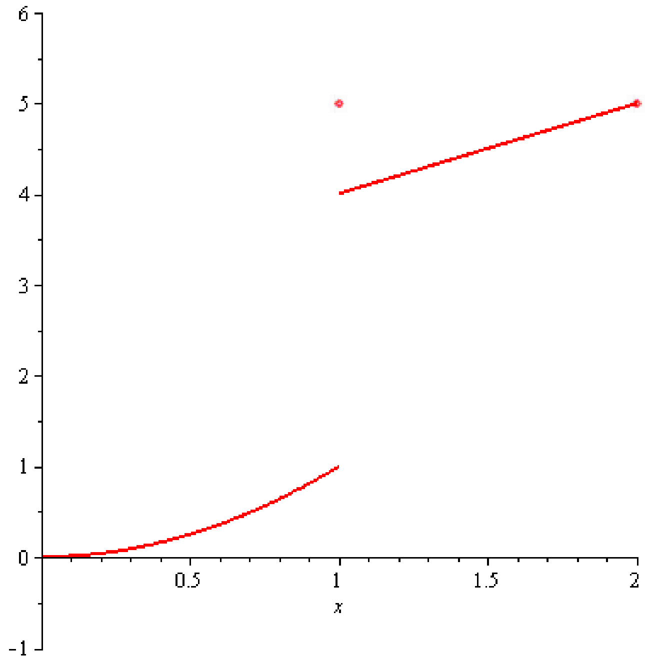
>

Мисол 15

> $g := x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, x^2, x = 1, 5, 1 < x \textbf{ and } x \leq 2, x + 3\right);$

$$g := x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, x^2, x = 1, 5, 1 < x \textbf{ and } x \leq 2, x + 3\right)$$

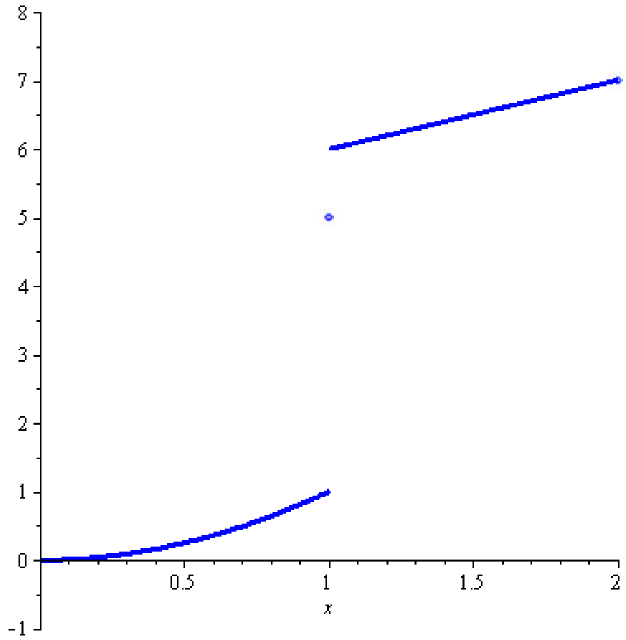
> $plot(g(x), x = 0 ..2, -1 ..6, color = red, thickness = 2, discont = true);$



> $f1 := x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, x^2, x = 1, 5, 1 < x \textbf{ and } x \leq 2, x + 5\right)$

$$f1 := x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x < 1, x^2, x = 1, 5, 1 < x \textbf{ and } x \leq 2, x + 5\right)$$

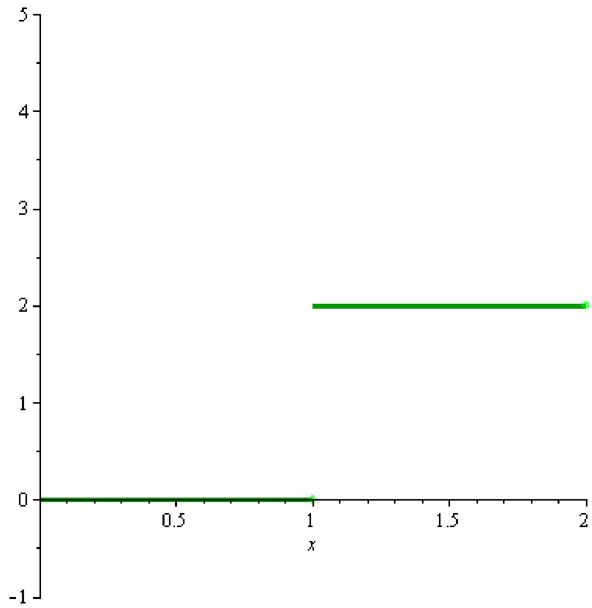
> $plot(f1(x), x = 0 ..2, -1 ..8, color = blue, thickness = 3, discont = true);$



> $f2 := x \rightarrow piecewise(0 \le x \textbf{ and } x \le 1, 0, 1 < x \textbf{ and } x \le 2, 2);$

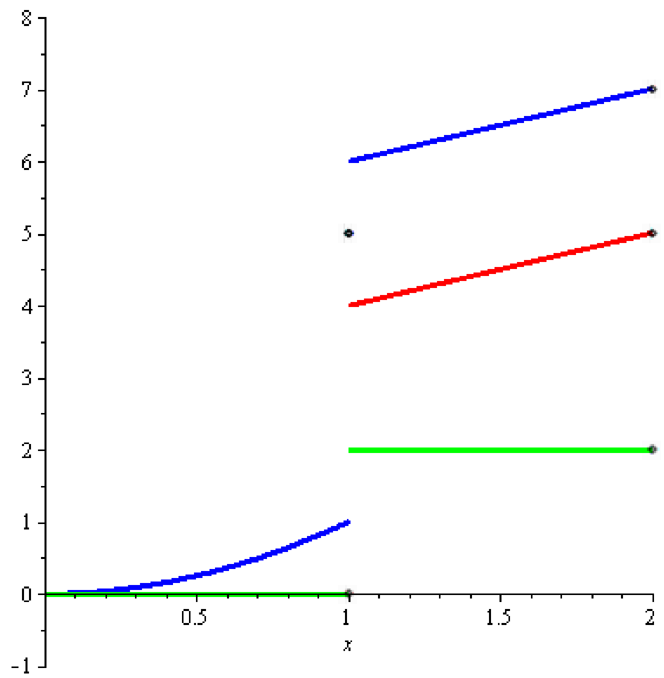
$$f2 := x \rightarrow piecewise(0 \le x \textbf{ and } x \le 1, 0, 1 < x \textbf{ and } x \le 2, 2)$$

> $plot(f2(x), x = 0 ..2, -1 ..5, color = green, thickness = 3, discont = true);$



>

> $plot([g(x), f1(x), f2(x)], x = 0..2, -1..8, color = [red, blue, green], thickness = 3, discont = true);$



Мустақил ечиш учун мисоллар:

1. Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ вариациясини топинг:
   1) $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad x \in [1;4]$
   2) $f(x) = arctgx$, $\quad x \in [-1;1]$
   3) $f(x) = [x]$, $\quad x \in [-1;3]$
   4) $f(x) = x^2$, $\quad x \in [-2;3]$
   5) $f(x) = \sin x$, $\quad x \in [0;2\pi]$
2. Функциянинг тўлиқ вариациясини топинг

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

3. Функциянинг тўлиқ вариациясини топинг

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & 0\le x<1 \\ 10, & x=1 \\ x^2, & 1<x\le 2 \end{cases}$$

4. Функциянинг [0,1] кесмада чекли вариацияга эга эканлигини исботланг.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

5. Функциянинг [0,2/π] кесмада чекли вариацияга эга эмаслигини исботланг.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

6. Агар $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)=A$ бўлса, вариацияни $\overset{b}{\underset{a}{V}}(kf(x)+m)$ ҳисобланг.

7. Агар $f(x)$ функция [0,1] кесмада чекли вариацияга эга бўлса, у ҳолда $F(x)=f(ax+b)$,бунда a>0, функция $\left[-\dfrac{b}{a},\dfrac{1-b}{a}\right]$ кесмада чекли вариацияга эга бўлиб,

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f=\overset{\frac{1-b}{a}}{\underset{-\frac{b}{a}}{V}} F$$

тенглик ўринли эканлигини исботланг.

8. Агар $f(x)$ функция [0,1] кесмада чекли вариацияга эга бўлиб, $\varphi(x)$ функция [α,β] кесмада узлуксиз қатъий ўсувчи ва $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=1$ шартларни қаноатлантирса, у ҳолда $F(x)=f(\varphi(x))$ функция [α,β] кесмада чекли вариацияга эга бўлиб, $\overset{1}{\underset{0}{V}} f=\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} F$ тенглик ўринли эканлигини исботланг.

9. [a,b] кесмада Липшиц шартини қаноатлантирмайдиган узлуксиз ва чекли вариацияга эга бўлган функцияни қуринг.

10. Агар $f(x)$ функция [a,+∞) оралиқда аниқланган бўлиб, хар қандай [a,t] (t>a) кесмада чекли вариацияга эга бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{t\to\infty}\overset{t}{\underset{a}{V}} f$ мавжудлигидан $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ лимитнинг мавжуд бўлишини исботланг.

Тескариси ўринли эмаслигига мисол келтиринг.

12. Чекли вариацияга эга бўлган $f(x)=\cos^2 x$ функцияни [0, π] кесмада иккита ўсувчи функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодаланг.
13. Чекли вариацияга эга бўлган $f(x)=\sin x$ функцияни [0, 2π] кесмада иккита ўсувчи функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодаланг.
14. Чекли вариацияга эга бўлган

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, & агар\ x\in[0,1) \\ 0, & x=1 \\ 1\ , & агар\ x\in(1,2] \end{cases}$$

функцияни [0, 2] кесмада иккита ўсувчи функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодаланг.
15. Функциянинг тўлиқ вариациясини топинг

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & агар\quad x\in[0,1) \\ 5, & x=1 \\ x+3, & агар\ x\in(1,2] \end{cases}$$

Тенгликни $\overset{2}{\underset{0}{V}} f=\overset{1}{\underset{0}{V}} f+\overset{2}{\underset{1}{V}} f$ текширинг. Функцияни [0, 2] кесмада иккита ўсувчи функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодаланг.
16. Агар $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция хам чекли вариацияга эга бўлишини исботланг.
17. Қуйидаги тасдиқ ўринлими “ Агар $|f(x)|$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция хам чекли вариацияга эга бўлади ”?
19. α ва β ларнинг қандай қийматларида $f(x)=x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}$ функция [0,1] кесмада чекли вариацияга эга?
20. Эгри чизиқ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,агар\quad x\neq 0 \\ 0 & ,\quad агар\ x=0 \end{cases}$$

[0,1] кесмада тўғриланувчилигини исботланг.
21. Эгри чизиқ

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & ,\ агар\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ агар\ x=0 \end{cases}$$

[0,1] кесмада тўғриланувчи эмаслигини исботланг.

3 – амалий машғулот: Стилтьес интеграли ва унинг хоссалари.

Ишдан мақсад: Стилтьес интеграли ва унинг хоссаларини кенгроқ ўрганиш ва мисоллар ёрдамида татбиқ этиш.

Ишни бажариш учун намуна:

<u>1-Мисол</u>. *Қуйидаги Стилтьес интеграли ҳисоблансин:*

$$(S)\int_0^2 x^2 d\ell n(1+x);$$

◄ $(S)\int_0^2 x^2 d\ell n(1+x)$ =(((12) - формуладан фойдаланамиз))

$$=(R)\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx= =\left(\frac{x^2}{2}-x+\ell n|x+1|\right)\Big|_0^2=2-2+\ell n3=\ell n3.$$

<u>2-мисол.</u> *Қуйидаги Стилтьес интеграли ҳисоблансин:*

$$(S)\int_{-1}^3 xdg(x),$$

бу ерда:

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{агар} \quad x=-1 \quad \text{бўлса},\\ 1, & \text{агар} \quad -1<x<2 \quad \text{бўлса},\\ -1, & \text{агар} \quad 2\le x\le 3 \quad \text{бўлса};\end{cases}$$

◄ $g(x)$функциянинг $x=-1$ нуқтадаги сакраши -1га, $x=2$ нуқтадаги сакраши –2 га тенг хамда $x\neq -1;2$ нуқталарда $g'(x)=0$. Унда (43)-формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x) = -1\cdot(1-0) + 2(-1-1) = -1-4 = -5$$

Мустақил ечиш учун мисоллар:

1-мисол. *Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

$$a)\,(S)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x; \qquad б)\,(S)\int_{-1}^{1} xdarctgx.$$

2-мисол. *Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

$$(S)\int_{0}^{2} x^2 dg(x),$$

бу ерда:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & агар \quad 0 \le x < \dfrac{1}{2} \quad бўлса, \\ 0, & агар \quad \dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{3}{2} \quad бўлса, \\ 2, & агар \quad x = \dfrac{3}{2} \quad бўлса, \\ -2, & агар \quad \dfrac{3}{2} < x \le 2 \quad бўлса. \end{cases}$$

3-мисол. *Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_{-2}^{2} xdg(x)$, ***б)*** $(S)\int_{-2}^{2} x^2 dg(x)$, ***в)*** $(S)\int_{-2}^{2} (x^3+1)dg(x)$.

4. Интегрални ҳисобланг.

1) $\int_{0}^{\pi} \sin x de^x$

2) $$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xd\cos x$$

3) $$\int_{-1}^{1} x^2 darctgx$$

4) $$\int_{-2}^{2} xd\phi(x) \quad \text{бу ерда} \quad \varphi(x)=\begin{cases} -1, & агар \quad x=-2 \\ 0, & агар \quad -2<x<1 \\ -1, & агар \quad 1\le x\le 2 \end{cases}$$

5) $$\int_{-3}^{2} (x-1)d\phi(x) \quad \text{бу ерда} \quad \varphi(x)=\begin{cases} x^2-2, & агар \quad -3\le x<-2 \\ 0, & агар \quad -2\le x\le -1 \\ 2x+1, & агар \quad -1<x<1 \\ x, & агар \quad 1\le x<2 \\ 3, & агар \quad x=2 \end{cases}$$

6) $$\int_{-3}^{3} xd\phi(x) \quad \text{бу ерда} \quad \varphi(x)=\begin{cases} 2, & агар \quad x=-3 \\ x+2, & агар \quad -3<x\le -1 \\ 4, & агар \quad -1<x<0 \\ x^2-1, & агар \quad 0\le x\le 3 \end{cases}$$

7) $$\int_{0}^{\pi} \sin xd\phi(x) \quad \text{бу ерда} \quad \varphi(x)=\begin{cases} x, & агар \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ 2, & агар \quad x=\dfrac{\pi}{2}, x=\pi \\ x-\dfrac{\pi}{2}, & агар \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

8) $$\int_{-\pi}^{\pi} (x+2)d(e^x \operatorname{sgn}\sin x)$$

9) $$\int_{0}^{\pi} (x-1)d(\cos x \operatorname{sgn} x)$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+1)d\phi(x)$$

бу ерда

$$\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & \text{агар} \quad -2\le x\le -1 \\ 2, & \text{агар} \quad -1<x<0 \\ x^3+3, & \text{агар} \quad 0\le x\le 2 \end{cases}$$

– амалий машғулот: Голоморф ва гармоник функциялар.

Ишдан мақсад: : Биз қуйида голоморф ва гармоник функцияларнинг энг содда, зарур хоссаларини ўрганиш билан бир қаторда, улар билан боғлиқ масалаларини кўриб чиқамиз.

Ишни бажариш учун намуна:

1. Faraz qilaylik γ – i nuqtadan chiquvchi $\arg(z-i)=\varphi$ nur bo‘lsin. $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ akslantirish uchun i nuqtadagi cho‘zilish koeffitsienti $R(\varphi)$ va burilish burchagi $\alpha(\varphi)$ ni toping.

$\lhd$ $w=\dfrac{z-i}{z+i} \Rightarrow \forall z\in C\setminus\{-i\}$ uchun $w'(z)=(\dfrac{z-i}{z+i})'=\dfrac{2i}{(z+i)^2} \Rightarrow w'(i)=-\dfrac{i}{2}$.

Demak,

$$R(\varphi)=|w'(i)|=\left|-\frac{i}{2}\right|=\frac{1}{2} \qquad \text{ва} \qquad \alpha(\varphi)=\arg w'(i)=\arg(-\frac{i}{2})=\frac{3\pi}{2} \ \rhd$$

Bu misolni Maple matematik paketida yechishni ko‘rsatamiz.

$f(z) := \dfrac{z-I}{z+I}$

$$f:=z\rightarrow\frac{z-\mathrm{I}}{z+\mathrm{I}}$$

> $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z)$

$$\frac{1}{z+\mathrm{I}}-\frac{z-\mathrm{I}}{(z+\mathrm{I})^2}$$

> $a(z) := \frac{1}{z+\mathrm{I}}-\frac{z-\mathrm{I}}{(z+\mathrm{I})^2}$

$$a := z \rightarrow \frac{1}{z+\mathrm{I}}-\frac{z-\mathrm{I}}{(z+\mathrm{I})^2}$$

> $a(I)$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}$$

> $k = |a(I)|$

$$k=\frac{1}{2}$$

> $\theta = \mathrm{argument}(a(I))$

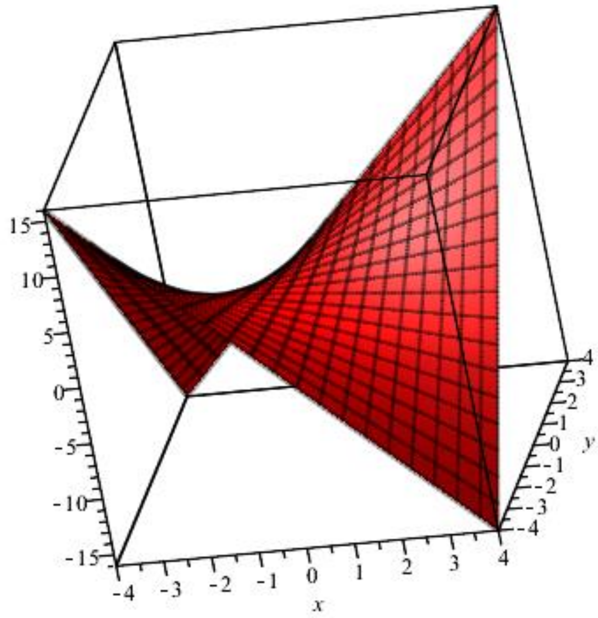
$$\theta = -\frac{1}{2}\,\pi$$

2. $U(x,y)=xy$ функция C да гармоник функция бўла оладими?

> $u := x \cdot y;$

$$u := x\,y$$

> $plot3d$(u, x = −4 ..4, y = −4 ..4, color = red, thickness = 2, $grid$ = [100, 100]);



Лаплас тенгламаси бўйича функцияни гармоникликга текширамиз, яъни:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

Демак, U функция гармоник бўлади.

2. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ функция гармоник функция бўла оладими?

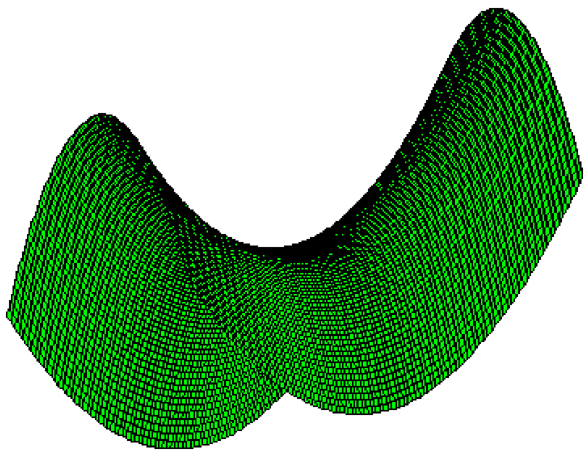
Лаплас тенгламаси бўйича функцияни гармоникликга текширамиз, яъни:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Delta = 2 - 2 = 0$$

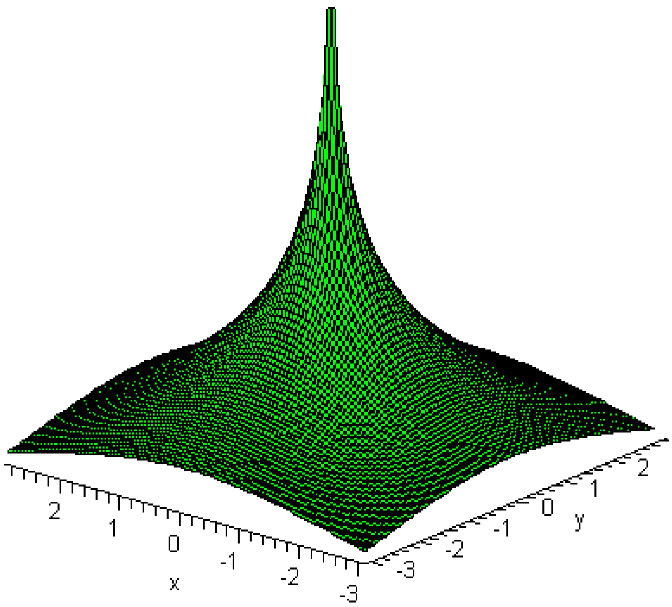


Демак, U функция гармоник бўлади.

> $f := \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right);$

$$f := \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$$

> $plot3d\,(f, x = -3\,..3, y = -3\,..3, color = green, grid = [100, 100]);$



> $Laplacian\,(\,\mathbf{(1)}\,)$

$$\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

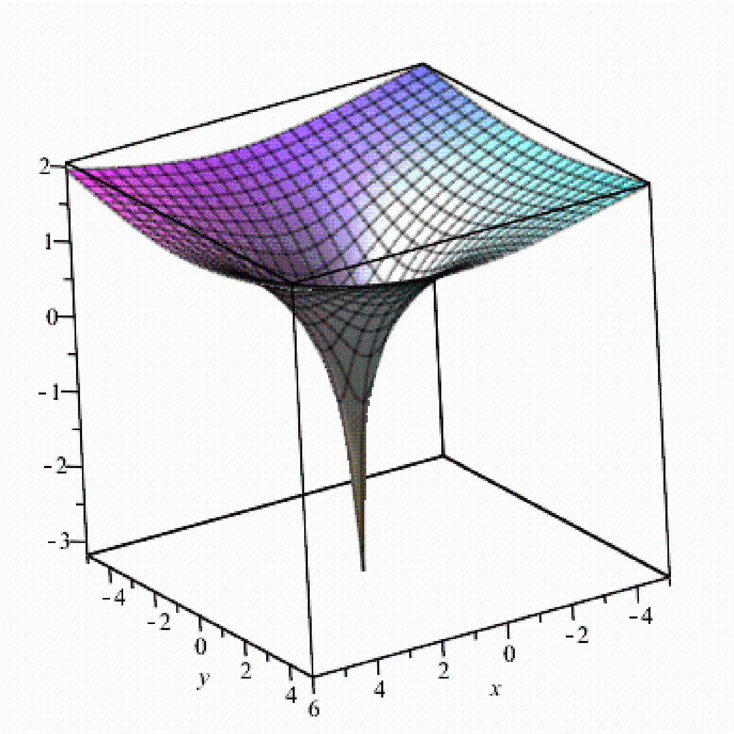
> $with(plots):$

> $f(z) := \ln(|z-1|);$

$$f := z \rightarrow \ln(|z-1|)$$

>

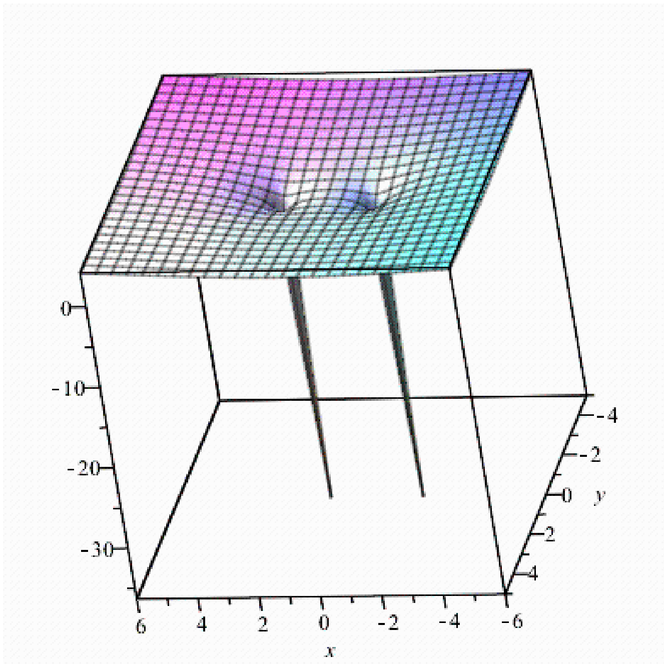
> $plot3d\left(\ln\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right), x=-5..6, y=-5..5\right);$



> $g(z) := \ln(|z-1| \cdot |z+4|);$

$$g := z \rightarrow \ln(|z-1|\,|z+4|)$$

> $plot3d\left(\ln\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+2)^2+y^2}\right), x=-6..6, y=-5..5\right);$



Мустақил ечиш учун мисоллар:

1. $f(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$ функцияни C–дифференциалланувчанликка текширинг.

2. $\operatorname{Re}(Sinz)$ функция □ да гармоник бўладими?

3. $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ функцияни голоморфликка текширинг.

4. Агар $u(z) \in h(D)$ бўлса, у холда унинг ихтиёрий тартибдаги хусусий хосиласи гармоник функция эканлигини исботланг.

5. Агар $u(z) \in h(D)$ бўлса, у холда u^2 функция гармоник функция бўладими?

6. Агар $u(z) \in h(D)$ бўлса, у холда қандай f функция учун $f(u)$ гармоник функция бўлади?

7. Агар $f \in O\,(D)$ бўлса, у холда $|f(z)|, \arg f(z), \ln|f(z)|$ функциялар гармоник функциялар бўладими?

8. Қуйидаги функцияларни гармоникликга текширинг.

1) $x^2 - y^2$ 2) $x^3 + y^3$ 3) $x^2 y^2$ 4) $2e^x \cos y$ 5) $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ 6) $e^x + e^y$ 7) $3x^2 y - y^3$

9. Берилган u функция учун қўшма гармоник v функция топилсин

1) $u = x^2 - y^2 + x$ 2) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy, \quad E = C$, 3) $u(x, y) = x^2 - 3xy^2, \quad E = C$

10. Қуйидаги кўринишдаги барча гармоник функцияларни топинг.

1) $u = f(ax+by)$, 2) $u = f(xy)$, 3) $u = f(\frac{y}{x})$, 4) $u = f(x^2+y^2)$

11. Агар $u_k \in h(D)$ ва $c_k \in R$ бўлса, у холда $\sum_{k=1}^{n} c_k u_k \in h(D)$ исботланг.

ва 6– амалий машғулотлар:

Элементар функциялар ва улар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришлар

Ишдан мақсад: Асосий элементар функциялар ёрдамида бажариладиган конформ акслантиришларга доир мисоллар ўрганилади.

Ишни бажариш учун намуна:

Берилган $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ соҳанинг $w = \frac{z-1}{z}$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

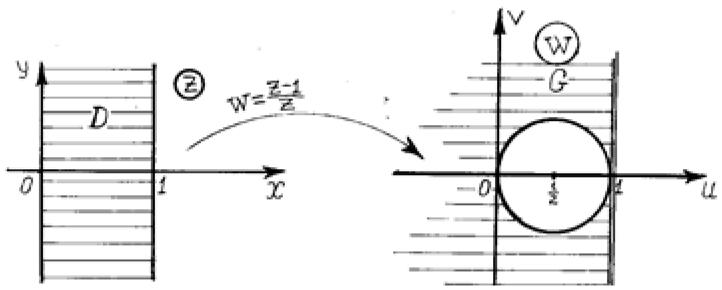
Бу масалани ечиш учун соҳанинг сақланиш принципи ва каср-чизиқли акслатиришнинг доиравийлик принципидан фойдаланамиз. $G = w(D)$ десак, $\partial D = w(\partial D)$ бўлади.

$\partial D = \{\operatorname{Re} z = 0\} \cup \{\operatorname{Re} z = 1\}$. $z \in \{\operatorname{Re} z = 0\}$ ва $w(0) = \infty$ бўлгани учун $\{\operatorname{Re} z = 0\}$ тўғри чизиқнинг акси тўғри чизиқ бўлади. Уни топиш учун $z_1 = i$ *ва* $z_2 = -i \in \{\operatorname{Re} z = 0\}$ нуқталарни олиб, уларнинг образларини топамиз: $w(i) = \frac{i-1}{i} = 1+i$, $w(-i) = \frac{-i-1}{-i} = 1-i$. $\Rightarrow$ Бу нуқталардан ўтувчи туғри чизиқ $\operatorname{Re} w = 1$. $\operatorname{Re} z = 1$ туғри чизиқнинг акси эса айлана бўлади, чунки бу чизиқнинг устида $w = \frac{z-1}{z}$ функцияни ∞ га айлантирадиган нуқта йўқ. Уни топиш учун $w = \frac{z-1}{z}$ тенгламадан z ни топамиз:

$$z = \frac{-1}{w-1} = \frac{-1}{u+iv-1} = \frac{-1}{u-1+iv} = \frac{-(u-1-iv)}{(u-1)^2+v^2} = \frac{1-u}{(u-1)^2+v^2} + i\frac{v}{(u-1)^2+v^2}$$

Бу ердан ва $\operatorname{Re} z = 1$ дан $\Rightarrow \dfrac{1-u}{(u-1)^2+v^2} = 1 \Rightarrow (u-1)^2+v^2 = 1-u \Rightarrow (u-\frac{1}{2})^2+v^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left|w-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

Демак, $\partial G = \{\operatorname{Re} w = 1\} \cup \{\left|w-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\} \Rightarrow G = \{\operatorname{Re} w < 1, \left|w-\frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\}$



Bu misolni Maple matematik paketida yechishni ko‘rsatamiz.

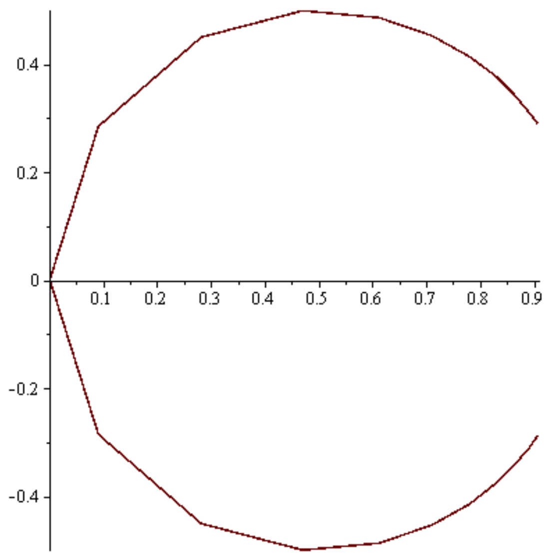
> $with(plots)$:

>

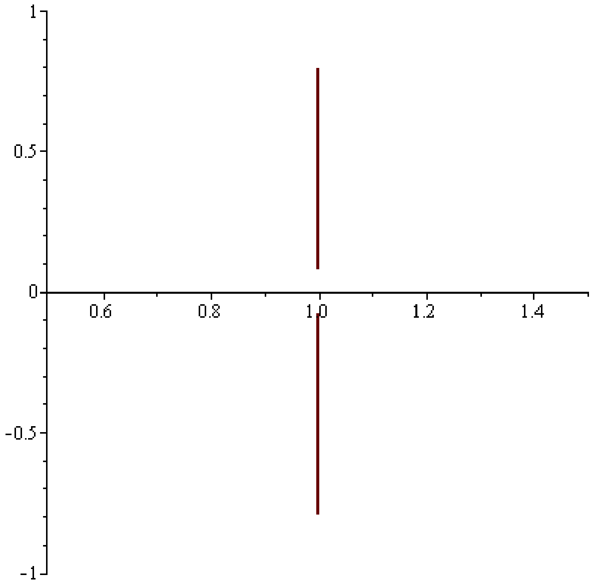
> $w := \dfrac{z-1}{z}$

$$w := \frac{z-1}{z}$$

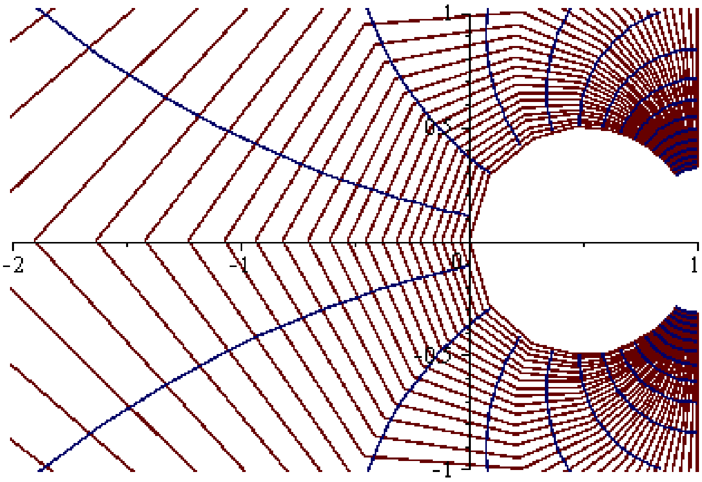
> $conformal(\mathrm{w}, \mathrm{z} = 1 - \pi \cdot \mathrm{I}\,..1 + \pi \cdot I, grid = [30, 30])$



> $conformal\left(\mathrm{w}, z = 0 - 4\cdot\pi\cdot I..0 + 4\cdot\pi\cdot I, 1 - I..1 + I, grid = [30, 30]\right)$



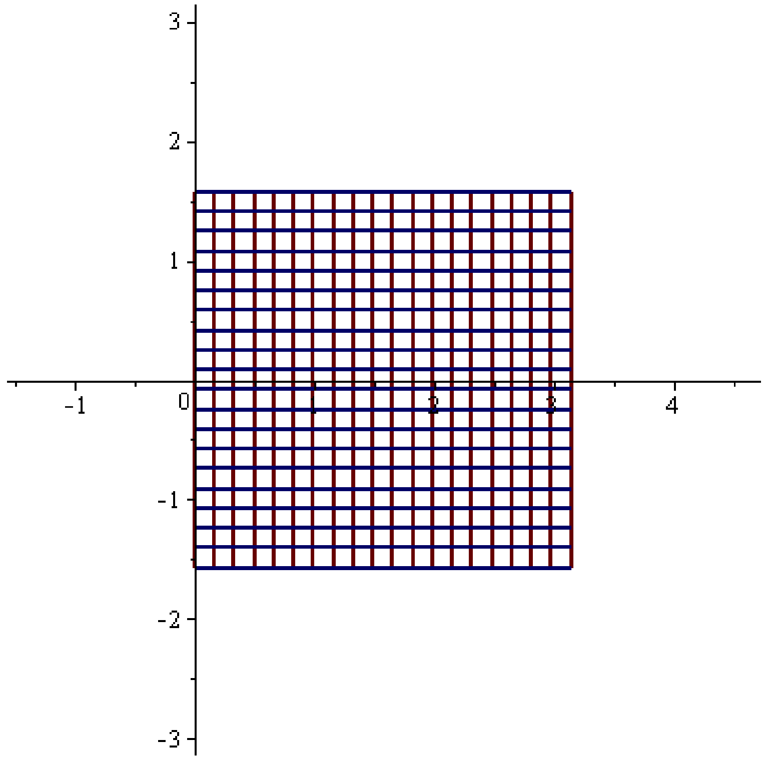
$conformal\left(\mathrm{w}, \mathrm{z} = 0 - \pi\cdot \mathrm{I}..1 + \pi\cdot \mathrm{I}, -2 - \mathrm{I}..1 + \mathrm{I}, \mathrm{grid} = [30, 30]\right)$



2. Берилган $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}\}$ соҳанинг $w = \cos z$ акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

> $with(plots):$

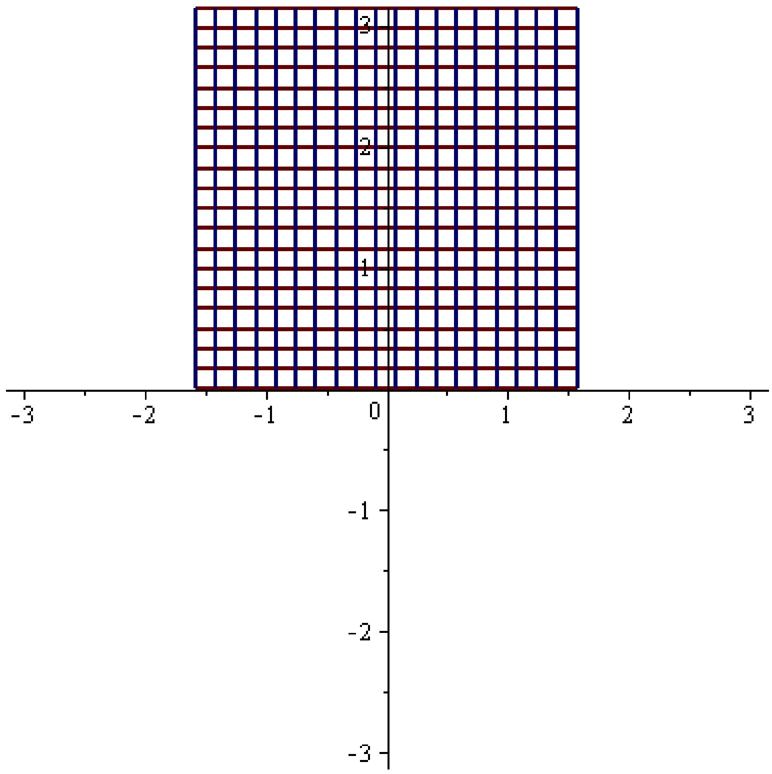
$> conformal\left(z, z = 0 - \frac{\pi}{2}\cdot I..\pi + \frac{\pi}{2}I, -0.5\cdot\pi - I\cdot\pi..1.5\cdot\pi + I\cdot\pi, grid = [20, 20]\right)$



$> w1 := I\cdot z$

$$w1 := I z$$

$> conformal\left(w1, z = 0 - \frac{\pi}{2}\cdot I..\pi + \frac{\pi}{2}I, -\pi - I\cdot\pi..\pi + I\cdot\pi, grid = [20, 20]\right)$

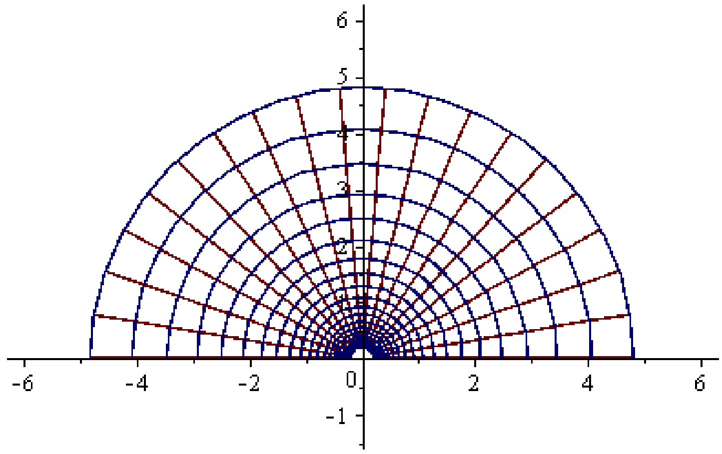


$>$

$> w2 := e^{w1}$

$$w2 := e^{I z}$$

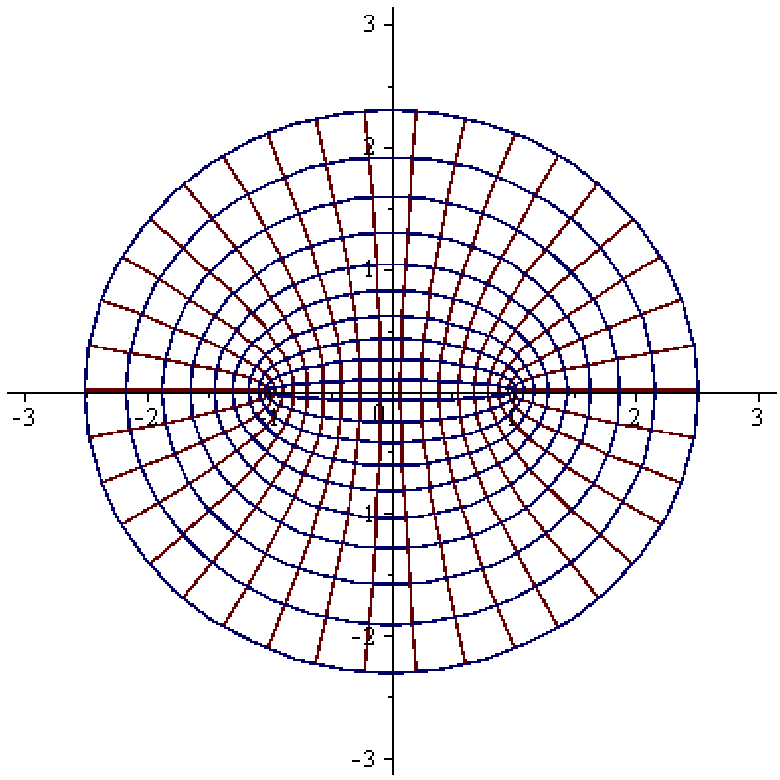
> $conformal\left(\mathrm{w2}, \mathrm{z} = 0 - \frac{\pi}{2} \cdot I .. \pi + \frac{\pi}{2} I, -2 \cdot \pi - \frac{\mathrm{I} \cdot \pi}{2} .. 2 \cdot \pi + \mathrm{I} \cdot 2 \cdot \pi, grid = [20, 20]\right)$



> $w := \frac{1}{2} \cdot \left(w2 + \frac{1}{w2}\right)$

$$w := \frac{1}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{I} z} + \frac{1}{2 \mathrm{e}^{\mathrm{I} z}}$$

> $conformal\left(\mathrm{w}, \mathrm{z} = 0 - \frac{\pi}{2} \cdot I .. \pi + \frac{\pi}{2} I, -\pi - \mathrm{I} \cdot \pi .. \pi + \mathrm{I} \cdot \pi, grid = [20, 20]\right)$



Мустақил ечиш учун мисоллар:

1. Берилган D соҳанинг каср-чизиқли $w = f(z)$ акслантириш ёрдамида аксини топинг.

$$D = \{|z| > 1\}, \qquad w = \frac{z-1}{z+i}.$$

2. D соҳани G соҳага акслантирувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи каср-чизиқли $w(z)$ функцияни топинг.

$$D = \{|z| < 1\}, \qquad G = \{|w| < 2\}, \qquad w(\frac{i}{2}) = 0, \qquad \arg w'(\frac{i}{2}) = 0$$

3. Қуйидаги D тўпламнинг берилган акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

$$D = \{|z| < 2, \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi\} \qquad\qquad w = z^2$$

4. Жуковский функциясидан фойдаланиб қуйидаги тўпламларнинг аксини топинг.

1) $|z| < \frac{1}{2}$, $\quad z \notin [-\frac{1}{2};0]$, $\qquad$ 2) $|z| < \frac{1}{2}$, $\quad \operatorname{Im} z < 0$

3) $1 < |z| < 2$, $\quad \operatorname{Im} z > 0$, $\qquad$ 4) $|z| < 2$, $\quad \operatorname{Im} z < 0$

5. Қуйидаги тўпламларнинг e^z акслантириш ёрдамидаги аксини топинг.

1) $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z < 0$, $\qquad$ 2) $2 < \operatorname{Re} z < 3$ $\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{3\pi}{2}$

6. $w = \sqrt{z}$ функциянинг қуйида берилган шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамида D соҳанинг аксини топинг.

$$D = \{|z| > 1, \ \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}\}, \ \sqrt{-1} = i$$

7. Қуйидаги соҳанинг $w = Lnz$ функциянинг қўйилган шартни қаноатлантирувчи бир қийматли тармоғи ёрдамидаги аксини топинг.

$$D = \{z \notin (-\infty,0], z \notin [1,+\infty)\}, w(i) = \frac{\pi i}{2}$$

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

Case 1. Функцияни чекли вариацияга эга бўлишлик билан унинг чекли лимитга эга бўлишлик орасидаги муносабатни аниқланг.

Фараз қилайлик $f(x)$ функция $[a,+\infty]$ оралиқда аниқланган бўлиб,хар қандай [a,t], (t>a) кесмада чекли вариацияга эга бўлсин. Агар $\lim\limits_{t\to\infty}\overset{t}{\underset{a}{V}} f$ лимит мавжуд бўлса , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ мавжудлигини исботланг.Тескариси ўринлими? Мисоллар келтиринг.

Case 2. Липшиц шартини қаноатлантирувчи функция чекли вариацияга эга [2-теорема,1-маъруза]. Ушбу тасдиқнинг тескариси ўринлими? Мисоллар келтиринг.

Case 3. Maple дастури ёрдамида функцияни тўлиқ вариациясини ҳисобланг.

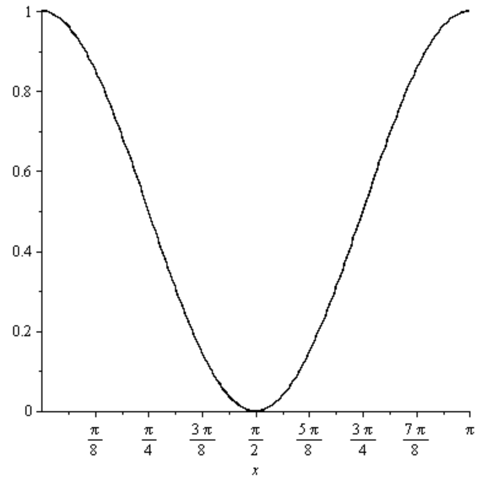
$f(x) = \cos^2 x$ функцияни [0, π] оралиқда иккита ўсувчи функциялар айирмаси шаклида ифодаланг.

> $with(plots)$:

> $f(x) := \cos^2(x);$

$$f := x \to \cos(x)^2$$

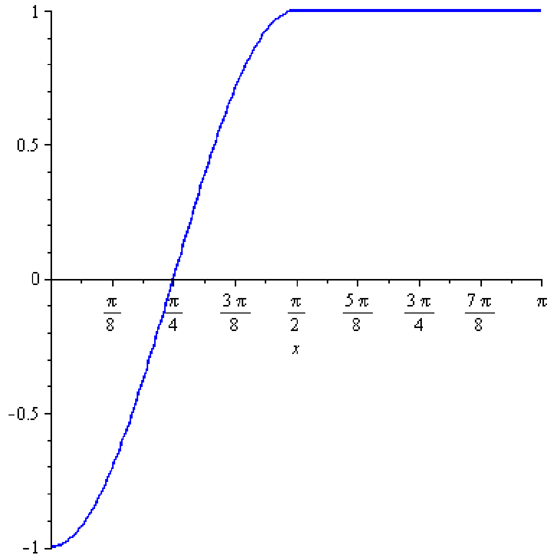
> $plot(f(x), x = 0 .. \mathrm{Pi}, color = [black]);$



$$h := x \to piecewise\left(0 \le x \textbf{ and } x \le \frac{1}{2}\pi, 1 - 2\cos(x)^2, \frac{1}{2}\pi < x \textbf{ and } x \le \pi, 1\right)$$

$$x \to piecewise\left(0 \le x \textbf{ and } x \le \frac{1}{2}\pi, 1 - 2\cos(x)^2, \frac{1}{2}\pi < x \textbf{ and } x \le \pi, 1\right)$$

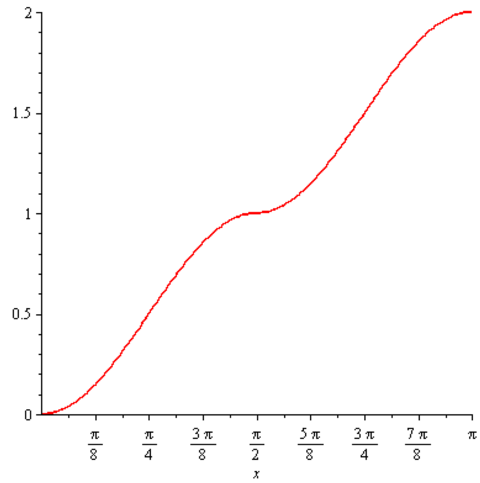
> $plot(h(x), x = 0 .. \mathrm{Pi}, color = [blue]);$



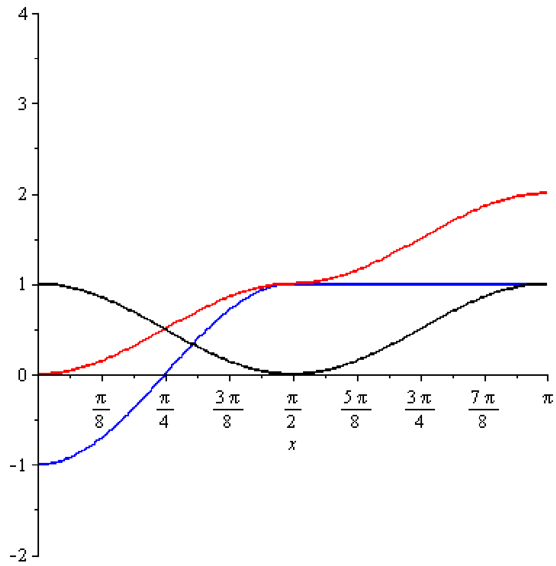
$$g := x \to piecewise\left(0 \le x \textbf{ and } x \le \frac{1}{2}\pi, 1 - \cos(x)^2, \frac{1}{2}\pi < x \textbf{ and } x \le \pi, 1 + \cos(x)^2\right)$$

$$x \to piecewise\left(0 \le x \textbf{ and } x \le \frac{1}{2}\pi, 1 - \cos(x)^2, \frac{1}{2}\pi < x \textbf{ and } x \le \pi, 1 + \cos(x)^2\right)$$

> $plot(g(x), x = 0 .. \text{Pi}, color = [red]);$



> $plot([h(x), g(x), f(x)], x = 0 .. \text{Pi}, -2 .. 4, color = [blue, red, black]);$



Case 4. Стилтьес интегралида аддитивлик хоссаси қайси ҳолда ўринли?

Case 5. Стилтьес интеграли мавжуд бўладиган $f(x), g(x)$ функциялар учун минимал синфни аниқланг.

Case 6. Голоморф функцияни унинг ҳақиқий ёки мавхум қисми ёрдамида қандай усуллар билан тиклаш мумкин?

V. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ ТОПШИРИҚЛАРИ

1. Ушбу:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функциянинг ихтиёрий кесмада чекли вариацияга эга бўлиши кўрсатилсин.

2. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)=\overset{c}{\underset{a}{V}} f(x)+\overset{b}{\underset{c}{V}} f(x)$, $a>c>b$ тенглик исботлансин.

3. $f(x)$ функция $[a,b]$ да чекли вариацияга эга бўлса, унда

$$g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$$

функциянинг $[a,b]$ да ўсувчи ва чегараланган бўлиши исботлансин.

4. Тўғриланувчи бўлмаган чизиққа мисол келтирилсин.

5. Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

1) $f(x)=\sqrt{x}$, $\quad x\in[1;4]$

2) $f(x)=arctgx$, $\quad x\in[-1;1]$

3) $f(x)=[x]$, $\quad x\in[-1;3]$

4) $f(x)=x^2$, $\quad x\in[-2;3]$

5) $f(x)=\sin x$, $\quad x\in[0;2\pi]$

6. Функциянинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ 1-x, & 0<x<1 \\ 5, & x=1 \end{cases}$$

7. Функциянинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ 10, & x=1 \\ x^2, & 1<x\le 2 \end{cases}$$

8. Ушбу:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

функцияни [0,1] кесмада чекли вариацияга эга эканлигини исботланг.

9. Ушбу:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

функцияни [0,2/π] кесмада чекли вариацияга эга эмаслигини исботланг.

10. Агар $\bigvee_a^b f(x)=A$ бўлса,у ҳолда $\bigvee_a^b (kf(x)+m)$

11. Агар $f(x)$ функция $D\subset\mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M\in\mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x\in D\colon f(x)<M\}$ тўпламнинг очиқ тўпламлиги исботлансин.

VI. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
Чекли вариацияли функция Function of finite variation	$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lvert f(x_{k+1}) - f(x_k) \rvert$ йиғиндилар $\forall n \in N$ учун юқоридан текис чегараланган	For every $n \in N$ the sums $\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lvert f(x_{k+1}) - f(x_k) \rvert$ upper uniformly bounded
Тўлиқ вариация Combined variation	$\bigvee_a^b f(x) := Sup\{\vartheta_n\}$	$\bigvee_a^b f(x) := Sup\{\vartheta_n\}$
Бўлакли монотон Piecewise monotone	функция ҳар бир $[a_k, a_{k+1}]$ кесмада монотон	If function monotone on every $[a_k, a_{k+1}]$
Липщиц шарти Lipschits condition	шундай L>0 сон топилсаки, ихтиёрий $x, \bar{x} \in [a,b]$ нуқталар учун $\lvert f(\bar{x}) - f(x) \rvert \le L \cdot \lvert \bar{x} - x \rvert$	For any $x, \bar{x} \in [a,b]$ there exists L>0 such that $\lvert f(\bar{x}) - f(x) \rvert \le L \cdot \lvert \bar{x} - x \rvert$
Стилтьес интеграл йиғиндиси The sum of Stieltjes integral	$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)$	$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)$
Стилтьес интеграли Stieltjes integral	$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$ мавжуд ва чекли бўлиб, унинг қиймати [a,b] кесманинг бўлиниш усулига ҳамда ундаги ξ_k	$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$ exists and finite, and its value isn’t depending on partition of [a,b] and selection of the points ξ_k on [a,b]

	нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса.	
Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йиғиндилари Upper and lower sums Darbu-Stieltjes	$m_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k+1}]}\{f(x)\},$ $M_k = \mathop{Sup}\limits_{[x_k, x_{k+1}]}\{f(x)\},$ $\underline{S} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k),$ $\overline{S} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k).$	$m_k = \inf\limits_{[x_k, x_{k+1}]}\{f(x)\},$ $M_k = \mathop{Sup}\limits_{[x_k, x_{k+1}]}\{f(x)\},$ $\underline{S} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k),$ $\overline{S} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k).$
Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори интеграллари Upper and lower integrals Darbu-Stieltjes	$I_* = Sup\{\underline{S}\}$ ва $I^* = \inf\{\overline{S}\}$	$I_* = Sup\{\underline{S}\}$ and $I^* = \inf\{\overline{S}\}$
Гармоник функция Harmonic function	$D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада берилган $u \in C^2(D)$ функция ушбу $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ тенгликни қаноатлантирса	$u \in C^2(D)$ function defined on an open set $D \subset \mathbf{R}^n$ if it satisfies the Laplace equation: $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$
Лаплас оператори Laplace operator	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$
$h(D)$	D соҳада гармоник бўлган барча функциялар тўплами	Set of all harmonic functions on an open set D
σ_n	$\mathbf{R}^n$ фазодаги бирлик сферанинг юзаси	The square of unit sphere on $\mathbf{R}^n$

Пуассон формуласи **Poisson formula**	$P(x,y)=\dfrac{r^2-\left\|x-x^0\right\|^2}{\sigma_n r\left\|x-y\right\|^n}$	$P(x,y)=\dfrac{r^2-\left\|x-x^0\right\|^2}{\sigma_n r\left\|x-y\right\|^n}$
Дирихле масаласи **Dirichlet problem**	$\Delta u=0,\quad u\big\|_{\partial D}=\varphi(x)$	$\Delta u=0,\quad u\big\|_{\partial D}=\varphi(x)$
Чексиз силлиқ **Infinitely smooth**	$u\in C^{\infty}(D)$	$u\in C^{\infty}(D)$
Голоморф функция **Holomorphic function**	$f(z)$ функция $z_0\in C$ нуқтанинг бирор $U(z_0,\varepsilon)$ атрофида C-дифференциалланувчи	Function $f(z)$ C-differentiable at the any neighborhood of the point $z_0\in C$

VII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Махсус адабиётлар:

1. Sadullaev A. *Pluripotential theory. Application.* Palmarium academic publishing. Germany. 2012
2. Brian S. Tomson *Theory of integral*. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, British Columbia 2012
3. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. 2-нашри, 1-қ.-М.,"Наука", 1976.
4. *Худойберганов Г., Ворисов А., Мансуров Х.* Комплекс анализ. (маърузалар). – Т.,"Университет" ,1998.
5. Тўйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К. Дополнительные главы анализа. «Университет», Ташкент 2015.
6. *Садуллаев А., Худойбергангов Г., Мансуров Х., Ворисов А., Тўйчиев Т.* Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 3-қисм (комплекс анализ).- Т., "Ўзбекистон", 2000.
7. *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. 3-нашри. – М. "Наука", 1975.
8. *Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по теории аналитических функций, 2-нашри. –М., "Наука" 1972.
9. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. 4-нашри. –М., "Наука", 1973.
10. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М. "Наука", 1976.
11. *Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А.* Введение в теорию аналитических функций. -М., "Просвещение", 1977.
12. *Клочко Т.В., Парфенова Н.Д.* Решение задач комплексного анализа средствами Maple. Харьков. 2009.

13. *Матросов А.В.* Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. БХВ-Санкт-Петербург. 2001.
14. *J.Stewart.* Calculus, Broks/Cole, Cengage Learing,2012.
15. *J. W. Brown, Ruel V. Churchill*. Complex variables and applications. McGraw-Hill. 2009.
16. *John H. Mathews, Russell W. Howell*. Complex Analysis for Mathematics and Engineering. California State UniversityFullerton. Jones and Bartlett Publishers Canada.1997.
17. *Charles Walkden*. Complex Analysis. MATH20101. 2016
18. *Christian Berg*. Complex Analysis. Department of Mathematical Sciences. København. 2012.
19. Complex Numbers - Stewart Calculus
20. www.stewartcalculus.com/data/.../ess_at_12_cn_stu.pdf.
21. www.maplesoft.com/academic/adoption/ .

Интернет манбаалар:

1. http://www.allmath.ru/
2. http://www.mcce.ru/
3. http://lib.mexmat.ru/
4. http://www.webmath.ru/
5. http://www.exponenta.ru/
6. http://www.ziyonet.uz/