ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

«АМАЛИЙ МАСАЛАЛАРНИ КОМПЬЮТЕРДА МОДЕЛЛАШТИРИШ» МОДУЛИНИНГ

Ў Қ У В – У С Л У Б И Й М А Ж М У А С И

Тошкент – 2018

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 27 мартдаги 247-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: ф.-м.ф.н., доцент **А.Хайдаров**

Тақризчи: ф.-м.ф.д., профессор **М.М.Арипов**

ф.-м.ф.д., профессор **Г.Худойберганов**

Ўқув -услубий мажмуа ЎзМУ Илмий кенгашининг 2017 йил 30 августдаги 1- сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Мазкур дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПФ-4732-сон Фармонидаги устувор йўналишлар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Маълумки мамлакатимиз мустақиллиги миллий таълим соҳасида туб ислоҳотларни амалга ошириш учун замин яратди. Замонавий талаблар инобатга олинган ҳолда, олий ўқув юртларининг педагог кадрларини қайта тайёрлаш йўналишлари бўйича қайта тайёрлаш ва малака оширишнинг ўқув дастурларини мунтазам такомиллаштириб бориш ишларини ташкил этиш бугунги куннинг долзарб вазифаларидан бири хисобланади.

Бу курсда тингловчилар барча фанлардан олган билимларини қўллаб физик жараёнлар учун математик моделлар яратиш, амалий масалалар қўйиш, яратилган математик моделларнинг адекватлигини текшириш, қўйилгаш масала учун ечиш усулларини танлаш, чекли айирмали схемалар яратиш, схемаларнинг турғунлигини таъминлаш, ҳосил қилинган сонли тенгламаларни ечиш усулларини танлаш, алгоритмлар яратиш ва дастурлар тузиш, дастурни созлаш, ҳисоблаш экспериментларини ўтказиш, олинган натижаларни таҳлил қилиш ва натижаларни жадвал, график ёки анимацион кўринишларда (визуал) тақдим этиш каби кўникмаларни олади.

Бу кўникмаларни олиш давомида тингловчилар барча математик фанларининг бир бирини тўлдириши, ҳаётий масалаларни ечишда уларнинг қанчалик зарурлигини тўлароқ тушуниб етадилар, бу масалаларни ечишда информацион технологияларнинг ролини ва янги технологиялардан фойдаланиш илмий-техника ривожига салмоқли таъсир кўрсатишига амин бўладилар.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Амалий масалаларни компьютерда моделлаштириш” модулининг мақсади: Бу фанининг асосий мақсади тингловчиларда муайян амалий масалаларни ечиш учун тушунча билим ва кўникмалар асосида, масалани ечиш учун татбиқ этилиши мумкин бўлган усуллар орасида энг самаралисини ажратиб олиш, яратилган ёки мавжуд усулларнинг яроқлилигини баҳолаш каби бир қатор назарий ва амалий муаммолар бўйича билим ва кўникмаларни уйғунлаштиришдан иборат.

Тингловчилар учун бир қатор тушунчалар умумлаштирилган ҳолда, усуллар эса чуқур ва батафсил равишда ўргатилади. Жумладан фан дастури тингловчиларнинг илгари ўрганилган фундаментал ва ихтисослик фанларига таянади. Фанини ўргатиш белгиланган режа асосида маъруза ўқиш, аудитория ва компьютер залларидан фойдаланган ҳолда амалга оширилади. Бунда талабалар чизиқсиз чегаравий масалалар, уларни аппроксимация қилиш усуллари, аппроксимация тартиби, яқинлашиши ва турғунлиги, чизиқлаштириш усуллари каби мавзуларни чуқур ўрганадилар. Улардан ташқари масалани ечиш алгоритмини ва дастурини яратиш, дастурни созлаш, тест масалалар яратиш ва дастурнинг ишончлилигини текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш, олинган натижаларни математик ва физик жиҳатдан таҳлил қилиш ва уларни визуаллаштириш каби мавзулар билан яқиндан танишадилар.

“Амалий масалаларни компьютерда моделлаштириш” модулининг вазифалари:

- баъзи физик жараёнларни тасвирловчи математик функциялар, тенгламалар ва уларга қўйилган шартларни (бошланғич, чегаравий ва бошқа) қўйиш ва уларнинг маъносини ўрганиш;
- тингловчиларда масалар қўйиш ва уни ечиш усулларини танлаш кўникмаларини ҳосил қилиш;
- амалий масалаларни ечиш учун юқори босқичли алгоритмик тилларда дастурлар яратиш;
- сонли моделлаштириш натижаларини таҳлил қилиш;
- тингловчиларда алгоритмик фикрлашни ва дастурлаш маданиятни шакллантириш.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

“Амалий масалаларни компьютерда моделлаштириш” ўкув фанини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида:

Тингловчи:

– юқори даражали тилларнинг имкониятлари; алгоритмлар; модулли дастурлаш; операторларнинг чекли айирмали аппроксимацияси, аппроксимация ҳатоликлари; айирмали схемаларнинг турғунлиги ва ечимларнинг масала шартларига узлуксиз боғлиқлиги; чизиқлаштириш ва итерация берилган масалани сонли ечишдаги ҳар ҳил аниқликдаги айирмали схемалар; айирмали масалани ечиш усулни танлаш; чизиқсиз схемаларни чизиқлаштириш усуллари; мос аналитик ва сонли ечимларни яратиш; натижаларини визуал тақдим этишни ***билиши керак;***

– ҳисоблаш эксперементини ўтказиш; масалаларни ечиш учун ярокли методларни танлаш ва таҳлил қилиш; айирмали схемаларни танлаш; сақланиш қонунларига мос равишда схемаларни қўллаш; юқори аниқликдаги турғун схемаларни олиш; айирмали масалани ечишнинг турғун усулларини топиш; абсолют турғун айирмали схемаларни олиш; олинган натижаларни визуаллаштириш ***кўникмаларига эга бўлиши керак;***

– бошланғич-чегаравий шартларни аниқлаш; амалий масалаларни математик модделлаштириш ва компьютерда ечиш; олинган натижаларни аниқлик даражасини аниқлаш мақсадида таҳлил қилиш; сонли моделлаштириш натижаларининг ўрганилаётган жараёнлар ва объектларлар билан мослигини таъминлаш ***малакаларига эга бўлиши керак.***

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“Амалий масалаларни компьютерда моделлаштириш” курси маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Амалий масалаларни компьютерда моделлаштириш” модули мазмуни ўқув режадаги “Дастурлаш технологиялари”, “Амалий математиканинг замонавий муаммолари” ўқув модуллари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг меъёрий - ҳуқуқий хужжатлар бўйича касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар амалий масалаларнинг математик моделлари, уларни ечиш усуллари ва дастурий таъминотлар яратиш, ҳисоблаш тажрибаларини ўтказиш, олинган натижаларни таҳлил этиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Модул мавзулари</th><th colspan="5">Тингловчининг ўқув юкламаси, соат</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Ҳаммаси</th><th colspan="3">Аудитория ўқув юкламаси</th><th rowspan="3">Мустақил таълим</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Жами</th><th colspan="2">жумладан</th></tr>
<tr><th>Назарий</th><th>Амалий машғулот</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Физик жараёнларнинг математик моделлари. Чекли айирмали схемалар.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

2	ОДТ ва ХХДТ билан тасвирланувчи жараёнлар ва уларни компьютерда моделлаштириш.	4	4	2	2	
3	Икки ва уч қатламли тенгламаларни ечиш усуллари.	4	4	2	2	
4	Ўзгармас коэффициентли иссиқлик тарқалиш масалалари учун чекли айирмали схемалар тузиш. Консерватив схемалар қуриш.	8	6	2	4	2
5	Квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик масалаларини компьютерда моделлаштириш. Тежамкор схемалар.	8	8	2	6	0
ЖАМИ		**28**	**26**	**10**	**16**	**2**

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Физик жараёнларнинг математик моделлари. Чекли айирмали схемалар.

Мураккаб жараёнларни назарий тадқиқ қилиш усули - ҳисоблаш эксперименти ва унинг босқичлари. Физик жараёнларни тасвирловчи математик моделлар. Чекли айирмали схемаларнинг асосий тушунчалари. Тўр, тўр функциялар. Оддий дифференциаллар.

2-Мавзу: ОДТ ва ХХДТ билан тасвирланувчи жараёнлар ва уларни компьютерда моделлаштириш.

Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ва чегаравий масалалар. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Бошланғич ва чегаравий масалалар қўйиш.

3-Мавзу: Икки ва уч қатламли тенгламаларни ечиш усуллари.

Сонли тенгламаларни ечиш усуллари. Гаусс усули. Прогонка усули. Прогонка усулининг вариантлари. Прогонка усулининг турғунлиги.

4-Мавзу: Ўзгармас коэффициентли иссиқлик тарқалиш масалалари учун чекли айирмали схемалар тузиш. Консерватив схемалар қуриш.

Ўзгармас коэффициентли иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун чекли айирмали схемалар. Ошкор ва ошкормас схемалар. Параметрли схемалар.

Консерватив схемалар. Интегро-интерполяцион усул. Интегро-интерполяцион усул ёрдамида чекли айирмали схемалар қуриш.

5-Мавзу: Квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик масалаларини компьютерда моделлаштириш. Тежамкор схемалар.

Квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари ва чизиқсиз соҳаларда иссиқлик тарқалиш жараёнларининг моделлари. Чекли айирмали схемалар. Чизиқлаштириш.

Кўп ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун ўзгарувчан йўналишлар усули. Локал бир ўлчовли схемалар.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

Амалий машғулотлар замонавий дидактик таъминот ва лаборатория жиҳозларига эга бўлган аудиторияларда ҳамда Интернет тармоғига уланган компьютер синфларида, таянч олий таълим муассасаларининг кафедраларида ташкил этилади.

Амалий машғулотларда физик жараёнларни тасвирловчи амалий масалаларнинг қўйилиши, уларни ечиш усуллари, масалани ечишнинг алгоритми ва дастурини яратиш, дастурнинг тўғрилигини тест масалаларда текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш ва олинган натижаларни таҳлил қилиш масалалари ўрганилади.

Амалий машғулотларда қуйидаги мавзулар ва вазиятли масалалар ўрганилади:

Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши ва чегаравий масалалар.Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари. Ҳайдаш (прогонка) усули.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Чизиқли чегаравий масалалар учун ошкор ва ошкормас схемаларни қўллаш.

Квазичизиқли иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун баланс усулини қўллаш ва уларни сонли ечиш. Чизиқлаштириш.

Уч қатламли схемалар яратиш ёрдамида чизиқсиз чегаравий масалаларни сонли ечиш.

Икки ўлчамли масалаларни ўзгарувчан йўналишлар усулида ечиш.

Икки ўлчами масалаларни локал бир ўлчовли схемалар ёрдамида ечиш.

Тор тебраниши малалаларини сонли моделлаштириш.

Ҳисоблаш эксперименти натижаларини визуаллаштириш.

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ

Тингловчи мустақил ишни муайян модулнинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- амалий машғулотларда берилган топшириқларни бажариш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади: маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);

баҳс ва мунозаралар (лойиҳалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

ЖОРИЙ НАЗОРАТ(АССИСМЕНТ)НИ БАҲОЛАШ МЕЗОНИ

Жорий назорат(ассисмент)ни бахолаш Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш Тармоқ (минтақавий) марказида тасдиқланган шакллари ва мезонлари асосида амалга оширади.

Ушбу модулнинг жорий назорат(ассисмент)га ажратирлан максимал балл-**0,8 балл.**

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Меъёрий- ҳуқуқий хужжатлар.

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг «Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» 2015 йил 12 июндаги ПФ-4732-сон Фармони.
2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2010 йил 2 ноябрдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагогик кадрлар тайёрлаш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1426-сонли Қарори.
3. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 йил. 11-12-сон, 295-модда.
4. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 24 июлдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагог кадрлар тайёрлаш ва аттестациядан ўтказиш тизимини янада такомиллаштириш тўғрисида”ги ПФ–4456-сон Фармони.
5. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 28 декабрдаги “Олий ўқув юртидан кейинги таълим хамда олий малакали илмий ва илмий педагогик кадрларни аттестациядан ўтказиш тизимини такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 365-сонли Қарори.

Махсус адабиётлар

1. Бриан Р. Ҳунт, Роналд Л. Липсман, Жонатҳан М. Росенберг А Гуиде то МАТЛАБ. Самбридге Университй Пресс. 2014.
2. Соллинс Г.W. Фундаментал нумерисал метҳодс анд дата аналйсис. Георге W. Соллинс, ИИ 2003.
3. Г. W. Соллинс, Фундаментал нумерисал метҳодс анд дата аналйсис, Публишер Ҳарвард Университй пресс, 2003, п. 259.
4. Л. Р. Ссотт, Нумерисал Аналйсис, Принсетон Университй Пресс, 2011, п.323.

5. Р. Л. Бурден анд Ж. Д. Фаирес, Нумерисал Аналйсис,Нинтҳ эдитион, Броокс/Соле публишер, Сенгаге Леарнинг, Санада, 2011, ИСБН-13: 978-0-538-73351-9.
6. Самарский А.А., Михайлов М. Математическое моделирование: идея, методы примеры. М.: Физ.мат.лит., 2005.-320с.
7. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Вводные лекции по прикладной математике. М. Наука. 1984, 190 с.
8. Математическое моделирование / Под ред. Дж. Эндрюса, Р. Мак-Лоуна; пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 278с.
9. Смитҳ Г.Д. Нумерисал Солутион оф Партиал Дифферентиал эқуатионс: фините дифференсе метҳодс 3рд эд. — Охфорд Университй Пресс, 1986. 350 п.
10. W. Ҳ. Пресс, С. А. Теуколскй, W. Т. Веттерлинг, Б. П. Фланнерй, Нумерисал Ресипес ин С, Тҳе Арт оф Ссиентифиc Сомпутинг, Тҳирд эдитион, 2007, Самбридге университй пресс, ИСБН-13: 978-0521880688.
11. А. Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Наука М, 1972.
12. А.А.Самарский. Теория разностных схем. Наука. М.: 1977 г.
13. Исраилов М.И. Хисоблаш методлари, ИИ. –Т: Узбекистон. 2008.
14. Исроилов М.И.. Ҳисоблаш методлари. 1-том, Тошкент, Ўқитувчи, 2003.
15. Дадажонов Т., Мухитдинов М. Матлаб асослари. Тошкент. ЎзФА Фан нашриёти. 2008 й.
16. Кирьянов Д. МатҳСад 13. С.Петербург. 2006.
17. Матросов А. Мапле 6. Изд-во “БХВ-Петербург”, 2001.

Интернет манбаалар

1. www.инфосом.уз
2. www.пресс-уз.инфо
3. www.зиёнет.уз
4. www.еду.уз
5. ҳттп://ocw.мит.еду/соурсес/матҳематисс/
6. ҳттп://онлине.стат.нссу.еду/онлине-програмс/онлине-градуате-статистисс-соурсес/
7. ҳттп://усерс.мат.уними.ит/усерс/паварино/фисиса/
8. ҳттп://www.лифелонг-леарнерс.сом/пде/сом/
9. ҳттп://ocw.мит.еду/соурсес/матҳематисс/18-335ж-интродустион-то-нумерисал-метҳодс-фалл-2004/
10. ҳттп://ситес.стат.псу.еду/онлине/девелопмент/
11. ҳттп://студй.сом/онлине_статистисс_соурсе.ҳтмл

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“Кейс-стади” методи

«Кейс-стади» - инглизча сўз бўлиб, («case» – аниқ вазият, ҳодиса, «стади» – ўрганмоқ, таҳлил қилмоқ) аниқ вазиятларни ўрганиш, таҳлил қилиш асосида ўқитишни амалга оширишга қаратилган метод ҳисобланади. Мазкур метод дастлаб 1921 йил Гарвард университетида амалий вазиятлардан иқтисодий бошқарув фанларини ўрганишда фойдаланиш тартибида қўлланилган. Кейсда очиқ ахборотлардан ёки аниқ воқеа-ҳодисадан вазият сифатида таҳлил учун фойдаланиш мумкин. Кейс ҳаракатлари ўз ичига қуйидагиларни қамраб олади: Ким (Wҳо), Қачон (Wҳен), Қаерда (Wҳере), Нима учун (Wҳй), Қандай/ Қанақа (Ҳоw), Нима-натижа (Wҳат).

“Кейс методи” ни амалга ошириш босқичлари

Иш босқичлари	Фаолият шакли ва мазмуни
1-босқич: Кейс ва унинг ахборот таъминоти билан таништириш	✓ якка тартибдаги аудио-визуал иш; ✓ кейс билан танишиш(матнли, аудио ёки медиа шаклда); ✓ ахборотни умумлаштириш; ✓ ахборот таҳлили; ✓ муаммоларни аниқлаш
2-босқич: Кейсни аниқлаштириш ва ўқув топшириғни белгилаш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муаммоларни долзарблик иерархиясини аниқлаш; ✓ асосий муаммоли вазиятни белгилаш
3-босқич: Кейсдаги асосий муаммони таҳлил этиш орқали ўқув топшириғининг ечимини излаш, ҳал этиш йўлларини ишлаб чиқиш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил ечим йўлларини ишлаб чиқиш; ✓ ҳар бир ечимнинг имкониятлари ва тўсиқларни таҳлил қилиш; ✓ муқобил ечимларни танлаш
4-босқич: Кейс ечимини ечимини шакллантириш ва асослаш, тақдимот.	✓ якка ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил вариантларни амалда қўллаш имкониятларини асослаш; ✓ ижодий-лойиҳа тақдимотини тайёрлаш; ✓ якуний хулоса ва вазият ечимининг

	амалий аспектларини ёритиш

«ФСМУ» методи

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизни баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

III. НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1-Мавзу. Мураккаб жараёнларни назарий тадқиқ қилиш усули - ҳисоблаш эксперименти ва унинг босқичлари. Физик жараёнларни тасвирловчи математик моделлар. Чекли айирмали схемаларнинг асосий тушунчалари. Тўр, тўр функциялар.

Режа:

1. Мураккаб жараёнларни назарий тадқиқ қилиш усули - ҳисоблаш эксперименти ва унинг босқичлари.
2. Физик жараёнларни тасвирловчи математик моделлар.
3. Чекли айирмали схемаларнинг асосий тушунчалари.
4. Тўр, тўр функциялар.
5. Оддий дифференциаллар.

Таянч сўзлар: *ҳисоблаш эксперименти, модель, математик модель, айирмали схемалар, чекли айирмали схемалар, тўр, тўр функциялар, дифференцияаллар.*

Бизга тарихдан маълумки турли хўжалик масалаларини ечишда математикадан кенг фойдаланиб келинган. Математикадан олдинги вақтларда содда ҳисоблашларда ва турли хил ўлчашларда кенг фойдаланилиб келинган.

Турли фанларнинг ривожланишида математика муҳим роль ўйнаб келган.Техник, технологик, иқтисодий ва бошқа жараёнларга оид тадқиқотларда математик усулларни қўллаш ушбу жараёнларнинг қонуниятларини ўрганишда мухим назарий ва амалий натижаларга эришиш имкониятини берди.

Моделлаштиришда ўрганилаётган жараённинг барча хоссаларини хисобга олиш мумкин эмас, албатта. Бундай жараёнлар учун қуйиладиган асосий талаблар мезон вазифасини бажаради.

Танланган тизимларнинг турли фаолият йуналишлариниўрганиш учун хар хил математик усуллардан фойдаланилади. Булардан энг мухимларидан бири оптималлаш назарияси ва математик дастурлашдир.

Математик модел - математик белгилар ёрдамида ташқи дунёда содир бўлаётган ҳодисаларнинг ифодаланишидир. Математик моделлаштириш-аниқлаштириш, башорат қилиш ва бошқариш усули[16].

Математик моделнинг қуйидаги турлари мавжуд.

1. Тўғри масала: Берилган локал қонунларга асосан (физик, химик, биологик, экономик ва бошқалар) ўрганилаётган системани ичидан умумий жиҳатдан система ўзини қандай тушунишига жавоб бериши керак.

Бу ҳолда ўрганилаётган системани ҳамма параметрлари маълум ва ҳар хил шартларни ҳисобга олишда (ўрганишда) моделнинг ҳаракати ўрганилади.

2. Тескари масала: Берилган маълумотлар ва моделлаштиришни натижаларини модел параметрларини аниқлаш орқали мослаштирилади.

Кўпинча ўрганилаётган объектдаги ҳақиқий жараёнлар номаълум бўлсада лекин деярли ўхшашлари кузатилади.

Кузатишларнинг натижалари орқали объект харакатини қандай жараёнлар орқали бошқаришни ва моделни аниқлаштирадиган параметрларни аниқлаштиришга ҳаракат қилади. Тескари масалада система ҳаракати орқали параметрлар қийматини аниқлаш талаб қилинади.

3. Бошқариш системаларини лойиҳалаштириш. Бу моделлаштиришнинг бутунлай асосий соҳаси бўлиб, автоматизациялашган бошқариш системалари билан иш кўради. Математик моделни қуриш бир нечта босқичдан иборат.

1. Қонунларни тартиблаш бўлиб, у моделнинг асосий объектларини боғлайди.

2. Математик масалаларни ўрганиш.

3. Текшириш. Моделни амалиётда қўлланилишини ўрганиш.

4. Модел анализи ва унинг модификацияси.

Математик моделни ўрганиш босқичлари. Сифатли моделни тузиш. Бу босқичда системада амал қиладиган қонунлар ҳаракатини ва алоқаларни аниқлаш.

Бу қонунлар физик, химик, биологик, экономик ва хоказо бўлиши мумкин. Бу системада асосий аниқловчи кўрсаткичларини ажратиш мумкин. Бу моделдаги ҳамма ҳодисаларни аниқлашни талаб қилиш мумкин эмас[17].

Моделлаштириш масаласи-харакатнинг асосий мезонларини унинг ўзига хос аниқликларини келтириб чиқаришдир. Шунинг учун бу моделни қуришда фақат кучли эффектларни ҳисобга олиш керак. Автомобиллар ҳаракатини кузатишда релятивистик ва квант эффектларни ҳисобга олиш нотўғри: бу эффектлар сезиларли даражада бўлмайди. Бу ҳолат модел тузишда ҳар доим ҳам содир бўлавермайди.

Математик моделни ташкил қилиш. Бу босқичда шу системада нима содир бўлиши математик тартиблаш орқали ифодаланилади. Ўрганилаётган жараённинг математик ифодаси тенгламалар системаси, дифференциал тенгламалар системаси, дифференциал тенгламалар ва қонунлар тўплами бўлиши мумкин. Агар модел дифференциал тенгламалар орқали ифодаланса бу модел дифференциал дейилади.

Агар бу модел баъзи бир тенгламалар орқали ифодаланса, бу модел детерминистик бўлади. Агар модел баъзи бир эхтимоллик қонуниятлар билан ифодаланса, унда модел ҳодисаларни моделаштириш олдидан илм фан ва техникада ғояларни синаш учун гипотезаларни қайта ишлаш, экспериментал материалларни қабул қилишда фойдаланилган [16].

Бизга маълумки, **Кибернетика** фани «**Тирик мавжудодлар ва машиналар алоқаси ҳамда уларни бошқариш**» ҳақидаги фан сифатида **Н.Винер** томонидан кашф этилди.

Кибернетика фанининг тез ривожланиши бир қатор унга яқин бўлган фанларни пайдо бўлишига ва жадал ривожланишига олиб келди. Бунда математик моделлаштириш ҳисоблаш машиналари ва тармоқларни оптимал лойихалаш каби хилма-хил кибернетик масалаларни ечишда кенг қўлланилади.

Математик модель─объект ёки жараёнларнинг тенглама, тенгсизлик, формула, жадвал ёки график кўринишидаги ифодасидир. Кибернетика эса мураккаб объектлар алоқаларини ва уларни бошқаришни моделлаштириш хақидаги умумий, ягона фандир.

Агар битта факторнинг қийматини ўзгарувчи деб караб, қолганларини шартли равишда ўзгармас деб қарасак, бир факторли математик модель кўришимиз мумкин.

Агар хамма факторларни ўзгарувчи қарасак, кўп факторли математик моделга эга бўламиз.

Агар математик моделнинг факторлари хам ўзи хам тасодифий бўлмаса, бундай модель регрессион модель дейилиб, бундай моделни қуриш жараёни регрессион таҳлил дейилади.

Агар математик моделнинг факторлари хам узи хам тасодифий бўлса, бундай модель корреляцион модель дейилиб, бундай моделни қуриш жараёни корреляцион таҳлил дейилади.

Математик модел деганда, ўргинилаётган объект ёки жараённибелгиловчи факторларнинг узаро боғлиқлигини ифодаловчи математик муносабатлар мажмуаси тушунилади. Объектнинг моделини топиш ва уни тахлил этиш асосида тегишли хулосалар чикариш жараёни математик моделлаштириш деб аталади.

Турли сохаларди математика ва математик моделлаштириш усулларини кўллалиниши, асосан, қуйидаги максадларни ўз олдига қўяди:

- объект ёки жараёнларни белгиловчи асосий факторлар орасидаги мухим богланишларни акс эттириш;

- берилган аниқ маълумотлар ва муносабатлар асосида дедукция услуби орқали ўрганилаётган объект ёки жараёнлар учун адекват хулосалар олиш;

- ўрганилаётган объектнинг амалдаги кузатилишига уни боғловчи факторларнинг математик статистика усуллари ёрдамида шаклини хамда боғлиқлигини ўрганиш жараёнида объект хакида янги билимларга эга булиш;

Математик моделларнинг тадкикот ишларида кўлланилиши ХВИ асрдаёқ бошланган бўлиб, ХИХ асрларда дифференциал ва интеграл хисобнинг ривожланиши уни турли соха масалаларини ечишга тадбиққилишга кенг имконият яратди. ХХ аср турли сохаларда математик усулларнинг моделлаштиришдаги кенг куламда қўлланиши билан характерланади.

Тадбикий математика сохасининг ўйинлар назарияси, математик дастурлаш, математик статистика ва бошка бўлимларининг ривожланиши турли тармокларнинг жадал ривожланишига мухим туртки бўлиб хизмат килди.

Маълумки, хар кандай тадқиқот доимо назария(модел) ва амалиётни (статистик маълумотлар) биргаликда карашни тақоза қилади. Агар математик моделлар кузатилаётган жараёнларни изохлаш ва тушунтиришдан иборат бўлса, статистик маълумотлар уларни эмпирик қуришда ва асослашда мухим восита хисобланади.

Моделлаштириш ва моделлар ўзининг турли сохалардаги тадбиқларига қараб, моддий ва абстракт деб аталувчи синфларга бўлинади.

1.1. Моддий моделлар асосан ўрганилаётган объект ва жараённи геометрик, физик, динамик ёки функционал характеристикаларини ифодалайди. Масалан, объектнинг кичиклаштирилган макети (масалан, лицей, коллеж, университет) ва турли хил физик, химик ва бошка хилдаги макетлар бунга мисол була олади.

Бу моделлар ёрдамида турли хил технологик жараёнларни оптимал бошкариш, уларни жойлаштириш ва фойдаланиш йуллари ўрганилади.

Умуман олганда, моддий моделлар тажрибавий характерга эга бўлиб, техник фанларида кенг кўлланилади.

Аммо моддий моделлаштиришдан иқтисодий масалаларни ечиш учун фойдаланишда маълум чегараланишлар мавжуд. Масалан, халқ хўжалигини бирор сохасини ўрганиш билан бутун иқтисодий объект хакида хулоса чиқариб бўлмайди. Кўпгина иқтисодий масалалар учун эса моддий моделар яратиш қийин булади ва кўп харажат талаб этади.

1.2. Абстракт (идеал) моделлар инсон тафакурининг махсули булиб, улар тушунчалар, гипотезалар ва турли хил карашлар системасидан иборат. Иктисодий тадкикотларда, бошқариш сохаларида, асосан, абстракт моделлаштиришдан фойдаланилади.

Илмий билишда абстракт моделлар маълум тилларга асосланган белгилар мажмуидан иборат. Ўз навбатида, белгили абстракт моделар математик логик тиллар шаклидаги математик логик моделарни ифодалайди.

1.3. Математик моделлаштириш турли хил табиатли, аммо бир хил математик боғланишларни ифодалайдиган воқеа ва жараёнларга асосланган тадқиқот усулидир.

Математик моделларнинг реал тадқиқ қилинаётган жараёнлари мураккаб бўлиб, ночизиқли дифферециал тенгламалар ва функсионал- дифферециал тенгламаларни ўз ичига олади. Математик моделнинг ядросини хусусий ҳосилали тенгламалар ташкил етади [2].

Турли физик, биологик, кимёвий ва бошқа ҳодиса ва жараёнларнинг ночизиқли математик моделларини ўрганиш, замонавий математик физиканинг энг долзарб йўналишларидан бири бўлиб ҳисобланади.

Физик жараёнларга мисол сифатида ночизиқли квант механикаси, ночизиқли электродинамика ва оптика, ночизиқли плазма назарияси, ночизиқли акустика, ночизиқли иссиқлик ўтказувчанлик ва бошқа назарияларни оладиган бўлсак, уларнинг математик моделлари асосида хусусий ҳосилали ночизиқли дифферециал тенглама ётади.

Физик жараёнларни чизиқли математик моделларининг тадқиқоти, тадқиқот учун қулай ҳисобланади. Чунки уларнинг асосида ётган хусусий ҳосилали чизиқли дифферециал тенгламалар ечимининг умумий методи ишлаб чиқилган. Амалий масалаларда реал физик жараёнлар чизиқсиз бўлиб, уларнинг адикват таърифланиши учун чизиқсиз моделлардан фойдаланиш лозим. Уларни асосида хусусий ҳосилали ночизиқли диффереціал тенгламалар ётади.

Математик физиканинг ночизиқли моделлари, физик параметрлар ўзгаришини кенг майдондаги ҳодиса ва жараёнларда ифодалаб, катта миқдордаги маълумотга ега бўлишга ёрдам беради. Чизиқли моделлар одатда ночизиқли моделларнинг хусусий ҳолати ҳисобланади.

Кузатишлар шуни кўрсатадики, ночизиқлилик фақатгина жараёнлар-нинг миқдорий характеристикаларини эмас, балки улар оқимининг миқдорий суратини ҳам ўзгартиради. Яқинлашиш нуқтаи назардан қизиқ томони, шундай ночизиқли дифферециал тенгламаларнинг синфини ўрганиш керакки, уларда ноаниқ функция ва унинг ҳосиласи даражавий ҳолатга кирсин.

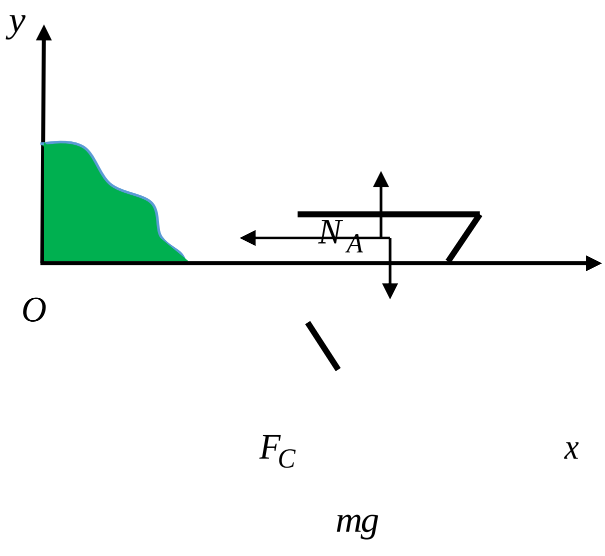
Бундай ночизиқлилик типлари филтрация, диффузия, иссиқлик ўтказувчанлик, магнитгидродинамикаси, нефт олувчи соҳа назарий масалаларида учрайди.

Айнан шундай моделлар физик жараённи аниқ ифодалайди ва шунинг учун уларнинг тадқиқоти ночизиқли жараёнларга боғлиқ янги эффектларнинг ўринга егалигини кўрсатади. Шундай қилиб, чекли тезлик эффекти, ечим локализацияси ва турли жараёнларнинг оқим тартиблари топилган.

Хозирги пайтда математик моделлаштириш иқтисодий тадқиқотларда, амалий режалаштиришда ва бошқаришда етакчи ўрин эгаллаб, компьютерлаштириш билан чамбарчас боғланган.

Математика, компьютерлаштириш сохалари, умумуслубий вапердметфанларининг ривожоланиши натижасида математик моделлаш-тиришузлуксиз ривожланиб, янги-янги математик моделлаштириш шакллари вужудга келмокда[16].

Мисол. Қайиқ қирғоқдан бирор бошланғич тезлик билан туртиб юборилди. Ушбу қайиқнинг ҳаракатини математик моделлаштириш воситасида ўрганиш зурур (3.1-расм).



3.1-расм.

Масаланинг концептуал қўйилиши.

Бошланғич горизонтал тезлиги v_0 бўлган қайиқнинг mg оғирлик кучи, N_A Архимед итарувчи кучи ва F_C қаршилик кучлари таъсиридаги ҳаракатини ўрганамиз. Қайиқ сузаётганлиги учун (вертикал ҳаракатланмайди), N_A Архимед итарувчи кучи mg оғирлик кучини мувозанатлаштиради. Моделни тузишда қуйидаги фаразлардан фойдаланамиз:

- Татқиқот объекти бўлган қайиқ горизонтал текисликда илгариланма ҳаракат қилади;
- Қайиқни m массали моддий нуқта деб қараймиз, унинг жойлашган ўрни массалар маркази билан устма уст тушади;
- Қайиқнинг ҳаракати унга қўйилган кучлар системасининг таъсири остида динамиканинг асосий қонуни (Нютоннинг иккинчи қонуни) га бўйсунади;
- Сувнинг F_C қаршилик кучи қайиқ тезлигига тўғри пропорционал ва қайиқ ҳаракатига қарама-қарши йўналган бўлиб, уни $F_C = -\mu v$ тенглик билан ифодалаш мумкин. Бу ерда μ - пропорционаллик коэффициенти (ўзгармас катталик), v - қайиқ тезлиги.

Қайиқ тезлигини вақтнинг функцияси сифатида топамиз ва бу боғланишни график кўриншда тасвирлаймиз.

Масаланинг математик қўйилиши.

Нютоннинг иккинчи қонунига кўра қайиқнинг x ўқи йўналишидаги ҳаракатининг тенгламаси

$$m\frac{dv}{dt} = -F_C = -\mu v, \qquad v(0) = v_0$$

кўринишда бўлади.

$v(t)$ ни топиш талаб этилади.

Аналитик ечим. Ўзгарувчиларни ажратиш усулини қўллаш учун тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}dt.$$

Уни интеграллаб, бошланғич шартни ҳисобга олиб қуйидаги ечимга эга бўлиш мумкин:

$$ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\mu}{m}t.$$

Бундан ечим учун қуйидаги тенгликни ҳосил қилиш мумкин:

$$v = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}.$$

Сонли ечим. Тезликдан олинган ҳосилани унинг тақрибий айирмали қиймати ёрдамида тасвирлаймиз:

$$\frac{dv}{dt} = \underline{\lim_{\Delta e \to 0}} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \underline{\lim_{\Delta e \to 0}} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Тенглама энди

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = -\frac{\mu}{m} v(t)$$

кўринишни олади. Бу ердан

$$v(t + \Delta t) = v(t) - \frac{\mu}{m} v(t) \Delta t.$$

Бу муносабат қўйилган масалани ҳал қилади, чунки бу тенглик ихтиёрий вақт мометдидаги тезликни унинг бундан олдинги қиймати ёрдамида топиш имконини беради. Яъни, бошланғич қийматдан бошлаб Δt вақтдан кейин, сўнгра яна Δt вақтдан кейин ва ҳоказо вақтдан кейин тезлик қанақа бўлишини аниқлаш мумкин.

Ҳисоблаш натижалари. $\mu = m,\ v_0 = 1$ деб оламиз. Бу ҳолда тенглама қуйидаги содда кўринишга эга бўлади:

- Аналитик: $v = e^{-t}$.
- Сонли: $v(t + \Delta t) = v(t)(1 - \Delta t),\ v_0 = 1$.

Вақтнинг охирги моменти сифатида $t = 5$ ни танлаймиз. Тезликнинг бу вақт моментидаги аналитик (амалда аниқ қиймати) қиймати қуйидагига тенг:

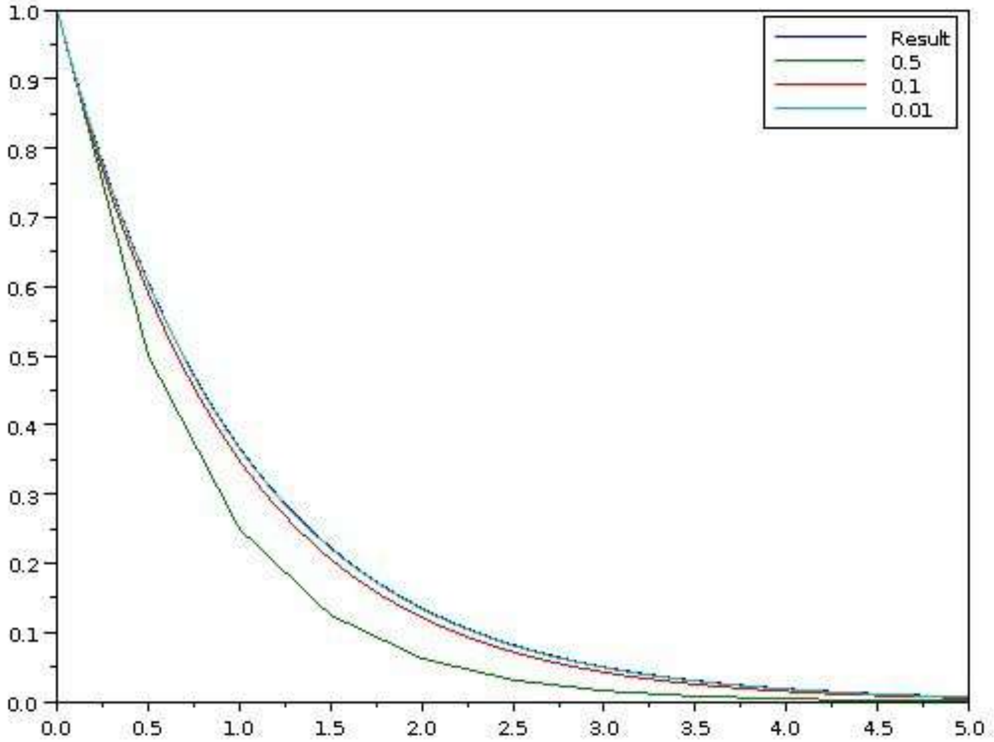
$$v(5) = exp(-5) = 0.0067379.$$

Тезликнинг шу қийматини сонли усулда топамиз. Қадамнинг турли қийматларидан фойдаланамиз.

Ҳисоблаш натижалари қуйидаги жадвалда келтирилган:

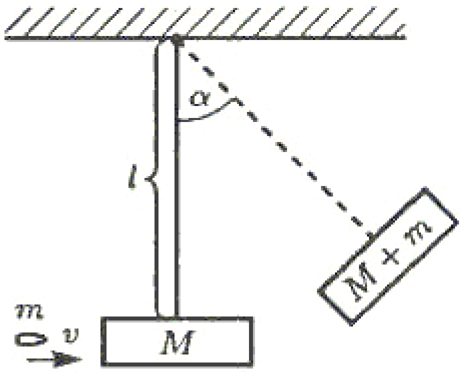
Δt	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001	0.0001
v	0.0009766	0.0031712	0.0051538	0.0065705	0.0067211	0.0067363

Сонли ечишда $\Delta t = 0.0001$ қадам учун олинган сонли натижа ($v = 0.0067363$) аниқ ечимга яқинлиги кўриниб турибди. Бу эса қадам кичрайганда сонли ечим аниқ ечимга интилишини билдиради. Буни қуйидаги графикдан ҳам кўриш мумкин.



Энергиянинг сақланиш қонуни.

Бу қонун қарийб икки асрлардан буён маълум бўлиб, табиатнинг буюк қонунлари орасида алоҳида ўринни эгаллайди. Бу қонунга таяниб, маятник



4.1-расм. Математик маятник.

туридаги нисбатан осон қурилма - мустаҳкам ва эркин айланувчи енгил стерженга осилган юк (4.1-расм) дан фойдаланиб, тўппонча ўқининг тезлигини аниқлаш мумкин.

Фараз қилайлик, m массали ўқ M массали юкка v тезлик билан отилсин. Ўқнинг отилиши натижасида юкда тиқилиб қолган ўқ «ўқ-юк» системасига ўзининг кинетик энергиясини беради. Ўз навбатида бу кинетик энергия стерженнинг вертикалдан энг юқори четлашиши моментида «ўқ-юк» системасининг потенциал энергиясига айланади.

Энергиянинг бир турдан иккинчи турга айланиши қуйидаги тенгликлар орқали тасвирланади:

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha).$$

Бу ерда $mv^2/2$ – v тезликка эга бўлган m массали ўқнинг кинетик энергияси, M – юкнинг массаси, V – «ўқ-юк» системасининг тўқнашувдан кейинги тезлиги, g – эркин тушиш тезланиши, l – стерженнинг узунлиги, α – вертикалдан энг энг юқори четлашиш бурчаги. Ушбу формуладан изланаётган тезлик учун қуйидаги тенгликни аниқлаш мумкин:

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}}.$$

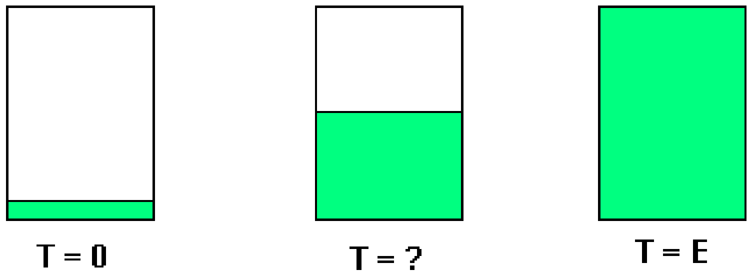
Тезликнинг бу қиймати ўқ юкни иситиши, ҳавонинг қаршилигини енгиш, стерженни тезлаштириш ва ва ҳакозаларга сарф бўлган энергиялар унчалик катта бўлмаганида аниқ кўринишга эга бўлади. Бир қарашда ўринли бўлган мазкур мулоҳаза аслида тўғри эмас. Ўқ ва маятникнинг «ёпишиш»и пайтида содир бўладиган жараёнлар бу ҳолатда соф механик жараёнлар эмас. Шу сабабли V катталикни ҳисоблашда қўлланилган механик энергиянинг сақланиш қонуни ўринли эмас: системанинг механик энергияси эмас, тўлиқ энергияси сақланади. У ўқнинг тезлигини баҳолаш учун қуйи чегарани беради, холос (бу содда масалани тўғри ечиш учун импульснинг сақланиш қонунидан ҳам фойдаланиш керак бўлади).

Мальтус модели.

Мальтус моделлари универсалдир – у геометрик прогрессия ва регрессияларга тааллуқли барча ҳодисаларни ифодалайди. Унинг тадбиқ этилиш доирасига радиоактив емирилиш қонуни ҳам, озуқа билан тўйинган муҳитда микроорганизмларнинг сони ҳам киради.

Қуйидаги масалани ўрганиб чиқамиз:

Бизга қандайдир озуқавий муҳит билан тўлдирилган банка берилган бўлсин. Ярим тунда – 00 соат, 00 минут, 00 сонияда банкага маълум миқдордаги бактерия жойлаштирилгандан сўнг улар бўлинишни бошлайди. Банка кейинги куннинг 00 соат, 00 минут, 00 сониясида, яъни 24-соатдан кейин бактериялар билан тўлдирилиши маълум. Шунингдек, ҳар сонияда банкадаги бактериялар сони икки баравар кўпайиши ҳам маълум. Банка қачон (соат, минут ва сонияда) ярмигача тўлишини аниқланг (7.1-расм).



7.1-расм. Бактерияли банканинг модели. T = 0 –тажрибанинг бошланиш вақти,
T = E – тугаш вақти (E алоҳида олинган бирлик системасидаги 24 соатга тўғри келади),
T = ? – изланаётган вақт моменти.

Бу масалани ечишнинг анъанавий усули – бир секундда бактериялар сони икки баравар ортиш фактидан фойдаланишдир. Шундай қилиб, E вақтгача бир секунд қолганда (7.1-расмга қаранг) бактериялар сони E моментдагига қараганда икки баравар кам бўлади (тўла банка), яъни 23:59:59 да банка ярмигача тўлган бўлади. Қандай қилиб бу ажойиб қонуниятни янада кўпроқ масалаларга нисбатан кенгайтириш мумкин? Мальтус модели айнан шундай ечимни таклиф этади.

Мальтус модели қуйидаги дифференциал тенглама билан ифодаланади:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N.$$

Бу тенглама қуйидаги умумий ечимга эга:

$$N = N_0 e^{(\alpha-\beta)t}.$$

Келтирилган дифференциал тенглама тезлиги (тенгламанинг чап қисми) жорий вақт моментдаги миқдорга пропорционал бўлган жараённи ифодалайди. Бизнинг масаламизга нисбатан у *к*=□-□ коэффициентни киритиш билан қайта баён этилиши мумкин. Жумладан, масаланинг шартига кўра, *к* =2 эканлиги келиб чиқади, чунки бир секунд ичида бактериялар сони икки марта кўпаяди. Ва биз масаланинг хусусий ҳолига эга бўламиз:

$$\frac{dN}{dt} = 2N$$

ва унинг ечими:

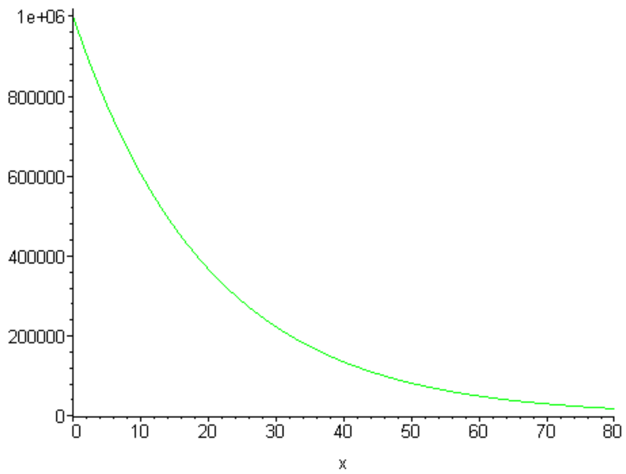
$$N = N_0 e^{2t}$$

бўлади.

Бу ечимдан ихтиёрий вақт моментидаги бактериялар сонини ҳосил қилиб олиш мумкин.

Бу моделнинг тадбиқ этилиш доирасининг чегараларини аниқлаш учун, унинг □ ва □ параметрларнинг ҳар хил қийматларидаги ҳатти-ҳаракатини ўрганиб чиқамиз.

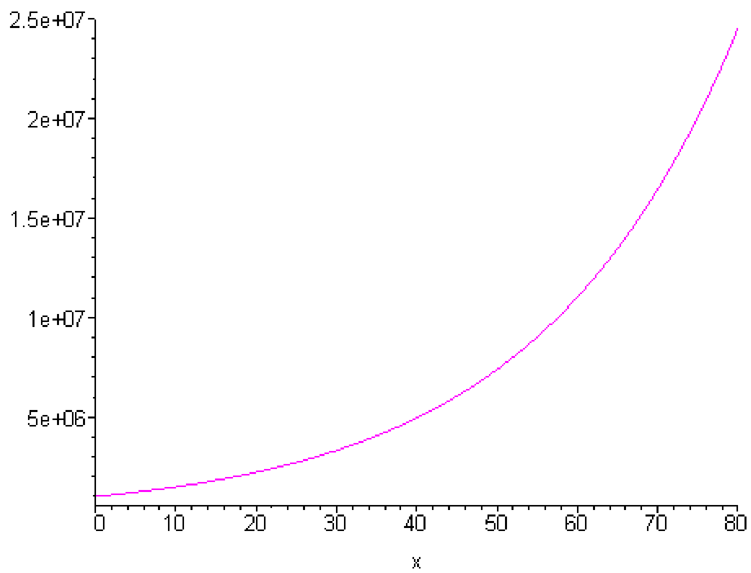
Мальтус модели идеал ҳолда аҳоли сонини моделлаштириш учун тадбиқ этилиши мумкин, бунда □ ва □ параметрлар мос равишда туғилиш ва ўлиш коэффициентларини ифодалайди. Мазкур модельнинг ҳар хил қийматли коэффициентлардаги табиатини ўрганиб чиқамиз (7.2-7.3-расмлар).



7.2-расм. Мальтус модели. α=0,43; β=0,48; H_0=1000000

(абсцисса ўқи бўйича вақт, ордината ўқи бўйича аҳоли сони жойлашган).

Кўриниб турибдики, агар ўлимлар сони туғилишларга қараганда кўпроқ бўлса, у ҳолда Мальтус модели аҳоли сонининг экспоненциал равишда камайишига ишора қилади (7.2-расм).

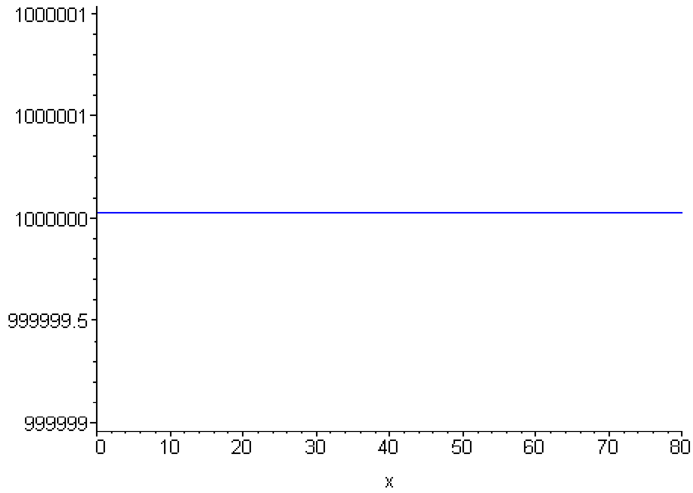


7.3-расм. Мальтус модели α=0,05; β=0,01; H_0=1000000

(абсцисса ўқи бўйича вақт, ордината ўқи бўйича аҳоли сони жойлашган).

Эндиликда, агар туғилишлар сони ўлимлар сонига нисбатан кўп бўлса, у ҳолда Мальтус модели аҳоли сонининг экспоненциал равишда ўсишига ишора қилади (7.3-расм).

7.4-расмда туғилишлар ва ўлимлар сони ўзаро тенг бўлиб, Мальтус моделининг кўрсатишича, система мувозанат ҳолда бўлади: аҳоли сони бутун вақт оралиғида ўзгармасдан қолади.



7.4-расм. Мальтус модели. α=0,1; β=0,1; H_0=1000000

(абсцисса ўқи бўйича вақт, ордината ўқи бўйича аҳоли сони жойлашган).

«Йиртқич – ўлжа» системасининг ўзаро муносабат модели.

Йиртқич ва ўлжанинг системасининг ўзгариши бир – бирига боғлиқ, яъни улар ўзаро таъсир билан яшайди. «Йиртқич–ўлжа» системасининг оддий математик модели қуйидаги фаразларга асосланган:

1) Ўлжа популяциясининг сони *H* ва йиртқич популяциясининг сони *M* фақат вақтнинг функцияларидир: $N(t)$, $M(t)$;

2) Ўзаро таъсир бўлмаса, популяция сонлари Мальтус модели асосида ўзгаради ва бунда йиртқичлар сони камаяди, ўлжалар сони эса ўсади, яъни:

$$\frac{dN}{dT} = \alpha N, \ \frac{dM}{dt} = -\beta M, \ \alpha > 0, \ \beta > 0;$$

3) Популяция сонларининг табиий ўзгаришлари, яъни ўлжаларнинг табиий ўлиши ва йиртқичларнинг табиий кўпайиши аҳамиятга эга эмас;

4) Иккала популяция сонларининг тўйинганлик эффекти ҳтисобга олинмайди;

5) Ўлжалар сонининг ўсиш тезлиги йиртқичлар сонига, яъни $cM\ (c>0)$ миқдорга нисбатан пропорционал равишда камаяди, йиртқичлар сонининг ўсиши эса ўлжалар сони, яъни $dN\ (d>0)$ миқдорга нисбатан пропорционал кўпаяди.

Юқорида келтирилган фаразларни бирлаштириб, Лотка-Вольтер тенгламалар системасини ҳосил қилиш мумкин:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (\alpha - cM)\cdot N \\ \dfrac{dM}{dt} = (-\beta + dN)\cdot M \end{cases} \qquad (1)$$

Ушбу тенгламалар системасидан $N(0)=N(t=0),\quad M(0)=M(t=0)$бошланғич шартлар асосида ихтиёрий вақт $t>0$ моменти учун популяциялар сонини аниқлаш мумкин.

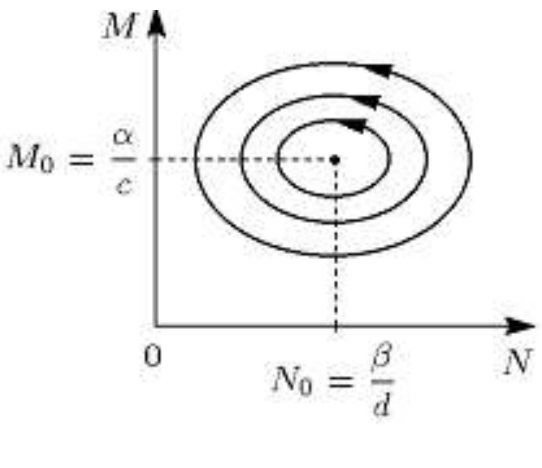
(1) тенгламалар системаси мувозанат ҳолатига, яъни вақтга боғлиқ бўлмаган ечимга эга:

$$M_0 = \frac{\alpha}{c}, \qquad N_0 = \frac{\beta}{d}. \qquad (2)$$

Системанинг мувозанат ҳолати (2) ни турғунлигини ўрганамиз. Бунинг учун қуйидаги саволларга жавоб бериш лозим бўлади: агар популяцияларнинг бошланғич сонлари (2) билан бир хил бўлса, вақт ўтиши билан уларнинг сони қандай ўзгаради; қандайдир сабабга кўра популяциялар сонлари $M_0,\ N_0$миқдорлардан оғса, улар мувозанат ҳолатига қайтадими; агар популяцияларнинг бошланғич сонлари $N(0),\ M(0)$ системанинг мувозанат ҳолати $M_0,\ N_0$лардан сезиларли фарқ қилса, система вақт ўтиши билан $M_0,\ N_0$ миқдорларга нисбатан қандай ўзгаради.

Юқорида келтирилган саволларга жавоб топиш учун қуйида келтириладиган мулоҳазалардан фойдаланамиз. Чизиқсиз тенгламалар системаси (1) ни $N,\ M$ ўзгарувчилар текислигида ўрганиш қулайроқдир. Шу мақсадда системанинг биринчи тенгламасини иккинчи тенгламасига бўламиз:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(\alpha - cM)\cdot N}{(-\beta + dN)\cdot M}\ . \qquad (3)$$



(2) тенгламани қўйидагича алмаштирамиз:

$$(-\beta + d\cdot N)\cdot MdN = (\alpha - cM)\cdot NdM\ . \qquad (*)$$

(*) ни ҳар иккала томонини HM га бўлиб, уни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\beta \frac{dN}{N} - d \cdot dN + \alpha \frac{dM}{M} - c \cdot dM = 0. \qquad (4)$$

(4) ни интеграллаймиз:

$$\beta \ln N - d \cdot N + \alpha \ln M - cM = const.$$

Интеграллаш доимийси *сонст* бошланғич шартлар $N(0)$ва $M(0)$ билан аниқланади.

Шундай қилиб, (1) система қўйидаги ечимга эга:

$$\ln N^{\beta} + \ln e^{-d \cdot N} + \ln M^{\alpha} + \ln e^{-cM} = \ln C$$

ёки

$$N^{\beta} e^{-d \cdot N} = C \cdot M^{-\alpha} e^{cM}, \quad C > 0. \qquad (5)$$

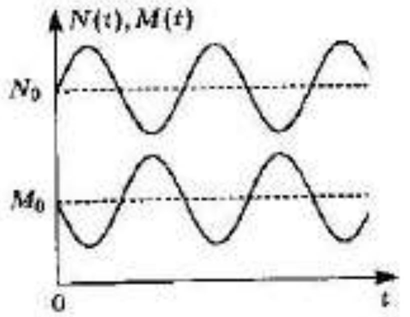
(5) дан қўйидагича хулоса қилиш мумкин:

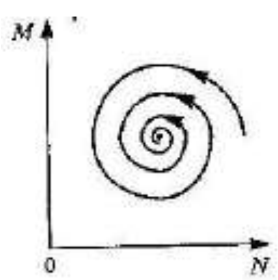
а) агар $N(0) = N_0$, $M(0) = M_0$ бўлса, ҳамма вақт мобайнида популяциялар сони ўзгармасдан қолади.

б) йиртқич ва худди шунингдек, ўлжанинг популяция сонлари мувозанат ҳолатидан озгина ўзгариши, бу популяция сонларининг вақт ўтиши билан мувозанат ҳолатига қайтмаслигига олиб келади.

в) агар бошланғич мувозанат ҳолатидан оғиш катта бўлса, $N(t)$, $M(t)$ функцияларнинг табиати худди б) дагидек, яъни система вақт ўтиши билан мувозанат ҳолатига қайтмайди.

Ушбу хулосалар шуни англатадики, йиртқич ва ўлжалар популяция сонлари мувозанат ҳолати атрофида даврий тебраниб туради. Тебраниш амплитудаси ва унинг даври популяцияларнинг бошланғич сонлари $N(0)$, $M(0)$ орқали аниқланиб, $N(t)$ нинг максимал қийматига $M(t)$ нинг минимал қиймати мос келади ва аксинча.





Икки тур ўртасидаги ўзаро муносабатни математик жиҳатдан тўлароқ характерлаш учун популяция сонларининг эгаллаб турган ҳудудларида нотекис тақсимланганлигини ҳисобга олиш лозим бўлади (ушбу ҳолга хусусий ҳосилали тенгламалар системаси мос келади).

Икки давлат орасидаги қуролланиш пойгаси модели.

Ушбу моделни ҳосил қилишда вақт ўтиши билан ҳар бир давлатдаги қуроллар миқдори учта факторга боғлиқ ҳолда ўзгаради деб фараз қилинди:

1) рақиб давлатдаги қуроллар миқдори;
2) мавжуд қуролларнинг эскириши;
3) рақиблар ўртасидаги ўзаро ишончсизлик даражаси.

Қуролланишнинг ўсиши ва камайиши кўрсатилган факторларга пропорционал бўлади, яъни

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t) \end{cases} \qquad (1)$$

(5)да қуйидаги белгилашлар қўлланилган: M_1, $M_2>0$ қуроллар миқдорлари, $\alpha_1(m)>0$, $\alpha_2(m)>0$ – қуролларни эскириш тезлигини характерловчи коэффициентлар, $\gamma_1\geq 0$, $\gamma_2\geq 0$ функциялар қурол миқдорига боғлиқ эмас деб ҳисобланилади ва бошқа сабаблар билан аниқланиб, рақиблар ўртасидаги ишончсизлик даражасини ифодалайди.

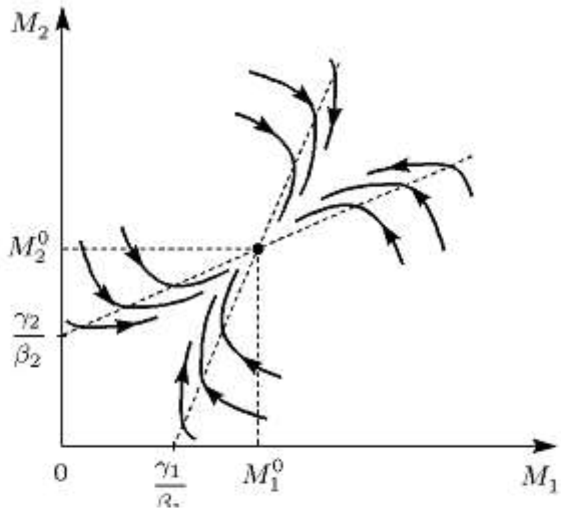
Бу модель қуролланиш пойгаси динамикасига таъсир этувчи кўпгина муҳим фактларни ҳисобга олмасада, лекин бир қатор керакли маълумотларни таҳлил қилиш имконини беради.

Агар α_u, β_u (u = 1,2) функциялар вақтга боғлиқ бўлмаса, (1) модел қуйидаги кўринишга келади.

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \alpha_1 M_2 - \beta_1 M_1 + \gamma_1 \\ \frac{dM_2}{dt} &= \alpha_2 M_1 - \beta_2 M_2 + \gamma_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

(1) тенглама $\dfrac{dM_1}{dt} = 0, \dfrac{dM_2}{dt} = 0$ мувозанат ҳолатларига эга. M_1^0, M_2^0 – мувозанат қийматлари қуйидаги шартдан аниқланади:

$$\begin{cases}\alpha_1 M_2 - \beta_1 M_1 + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 M_1 - \beta_2 M_2 + \gamma_2 = 0\end{cases}$$



10.1-расм.

$$M_1^0 = \frac{\alpha_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2}, M_2^0 = \frac{\alpha_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2} \quad (3)$$

(3) дан кўриниб турибдики, $M_1^0>0$, $M_2^0>0$ ларда мувозанат ҳолат мавжуд бўлиши учун $\beta_1\beta_2>\alpha_1\alpha_2$ (4) шарт бажарилиши керак.

Агар α_1, β_1, β_2 лар ўзгармас бўлса, α_2 эса ўсса, бу шуни билдирадики, биринчи давдат қуролланиш соҳасига қарашларини, стратегиясини ўзгартирмайди, иккинчи давлат эса қуроллар эскириши билан қуролланишга зўр беради. У холда α_2 етарлича катта қийматга эришса, мувозанат холати бузилади ва (4) тенгсизлик бажарилмайди. Агар γ_1 ва γ_2 нолга тенг бўлса, мувозанат ҳолати иккала давлатда ҳам қуроллар йўқлигига мос келади. $M_1(m)$ ва $M_2(m)$ функциялар m усиши билан (4) шарт бажарилган вақтларда мувозанат қийматларига интилади.

Шундай қилиб, мувозанат турғун, яъни мувозанат ҳолатидаги оғишлар вақт ўтиши билан кичик миқдорларга айланиб боради.

Ўзаро таъсирлашувчи популяциялар сонини моделлаштириш.

Маълумки, экология учун қизиқарли ва муҳим вазиятлар ҳар хил турдаги популяцияларнинг ўзаро таъсирлашуви ёки ташқи шароитларнинг ўзгариши билан боғлиқ бўлади. Ушбу вазиятларда ҳаёт тўлқинлари деб номланувчи популяцияни вақт бўйича ўзгаришини характерловчи популяция тўлқинлари ҳосил бўлади.

Популяция тўлқинлари қуйида келтирилган хусусиятларга эга бўлиши мумкин:

1. Популяция сони даврий тебранишларга эга бўлиши мумкин (масалан, мавсумий);
2. Йиртқич ва ўлжа популяцияларининг ўзаро таъсирлашуви ҳисобига популяция сонининг даврий бўлмаган ёки даврий тебранишлари содир бўлиши мумкин;
3. Популяция сони ортиб кетиши (популяция қулай шароитларга тушиб қолганида) мумкин;

4. Популяция сони жадал суръатлар билан қисқариши (эпифитотиялар, талофатлар таъсирида) мумкин.

Турли хилдаги иккита популяция бир-бири билан бир неча хил кўринишдаги ўзаро муносабатда бўлиши мумкин:

(-, -) – ўзаро рақобат, бунда иккала популяциянинг яшаш шароитлари салбий томонга ўзгаради;

(+,+) – симбиоз;

(+,-) – йиртқич-ўлжа ва ҳ.к.

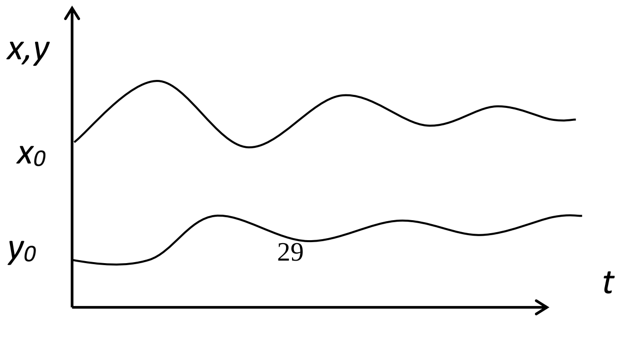
«Йиртқич-ўлжа» популяцияларининг ўзаро муносабатини ўрганамиз. Ўлжа учун етарли даражадаги озуқа солинган чекли ҳажмдаги муҳитга йиртқич ва ўлжа жойлаштирилса, уларнинг сони қандай қилиб ўзгаришини кузатамиз. Бу ҳолда моделлаштиришда Лотка-Вольтер тенгламаларидан фойдаланиш мумкин:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx(1 - \dfrac{x}{K_{max}}) - cxy \\ \dfrac{dy}{dt} = gxy - fy \end{cases}.$$

Бу ерда x – ўлжалар сонини, y – йиртқичлар сонини, xy – ўлжа ва йиртқичнинг чекли ареалда учрашиш частотасини, r – ўлжа популяциясининг табиий ўсиш тезлиги (йиртқичларнинг таъсирини ҳисобга олмаган ҳолда), $K_{мах}$ – чекли ареалда ўлжалар сонининг максимал кўпайиш миқдори (одатда, йиртқичлар сони ўлжаларнинг сонига нисбатан анча кам бўлади); c – йиртқичлар томонидан овни муваффақиятли тарзда тугалланиш коэффициенти; g – йиртқичларга нисбатан туғилиш коэффициенти (уларнинг кўпайиш тезлиги нафақат x га, балки y га ҳам боғлиқ, аниқроқ қилиб айтганда у *хй* га пропорционал бўлади), f – йиртқичларнинг табиий ўлиш коэффициенти характерлайди.

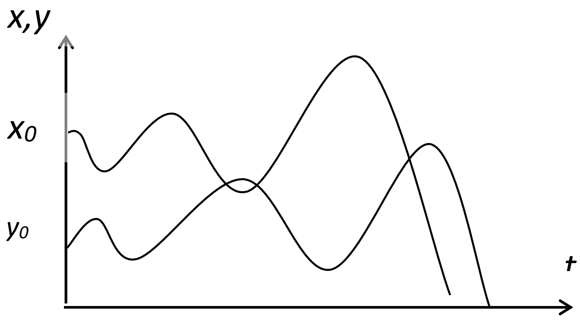
Юқорида келтирилган тенгламаларнинг ечимлари йиртқич ва ўлжалар сонининг тўлқинли тебранишларини ифодалайди. Ушбу тўлқинларнинг шакли ва даврийлиги x_0, y_0 бошланғич шартларга ҳамда тенгламада иштирок этувчи коэффициентларнинг қийматларига боғлиқ бўлади. Бу ерда бир неча ҳолатлар бўлиши мумкин:

1. Мувозанатли босқич (11.3-расм). Бундай вазият йиртқичлар сони $y = const$ бўлиши учун ўзгармас миқдордаги ўлжалардан кўпроқ миқдордаги ўлжалар туғилишини англатади.



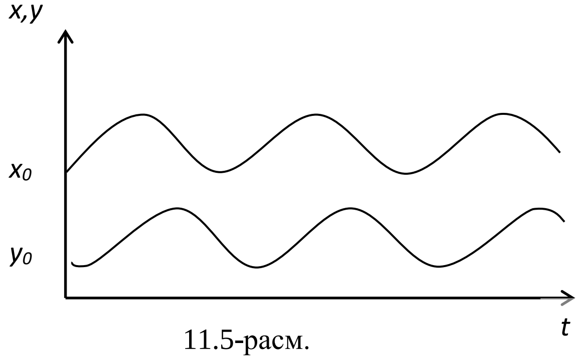
11.3-расм.

2. Ўлжаларнинг жадал суръатлар билан ейилиши сабабли йиртқичларнинг очликдан ўлиши кузатилади. Ўлжалар сони x нолга тенглашишигача популяция тўлқинлари амплитудалар бўйича ёйилиб боради (11.4-расм).



11.4-расм.

1. Ўзгармас амплитудали мувозанатли тўлқинлар (11.5-расм). Бу ҳолатда гоҳида ўлжалар кўпайиб (камайиб), йиртқичлар камайиб (кўпайиб) кетиши кузатилади.

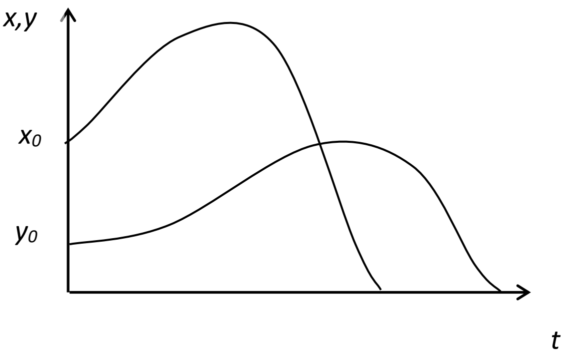


11.5-расм.

Илмий манбалардан маълум бўлишича, математик моделни текшириш мақсадида тажриба сифатида ўлжалар учун етарли даражадаги озуқа солинган чекли ҳажмдаги суюқликка (колбага) киприксимонларнинг иккита тури (бири йиртқич, иккинчиси ўлжа сифатида) жойлаштирилди. Тажриба натижасида қуйидагилар кузатилган:

1. Агарда колбада йиртқичлар бўлмаса, у ҳолда ўлжалар сонининг ўсиши суюқлик ҳажми билан белгиланадиган $K_{мах}$ гача яқинлашади.

2. Колбага йиртқич популяцияси қўшилганда, улар ўлжаларни тезда еб, йиртқичлар ўзларининг сонини кўпайтирар эдилар. Ўлжалар сонининг камайиши ўлжалар бутунлай йўқолиб кетгунича давом этиб, ўлжалар қирилиб кетиши натижасида, ахири йиртқич популяцияси очликдан ўлиб кетади (11.6-расм).



11.6-расм.

3. Тажрибада суюқликка целлюлоза қўшилди. Целлюлоза эритманинг қовушқоқлигини ошириш учун қўшилган эди. Натижада йиртқичлар томонидан овни муваффақиятли тарзда тугалланиш коэффициенти c ва йиртқичга нисбатан туғилишлар коэффициенти g ни пасайтиришга эришилди. Бу ҳолатда барча ўлжалар еб бўлингунига $(x = 0)$ қадар йиртқичлар популяцияси учун ўсиб борувчи амплитудали тўлқинлар пайдо бўлиб, охир-оқибат йиртқичлар қирилиб, нобуд бўлишни бошлар эди (11.4-расм).

4. Ўлжа популяциясининг табиий ўсиш тезлиги r ни қисқартириш мақсадида ўлжа озуқаси 2 бараварга камайтирилди. Бу ҳолатда ўлжа популяцияси амплитудасининг ўсиши анча камайди. Бунинг натижасида йиртқич популяцияси сонининг тез суръатлар билан ўсиши ва оқибатда ўлжа популяцияси сонининг тезда камайиб кетиши кузатилмади. x ва y лар бўйича барқарор тўлқинлар пайдо бўлди (11.5-расм).

Эпидемия модели

Маълумки, кўп асрлар давомида инсонларнинг кўпчилиги турли хил эпидемиялар туфайли вафот этганлар. Эпидемияларга қарши курашиш учун турли тиббий тадбирлар (карантин, эмлашлар ва ҳ.к) ни ўз вақтида амалга ошириш керак бўлади. Бундай тиббий тадбирларни самарадорлиги эпидемиянинг турини аниқ билиш, эпидемияга чалинган беморлар сонининг вақт бўйича ўзгаришини башорат қилиш билан боғлиқ.

Фараз қилайлик, бир ҳудудда N та соғлом одам мавжуд бўлиб, $t = 0$ вақт моментида бу гуруҳга битта касал одам (инфекция манбаи) келиб қўшилсин. Гуруҳдан беморлар чиқариб ташланмайди (тузалиш ҳам, ўлиш ҳам, изоляция ҳам йўқ). Шунингдек, одам кассаликни ўзига юқтириши биланоқ, инфекция манбаига айланади деб фараз қилинади.

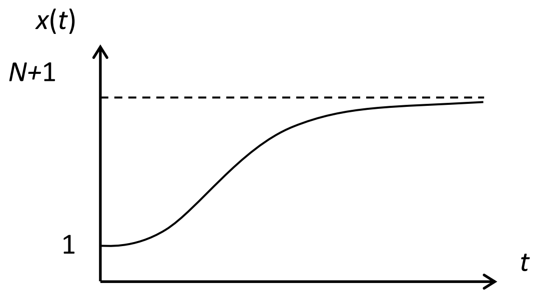
t вақт моментидаги касаллар сонини $x(t)$ билан, соғлом бўлганлар сонини эса $y(t)$ билан белгилаймиз. Демак, ихтиёрий вақт моментида

$$x(t) + y(t) = N + 1 \qquad (1)$$

тенглик ўринли эканлиги ва $t = 0$ да $x(0) = 1$ шарт бажарилиши кўриниб турибди. $t + dt$ (dt – кичик вақт оралиғи) вақт оралиғида нечта янги касал пайдо бўлишини аниқлаш мумкин. Уларнинг сони dt вақт оралиғига, соғлом ва бемор кишиларнинг ўзаро учрашувлар сонига, яъни x ва $й$ катталикларнинг кўпайтмаси $x \cdot й$ га пропорционал бўлади деб фараз қилиш мумкин:

$$dx = \alpha xydt, \qquad (2)$$

бу ерда α – пропорционаллик коэффициенти (инфекцияни бошқа одамга юқтириш коэффициенти).



11.8-расм.

(1) ва (2) формулалар асосида қуйидаги дифференциал тенгламани ҳосил қилиш мумкин:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(N + 1 - x)$$

Бу тенгламанинг ечими қуйидагича:

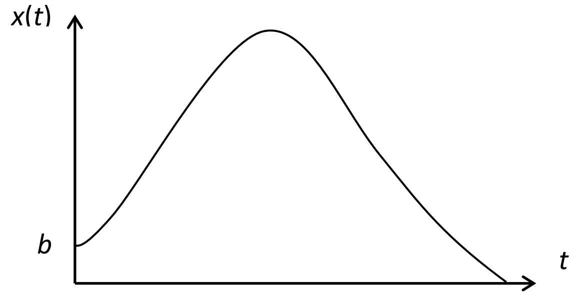
$$x(t) = \frac{N + 1}{Ne^{-\alpha(N+1)t} + 1}.$$

Ушбу формула асосида гуруҳдаги беморлар сонининг вақт бўйича ўзгариши 11.8-расмда келтирилган.

Масала. Агар α = 0,001, H+1=1101 киши бўлса, у ҳолда 6 суткадан кейинги беморлар сони қанча бўлишини ва 6 кун ичида қанча одам касал бўлишини аниқланг.

Масалага жавоб топиш учун тенгламанинг ечимидан фойдаланишни ўқувчиларга тавсия қиламиз.

Эпидемия моделини тузишда бактерия катакчаларининг фаолиятини бошқарувчи қонунларни, алоҳида олинган кишиларнинг инфекцияларга нисбатан сезувчанлик даражасини, инфекция ташувчиларнинг соғлом кишилар билан учрашиб қолиш эҳтимоли ва бошқа омилларни ҳисобга олиш мумкин эди. Лекин, масалани соддалаштириш учун ушбу омиллар эътиборга олинмади.



11.9-расм.

Модельни янада мураккаблаштириш мақсадида $т$ вақт моментида 1 та эмас, бир нечта, яъни $б$ сондаги одам касалланган деб фараз қилинади. Шунингдек, кичик вақт оралиғидан сўнг бемор тузалиб, иммунитетга эга бўлади деб ҳисоблаш мумкин. $з(т)$ билан $т$ вақт моментигача касал бўлиб, сўнгра тузалган беморлар сони белгиланса, юқоридагиларга асосланиб, қуйидагига эга бўлиш мумкин:

$$x + y + z = N + b,$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha xy - \gamma x \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha xy \end{cases}.$$

Бу ерда γx – тузалганлар сони. У ҳолда беморлар сонини башорат қилиш 11.9-расмда келтирилган шаклга эга бўлади. Эгри чизиқнинг аниқ кўриниши $Н,\ б,\ \alpha,\ \gamma$ ларнинг қийматларига боғлиқ бўлади.

Реклама компаниясини ташкиллаштириш.

Фараз қилайлик, фирма янги товари ёки хизматини реклама қилишни режалаштирмоқда. Иш бошланишида янгиликдан истеъмолчиларнинг озгина қисми хабордорлиги сабабли рекламага сарф этиладиган харажатлар реклама компанияси оладиган фойдага нисбатан кўпроқ бўлиши мумкин. Кейинчалик, вақт ўтиши билан истеъмолчилар сонини ошиши туфайли сезиларли фойдага умид қилиш мумкин. Шундай вақт моменти келадики, бу вақтда фирма янги товари ёки хизмати тури билан истеъмолчилар бозори тўйинган бўлади ва энди товарни ёки хизматни реклама қилиш маънога эга бўлмай қолади. Бундан кейин мавзуни баён қилишда товар ёки хизмат тури иборалари ўрнига қулайлик учун фақат товар сўзидан фойдаланамиз.

Реклама компаниясининг математик моделини тузишда қуйидаги белгилашлардан фойдаланилади: t - реклама компанияси бошланганидан кузатувгача бўлган вақт; $N(t)$ - фирма товаридан хабордор мижоз ёки истеъмолчиларнинг t вақтдаги сони; N_0 - фирма товарига пул тўлаши мумкин бўлган харидорларнинг умумий сони. Математик моделни қуриш қуйидаги асосий фаразларга асосланади. Товар ҳақида хабордор бўлган ва уларни сотиб олишга қурби етган истеъмолчилар сонининг вақт бўйича ўзгариш тезлиги dN/dt товар ҳақида хабари бўлмаган харидорлар сони $\alpha_1(t)(N_0 - N(t))$ га пропорционал. Бу ерда $\alpha_1(t) > 0$ - реклама компанияси ишини жадаллиги (ушбу вақт моментида рекламага сарф этилган харажатлар) ни англатади. Шунингдек, товар ҳақида хабардор бўлган харидорлар товар ҳақида хабардор бўлмаган харидорларга у ёки бу тарзда товар ҳақида ахборот тарқатиб, фирмани қўшимча реклама агенти сифатида иштирок этади деб фараз қилинади. Уларнинг улуши $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ миқдорга тенг бўлиб, агентлар сони ошиши билан бу миқдор ҳам ошиб боради. $\alpha_2(t) > 0$ миқдор харидорлар ўртасидаги ўзаро муомала (ахборот алмашиш) даражасини характерлайди (бу миқдорни қиймати, масалан, сўровнома ўтказиш йўли билан ҳам аниқланиши мумкин).

Юқоридаги фаразларга асосан реклама компаниясининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N). \tag{1}$$

Агар $\alpha_1(t) >> \alpha_2(t)N(t)$ бўлса, (1) моделдан Мальтус типидаги моделга эга бўлиш мумкин, аксинча тенгсизликда популяциянинг қуйидаги моделини ҳосил қилиш мумкин:

$$\frac{dN}{d\tau} = N(N_0 - N), \qquad d\tau = \alpha_2(t)dt\,.$$

Ушбу моделни ва популяция моделини тузишда қандайдир миқдорнинг вақт бўйича ўсиш тезлиги ушбу миқдорнинг жорий вақтдаги $N(t)$ қийматини мувозанат ҳолати (популяцияда) дагидан ёки харидорларнинг максимал қийматидан жорий вақтдаги $N(t)$ қийматини айирмаси - $N_0 - N(t)$ кўпайтмасига пропорционал деган фаразга таянилган эди. Шу сабабли уларни анологиясидан фойдаланиш мумкин. Агар $\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)$ миқдор вақтнинг кандайдир моментида нолга тенглашса ёки манфий қийматга эга бўлса (бунинг учун $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ коэффициентларнинг бирортаси ёки иккаласи хам манфий ишорага эга бўлиши лозим) ушбу жараёнлар ўртасидаги аналогия тугайди. Шунга ўхшаш негатив ҳолатлар турли реклама компанияларида тез-тез учраб туради. Бундай ҳолларда рекламани характерини ўзгартириш ёки бўлмаса рекламадан бутунлай воз кечиш лозим бўлади. Товарни оммавийлигини ошириш тадбири $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$ миқдорларни қийматларига боғлиқ ҳолда тўғридан-тўғри ($\alpha_1(t)$ параметр) ёки иккиламчи тарзда ($\alpha_2(t)$ параметр) реклама натижасини яхшилашга йўналтирилиши мумкин.

(1) математик модель чекли вақт моментларида нолга айланадиган ечимларга эга эмас. Популяция сонини вақт бўйича ўзгаришидан маълумки, $t \to -\infty$ да $N(t) \to 0$. Реклама компаниясига нисбатан бу нарса шуни англатадики, реклама бошланишидан олдинрок харидорларнинг бир қисми янги товардан хабардор бўлишган.

Агар $N << N_0$, $\alpha_2(t)N << \alpha_1(t)$ деб ҳисоблаб, (1) математик моделни $N(t=0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ - рекламани бошланиш вақти) нуқта атрофида қарайдиган бўлсак, (1) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)N_0$$

ва у $t = 0$ даги бошланғич шартни қаноатлантирувчи

$$N(t) = N_0\int_0^t \alpha_1(t)dt \tag{2}$$

ечимга эга.

Энди, битта товардан тушадиган фойдани p оркали белгилаймиз. Соддалик учун ҳар бир харидор фақатгина битта товар сотиб олсин деб ҳисоблаймиз. Маълумки, $\alpha_1(t)$ коэффициент маъноси бўйича реклама учун вақт бирлиги ичида қилинадиган ҳаракатлар сонига тенг (масалан, бир турдаги афишаларни елимлаш). s оркали элементар реклама ҳаракатининг нархини белгилаймиз. У ҳолда жами фойда қуйидагига тенг бўлади:

$$P = pN(t) = pN_0\int_0^t \alpha_1(t)dt\,, \tag{3}$$

сарф қилинган харажатлар эса

$$S = s\int_0^t \alpha_1(t)dt\,.$$

Кўриниб турибдики, $pN_0 > s$ бўлгандагина фойда харажатларга нисбатан юқори бўлади. Жуда самарали бўлмаган ёки қиммат рекламадан фирма биринчи қадамидаёқ камомадга учрайди. Аммо, бу ҳолат рекламани тўхтатиш учун асос бўла олмайди. Ҳақиқатдан ҳам (3) ифода ва $pN_0 > s$ шарт фақатгина $N(t)$ нинг кичик қийматларида ҳамда P ва S вақт бўйича бир хил қонуният асосида ўсиб борсагина ўринли бўлади. $N(t)$ нинг ўсиши билан (1) формулада ташлаб юборилган ҳадлар сезиларли қийматларга эга бўлади, хусусан иккиламчи рекламанинг таъсири кучаяди. Шунинг учун $N(t)$ функция (3) формуладагига нисбатан вақт бўйича тез ўсувчи функция бўлиб қолиши мумкин. $N(t)$ миқдорнинг ўзгаришидаги бу чизиқсиз эффект харажатларнинг ўзгармас темпда ўсишида реклама компаниясининг бошланғич босқичидаги молиявий муваффақиятсизлигини компенсация қилиш имконини беради.

Ушбу тасдиқни (1) тенгламанинг хусусий ҳоли, яъни $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ коэффициентлар ўзгармас бўлганда изоҳлаймиз. Қуйидаги

$$\overline{N} = \alpha_1 / \alpha_2 + N$$

белгилаш оркали (1) тенглама

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 \overline{N}\left(\overline{N}_0 - \overline{N}\right), \qquad \overline{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0 \tag{4}$$

кўринишга келади. Ушбу тенгламани ечими қуйидагидан иборат:

$$\overline{N}(t) = \left[1 + \left(\overline{N}_0\, \alpha_2/\alpha_1 - 1\right)\cdot \exp\left(-\alpha_2 t \overline{N}_0\right)\right]^{-1}. \tag{5}$$

Бунда $\overline{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2$. Шундай қилиб, $N(0) = 0$, яъни бошланғич шарт бажарилмоқда. (4) дан кўриниб турибдики, $\overline{N}(t)$ функциянинг ҳосиласи, хусуан $N(t)$ функция $t > 0$ бўлганда бошланғич қийматларидан катта бўлиши мумкин ($\overline{N}_0 > 2\alpha_1/\alpha_2$ ёки $N_0 > \alpha_1/\alpha_2$ шартларда). $\overline{N} = \overline{N}_0 / 2$, $N = (\alpha_1/\alpha_2 + N_0)/2$ қийматларда $\overline{N}(t)$ функциянинг ҳосиласи максимумга эришади:

$$\left(\frac{d\overline{N}}{dt}\right)_m = \left(\frac{dN}{dt}\right)_m = \alpha_2 \frac{\overline{N}_0^{\,2}}{4} = \alpha_2 \frac{\left(\alpha_1/\alpha_2 + N_0\right)^2}{4}.$$

Бу вақтга келиб вақт бирлиги ичида олинадиган жорий фойда қуйидагига тенг:

$$P_m = p\frac{dN}{dt} = p\alpha_2 \frac{\left(\alpha_1/\alpha_2 + N_0\right)^2}{4}.$$

P_m жорий фойдадан бошланғич жорий фойда $P_0 = p\left(dN/dt\right)_{t=0} = \alpha_1 N_0$ ни айириб, қуйидагига эга бўлиш мумкин:

$$P_m - P_0 = p\,\frac{\left(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0\right)^2}{4}\,.$$

Бундан кўриниб турибдики, бошланғич жорий фойда ва максимал жорий фойданинг фарқи етарли даражада сезиларли бўлиши мумкин.

(4) тенгламадан яна шуни таъкидлаш мумкинки, кандайдир вақтдан бошлаб рекламани давом эттириш фойдасиз бўлиб колади. Ҳакикатдан ҳам, $\overline{N}(t)$ нинг N_0 га яқин қийматларида (4) тенгламани

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 N_0\left(\overline{N}_0 - \overline{N}\right) \tag{6}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг ечими $t \to \infty$да секин экспоненциал қонун бўйича $\overline{N}_0$ чекли қийматга ($N(t)$ функция эса N_0 га) интилади. Вақт бирлиги ичида унча кўп бўлмаган сондаги янги харидорлар пайдо бўлади ва товарни сотишдан тушаётган фойда ихтиёрий шартларда ҳам давом этаётган харажатларни қопламай қолади.

Differentsial tenglamalarni taqribiy usullar bilan yechishda quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi: $Au = f$,

Bu yerda $A = (a_{ij})$ - tartibi N bo'lgan kvadrat matritsa, $u = (u_1, u_2, ..., u_N)^T$ - noma'lum, $f = (f_1, f_2, ..., f_N)^T$ - berilgan vektor p.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг икки хил усули мавжуд:

1) тўғри ёки “аниқ” усуллар;

2) итерацион усуллар ёки кетма-кет яқинлашишлар усули.

Математик физика тенгламаларини аппроксимация қилиш натижасида айирмали тенгламалар ҳосил бўлади. Бунда тўрда, яъни дискрет нуқталар тўпламида берилган икки ёки уч ўзгарувчили функцияни аниқлашга тўғри келади. Ҳисоблаш тўри ўн минглаб, ҳаттоки юз минглаб тугун нуқталардан ташкил топган бўлиши мумкин. Тўр функция қийматларини аниқлаш учун ҳосил бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар (айирмали тенгламалар) системаси 2 ҳолат орқали алоҳида характерланади:

1) чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг A матрицаси махсус кўринишга (ноль қиймат қабул қилувчи кўпгина элементларга) эга;

2) тенгламалар системасини ташкил этувчи тенгламалар сони жуда катта (ўртача $10^4 - 10^5$ га тенг).

Айирмали тенгламаларга мисоллар. Арифметик прогрессия формуласи ҳадлари учун ўринли бўлган $a_{k+1} = a_k + d$ ёки $a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} = 0$ тенгламалар айирмали тенгламалардир. Бу ерда $a_k = a(k)$, $k = 1,2,3,\ldots$ яъни, аргумент k бутун қийматларни қабул қилади.

Энди, аргументи бутун қийматларни қабул қилувчи функцияни қараймиз

$$y(i), \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

i нуқтада қуйидаги айирмаларни ёзамиз:

ўнг айирма $\Delta y_i = y(i+1) - y(i)$,

чап айирма $\nabla y_i = y(i) - y(i-1)$.

Одатда $y_i = y(i)$ белгилаш қабул қилинган. У ҳолда

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \qquad \nabla y_i = y_i - y_{i-1}.$$

Бу ифодаларни биринчи тартибли ҳосилани формал аналоги сифатида қараш мумкин. Иккинчи тартибли айирмани қараймиз

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

$\Delta y_{i-1} = \nabla y_i$ эканлигини қайд этиш лозим. Ҳақиқатдан ҳам, тенгликнинг ҳар икки томони ҳам $y_i - y_{i-1}$ га тенг. Чап айирмали операторни қўллаш ўнг айирмали операторни бир бирлик чап нуқтага қўллаш билан тенг кучли, яъни

$$|\Delta\nabla y_i = \Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}.$$

Худди шунингдек, $\Delta^m y_i$ аниқланади

$$\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i).$$

Δ операторни ҳар бир марта қўллаганда ўнг томондан яна битта нуқта айирмали ифодада иштирок этади. Δ операторни m марта қўллаб, функциянинг $i, i+1, \ldots, i+m$ нуқталардаги $y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+m}$ қийматларидан ташкил топган $\Delta^m y_i$ ни ҳосил қилиш мумкин.

Турли тартибдаги айирмалар иштирок этувчи айирмали тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\alpha_0 \Delta^m y_i + \alpha_1 \Delta^{m-1} y_i + \ldots + \alpha_{m-1} \Delta y_i + \alpha_m y_i = f_i,$$

Бу ерда $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ - коэффициентлар бўлиб, $\alpha_0 \neq 0$. Бу тенглама бутун аргументнинг функцияси бўлган номаълум функция - y_i га нисбатан *m – чи тартибли айирмали тенглама дейилади.* Бу айирмали тенглама m – чи тартибли қуйидаги

$$\alpha_0 \frac{d^m u}{dx^m} + \alpha_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \ldots + \alpha_{m-1} \frac{du}{dx} + \alpha_m u = f, \qquad \alpha_0 \neq 0.$$

дифференциал тенгламанинг аналогидир. Дифференциал тенгламанинг коэффициентлари x аргументнинг функцияси бўлгани каби айирмали тенгламанинг коэффициентлари $\alpha_m = \alpha_m(i)$ лар i га боғлиқ бўлади.

Айирмали тенгламалар қаердан пайдо бўлади деган ҳақли савол пайдо бўлади. Дифференциал тенгламалар билан ифодаланувчи техник ва математик масалалар мавжуд. Бундай масалаларни айирмали усуллар билан ечиш айирмали тенгламаларга олиб келади.

Оддий дифференциал тенгламага соддагина мисол келтирамиз.

$$\frac{du}{dx} = f(x)$$

дифференциал тенгламани ечиш талаб этилсин. Бу тенгламадаги ҳосилани тақрибан айирмали ифода билан алмаштириш мумкин:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} \approx \frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h},$$

бу ерда $h>0$ - x_i ва x_i+h нуқталар орасидаги масофа. Агар $x_i+h=x_{i+1}$, $u(x_i)=u_i$, $u(x_{i+1})=u_{i+1}$ белгилашлар киритсак, у ҳолда

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} \approx \frac{\Delta u_i}{h} = \frac{u_{i+1}-u_i}{h}.$$

$h \to 0$ да бу айирмали ифода du/dx га интилади. Шуни таъкидлаш лозимки, бундай алмаштириш ягона, яъни бир қийматли эмас – чап айирмани ҳам ишлатиш мумкин эди:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} \approx \frac{\nabla u_i}{h} = \frac{u_i-u_{i-1}}{h}.$$

Ўнг ва чап айирмаларни йиғиндисининг ярми марказий айирмани ифодалайди:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_i} \approx \frac{\Delta u_i+\nabla u_i}{2h} = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}.$$

Ҳамма ерда $\approx$ белгиси мослик ёки аппроксимацияни билдиради. $\frac{\Delta u_i}{h} = \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$ ифода $\frac{du}{dx}$ ҳосилани аппроксимация қилади дейилади.

Шундай қилиб,

$$\frac{\Delta y_i}{h} = f_i,\ f_i = f(x_i)$$

тенгламани қараймиз. Таърифга кўра бу биринчи тартибли айирмали тенгламадир. Уни қуйидагича ёзиш мумкин

$$\Delta y_i = hf_i \quad \text{ёки} \quad y_{i+1} = y_i + hf_i.$$

Биринчи тартибли дифференциал тенгламани алмаштиришда иккинчи тартибли айирмали тенгламага ҳам эга бўлиш мумкин. Масалан,

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + 0{,}5h^2u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + O(h^4),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + 0{,}5h^2u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + O(h^4).$$

Бу икки ифодани қўшиб,

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u_i'' + O(h^2)$$

ифодага эга бўлиш мумкин. Бу ерда $O(h^2)$ ни ташлаб юбориб, u_i'' учун тақрибий

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{\Delta^2 u_{i-1}}{h^2} = \frac{\Delta\nabla u_i}{h^2}$$

ифода ҳосил қилиш мумкин.

u_{i+1} ни x_i нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйилмаси $u_{i+1} = u_i + hu_i' + 0{,}5h^2u_i'' + O(h^3)$ да u_i'' ни иккинчи тартибли айирмали ифода билан алмаштириб,

$$u_i' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{h}{2}\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

яъни иккинчи тартибли айирмали тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Буни иккинчи тартибли айирмали тенглама эканлигини қуйидагича исботлаш мумкин. Охирги формулада u_i' ни f_i га алмаштириб, $O(h^2)$ ҳадни ташлаб юбориб, ҳосил бўлган тенгламани $2h$ га кўпайтирамиз. У ҳолда биринчи тартибли дифференциал тенглама $du/dx = f$ ўрнига қуйидаги иккинчи тартибли айирмали тенгламага эга бўламиз

$$\Delta\nabla y_i - 2\Delta y_i = 2hf_i.$$

Чегаравий масалалар.

Энди иккинчи тартибли айирмали тенгламаларни кўриб чиқамиз. Иккинчи тартибли айирмали тенгламаларни қуйидаги қулайроқ кўринишда ёзиш қабул қилинган:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i \qquad (1.24)$$

$$i = 1,2,3\ldots \quad A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0.$$

Бу тенглама иккинчи тартибли тенглама эканлигини кўрсатамиз. $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ белгилашдан фойдаланамиз. У ҳолда (1.24) тенглама

$$B_i\Delta y_i - A_i\Delta y_{i-1} - (C_i - B_i - A_i)y_i = -F_i \qquad (1.25)$$

кўринишга келади.

$$\Delta y_i - \nabla y_i = \Delta y_i - \Delta y_{i-1} = \Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1},$$

$$\Delta y_{i-1} = -\Delta^2 y_{i-1} + \Delta y_i$$

қийматларни аниқлаш мумкин. Шундай қилиб, y_0 ва y_1 қийматлар берилганда масаланинг ечими мавжуд ва ягонадир. Аммо, иккинчи тартибли тенглама учун математик физикада чегаравий масалалар, яъни қўшимча шартлар қўшни бўлмаган $i=0$ ва $i=N$ да

$$y_0=\mu_1, \qquad y_N=\mu_2$$

қийматлар берилганда $0<i<N$ нуқталар учун y_i қийматларни аниқлаш анча қизиқарлидир (μ_1,μ_2 - берилган сонлар).

$i=0$ ва $i=N$ нуқталарда нафақат функциянинг қийматлари ва биринчи тартибли айирманинг қиймати, балки функция қиймати ва биринчи тартибли айирманинг чизиқли комбинацияси берилиши ҳам мумкин. Умумий ҳолда бундай чегаравий шартларни

$$y_0=\chi_1 y_1+\mu_1,\ y_N=\chi_2 y_{N-1}+\mu_2 \tag{1.26}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (1.26) тенгламанинг биринчисига

$$y_1=y_0+\Delta y_0$$

тенгликни қўйсак, қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\chi_1\Delta y_0-(1-\chi_1)y_0=\mu_1. \tag{1.27}$$

$\chi_1=0$ бўлган ҳол $i=0$ нуқтада функциянинг қиймати y_0 берилганлигини англатади (бу эса *биринчи турдаги чегаравий шарт*). Агар $\chi_1=1$ бўлса, у ҳолда Δy_0 нинг қиймати берилган бўлади (бу эса *иккинчи турдаги чегаравий шарт*). Агар $\chi_1\neq 0,\ \chi_1\neq 1$ бўлса, $i=0$ нуқтада функция ва биринчи тартибли айирманинг чизиқли комбинацияси берилган бўлади (бу эса *учинчи турдаги чегаравий шарт*).

Амалиётда айирмали чегаравий масалалар катта аҳамиятга эга. Ҳисоблаш математикасининг энг катта ютуғи математик физиканинг кўпчилик масалаларини ҳисоблашда ҳар бир қадамда (1.6) айирмали тенгламалар системасини (1.26) чегаравий шарт билан ечишдан иборат. Бу масала классик масала бўлиб, ҳисоблаш усуллари назариясининг кўпгина мураккаб масалалари (1.24), (1.26) чегаравий масалага келтирилади. Бундай тенгламалар системасининг матрицаси уч диагоналлидир. Бу матрица қуйидаги кўринишга эга.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\chi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_i & -C_i & B_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N-1} & -C_{N-1} & B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\chi_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Агар иккинчи ёки учинчи турдаги чегаравий шартлар берилган бўлса, бу матрицанинг тартиби $N+1$ га тенг бўлади. Биринчи турдаги чегаравий шартлар берилган бўлса, матрица $(N-1)$ - тартибга эга бўлади. Бу матрицанинг фақатгина учта диагоналида, яъни бош диагоналда ҳамда бош диагоналнинг пастки ва юқорисидаги қўшни диагоналларда элементлар нолдан фарқли бўлади. Бундай матрицага эга бўлган чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечишнинг самарали усули – Гаусс усули асосида (1.24), (1.26) айирмали чегаравий масалани ҳайдаш усули билан самарали ечиш мумкин.

Мисол. $y'' + xy' - 0{,}5\,\dfrac{y}{x} = 1$ тенгламанинг $\begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1, \\ y(2{,}3) = 2{,}15 \end{cases}$ шартларни қаноатлантирувчи ечимини ҳайдаш усули ёрдамида топинг.

Ечиш. $[2;\,2{,}3]$ кесмани $h = 0{,}05$ қадам билан бўлиб, тўр ҳосил қиламиз ва тўртта $x_0 = 2;\ x_1 = 2{,}05;\ x_2 = 2{,}1;\ x_3 = 2{,}15;\ x_4 = 2{,}2;\ x_5 = 2{,}25;\ x_6 = 2{,}3$ тугун нуқталарни ҳосил қиламиз. $x_0 = 2$ ва $x_6 = 2{,}3$ нуқталар чегаравий қолган нуқталар эса ички нуқталар деб аталади. Берилган тенгламани ички нуқталарда айирмали тенглама билан алмаштирамиз:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i\,\frac{y_{i+1} - +y_{i-1}}{2h} - 0{,}5\,\frac{y_i}{x_i} = 1,\ i = \overline{1,5}.$$

Чегаравий шартлардан эса

$$\begin{cases} y_0 + 2\dfrac{-y_0 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = 1, & (i = 0), \\ y_6 = 2{,}15, \quad (i = 6) \end{cases}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз ва қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 2,\ A = 1,\ \beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ B = 2{,}15,\ p_i = x_i,\quad q_i = -0{,}5/x_i,\ f_i = 1,\ i = \overline{0,6}.$

Ҳайдаш усулининг тўғри йўлида ҳисобланадиган коэффициентлар

$$m_i = \frac{2h^2 q_i - 4}{2 + hp_i},\quad n_i = \frac{2 - hp_i}{2 + hp_i},\quad F_i = \frac{2f_i}{2 + hp_i}\ \left(i = \overline{1,5}\right),$$

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1},\quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1},\ c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}},\ d_i = F_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}\quad \left(i = \overline{1,5}\right).$$

Тўғри йўл бажарилиб, юқоридаги коэффициентлар топилгандан сўнг, тескари йўлда номаълум функция қийматлари қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$y_6 = \frac{Bh + \beta_1 c_5 d_5}{\beta_0 h + \beta_1 (c_5 + 1)},\quad y_i = c_i (d_i - y_{i+1})\quad \left(i = \overline{5,0}\right).$$

Бу ерда

$$m_i = -\frac{4 + \dfrac{0{,}0025}{x_i}}{2 + 0{,}05x_i},\ n_i = \frac{2 - 0{,}05x_i}{2 + 0{,}05x_i},\quad F_i = \frac{2}{2 + 0{,}05x_i}\ \left(i = \overline{1,5}\right),$$

$$c_0 = \frac{2}{0.05 - 2} = -1.02564;\quad d_0 = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025.$$

Ҳисоблашларни қуйидаги жадвалда келтирамиз:

i	x_i	m_i	n_i	h^2F_i	c_i	d_i	y_i
0	2.00	-	-	-	-1.02564	0.025000	2.2490
1	2.05	-1.903077	0.902497	0.002378	-1.02308	0.095519	2.2178
2	2.10	-1.900803	0.900238	0.002375	-1.02063	0.025878	2.1933
3	2.15	-1.898535	0.897983	0.002372	-1.01830	0.026090	2.1748
4	2.20	-1.896273	0.895734	0.002370	-1.01611	0.026167	2.1618

5	2.25	-1.894017	0.893491	0.002367	-1.01406	0.026123	2.1537
6	2.30	-	-	-	-	-	2.15

Жавоб:

x_i	y_i	x_i	y_i
2.00	2.249	2.20	2.162
2.05	2.218	2.25	2.154
2.10	2.193	2.30	2.150
2.15	2.175		

Тўр ва тўр функциялар. Ҳар хил соҳаларда тўр қуриш.

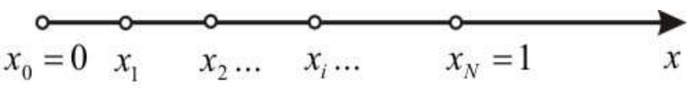
Берилган дифференциал тенгламани тақрибий тавсифловчи айирмали схема тузиш учун қуйидаги икки босқични амалга ошириш керак.

1. Аргументнинг узлуксиз ўзгариш соҳасини дискрет соҳага алмаштириш керак.
2. Дифференциал операторни бирор айирмали оператор билан, шунингдек, чегаравий ва бошланғич шартларни уларнинг айирмали анологи билан алмаштириш керак.

Ушбу процедура амалга оширилгандан кейин алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Шундай қилиб, дастлабки берилган (чизиқли) дифференциал тенгламани сонли ечиш масаласи алгебраик тенгламалар системасининг ечимини топиш масаласига келтирилади.

У ёки бу математик физика масаласини сонли ечишда аргументнинг аниқланиш соҳасидаги барча қийматлар учун сонли ечимни аниқлашнинг имкони йўқ. Шу сабабли аргументнинг аниқланиш соҳасидан қандайдир чекли нуқталар тўпламини ажратиб олиш ва тақрибий ечимларни мана шу нуқталардагина излаш лозим бўлади. Бундай чекли нуқталар тўплами *тўр дейилади.* Ажратиб олинган нуқталар *тўрнинг тугун нуқталари дейилади.* Демак, тўрнинг тугун нуқталари ҳисоблаш тўрини ташкил этувчи нуқталардир.

Тўрнинг тугун нуқталарида аниқланган функциялар *тўр функциялар дейилади.* Шундай қилиб, аргументнинг узлуксиз ўзгариш соҳасини тўр билан, яъни аргументнинг дискрет ўзгариш соҳаси билан алмаштирдик. Бошқача қилиб айтганда, биз дифференциал тенглама ечими ётган фазони тўр функциялар фазоси билан аппроксимация қилдик.



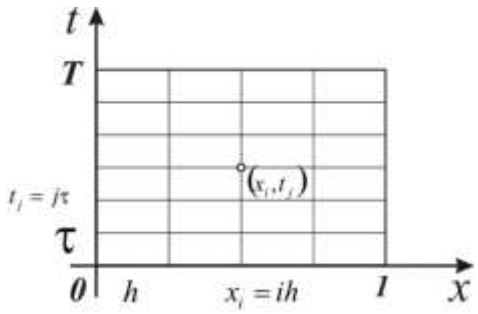
1-расм.

1-мисол.Кесмада текис тўр қуриш. Бирлик кесма $[0,1]$ ни N та тенг бўлакка бўламиз (1-расм).

Иккита қўшни тугун нуқталар орасидаги масофа *тўр қадами дейилади.* Бўлиниш нуқталари $x_i = ih$ *тўрнинг тугун нуқталари дейилади.* Кесмадаги тугун нуқталар (тўрнинг фақатгина ички тугун нуқталари) тўплами $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \ldots, N-1\}$ ушбу кесмадаги тўрни ташкил қилади. Бу тўпламга $x_0 = 0$, $x_N = 1$ чегаравий нуқталарни ҳам киритсак, ҳосил бўлган тўр $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \ldots, N-1\}$ каби белгиланади.

$[0,1]$ кесмада узлуксиз аргументнинг функцияси $y(x)$ ўрнига дискрет аргумент функцияси $y_h(x_i)$ ни қараймиз. Бу функциянинг қиймати тўрнинг x_i тугун нуқталарида ҳисобланади, функциянингўзи эса тўр қадами h га нисбатан параметр сифатида боғлиқ бўлади.

2-мисол.Текисликда текис тўр. Иккиаргументли бўлган $u(x,t)$ функциялар тўпламини қараймиз. Аниқланиш соҳаси сифатида $\overline{D} = \{0 \le x \le 1,\ t \le x \le T\}$тўғри тўртбурчакни танлаймиз (2-расм). x ва t ўқларидаги $[0,1]$ кемаларни мос ҳолда N_1ваN_2 қисмларга бўламиз. Бўлиниш нуқталаридан бу ўқларга мос ҳолда параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу ўқларни кесишиши натижасида $\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) \in \overline{D}\}$ҳисоблаш тўрини ташкил қилувчи (x_i, t_j) тугун нуқталарга эга бўламиз.



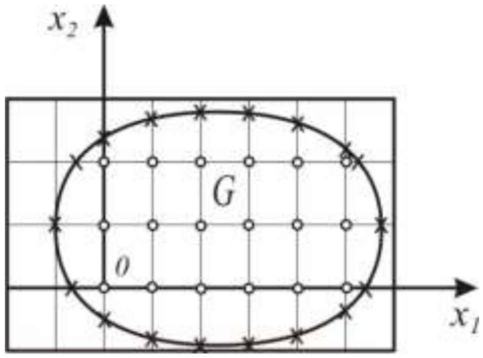
2-расм.

Ҳосил бўлган тўр x ва t ўқлари бўйича мос ҳолда hва τ қадамларга эга.Ораларидаги масофаh ёки τ га тенг бўлган бир тўғри (горизонтал ёки вертикал) чизиқда ётувчи нуқталар тўрнинг қўшни тугун нуқталари дейилади.

3-мисол. Кесмада нотекис тўр. $0 \le x \le 1$ кесмани қараймиз. $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < 1$ ихтиёрий нуқталарни киритиб, бу кесмани N қисмга бўламиз. $\{x_i, i = 0, \ldots, x_0 = 0, x_N = 1\}$нуқталар тўплами $\overline{\omega}_h[0,1]$ нотекис тўрни ҳосил қилади. Қўшни тугун нуқталар орасидаги масофа тўрнинг қадами бўлиб, у тугун нуқтанинг номери i га боғлиқ, яъни тўр қадами ҳам ўз навбатида тўр функциядир. Тўрнинг қадамлари қуйидаги шартни қаноатлантиради:

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = 1.$$

4-мисол. Икки ўлчовли соҳада тўр қуриш.



3-расм.

$x=(x_1,x_2)$ текисликда чегараси Γ бўлган мураккаб шаклла эга бўлган G соҳа берилган бўлсин. $x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $h_1 > 0$ ва $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $h_1 > 0$ тўғри чизиқлар ўтказамиз. У ҳолда $x=(x_1,x_2)$ текисликда тугун нуқталари $(i_1 h_1, i_2 h_2)$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ бўлган тўр ҳосил бўлади. Бу тўр Ox_1 ва Ox_2 ўқларининг ҳар бири бўйича нотекисдир. Бизни фақатгина Γ чегарали $\overline{G} = G + \Gamma$ соҳага тегишли бўлган нуқталаргина қизиқтиради. G соҳанинг ичига тушган $(i_1 h_1, i_2 h_2)$ тугун нуқталар *ички тугун нуқталар дейилади,* ички нуқталар тўплами ω_h билан белгилаймиз (3-расм).

Γ чегара билан $x_1^{(i_2)} = i_1 h_1$ ва $x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ тўғри чизиқларнинг кесишидан ҳосил бўлган нуқталар *чегаравий нуқталар дейилади,* барчачегаравий нуқталар тўпламини γ_h билан белгилаймиз. 3-расмда $\times$ белги билан чегаравий нуқталар, $\circ$ белги билан ички тугун нуқталар белгиланган. 3-расмдан кўриниб турибдики, шундай чегаравий нуқталар ҳам мавжудки, улар ўзларига қўшни бўлган ички нуқталардан h_1 ва h_2 дан кичик бўлган масофаларда турибди. Тўр текисликда x_1 ва x_2 ўқларнинг ҳар бири бўйича текис бўлса ҳам, аммо $\overline{G}$ соҳа учун $\overline{\omega} = \omega_h + \gamma_h$ тўр чегаралар атрофида нотекисдир.

Шундай қилиб, x аргументнинг ўзгариш соҳаси $\overline{G}$ ни $\overline{G}$ соҳага тегишли x_i чекли нуқталар тўплами $\overline{\omega}_h$ тўр билан алмаштирдик. Энди $x \in \overline{G}$

узлуксиз аргументнинг функцияси $u(x)$ ўрнига $\overline{\omega}_h=\{x_i\}$ тўрнинг x_i нуқталарифункцияси бўлган $y(x_i)$ тўр функцияни қараймиз. Узлуксиз $x\in\overline{G}$ аргументнинг $u(x)$ функцияси бирор H_0 функционал фазонинг элементи бўлса, $y(x_i)$ тўрли функция эса H_h дискрет функциялар фазосининг элементи бўлади. Шундай қилиб, айирмали схемалар усулини қўллаб H_0 фазони $y(x_i)$ тўрли функциялар фазоси H_h билан алмаштирдик. $\overline{\omega}_h$ тўрлар тўпламини қараб, h параметрга боғлиқ бўлган $\{H_h\}$ тўрли функциялар фазосини ҳосил қиламиз. H_h чизиқли фазода дастлабки H_0 функционал фазодаги $\|\cdot\|_0$норманинг аналоги бўлган $\|\cdot\|_h$ норма киритилади. $0\le x\le 1$ кесмада қурилган $\omega_h=\{x_i=i\,h\}$ тўрли H_h фазода нормаларни қуйидагича танлаш мумкин:

1) С фазодаги норманинг тўрли аналоги
$\|y\|_C=\max\limits_{x\in\omega_h}|y(x)|$ ёки $\|y\|_C=\max\limits_{0\le i\le N}|y_i|$.

2) L_2 фазодаги норманинг тўрли аналоги
$\|y\|_h=\left(\sum\limits_{i=1}^{N-1}y_i^2\,h\right)^{1/2}$ ёки $\|y]|_h=\left(\sum\limits_{i=1}^{N}y_i^2\,h\right)^{1/2}$.

Келгусида биз u_h тўрли функцияга эга бўлиб, H_h фазонинг элементи бўлган y_h-u_h айирмани тадқиқ қиламиз. y_h айирмали схема ечимининг дастлабки дифференциал тенглама ечими u га яқинлашиши $\|y_h-u_h\|_h$ сон билан боғлиқ бўлади, бу ерда $\|\cdot\|_h$ H_h фазодаги норма. Шунинг учун $\|\cdot\|_h$ норма $\|\cdot\|_0$нормани H_0 фазонинг ихтиёрий u элементи учун $\lim\limits_{h\to 0}\|u_h\|_h=\|u\|_0$ маънода аппроксимация қилиши лозим. Ушбу шартни H_h ва H_0 фазодаги нормаларнинг мослашув (келишув) шарти деб атаймиз.

Оддий дифференциал операторларнинг айирмали аппроксимацияси.

L оператор $\vartheta=\vartheta(x)$ функцияга таъсир этувчи дифференциал оператор бўлсин. $L\vartheta$ да иштирок этувчи ҳосилаларни айирмали ҳосилалар билан алмаштириб, $L\vartheta$ифода ўрнига ϑ_h тўр функция шаблонини ташкил этувчи тугун нуқталардаги қийматларининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлган $L_h\vartheta_h$ айирмали ифодага эга бўламиз:

$$L_h\vartheta_h(x)=\sum_{\xi\in Ш(x)}A_h(x,\xi)\vartheta_h(\xi)$$

ёки

$$\left(L_h\vartheta_h\right)_i = \sum_{x_i \in Ш(x_i)} A_h\left(x_i, x_j\right)\vartheta_h\left(x_j\right)$$

бу ерда $A_h(x,\xi)$ - коэффициентлар, h - тўр қадами, $Ш(x)$ - x нуқтадаги шаблон. $L\vartheta$ ни $L_h\vartheta_h$ билан бундай алмаштириш *дифференциал операторни айирмали оператор билан аппроксимация қилиш (ёки* L *операторни айирмали аппроксимацияси) дейилади.*

L операторни айирмали аппроксимацияси одатда аввал локал, яъни фазонинг фиксирланган ихтиёрий x нуқтаси учун ўтказилади. Агар $\vartheta(x)$ узлуксиз функция бўлса, $\vartheta_h(x) = \vartheta(x)$ бўлади. Дифференциал оператор L ни айирмали аппроксимация қилишдан олдин шаблонни танлаш лозим бўлади.

1-мисол. $L\vartheta = d\vartheta / dx$.

Ox ўқида қандайдир x нуқтани фиксирлаймиз. $x-h$ ва $x+h$ ($h>0$) нуқталарни оламиз. $L\vartheta$ аппроксимация қилиш учун қуйидаги ифодалардан ихтиёрий биттасидан фойдаланиш мумкин:

$$L_h^+\vartheta \equiv \frac{\vartheta(x+h)-\vartheta(x)}{h} \equiv \vartheta_x, \qquad (1.28)$$

$$L_h^-\vartheta \equiv \frac{\vartheta(x)-\vartheta(x-h)}{h} \equiv \vartheta_{\bar{x}}. \qquad (1.29)$$

(1.28) ифода ўнг айирмали ҳосила (уни ϑ_x билан белгилаймиз), (1.29) ифода эса чап айирмали ҳосила (уни $\vartheta_{\bar{x}}$ билан белгилаймиз) деб аталади. $L_h^+\vartheta$ ва $L_h^-\vartheta$ айирмали ифодалар иккита нуқтада аниқланган (яъни икки нуқтали x, $x+h$ ва $x-h$, x шаблонлардан фойдаланилган).

Бундан ташқари $d\vartheta / dx$ ҳосилани айирмали аппроксимацияси сифатида (1.28) ва (1.29) ифодаларнинг чизиқли комбинациясидан ҳам фойдаланиш мумкин:

$$L_h^{(\sigma)}\vartheta \equiv \sigma\vartheta_x + (1-\sigma)\vartheta_{\bar{x}}, \qquad (1.30)$$

бу ерда σ - ихтиёрий ҳақиқий сон. Хусусан, $\sigma = 0{,}5$ да марказий (икки томонлама) айирмали ҳосилага эга бўлиш мумкин:

$$\vartheta_{\overset{0}{x}} = \frac{1}{2}\left(\vartheta_x - \vartheta_{\bar{x}}\right) = \frac{\vartheta(x+h)-\vartheta(x-h)}{2h}. \qquad (1.31)$$

Шундай қилиб, $L\vartheta = \vartheta'$ ҳосилани аппроксимация қилувчи айирмали тенгламалар тўпламини ёзиш мумкин экан. У ёки бу айирмали аппроксимациядан фойдаланилганда қандай хатоликка йўл қўйиш мумкин ва $h \to 0$ да x нуқтада $\psi(x) = L_h\vartheta(x) - L\vartheta(x)$ айирма ўзини қандай тутади деган савол пайдо бўлиши табиий.

$\psi(x) = L_h\vartheta(x) - L\vartheta(x)$ миқдорга x нуқтада $L\vartheta$ нинг *айирмали аппроксимация хатолиги дейилади.* x нуқтанинг $(x-h_0, x+h_0)$ атрофида $\vartheta(x)$ функция етарлича силлиқ ва $h < h_0$ деб ҳисоблаб (h_0 - фиксирланган сон), $\vartheta(x)$ ни Тейлор қаторига ёямиз

$$\vartheta(x \pm h) = \vartheta(x) \pm h\vartheta'(x) + \frac{h^2}{2}\vartheta''(x) + O(h^3).$$

Бу ёйилмаларни (1.28), (1.29) ва (1.31) ифодаларга қўйиб, қуйидагиларга эга бўлиш мумкин:

$$\vartheta_x = \frac{\vartheta(x+h) - \vartheta(x)}{h} = \vartheta'(x) + \frac{h}{2}\vartheta''(x) + O(h^2),$$

$$\vartheta_{\bar{x}} = \frac{\vartheta(x) - \vartheta(x-h)}{h} = \vartheta'(x) + \frac{h}{2}\vartheta''(x) + O(h^2), \tag{1.32}$$

$$\vartheta_{\overset{0}{x}} = \frac{1}{2}(\vartheta_x - \vartheta_{\bar{x}}) = \frac{\vartheta(x+h) - \vartheta(x-h)}{2h} = \vartheta'(x) + O(h^2).$$

Булардан кўриниб турибдики,

$$\psi = \vartheta_x - \vartheta'(x) = O(h),$$

$$\psi = \vartheta_{\bar{x}} - \vartheta'(x) = O(h),$$

$$\psi = \vartheta_{\overset{0}{x}} - \vartheta'(x) = O(h^2).$$

V - x нуқтанинг $h < h_0$ бўлганда L_h операторни ўз ичига олувчи $Ш(x, h_0)$ атрофида берилган ва етарлича силлиқ $\vartheta \in V$ функциялар синфи бўлсин.

L_h оператор L дифференциал операторни x нуқтада m -$(m > 0)$ *тартиб билан аппроксимация қилади дейилади*, агарда

$$\psi(x) = L_h\vartheta(x) - L\vartheta(x) = O(h^m)$$

тенглик ўринли бўлса.

Шундай қилиб, чап ва ўнг айирмали ҳосилалар $L\vartheta = \vartheta'$ ҳосилани биринчи тартиб билан, марказий айирмали ҳосила эса иккинчи тартиб билан аппроксимация қилар экан.

2-мисол. $L\vartheta = \vartheta'' = \dfrac{d^2\vartheta}{dx^2}$.

Иккинчи тартибли ҳосилани айирмали аппроксимациялашда $(x-h,x,x+h)$ нуқтадан, яъни уч нуқтали шаблондан фойдаланиш мумкин. У ҳолда

$$L_h\vartheta=\frac{\vartheta(x+h)-2\vartheta(x)+\vartheta(x-h)}{h^2}. \qquad (1.33)$$

x нуқтада ўнг айирмали ҳосила $x+h$ нуқтадаги чап айирмали ҳосилага тенг эканлигини, яъни $\vartheta_x(x)=\vartheta_{\bar{x}}(x+h)$ ни эътиборга олсак, (1.33) ни қуйидагича ёзиш мумкин

$$L_h\vartheta=\frac{\vartheta_x(x)-\vartheta_{\bar{x}}(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\vartheta_{\bar{x}}(x+h)-\vartheta_{\bar{x}}(x)\right]=\vartheta_{\bar{x}x}(x). \qquad (1.34)$$

$\vartheta(x)$ функцияни Тейлор қаторига ёйиб, аппроксимация хатолигининг тартиби иккига тенглигини, яъни

$$\vartheta_{\bar{x}x}-\vartheta''(x)=O(h^2)$$

эканлигини кўрсатиш мумкин.

3-мисол. $L\vartheta=\vartheta^{(IV)}$.

$(x-2h,\ x-h,\ x,\ x+h,\ x+2h)$ нуқталардан иборат шаблонни танлаймиз ва $L_h\vartheta=\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}$ ни аниқлаймиз. $\vartheta_{\bar{x}x}$ ни (1.33) формуладаги ифодасидан фойдаланиб, $\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}$ учун қуйидагига эга бўлиш мумкин:

$$L_h\vartheta=\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}=\frac{1}{h^2}\left[\vartheta_{\bar{x}x}(x+h)-2\vartheta_{\bar{x}x}(x)+\vartheta_{\bar{x}x}(x-h)\right]=.$$
$$=\frac{1}{h^4}\left[\vartheta(x+2h)-4\vartheta(x+h)+6\vartheta(x)-4(x-h)+\vartheta(x-2h)\right].$$

L_h айирмали оператор L дифференциал операторни

$$\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}-\vartheta^{(4)}=\frac{h^2}{6}\vartheta^{(6)}+O(h^4).$$

иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини кўрсатиш мумкин. Бунинг учун Тейлор қаторининг

$$\vartheta(x\pm kh)=\vartheta(x)+\sum_{s=1}^{7}\frac{(-1)^s k^s h^s}{s!}\frac{d^s\vartheta(x)}{dx^s}+O(h^8)$$

ёйилмасидан $k=1,2$ лар учун фойдаланиб ва $\vartheta(x+kh)+\vartheta(x-kh)$ йиғинди фақат жуфт даражалардан иборат эканлигини ҳисобга олинса, $\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}$ учун юқорида келтирилган формулага эга бўлиш мумкин.

Аппроксимация хатолиги $\psi = L_h\vartheta - L\vartheta$ ни h даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйишдан аппроксимация хатолиги тартибини оширишда фойдаланиш мумкин. Ҳақиқатдан ҳам,

$$\vartheta_{\bar{x}x} - \vartheta'' = \frac{h^2}{12}\vartheta^{(4)} + O\left(h^4\right) = \frac{h^2}{12}\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x} + O\left(h^4\right).$$

Агар $\left(x-2h,\ x-h,\ x,\ x+h,\ x+2h\right)$ нуқталардан иборат шаблонда

$$L_h'\vartheta = \vartheta_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12}\vartheta_{\bar{x}x\bar{x}x}$$

айирмали оператордан фойдаланилса, бу оператор $L\vartheta = \vartheta''$ ни тўртинчи тартиб билан аппроксимация қилади.

4-мисол. $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - a\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, t > 0$ тенгламани $t = 0$ да $u(x,0) = \psi(x), -\infty < x < +\infty$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи $u(x,t)$ ечимини топиш учун айирмали схема қуринг ва аппроксимация хатолигини баҳоланг.

Ечиш. $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ ҳосилани қуйидаги айирмали нисбатларнинг бири билан алмаштириш мумкин:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{(h)}(x,t+\tau) - u^{(h)}(x,t)}{\tau}; \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{(h)}(x,t) - u^{(h)}(x,t-\tau)}{\tau};$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{(h)}(x,t+\tau) - u^{(h)}(x,t-\tau)}{2\tau}.$$

Худди шунингдек $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ҳосилани

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u^{(h)}(x+h,t) - u^{(h)}(x,t)}{h}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u^{(h)}(x,t) - u^{(h)}(x-h,t)}{h};$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{u^{(h)}(x+h,t) - u^{(h)}(x-h,t)}{2h}$$

ифодаларнинг бири билан алмаштириш мумкин.

Айирмали схеманинг муҳим хоссаларидан бири, тўр нуқталарида айирмали схема ечимининг дифференциал масала ечимига яқинлигидир. Бунинг учун айирмали масала дифференциал масалага «яқин» бўлиши лозим. Ушбу «яқин»лик $\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} = \left\|L_h[u]_h - f^{(h)}\right\|_{F_h}$ миқдор билан баҳоланади, бу ерда $[u]_h$ - дифференциал масала ечимининг тўр тугун нуқталаридаги қиймати.

Энди берилган тенгламани қуйидаги айирмали схема билан алмаштирамиз:

$$\frac{u(x_m,t_{n+1})-u(x_m,t_n)}{\tau}-a\frac{u(x_{m+1},t_n)-u(x_m,t_n)}{h}=f_n,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots,\ n=0,1,2,\ldots\ldots$$

Аппроксимация тартибини аниқлаш учун қуйидаги тенгликдан фойдаланамиз:

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{u(x_m,t_{n+1})-u(x_m,t_n)}{\tau}-a\dfrac{u(x_{m+1},t_n)-u(x_m,t_n)}{h}-f(x_m,t_n),\\ u(x_m,t_0)-\psi(x_m),\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots,n=0,1,\ldots\end{cases}$$

Агар $-\infty<x<+\infty, t\geq 0$ соҳада $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ҳосилалар мавжуд бўлса,

$$u(x_m,t_{n+1})=u(x_m,t_n)+\frac{\tau}{1!}\frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_m,\tilde{t}_n)}{\partial t^2},$$

$$u(x_{m+1},t_n)=u(x_m,t_n)+\frac{h}{1!}\frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u(\tilde{x}_m,t_n)}{\partial x^2},\quad t_n\leq\tilde{t}_n\leq t_{n+1},\ x_m\leq\tilde{x}_m\leq x_{m+1}$$

тengликлардан фойдаланиб

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial t}+\dfrac{\tau}{2!}\dfrac{\partial u(x_m,\tilde{t}_n)}{\partial t}-a\dfrac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial x}-a\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 u(\tilde{x}_m,t_n)}{\partial x^2}-f(x_m,t_n),\\ u(x_m,t_0)-\psi(x_m),\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots,n=0,1,\ldots\end{cases}$$

ҳосил қиламиз.

$$\frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial t}-a\frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial x}=f(x_m,t_n),\quad u(x_m,t_0)=\psi(x_m)$$

эканлигиниэътиборгаолиб, қуйидагитенгликниоламиз:

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2 u(x_m,\tilde{t}_n)}{\partial t^2}-a\dfrac{h}{2}\dfrac{\partial^2 u(\tilde{x}_m,t_n)}{\partial x^2},\\ 0,\\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots,n=0,1,\ldots\end{cases}$$

$$f^{(h)}=\begin{cases}\varphi(x_m,t_n),\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots,n=1,2,\ldots,\\ \psi(x_m,t_n),\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\end{cases}$$

тўрли функция учун $\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} = \max_{m,n}\left|\varphi(x_m, t_n)\right| + \max_{m}\left|\psi(x_m)\right|$ нормани киритиб ва $-\infty < x < +\infty, t \geq 0$ да $\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \leq M_x^{(2)}, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \leq M_t^{(2)}$ деб фараз қилиб қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h} = \max_{m,n}\left|\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x_m, \tilde{t}_n)}{\partial t^2} - a\frac{h}{2}\frac{\partial^2 u(\tilde{x}_m, t_n)}{\partial x^2}\right| \leq \frac{\tau}{2}M_t^{(2)} + |a|\frac{h}{2}M_x^{(2)}.$$

Бу тенглик айирмали схема дифференциал масалани τ ва h бўйича биринчи тартиб билан аппроксимация қилишини кўрсатади.

5-**мисол.** Икки ўлчовликўчиш тенгламасини

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.1.1}$$

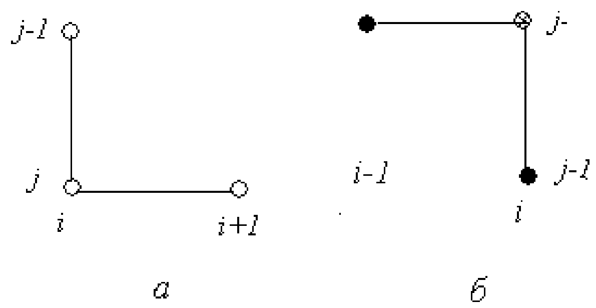
аппроксимация қилувчи Мак-Кормак схемаси қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\tilde{u}_{ij} = u_{ij}^n - \frac{\tau}{h_1}a\left(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n\right) - \frac{\tau}{h_2}b\left(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n\right); \tag{1.1.2}$$

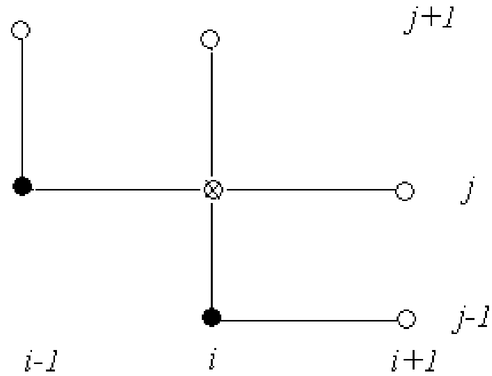
$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^n + \tilde{u}_{ij}\right) - \frac{1}{2}\frac{\tau}{h_1}a\left(\tilde{u}_{ij} - \tilde{u}_{i-1j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\tau}{h_2}b\left(\tilde{u}_{ij} - \tilde{u}_{ij-1}\right), \tag{1.1.3}$$

бу ерда $u_{ij}^n = u(ih_1, jh_2, n\tau)$, h_1, h_2 – мос равишда x, y ўқлари бўйича, τ - вақт бўйича қадам катталиги. (1.1.2)-(1.1.3) схеманинг n - қатлам шаблонини қуринг. Ушбу шаблон $x = x_i = ih_1$, $y = y_j = jh_2$ чизиқларининг бирортасига нисбатан симметрик бўладими?

Ечиш. Ушбу масалани икки усул билан ечиш мумкин. Биринчиси геометрик қуришга асосланади. Буни қаралаётган схема учун бажарамиз. n - қатлам (1.1.2) тенгламасининг шаблони (бу тенгламани “предиктор” схема деб аталади) 4,а-расмдаги каби бўлади. (1.1.3) тенглама (бу тенгламани “корректор” схема деб аталади) тўрда аниқланган функциянинг қиймати тильда билан белгиланган, унинг шаблони 4,б-расмда кўрсатилган. Энди 4,а-расмда кўрсатилган марказий (i, j) нуқтани 4, б-расмнинг барча нуқталарига жойлаштириб, Мак-Кормак схемасининг 5-расмда кўрсатилган n - қатлам шаблонини ҳосил қилиш мумкин. Ушбу расмдан кўринадики (1.1.2)-(1.1.3) Мак–Кормак схемаси $x = x_i$ чизиққа ҳам, $y = y_j$ чизиққа нисбаттан ҳам симметрик эмас.



4-расм. n - қатлам шаблони.



5-расм. (1.1.2)-(1.1.3) Мак-Кормак схемаси, n - қатлам шаблони.

Иккинчи услуб математик амалларни бажаришга асосланган. (1.1.2) тенгламадан $\widetilde{u}_{ij}$ миқдор u^n тўр ечимнинг $(i,j),(i+1,j),(i,j+1)$ тугун нуқтадаги қийматларига боғлиқлиги келиб чиқади. Буни қуйидаги формулани қўллаб, математик ифодалашимиз мумкин:

$$\widetilde{u}_{ij} = F_1((i,j),(i+1,j),(i,j+1)) \tag{1.1.4}$$

У ҳолда (1.1.3) тенгламадаги $\widetilde{u}_{i-1j}$ ечимнинг қиймати (1.1.4) тенгламадан i индексни минус 1 га силжитиб топилади:

$$\widetilde{u}_{i-1j} = F_1((i-1,j),(i+1,j),(i-1,j+1)) \tag{1.1.5}$$

Шунга ўхшаш

$$\widetilde{u}_{ij-1} = F_1((i,j-1),(i+1,j-1),(i,j+1)). \tag{1.1.6}$$

(1.1.3),(1.1.4), (1.1.5) ифоданинг ўнг томондаги барча тўр нуқталарини йиғиб, (1.1.2), (1.1.3) Мак-Кормак схемасининг $\mathrm{St}_{\mathrm{MC}}$ шаблонини ҳосил қиламиз:

$$\mathrm{St}_{\mathrm{MC}} = \{(i-1,j),(i,j),(i+1,j),(i,j+1),(i-1,j+1),(i,j-1),(i+1,j-1)\} \tag{1.1.7}$$

(1.1.7) кўриниб турибдики (1.1.2), (1.1.3) Мак-Кормак схемасининг n-қатлам шаблони 7 та нуқтадан иборат (5-расмга қаранг).

2-мавзу. Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ва чегаравий масалалар. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Бошланғич ва чегаравий масалалар қўйиш.

Биринчи тартибли сода дифференсиал тенгламалар

Birinchi tartibli eng oddiy differensial tenglama analizda uchraydi: berilgan $f:(a,b)\to R$ uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish masalasi

$$y' = f(x) \qquad (5)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $y = y(x),\ x\in(a,b)$ funksiyani topish masalasiga teng kuchlidir.(5) tenglamaning $a<x<b$, $|y|<\infty$ sohada aniqlangan umumiy yechimi (Koshi shaklidagi umumiy yechimi) quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$y=\int f(x)dx + c,\ x\in(a,b) \qquad (6)$$

Bu yerda c - ixtiyoriy o'zgarmas, $x_0\in(a,b),\ y_0\in R$.

Agar f funksiya $x=\alpha\in(a,b)$ nuqtada uzilishga ega bo'lib, oraliqning qolgan hamma nuqtalarida uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda (6) formula yordamida (5) tenglamaning umumiy yechimini $a<x<\alpha,\ |y|<\infty$ va $\alpha<x<b,\ |y|<\infty$ sohalarda aniqlash mumkin. $x=\alpha$ esa «to'ntarilgan» tenglamaning yechimi bo'ladi.

Bu $x=\alpha$ chiziq (6) integral chiziqlar oilasining $\int f(s)ds$ integralning xususiyatiga qarab, asimptotikasi yoki o'ramasi bo'ladi.

Tenglamalarni integrallang va integral chiziqni yasang.

Tenglamalarni integrallang va integral chiziqni yasang.

<u>1-misol</u>. $y'=\dfrac{1}{x^2-4};\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

f(x) funksiya $]-\infty,-2[,\ ]-2,+2[,\ ]+2,+\infty[$ oraliqlarda aniqlangan va uzluksiz. $x=\pm2$ funksiyaning cheksiz uzilish nuqtalari. Bu tenglamaning aniqlanish sohasidagi umumiy yechimi

$$y=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$$

$x=\pm2$ «to'ntarilgan» tenglamaning integral chizig'i bo'ladi va chiziqlar umumiy yechimga kiruvchi integral chiziqlar oilasining asimptotasi bo'ladi.

<u>2-misol</u>. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\arcsin\frac{x}{3}+c,\ |x|<3.$$

$x = \pm 3$ «to'ntarilgan» tenglamaning maxsus yechimi va bu yechimlar umumiy yechimga kiruvchi integral chiziqlar oilasining o'ramasi bo'ladi.

Endi, erkli o'zgaruvchi qatnashmagan

$$y' = f(y) \tag{7}$$

tenglamani qaraymiz.

$f(y) \neq 0$ bo'lganda, (7) ga teng kuchli bo'lgan «to'ntarilgan» tenglamani qaraymiz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \tag{8}$$

bu tenglama uchun yuqorida ko'rib o'tilgan usulni ko'llaymiz.

$f:(c,d) \to R$ uzluksiz va (c,d) da nolga teng emas deb faraz qilamiz. U holda (8) tenglamaning $|x| < +\infty,\ c < x < d$ sohadagi umumiy yechimi (Koshi shaklidagi umumiy yechimi) quyidagicha bo'ladi:

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + c, \text{ yoki } \quad x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(t)} dt + x_0$$

Agar $f(y)$ $\beta \in (c,d)$ nuqtalarda nolga aylansa, u holda $y = \beta$ (7) tenglamaning yechimi bo'ladi.

<u>3-misol</u>. $y' = 4y^{3/4},\ f(y) = 4y^{3/4}$

f(y) funksiya $y \geq 0$ bo'lganda aniqlangan va uzluksiz, hamda $f(0)=0$. «Tuntarilgan» tenglama $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}$ bo'lib, yechimi $(x+c) = \sqrt[4]{y}$ bo'ladi.

Demak, $y = (x+c)^4,\ x \geq 0$ umumiy yechim, y=0 maxsus yechim.

Differensial tenglamalarni integrallashda almashtirishlar muhim rol o'ynaydi, masalan

$$y' = f(ax+by) \tag{9}$$

Tenglama $z=ax+by$ almashtirish yordamida (7) tenglamaga keltiriladi. Bu yerda *z* yangi noma'lum funksiya.

<u>4-misol</u>. $y' = 4\sqrt[4]{(y-x)^3} + 1,\ \left[z = y - x,\ y' = z' + 1\right] \Rightarrow z' = 4\sqrt[4]{z^3}$

3 misolni yechishda qo'llangan usuldan foydalanib: $z = (x+c)^4,\ x \geq -c,\ z = 0$ ni hosil qilamiz. Eski o'zgaruvchilarga qaytsak, berilgan tenglamaning $y = x + (x+c)^4,\ x \geq -c,\ y = x$ yechimini hosil qilamiz.

Диффузион типдаги масалаларда чегаравий шарт

Биз бу параграфда иссиқлик тарқалиши ва диффузия масалаларининг турли чегаравий шартларини кўриб чиқамиз ва иссиқлик оқимига оид муҳим тушунчаларни киритамиз.

Учта асосий чегаравий шартларни кўриб чиқамиз.

1. *у= г(т)* (чегарада берилган температура),
2. $\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda u = g(t)$ (ташқи муҳит температураси берилган; н - нормал вектор),
3. $\frac{\partial u}{\partial n} = g(t)$ (чегарадаги иссиқлик оқими берилган)

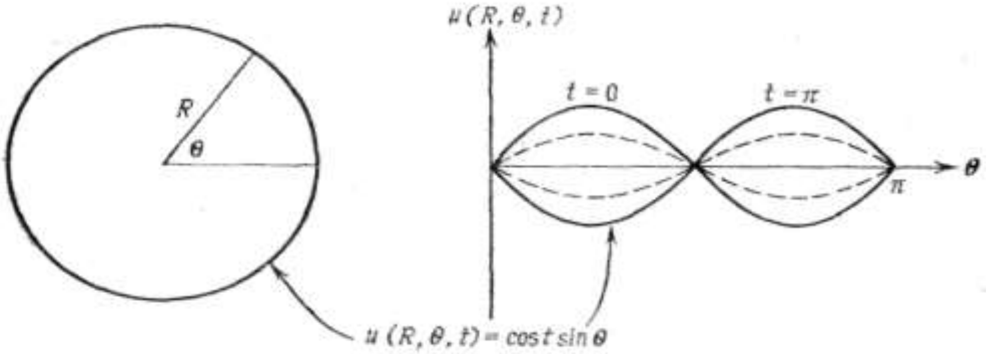
Одатда иссиқлик тарқалиши тенгламаларида айнан юқоридаги уч типга оид чегаравий шартлар қўлланилади. Бу параграфда турли физик жараёнлар ана шу чегаравий шартларга келишини кўриб чиқамиз [1].

1-расмда тасвирланган бир ўлчамли стержендаги иссиқлик оқими ҳаракатини кўриб чиқамиз.

1-расм.Температура чегарада берилган.

Стержн четларидаги иссиқлик термостат ва иситгич ёрдамида ушлаб турилади. Биринчи турдаги чегаравий масала жуда кўп учрайди. Баъзи ҳолларда масала чегаравий шарт асосида бошқарилади яни чегаравий температура $g_1(m)$ ва $g_2(m)$стержн ичидаги иссиқлик миқдорини маълум бир шаклда ўзгаришига сабаб бўлади. Бу ҳолатда стержн ичидаги иссиқлик миқдори чегарадаги иссиқлик оқими ҳисобидан бошқарилади. Масалан, металлургияда температура чегаравий шарт асосида шундай бошқариладики, метал ичидаги температуранинг вақт бўйича ўзгаришида иссиқлик печи ичидаги ҳарорат градиенти унчалик катта бўлмайди.

Биринчи турдаги чегаравий шартлар кўп ўлчовли иссиқлик тарқалиши масалаларида ҳам берилади. Мисол сифатида чегаравий температура қутб координаталар системасида($у(Р, \theta, т)=cost\ sin\theta$) берилган Р радиусли доиравий диск ичидаги иссиқлик майдонини аниқлаш масаласини кўрсатишимиз мумкин (2-расм).

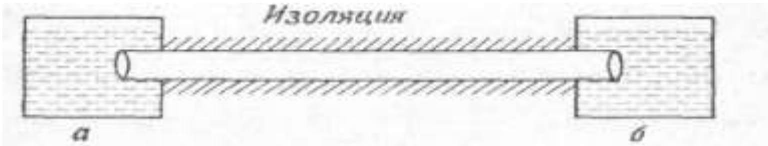


2-расм.Чегарада температура тебраниши.

Бу масалани ечишимиз учун бошланғич температурани билишимиз зарур. Диск ичидаги температура эса фақат чегарадаги температура орқали аниқланади [1].

Иккинчи турдаги чегаравий шартлар

Яна ёпиқ системада (изоляцияланган) берилган мис стержнни олайлик. Бу ҳолда чегарада берилган температура режимини ҳисобга олмасдан чегаралари билан бирлаштирилган туташ муҳит берилган ҳолни қараймиз. Туташ муҳитларнинг температуралари биринчисида $g_1(t)$, иккинчисида эса $g_2(t)$ бўлсин. Бошқача айтганда, чап учи температураси $g_1(t)$, ўнг учи температураси эса $g_2(t)$ бўлган суюқликли идишга ботирилган бўлсин (3-расм).



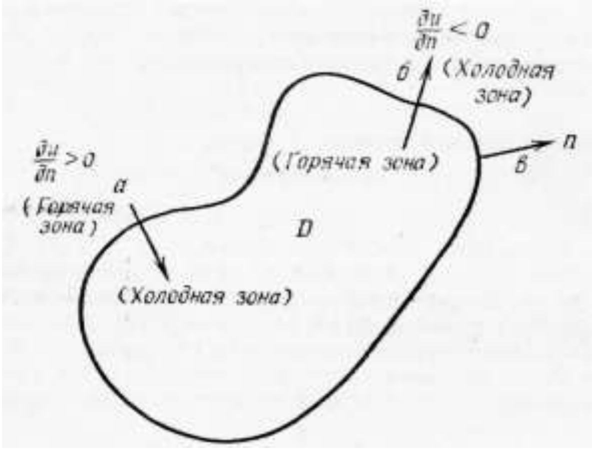
3-расм.Чегара орқали конвектив иссиқлик алмашинуви. а-г₁(т)температурали суюқлик, б-г₂(т)температурали суюқлик.

Бу турдаги чегаравий температура берилганда, стержн чегарасидаги температура суюқлик температураси билан бир хил деб ҳисоблаб бўлмайди. Нютон қонунига кўра ўзаро туташ жисмларнинг температуралари ҳар хил бўлса, иссиқлик температураси юқори муҳитдан температураси кичик муҳитга температуралар фарқига пропорционал равишда оқиб ўта бошлайди. Яни бир ўлчамли стержнда ($x – 0$, $x – L$ чегаралар) иссиқлик алмашинуви фроНютон қонуни бўйича қуйидагича ифодаланади:

x=0 чегарадаги иссиқлик оқими h $[u(0, t)— g_1 (t)]$),

x=L чегарадаги иссиқлик оқими h $[y(L, t)— g_2(t)]$) га тенг. (1.1)

Бу ерда h – иссиқлик алмашиш коеффициенти бўлиб, бир секунд вақт ичида қанча миқдорда иссиқлик каллорияси оқиб ўтишини ифодалайди. Оқиб ўтаётган иссиқлик оқими иссиқлик каллориялари сонига тенг. Шуни эътиборга олишимиз керакки, оқиб ўтаётган иссиқлик оқими мусбат бўлади, қачонки, стержн чегарасидаги температура атрофидаги муҳит температурасидан катта бўлса.



4-расм.

Фуре қонуни ифодаси:

$\frac{\partial u}{\partial n} > 0$ да берилган соҳага иссиқлик оқиб киради.

$\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ да берилган соҳадан иссиқлик оқиб чиқади. н –ташқи нормал йўналиши.

$\frac{\partial u}{\partial n}$ - n - вектор йўналиши бўйича температура ўзгариши.

$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{-\partial u}{\partial(-n)}$ - ички нормал бўйича ҳосила ва ташқи нормал бўйича ҳосила.

Бу иккита ифодани тенглаб, изланган чегаравий шартни ҳосил қиламиз. Чегара соҳасидан кесиб ўтувчи иссиқлик оқими ички нормал йўналиши бўйича температурадан олинган ҳосилага пропорционал [4].

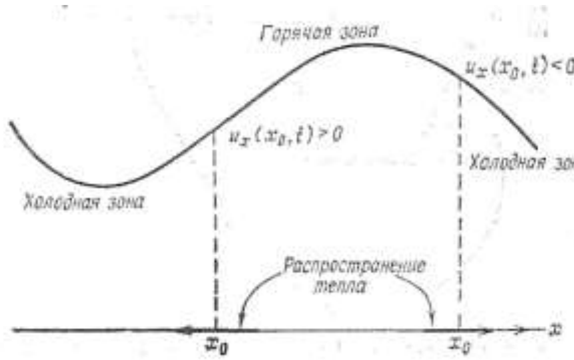
Фуре қонунидан кўриниб турибдики, Д соҳадаги ташқи нормал вектор йўналиши бўйича температура тез ортса, у ҳолда иссиқлик оқими ташқи муҳитдан *D* соҳага қараб оқади (4-расм).

Бизнинг бир ўлчамли ҳолда Фуре қонуни қуйидагича бўлади:

x=0 да оқиб ўтувчи иссиқлик миқдори $k\frac{\partial u}{\partial x}$ га тенг. (1.2)

x=L да оқиб ўтувчи иссиқлик миқдори $-k\frac{\partial u}{\partial x}$ га тенг. (1.3)

Бу ерда k – материалнинг иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти бўлиб, материалнинг қай даражада иссиқликни яхши ўтказишини ифодалайди. Иссиқликни ёмон ўтказувчи жисмларда бу коэффициент қиймати нолга яқин бўлади.



5-расм.

Фуре қонунининг яна бир кўриниши.

(1.2) Фуре қонуни фақат чегарада эмас балки, стержн ичидаги иссиқлик ўтказувчанликни ҳам ифодалайди (5-расм).

(1.3) Фуре қонуни шундан дарак берадики, агар $u_x < 0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқтада иссиқлик чапдан ўнгга оқади, агар $u_x > 0$ бўлса, у ҳолда эса x_a нуқтада иссиқлик ўнгдан чапга оқади. (Иссиқлик доим юқори температурали томондан паст температурали томонга оқади).

(1.1) ва (1.2) ифодалардан фойдаланган ҳолда 4-расмда кўрсатилган стержн учун изланаётган чегаравий шартларни ҳосил қиламиз. Унинг математик кўриниши қуйидагича:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{h}{k}\left[u(0,t) - g_1(t)\right] \\ \dfrac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \dfrac{h}{k}\left[u(L,t) - g_2(t)\right] \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

Нисбатан кўп ўлчамли ҳолларда ҳам чегаравий шартлар юқоридагига ўхшаш кўринишда бўлади. Масалан, доиравий диск чегарасидан температураси $g(0,t)$ бўлган суюқлик оқиб ўтаётган бўлсин, у ҳолда чегаравий шарт қуйидагича ёзилади:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t) = -\frac{h}{k}\left[u(R,\theta,t) - g(\theta,t)\right]$$

Бу кўринишдаги чегаравий шартларни чизиқли деб аташимиз мумкин, лекин бир жинсли эмас, чунки ўнг томонда $g(\theta,t)$ функция қатнашган.[1]

3-мавзу. Сонли тенгламаларни ечиш усуллари. Гаусс усули. Прогонка усули. Прогонка усулининг вариантлари. Прогонка усулининг турғунлиги

Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси

Ушбу чизиқли тенгламалар системасини қараймиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 = a_{2n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n = a_{nn+1} \end{cases} \qquad (1)$$

Бу системани ушбу векторлар ва матрицани киритиб

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \ldots \\ a_{nn+1} \end{vmatrix}$$

қисқа кўринишда ёзамиз:

$$Ax = b.$$

Алгебрадан маълумки, бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\det(A) \neq 0$, система ягона ечимга эга: $x = A^{-1}b$, ёки Крамер формулаларига асосан $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,\ldots,n$, бу ерда $\Delta = \det(A),\ \Delta_i = \det(A_i),\ A_i -$ А матрицадан ш-устун билан фарқ қилади, бу устунда ўнг томон жойлашган, бу ерда A^{-1} тескари матрица;
2) $\det(A) = 0$, бу ернинг ўзида иккита ҳол бўлиши мумкин:

а) $\Delta = \det(A) = 0,\ \Delta_i = \det(A_i) = 0,\ \ i = 1,\ldots,n$ бўлса бу система биргаликда, акс ҳолда, яъни

б) $\Delta = \det(A) = 0, \exists j:\ \Delta_i = \det(A_i) \neq 0,\ \ j = 1,\ldots,n$,бўлса бу система ечимга эга эмас.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси учун Гаусс усули

Номаълумларни кетма – кет йўқотиш Гаусс усули, чизиқли алгебраик тенгламаларни ечишни универсал ва эффектли усуллардан биридир. Бу усул тўғри усуллар сарасига киради. Гаусс усулида ҳисоблаш икки босқичдан иборат. Биринчи босқичда (тўғри юришда) учбурчак шаклига келтирилади, иккинчи босқичда эса (тескари юриш) бу чубурчак системанинг номаълумларини топиш билан ҳисоблаш жараёни амалга оширилади.

Гаусс усулига батафсил тўхталамиз. (1) да ҳисоблаш жараённинг бошланғич биринчи коэффиценти a_{11} , яъни нольдан фарқли бўлган коэффицентни танлаб оламиз. (Акс ҳолда нольмас элементлар *и* билан алмаштирилади, бу ерда $a_{i1} \neq 0$. Система турғунмаслигидан *и* номерни топиш мумкиндир.) Қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз,

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ \ldots, \ m_{n1} = -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$$

ва *и*-та *(и=2, 3,. . ., n)* тенгламалар системасидан 1 – чи тенглама системасига m_{i1} кўпатирамиз ва бу жараённи кейинги тенгламалар учун ҳам қўллаймиз. 1 – чи тенгламани 2 чи тенгламадан бошлаб ҳадма ҳад айирамиз, натижада кейиги тенгламаларда x_1 ҳади иштирок этмайди. Қуйидаги кўринишга эга бўламиз,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n &= f_n^{(1)}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Бу ерда, $a_{ij}^{(1)}, f_{ij}^{(1)} \quad (i, j = 2,3,\ldots,n)$ - янги ҳосил бўлган қийматлар, ҳамда ўнг томони Гаус усулини қўллашдан сўнг янги функция ҳосил бўлади. Бу жараёнинг асосини, (2) формуладаги *n—1*та тенгламалар орқали ҳосил бўлган, $x_2, x_3, \ldots, x_n$ номаълумли *n*-1 – чи тартибли тенгламалар системасига эга бўламиз. Кейинчали ҳам худди шу жараённга таянамиз.

Кейинги тенгламага ўтишдан олдин, 2 – чи тенгламанинг бошловчи коэффиценти бўлган $a_{22}^{(1)}$ элементни нольдан фарқлаб оламиз. (Акс ҳолда юқорида тенгламаларга қўлланилган усулдан фойдаланиш керак.) Қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз,

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad m_{42} = -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ \ldots, \quad m_{n2} = -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

ва *i* та *(i=3, 4, . . ., n)* тенгламалар системасига 2 – чи тенгламани m_{u2} – га кўпайтирамиз. Натижада (2) қуйидаги системага эга бўламиз,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= f_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots; \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n &= f_n^{(2)}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Кейин *n*—1-та қадамдан сўнг қуйидаги учбурчакка эга бўламиз

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= f_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots; \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= f_n^{(n-1)}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Бу системанинг матрица коэффицентларини *P* билан белгилаймиз*:*

$$R=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots. & a_{1n} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots. & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \ldots. & a_{3n}^{(2)} \\ & 0 & & \ldots. & \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

(1) тенгламалар системасини (4) учбурчаклар кўринигига келтирилиши Гаусс усулининг биринчи босқичининг якунига келганликни билдиради.

Иккинчи босқич — ҳосил бўлган қадамларни — учбурчак шаклидаги (10) тенгламалар системасининг номаълумларин топишдан иборатдир. У қуйидаги амалга оширилади. Оҳирги аниқланган тенгламадан $x_н$ ҳад топилади. Ҳосил бўлган қиймат x_n бўйича n—1-чи тенгламадан $x_{н\ -1}$ ҳади аниқланади. Кейин ҳосил қилинган x_{n-1} ва x_n қийматлардан $н$—*2*-чи тенгламадан x_{n-2} ҳади аниқланади ва бу жараён ҳудди шундай давом эттирилади токи 1-чи тенгламадаги x_1 ҳадни топмагунга қадар. Бу жараён (1) системасига эквивалент бўлган (4) системанинг ечилиши билан якунланади.

Шуни такидлаш лозимки, Гаусс усулининг тўғри юриши йўли $n^3/3+O(n^2)$ кўшиш жараёнини ҳудди шунча $n^2/2+O(n)$ кўпайтириш жараёнини ва $n^2/2+O(n)$ *(n)* бўлиш жарайнини амалга оширишни талаб қилади, яъни n та жараён учун. Шундай қилиб, бу тенгламалар системасини ҳисоблашга қараганда, (1) тенгламалар системасини (4) тенгламалар системасига n-чи тартибдаги учбурчак шаклига келтирилиши мураккабдир.

Гаусс усулини қўлланилишига мисол келтирамиз, уч номаълумли учта тенгламалар системасини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} 1{,}2357x_1+2{,}1742x_2-5{,}4834x_3&=-2{,}0735,\\ 6{,}0696x_1+6{,}2163x_2-4{,}6921x_3&=-4{,}8388,\\ 3{,}4873x_1+6{,}1365x_2-4{,}7483x_3&=4{,}8755. \end{aligned} \qquad (7)$$

Натижаларнинг ҳаммасини қўзғалувчи вергулдан сўнг бешта сон аниқликда оламиз.

Бу ҳолатда қуидагича бўлади,

$$m_{21}=-4{,}9119\,,\quad m_{31}=-2{,}8221\,.$$

Гаусс усулнинг қўлланилишининг биринси қадамидан сўнг қуйидаги системани ҳосил қиламиз

$$\begin{aligned} 1{,}2357x_1+2{,}1742x_2-5{,}4834x_3&=-2{,}0735,\\ -16{,}895x_2+22{,}242x_3&=5{,}3462,\\ 0{,}0007x_2+10{,}727x_3&=10{,}727. \end{aligned} \qquad (8)$$

Кейиги қадамни амалга ошириш учун, қуйидагини ҳисоблаймиз

$$m_{32}=\frac{0{,}0007}{16{,}895}=-0{,}41432\cdot 10^{-4}$$

ва системани учбурчак шаклига келтирамиз:

$$
\begin{aligned}
&1{,}2357x_1 + 2{,}1742x_2 - 5{,}4834x_3 = -2{,}0735,\\
&-16{,}895x_2 + 22{,}242x_3 = 5{,}3462,\\
&\qquad\qquad 10{,}727x_3 = 10{,}727.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Учбурчак (9) системасини ҳисоблаш қуйидаги номаълумларнинг қийматларни беради:

$$x_1 = 0{,}99968,\ x_2 = 0{,}99994,\ x_3 = 0{,}99991. \tag{10}$$

Бу натижа (7) системанинг аниқ ечими билан мослашади:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1. \tag{11}$$

Якуни сифатида шуни таъкидлаймизки, (1) тенгламалар системасини (4) тенгламалар системасига келтирилиши Гаусс усулининг биринчи қадамида A матрицани учбурча шаклига келтириш билан боғлиқдир. Бу уни аниқлашда фойдаланиш мумкин. Гаусс усулининг туғри юриш босқичи, бир сатрнинг бошқа бир сатрга қўшилиш жараённи бир неча бор фойдаланишнинг асосини ташкил қилади. Маълумки, бу жараён аниқликни ўзгартирмайди. Баъзан, тенгламаларни ўрнини алмаштиришга тўғри келади, яъни кейиги босқичдан олдин $a_{ii}^{(i-1)}$ элементни нольдан фарқли бўлишига эришиш учун. Матрицанинг сатрини алмаштириш унинг аниқланиши қарама қарши белгисини ўзгартирилишига олиб келади. Бу танқиддан қуйидагига эга бўламиз,

$$det\,A = (-1)^k\,det\,R = (-1)^k a_{11}a_{22}^{(1)}..a_{nn}^{(n-1)},$$

бу ерда $к$ – (9) системадаги учбурчак матрица Р ни A матрица редукцияси жараёни сатрларини алмаштириш сони.

(7) системанинг матрица коэффицентларини аниқлаб ҳисоблашни мисол сифатида оламиз. Учбурчакка келтириш жараёнида (9) кўринишни биз тенгламаларни ўрнини алмаштирмадик. Демак, берилган ҳолда $detA$=$det\ R$ =-223,97 бўлади.

Жараёнларнинг сони, Гаусс усулини қадамларини ҳисоблаш учун керак бўлган ҳоли, ҳадларининг $n!$ йиғиндисини аниқловчига тўғридан – тўғри таққослашга олиб келади. Масалан, нисбатан унча катта бўлмаган 20-чи тартибли аниқловчи $19 \cdot 20! \approx 4{,}5 \cdot 10^{19}$ кўпайтмани бажарилишини олиб келади. Бундай амалларни бажарилиш, сонияда бир миллионлаб амалларни бажарувчи компьютер учун эса, ҳисоблаш жараёни $1{,}4 \cdot 10^6$ йил вақт давом этади.

Уч нуқтали алгебраик тенгламалар системалари учун прогонка (ҳайдаш)усули

Кўпгина иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларга қўйилган биринчи чегаравий шарт қуйидаги уч нуқтали алгебраик тнгламалар системасига келтирилади

$$\begin{cases} y_0 = \psi_1, \quad i = 0 \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad 1 \le i \le n \\ y_n = \psi_2, \quad i = n+1 \end{cases} \tag{1}$$

Юқорида ҳосил қилган алгебраик тенгламалар системасининг матрицаси уч диагоналли ҳисобланади:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_i & -C_i & B_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{n-1} & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ва уни ечиш прогонка методи ёрдамида амалга оширилади. Бу метод қуйидаги реккурент формула ёрдамида амалга оширилади [16,18].

$$y_i^j = \alpha_{i+1} y_{i+1}^j + \beta_{i+1} \tag{3}$$

бунда α_i ва β_i лар номаълум коэффициентлар. $y_{i-1}^j = \alpha_i y_i^j + \beta_i$ ифодани (3) ифодага қўйиб қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$(A_i\alpha_i - C_i)y_i^j + A_i\beta_i + B_i y_{i+1}^j = -F_i \tag{4}$$

Ҳосил бўлган ифодада (3) реккурент формуладан фойдалансак

$$\left[(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i\right]y_{i+1}^j + A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} = -F_i \tag{5}$$

ифода келиб чиқади. Бу тенглама барча y_i^j ларда ўринли бўлади, агар

$$(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i = 0, \quad A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + F_i = 0 \tag{6}$$

шарт бажарилса.

Бу ифодалардан α_{i+1} ва β_{i+1} коэффициентлар учун қуйидаги реккурент формула ҳосил бўлади:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{7}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{8}$$

Агар α_i, β_i коэффициентлар ва $y_{n,j}$ нинг қиймати маълум бўлса, у ҳолда $y_{i,j}$ ларнинг қийматларини кетма – кет ҳисоблаб топа оламиз.

α_i, β_i коэффициентларни чапдан ўнгга ҳаракатланган ҳолда аниқлаймиз, $y_{i,j}$ ларни эса аксинча ўнгдан чапга томон кетма – кет аниқлаймиз.

α, β, y функцияларнинг ҳар бири учун Коши масаласини ечишимиз керак бўлади, чунки бу функцияларнинг бошланғич қийматлари бизга номаълум. Бунинг учун чегаравий шартлардан ҳам фойдаланамиз. (3) ифодадан $i=0$ бўдганда қуйидагига эга бўламиз:

$$y_0^j = \alpha_1 y_1^j + \beta_1 \qquad (9)$$

иккинчи томондан эса

$$y_0^j = \psi_1(t_j) \qquad (10)$$

Бу ифодалардан кўринадики

$$\alpha_1 = 0, \qquad (11)$$

$$\beta_1 = \psi_1(t_j) \qquad (12)$$

Шунга кўра α_i ва β_i функциялар учун Коши масаласи ҳосил бўлади: α учун (7),(11), β учун (8),(12). Бу формулалар тўғри прогонка (прямой прогонки) формулалари деб юритилади.

α_i ва β_i функцияларнинг $i=1,2,\ldots,n$ даги барча қийматлари ҳисоблангач, $y_n^j = \psi_2(t_j)$ чегаравий қийматларни ҳам ҳисобланади. Энди бизга барча бошланғич қийматлар маълум, (3) дан фойдаланиб y_i^j номаълумларни топсак бўлади.

Бу метод $|C_i| \ge |A_i| + |B_i|$ шарт бажарилганда турғун бўлиб, ечимга эга бўлади. Ҳосил қилган (1) айирмали схемамизда эса бу шарт бажарилади.

Чап прогонка усули ва учрашувчи прогонка усуллари

(3)—(12) формулалардаги каби чап прогонка усули формулаларини келтириб чиқариш мумкин

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1, \qquad (17)$$

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \xi_{i+1}}, \ i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1, \quad \xi_N = \chi_2, \qquad (18)$$

$$\eta_i = \frac{B_i \eta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \ i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1, \quad \eta_N = \mu_2, \qquad (19)$$

$$y_0 = \frac{\mu_1 + \chi_1\eta_1}{1-\xi_1\chi_1}, \qquad (20)$$

Қуйидаги муносабат ўринли, деб фараз қиламиз

$$y_{i+1} = \xi_{i+1}y_i + \eta_{i+1},$$

(9) дан кетма-кет

y_{i+1} ва $y_i = \xi_{i-1} + \eta_i$ ларни йўқотиб қуйидаги муносабатга келамиз

$$\begin{aligned} -F_i &= A_i y_{i-1} + \left(B_i\xi_{i+1} - C_i\right) y_i + B_i\eta_{i+1} = \\ &= \left[A_i - \left(C_i - B_i\xi_{i+1}\right)\xi_i \right] y_{i-1} + B_i\eta_{i+1} - \left(C_i - B_i\xi_{i+1}\right)\eta_i . \end{aligned}$$

(9) тенглама ўринли бўлиши учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлиши керак

$$\begin{aligned} &A_i - \left(C_i - B_i\xi_{i+1}\right)\xi_i = 0, \\ &-F_i = B_i\eta_{i+1} - \left(C_i - B_i\xi_{i+1}\right)\eta_i . \end{aligned}$$

Бундан эса (18) ва (19) формулаларни ҳосил қиламиз. y_0 нинг қийматини қуйидаги $y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1$ шарт ва $y_1 = \xi_1 y_0 + \eta_1$ формуладан ҳосил қиламиз.

Қуйидаги

$$\begin{aligned} &\left|C_i - B_i\xi_{i+1}\right| \geq \left|C_i\right| - \left|B_i\right| \cdot \left|\xi_{i+1}\right|, \\ &\left|1-\xi_1\chi_1\right| \geq 1 - \left|\xi_1\right| \cdot \left|\chi_1\right| \end{aligned}$$

тенгсизликдан кўринадики, (16) шарт чап ҳайдаш формулаларидан фойдаланиш мумкинлигини ва унинг турғунлигини таъминлайди, чунки барча $i = 1,\ 2,\ ...,\ N$ лар учун

$$\left|\xi_i\right| \leq 1$$

ўринли бўлади.

Чап ва ўнг ҳайдаш усулларининг комбинациясидан учрашувчи ҳайдаш усулининг формулаларини ҳосил қилишимиз мумкин. Фараз қиламиз

$i = i_0$, $0 < i_0 < N$ — бирорта ички нуқта. У ҳолда $0 \le i \le i_0 + 1$ соҳада (10) — (15) формулалар ёрдамида ҳайдаш коэффициенлари топилади:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \ i = 1, 2, ..., i_0, \quad \alpha_1 = \chi_1,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \ i = 1, 2, ..., i_0, \quad \beta_1 = \mu_1,$$

$i_0 \le i \le N$ соҳада эса (17) —(20) формулалар ёрдамида ξ_i, η_i топилади:

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\xi_{i+1}}, \ i = N\text{-}1, N-2, ..., i_0, \quad \xi_N = \chi_2,$$

$$\eta_i = \frac{B_i\eta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1}B_i}, \ i = N-1, N-2, ..., i_0, \quad \eta_N = \mu_2,$$

$i = i_0$ да ечимни (10) ва (17) лар асосида бирлаштирамиз. Қуйидаги

$$y_{i_0} = \alpha_{i_0+1}y_{i_0+1} + \beta_{i_0+1}, \quad y_{i_0+1} = \xi_{i_0+1}y_{i_0} + \eta_{i_0+1}$$

формулалардан

$$y_{i_0} = \frac{\beta_{i_0+1} + \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0+1}}{1 - \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0+1}}$$

формулани ҳосил қиламиз.

4-Мавзу. Ўзгармас коеффициентли иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун чекли айирмали схемалар.ошкор ва ошкормас схемалар. Параметрли схемалар.

Ўзгармас коеффициентли иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун интегро-интерполяцион усул

Ушбу усулни баланс усули ҳам деб номлашади. $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ тўғри тўртбурчакда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad (2.4)$$

дифференциал тенгламани ва

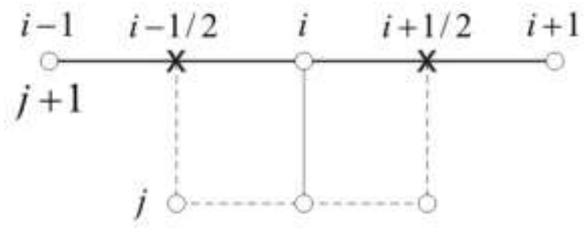
$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1, \tag{2.5}$$

$$u(0,t)=u_1(t),\ u(1,t)=u_2(t),\ \ 0\le t\le T, \tag{2.6}$$

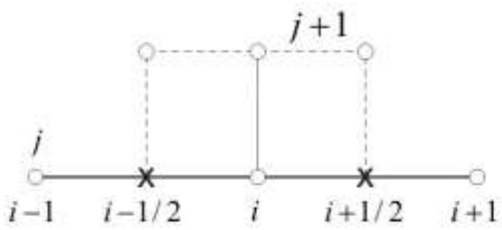
қўшимча шатрларни қаноатлантирувчи $u=u(x,t)$ функцияни аниқлаш талаб этилган бўлсин. Ушбу масалани сонли ечиш учун $D=\{0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ соҳада текис тўр қурамиз.

$\overline{\omega_h}=\left\{x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ h=1/N\ \right\}$ $0\le x\le 1$кесмада h қадамли текис тўр бўлсин ва $\overline{\omega_\tau}=\left\{t_j=j\tau,\ \ j=\overline{0,M},\ \tau=T/M\ \right\}$ $0\le t\le T$ кесмада τ қадамли тўр бўлсин. У ҳолда $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\cdot\omega_\tau=\left\{(x_i t_j);\ \ x_i \ni \overline{\omega}_h,\ \ \ t_j\ni\omega_\tau\right\}$- $D=\{0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ тўғри тўртбурчакда h ва τ қадамлар билан қурилган тўрни англатади.

Интегро-интерполяцион усул ёрдамида (2.4) дифференциал тенгламани айирмали схема билан аппроксимация қилиш учун (2.4) тенгламани $x_{i-0,5}\le x\le x_{i+0,5}, t_{i-0,5}\le t\le t_{i+0,5}$ тўғри тўртбурчакда интеграллаймиз:



7-расм



8-расм

$$\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}\left[u(x,t_{j+1})+u(x,t)\right]dx=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}},t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}},t)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx \tag{2.7}$$

(2.7) тенгликка кирувчи интегралларни қуйидагича аппроксимациялаймиз:

$$\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}u(x,t)=h\cdot u(x_i,t),\ \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial u(x_{i+0,5},t)}{\partial x}=\tau u_{x,i+1}^{j+1}$$

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx=h\tau 0,5(f(x_i,t_j)+f(x_i,t_{j+1}))$$

У ҳолда (2.7) тенгликдан қуйидагиошкормас айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\Big[u_{\bar{x},i+1}^{j+1}-u_{\bar{x},i}^{j+1}\Big]+\frac{1}{2}\Big[f_i^{\,j}+f_i^{\,j+1}\Big]$$

ёки

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\Big[f_i^{\,j}+f_i^{\,j+1}\Big].$$

Энди (2.4) тенгламани 8–расмда кўрсатилган ячейка бўйича интеграллаймиз:

$$\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}\Big[u(x,t_{j+1})+u(x,t_j)\Big]dx=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\frac{\partial u(x_{i+\frac{1}{2}},t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_{i-\frac{1}{2}},t)}{\partial x}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx \qquad (2.8)$$

(2.8) тенгламага кирувчи интеграллардан $\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial u(x_{i+0,5},t)}{\partial x}\approx\tau u_{\bar{x},i+1}^{j}$ ва $\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx\approx\frac{h\tau}{3}(f(x_{i-1},t_j)+f(x_i,t_j)+f(x_{i+1},t_j))$ аппроксимация қилсак ошкор айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{j}-2u_i^{j}+u_{i-1}^{j}}{h^2}+\frac{1}{3}(f_{i-1}^{\,j}+f_i^{\,j}+f_{i+1}^{\,j})$$

қўшимча шартлар иккала ҳолда ҳам

$$u_i^0=u_0(x_i)\quad,\quad y_0^j=\mu_1\left(t_j\right)\quad,\quad u_N^j=\mu_2\left(t_j\right)$$

кўринишда аппроксимация қилинади.

5-Мавзу. Консерватив схемалар. Интегро-интерполяцион усул. Интегро-интерполяцион усул ёрдамида чекли айирмали схемалар қуриш

Чизиқли параболик тенгламалар учун интегро-интерполяцион усул.

Ушбу усулни баланс усули ҳам деб номлашади. $D=\{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ тўғри тўртбурчакда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{2.4}$$

дифференциал тенгламани ва

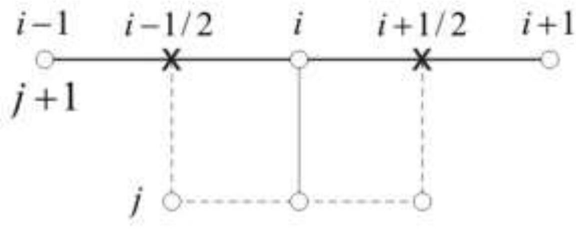
$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{2.5}$$

$$u(0,t) = u_1(t),\ u(1,t) = u_2(t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{2.6}$$

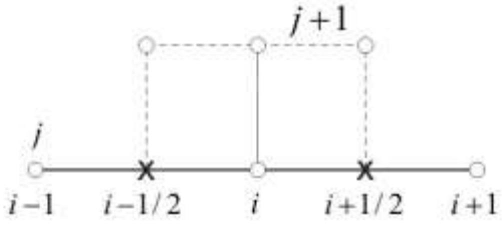
қўшимча шатрларни қаноатлантирувчи $u = u(x,t)$ функцияни аниқлаш талаб этилган бўлсин. Ушбу масалани сонли ечиш учун $D=\{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ соҳада текис тўр қурамиз.

$\overline{\omega_h} = \left\{x_i = ih,\ i = \overline{0,N},\ h = 1/N\ \right\}$ $0 \le x \le 1$кесмада h қадамли текис тўр бўлсин ва $\overline{\omega_\tau} = \left\{t_j = j\tau,\ \ j = \overline{0,M},\ \tau = T/M\ \right\}$ $0 \le t \le T$ кесмада τ қадамли тўр бўлсин. У ҳолда $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \cdot \omega_\tau = \left\{(x_i t_j);\ \ x_i \ni \overline{\omega}_h,\ \ \ t_j \ni \omega_\tau\right\}$- $D=\{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ тўғри тўртбурчакда h ва τ қадамлар билан қурилган тўрни англатади.

Интегро-интерполяцион усул ёрдамида (2.4) дифференциал тенгламани айирмали схема билан аппроксимация қилиш учун (2.4) тенгламани $x_{i-0,5} \le x \le x_{i+0,5}, t_{i-0,5} \le t \le t_{i+0,5}$ тўғри тўртбурчакда интеграллаймиз:



7-расм



8-расм

$$\frac{1}{h\tau}\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} \left[u(x,t_{j+1}) + u(x,t)\right]dx = \frac{1}{h\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}},t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}},t)\right]dt +$$

$$+\frac{1}{h\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx \qquad (2.7)$$

(2.7) тенгликка кирувчи интегралларни қуйидагича аппроксимациялаймиз:

$$\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}u(x,t)=h\cdot u(x_i,t),\ \int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial u(x_{i+0,5},t)}{\partial x}=\tau u_{\bar{x},i+1}^{j+1}$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx=h\tau 0,5(f(x_i,t_j)+f(x_i,t_{j+1}))$$

У ҳолда (2.7) тенгликдан қуйидагиошкормас айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[u_{\bar{x},i+1}^{j+1}-u_{\bar{x},i}^{j+1}\right]+\frac{1}{2}\left[f_i^{\,j}+f_i^{\,j+1}\right]$$

ёки

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\left[f_i^{\,j}+f_i^{\,j+1}\right].$$

Энди (2.4) тенгламани 8–расмда кўрсатилган ячейка бўйича интеграллаймиз:

$$\frac{1}{h\tau}\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}\left[u(x,t_{j+1})+u(x,t_j)\right]dx=\frac{1}{h\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\frac{\partial u(x_{i+\frac{1}{2}},t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_{i-\frac{1}{2}},t)}{\partial x}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{h\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx \qquad (2.8)$$

(2.8) тенгламага кирувчи интеграллардан $\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial u(x_{i+0,5},t)}{\partial x}\approx\tau u_{\bar{x},i+1}^{j}$ ва $\frac{1}{h\tau}\int_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx=\frac{h\tau}{3}(f(x_{i-1},t_j)+f(x_i,t_j)+f(x_{i+1},t_j))$ аппроксимация қилсак ошкор айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{j}-2u_i^{j}+u_{i-1}^{j}}{h^2}+\frac{1}{3}(f_{i-1}^{\,j}+f_i^{\,j}+f_{i+1}^{\,j})$$

қўшимча шартлар иккала ҳолда ҳам

$$u_i^0=u_0(x_i)\quad,\quad y_0^j=\mu_1\left(t_j\right)\quad,\quad u_N^j=\mu_2\left(t_j\right)$$

кўринишда аппроксимация қилинади.

Номаьлум коэффициентлар усули.

Номаьлум коэффициентлар усулида айирмали схема сифатида номаьлум тўр функциянинг шаблонни ташкил қилувчи тугун нуқталардаги қийматларининг чизиқли комбинацияси олинади. Ушбу чизиқли комбинациянинг коэффициентлари айирмали схема берилган дифференциал тенгламани тўр қатламлари бўйича иложи борича юқори тартибда аппроксимация қилиш шартидан топилади.

Масалан,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенглама учун

$$Ш(x,t)=\left\{\left(x_{i-1},t_j\right);\left(x_i,t_j\right);\ \left(x_{i+1},t_j\right);\left(x_i,t_{j+1}\right);\right\}$$

шаблонда айирмали схема қуриш талаб этилган бўлсин. Демак айирмали схема

$$\alpha u_{i-1}^j+\beta u_i^j+\gamma u_{i+1}^j+\mu u_i^{j+1}=0. \tag{2.9}$$

кўринишда экан. u_{i-1}^j , u_{i+1}^j ва u_i^{j+1} тўр функцияларни (x_i,t_j) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйиб, (2.9) тенгламага қўямиз.

$$\alpha u_{i-1}^j+\beta u_i^j+\gamma u_{i+1}^j+\mu u_i^{j+1}=$$

$$\alpha\left(u_i^j-h\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^3}+...\right)+$$

$$+\beta\left(u_i^j+\gamma(u_i^j+h\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^3}+...\right)+$$

$$+\mu\left(u_i^j+\tau\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial t^3}+...\right)=$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\mu)u_i^j+(\gamma-\alpha)h\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x}+\frac{h^2}{2}(\alpha+\gamma)\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^2}$$

$$+\mu\tau\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t}+O\left(h^3+\tau^2\right). \tag{2.10}$$

(2.10) тенгликдан $\alpha u_{i-1}^j + \beta u_i^j + \gamma u_{i+1}^j + \mu u_i^{j+1} = (\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{(x_i,t_j)} + O(h^3 + \tau^2)$ бўлиши учун α, β, γ ва μ коэффициентлар қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантириши керак.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \mu = 0 \\ \gamma - \alpha = 0 \\ \alpha + \gamma = -\dfrac{2}{h^2} \\ \mu\tau = 1 \end{cases} . \qquad (2.11)$$

(2.11) тенгламалар системасини ечиб, $\alpha = \gamma = -\frac{1}{h^2}$, $\mu = \frac{1}{\tau}$ ва $\beta = \frac{2}{h^2} = -\frac{1}{\tau}$ эканлигини аниқлаймиз. Коэффициентларни бу қийматларини (2.10) га қўямиз:

$$-\frac{u_{i-1}^j}{h^2} + \frac{2u_i^j}{h^2} - \frac{u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^j}{h^2} + \frac{u_i^{j+1}}{\tau} = 0 \text{ёки}$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} = 0 \qquad (2.12)$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дифференциал тенгламани $Ш(x_i, t_i) = \left\{ \left(x_{i-1}, t_j\right); \left(x_i, t_j\right); \left(x_{i+1}, t_j\right); \left(x_i, t_{j+1}\right); \right\}$ шаблонда аппроксимация қилувчи айирмали схема қуйидаги кўринишга эга экан:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

Энди $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ дифференциал тенгламани

$$Ш\left(x_i, t_j\right) = \left\{ \left(x_i, t_j\right) \quad \left(x_{i-1}, t_{j+1}\right) \quad \left(x_i, t_{j+1}\right) \quad \left(x_{i+1}, t_{j+1}\right) \right\}$$

шаблонда аппроксимация қилувчи айирмали тенгламани топамиз. Бу ҳолда айирмали схема

$$\alpha u_i^j + \beta u_{i-1}^{j+1} + \gamma u_i^{j+1} + \mu u_{i+1}^{j+1} = 0. \qquad (2.13)$$

кўринишда бўлади. (2.13) да u_{i-1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1} тўр функцияларни (x_i, t_j) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \tau \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial t^3} + \frac{\tau^4}{24} \frac{\partial^4 u(x_i, t_j)}{\partial t^4} + \ldots$$

$$u_{i-1}^{j+1} = u_i^j - h \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} + \tau \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} -$$

$$- h\tau \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x \partial t} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial x^3} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial t^3} + \frac{h^2 \tau}{2} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial x^2 \partial t} - \frac{h \tau^2}{2} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial x \partial t^2} + \ldots$$

$$u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + h \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} + \tau \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} +$$

$$+ h\tau \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x \partial t} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial x^3} + \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial t^3} + \frac{h^2 \tau}{2} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{h \tau^2}{2} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial x \partial t^2} + \ldots$$

У ҳолда

$$\alpha u_i^j + \beta u_{i-1}^{j+1} + \gamma u_i^{j+1} + \mu u_{i+1}^{j+1} = \alpha u(x_i, t_j) + \beta \Big[u(x_i, t_j) - h u'_x(x_i, t_j) + u'_t(x_i, t_j) +$$

$$+ 0{,}5 h^2 u''_{xx}(x_i, t_j) + 0{,}5 \tau^2 u''_{tt}(x_i, t_j) - h\tau\, u''_{xt}(x_i, t_j) - \frac{h^3}{6} u'''_{xxx}(x_i, t_j) + \frac{\tau^3}{6} u'''_{ttt}(x_i, t_j) +$$

$$+ \frac{h^2 \tau}{2} u'''_{xxt}(x_i, t_j) - \frac{h \tau^2}{2} u'''_{xtt}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{24} u''''_{xxxx}(x_i, t_j) - \frac{h^3 \tau}{6} u''''_{xxxt}(x_i, t_j) +$$

$$+ \frac{h^2 \tau^2}{4} u''''_{xxtt}(x_i, t_j) - \frac{h \tau^3}{6} u''''_{xttt}(x_i, t_j) + \frac{\tau^4}{24} u''''_{tttt}(x_i, t_j) + \ldots \Big] +$$

$$+ \gamma \Big[u(x_i, t_j) + \tau u'_t(x_i, t_j) + 0{,}5 \tau^2 u''_{tt}(x_i, t_j) + \frac{\tau^3}{6} u'''_{ttt}(x_i, t_j) + \frac{\tau^4}{24} u'''_{ttt}(x_i, t_j) + \ldots \Big] +$$

$$+ \mu \Big[u(x_i, t_j) + h u'_x(x_i, t_j) + u'_t(x_i, t_j) +$$

$$+ 0{,}5 h^2 u''_{xx}(x_i, t_j) + 0{,}5 \tau^2 u''_{tt}(x_i, t_j) + h\tau\, u''_{xt}(x_i, t_j) + \frac{h^3}{6} u'''_{xxx}(x_i, t_j) + \frac{\tau^3}{6} u'''_{ttt}(x_i, t_j) +$$

$$+ \frac{h^2 \tau}{2} u'''_{xxt}(x_i, t_j) + \frac{h \tau^2}{2} u'''_{xtt}(x_i, t_j) + \frac{h^4}{24} u''''_{xxxx}(x_i, t_j) + \frac{h^3 \tau}{6} u''''_{xxxt}(x_i, t_j) +$$

$$+ \frac{h^2 \tau^2}{4} u''''_{xxtt}(x_i, t_j) + \frac{h \tau^3}{6} u''''_{xttt}(x_i, t_j) + \frac{\tau^4}{24} u''''_{tttt}(x_i, t_j) + \ldots \Big]$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\alpha u_i^j + \beta u_{i-1}^{j+1} + \gamma u_i^{j+1} + \mu u_{i+1}^{j+1} = [\alpha + \beta + \gamma + \mu] u(x_i, t_j) + h(\mu - \beta) u'_x(x_i, t_j) +$$

$$+\tau(\beta+\gamma+\mu)u'_t(x_i,t_j)+0{,}5h^2(\beta+\mu)u''_{xx}(x_i,t_j)+0{,}5\tau^2(\beta+\gamma+\mu)u''_{tt}(x_i,t_j)+$$

$$+h\tau(\mu-\beta)u''_{xt}(x_i,t_j)+\frac{h^3}{6}(\mu-\beta)u'''_{xxx}(x_i,t_j)+\frac{\tau^3}{6}(\beta+\gamma+\mu)u'''_{ttt}(x_i,t_j)+$$

$$+0{,}5h^2\tau(\beta+\mu)u'''_{xxt}(x_i,t_j)+0{,}5h^2\tau(\mu-\beta)u'''_{xtt}(x_i,t_j)+\frac{h^4}{24}(\beta+\mu)u''''_{xxxx}+$$

$$+\frac{h^3\tau}{6}(\mu-\beta)u''''_{xxxt}(x_i,t_j)+\frac{h^2\tau^2}{4}(\beta+\mu)u''''_{xxxt}(x_i,t_j)+\frac{h\tau^3}{6}(\mu-\beta)u''''_{xttt}(x_i,t_j)+$$

$$+\frac{h\tau^3}{6}(\mu-\beta)u''''_{xttt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^4}{24}(\beta+\mu)u''''_{tttt}(x_i,t_j)+....$$

Охирги тенгликда қуйидагиларни бажарилишини талаб қиламиз:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\mu=0\\ \beta+\gamma+\mu=\dfrac{1}{\tau}\\ \beta+\mu=-\dfrac{2}{h^2}\\ \mu-\beta=0\end{cases}.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, номаълум α,β,γ,μ параметрларни қийматларини аниқлаймиз:

$$\alpha=-\frac{1}{\tau},\quad \beta=\mu=-\frac{1}{h^2},\ \ \gamma=\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h^2}.$$

Параметрларнинг ушбу қийматларида

$$\alpha u_i^j+\beta u_{i-1}^{j+1}+\gamma u_i^{j+1}+\mu u_{i+1}^{j+1}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_i,t_j)}-0{,}5\tau u''_{tt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^2}{6}u'''_{ttt}(x_i,t_j)-$$

$$-\frac{h^2}{12}u''''_{xxxx}(x_i,t_j)-\frac{\tau^2}{2}u''''_{xxxx}(x_i,t_j)+-\frac{h^2\tau^4}{12}u''''_{tttt}(x_i,t_j)+.....\qquad(2.13')$$

α,β,γ,μ параметрларнинг топилган қийматларини (2.13) тенгламага қўйсак, биз қурган айирмали схеманинг кўриниши келиб чиқади:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}-\frac{u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}=\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}-\frac{\partial^2u(x_i,t_j)}{\partial t^2}+O(\tau,h^2).$$

Демак, $Ш(x_i,t_j)=\{(x_i,t_j)\ \ (x_{i-1},t_{j+1})\ \ (x_i,t_{j+1})\ \ (x_{i+1},t_{j+1})\}$ шаблонда қурилган айирмали схема ошкормас бўлиб, берилган дифференциал масалани τ бўйича биринчи тартиб билан ва h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилар экан.

Ўзгарувчан коэффициентли оддий дифференциал тенгламалар учун интегро-интерполяцион усул

Issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya, tebranish va h.k. turli xil fizik jarayonlar issiqlik, massa, harakat miqdori, energiya va h.k. saqlanishning integral formadagi qonunlari bilan tavsiflanadi. Matematik fizikaning differensial tenglamalarini chiqarishda kichik hajm uchun saqlanish qonunini ifodalovchi muayyan integral munosabatdan (balans tenglamasidan) ishni boshlashadi. Tenglamada qatnashadigan funksiyalarning barcha kerakli hosilalarini mavjud deb faraz qilib va balans tenglamasidagi hajmlarni nolga intiltirib, differensial tenglama hosil qilinadi. Chekli-ayirmali metodning fizik ma`nosi shundan iboratki, biz uzluksiz muhitdan uning qandaydir diskret modeliga o'tamiz. Tabiiyki, bunday o'tishda fizik jarayonning asosiy xossalari saqlanishini talab qilish kerak. Bunday xossalar qatorida, birinchi navbatda, saqlanish qonunlari turadi. To'r sohada saqlanish qonunlarini ifodalaydigan ayirmali sxemalar ***konservativ sxemalar*** deyiladi. Konservativ ayirmali sxemalarni hosil qilish uchun to'r sohada elementar hajm uchun yozilgan balans tenglamalarida qatnashadigan integrallarni va hosilalarni taqribiy ayirmali ifodalari bilan almashtirish kerak. Konservativ ayirmali sxemalarni hosil qilishning bunday usuli ***balans metodi*** yoki ***integral-interpolyatsion metod*** deyiladi. Balans metodini qo'llashga misol sifatida issiqlik o'tkazuvchanlikning statsionar tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani qaraymiz:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)-q(x)u+f(x)=0, \quad 0<x<1, \qquad (5.29)$$

$$u(0)=\alpha, \quad u(1)=\beta, \qquad (5.30)$$

bunda $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ lar yetarlicha silliq funksiyalar bo'lib, $p(x)\ge p_0>0$, $q(x)\ge 0$ shartlarni qanoatlantiradi, α va β esa berilgan sonlar. Bu shartlar bajarilganda (5.29), (5.30) chegaraviy masala yagona yetarlicha silliq $u(x)$ yechimga ega bo'ladi. Ayirmali sxema qurish uchun [0, 1] kesmada muntazam

$$\omega_h=\{x_i=ih, \quad i=0,1,\dots,N, \quad hN=1\}$$

to'rni olamiz. Quyidagi

$x_{i\pm\frac{1}{2}} = x_i \pm \frac{h}{2}$, $\quad w(x) = p(x)\frac{d}{dx}u(x)$, $\quad w_{i\pm\frac{1}{2}} = w\left(x_{i\pm\frac{1}{2}}\right)$ belgilashlarni kiritib,

(5.29) tenglamani $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ oraliqda integrallaymiz, natijada

$$w_{i+\frac{1}{2}} - w_{i-\frac{1}{2}} - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)u(x)dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx = 0 \qquad (5.32)$$

tenglama hosil bo'lib, u $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right]$ kesmada issiqlikning balans tenglamasini aniqlaydi. Endi

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)\, u(x)dx$$

integralni uning $u_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx$ taqribiy qiymati bilan almashtirib, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x)dx, \quad \varphi_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(x)dx. \qquad (5.32)$$

Natijada (5.31) tenglama

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{h} - d_i\, u_i + \varphi_i = 0 \qquad (5.33)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Endi $w_{i\pm\frac{1}{2}}$ ni *u(x)* ning to'r nuqtalaridagi qiymatlari orqali ifodalaymiz. Buning uchun $\frac{du}{dx} = \frac{w(x)}{p(x)}$ ifodani $[x_{i-1}, x_i]$ kesmada integrallaymiz, natijada

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{p(x)}dx \approx w_{i-\frac{1}{2}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \qquad (5.34)$$

hosil bo'ladi. Agar

$$a_i = \left(\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} \qquad (5.35)$$

deb belgilab olsak, (5.34) dan quyidagi taqribiy tengliklarni hosil qilamiz:

$$w_{i-\frac{1}{2}} = a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h}, \quad w_{i+\frac{1}{2}} = a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h}.$$

Bu ifodalarni (5.33) tenglamaga quyib, izlanayotgan funksiyaning x_{i-1}, x_i, x_{i+1} nuqtalardagi qiymatini o'z ichiga olgan ushbu

$$\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}\left(u_{i+1} - u_i\right) - a_i\left(u_i - u_{i-1}\right)\right] - d_i\, u_i + \varphi_i = 0 \qquad (5.36)$$

ayirmali tenglamaga ega bo'lamiz. (5.36) tenglamani ω_h to'r sohaning barcha ichki nuqtalari, ya'ni *i=1, 2,.., N-1* uchun yozsak, u holda *N+1* ta $u_0, u_1, ..., u_N$ noma'lumli *N-1* tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ikkita yetmagan tenglamani (5.30) dastlabki shartdan hosil qilamiz:

$$u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta. \qquad (5.37)$$

Ayirmali masalaning yechimini differensial masalaning yechi- midan farq qilish uchun uni y orqali belgilaymiz, demak, $y_i = y(x_i)$, $x_i \in \omega_h$. Endi (5.36) va (5.37) tenglamalarni birlashtirib, (5.29), (5.30) chegaraviy masala uchun quyidagi ayirmali sxemaga ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})\right] - d_i y_i + \varphi_i = 0, \\ i = 1, 2, ..., N-1, \\ y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta. \end{array} \right\} \qquad (5,38)$$

Bu sistemani haydash metodi bilan yechish maqsadga muvofiq bo'ladi. Buning uchun (5.38) sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad i = 1, 2, ..., N-1, \quad y_0 = \alpha, \; y_N = \beta,$$

bunda

$$A_i = a_{i-1}, \qquad B_i = a_{i+1}, \qquad C_i = a_i + a_{i+1} + h^2 d_i, \qquad F_i = h^2 \varphi_i.$$

Chegaraviy masalaning koeffitsientlariga qo'yilgan shartlardan $a_i > 0$ va $d_i \geq 0$ kelib chiqadi, bulardan esa $C_i \geq A_i + B_i$ ni, ya'ni haydash metodining turg'unlik shartini hosil qildik. Demak, (5.38) ayirmali masala yagona yechimga ega va bu yechimni haydash metodi bilan topish mumkin.

Endi (5.29) differensial tenglamani (5.38) ayirmali tenglama bilan almashtirganda yuzaga keladigan approksimatsiya xatoligini tekshiramiz. Buning uchun (5.29) tenglamaning chap tomonini $Lu(x)$ va (5.38) tenglamaning chap tomonini $L_h y_i$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$Lu(x) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x) + f(x),$$

$$L_h y_i = \frac{1}{h}\left[a_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - a_i(y_i - y_{i-1})\right] - d_i y_i + \varphi_i.$$

Faraz qilaylik, $\vartheta(x)$ yetarlicha silliq funksiya bo'lib, $\vartheta_i = \vartheta(x_i)$ uning ω_h to'rdagi qiymati bo'lsin. Endi

$$L_h\vartheta_i - L\vartheta(x_i) = o(h^2) \qquad (5.39)$$

baho o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun $L_h\vartheta_i$ operator tar- kibidagi $\vartheta_{i\pm1} = \vartheta(x_i \pm h)$ ni x_i nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz. Ravshanki,

$$\frac{\vartheta_{i\pm1} - \vartheta_i}{\pm h} = \vartheta'_i \pm \frac{h}{2}\vartheta''_i + \frac{h^2}{6}\vartheta'''_i + o(h^3).$$

Demak,

$$L_h \vartheta_i = \frac{a_{i+1} - a_i}{h} \vartheta_i' + \frac{a_{i+1} + a_i}{2} \vartheta_i'' + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6} \vartheta_i''' - d_i \vartheta_i + \varphi_i + o(h^2).$$

Ikkinchi tomondan

$$Lu(x_i) = p(x_i)\vartheta_i'' + p'(x_i)\vartheta_i' - q(x_i)\vartheta_i + f(x_i).$$

Bu munosabatlardan

$$L_h \vartheta_i - L\vartheta(x_i) = \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - p'(x_i)\right)\vartheta_i' + \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - p(x_i)\right)\vartheta_i'' + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6}\vartheta_i''' -$$
$$-(d_i - q(x_i))\vartheta_i + (\varphi_i - f(x_i)) + o(h^2)$$

ni hosil qilamiz. (5.39) shart bajarilishi uchun

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = p'(x_i) + o(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = p(x_i) + o(h^2), \tag{5.40}$$

$$\varphi_i = f(x_i) + o(h^2), \quad d_i = q(x_i) + o(h^2) \tag{5.41}$$

tengliklar o'rinli bo'lishi kerak.

Endi $k(x) = \frac{1}{p(x)}$ deb belgilaymiz va $k(x)$ ni $x_{i-\frac{1}{2}}$, nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz, natijada

$$\frac{1}{a_i} = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)dx = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[k_{i-\frac{1}{2}} + \left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)k'_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2 k''_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^3 k'''_{i-\frac{1}{2}} + o(h^4)\right] =$$
$$= k_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{24}k''_{i-\frac{1}{2}} + o(h^3)$$

hosil bo'ladi. Demak,

$$a_i = p_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24}\frac{k''_{i-0.5}}{k_{i-0.5}} + o(h^4) = p_{i-\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24}\frac{k''_i}{k_i} + o(h^3).$$

Shunga o'xshash

$$a_{i+1} = p_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{24}\frac{k''_i}{k_i} + o(h^3).$$

Bulardan esa

$$\frac{a_{i+1}+a_i}{2}=\frac{p_{i+\frac{1}{2}}+p_{i-\frac{1}{2}}}{2}+o\left(h^2\right)=p_i+o\left(h^2\right),$$

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h}=\frac{p_{i+\frac{1}{2}}+p_{i-\frac{1}{2}}}{h}+o\left(h^2\right)=p'(x_i)+o\left(h^2\right)$$

larga ega bo'lamiz, bular esa (5.39) ni isbotlaydi. (5.41) tengliklarning bajarilishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan ham, d_i va φ_i ni mos ravishda $q(x_i)$ va $f(x_i)$ bilan almashtirish (5.32) integralni o'rta tugunli to'g'ri burchakli to'rtburchak formulasi bilan hisoblashdan iboratdir. Ma`lumki, bunday formulaning qoldiq hadi $o\left(h^2\right)$ (7-bobga q.). Shunday qilib, biz (5.40), (5.41) tengliklarni va shu bilan birga (5.39) bahoni ko'rsatdik. Bu esa $L_h y_i$ operator $Lu(x)$ ni (5.29), (5.30) masalaning yechimida h ga nisbatan ikkinchi tartibli approksimatsiya qilishini ko'rsatadi.

1-eslatma. (5.38) ayirmali sxemani amalda qo'llash, uning koeffisientlarini topish uchun (5.32) va (5.35) integrallarni aniq hisoblash shart emas. Koeffisientlarni topish uchun $o\left(h^2\right)$ yoki bundan yuqori aniqlikka ega bo'lgan kvadratur formulalar bilan taqribiy hisoblash mumkin. Masalan, (5.32) va (5.35) integrallarga to'g'ri to'rtburchaklar formulasini qo'llasak, koeffisientlar quyidagicha topiladi: $d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i), \quad a_i = p\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right).$

Agar trapetsiyalar formulasini qo'llasak,

$$a_i = \frac{2p_i\, p_{i-1}}{p_i + p_{i+1}}, \quad d_i = \frac{q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad \varphi_i = \frac{f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}}}{2}$$

larni hosil qilamiz.

Ko'rsatish mumkinki, (5.38) ayirmali masalaning yechimlari ketma-ketligi $\{y_h(x_i)\}$ $h \to 0$ da $C(\omega_h)$ to'rli fazoda dastlabki (5.29), (5.30) differensial masalaning $u(x)$ yechimiga ikkinchi tartib bilan yaqinlashadi, boshqacha qilib aytganda,

$$\|y_h - y\|_{C(\omega_h)} = \max_{x_i \in \omega_h} |y_h(x_i) - u(x_i)| \le Mh^2$$

baho o'rinli bo'ladi (q. [28]).

2-eslatma. Balans metodini boshqa chegaraviy masalalar uchun ham qo'llash mumkin. Bundan tashqari, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ funksiyalar uzilishga ega bo'lgan hollarda ham ayirmali sxemaning yaqinlashishini tekshirish uchun koeffisientlarni (5.32) va (5.35) integrallar orqali ifodalash katta ahamiyatga ega.

Чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик масаласи учун баланс усули

$Q = \{(t,x) : 0 < t < \infty,\ \underline{X} < x < \overline{X}\}$ соҳада қуйидаги масалани кўрайлик

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - v\,(t,x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + F(t,x,y,u) \tag{1.1}$$

$$u(0,x,y) = u_0(x,y) \ge 0, \qquad \underline{X} \le x \le \overline{X}, \quad , \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} u(t,\underline{X}) = \psi_1(t) \\ u(t,\overline{X}) = \psi_2(t) \end{cases} \qquad m>0, \tag{1.3}$$

бу ерда $D\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ - диффузия коэффициентлари, *супп месс* *y(m,x)<∞*, $u = u(t,x) \ge 0$ қидирилаётган ечимлар, $u_0(x,y)$ $\underline{X} \le x \le \overline{X}$ - финит (чекли) функция, $\psi_i(t)$- манфий бўлмаган функциялар, $v\,(t,x,u)$- муҳит тезликлари.

(1.1) тенглама қатор физик жараёнларни ифодалайди: чизиқли бўлмаган муҳитда реаксия диффузия жараёнини, бир жинсли бўлмаган чизиқсиз муҳитдаги иссиқлик тарқалиш жараёнини, чизиқли бўлмаган суюқлик ва газнинг филтрациясини ифодалаб улар политрапия қонуни ва бошқа чизиқли бўлмаган кўчишларнинг мавжудлигини ифодалайди. $\varepsilon F(t,x,u)$ ҳад ($\varepsilon=+1$) манбанинг ёки ($\varepsilon= -1$) ютилишнинг мавжудлигига мос келиб, унинг қуввати $F(t,x,u)$ га тенг, $v\,(t,x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$ лар эса $v\,(t,x,u)$ тезликларга эга муҳитнинг ҳаракатига мос келади.

(1.1) тенглама учун Коши масаласи ва чегаравий масалалар бир ўлчамли ва кўп ўлчамли ҳолатларда кўплаб авторлар томонидан кузатилган [1-5]. ε=±1 да $D\left(t,x,u,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ параметрларнинг айрим хусусий ҳоллари [1-2] да ўрганилган.

(1.1) тенглама билан ифодаланган жараёнларда температуранинг чекли тезликли тарқалиш ҳодисаси рўй беради [1]. Ютулиш коеффициенти мавжуд бўлганда локализация бўлиши мумкин. Конвектив кўчиш мавжуд бўлганда эса “орқа” фронт ҳодисаси рўй бериши мумкин, яъни чап фронт маълум вақтдан кейин тўхташи ва муҳит ҳаракати бўйлаб ҳаракат қилиши мумкин.

(1.1)-(1.3) масала учун параметрларнинг турли қийматларида, $D\left(t,x,u,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$, $F(t,x,y,u)$ функсияларга ва $v\,(t,x,u)$ га боғлиқ бўлган ҳолда турли хил ечимлар пайдо бўлиши мумкин (чекли тезликли, локализацияланган, глобаллашган ва бошқалар).

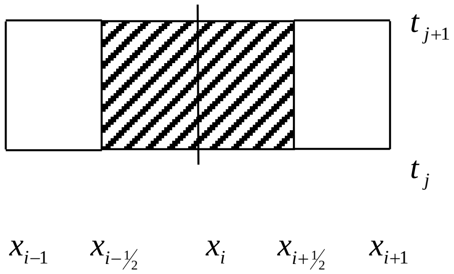
Физика томондан қараганда чекли айирмалар усули узлуксиз муҳитдан дискрет моделга ўтишни англатади. Бундай ўтишда физик жараёнларни асосий хоссаларининг сақланиши талаб этилади. Сақланиш қонуни шундай хоссалардан бири ҳисобланади. Сақланиш қонунининг сеткасида ифодаланган айирмалар схемасини **консерватив (ёки дивергент) схема** деб аталади.

Сақланиш қонуни ҳамма сеткали соҳалар, консерватив схемалар учун айирмали тенгламанинг алгебраик натижаси мавжуд бўлган консерватив айирмали схема олиш мақсадида, сеткали соҳада элементар ҳажм учун ёзилган баланс тенгламасидан фойдаланамиз. Баланс тенгламалардаги интеграл ва ҳосилаларни тақрибий айирмага оид ифодалар билан алмаштириш зарур. Натижада бир жинсли айирмали схемани оламиз. Бундай **консерватив бир жинсли айирмали схемани** олиш усулини баланснинг интегро – интерполяцион усули деб атаймиз.

m ва x бўйича текис сеткани қурамиз:

$$\overline{\omega_{\tau h}} = \{t_j = j\tau,\ j = 0,1,\ldots,m,\ \tau m = T;\ x_i = \underline{X} + ih,\ i = 0,1,\ldots,n,\ h = \frac{\overline{X} - \underline{X}}{n}\}$$

$\left(x_{i-\frac{1}{2}} \le x \le x_{i+\frac{1}{2}},\ t_j \le t \le t_{j+1}\right)$ тўғри тўртбурчак учун интегро – интерполяцион усули орқали баланс тенгламасини ёзамиз. (1-расм)



1-расм.

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u(x,t_{j+1}) - u(x,t_j)\right]dx = \int_{t_j}^{t_{j+1}} D\frac{\partial u}{\partial x}dt\Bigg|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} -$$

$$-\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x}dxdt + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(t,x,u)dxdt$$

(2.14)

Шундай экан D, v, F коеффициентлар – ўз аргументларининг узлуксиз функсияси бўлганлиги сабабли қуйидаги формуладан фойдаланиш мумкин:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left[u(x,t_{j+1}) - u(x,t_j)\right]dx \approx h\left[u(x_i,t_{j+1}) - u(x_i,t_j)\right]$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} D\frac{\partial u}{\partial x}dt\Bigg|_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \approx$$

$$\approx \tau\left(d_{i+1,\,j+1}\frac{u(x_{i+1,}t_{j+1}) - u(x_i,t_{j+1})}{h} - d_{ij+1}\frac{u\left(x_i,t_{j+1}\right) - u\left(x_{i-1},t_{j+1}\right)}{h}\right)$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x}dxdt \approx$$

$$\approx \tau v(x_i,t_{j+1}u(x_i,t_{j+1}))\left(u(x_{i+1},t_{j+1})-u(x_i,t_{j+1})\right)$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(t,x,u)dxdt \approx \tau hF\left(x_i,t_{j+1},u\left(x_i,t_{j+1}\right)\right) \qquad (2.15)$$

Бу ерда d_{ij+1} - D иссиқлик ўтказувчанлик коеффициентининг бир ёки бир нечта нуқтадаги ўртача қиймати, масалан,

$$d_{ij+1} = D\left(t_{j+1}, x_{i-1/2}, \frac{u(t_{j+1},x_{i-1})+u(t_{j+1},x_i)}{2}\right),$$

$$d_{ij+1} = \frac{2D(t_{j+1},x_i,u(t_{j+1},x_i))D(t_{j+1},x_{i-1},u(t_{j+1},x_{i-1}))}{D(t_{j+1},x_{i-1},u(t_{j+1},x_{i-1}))+D(t_{j+1},x_i,u(t_{j+1},x_i))}, \qquad (2.16)$$

$$d_{ij+1} = \frac{D(t_{j+1},x_{i-1},u(t_{j+1},x_{i-1}))+D(t_{j+1},x_i,u(t_{j+1},x_i))}{2}$$

(2.15) ни (2.14) га қўйиб икки қатламли консерватив схемани оламиз:

$$\frac{\hat{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h}\left[\hat{d}_{i+1}\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h} - \hat{d}_i\frac{\hat{y}_i-\hat{y}_{i-1}}{h}\right] - \hat{w}_i\frac{\hat{y}_{i+1}-\hat{y}_i}{h} + \hat{f}_i \quad (2.17)$$

Бу ерда $\hat{y}_i = y_{i,j+1} = y\left(t_{j+1},x_i\right)$, $y_i = y_{i,j} = y(t_j,x_i)$, $\hat{d}_i = d(t_{j+1},x_i)$ га тенг ва қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$y_i^0 = u_0(x_i)$, *и=0,1,...,Н;* $y_0^j = \psi_1(t_j)$, $y_N^j = \psi_2(t_j)$, *ж=0,1,...,М* .
(2.18)

Ҳосил бўлган (2.17) схема y_i^j функсияга нисбатан чизиқсиз бўлиб, унинг ечимларини топиш учун итерация усулидан фойдаланамиз.

Итерация жараённи қуйидагича қурамиз:

1) Оддий итерация усули

$$\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h}\left[\overset{(s)}{d}_{i+1}\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1} - \overset{(s+1)}{y}_i}{h} - \overset{(s)}{d}_i\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - \overset{(s+1)}{y}_{i-1}}{h}\right] - \overset{(s)}{w}_i\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1} - \overset{(s+1)}{y}_i}{h} + \overset{(s)}{f}_i \quad , \qquad (2.18)$$

2) Нютон усули

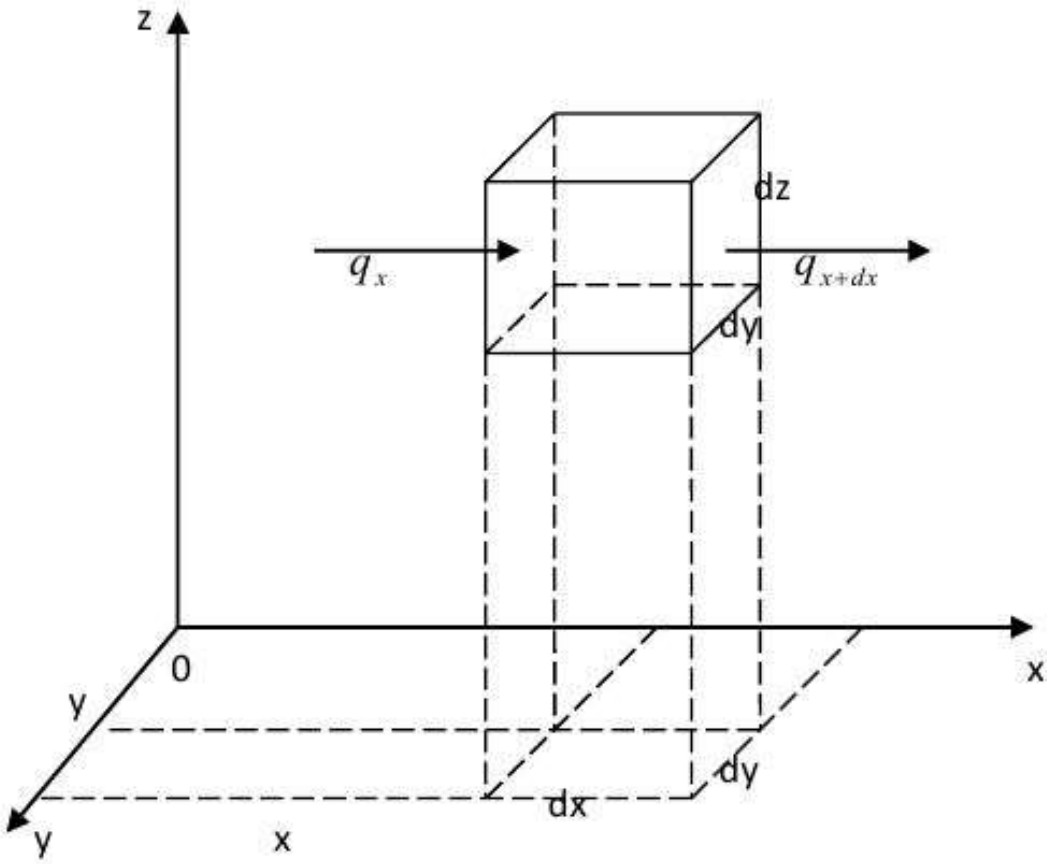
$$\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h}\left[\overset{(s)}{d}_{i+1}\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1} - \overset{(s+1)}{y}_i}{h} - \overset{(s)}{d}_i\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - \overset{(s+1)}{y}_{i-1}}{h}\right] - \overset{(s)}{w}_i\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1} - \overset{(s+1)}{y}_i}{h} + \overset{(s)}{f}_i + \left(\overset{(s)}{f}_i\right)'\left(\overset{(s+1)}{y}_i - \overset{(s)}{y}_i\right) \quad , (2.19)$$

3) Махсус усул

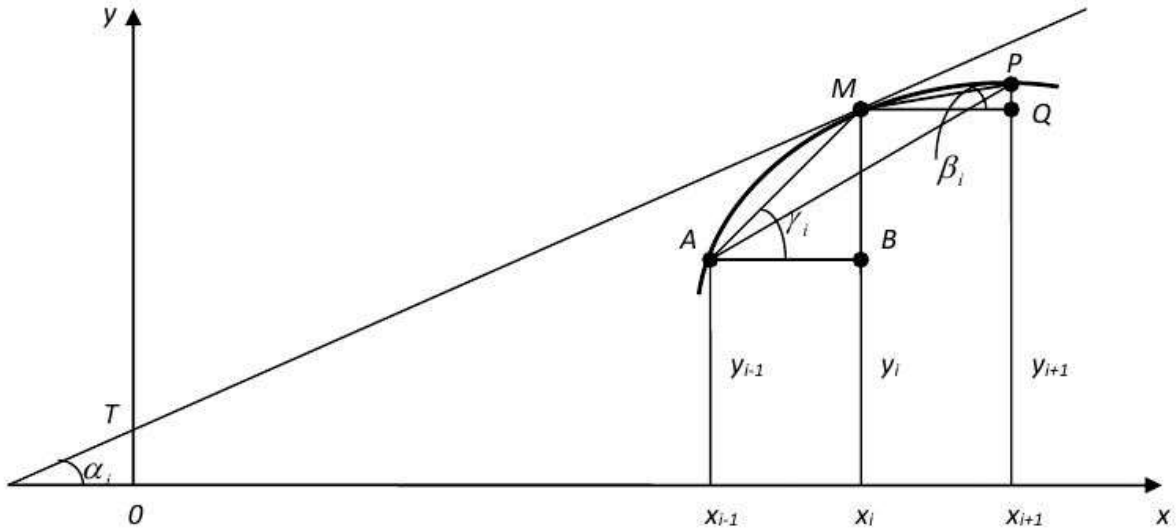
$$\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - y_i}{\tau} = \frac{1}{h}\left[\overset{(s)}{d}_{i+1}\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1} - \overset{(s+1)}{y}_i}{h} - \overset{(s)}{d}_i\frac{\overset{(s+1)}{y}_i - \overset{(s+1)}{y}_{i-1}}{h}\right] - \overset{(s)}{w}_i\frac{\overset{(s+1)}{y}_{i+1} - \overset{(s+1)}{y}_i}{h} + \overset{(s+1)}{y}_i\frac{\overset{(s)}{f}_i}{\overset{(s)}{y}_i}. \quad (2.20)$$

$\overset{(s+1)}{y}$ функсияга нисбатан (2.18)-(2.20) айирмали схемалар чизиқли бўлади. Бошланғич итерация сифатида $\overset{(0)}{y}{}^{j+1} = y^j$ вақт бўйича *й* ва *w* функсиялар олинади. Итерациялар яқинлашиши учун $\max_i\left|\overset{(s+1)}{y_i} - \overset{(s)}{y_i}\right| \le \varepsilon$ шарт бажарилиши талаб этилади.

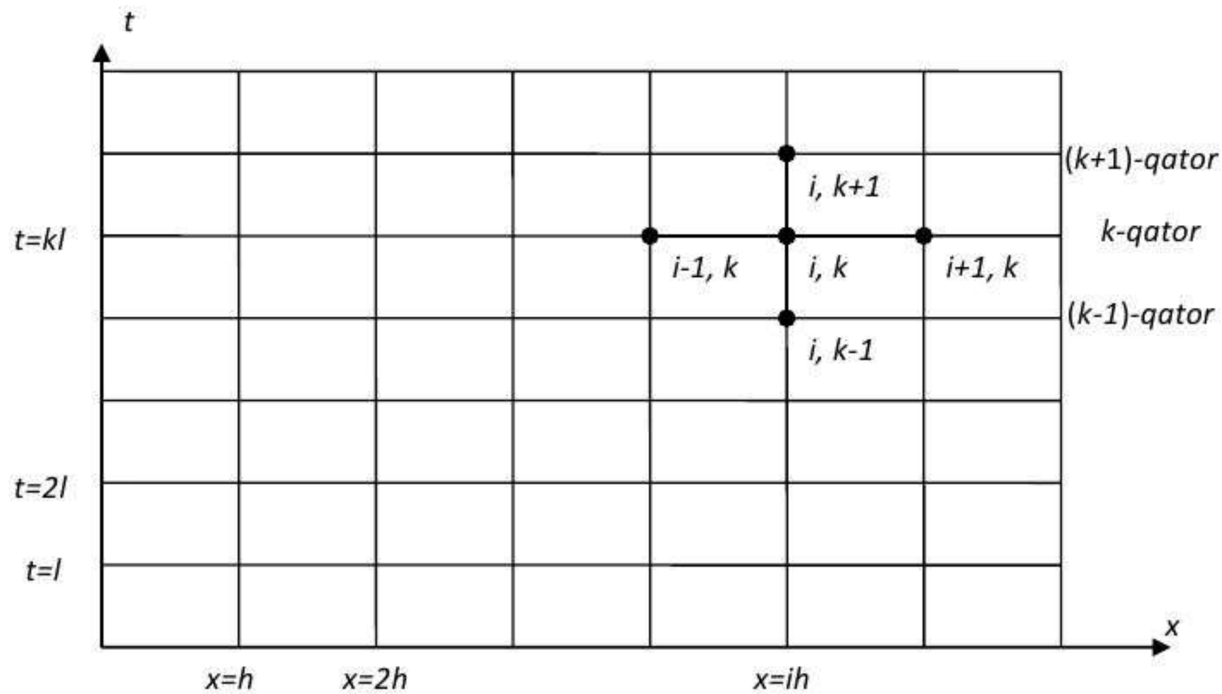
6-Мавзу. Квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари ва чизиқсиз соҳаларда иссиқлик тарқалиш жараёнларининг моделлари. Чекли айирмали схемалар. Чизиқлаштириш.



1.1.-rasm. Elementar hajm orqali o'tuvchi issiqlik oqimi



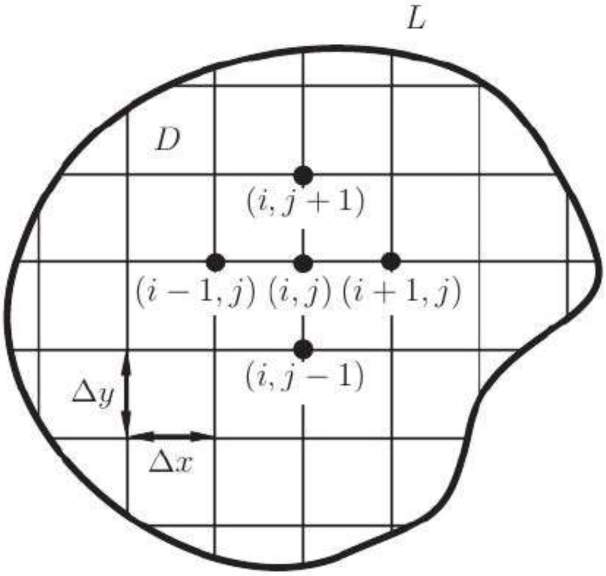
2.1-rasm. $f(x)$ funksiya hosilasini aniqlash.

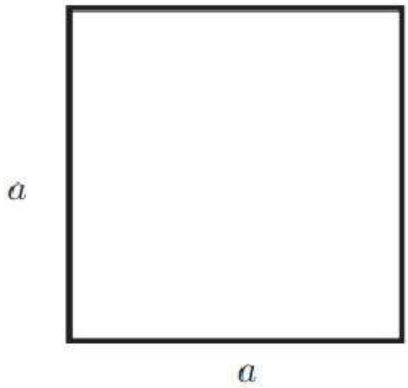


2.2-rasm. To'g'ri to'rtburchakli to'rda hisoblash sxemasi

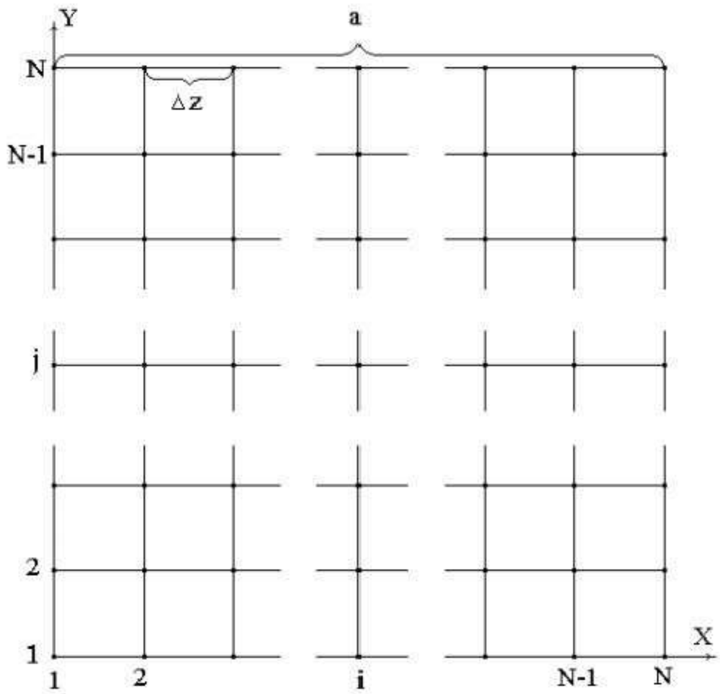
Bu qo'yilgan masalaning yechimi boshlang'ich temperatura taqsimotidan bog'liq emas, shuning uchun $\Phi_0(x,y) = 0$ deb olish mumkin.

Tadqiqot sohasi D ni Ox va Oy o'qlariga mos Δx va Δy qadamli teng taqsimlangan to'r bilan qoplaymiz (3.2-rasm).

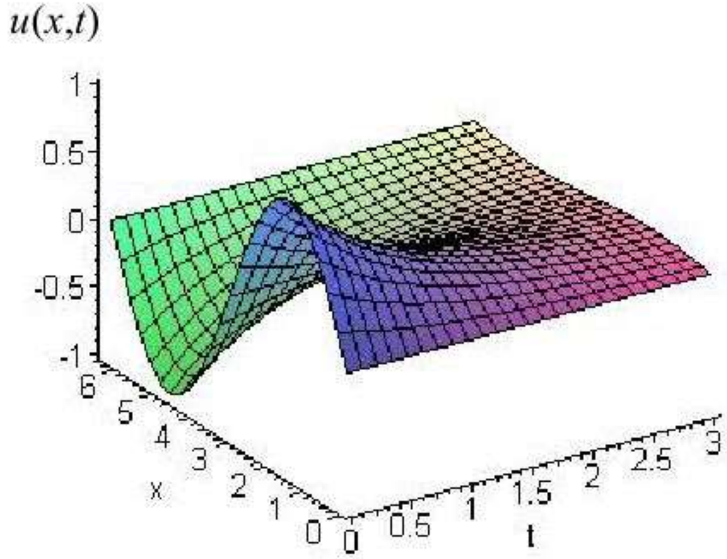




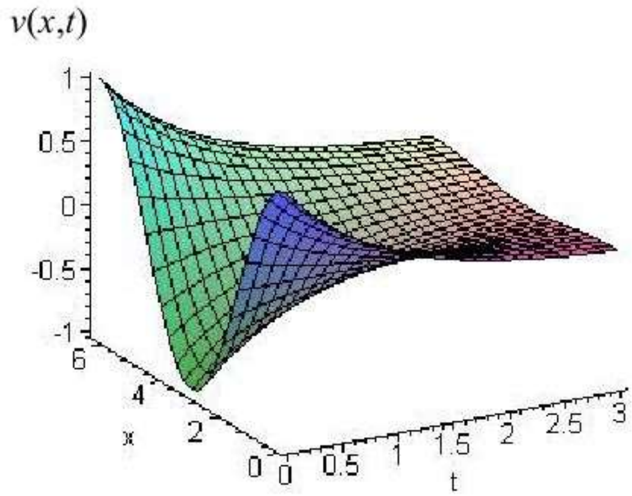
3.3-rasm. Tadqiqot obyekti



3.4-rasm. Tadqiqot sohasi bo'yicha to'r sxemasi.

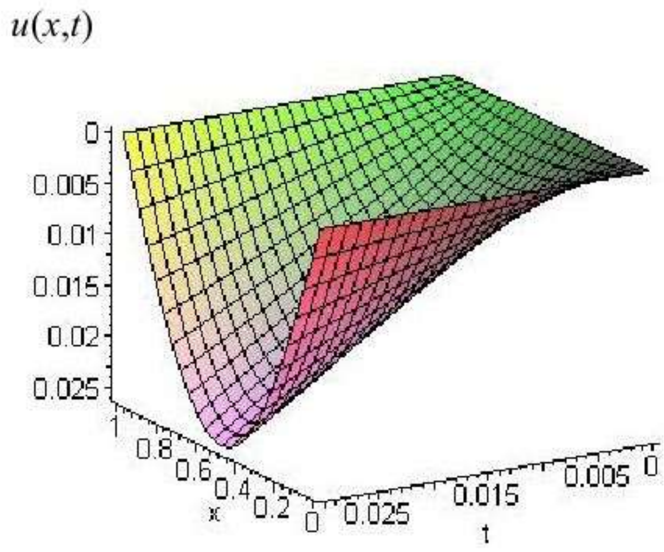

u(x,t)
1
0.5
0
-0.5
-1
6
5
4
3
x
2
1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t

a)


v(x,t)
1
0.5
0
-0.5
-1
6
4
x
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
t

b)

3.5-rasm.



3.7-rasm.

7-мавзу. Кўп ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун ўзгарувчан йўналишлар усули. Локал бир ўлчовли схемалар

Тежамкор айирмали схемалар

Ўзгарувчан йўналишлар усули

Тўртбурчакли $\overline{G}=\{l_{1\alpha}\le x_\alpha \le l_{2\alpha}\ ,\ \ \alpha=1{,}2\}$ соҳада

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(P_1\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(P_2\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-\\ -v_1(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}-v_2(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+F(t,x,u)\end{aligned} \qquad (1)$$

тенглама учун

$$u\big|_{\partial G}=\mu(x,t) \qquad (2)$$

чегаравий масалани қуйидаги бошланғич шартлар билан

$$u(x,0)=u_0(x)\ ,\ x\in G\ , \qquad (3)$$

кўриб чиқамиз, бунда ∂G, $\partial G=\overline{G}\setminus G$ тўртбурчакнинг чегараси.

(1)-(3) масалаларни тақрибий ечиш учун $\overline{G}$ да x_α бўйича тенг ўлчовли ϖ_h тўрини тенг ўлчовли бўлмаган $h_1=\{l_{21}-l_{11})/N_1$, $h_2=\{l_{22}-l_{12})/N_2$, қадамлар билан куриб оламиз. ω_τ эса $0 \le t \le t_0$ оралиқда $\tau = t_0 / n_0$ қадам билан ҳосил қилинган тўр, N_1, N_2, n_0 лар мос равишда x_1, x_2, t лардаги нуқталар сони.

(1)-(3) масалани $\varpi_h \times \omega_\tau$ тўрда ўзгарувчан йўналишли (продольно-поперечная схема) ошкормас схема ва баланс усули (интегро-интерполяцион усул) бирлашмасида аппроксимация қиламиз[9]. Ўзгарувчан йўналишли схема ғояси қуйидагини англатади: қидирилаётган *й(x,m)* тўрли функциянинг асосий қийматлари билан бир қаторда унинг оралиқ қийматлари $\bar{y} = y^{l+1/2}$, бу ерда $y = y^l$, $\hat{y} = y^{l+1}$, *л* – қатлам рақами, хам киритилиб, уни *й* нинг $t = t_{l+1/2} = t_l + \tau/2$ даги қиймати сифатида қараш мумкин. Бундай холда *л* қатламдан *л+1* қатламга ўтиш $0{,}5\tau$ қадам билан икки этапда бажарилади

$$\begin{cases} \dfrac{y^{l+1/2} - y^l}{0.5\tau} = \Lambda_1 y^{l+1/2} + \Lambda_2 y^l + \Delta_1 y^{l+1/2} + \Delta_2 y^l + \varphi \\ \dfrac{y^{l+1} - y^{l+1/2}}{0.5\tau} = \Lambda_1 y^{l+1/2} + \Lambda_2 y^{l+1} + \Delta_1 y^{l+1/2} + \Delta_2 y^{l+1} + \varphi \end{cases} \qquad (4)$$

бу ерда $\Lambda_\alpha y = (a_{i_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, $\Delta_\alpha y = (\nu_\alpha y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}$, $\varphi = \varphi(t, x, y)$,

a_{i_α} қуйидаги формулалардан бири орқали аниқланади

$$a_{i_\alpha} = P\left(t, x_{\alpha,i}, \frac{y_{\alpha,i} + y_{\alpha,i-1}}{2}, \frac{(y_{\alpha,i})_{x_\alpha} + (y_{\alpha,i-1})_{x_\alpha}}{2} \right)$$

ёки

$$a_{i_\alpha} = \frac{1}{2}\Big(P(t, x_{\alpha,i}, y_{\alpha,i}, (y_{\alpha,i})_{x_\alpha}) + P(t, x_{\alpha,i-1}, y_{\alpha,i-1}, (y_{\alpha,i-1})_{x_\alpha}\Big) \ .$$

Бу ерда $P = ka(x)\left|\dfrac{\partial u^k}{\partial x}\right|^{n-1} u^{k-1} = P\left(t, x, u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$.

$i_\alpha = 1$ нуктада $(y_{\alpha,0})_{x_\alpha}$ ҳосилани ҳисоблашда соҳадан ташқарига чиқиб кетилади, шунинг учун бу нуқтада $0(h^2)$ тартибли бир томонлама айирмали формула (Милн схемаси) ишлатилади, яъни

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|_0 \approx \frac{-3y_{0_\alpha} + 4y_{1_\alpha} - y_{2_\alpha}}{2h_\alpha} .$$

Бу ҳолда $i_\alpha = 1$ нуқтада a_{i_α} қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади

$$a_{1_\alpha} = P\left(t, x_{\alpha,1}, \frac{y_{\alpha,1} + y_{\alpha,0}}{2}, \frac{\frac{y_{\alpha,1} - y_{\alpha,0}}{h} + \frac{-3y_{\alpha,0} + 4y_{\alpha,1} - y_{\alpha,2}}{2h}}{2} \right)$$

ёки

$$a_{1_\alpha} = \frac{1}{2}\left(P(t, x_{\alpha,1}, y_{\alpha,1}, (\text{y}_{\alpha,1})_{x_\alpha}) + P\left(t, x_{\alpha,0}, y_{\alpha,0}, \frac{-3y_{\alpha,0} + 4y_{\alpha,1} - y_{\alpha,2}}{2h} \right) \right).$$

(4) даги биринчи схема x_1 йўналиш бўйича ошкормас ва x_2 бўйича ошкор, иккинчи схема бўлса аксинча x_1 йўналиш бўйича ошкор ва x_2 бўйича ошкормас.

(4) тенгламалар системасига бошланғич шартларни

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega_h} \tag{5}$$

ва айирмали чегаравий шартларни қуйидаги кўринишда қўшамиз

$$\begin{cases} y^{l+1} = \mu^{l+1}, & i_2 = 0, \; i_2 = N_2 \\ y^{l+1/2} = \overline{\mu}, & i_1 = 0, \; i_1 = N_1 \end{cases}, \tag{6}$$

бу ерда $\overline{\mu} = \frac{1}{2}\left(\mu^{l+1} + \mu^l\right) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2\left(\mu^{l+1} - \mu^l\right).$

$\overline{\mu}$ нинг қиймати (4) системадан $y^{l+1/2}$ оралиқ қийматни йўқотилгандан кейин ҳосил бўладиган қуйидаги ифодага мос келади

$$\overline{y} = \frac{y^{l+1} + y^l}{2} - \frac{\tau^2}{4}\left(\Lambda_2 y\right)_{t,i}$$

Такидлаб ўтамизки (4)-(6) айирмали масала *т* ва x_α бўйича аппроксимациялаш иккинчи тартибга эга.

(4) айирмали схемалар мос равишда $y^{l+1/2}$, y^{l+1} функцияларга нисбатан чизиқсиз. Шунинг учун (4)-(6) системани ечиш учун итерация усулидан фойдаланилади. Итерацияли жараённи φ функцияси учун Пикар (оддий итерация) усулида хам Ньютон усулида хам бажариш мумкин. Ҳисоблаш экспериментлари натижалари шуни кўрсатадики, (4)-(6) схемалар учун иккала усул хам яроқли. Бир хил аниқликка эришиш учун Ньютон усулида Пикар усулидагига нисбатан итерациялар сони камроқ, чунки

бошланғич яқинлашиш яхши олинса у квадратик яқинлашишга эга. Схеманинг шартсиз турғунлигига вақт бўйича қадамни майдароқ олиш орқали эришилади. Вақт бўйича қадамнинг қиймати $\tau<\tau_0$ ҳисоблаш эксперименти йўли билан аниқланади.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

Амалий машғулотлар замонавий дидактик таъминот ва лаборатория жиҳозларига эга бўлган аудиторияларда ҳамда Интернет тармоғига уланган компьютер синфларида, таянч олий таълим муассасаларининг кафедраларида ташкил этилади.

Амалий машғулотларда физик жараёнларни тасвирловчи амалий масалаларнинг қўйилиши, уларни ечиш усуллари, масалани ечишнинг алгоритми ва дастурини яратиш, дастурнинг тўғрилигини тест масалаларда текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш ва олинган натижаларни таҳлил қилиш масалалари ўрганилади.

Амалий машғулотларда қуйидаги мавзулар ва вазиятли масалалар ўрганилади:

Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши ва чегаравий масалалар. Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари. Ҳайдаш (прогонка) усули.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Чизиқли чегаравий масалалар учун ошкор ва ошкормас схемаларни қўллаш.

Квазичизиқли иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун баланс усулини қўллаш ва уларни сонли ечиш. Чизиқлаштириш.

Уч қатламли схемалар яратиш ёрдамида чизиқсиз чегаравий масалаларни сонли ечиш.

Икки ўлчамли масалаларни ўзгарувчан йўналишлар усулида ечиш.

Икки ўлчами масалаларни локал бир ўлчовли схемалар ёрдамида ечиш.

Тор тебраниши малалаларини сонли моделлаштириш.

Ҳисоблаш эксперименти натижаларини визуаллаштириш.

НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Гиперболик, параболик ва эллиптик турдаги тенгламалар билан тасвирланувчи содда масалалар.
2. Бошланғич ва чегаравий масалалар қўйиш.
3. Оддий дифференциалларни аппроксимация қилиш, аппроксимация тартиби.
4. Тўрда аппроксимация хатолиги.
5. Ошкор ва ошкормас схемалар.
6. Параметрли схемалар.
7. Чекли айирмали схемаларнинг турғунлиги. Чекли айирмали схемаларнинг яқинлашиши ва аниқлиги.
8. Интегро—интерполяцион усули.
9. Уч қатламли схемалар яратиш.
10. Турғунмас, турғун, абсолют ва сўзсиз турғун схемалар.
11. Гаусс усули.
12. Прогонка усули. Прогонка усулининг турғунлиги.
13. Ўнг ва учрашувчи (встречная) прогонка усуллари.
14. Квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари ва чизиқсиз

соҳаларда иссиқлик тарқалиш жараёнларининг моделлари.

15. Квазичизиқли ва чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун чекли айирмали схемалар.
16. Чегаравий шартларни аппроксимация қилиш.
17. Чизиқсиз чекли айирмали тенгламаларни чизиқлаштириш.
18. Кўп ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун ўзгарувчан йўналишлар усули.
19. Кўп ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун локал бир ўлчовли усул.
20. Тор ва пластина тебраниши малалаларини сонли моделлаштириш.
21. Натижаларни визуаллаштириш. Визуализация учун алгоритмик тиллар ва математик пакетлардан фойдаланиш.

1. Простейшие задачи, описываемые уравнениями гиперболического, параболического и эллиптического типа.
2. Постановка начальных и краевых задач.
3. Аппроксимация простых дифференциальных операторов, порядок аппроксимации.
4. Ошибка аппроксимации на сетке.
5. Явные и неявные схемы.
6. Схемы с весами.
7. Устойчивость конечно-разностных схем. Сходимость и точность.
8. Интегро-интерполяционый метод.
9. Построение трехслойных схем.
10. Неустойчивые, устойчивые, абсолютно-устойчивые и безусловно-устойчивые схемы.
11. Метод Гаусса.
12. Метод прогонки. Устойчивость метода прогонки.
13. Правая и встречная варианты метода прогонки.
14. Квазилинейные уравнения теплопроводности и математические модели теплопроводности в нелинейной среде.
15. Конечно-разностные схемы для квазилинейных и нелинейных задач теплопроводности.
16. Аппроксимация граничных условий.
17. Линеаризация нелинейных конечно-разностных уравнений.
18. Метод переменных направлений для уравнения теплопроводности в многомерных областях.
19. Локально одномерная схема для уравнения теплопроводности в многомерных областях.
20. Численное моделирование задач колебания струны пластины.
21. Визуализация результатов. Применение алгоритмических языков и математических пакетов для визуализации.

V. КЕЙС БАНКИ

Амалий масалаларни математик моделлаштириш фанини ўқитиш маъруза, амалий машғулотлар ҳамда мустақил топшириқлардан иборат бўлиб, улар биргаликда фаннинг бутунлилигини таъминлайди. Маърузалар орқали олинган билимни мустаҳкамлаш учун амалий машғулотлар муҳим аҳамиятга эга. Мустақил машғулотлар бу фан доирасида мустақил билим олиш, ўзлаштириш ҳисобланади.

Ушбу фанни ўқитиш давомида *ақлий хужум* - ғояларни генерация (ишлаб чиқиш) методидан кенг фойдаланилади. «Ақлий ҳужум» методи бирор муаммони ечишда талабалар томонидан билдирилган эркин фикр ва мулоҳазаларни тўплаб, улар орқали маълум бир ечимга келинадиган энг самарали методдир. Ақлий хужум методининг ёзма ва оғзаки шакллари мавжуд бўлиб, бу фанда оғзаки шаклидан фойдаланилади. Фанни ўзлаштиришда талабалар замонавий ахборот технологиялари ютуқларидан, шунингдек охирги йилларда яратилган турли математик дастурий таъминотлардан фойдаланадилар.

Кейс топширик 1.

Қуйидаги квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Кейс топширик 2.

Қуйидаги чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x}\right) - v(t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Кейс топширик 3.

Қуйидаги квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-v(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+F(u).$$

Кейс топшириқ 4.

Қуйидаги чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-v\frac{\partial u^{v}}{\partial x}-F(t,x,u).$$

Кейс топшириқ 5.

Қуйидаги икки ўлчовли чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(t,x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(G\left(t,x,y,u,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Кейс топшириқ 6.

Икки ўлчовли квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_1(t,x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_2(t,x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва мақолалардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мавзулар:

1. Математик моделлаштириш.
2. Содда жараёнларнинг математик моделларини яратиш.
3. Ҳисоблаш эксперименти структураси.
4. Алгебраик тенгламаларни ечиш усуллари.
5. Аппроксимация аниқлиги ва тартиби.
6. Нолокал чегаравий масалалар.
7. Ҳайдаш усулининг оқимли варианти.
8. Уч қатламли схемалар.
9. Чизиқсиз икки ўлчами масалаларни локал бир ўлчовли схемалар.
10. Математик пакетлар.
11. Юқори босқичли алгоритмик тиллар.
12. Натижаларни визуаллаштириш.

VII. ГЛОССАРИЙ
(Изоҳли луғат)

Модель - лотинча *модулус* сўзидан олинган бўлиб, ўлчов, намуна маъноларини англатади.

Модель – бу реал объектни алмаштириши мумкин бўлган, тадқиқот ва тажриба ўтказиш учун қулай ва арзон бўлган бошқа бир реал ёки абстракт объектдир. Модель реал объектнинг соддалаштирилган кўриниши бўлиб, унинг ҳамма хоссаларини эмас, балки асосий хоссаларинигина ўзида мужассам этади.

Математик модель – реал объектни тасавуримиздаги абстракт кўриниши бўлиб, у математик белгилар ва баъзи бир қонун–қоидалар билан ифодаланган бўлади. Масалан, Ньютон қонунлари, массанинг сақланиш қонуни.

Физик модель - Тажриба ўтказишга мўлжалланган тажриба участкалари катта экин майдонларининг, лаборатория машғулотларини ўтказишга мўлжалланган асбоб ускуналар физик моделларга мисол бўлади. Масалан, кимёвий ёки биологик лабораторияларда фойдаланиладиган асбоб ускуналар ҳамда токамак қурилмаси (ер шароитида термоядро реакциясини амалга оширадиган қурилма).

Графикли модель - Схемалар, чизмалар, расмлар, илмий ва тарихий асарлар мисол бўла олади. Масалан, глобус ер шарининг, инсоннинг сурати унинг ўзининг, М.З.Бобурнинг «Бобурнома» асари асарда келтирилган даврнинг графикли моделидир.

Факторлар - моделлаштиришда ташқи муҳитнинг текширилаётган объект параметрларига таъсир қилувчи кўрсаткичлари.

Математик моделлаштириш - реал объект ёки жараёнларни математик усуллар воситасида назарий тадқиқ қилиш усули.

Моделлаштиришнинг моҳияти - объектни бошқа соддароқ объект (модель) билан алмаштириб, моделни хусусиятини тадқиқ қилиш орқали оригинал объектни ўрганишдан иборат.

Реал объект ва унинг математик моделининг мувофиқлиги - объект ва унинг математик модели динамикаларининг сифат ва миқдор жиҳатдан ўхшашлиги.

Авж олувчи режимлар - вақтнинг чекли қийматида қандайдир миқдор чексизликка айланувчи жараёнлар.

Ҳисоблаш эксперименти – компьютер модели яратилган ходиса, жараён ва машиналарни тадқиқ қилиш усули.

Динамик модел – жараёнларнинг вақт бўйича кечишини тасвирловчи математик модел.

Имитацион модел - математическая модель, воспроизводящая поведение исследуемого объекта и применяемая для постановки компьютерных экспериментов, выявляющих особенности функционирования объекта при различных внешних условиях и управляющих воздействиях.

абиотик ўзгаришлар - табиий ўзгаришлар – зилзилалар, вулқонлар отилиши, сув тошқинлари ва шу кабилар.

биотик ўзгаришлар - популяциялар биомассасининг ёки сонининг ўзгариши, популяцияларнинг қирилиб кетиши.

антропоген ўзгаришлар - инсон фаолияти натижасида атроф муҳитда содир бўладиган ўзгаришлар.

Моделнинг универсаллиги - конкрет объектни модели бошқа ўхшаш объектларга қўлланиши учун етарли даражада универсал бўлиши керак. Бу дегани реал объектни математик модели бошқа ўхшаш объектларга жуда кам ўзгартиришлар оркали қўллаш учун етарли даражада умумий бўлиши керак.

Моделнинг компактлиги - модел шундай қурилиши керакки, уни деярли ўзгартиришсиз ўзидан юқори даражали моделга модел ости сифатида киритиш мумкин бўлсин. Масалан, дарахтни математик модели ўрмон экосистемаси моделининг бир блоки сифатида қўлланилиши. Фотосинтез жараёнининг математик модели дарахт математик моделини бир блоки сифатида ишлатилиши мумкин бўлсин.

Моделнинг соддалиги - математик моделни қуришда иккинчи, учинчи даражали факторлар ҳисобга олинмаслиги лозим. Бу факторларни ҳисобга олиш ММни мураккаблаштиради. Мисол: эпидемияни тарқалиши жараёни математик моделида шамол тезлигини ҳисобга олиш моделни анча мураккаблаштиради. Аммо атроф – муҳитни экологиясини ўрганишда шамол тезлигини ва йўналишини ҳисобга олмаслик мумкин эмас. Сув қувуридаги сувни ҳаракатини ўрганаётганда ойнинг тортишиш кучини ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Аммо, денгиз ва океанлардаги сув тошқинларини ўрганаётганда ойнинг тортишиш кучини албатта ҳисобга олиш лозим. Бу тошқинлар ойнинг тортиши натижасида ҳосил бўлади.

Моделнинг сезгирлиги - даражаси паст бўлиши лозим. ММни қуришда ҳисобга олиниши зарур бўлган асосий факторларга нисбатан моделни сезгирлик даражаси паст бўлиши лозим. Яъни, реал объектни ўрганаётган пайтда ўлгашлар кўп ҳолларда хатолик билан бажарилади. Айрим ҳолларда моделда иштирок этаётган асосий факторни аниқ ўлчашни имкони бўлмайди. Масалан, об – ҳавони башорат қилиш ҳалигача тахминий, пахта майдонидаги ҳашоратлар сонини аниқ ўлчаш мумкин эмас.

Моделнинг мослашувчанлиги - модел блокли принципда қурилиши лозим. Бунда ўзгарувчилар иложи борича алоҳида блокда, автоном ҳолда ҳисобланиши мақсадга мувофиқ. Бу эса математик моделни тез ўзгартириш, модификация қилиш имконини яратади. Умуман олганда бу талаб унга катта бўлмаган ўзгартириш орқали бошқа реал объектга мослашишни, яъни математик моделни универсаллигини характерлайди.

детерминирланган модель - ҳар бир мумкин бўлган кириш параметрлари тўплами учун чиқиш параметрлари бир қийматли аниқланган модель.

детерминирланмаган, стохастик (эҳтимолли) модель – ҳар бир мумкин бўлган кириш параметрлари тўплами учун чиқиш параметрлари бир қийматли аниқланмаган модель.

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Меъёрий- ҳуқуқий хужжатлар.

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг «Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» 2015 йил 12 июндаги ПФ-4732-сон Фармони.
2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2010 йил 2 ноябрдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагогик кадрлар тайёрлаш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1426-сонли Қарори.
3. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 йил. 11-12-сон, 295-модда.
4. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 24 июлдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагог кадрлар тайёрлаш ва аттестациядан ўтказиш тизимини янада такомиллаштириш тўғрисида”ги ПФ–4456-сон Фармони.
5. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 28 декабрдаги “Олий ўқув юртидан кейинги таълим хамда олий малакали илмий ва илмий педагогик кадрларни аттестациядан ўтказиш тизимини такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 365- сонли Қарори.

Махсус адабиётлар.

1. Бриан Р. Ҳунт, Роналд Л. Липсман, Жонатҳан М. Росенберг А Гуиде то МАТЛАБ. Самбридге Университй Пресс. 2014.
2. Соллинс Г.W. Фундаментал нумерисал метҳодс анд дата аналйсис. Георге W. Соллинс, ИИ 2003.
3. Г. W. Соллинс, Фундаментал нумерисал метҳодс анд дата аналйсис, Публишер Ҳарвард Университй пресс, 2003, п. 259.
4. Л. Р. Ссотт, Нумерисал Аналйсис, Принсетон Университй Пресс, 2011, п.323.

5. Р. Л. Бурден анд Ж. Д. Фаирес, Нумерисал Аналйсис,Нинтҳ эдитион, Броокс/Соле публишер, Сенгаге Леарнинг, Санада, 2011, ИСБН-13: 978-0-538-73351-9.

6. Самарский А.А., Михайлов М. Математическое моделирование: идея, методы примеры. М.: Физ.мат.лит., 2005.-320с.

7. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Вводные лекции по прикладной математике. М. Наука. 1984, 190 с.

8. Математическое моделирование / Под ред. Дж. Эндрюса, Р. Мак-Лоуна; пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 278с.

9. Смитҳ Г.Д. Нумерисал Солутион оф Партиал Дифферентиал эқуатионс: фините дифференсе метҳодс 3рд эд. — Охфорд Университй Пресс, 1986. 350 п.

10. W. Ҳ. Пресс, С. А. Теуколскй, W. Т. Веттерлинг, Б. П. Фланнерй, Нумерисал Ресипес ин С, Тҳе Арт оф Ссиентифис Сомпутинг, Тҳирд эдитион, 2007, Самбридге университй пресс, ИСБН-13: 978-0521880688.

11. Дадажонов Т., Мухитдинов М. Матлаб асослари. Тошкент. ЎзФА Фан нашриёти. 2008 й.

12. Кирьянов Д. МатҳСад 13. С.Петербург. 2006.

13. Матросов А. Мапле 6. Изд-во “БХВ-Петербург”, 2001.

Интернет манбаалар

12. www.инфосом.уз

13. www.пресс-уз.инфо

14. www.зиёнет.уз

15. www.еду.уз

16. ҳттп://осw.мит.еду/соурсес/матҳематисс/

17. ҳттп://онлине.стат.нссу.еду/онлине-програмс/онлине-градуате-статистисс-соурсес/

18. ҳттп://усерс.мат.уними.ит/усерс/паварино/фисиса/

19. ҳттп://www.лифелонг-леарнерс.сом/пде/сом/

20. ҳттп://осw.мит.еду/соурсес/матҳематисс/18-335ж-интродустион-то-нумерисал-метҳодс-фалл-2004/

21. ҳттп://ситес.стат.псу.еду/онлине/девелопмент/

22. ҳттп://студй.сом/онлине_статистисс_соурсе.ҳтмл