ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

«НОЧИЗИҚЛИ МАСАЛАЛАРНИ СОНЛИ ЕЧИШ УСУЛЛАРИ» МОДУЛИНИНГ

Ў Қ У В – У С Л У Б И Й М А Ж М У А С И

Тошкент – 2018

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 27 мартдаги 247-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: ф.-м.ф.д. **З.Р. Рахмонов**

Тақризчи: ф.-м.ф.д., профессор **Б.Ф.Абдурахимов**
ф.-м.ф.д., профессор **З.Х.Юлдашев**

Ўқув -услубий мажмуа ЎзМУ Илмий кенгашининг 2017 йил 30 августдаги 1- сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Мазкур дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПФ-4732-сон Фармонидаги устувор йўналишлар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Маълумки мамлакатимиз мустақиллиги миллий таълим соҳасида тубислоҳотларни амалга ошириш учун замин яратди. Замонавий талаблар инобатга олинган ҳолда, олий ўқув юртларининг педагог кадрларини қайта тайёрлаш йўналишлари бўйича қайта тайёрлаш ва малака оширишнинг ўқув дастурларини мунтазам такомиллаштириб бориш ишларини ташкил этиш бугунги куннинг долзарб вазифаларидан бири хисобланади.

Бу курсда тингловчилар барча фанлардан олган билимларини қўллаб физик жараёнлар учун математик моделлар яратиш, амалий масалалар қўйиш, яратилган математик моделларнинг адекватлигини текшириш, қўйилгаш масала учун ечиш усулларини танлаш, чекли айирмали схемалар яратиш, схемаларнинг турғунлигини таъминлаш, ҳосил қилинган сонли тенгламаларни ечиш усулларини танлаш, алгоритмлар яратиш ва дастурлар тузиш, дастурни созлаш, ҳисоблаш экспериментларини ўтказиш, олинган натижаларни таҳлил қилиш ва натижаларни жадвал, график ёки анимацион кўринишларда (визуал) тақдим этиш каби кўникмаларни олади.

Бу кўникмаларни олиш давомида тингловчилар барча математик фанларининг бир бирини тўлдириши, ҳаётий масалаларни ечишда уларнинг қанчалик зарурлигини тўлароқ тушуниб етадилар, бу масалаларни ечишда информацион технологияларнинг ролини ва янги технологиялардан фойдаланиш илмий-техника ривожига салмоқли таъсир кўрсатишига амин бўладилар.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Ночизиқли масалаларни сонли ечиш усуллари” модулининг мақсади: Фанининг асосий мақсади тингловчиларда муайян амалий масалаларни сонли ечиш учун тушунча билим ва кўникмалар асосида, масалани ечиш учун татбиқ этилиши мумкин бўлган сонли усуллар орасидан энг самаралисини ажратиб олиш, яратилган ёки мавжуд усулларнинг яроқлилигини баҳолаш каби бир қатор назарий ва амалий муаммолар бўйича билим ва кўникмаларни уйғунлаштиришдан иборат.

Тингловчилар учун бир қатор тушунчалар умумлаштирилган ҳолда, усуллар эса чуқур ва батафсил равишда ўргатилади. Жумладан фан дастури тингловчиларнинг илгари ўрганилган фундаментал ва ихтисослик фанларига таянади. Фанини ўргатиш белгиланган режа асосида маъруза ўқиш, аудитория ва компьютер залларидан фойдаланган ҳолда амалга оширилади. Бунда тингловчилар чизиқсиз масалалар, уларни аппроксимация қилиш усуллари, аппроксимация тартиби, яқинлашиши ва турғунлиги, чизиқлаштириш усуллари, сонли ечишнинг итерация, прогонка усуллари каби мавзуларни чуқур ўрганадилар. Улардан ташқари масалани ечиш алгоритмини ва дастурини яратиш, дастурни созлаш, тест масалалар яратиш ва дастурнинг ишончлилигини текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш, олинган натижаларни математик ва физик жиҳатдан таҳлил қилиш ва уларни визуаллаштириш каби мавзулар билан яқиндан танишадилар.

“Ночизиқли масалаларни сонли ечиш усуллари” модулининг вазифалари:

- ночизиқли масаларни сонли ечиш усулларини ўрганиш ва уларни таҳлил қилиш;
- амалий математика масалаларини ечишда сонли усулларни қўллаш кўникмаларини ҳосил қилиш;
- амалий масалаларни сонли моделлаштириш ва сонли ҳисоблаш эксперименти натижаларини таҳлил қилиш;
- физик жараёнларни тасвирловчи хусусий ҳосилали чизиқсиз дифференциал тенгламалар ва уларга қўйилган шартларни (бошланғич, чегаравий ва бошқа) маъносини ўрганиш ҳамда сонли ечиш алгоритмларини қуриш;
- тингловчиларда масалар қўйиш ва уни ечиш усулларини танлаш кўникмаларини ҳосил қилиш;
- тингловчиларда алгоритмик фикрлашни ва дастурлаш маданиятни шакллантириш.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

“Ночизиқли масалаларни сонли ечиш усуллари” ўқув фанини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида:

Тингловчи:

– юқори даражали тилларнинг имкониятлари; алгоритмлар; модулли дастурлаш; операторларнинг чекли айирмали аппроксимацияси, аппроксимация ҳатоликлари; айирмали схемаларнинг турғунлиги ва ечимларнинг масала шартларига узлуксиз боғлиқлиги; чизиқлаштириш; итерацион жараёнларни қуриш; чизиқсиз масалаларни сонли ечишдаги ҳар ҳил аниқликдаги айирмали схемалар; айирмали масалани ечиш усулни танлаш; чизиқсиз схемаларни чизиқлаштириш усуллари; мос аналитик ва сонли ечимларни яратиш; ночизиқли масалаларни сонли моделлаштириш ва ҳисоблаш эксперименти натижаларини таҳлил қилишни ***билиши керак;***

– ҳисоблаш экспереметини ўтказиш; масалаларни ечиш учун самарали методларни танлаш ва таҳлил қилиш; айирмали схемаларни танлаш; сақланиш қонунларига мос равишда схемаларни қўллаш; юқори аниқликдаги турғун схемаларни олиш; айирмали масалани ечишнинг турғун усулларини топиш; абсолют турғун айирмали схемаларни олиш; аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш; чизиқсиз чегаравий масалаларни сонли ечишда итерацион жараёнларни қуриш; сонли натижаларни таҳлил қилиш ва визуаллаштириш ***кўникмаларига эга бўлиши керак;***

– бошланғич-чегаравий шартларни аниқлаш; амалий масалаларни математик модделлаштириш ва компьютерда ечиш; олинган натижаларни аниқлик даражасини аниқлаш мақсадида таҳлил қилиш; сонли моделлаштириш натижаларининг ўрганилаётган жараёнлар ва объектларлар билан мослигини таъминлаш ***малакаларига эга бўлиши керак.***

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

"Ночизиқли масалаларни сонли ечиш усуллари" курси маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

"Ночизиқли масалаларни сонли ечиш усуллари" модули мазмуни ўқув режадаги "Дастурлаш технологиялари", "Амалий математиканинг замонавий муаммолари" ўқув модуллари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг меъёрий - ҳуқуқий хужжатлар бўйича касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар амалий масалаларнинг математик моделлари, уларни ечиш усуллари ва дастурий таъминотлар яратиш, ҳисоблаш тажрибаларини ўтказиш, олинган натижаларни таҳлил этиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат				
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси			Мустақил таълим
			Жами	жумладан		
				Назарий	Амалий машғулот	
1.	Айирмали аппроксимация. Чекли элементлар усули	4	4	2	2	
2.	Чизиқлаштириш усуллари (оддий, Ньютон, Пикар). Итерацион усуллар.	4	4	2	2	
3.	Интегрални тақрибий ҳисоблаш усуллари. Отиш усули (метод стрельба).	6	6	2	4	
4.	Прогонка (ўнг, чап, матрицали) усули.	8	6	2	4	2
5.	Параболик типдаги дифференциал тенгламалар орқали ифодаланувчи жараёнларни сонли моделлаштириш. Жараёнларни визуаллаштириш.	8	6	2	4	2
Жами: 30		**30**	**26**	**10**	**16**	**4**

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Айирмали аппроксимация. Чекли элементлар усули

Айирмали аппроксимация. Чекли элементлар усули.

2-Мавзу: Чизиқлаштириш усуллари (оддий, Ньютон, Пикар). Итерацион усуллар.

Чизиқлаштириш усуллари (оддий, Ньютон, Пикар). Итерацион усуллар.

3-Мавзу: Интегрални тақрибий ҳисоблаш усуллари. Отиш усули (метод стрельба).

Интегрални тақрибий ҳисоблаш усуллари. Отиш усули (метод стрельба). Алгебраик тенгламалар системасини сонли ечиш усуллари.

4-Мавзу: Прогонка (ўнг, чап, матрицали) усули.

Прогонка (ўнг, чап, матрицали) усули.

5-Мавзу: Параболик типдаги дифференциал тенгламалар орқали ифодаланувчи жараёнларни сонли моделлаштириш. Жараёнларни визуаллаштириш.

Параболик типдаги дифференциал тенгламалар орқали ифодаланувчи жараёнларни сонли моделлаштириш. Жараёнларни визуаллаштириш.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

Амалий машғулотлар замонавий дидактик таъминот ва лаборатория жиҳозларига эга бўлган аудиторияларда ҳамда Интернет тармоғига уланган компьютер синфларида, таянч олий таълим муассасаларининг кафедраларида ташкил этилади.

Амалий машғулотларда физик жараёнларни тасвирловчи амалий масалаларнинг қўйилиши, уларни ечиш усуллари, масалани ечишнинг алгоритми ва дастурини яратиш, дастурнинг тўғрилигини тест масалаларда текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш ва олинган натижаларни таҳлил қилиш масалалари ўрганилади.

Амалий машғулотларда қуйидаги мавзулар ва вазиятли масалалар ўрганилади:

Оддий дифференциал тенгламалар учун Коши ва чегаравий масалалар.Эйлер ва Рунге-Кутта усуллари. Ҳайдаш (прогонка) усули.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Чизиқли чегаравий масалалар учун ошкор ва ошкормас схемаларни қўллаш.

Квазичизиқли иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун баланс усулини қўллаш ва уларни сонли ечиш. Чизиқлаштириш.

Уч қатламли схемалар яратиш ёрдамида чизиқсиз чегаравий масалаларни сонли ечиш.

Икки ўлчамли масалаларни ўзгарувчан йўналишлар усулида ечиш.

Икки ўлчами масалаларни локал бир ўлчовли схемалар ёрдамида ечиш.

Тор тебраниши малалаларини сонли моделлаштириш.

Ҳисоблаш эксперименти натижаларини визуаллаштириш.

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ

Тингловчи мустақил ишни муайян модулнинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- амалий машғулотларда берилган топшириқларни бажариш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади: маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);

баҳс ва мунозаралар (лойиҳалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

ЖОРИЙ НАЗОРАТ(АССИСМЕНТ)НИ БАҲОЛАШ МЕЗОНИ

Жорий назорат(ассисмент)ни бахолаш Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш Тармоқ (минтақавий) марказида тасдиқланган шакллари ва мезонлари асосида амалга оширади.

Ушбу модулнинг жорий назорат(ассисмент)га ажратирлан максимал балл-**0,8 балл.**

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Меъёрий- ҳуқуқий хужжатлар.

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг «Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» 2015 йил 12 июндаги ПФ-4732-сон Фармони.
2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2010 йил 2 ноябрдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагогик кадрлар тайёрлаш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1426-сонли Қарори.
3. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 йил. 11-12-сон, 295-модда.
4. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 24 июлдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагог кадрлар тайёрлаш ва аттестациядан ўтказиш тизимини янада такомиллаштириш тўғрисида”ги ПФ–4456-сон Фармони.
5. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 28 декабрдаги “Олий ўқув юртидан кейинги таълим хамда олий малакали илмий ва илмий педагогик кадрларни аттестациядан ўтказиш тизимини такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 365-сонли Қарори.

Махсус адабиётлар

1. Самарский А. А.,., Михайлов.А. П. Математическое моделирование . Наука, М. 2005, 480 с
2. А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.:Наука, 1987, 477с.
3. Арипов М. М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. Тошкент Фан, 1988, 137 С.
4. Арипов М. Табиатшунослик ва технологияларда амалий математика. Тошкент 2013. 1-2 қисм

5. Juan L. Vazquez. The Porous medium equation. Mathematical theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2007. 183.
6. Victor A. Galaktionov and Juan L. Vazquez. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 8, №2, April 2002. 399-433.

Интернет манбаалар

1. http://www.allmath.ru/
2. http://www.mcce.ru/
3. http://lib.mexmat.ru/
4. http://www.webmath.ru/
5. http://www.exponenta.ru/
6. http://www.ziyonet.uz/

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“Кейс-стади” методи

«Кейс-стади» - инглизча сўз бўлиб, («case» – аниқ вазият, ҳодиса, «стади» – ўрганмоқ, таҳлил қилмоқ) аниқ вазиятларни ўрганиш, таҳлил қилиш асосида ўқитишни амалга оширишга қаратилган метод ҳисобланади. Мазкур метод дастлаб 1921 йил Гарвард университетида амалий вазиятлардан иқтисодий бошқарув фанларини ўрганишда фойдаланиш тартибида қўлланилган. Кейсда очиқ ахборотлардан ёки аниқ воқеа-ҳодисадан вазият сифатида таҳлил учун фойдаланиш мумкин. Кейс ҳаракатлари ўз ичига қуйидагиларни қамраб олади: Ким (Who), Қачон (When), Қаерда (Where), Нима учун (why), Қандай/ Қанақа (How), Нима-натижа (Whaat).

“Кейс методи” ни амалга ошириш босқичлари

Иш босқичлари	**Фаолият шакли ва мазмуни**
1-босқич: Кейс ва унинг ахборот таъминоти билан таништириш	✓ якка тартибдаги аудио-визуал иш; ✓ кейс билан танишиш(матнли, аудио ёки медиа шаклда); ✓ ахборотни умумлаштириш; ✓ ахборот таҳлили; ✓ муаммоларни аниқлаш
2-босқич: Кейсни аниқлаштириш ва ўқув топшириғни белгилаш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муаммоларни долзарблик иерархиясини аниқлаш; ✓ асосий муаммоли вазиятни белгилаш
3-босқич: Кейсдаги асосий муаммони таҳлил этиш орқали ўқув топшириғининг ечимини излаш, ҳал этиш йўлларини ишлаб чиқиш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил ечим йўлларини ишлаб чиқиш; ✓ ҳар бир ечимнинг имкониятлари ва тўсиқларни таҳлил қилиш; ✓ муқобил ечимларни танлаш
4-босқич: Кейс ечимини ечимини шакллантириш ва асослаш, тақдимот.	✓ якка ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил вариантларни амалда қўллаш имкониятларини асослаш; ✓ ижодий-лойиҳа тақдимотини тайёрлаш; ✓ якуний хулоса ва вазият ечимининг амалий аспектларини ёритиш

«ФСМУ» методи

Технологиянинг максади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизни баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

III.НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1-Мавзу: Айирмали аппроксимация. Чекли элементлар усули

Режа:

1. Айирмали аппроксимация усули.
2. Интегро-интерполяцион усул.
3. Номаьлум коэффициентлар усули.
4. Чегаравий шартларни айирмали аппроксимация қилиш.
5. Аппроксимация хатолиги.
6. Дискретлаштириш. Келишилганлик.
7. Турғунлик.

Таянч сўзлар: *ҳисоблаш эксперименти, модель, математик модель, айирмали схемалар, чекли айирмали схемалар, тўр, тўр функциялар, дифференцияаллар.*

§ 1. Айирмали аппроксимация усули.

Айирмали аппроксимация усулида дифференциал тенглама ва қўшимча шартларга кирувчи ҳар бир ҳосила фақатгина шаблонни ташкил қилувчи тугун нуқталарда ифодаланган айирмали ифодалар билан алмаштирилади. Ушбу усул жуда содда бўлганлиги боис қўшимча изоҳларга ҳожат йўқ.

Тўғри тўртбурчакли тўрда узлуксиз (ва етарлича силлиқ) коэффициентли дифференциал тенгламалар учун айирмали аппроксимация усули биринчи ва иккинчи тартибли аппроксимацияга эга бўлган айирмали схемаларни осон тузиш имконини беради. Аммо, ушбу усулни мураккаброқ бўлган ҳоллар учун қўллаш анча мушкул ёки қўллашни имкони бўлмайди. Масалан, узилишли коэффициентга эга бўлган дифференциал тенгламалар учун, ҳисоблаш соҳаси тўғри тўртбурчак бўлмаса, юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун нотекис тўрда ва бошқа ҳолларда.

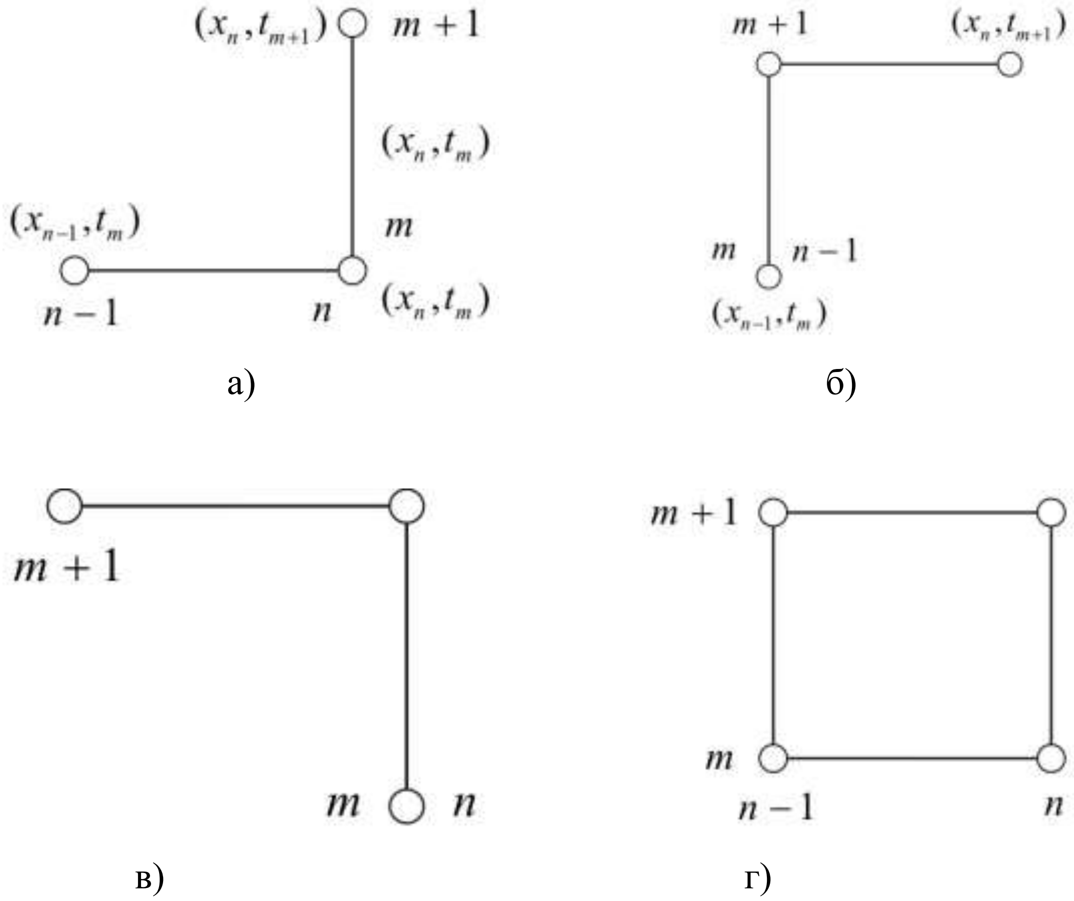
Мисол. Қуйидаги дифференциал масала учун айирмали схема тузиш талаб этилсин:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t),\; 0<x\le 1, \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=\mu_1(x),\; 0<x\le 1, \tag{2.2}$$

$$u(0,t)=\mu_2(t),\;\; 0\le t\le T. \tag{2.3}$$

Айирмали аппроксимация усули бўйича айирмали схема тузиш учун шаблон танлаймиз. Бунинг учун 4-(а, б, в, г) расмларда келтирилган шаблонлардан фойдаланамиз. Ушбу шаблонлардан (2.1) дифференциал тенгламани қуйидагича аппроксимация қилиш мумкин.



6-расм.

а) шаблон учун:

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} + c\frac{y_n^m - y_{n-1}^m}{n} = f(x_n, t_m)$$

б) шаблон учун:

$$\frac{y_{n-1}^{m+1} - y_{n-1}^m}{\tau} + c\frac{y_n^{m+1} - y_{n-1}^{m+1}}{n} = f(x_n - 0{,}5h,\ t_m + 0{,}5\tau)$$

в) шаблон учун:

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} + c\frac{y_n^{m+1} - y_{n-1}^{m+1}}{h} = f(x_n - 0{,}5h,\ t_m + 0{,}5\tau)$$

г) шаблон учун:

$$\frac{y_n^{m+1}+y_{n-1}^{m+1}-y_n^m+y_{n-1}^m}{2\tau}+c\frac{y_n^{m+1}+y_n^m-y_{n-1}^{m+1}-y_{n-1}^m}{2h}=f(x_n-0,5h,\ t_m+0,5\tau)$$

Қўшимча шартлар барча ҳоллар учун қуйидагича аппроксимация қилинади:

$$y_n^0=\mu_1(nh),\ \ n=\overline{0,N}\ ,h=\frac{a}{N}.$$

$$y_0^m=\mu_2(\tau m),\ \ m=\overline{0,M}\ ,\ \tau=\frac{T}{M}.$$

§ 2. Интегро-интерполяцион усул.

Ушбу усулни баланс усули ҳам деб номлашади. $D=\{0\le x\le 1,0\le t\le T\}$ тўғри тўртбурчакда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{2.4}$$

дифференциал тенгламани ва

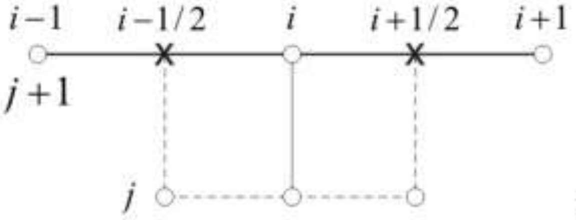
$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1, \tag{2.5}$$

$$u(0,t)=u_1(t),\ u(1,t)=u_2(t),\ \ 0\le t\le T, \tag{2.6}$$

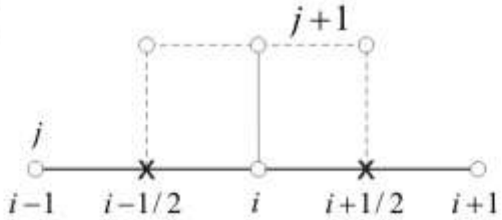
қўшимча шатрларни қаноатлантирувчи $u=u(x,t)$ функцияни аниқлаш талаб этилган бўлсин. Ушбу масалани сонли ечиш учун $D=\{0\le x\le 1,0\le t\le T\}$ соҳада текис тўр қурамиз.

$\overline{\omega_h}=\left\{x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ h=1/N\ \right\}$ $0\le x\le 1$ кесмада h қадамли текис тўр бўлсин ва $\overline{\omega_\tau}=\left\{t_j=j\tau,\ \ j=\overline{0,M},\ \tau=T/M\ \right\}$ $0\le t\le T$ кесмада τ қадамли тўр бўлсин. У ҳолда $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\cdot\omega_\tau=\left\{(x_it_j);\ \ x_i \ni \overline{\omega}_h,\ \ \ t_j \ni \omega_\tau\right\}$ - $D=\{0\le x\le 1,0\le t\le T\}$ тўғри тўртбурчакда h ва τ қадамлар билан қурилган тўрни англатади.

Интегро-интерполяцион усул ёрдамида (2.4) дифференциал тенгламани айирмали схема билан аппроксимация қилиш учун (2.4) тенгламани $x_{i-0,5}\le x\le x_{i+0,5}$, $t_{i-0,5}\le t\le t_{i+0,5}$ тўғри тўртбурчакда интеграллаймиз:



7-расм



8-расм

$$\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}\left[u(x,t_{j+1})+u(x,t)\right]dx=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}},t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}},t)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx \qquad (2.7)$$

(2.7) тенгликка кирувчи интегралларни қуйидагича аппроксимациялаймиз:

$$\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}u(x,t)\approx h\cdot u(x_i,t),\ \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial u(x_{i+0,5},t)}{\partial x}\approx \tau u_{\bar{x},i+1}^{j+1}$$

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx\approx h\tau 0,5(f(x_i,t_j)+f(x_i,t_{j+1}))$$

У ҳолда (2.7) тенгликдан қуйидаги ошкормас айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{1}{h}\left[u_{\bar{x},i+1}^{j+1}-u_{\bar{x},i}^{j+1}\right]+\frac{1}{2}\left[f_i^{\,j}+f_i^{\,j+1}\right]$$

ёки

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\frac{1}{2}\left[f_i^{\,j}+f_i^{\,j+1}\right].$$

Энди (2.4) тенгламани 8–расмда кўрсатилган ячейка бўйича интеграллаймиз:

$$\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}\left[u(x,t_{j+1})+u(x,t_j)\right]dx=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left[\frac{\partial u(x_{i+\frac{1}{2}},t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_{i-\frac{1}{2}},t)}{\partial x}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}dt\int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}}f(x,t)dx \qquad (2.8)$$

(2.8) тенгламага кирувчи интеграллардан $\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\partial u(x_{i+0,5}, t)}{\partial x} \approx \tau u_{\bar{x},i+1}^{j}$ ва

$\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} dt \int\limits_{x_{i-0,5}}^{x_{i+0,5}} f(x,t)dx \approx \frac{h\tau}{3}(f(x_{i-1},t_j)+f(x_i,t_j)+f(x_{i+1},t_j))$ аппроксимация

қилсак ошкор айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \frac{1}{3}(f_{i-1}^j + f_i^j + f_{i+1}^j)$$

қўшимча шартлар иккала ҳолда ҳам

$$u_i^0 = u_0(x_i) \quad , \quad y_0^j = \mu_1\left(t_j\right) \quad , \quad u_N^j = \mu_2\left(t_j\right)$$

кўринишда аппроксимация қилинади.

§ 3. Номаьлум коэффициентлар усули.

Номаьлум коэффициентлар усулида айирмали схема сифатида номаьлум тўр функциянинг шаблонни ташкил қилувчи тугун нуқталардаги қийматларининг чизиқли комбинацияси олинади. Ушбу чизиқли комбинациянинг коэффициентлари айирмали схема берилган дифференциал тенгламани тўр қатламлари бўйича иложи борича юқори тартибда аппроксимация қилиш шартидан топилади.

Масалан,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенглама учун

$$Ш(x,t) = \left\{\left(x_{i-1}, t_j\right);\left(x_i, t_j\right);\ \left(x_{i+1}, t_j\right);\left(x_i, t_{j+1}\right);\right\}$$

шаблонда айирмали схема қуриш талаб этилган бўлсин. Демак айирмали схема

$$\alpha u_{i-1}^j + \beta u_i^j + \gamma u_{i+1}^j + \mu u_i^{j+1} = 0. \tag{2.9}$$

кўринишда экан. u_{i-1}^j , u_{i+1}^j ва u_i^{j+1} тўр функцияларни (x_i, t_j) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйиб, (2.9) тенгламага қўямиз.

$$\alpha u_{i-1}^j + \beta u_i^j + \gamma u_{i+1}^j + \mu u_i^{j+1} =$$

$$\alpha\left(u_i^j - h\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^3} + \dots\right) +$$

$$+\beta\left(u_i^j + \gamma(u_i^j + h\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial x^3} + \dots\right) +$$

$$+\mu\left(u_i^j + \tau\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u(x_i,t_j)}{\partial t^3} + \dots\right) =$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\mu)u_i^j + (\gamma-\alpha)h\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}(\alpha+\gamma)\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^2}$$

$$+\mu\tau\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t} + O\left(h^3+\tau^2\right). \tag{2.10}$$

(2.10) тенгликдан $\alpha u_{i-1}^j + \beta u_i^j + \gamma u_{i+1}^j + \mu u_i^{j+1} = (\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_{(x_i,t_j)} + O(h^3+\tau^2)$ бўлиши учун α,β,γ ва μ коэффициентлар қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантириши керак.

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\mu=0 \\ \gamma-\alpha=0 \\ \alpha+\gamma=-\dfrac{2}{h^2} \\ \mu\tau=1 \end{cases} . \tag{2.11}$$

(2.11) тенгламалар системасини ечиб, $\alpha=\gamma=-\frac{1}{h^2}$, $\mu=\frac{1}{\tau}$ ва $\beta=\frac{2}{h^2}=-\frac{1}{\tau}$ эканлигини аниқлаймиз. Коэффициентларни бу қийматларини (2.10) га қўямиз:

$$-\frac{u_{i-1}^j}{h^2} + \frac{2u_i^j}{h^2} - \frac{u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i+1}^j}{h^2} + \frac{u_i^{j+1}}{\tau} = 0 \quad \text{ёки}$$

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} = 0 \tag{2.12}$$

Демак,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

дифференциал тенгламани $Ш(x_i,t_i)=\left\{\left(x_{i-1},t_j\right);\left(x_i,t_j\right);\left(x_{i+1},t_j\right);\left(x_i,t_{j+1}\right);\right\}$ шаблонда аппроксимация қилувчи айирмали схема қуйидаги кўринишга эга экан:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=\frac{u_{i-1}^j-2u_i^j+u_{i+1}^j}{h^2}.$$

Энди $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ дифференциал тенгламани

$$Ш\left(x_i,t_j\right)=\left\{\left(x_i,t_j\right)\quad\left(x_{i-1},t_{j+1}\right)\quad\left(x_i,t_{j+1}\right)\quad\left(x_{i+1},t_{j+1}\right)\right\}$$

шаблонда аппроксимация қилувчи айирмали тенгламани топамиз. Бу ҳолда айирмали схема

$$\alpha u_i^j+\beta u_{i-1}^{j+1}+\gamma u_i^{j+1}+\mu u_{i+1}^{j+1}=0. \tag{2.13}$$

кўринишда бўлади. (2.13) да u_{i-1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1} тўр функцияларни (x_i,t_j) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$u_i^{j+1}=u_i^j+\tau\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t^2}+\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t^3}+\frac{\tau^4}{24}\frac{\partial^4 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t^4}+\ldots$$

$$u_{i-1}^{j+1}=u_i^j-h\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x}+\tau\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^2}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t^2}-$$

$$-h\tau\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x\partial t}-\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^3}+\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t^3}+\frac{h^2\tau}{2}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^2\partial t}-\frac{h\tau^2}{2}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x\partial t^2}+\ldots$$

$$u_{i+1}^{j+1}=u_i^j+h\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x}+\tau\frac{\partial u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^2}+\frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t^2}+$$

$$+h\tau\frac{\partial^2 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x\partial t}+\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^3}+\frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial t^3}+\frac{h^2\tau}{2}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x^2\partial t}+\frac{h\tau^2}{2}\frac{\partial^3 u\left(x_i,t_j\right)}{\partial x\partial t^2}+\ldots$$

У ҳолда

$$\alpha u_i^j+\beta u_{i-1}^{j+1}+\gamma u_i^{j+1}+\mu u_{i+1}^{j+1}=\alpha u\left(x_i,t_j\right)+\beta\left[u\left(x_i,t_j\right)-hu'_x\left(x_i,t_j\right)+u'_t\left(x_i,t_j\right)+\right.$$

$$+0{,}5h^2u''_{xx}\left(x_i,t_j\right)+0{,}5\tau^2u''_{tt}\left(x_i,t_j\right)-h\tau\,u''_{xt}\left(x_i,t_j\right)-\frac{h^3}{6}u'''_{xxx}\left(x_i,t_j\right)+\frac{\tau^3}{6}u'''_{ttt}\left(x_i,t_j\right)+$$

$$+\frac{h^2\tau}{2}u'''_{xxt}(x_i,t_j)-\frac{h\tau^2}{2}u'''_{xtt}(x_i,t_j)+\frac{h^4}{24}u''''_{xxxx}(x_i,t_j)-\frac{h^3\tau}{6}u''''_{xxxt}(x_i,t_j)+$$

$$\left.+\frac{h^2\tau^2}{4}u''''_{xxtt}(x_i,t_j)-\frac{h\tau^3}{6}u''''_{xttt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^4}{24}u''''_{tttt}(x_i,t_j)+\ldots\right]+$$

$$+\gamma\left[u(x_i,t_j)+\tau u'_t(x_i,t_j)+0{,}5\tau^2u''_{tt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^3}{6}u'''_{ttt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^4}{24}u'''_{ttt}(x_i,t_j)+\ldots\right]+$$

$$+\mu\left[u(x_i,t_j)+hu'_x(x_i,t_j)+u'_t(x_i,t_j)+\right.$$

$$+0{,}5h^2u''_{xx}(x_i,t_j)+0{,}5\tau^2u''_{tt}(x_i,t_j)+h\tau u''_{xt}(x_i,t_j)+\frac{h^3}{6}u'''_{xxx}(x_i,t_j)+\frac{\tau^3}{6}u'''_{ttt}(x_i,t_j)+$$

$$+\frac{h^2\tau}{2}u'''_{xxt}(x_i,t_j)+\frac{h\tau^2}{2}u'''_{xtt}(x_i,t_j)+\frac{h^4}{24}u''''_{xxxx}(x_i,t_j)+\frac{h^3\tau}{6}u''''_{xxxt}(x_i,t_j)+$$

$$\left.+\frac{h^2\tau^2}{4}u''''_{xxtt}(x_i,t_j)+\frac{h\tau^3}{6}u''''_{xttt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^4}{24}u''''_{tttt}(x_i,t_j)+\ldots\right]$$

Ўхшаш ҳадларни ихчамлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\alpha u_i^j+\beta u_{i-1}^{j+1}+\gamma u_i^{j+1}+\mu u_{i+1}^{j+1}=[\alpha+\beta+\gamma+\mu]u(x_i,t_j)+h(\mu-\beta)u'_x(x_i,t_j)+$$

$$+\tau(\beta+\gamma+\mu)u'_t(x_i,t_j)+0{,}5h^2(\beta+\mu)u''_{xx}(x_i,t_j)+0{,}5\tau^2(\beta+\gamma+\mu)u''_{tt}(x_i,t_j)+$$

$$+h\tau(\mu-\beta)u''_{xt}(x_i,t_j)+\frac{h^3}{6}(\mu-\beta)u'''_{xxx}(x_i,t_j)+\frac{\tau^3}{6}(\beta+\gamma+\mu)u'''_{ttt}(x_i,t_j)+$$

$$+0{,}5h^2\tau(\beta+\mu)u'''_{xxt}(x_i,t_j)+0{,}5h^2\tau(\mu-\beta)u'''_{xtt}(x_i,t_j)+\frac{h^4}{24}(\beta+\mu)u''''_{xxxx}+$$

$$+\frac{h^3\tau}{6}(\mu-\beta)u''''_{xxxt}(x_i,t_j)+\frac{h^2\tau^2}{4}(\beta+\mu)u''''_{xxxt}(x_i,t_j)+\frac{h\tau^3}{6}(\mu-\beta)u''''_{xttt}(x_i,t_j)+$$

$$+\frac{h\tau^3}{6}(\mu-\beta)u''''_{xttt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^4}{24}(\beta+\mu)u''''_{tttt}(x_i,t_j)+\ldots.$$

Охирги тенгликда қуйидагиларни бажарилишини талаб қиламиз:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\mu=0 \\ \beta+\gamma+\mu=\dfrac{1}{\tau} \\ \beta+\mu=-\dfrac{2}{h^2} \\ \mu-\beta=0 \end{cases}.$$

Бу тенгламалар системасини ечиб, номаълум α,β,γ,μ параметрларни қийматларини аниқлаймиз:

$$\alpha=-\frac{1}{\tau},\quad \beta=\mu=-\frac{1}{h^2},\ \ \gamma=\frac{1}{\tau}+\frac{1}{h^2}.$$

Параметрларнинг ушбу қийматларида

$$\alpha u_i^j+\beta u_{i-1}^{j+1}+\gamma u_i^{j+1}+\mu u_{i+1}^{j+1}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_i,t_j)}-0{,}5\tau u''_{tt}(x_i,t_j)+\frac{\tau^2}{6}u'''_{ttt}(x_i,t_j)-$$

$$-\frac{h^2}{12}u''''_{xxxx}(x_i,t_j)-\frac{\tau^2}{2}u''''_{xxxx}(x_i,t_j)+-\frac{h^2\tau^4}{12}u''''_{tttt}(x_i,t_j)+\ldots.. \qquad (2.13')$$

α,β,γ,μ параметрларнинг топилган қийматларини (2.13) тенгламага қўйсак, биз қурган айирмали схеманинг кўриниши келиб чиқади:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}-\frac{u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}=\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2}+O(\tau,h^2).$$

Демак, $Ш(x_i,t_j)=\{(x_i,t_j)\ \ (x_{i-1},t_{j+1})\ \ (x_i,t_{j+1})\ \ (x_{i+1},t_{j+1})\}$ шаблонда қурилган айирмали схема ошкормас бўлиб, берилган дифференциал масалани τ бўйича биринчи тартиб билан ва h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилар экан.

§ 4. Чегаравий шартларни айирмали аппроксимация қилиш.

Фараз қилайлик, $D=\{0\le x\le 1\ ,\ 0\le t\le T\}$ соҳада қуйидаги дифференциал масала берилган бўлсин:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\le x\le 1\ ,\ 0\le t\le T\ , \qquad (2.14)$$

$$u(x,0)=\mu(x)\,,\ u_x(0,t)=\mu_1(t)\,,\ u_x(1,t)=\mu_2(t)$$

Бу ерда $u_x(0,t)=\mu_1(t)$ чегаравий шартни

$$\frac{y_1^{j+1}-y_0^{j+1}}{h}=\mu_1(t_{j+1})$$

айирмали тенглама билан аппроксимация қилиш мумкин. Маьлумки, ушбу айирмали ҳосила берилган чегаравий шартни $O(h)$ билан аппроксимация қилади. Бу эса масалани ечишдаги умумий аниқликни пасайишига олиб келади. Бундай ҳолатдан чиқиш учун чегаравий шартларни айирмали аппроксимация қилиш усуллари билан танишамиз.

Фиктив нуқталар усули. $0\le x\le 1$ кесма ташқарисида $x_{-1}=x_0-h$ тугун нуқта киритамиз ва ушбу x_{-1} нуқтада ҳам берилган (2.14) тенглама ўринли деб ҳисоблаймиз. $i=0$ нуқтада (2.14) тенгламани аппроксимация қилувчи айирмали тенгламани ёзамиз.

$$\frac{y_0^{j+1}-y_0^j}{\tau}=\frac{y_{-1}^j-2y_0^j+y_1^j}{h^2} \qquad (2.15)$$

Чап чегаравий шартни марказий айирмали ҳосила билан аппроксимация қиламиз.

$$\frac{y_1^j-y_{-1}^j}{2h}=\mu_1(t_j)\,. \qquad (2.16)$$

Энди (2.16) дан $y_{-1}^j=y_1^j-2h\mu_1$ ни аниқлаб, уни (2.15) тенгликга қўйсак ва соддалаштирсак,

$$\frac{y_1^j-y_0^j}{h}=\mu_1\left(t_j\right)+\frac{h}{2\tau}\left(y_0^{j+1}-y_0^j\right) \qquad (2.17)$$

айирмали тенгламага эга бўлиш мумкин. Бу тенгламадан y_0^{j+1} ни ошкор ҳолда аниқлаш мумкин.

Аппроксимация хатолигини камайтириш усули. $u(x_1,t)$ функцияни (x_0,t) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёямиз:

$$u(x_1,t)=u(x_0,t)+hu_x(x_0,t_j)+\frac{h^2}{2}u_{xx}+...$$

Чегаравий шартга кўра $u_x(0,t)=\mu_1(t)$ ва $u_{xx}=u_t$ эканлигини ҳисобга олиб, уларни Тейлор қаторига қўямиз:

$$u(x_1,t)=u(x_0,t)+h\mu_1(t)+\frac{h^2}{2}u_t(x_0,t)+...$$

Бу ерда $u_t \approx y_0^{j+1}-y_0^j/\tau$ эканлигини ҳисобга олсак, яна (2.17) чегаравий шартга эга бўлиш мумкин. Ўнг чегаравий шартга нисбатан ҳам баён этилган амалларни қўллаш мумкин.

Мисол. (3.1.1)-(3.1.2) кўчиш тенгламасини аппроксимация қилувчи (қаранг §3.5) (3.1.3) Лакс схемасини тадқиқ қилишдан тушунарлики, вақт бўйича τ қадамни $\tau=O(h)$ каби танланса мазкур схема турғун бўлади. Вақт бўйича τ қадамни $\tau=O(h^2)$ каби танланса ҳам схема турғун бўлади. Агар $h\to 0$ да τ ни

$$\tau=h^2/\mu,\quad \mu=const>0 \tag{2.1.1}$$

кўринишда олинса (3.1.3) Лакс схемаси (3.1.1)-(3.1.2) кўчириш тенгламасини аппроксимация қиладими?

Ечиш. Дастлаб Лакс схемаси аппроксимация хатолигининг бош ҳадини топамиз. Бунинг учун (3.1.3) тенгликка қуйидаги Тейлор қаторига $(jh,n\tau)$ нуқта атрофида ёйилган қуйидаги ифодаларни қўямиз:

$$u_j^{n+1}=u_j^n+\tau u_t+\frac{\tau^2}{2}u_{tt}+O(\tau^3);\; u_{j\pm1}^n=u_j^n\pm\tau u_x+\frac{h^2}{2}u_{xx}+O(h^3).$$

Натижада Лакс схемасининг биринчи дифференциал яқинлашишини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{h^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.1.2}$$

Ушбу тенгликка τ учун ёзилган (2.1.1) ифодани қўямиз ва қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.1.3}$$

(2.1.3.) тенгликдан кўринадики, $h \to 0$да Лакс схемаси (3.1.1) тенгламани эмас, балки

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

параболик тенгламани аппроксимация қилади. Лакс схемаси шартли аппроксимация қилувчи схемага мисол бўлади.

Мисоллар

1. $$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+2h)-u(x)}{2} - 2u(x) + \frac{u(x)-u(x-2h)}{2}}{h^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+2h)+u(x)}{2} - \frac{u(x)-u(x-2h)}{2}}{2h},$$

Агар $u(x) \in C^4$ бўлса, келтирилган тенгликлар ўринлими?

2. α, β, γ нинг қандай қийматларида

$$\frac{-\varphi_{i+1}+2\varphi_i-\varphi_{i-1}}{h^2} + \left(\alpha\varphi_{i+1}+\beta\varphi_i+\gamma\varphi_{i-1}\right) = f\left(x_i\right) + \frac{h^2}{12}f''\left(x_i\right),$$

$$\varphi_0 = 0, \varphi_n = 0, i = \overline{1, n-1}, \; x_i = ih, \; h = 1/n$$

айирмали схема

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f(x), \; x \in [0,1]$$

$$u(0)=0, \;\; u(1)=0$$

масалани тўртинчи тартиб билан аппроксимация қилади?

3. $$\frac{du}{dx} + 2u\cos x = \cos x + \sin(2x), \; x \in [0,1],$$

$$u(0) = 0$$

дифференциал масала

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+a_i\,\frac{\varphi_{i+1}+\varphi_i}{2}=f_i\,,$$

$$\varphi_0=0\,,\ i=\overline{0,\,n-1},\ h=1/n$$

айирмали схема орқали нечанчи тартибда аппроксимация қилинишини аниқланг. Бу ерда

$$a_i=\cos x_i+\cos x_{i+1},\ \ f_i=\frac{1}{2}a_i+\frac{1}{2}\left(\sin\left(2x_i\right)+\sin\left(2x_{i+1}\right)\right),$$

аниқланиш соҳаси f^h сифатида

$$Df^h=\left\{x_{i+1/2},\,i=\overline{0,\,n-1}\right\}$$

$$x_i=ih,\ \ x_{i+1/2}=ih+h/2$$

ни олинг.

4. $Df^h=\left\{x_i,\,i=\overline{0,\,n-1}\right\},\ x_i=ih$

аниқланиш соҳаси f^h учун 3-масалани ечинг.

5. $a_i=2\cos x_i\,,\ f_i=\cos x_{i+1}+\sin\left(2x_{i+1}\right)$

$$Df^h=\left\{x_{i+1/2},\,i=\overline{0,\,n-1}\right\},\ x_i=ih\,,\ x_{i+1/2}=ih+h/2.$$

бўлганда 3-масалани ечинг.

6. $a_i=2\cos x_i\,,\ f_i=\cos x_i+\sin\left(2x_i\right)$

$$Df^h=\left\{x_i,\,i=\overline{0,\,n-1}\right\},\ x_i=ih$$

бўлганда 3-масалани ечинг.

7. $a_i=2\cos x_{i+1/2}\,,\ f_i=\cos x_{i+1/2}+\sin\left(2x_{i+1/2}\right),$

$$Df^h=\left\{x_{i+1/2},\,i=\overline{0,\,n-1}\right\},\ x_i=ih\,,\ x_{i+1/2}=ih+h/2.$$

бўлганда 3-масалани ечинг.

8. $\dfrac{du}{dx}+a(x)u(x)=f(x),\ \ x\in[0,1],$

$u(0)=c$

дифференциал масала ва

$$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{h}+\left(\alpha_1 a\left(x_i\right)+\alpha_2 a\left(x_{i+1}\right)\right)\left(\beta_1\varphi_i+\beta_2\varphi_{i+1}\right)=\gamma_1 f\left(x_1\right)+\gamma_2 f\left(x_{i+1}\right),$$

$$i=\overline{0,\, n-1},\ \varphi_0=c,\ h=1/n,\ x_i=ih$$

айирмали схема берилган. α_i, β_i, γ_i коэффициентларни қандай танласа, аппроксимация тартиби иккига тенг бўлади?

9. $$\frac{\varphi_{i+1}-\varphi_i}{2h}+\varphi_i=ih+1,\ i=\overline{1,\, n-1},\ h=\frac{1}{n},$$

$\varphi_0=0$, $\varphi_1=0$

айирмали схема

$$\frac{du}{dx}+u=x+1,\ x\in[0,1]$$

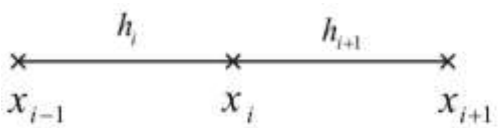
$u(0)=0$ дифференциал масалани h га нисбатан иккинчи тартиб билан аппроксимация қиладими? Агар ундай бўлмаса, айирмали схемани кўринишини шундай ўзгартирингки, у иккинчи тартиб билан аппроксимация қилсин.

10. $$-\frac{d^2u}{dx^2}+au=\cos x,\ x\in\left[0,\pi\right],\ a>0,$$

$$u(0)=0,\ u(\pi)=1$$

дифференциал масала учун уч нуқтали шаблонда ўнинчи тартибли аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг.

11. Номаълум коэффициентлар усули билан нотекис тўрда



9-расм.

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x),$$

$$u(0)=a,\ u(1)=b,\ u\in C^4$$

масалани биринчи ва иккинчи тартиб билан аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг. Бунда 9–расмдаги шаблондан фойдаланинг.

12. $\frac{du}{dx} + cu = f(x)$, $u(0) = a$, $c = const$,

масала учун ўзгармас қадам билан интегро-интерполяцион усул ёрдамида уч нуқтали шаблонда тўртинчи тартиб билан аппроксимация қилувчи айирмали схемани қуринг.

13. $-\frac{d^2u}{dx^2} + cu = f(x)$, $c \geq 0$, $x \in [0,1]$,

$u(0) = a$, $u(1) = b$

масалани 12-масала шартлари билан ечинг.

§ 5. Аппроксимация хатолиги.

Дифференциал масаланинг асосий тенгламасини ва қўшимча шартларини аппроксимация қилувчи айирмали тенгламалар системаси айирмали схемалар дейилади.

Айирмали схеманинг аппроксимация хатолиги, турғунлиги, яқинлашиши ва аниқлиги айирмали схемалар назариясининг асосий тушунчаларидир.

Айирмали схемалар назариясининг асосий масаласи - айирмали схеманинг аниқлиги унинг аппроксимация хатолиги, яқинлашиши ва турғунлигини ўрганишга олиб келади.

L, L_h- аниқланиш соҳалари мос ҳолда Φ ва Φ_h, қийматлар соҳалари мос ҳолда F ва F_h бўлган операторлар бўлсин. Бундан кейин L, L_h операторларни мос ҳолда дифференіал ва айирмали операторлар деб атаймиз.

Айирмали L_h оператор дифференциал L операторни $n-$тартиб билан аппроксимация қилади дейилади, агарда шундай мусбат $\tilde{h}$ ва C доимийлари мавжуд бўлсаки, барча $h < \tilde{h}$ лар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлса

$$\left\| L_h(u)_h - (Lu)_h \right\|_{F_h} \leq Ch^n.$$

L_h оператор L операторни x_i нуқтада n чи тартиб билан аппроксимация қилади дейилади, агарда шундай $\tilde{h}$ ва C доимийлари мавжуд бўлиб, барча $h \le \tilde{h}$ лар учун

$$\left|(L_h(u)_h - (Lu)_h)_{x=x_i}\right| \le Ch^n$$

тенгсизлик ўринли бўлса.

Қуйидаги

$$Lu = f\,,\; u \in \Phi\,,\; f \in F\,,$$
$$lu = g\,,\; g \in G\,, \tag{3.1}$$

дифференциал масала берилган бўлсин.

$$L_h\varphi^h = f^h\,,\; \varphi^h \in \Phi_h\,,\; f^h \in F_h\,,$$
$$l_h\varphi^h = g^h\,,\; g^h \in G_h \tag{3.2}$$

айирмали схемалар оиласини қарайлик. Бу айирмали масалалар тўпламини келгусида айирмали схемалар, айирмали масалалар ечимлари тўпламини айирмали схемалар ечими деб атаймиз.

(3.2) айирмали схема берилган (3.1) дифференциал масалани n чи тартиб билан аппроксимация қилади дейилади, агарда шундай $\tilde{h}$, C_1 ва C_2 мусбат доимийлари мавжуд бўлсаки, барча $h < \tilde{h}$ лар учун

$$\left\|L_h(u)_h - f^h\right\|_{F_h} \le C_1 h^{n_1}\,,$$

$$\left\|l_h(u)_h - g^h\right\|_{G_h} \le C_2 h^{n_2}\,,$$

$$n = \min(n_1, n_2)$$

тенгсизликлар ўринли бўлса,

$\psi_h = L_h(u)_h - (Lu)_h$ тўр функция айирмали аппроксимация хатолиги дейилади. Берилган (3.1) дифференциал масала ва (3.2) айирмали масалалар ечимлари айирмаси $Z^h = \varphi^h - u$ (3.2) айирмали схеманинг хатолиги дейилади.

1-мисол. $Lu_{\bar{x}x} = \dfrac{u_{x,i} - u_{\bar{x},i}}{h} = \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$

айирмали оператор $Lu=\frac{d^2u}{dx^2}$ операторни $x=x_i$ нуқтада h бўйича иккинчи тартиб билан аппроксимация қилишини кўрсатиш мумкин. Бунинг учун $u_{\bar{x}x,i}$ иккинчи тартибли айирмали ҳосиладаги u_{i-1} ва u_{i+1} ларни Тейлор қаторига ёйсак

$$u_{\bar{x}x,i}-u''(x_i)=\frac{h^2}{12}u^{IV}(x_i)+O(h^4)$$

эканлиги тасдиқланади.

2-мисол. $Lu=u^{IV}(x)$ дифференциал операторни $L_hu=u_{\bar{x}x\bar{x}x}$ айирмали оператор билан $(x_{i-2},x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2})$ шаблонда аппроксимация қилиш мумкин.

$$L_hu=\frac{1}{h^2}\left[u_{\bar{x}x}(x_{i+1})-2u_{\bar{x}x}(x_i)+u_{\bar{x}x}(x_{i-1})\right]=$$

$$=\frac{1}{h^4}\left(u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}\right) \qquad (*)$$

(*) даги u_{i-2}, u_{i-1}, u_i,u_{i-2} ларни $x=x_i$ нуқтада Тейлор қаторига ёйсак $u_{\bar{x}x\bar{x}x,i}-u^{IV}(x_i)=\frac{h^2}{6}u^{IV}(x_i)+O(h^4)$, яьни айирмали оператор L_h L операторни иккинчи тартиб билан аппроксимация қилади.

§ 6. Дискретлаштириш. Келишилганлик.

Дискретлаштириш. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама (тенгламалар системаси) ни алгебраик тенгламалар системасига келтириш учун бир неча вариантлардан бирини танлаш мумкин. Энг кўп қўлланадиган усуллар - чекли айирмали усуллар, чекли элементлар усули ва спектрал усул бўлиб ҳисобланади.

Дискретлаштиришда бу усуллардан бирини танлаш берилган дифференциал тенгламада (тенгламалар системасида) вақт бўйича ҳосила қатнашиши ёки қатнашмаслигига боғлиқ.

Вақт бўйича ҳосила қатнашган ҳолларда чекли айирмали усулдан фойдаланади. Фақатгина фазовий координаталар бўйича дискретлаштиришда чекли айирмали усулдан ташқари чекли элементлар усули, спектрал усул ёки чекли ҳажмлар усулини қўллаш мумкин.

Келишилганлик. Дискретлашитириш натижасида ҳосил бўлган алгебраик тенгламалар системаси берилган хусусий ҳосилали дифференциал тенглама (тенгламалар системаси) билан келишилган дейилади, агарда тўр ячейкалари ўлчамлари нолга интилганда алгебраик тенгламалар системаси тўрнинг ҳар бир тугун нуқтасида берилган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламага эквивалент бўлса.

Айирмали масаланинг ечими дифференциал масала ечимига яқинлашиш учун келишилганлик шарти бажарилиши зарур. Аммо, бу етарли эмас, чунки тўр ячейкалари ўлчамлари нолга интилганда алгебраик тенгламалар системаси берилган дифференциал тенгламага эквивалент бўлсада, алгебраик тенгламалар системаси ечими берилган дифференциал тенглама ечимига интилиши келиб чиқмаслиги мумкин. Мисол сифатида шартли турғун айирмали схемаларни келтириш мумкин. Агар турғунлик шарти бузилса, алгебраик тенгламалар системаси берилган дифференциал тенгламага эквивалент бўлса-да, тақрибий ечим узоқлашувчи бўлади.

Мисол. Қуйидаги чегаравий масала берилган бўлсин.

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}, \; 0 < x < 1, \; 0 < t \le t_{\max} \tag{3.3}$$

$$\overline{T}(0,t) = b, \overline{T}(1,t) = d, \tag{3.4}$$

$$\overline{T}(x,0) = T_0(x), 0 \le x \le 1. \tag{3.5}$$

Бу ерда $T -$ берилган дифференциал масаланинг аниқ ечимини билдиради.

(3.3) тенгламани дискретлаштириш учун ҳосилаларни уларга эквивалент бўлган чекли айирмали ифодалар билан алмаштириш мумкин.

$$\frac{\overline{T}_i^{n+1} - \overline{T}_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha(\overline{T}_{i-1}^n - 2\overline{T}_i^n + \overline{T}_{i+1}^n)}{\Delta x^2} \tag{3.6}$$

(3.6) да Δt ва Δx лар мос ҳолда вақт бўйича ва фазовий координата x бўйича тўр қадамларидир. $T_i^n - T$ нинг (i,n) тугун нуқтадаги қийматига мос келади. (3.6) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}(T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n) \tag{3.7}$$

агар $\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}$ ҳосила $n+1$ вақт қатламида дискретлаштирилса, у ҳолда ошкормас айирмали схемага эга бўлиш мумкин:

$$sT_{i-1}^{n+1} - (1+2s)T_i^{n+1} + sT_{i+1}^{n+1} = -T_i^n\,, \tag{3.8}$$

бу ерда $s = \alpha \Delta t / \Delta x^2$.

Шундай қилиб, (3.3) дифференциал тенгламани дискретлаштиришда қуйидаги ошкор ва ошкормас

$$T_i^{n+1} = sT_{i-1}^n + (1-2s)T_i^n + sT_{i+1}^n \tag{3.9}$$

$$sT_{i-1}^{n+1} - (1+2s)T_i^{n+1} + sT_{i+1}^{n+1} = -T_i^n \tag{3.10}$$

айирмали схемаларга эга бўлдик.

I. (3.9) ошкор айирмали схема учун келишилганлик шартини текшириш учун бу тенгламага берилган дифференциал тенгламани (i,n) тугун нуқтадаги аниқ ечимини англатувчи $\overline{T}_i^n$ ни қўямиз.

$$\overline{T}_i^{n+1} = s\overline{T}_{i-1}^n + (1-2s)\overline{T}_i^n + s\overline{T}_{i+1}^n \tag{3.11}$$

Энди (3.11) тенгламани берилган дифференциал тенлама (3.3) га мослигини (x_i, t_n) тугун нуқтада қанчалик яқинлигини аниқлашимиз зарур. (3.11) тенгламадаги айрим ҳадларни (x_i, t_n) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйиб, соддалаштирсак қуйидаги муносабатга эга бўлиш мумкин:

$$\left[\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}\right]_i^n - \alpha \left[\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2}\right]_i^n + \mathrm{E}_i^n = 0\,, \tag{3.12}$$

бу ерда

$$\mathrm{E}_i^n = 0,5\Delta t\left[\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2}\right]_i^n - \alpha(\frac{\Delta x^2}{12})\left[\frac{\partial^4 \overline{T}}{\partial t^4}\right]_i^n + O(\Delta t^2, \Delta t^4) \qquad (3.13)$$

кўриниб турибдики, (3.13) дифференциал тенглама (3.3) дифференциал тенгламадан аппроксимация хатолиги деб аталувчи E_i^n қўшимча ҳад билан фарқ қилиб турибди. Ушбу қўшимча ҳаднинг пайдо бўлиши эса $\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2}$ ва $\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2}$ ҳосилаларни дискретлаштириш натижаси билан боғлиқ. (3.12) да тўр ячейкалари ўлчамлари $(\Delta x^2, \Delta t)$ кичик қилиб танланса, аппроксимация хатолиги E_i^n фиксирланган қандайдир (x_i, t_n) нуқтада нолга интилади. $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ даги лимитда (3.9) тенглама (3.3) дифференциал тенгламага эквивалент бўлиб қолади. Бу хосса эса келишилганлик дейилади.

(3.3) дифференциал тенгламага асосан қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} = \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x} = \alpha^2\frac{\partial^4 \overline{T}}{\partial x^4} \qquad (3.14)$$

Шу сабабли аппроксимация хатолиги E_i^n ифодасини қуйидагича қайта ёзиш мумкин:

$$\mathrm{E}_i^n = 0,5\Delta x^2(s - \frac{1}{6})\left[\frac{\partial^4 \overline{T}}{\partial t^4}\right]_i^n + O(\Delta t^2, \Delta t^4) \qquad (3.15)$$

$s = \frac{1}{6}$ бўлса, (3.15) даги биринчи ҳад нолга тенг бўлади ва аппроксимация хатолиги $O(\Delta t^2, \Delta t^4)$ бўлади.

II. Энди (3.10) ошкормас айирмали схемани берилган (3.3) дифференциал тенглама билан келишилганлигини текширамиз.

(3.10) тенгламага (3.3) дифференциал тенгламани (x_i, t_n) тугун нуқтадаги аниқ ечимини англатувчи T_i^n ни қўямиз:

$$\frac{\overline{T}_i^{n+1} - \overline{T}_i^n}{\Delta t} - \alpha\frac{\overline{T}_{i-1}^{n+1} - 2\overline{T}_i^{n+1} + \overline{T}_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0. \qquad (3.16)$$

(3.16) даги $\overline{T}_{i-1}^{n+1}$ ва $\overline{T}_{i+1}^{n+1}$ ларни $(i, n+1)$ тугун нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйамиз:

$$\frac{\overline{T}_i^{n+1}-\overline{T}_i^{n}}{\Delta t}-\alpha\left\{\left[\overline{T}_{xx}\right]_i^n+(\frac{\Delta x^2}{12})\left[\overline{T}_{x^2}\right]_i^n+(\frac{\Delta x^4}{360})\left[\overline{T}_{x^4}\right]_i^{n+1}+...\right\}=0.$$

Энди охирги муносабатдаги $\overline{T}_i^{n+1}$, $\left[\overline{T}_{xx}\right]_i^{n+1}$ ва ҳокозоларни (x_i, t_n) нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\left[\overline{T}_t\right]_i^n-0,5\Delta t\left[\overline{T}_{tt}\right]_i^n+\frac{\Delta t^2}{6}\left[\overline{T}_{t^3}\right]_i^n+...-\alpha\left[\overline{T}_{xx}\right]_i^n+$$

$$\Delta t\left[\overline{T}_{xxt}\right]_i^n+0,5\Delta t^2\left[\overline{T}_{xxtt}\right]_i^n+...+$$

$$+\frac{\Delta x^2}{12}(\left[\overline{T}_{x^4}\right]_i^n+\Delta t\left[\overline{T}_{x^4t}\right]_i^n+...)+\frac{\Delta x^4}{360}(\left[\overline{T}_{x^4}\right]_i^n+...)...=0 \qquad (3.17)$$

Агар $\overline{T}_t=\alpha\overline{T}_{xx}$, $\overline{T}_{tt}=\alpha^2\overline{T}_{x^4}$, $\overline{T}_{ttt}=\alpha^3\overline{T}_{x^6}$, $s=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$, $\Delta x^2=\alpha\Delta t/s$ тенгликлардан фойдалансак, (3.17) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\left[\overline{T}_t-\alpha\overline{T}_{xx}\right]_i^n+E_i^n=0. \qquad (3.18)$$

Бу ерда аппроксимация хатолиги

$$\mathrm{E}_i^n=-0,5\Delta t(1+\frac{1}{6s})\left[T_{tt}\right]_i^n+\frac{\Delta t^2}{3}(1+\frac{1}{4s}+\frac{1}{120s^2})\left[\overline{T}_{tttt}\right]_i^n+... \qquad (3.19)$$

Кўриниб турибдики $\Delta t\to 0$ да $E_i^n\to 0$, (3.18) тенглама берилган (3.3) дифференциал тенглама билан устма-уст тушади. Бу эса (3.10) ошкормас айирмали схема (3.3) дифференциал тенглама билан келишилганлигини билдиради. (3.19) ни (3.13) билан солиштириб, шуни айтиш мумкинки ошкормас айирмали схемада $O(\Delta x^4)$ тартиб билан таьминловчи s ни (3.19) дан топиш мумкин эмас.

§ 7. Турғунлик.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларни дикретлаштиришда ҳосил бўладиган алгебраик тенгламалар системасини ечишда $(x_i, t_n), (i=\overline{1, N_1}), n=\overline{1, N_2}$ тугун нуқтадаги хатоликни ξ_i^n билан белгилаймиз.

$$\xi_i^n = T_i^n - {}^*T_i^n \tag{3.20}$$

(3.20) да T_i^n , $*T_i^n$ лар мос холда алгебраик тенгламалар системасининг аниқ ва тақрибий ечимларидир.

Дискретлаштиришда ҳосил бўладиган чизиқли алгебраик тенгламалар системасининг хатоликлари ξ_i^n ҳам худди шу чизиқли алгебраик тенгламалар системасини қаноатлантиради. Масалан, (3.9) ошкор айирмали схемадан фойдалансак, юқоридаги фикримиз $*T_i^{n+1}$

$$*T_i^{n+1} = s*T_i^{n+1} + (1-2s)*T_i^n + s*T_{i+1}^n \tag{3.21}$$

тенгламани қаноатлантиришини англатади.

Агар алгебраик тенгламалар системасини аниқ ечими T_i^n ҳам (3.9) тенгламани қаноатлантиришини эсласак ва (3.21), тенгламага (3.20) ни ҳисобга олсак ξ_i^n хатоликка нисбатан қуйидаги бир жинсли алгебраик тенгламага эга бўламиз:

$$\xi_i^{n+1} = s\xi_{i-1}^n + (1-2s)\xi_i^n + s\xi_{i+1}^n \tag{3.22}$$

Агар бошланғич ва чегаравий шартлар берилган деб фараз қилсак, у ҳолда барча бошланғич хатоликлар ξ_i^0 $(i=\overline{1, N_1-1})$, шунингдек чегаравий хатоликлар ξ_0^n ва $\xi_{N_1}^n (n=0,...N_2)$ лар (3.20) тенгликка асосан нолга тенг бўлади.

Айирмали схемалар турғунлигини таҳлил қилувчи матрицали усул ва Нейман усуллари энг кўп қўлланиладиган усуллардир. Ушбу усуллар асосида ҳисоблаш алгоритмининг ҳақиқий ечими ва тақрибий ечими ўртасидаги фарқ ёки хатоликни ўсиши ёки камайишини башорат қилиш ётади.

Мисол. $\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x,t), -\infty<x<+\infty, 0\le t\le 1,$ тенгламага қўйилган $u(x,0)=\psi(x), -\infty<x<+\infty$ Коши масаласини апроксимация қилувчи

$$L_h u^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}-\dfrac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h},\\ u_m^0,\\ m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots, n=0,1,2,\ldots,\end{cases}\qquad f^{(h)}=\begin{cases}\varphi(x_m,t_n),\\ \psi(x_m), m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\\ n=0,1,2,\ldots,\end{cases}$$

айирмали схеманинг турғунлигини текширинг.

Ечиш. Дастлаб схемани $u_m^{n+1}=r\,u_{m+1}^n+(1+r)\,u_m^n, \quad r=\tau/h$ кўринишда ёзиб оламиз ва қуйидаги нормаларни аниқлаймиз:

$\left\|u^{(h)}\right\|_{U_h}=\max\limits_{m,n}\left|u_m^n\right|,\ \left\|f^{(h)}\right\|_{F_h}=\max\limits_{m}\left|\psi(x_m)\right|+\max\limits_{m,n}\left|\varphi(x_m,t_n)\right|$. Агар $r\le 1$ бўлса

$$\left|u_m^{n+1}\right|\le\left|\,r\,u_{m+1}^n+(1-r)\,u_m^n+\tau\,\varphi(x_m,t_n)\,\right|\le r\left|u_{m+1}^n\right|+(1-r)\left|u_m^n\right|+\tau\left|\varphi(x_m,t_n)\right|$$

бўлади. Демак

$$\left|u_m^{n+1}\right|\le\max_m\left|u_m^n\right|+\tau\max_{m,n}\left|\varphi(x_m,t_n)\right|.$$

Ҳосил бўлган

$$\max_m\left|u_m^0\right|=\max_m\left|\psi(x_m)\right|,$$

$$\left|u_m^1\right|\le\max_m\left|u_m^0\right|+\tau\max_{m,n}\left|\varphi(x_m,t_n)\right|,$$

$$\left|u_m^2\right|\le\max_m\left|u_m^2\right|+\tau\max_{m,n}\left|\varphi(x_m,t_n)\right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.,$$

$$\left|u_m^n\right|\le\max_m\left|u_m^{n-1}\right|+\tau\max_{m,n}\left|\varphi(x_m,t_n)\right|$$

тенгсизликларни қўшиб, $\max\limits_m\left|u_m^n\right|\le\max\limits_m\left|\psi(x_m)\right|+\tau\,n\max\limits_{m,n}\left|\varphi(x_m,t_n)\right|$ тенгсизликни ҳосил қиламиз. Натижада

$$\max_{m,n}\left|u_m^n\right|\le\max_m\left|\psi(x_m)\right|+\tau\,N\max_{m,n}\left|\varphi(x_m,t_n)\right|\le K\left(\max_m\left|\psi(x_m)\right|+\max_{m,n}\left|\varphi(x_m,t_n)\right|\right)$$

эканлиги тушунарли, бу ерда $K=\max(1,T),\ T=\tau\,N$. Шундай қилиб $r\le 1$ бўлганда айирмали схема турғун ва дифференциал масалани аппроксимация қилади. Демак, Лакс теоремасига асосан айирмали масаланинг ечими дифференциал масала ечимига яқинлашади.

2-Мавзу: Чизиқлаштириш усуллари (оддий, Ньютон, Пикар). Итерацион усуллар.

Итерация усули

Яқинлашувчи усул, тенгламанинг яқинлашувчи ечимини топиш кетма-кетлигига асосланиши итерация дейилади. Итерацион усуллар катта синф масалаларини ечишга қўлланилади, айниқса ночизиқлилар учун. Қуйида машҳур усуллардан ҳисобланган Пикар ва Ньютон усулларини кўриб чиқамиз. Айниқса, оҳирги усул муҳимлиги кетма-кетлик яқинлашишини квадратик ўҳшашлигидадир. Шунинг учун, бошланғич усулнинг яхши танланиши бир нечта итерациядан сўнг керакли аниқликка эришиш мумкин.

1. Оддий итерация усули (кетма-кетлик яқинланшиш усули)

Бу бобда биз, яна бир сонли ҳисоблаш усули ёрдамида тенгламаларни ечишни ўрганамиз. Фараз қилайлик, тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин бўлсин,

$$x = \varphi(x). \qquad (2.1)$$

$\varphi(x)$ функция аниқланган соҳадан мусбат x_0 қийматни олайлик, рекуррент формуласи ёрдамида $\{x_n\}$ кетма-кетли аниқлансин

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,2,... \qquad (2.2)$$

$\{x_n\}$ кетма-кетлик *итерацион кетма-кетлик* дейилади. Буни ўрганишда иккита саволга дуч келамиз:

1) Ҳисоблаш жараёнида x_n сонни бир неча бор такрорлаш мумкинми, яъни $\varphi(x)$ функция аниқланган соҳага x_n сон тегишли бўладими?

2) Агар (2.2) итерацион жараён чексиз бўлса, $n \to \infty$ яқинлашишида x_n сон қандай бўлади?

Бу саволларни текширишда, итерацион кетма – кетлик $\varphi(x)$ функция чекланиши чексиз бўлади ва (2.6) тенгламанинг илдиз билан ўҳшашдир:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c, \qquad c = \varphi(c). \qquad (2.3)$$

Бироқ бу текширишларни ўтказишда, бизга янги тушунча керак бўлади.

Агар шундай α доимий мавжуд бўлсаки, иҳтиёри оралиқда x_1, x_2 қийматларга тегишли бўлса, яъни *f(x)* функция *[a, b]* оралиқда *Липщиц шартини* қаноатлантирса, у ҳолда қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \le \alpha \left|x_1 - x_2\right|. \qquad (2.4)$$

Бу ҳолда α катталик *а* ни *Липшиц дойимийси* дейилади. Агар функция *f(x), [a, b]* оралиқда Липщиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда бу оралиқда узуликсиздир. Ҳақиқатдан, x_0 – кесманинг мусбат нуқтаси бўлсин. Функцияни шу нуқтага айнанишини кўриб чиқамиз:

$$\Delta f = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$$

ва уни (2.4) тенгсизлик ёрдамида кўриб чиқамиз,

$$|\Delta f| \le \alpha |\Delta x| .$$

Ундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta f = 0$, яъни $f(x)$ функцияни узуликсиздир.

Липщиц шарт оддий геометрик маънога эга. Функция *y=f(x)* графигидан иккита мусбат нуқтани, яъни $(x_1\ f(x_1))$ координатали M_1 нуқта ва $(x_2,\ f\ (x_2))$ координатали M_2 нуқтани олайлик (рис. 10). Шу нуқталардан ўтувчи туғри чизиқни тенгламаси қуйдагича бўлади:

$$y = f(x_1) + k(x - x_1), ,$$

бу ерда *k*- *x* ўқига оғма бурчак тангенси қуйидаги формула билан аниқланади

$$k = \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1}.$$

Агар функция *f(x), [a, b]* оралиқда (2.4) Липщиц шартини қаноатлантирилса, у ҳолда M_1 ва M_2 нуқталарнинг мусбат танланишида қуйидагига эга бўламиз $|k| \le \alpha$. Шундай қилиб, шерик нуқталардан ўтувчи функция *y=f(x)* графиги геометрик нуқтайи назаридан Липщиц шарти кесишувчи тангенс оғиш бурчаги чекланишини билдиради.

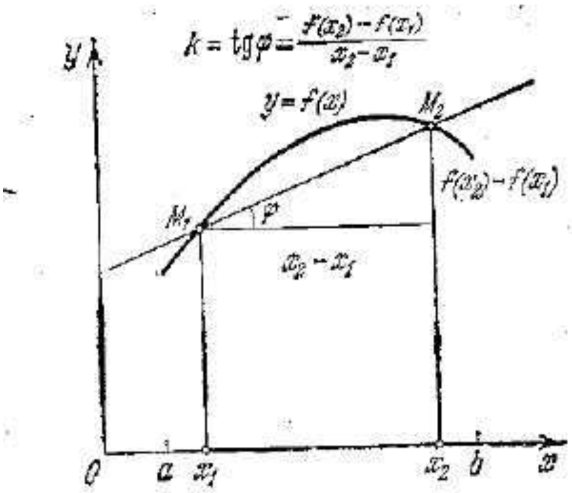


Рис. 10. Геометрическая иллюстрация условия Липшица.

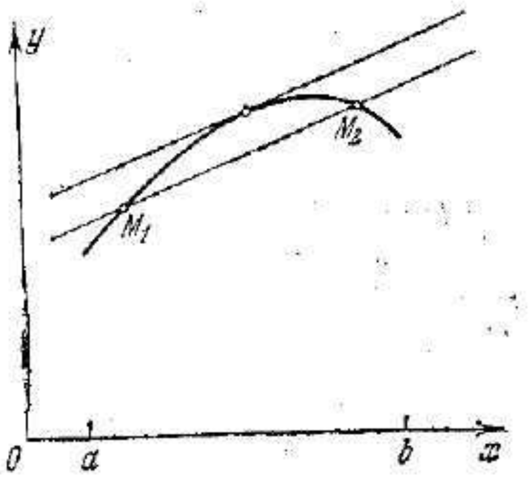


Рис. 11. Геометрическая иллюстрация связи условия Липшица с предположением о дифференцируемости функции.

Фараз қилайлик, *f(x)* функция *[a, b]* оралиқда $|f'(x)| \le m$ чекли ҳосилага эга бўлсин, у ҳолда у $\alpha = m$ дойими билан Липщиц шартини қаноатлантиради. Бу тасдиқни исботлаш учун, *Лагранч якуний орттирма формуласи*дан фойдаланамиз:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \tag{2.5}$$

бу ерда x_1, x_2 – *[a, b]* оралиқнинг мубат нуқтаси бўлса ва $[x_1, x_2]$ оралиқнинг ξ айрим нуқтаси бўлсин. (2.5) тенгликнинг икки томонидан модуль оламиз ва ўнг томонини $|f'(\xi)|$ ни m билан алмаштирамиз. Натижада, $\alpha = m$ билан (2.5) тенгсизликка эга бўламиз.

Расим., 11 ўрнатилган ҳоссаси геометрик иллюстрацияни беради. Лагранжнинг (2.5) формуласига мувофиқ *y=f(x)* функциянинг ҳар бир кесишувчи графигига мос ҳолда паралел уринмасини қўйиш мумкин. Шунинг учун, тангенс оғма бурча кесишучисидан тангенс оғма бурча уринмаси ошади ва уни $m: |k| \le m$ ўзгармас орқали баҳолаш мумкин

Липщиц шарти билан танишиб чиқиб, фараз қиламиз (2.1) тенглама *x=c* ильдизга эга бўлсин, у ҳолда итерация кетма-кетлигига ўтамиз. Бу ильдизнинг мавжудлиги, §2 теоремаларидан фойдаланиб, олдинги тенглама сифатли текширишлади.

Итерацион келма-кетликнинг ўхшашлик теоремаси. *Агар (2.1) тенгламанинг c – ильдизи ва* $\varphi(x)$ *функция* $[c-\delta, c+\delta]$ $(\delta > 0)$ *оралиқда* $\alpha < 1$ *дойимийси билан Липщиц шартини қаноатлантирса. У ҳолда* $[c-\delta, c+\delta]$ *оралиқда иҳтиёрий* x_0 *танланган (2.2) муносабатдаги* $\{x_n\}$ *кетма-кетликнинг чексиз итерацияси мавжудлиги, яъни бу кетма-кетлик x=c ильдизга мос (2.1) тенгламанинг* $[c-\delta, c+\delta]$ *оралиқда ягона ечими бўлади.*

Шакллантирилган теорема оддий маънога эга. φ функция мавжуд бўлиши x нуқтадан $y=\varphi(x)$ нуқтага аксланиши ифодаланади. У ҳолда $\alpha<1$ доймийси билан Липшиц шарти акслантириш φ сиқувчи бўлиб ҳисобланади: $y_1 = \varphi(x_1)$ ва $y_2=\varphi(x_2)$ берилганларга нисбатан x_1 ва x_2 нуқталар орасидаги масофа каттадир.
φ муносабатда c ильдиз қўзғалмас нуқтаси ҳисобланади, у $c=\varphi(c)$ ўз ўзидан ҳосил бўлади. Шунинг учун (2.2) итерацион жараённинг ҳар бир қадами, масофони сиқиб, қўзғалмас c нуқтага яқинлаштириб $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашиши керак.
Бу мулоҳазалардан сўнг, теореманинг маъносини англатувчи, исботилашга ўтамиз. $[c-\delta, c+\delta]$ ораликқа тегишли мусбат x_0 нуқтани оламиз, $\delta: |c-x_0| \le \delta$ дан катта бўлмаган нисбатан c нуқтадан қолувчи бўлсин.
x_1-c=$\varphi(x_0)$-$\varphi(c)$ муносабатда x_1: $x_1=\varphi(x_0)$ ни ҳисоблаймиз. Липщиц шартидан фойдаланиб $\varphi(x_0)$- $\varphi(c)$ айирмани баҳолаш мумкин:

$$|x_1-c| = |\varphi(x_0)-\varphi(c)| \le \alpha|x_0-c| \le \alpha\delta. \qquad (2.6)$$

Бу тенгсизликдан, x_1 нуқта $[c-\delta, c+\delta]$ оралиқа тегишли ва x_0 нуқтага қараганда c нуқтага яқин жойлашган.
Итерацион кетма кетлик қуришни давом эттрирамиз.

$$|x_2-c| = |\varphi(x_2)-\varphi(c)| \le \alpha|x_1-c| \le \alpha^2|x_0-c| \le \alpha^2\delta$$

лигида x_2: $x_2=\varphi(x_1)$ муносабатни ҳисоблаймиз.
x_2 нуқта $[c-\delta, c+\delta]$ ораликқа тегишлидир ва x_1 нуқтага қараганда c яқин жойлашган, яъни биз c нуқтага яқинлашдик.
Индукциядан кейинги итерация мавжуд ва тенгсизликни қаноатлантиришини исботлаш осондир, x_1-c=$\varphi(x_0)$- $\varphi(c)$ муносабатда x_1: $x_1=\varphi(x_0)$ ни ҳисоблаймиз. Липщиц шартидан фойдаланиб $\varphi(x_0)$- $\varphi(c)$ айирмани баҳолаш мумкин:

$$|x_1-c| = |\varphi(x_0)-\varphi(c)| \le \alpha|x_0-c| \le \alpha\delta. \qquad (2.7)$$

Бу тенгсизликдан, x_1 нуқта $[c-\delta, c+\delta]$ оралиқа тегишли ва x_0 нуқтага қараганда c нуқтага яқин жойлашган.
Итерацион кетма кетлик қуришни давом эттрирамиз.

$$|x_2-c| = |\varphi(x_2)-\varphi(c)| \le \alpha|x_1-c| \le \alpha^2|x_0-c| \le \alpha^2\delta$$

лигида x_2: $x_2=\varphi(x_1)$ муносабатни ҳисоблаймиз.

x_2 нуқта $[c-\delta, c+\delta]$ оралиққа тегишлидир ва x_1 нуқтага қараганда c яқин жойлашган, яъни биз c нуқтага яқинлашдик.
Индукциядан кейинги итерация мавжуд ва тенгсизликни қаноатлантиришини исботлаш осондир,

$$|x_n - c| \le \alpha^n |x_0 - c| \le \alpha^n \delta . \tag{2.8}$$

Бундан, қуйидагига эга бўламиз

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - c) = 0, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty} x_n = c \tag{2.9}$$

Биз, $[c-\delta, c+\delta]$ оралиққа тегишли $x=c$ ильдизни (2.1) тенгламанинг ягона ечими эканлигини исботлаш етарлидир. Ҳақиқатдан, яна бир $x=c_1$ ильдизга эга бўлсин,

$$c_1 = \varphi(c_1), \quad c \in [c-\delta, c+\delta]. \tag{2.10}$$

Нолинчи яқинлашиш деб, c_1 ни қабул қиламиз ва (2.2) кетма – кетликни қурамиз. Бу ҳолда (2.10) муносабатдан га эга бўламиз. Бошқа томондан, исботлангандан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, яъни c_1=c. $[c-\delta, c+\delta]$ оралиққа тегишли бўлган бошқа ҳеч қандай тенгламанинг ечимига эга бўлмайди.
Итерацион кетма-кетлик (2.1) тенгламанинг ильдизига ўхшашлиги, бу ильдизга иxтиёрий даражали аниқликда яқинлашишидан фойдаланиш мумкин. Бунинг учун етарли сондаги итерация ўтказиш лозим.

2. Итерацион усуллар

Итерацион усул $y_0, y_1, y_2, \ldots$, кетма кетликларни қуришга изланувчи x ечимлар системаси ўхшашлигига асосланган. Ҳар бир шундай усул, ўзининг итерацион формуласига эга, олдиндан топилган навбатдаги яқинлашишни y_{k+1} ҳисоблашга мўлжалланган. Оддий ҳолда y_{k+1} итерацияни ҳисоблашда фақат битта олдинги y_k итерация фойдаланилади. Бундай усуллар *бир қадамли* ёки *икки қатламли* дейилади. Бир қадамли усул учун итерацион шаклини қуйидаги стандарт *каноник кўриниш* қабул қилиган:

$$B_{k+1}\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f . \tag{2.2.1}$$

Бу ерда τ_{k+1} - *итерацион параметр* $(\tau_{k+1} > 0)$, B_{k+1} - невырожденные ёрдамчи матрицалар. Агар τ ва B лар $k+1$ индексга боғлиқ бўлмаса, яъни (2.2.1) муносабат иxтиёрий k ларда бир ҳил кўринишда бўлса, у ҳолда итерацион усул *стандартли* дейилади. Стационар усул ҳисоблаш жараёнини ташкиллаштириш нуқтайи назаридан жудда ҳам соддадир. Бироқ, *стационар бўлмаган усул* τ_{k+1}, B_{k+1} кетма - кетликларни танлашга боғлиқ қўшимча “озодлик даражаси”ни берувчи бошқа имкониятлар эгадир. Бу x системани ечишга y_h итерацияни ўхшашлиги тезлаштиришда фойдаланилади. Кейинги y_{k+1} яқинлашишни (2.2.1) итерацион формула ёрдамида аниқлашда қуйидаги тенгламалар системасини ечиш талаб қилинади

$$B_{k+1}y_{k+1} = F_{k+1}, \tag{2.2.2}$$

бу ерда

$$F_{k+1} = (B_{k+1} - \tau_{k+1}A)y_k + \tau_{k+1}f .$$

Бундай ҳолатни ҳар бир қадамда бажариш лозимдир. Шунинг учун бундай усулнинг қўлланилиши фақатгина шундай шарт билан ўринлидир, яъни y_{k+1} итерацион кетма – кетликнинг алоҳида ҳадларини анииқлаб топиш жараёни берилган системага қараганда кам жойни таълаб қилади. Бу B_{k+1} матрицани танлашда аниқ бир чекланишларга сабаб бўлади.

Итерацион кетма кетликни ҳадларини ҳисоблашнинг энг содда схемасида B_{k+1} матрицани ўрнига бирлик матрицани олинишидир: $B_{k+1}=E;$ у ҳолда (2.2.1) формуланинг ошкор кўриниши y_{k+1} ҳадини y_k ҳади орқали ифодаланишидир:

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1}Ay_k + \tau_{k+1}f . \tag{2.2.3}$$

Итерацион усулнинг бундай рекуррент формулага асосланиши *ошкор* дейилади.

Ошкормас усулларнинг ичида $(B_{k+1} \neq E)$, B_{k+1} матрицани учбурчак шакли оммалашиб кетган усуллардан бири бўлса, у ҳолда кейинги итерацияни топиш (2.2.2) учбурчак системасида кетма – кетликнинг $y_{к+1}$ компанентасини аниқлашга олиб келади, яъни бу Гаусс усулининг тескари қадамларида. Кандайдир итерацион усулнинг қўланилишида, x система ечимига $y_к$ кетма – кетлик ўхшашлигидан фойдаланилади:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = x . \tag{2.2.4}$$

Бу (2.2.4) тенгликдан қуйидагига эришамиз,

$$\rho(y_k, x) = \|y_k - x\| = \sqrt{\left(y_1^{(k)} - x_1\right)^2 + \left(y_2^{(k)} - x_2\right)^2 + \ldots + \left(y_n^{(k)} - x_n\right)^2} \to 0 . \tag{2.2.5}$$

Ўхшашлик шартининг зарурий ва етарлигидан кетма кетлик y_k векторининининг x векторига ўхшашлик компонентидир

$$\lim_{k\to\infty} y_i^{(k)} = x_i, \qquad i = l, 2, \ldots.\ n. \tag{2.2.6}$$

y_k итерациянинг x система ечимидан фарқи *ҳатолик* дейилади: $z_k=y_k—x$.
$y_к$ ҳадни $y_k=x+z_k$ кўринишда ифодалаб ва (2.2.1) формулага қўйсак, ҳатолик учун итерацион формулани ҳосил қиламиз:

$$B_{k+1}\frac{z_{k+1}-z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0. \tag{2.2.7}$$

В отличие от (2.2.1) формуладн фарқи шундаки у биржинслидир, яъни ўнг томонида f функцияни йўқлигидир. (2.2.4) ўхшашликни зарурийлиги z_k ҳатолик нольга интилиши шартдир.

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0. \tag{2.2.8}$$

Ҳар бир итерация ўхшашлиги етарлилик шарти, бу матрицаларни A, B_{k+1} ва τ_{k+1} итерацион параметрни қаноатлантириши керак. Айримлари итерацион параметрларни танлашда оптималига кирувчиларини текшириш мураккабдир. Алгебраик чизиқли тенгламалар системаси ечимининг умумий тавсилотидан сўнг мисол тариқасида иккита усулни кўриб чиқамиз.

1. Оддий итерация усули. Оддий итерация усули яққол ошкор стационар усулни тағдим этади: $B_{к+1}=E$, $\tau_{k+1} = \tau = const$. У учун рекуррент формула (2.2.3) қуйдаги кўринишни ифодалайди

$$y_{k+1} = y_k - \tau A y_k + \tau f. \tag{2.2.9}$$

Оддий итерациянинг ўхшашлик усули етарлилик шартини ифодалаш учун матрицанинг иккита хоссалари керак бўлади. A матрица *симметрик* дейилади, агарда унинг элементлари $a_{ij} = a_{ji}$ $\left(i,\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ шартни қаноатлантирса.

Бу ерда кўринадики, симметрик матриканинг иҳтиёрий иккита элементи, асосий диагоналга нисбатан симметрик жойлашганлар ўз аро тенг бўлиши керак. Мисол усун қуйдаги матрицани қўриб чиқамиз:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}. \tag{2.2.10}$$

Биринчи $\left(a_{12} = a_{21} = 2\right)$ матрица симметрикдир, аммо кейигиси $\left(a_{12} = 1,\ \ a_{21} = 3\right)$ матрица симметрик эмас.

А матрица мусбат аниқланган дейилади, агада иҳтиёрий нольмас *x* вектор учун қуйидаги бажарилса,

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j>0. \qquad (2.2.11)$$

Яна (2.2.10) матрицани мисол тариқасида кўриб чиқамиз, A_1 матрица мусбат аниқланган бўлмайди. Ҳақиқатдан, бу матрица учун қуйидаги бўлади,

$$\varphi_1(x)=\varphi_1(x_1,\,x_2)=-x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2.$$

Агар биз x векторни $x_1=1,\ x_2=0$ компоненталар билан олсак, у ҳолда
$\varphi_1=-1<0$ ҳоси қиламиз ва бу (2.2.11) муносабатга зиддир. Аксинча,
матрица мусбат аниқланса, агар $\|x\|^2=x_1^2+x_2^2$ бўлса, қуйидагича бўлади:
раз қилайлик,

$$\varphi_2'(x)=\varphi_2(x_1,\,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2=(x_1+2x_2)^2+x_2^2>0$$

Фараз қилайлик, чизиқли алгебраик тенгламалар симметрик ва мусбат аниқланган A матрица билан берилган бўлсин. Шуни исботлаш мумкинки, бу ҳолда кўпгина τ параметрлар қиймати, оддий итерация усули учун y_0 ҳар қандай бошланғич яқинлашиш танлашда ўҳшашдир, яъни $0<\tau<\tau_0$ интервальни ҳосил қилади. Интервалтнинг ўнг чегараси A: $\tau_0=\tau_0(A)$ матрицанинг кўриниши билан аниқланади.. Итерцион кетма – кетлик геометрик прогрессия тезлиги билан ўҳшашдир, яъни геометрик прогрессиянинг q бўлувчиси τ:$q=q(\tau)$ функциядир. Энг кичик $q(\tau)$ қийматига эришувчи оптималь қиймат $\tau^*\in(0,\,\tau_0)$ мавжуд бўлса, у ҳолда ўҳшашлик тезлиги энг катта бўлиши мумкин. τ^* дан τ ни ўчирилишидан ўнг ёки чап чегараларга (0, τ_0) яқинлашиш ўҳшашлик сусаяди, яъни $q(\tau)$ ўсиб бориб қуйидан бирга яқинлашади.

2.1.2 Зейдел усули. Матрицанинг ҳамма элементлари нольдан фарқли бўлсин:

$$a_{ii}\neq 0,\ i=1,2,\ldots,n, \qquad (2.2.12)$$

ва уни уч матрицанинг йиғиндиси шаклида ифодалаймиз:

$$A=A^-+D+A^+.$$

Бу ерда D - матрицанинг диагонали, A^- ва A^+ - қуйи ва юқори учбурчак матрицалардир:

$$D=\begin{Vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & & \\ 0 & & & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

$$A^{-}=\begin{Vmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \\ & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,\,n-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A^{+}=\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots\dots & & \\ & \dots & 0 & & a_{n-1,\,n} \\ & 0 & & 0 & \end{Vmatrix}.$$

Зейдел усули ошкормас стационар усулдир, итерацион муносабатнинг каноник ифодаси қуйидаги кўринишда бўлади,

$$\left(A^{-}+D\right)\left(y_{k+1}-y_{k}\right)+Ay_{k}=f\,, \tag{2.2.13}$$

яъни, $\tau=1$ берилган усулда,

$$B=A^{-}+D=\begin{Vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{2.2.14}$$

(2.2.13) рекуррент формула, y_{k+1} ва y_k ҳадларига боғлиқ бўлса, у ҳолда формуланинг бошқа ёзувларини ёзишга руҳсат берилади:

$$\left(A^{-}+D\right)y_{k+1}+A^{+}y_{k}=f\,. \tag{2.2.15}$$

Бу ердан маълумки, Зейдел усулини кейинги y_{k+i} итерацияни ҳисоблашда ўҳшашлик, чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечиш (2.2.14) турғунмас учбурчак матрицаги келтирилади. Симметрик мусбат аниқланган матрицани учун Зейдел усулини ўҳшашлигини, ҳамда диагонал имкониятлари ҳоссаларига эга бўлган матрица ва система учун исботлаш мумкин. Бу иккита берилган шартлар етарлидир.

Матрица *А диагоналга эга* дейилади, агарда унинг элементи тенгсизликни қаноатлартирса,

$$\sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}\right| + \sum_{j=i+1}^{n}\left|a_{ji}\right| < \left|a_{ji}\right|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.2.16}$$

яъни, матрицанинг ҳар бир қаторнинг диагональ элементнинг модули, бошқа қолган элементлар йиғиндиси моделидан ошади. Оддий итерациядан фарқли равишда, бўш параметрларни ўхшашлик тезлигини бошқариш имконини беради, бу Зейдел усулида йўқдир.

3-Мавзу: Интегрални тақрибий ҳисоблаш усуллари. Отиш усули (метод стрельба).

Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси

Ушбу чизиқли тенгламалар системасини қараймиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 = a_{2n+1} \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n = a_{nn+1} \end{cases} \qquad (1)$$

Бу системани ушбу векторлар ва матрицани киритиб

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ ... \\ a_{nn+1} \end{vmatrix}$$

қисқа кўринишда ёзамиз:

$$Ax = b.$$

Алгебрадан маълумки, бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\det(A) \neq 0$, система ягона ечимга эга: $x = A^{-1}b$, ёки Крамер формулаларига асосан $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,...,n$, бу ерда $\Delta = \det(A),\ \Delta_i = \det(A_i),\ A_i -$ А матрицадан ш-устун билан фарқ қилади, бу устунда ўнг томон жойлашган, бу ерда A^{-1} тескари матрица;
2) $\det(A) = 0$, бу ернинг ўзида иккита ҳол бўлиши мумкин:

а) $\Delta = \det(A) = 0,\ \Delta_i = \det(A_i) = 0,\ \ i = 1,...,n$ бўлса бу система биргаликда, акс ҳолда, яъни

б) $\Delta = \det(A) = 0, \exists j : \Delta_i = \det(A_i) \neq 0,\ \ j = 1,...,n$,бўлса бу система ечимга эга эмас.

Чизиқли алгебраик тенгламалар системаси учун Гаусс усули

Номаълумларни кетма – кет йўқотиш Гаусс усули, чизиқли алгебраик тенгламаларни ечишни универсал ва эффектли усуллардан биридир. Бу усул тўғри усуллар сарасига киради. Гаусс усулида ҳисоблаш икки босқичдан иборат. Биринчи босқичда (тўғри юришда) учбурчак шаклига келтирилади, иккинчи босқичда эса (тескари юриш) бу чубурчак системанинг номаълумларини топиш билан ҳисоблаш жараёни амалга оширилади.

Гаусс усулига батафсил тўхталамиз. (1) да ҳисоблаш жараённинг бошланғич биринчи коэффиценти a_{11} , яъни нольдан фарқли бўлган коэффицентни танлаб оламиз. (Акс ҳолда нольмас элементлар *и* билан алмаштирилади, бу ерда $a_{i1} \neq 0$. Система турғунмаслигидан *u* номерни топиш мумкиндир.) Қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз,

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \ \ldots, \ m_{n1} = -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$$

ва *u*-та *(u=2, 3,. . ., n)* тенгламалар системасидан 1 – чи тенглама системасига m_{i1} кўпатирамиз ва бу жараённи кейинги тенгламалар учун ҳам қўллаймиз. 1 – чи тенгламани 2 чи тенгламадан бошлаб ҳадма ҳад айирамиз, натижада кейиги тенгламаларда x_1 ҳади иштирок этмайди. Қуйидаги кўринишга эга бўламиз,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n &= f_n^{(1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Бу ерда, $a_{ij}^{(1)}, f_{ij}^{(1)} \quad (i, j = 2,3,\ldots,n)$ - янги ҳосил бўлган қийматлар, ҳамда ўнг томони Гаус усулини қўллашдан сўнг янги функция ҳосил бўлади. Бу жараёнинг асосини, (2) формуладаги *n—1*та тенгламалар орқали ҳосил бўлган, $x_2, x_3, \ldots, x_n$ номаълумли *n*-1 – чи тартибли тенгламалар системасига эга бўламиз. Кейинчали ҳам худди шу жараённга таянамиз.

Кейинги тенгламага ўтишдан олдин, 2 – чи тенгламанинг бошловчи коэффиценти бўлган $a_{22}^{(1)}$ элементни нольдан фарқлаб оламиз. (Акс ҳолда юқорида тенгламаларга қўлланилган усулдан фойдаланиш керак.) Қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз,

$$m_{32} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad m_{42} = -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \ldots, \quad m_{n2} = -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

ва *i* та *(i=3, 4, . . ., n)* тенгламалар системасига 2 – чи тенгламани m_{u2} – га кўпайтирамиз. Натижада (2) қуйидаги системага эга бўламиз,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= f_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&; \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n &= f_n^{(2)}. \end{aligned} \tag{3}$$

Кейин *n*—1-та қадамдан сўнг қуйидаги учбурчакка эга бўламиз

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= f_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&; \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= f_n^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Бу системанинг матрица коэффицентларини *P* билан белгилаймиз*:*

$$R = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ & 0 & & \ldots & \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

(1) тенгламалар системасини (4) учбурчаклар кўринигига келтирилиши Гаусс усулининг биринчи босқичининг якунига келганликни билдиради.

Иккинчи босқич — ҳосил бўлган қадамларни — учбурчак шаклидаги (10) тенгламалар системасининг номаълумларин топишдан иборатдир. У қуйидаги амалга оширилади. Оҳирги аниқланган тенгламадан $x_н$ ҳад топилади. Ҳосил бўлган қиймат x_n бўйича n—1-чи тенгламадан $x_{н\ -1}$ ҳади аниқланади. Кейин ҳосил қилинган x_{n-1} ва x_n қийматлардан *н—2*-чи тенгламадан x_{n-2} ҳади аниқланади ва бу жараён ҳудди шундай давом эттирилади токи 1-чи тенгламадаги x_1 ҳадни топмагунга қадар. Бу жараён (1) системасига эквивалент бўлган (4) системанинг ечилиши билан якунланади.

Шуни такидлаш лозимки, Гаусс усулининг тўғри юриши йўли $n^3/3+O(n^2)$ кўшиш жараёнини ҳудди шунча $n^2/2+O(n)$ кўпайтириш жараёнини ва $n^2/2+O(n)$ *(n)* бўлиш жарайнини амалга оширишни талаб қилади, яъни *n* та жараён учун. Шундай қилиб, бу тенгламалар системасини ҳисоблашга қараганда, (1) тенгламалар системасини (4) тенгламалар системасига *n*-чи тартибдаги учбурчак шаклига келтирилиши мураккабдир.

Гаусс усулини қўлланилишига мисол келтирамиз, уч номаълумли учта тенгламалар системасини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} &1{,}2357x_1 + 2{,}1742x_2 - 5{,}4834x_3 = -2{,}0735, \\ &6{,}0696x_1 + 6{,}2163x_2 - 4{,}6921x_3 = -4{,}8388, \\ &3{,}4873x_1 + 6{,}1365x_2 - 4{,}7483x_3 = 4{,}8755. \end{aligned} \qquad (7)$$

Натижаларнинг ҳаммасини қўзғалувчи вергулдан сўнг бешта сон аниқликда оламиз.

Бу ҳолатда қуидагича бўлади,

$$m_{21} = -4{,}9119\,, \quad m_{31} = -2{,}8221\,.$$

Гаусс усулнинг қўлланилишининг биринси қадамидан сўнг қуйидаги системани ҳосил қиламиз

$$\begin{aligned} &1{,}2357x_1 + 2{,}1742x_2 - 5{,}4834x_3 = -2{,}0735, \\ &-16{,}895x_2 + 22{,}242x_3 = 5{,}3462, \\ &0{,}0007x_2 + 10{,}727x_3 = 10{,}727. \end{aligned} \qquad (8)$$

Кейиги қадамни амалга ошириш учун, қуйидагини ҳисоблаймиз

$$m_{32} = \frac{0{,}0007}{16{,}895} = -0{,}41432 \cdot 10^{-4}$$

ва системани учбурчак шаклига келтирамиз:

$$1{,}2357x_1 + 2{,}1742x_2 - 5{,}4834x_3 = -2{,}0735,$$
$$-16{,}895x_2 + 22{,}242x_3 = 5{,}3462, \qquad (9)$$
$$10{,}727x_3 = 10{,}727.$$

Учбурчак (9) системасини ҳисоблаш қуйидаги номаълумларнинг қийматларни беради:

$$x_1 = 0{,}99968,\ x_2 = 0{,}99994,\ x_3 = 0{,}99991. \qquad (10)$$

Бу натижа (7) системанинг аниқ ечими билан мослашади:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1. \qquad (11)$$

Якуни сифатида шуни таъкидлаймизки, (1) тенгламалар системасини (4) тенгламалар системасига келтирилиши Гаусс усулининг биринчи қадамида *A* матрицани учбурча шаклига келтириш билан боғлиқдир. Бу уни аниқлашда фойдаланиш мумкин. Гаусс усулининг туғри юриш босқичи, бир сатрнинг бошқа бир сатрга қўшилиш жараённи бир неча бор фойдаланишнинг асосини ташкил қилади. Маълумки, бу жараён аниқликни ўзгартирмайди. Баъзан, тенгламаларни ўрнини алмаштиришга тўғри келади, яъни кейиги босқичдан олдин $a_{ii}^{(i-1)}$ элементни нольдан фарқли бўлишига эришиш учун. Матрицанинг сатрини алмаштириш унинг аниқланиши қарама қарши белгисини ўзгартирилишига олиб келади. Бу танқиддан қуйидагига эга бўламиз,

$$det\,A = (-1)^k\, det\,R = (-1)^k a_{11}a_{22}^{(1)}..a_{nn}^{(n-1)},$$

бу ерда *к* – (9) системадаги учбурчак матрица Р ни *A* матрица редукцияси жараёни сатрларини алмаштириш сони.

(7) системанинг матрица коэффицентларини аниқлаб ҳисоблашни мисол сифатида оламиз. Учбурчакка келтириш жараёнида (9) кўринишни биз тенгламаларни ўрнини алмаштирмадик. Демак, берилган ҳолда *detA=det R* =-223,97 бўлади.

Жараёнларнинг сони, Гаусс усулини қадамларини ҳисоблаш учун керак бўлган ҳоли, ҳадларининг *n!* йиғиндисини аниқловчига тўғридан – тўғри таққослашга олиб келади. Масалан, нисбатан унча катта бўлмаган 20-чи тартибли аниқловчи $19 \cdot 20! \approx 4{,}5 \cdot 10^{19}$ кўпайтмани бажарилишини олиб келади. Бундай амалларни бажарилиш, сонияда бир миллионлаб амалларни бажарувчи компьютер учун эса, ҳисоблаш жараёни $1{,}4 \cdot 10^{6}$ йил вақт давом этади.

4-Мавзу: Прогонка (ўнг, чап, матрицали) усули.
Прогонка (ўнг, чап, матрицали) усули.

Уч нуқтали алгебраик тенгламалар системалари учун прогонка (ҳайдаш)усули

Кўпгина иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларга қўйилган биринчи чегаравий шарт қуйидаги уч нуқтали алгебраик тнгламалар системасига келтирилади

$$\begin{cases} y_0 = \psi_1, \;\; i = 0 \\ A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \;\; 1 \le i \le n \\ y_n = \psi_2, \;\; i = n+1 \end{cases} \tag{1}$$

Юқорида ҳосил қилган алгебраик тенгламалар системасининг матрицаси уч диагоналли ҳисобланади:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & -C_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_i & -C_i & B_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & A_{n-1} & -C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

ва уни ечиш прогонка методи ёрдамида амалга оширилади. Бу метод қуйидаги реккурент формула ёрдамида амалга оширилади [16,18].

$$y_i^j = \alpha_{i+1} y_{i+1}^j + \beta_{i+1} \tag{3}$$

бунда α_i ва β_i лар номаълум коэффициентлар. $y_{i-1}^j = \alpha_i y_i^j + \beta_i$ ифодани (3) ифодага қўйиб қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$(A_i\alpha_i - C_i)y_i^j + A_i\beta_i + B_i y_{i+1}^j = -F_i \tag{4}$$

Ҳосил бўлган ифодада (3) реккурент формуладан фойдалансак

$$[(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i]y_{i+1}^j + A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} = -F_i \tag{5}$$

ифода келиб чиқади. Бу тенглама барча y_i^j ларда ўринли бўлади, агар

$$(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i = 0, \;\; A_i\beta_i + (A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + F_i = 0 \tag{6}$$

шарт бажарилса.

Бу ифодалардан α_{i+1} ва β_{i+1} коэффициентлар учун қуйидаги реккурент формула ҳосил бўлади:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{7}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{8}$$

Агар α_i, β_i коэффициентлар ва $y_{n,j}$ нинг қиймати маълум бўлса, у ҳолда $y_{i,j}$ ларнинг қийматларини кетма – кет ҳисоблаб топа оламиз.

α_i, β_i коэффициентларни чапдан ўнгга ҳаракатланган ҳолда аниқлаймиз, $y_{i,j}$ ларни эса аксинча ўнгдан чапга томон кетма – кет аниқлаймиз.

α, β, y функцияларнинг ҳар бири учун Коши масаласини ечишимиз керак бўлади, чунки бу функцияларнинг бошланғич қийматлари бизга номаълум. Бунинг учун чегаравий шартлардан ҳам фойдаланамиз. (3) ифодадан $i=0$ бўдганда қуйидагига эга бўламиз:

$$y_0^j = \alpha_1 y_1^j + \beta_1 \tag{9}$$

иккинчи томондан эса

$$y_0^j = \psi_1(t_j) \tag{10}$$

Бу ифодалардан кўринадики

$$\alpha_1 = 0, \tag{11}$$

$$\beta_1 = \psi_1(t_j) \tag{12}$$

Шунга кўра α_i ва β_i функциялар учун Коши масаласи ҳосил бўлади: α учун (7),(11), β учун (8),(12). Бу формулалар тўғри прогонка (прямой прогонки) формулалари деб юритилади.

α_i ва β_i функцияларнинг $i = 1, 2, \dots, n$ даги барча қийматлари ҳисоблангач, $y_n^j = \psi_2(t_j)$ чегаравий қийматларни ҳам ҳисобланади. Энди бизга барча бошланғич қийматлар маълум, (3) дан фойдаланиб y_i^j номаълумларни топсак бўлади.

Бу метод $|C_i| \geq |A_i| + |B_i|$ шарт бажарилганда турғун бўлиб, ечимга эга бўлади. Ҳосил қилган (1) айирмали схемамизда эса бу шарт бажарилади.

Чап прогонка усули ва учрашувчи прогонка усуллари

(3)—(12) формулалардаги каби чап прогонка усули формулаларини келтириб чиқариш мумкин

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 0,\ 1,\ \dots,\ N-1, \tag{17}$$

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \xi_{i+1}}, \ i = N-1, N-2, \dots, 2, 1, \quad \xi_N = \chi_2, \tag{18}$$

$$\eta_i = \frac{B_i \eta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \ i = N-1, N-2, \dots, 2, 1, \quad \eta_N = \mu_2, \tag{19}$$

$$y_0 = \frac{\mu_1 + \chi_1 \eta_1}{1 - \xi_1 \chi_1}, \tag{20}$$

Қуйидаги муносабат ўринли, деб фараз қиламиз

$$y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1},$$

(9) дан кетма-кет

y_{i+1} ва $y_i = \xi_{i-1} + \eta_i$ ларни йўқотиб қуйидаги муносабатга келамиз

$$-F_i = A_i y_{i-1} + \left(B_i \xi_{i+1} - C_i\right) y_i + B_i \eta_{i+1} =$$

$$= \left[A_i - \left(C_i - B_i \xi_{i+1}\right)\xi_i\right] y_{i-1} + B_i \eta_{i+1} - \left(C_i - B_i \xi_{i+1}\right)\eta_i.$$

(9) тенглама ўринли бўлиши учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлиши керак

$$A_i - \left(C_i - B_i \xi_{i+1}\right)\xi_i = 0,$$

$$-F_i = B_i \eta_{i+1} - \left(C_i - B_i \xi_{i+1}\right)\eta_i.$$

Бундан эса (18) ва (19) формулаларни ҳосил қиламиз. y_0 нинг қийматини қуйидаги $y_0 = \chi_1 y_1 + \mu_1$ шарт ва $y_1 = \xi_1 y_0 + \eta_1$ формуладан ҳосил қиламиз.

Қуйидаги

$$\left|C_i - B_i \xi_{i+1}\right| \geq \left|C_i\right| - \left|B_i\right| \cdot \left|\xi_{i+1}\right|,$$

$$\left|1 - \xi_1 \chi_1\right| \geq 1 - \left|\xi_1\right| \cdot \left|\chi_1\right|$$

тенгсизликдан кўринадики, (16) шарт чап ҳайдаш формулаларидан фойдаланиш мумкинлигини ва унинг турғунлигини таъминлайди, чунки барча $i = 1,\ 2,\ ...,\ N$ лар учун

$$\left|\xi_i\right| \leq 1$$

ўринли бўлади.

Чап ва ўнг ҳайдаш усулларининг комбинациясидан учрашувчи ҳайдаш усулининг формулаларини ҳосил қилишимиз мумкин. Фараз қиламиз $i = i_0,\ 0 < i_0 < N$ — бирорта ички нуқта. У ҳолда $0 \leq i \leq i_0 + 1$ соҳада (10) — (15) формулалар ёрдамида ҳайдаш коэффициенлари топилади:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i},\ i = 1, 2, ..., i_0, \quad \alpha_1 = \chi_1,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i},\ i = 1, 2, ..., i_0, \quad \beta_1 = \mu_1,$$

$i_0 \leq i \leq N$ соҳада эса (17) —(20) формулалар ёрдамида ξ_i, η_i топилади:

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \xi_{i+1}},\ i = N-1, N-2, ..., i_0, \quad \xi_N = \chi_2,$$

$$\eta_i = \frac{B_i \eta_{i+1} + F_i}{C_i - \xi_{i+1} B_i}, \; i = N-1, N-2, \ldots, i_0, \quad \eta_N = \mu_2,$$

$i = i_0$ да ечимни (10) ва (17) лар асосида бирлаштирамиз. Қуйидаги

$y_{i_0} = \alpha_{i_0+1} y_{i_0+1} + \beta_{i_0+1}, \quad y_{i_0+1} = \xi_{i_0+1} y_{i_0} + \eta_{i_0+1}$

формулалардан

$$y_{i_0} = \frac{\beta_{i_0+1} + \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0+1}}{1 - \alpha_{i_0+1}\eta_{i_0+1}}$$

формулани ҳосил қиламиз.

5-Мавзу: Параболик типдаги дифференциал тенгламалар орқали ифодаланувчи жараёнларни сонли моделлаштириш. Жараёнларни визуаллаштириш.

Бир жинсли бўлмаган ютилиш ёки манбааси бўлган фильтрлаш жараёнининг, $N = 1$ ва $N = 2$ холлари учун сонли схемалар, чизиқлаштириш услублари, ечиш усуллари ва усулнинг турғунлиги келтирилган. Тенгламада иштирок этадиган параметрларнинг хар ҳил қийматлари учун ҳисоблаш эксперименти натижалари келтрилган. Жараённинг вақт бўйича ўзгариши тасвири шахсий компьютерда MathCADдан фойдаланган холда моделлаштирилди. Бу ерда олинган натижалар MathCADни чизиқсиз масалаларни сонли ечиш каби янги имкониятлар билан тўлдиришга ҳизмат қилади.

Сонли схемалар ва сонли ечиш усуллари

$$Lu \equiv -u_t + \nabla\left(|x|^m K(u)\nabla u\right) + \varepsilon\,\gamma(t,x)Q(u) = 0, \qquad x \in R^N, \tag{1}$$

тенгламани $\Omega = \{(t,x):\ 0 < t < T,\ 0 < x < b\}$ соҳада бошланғич ва чегаравий шартлари

$$u(0,x) = \psi(x) \ge 0, \qquad 0 \le x \le b, \tag{2}$$

$$\begin{cases} u(t,0) = \varphi_1(t) > 0 \\ u(t,b) = \varphi_2(t) = 0 \end{cases}, \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

бўлган хол учун кўриб чиқамиз. Бу тенглама бузулган холи учун финит бошланғич функцияли $u_0(x) \ge 0, \qquad |x| \ge l > 0$ Коши масаласига эквивалентдир.

Бу ерда $K(u) = u^\sigma$, $Q(u) = u^\beta$- етарлича силлиқ функциялар, $m \ne 0$, $0 < \gamma(t,x) \in C(0,+\infty) \times R^N$, $\varepsilon = \pm 1$.

Аввал бир ўлчовли холни кўриб чиқамиз ($N = 1$).

$\overline{\Omega}$ да h қадам билан $\overline{\omega}_h$ тенг ўлчовли

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\quad h > 0,\quad i = 0,1,\dots,n,\quad hn = b\},$$

ва вақтинчалик

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \quad \tau > 0, \quad j = 0,1,\dots, m, \quad \tau m = T\}, \quad T > 0$$

тўрлар қуриб оламиз.

Баланс усулини қўллаган холда (1)-(3) масалани ошкормас айирмали схема билан алмаштирамиз ва $O(h^2+\tau)$ хатоликка эга бўлган айирмали масалани хосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \dfrac{1}{h^2}\left[|x_{i+1}|^m a_{i+1}\left(y^{j+1}\right)\left(y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}\right) - |x_i|^m a_i\left(y^{j+1}\right)\left(y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}\right)\right] + \\ \qquad + \varepsilon\gamma\left(t_j, x_i\right) b_i\left(y^{j+1}\right), \qquad i = 1,2,\dots, n-1; \quad j = 0,1,\dots, m-1, \\ y_i^0 = u_0\left(x_i\right), \quad i = 0,1,\dots, n, \\ y_0^j = \varphi_1\left(t_j\right), \quad j = 1,2,\dots, m, \\ y_n^j = \varphi_2\left(t_j\right), \quad j = 1,2,\dots, m, \end{cases} \tag{4}$$

Бу ерда $b_i\left(y^{j+1}\right) = \left(y_i^{j+1}\right)^\beta$ ва $a(y)$ни ҳисоблаш учун қуйидаги формулалардан бири ишлатилади

$$\text{а)} \quad a_i(y) = K\left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right),$$

$$\text{б)} \quad a_i(y) = \frac{K\left(y_{i-1}\right) + K\left(y_i\right)}{2}.$$

(4) алгебраик тенгламалар системаси y^{j+1} га нисбатан чизиқсиз.

Чизиқсиз тенгламалар системасини ечиш учун хар ҳил итерация усулларидан фойдаланамиз ва қуйидагини хосил қиламиз:

$$\frac{\overset{s+1}{y_i^{j+1}} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left[\left(|x_{i+1}|\right)^m a_{i+1}\left(\overset{s}{y^{j+1}}\right)\left(\overset{s+1}{y_{i+1}^{j+1}} - \overset{s+1}{y_i^{j+1}}\right) - \left(|x_i|\right)^m a_i\left(\overset{s}{y^{j+1}}\right)\left(\overset{s+1}{y_i^{j+1}} - \overset{s+1}{y_{i-1}^{j+1}}\right)\right] +$$

$$+ \varepsilon\gamma\left(t_j, x_i\right) b_i\left(y^{j+1}\right), \tag{5}$$

бунда $s = 0,1,2,\dots$.

1) $b_i\left(y^{j+1}\right) = \left(\overset{s}{y_i}\right)^\beta$ - Пикар усули,

2) $b_i\left(y^{j+1}\right) = \overset{s+1}{y_i}\left(\overset{s}{y_i}\right)^{\beta-1}$ - махсус усул,

3) $b_i\left(y^{j+1}\right)=\left(\overset{s}{y}_i\right)^{\beta}+\beta\left(\overset{s}{y}_i\right)^{\beta-1}\left(\overset{s+1}{y}_i-\overset{s}{y}_i\right)$ - Ньютон усули.

$\overset{s+1}{y}_i$ га нисбатан (5) айирмали схема чизиқли. y нинг қиймати, $\overset{s+1}{y}_i$ учун бошланғич итерация сифатида аввалги вақт бўйича қадамдан олинади: $\overset{0}{y}{}^{j+1}=y^j$. Итерацияли схема бўйича ҳисоблашда итерация аниқлиги берилади ва жараён қуйидаги шарт қаноатлантирилгунча давом этади

$$\max_{0\le i\le n}\left|\overset{s+1}{y}_i-\overset{s}{y}_i\right|<\varepsilon .$$

Огохлантириш. Хамма рақамли ҳисоблашларда $\varepsilon=10^{-3}$ деб олинган.

(5) да қуйидагича белгилашлар киритамиз

1) Пикар усули учун

$$\overset{s}{A}_i=\frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i-1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\frac{\overset{s}{y}{}_i^{j+1}+\overset{s}{y}{}_{i-1}^{j+1}}{2}\right)^{\sigma},\quad \overset{s}{B}_i=\frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i+1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\frac{\overset{s}{y}{}_{i+1}^{j+1}+\overset{s}{y}{}_i^{j+1}}{2}\right)^{\sigma},$$

$$\overset{s}{C}_i=\overset{s}{A}_i+\overset{s}{B}_i+1,\quad \overset{s}{F}_i=\overset{s}{y}_i+\varepsilon\tau\cdot\gamma\left(t_j,x_i\right)\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{\beta},\quad s=0,1,2\ldots,\quad i=1,2,\ldots,n .$$

2) махсус усул учун

$$\overset{s}{A}_i=\frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i-1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\frac{\overset{s}{y}{}_i^{j+1}+\overset{s}{y}{}_{i-1}^{j+1}}{2}\right)^{\sigma},\quad \overset{s}{B}_i=\frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i+1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\frac{\overset{s}{y}{}_{i+1}^{j+1}+\overset{s}{y}{}_i^{j+1}}{2}\right)^{\sigma},$$

$$\overset{s}{C}_i=\overset{s}{A}_i+\overset{s}{B}_i+1-\varepsilon\tau\cdot\gamma\left(t_j,x_i\right)\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{\beta-1},\quad \overset{s}{F}_i=\overset{s}{y}{}_i^{j+1},\quad s=0,1,2\ldots,\quad i=1,2,\ldots,n .$$

3) Ньютон усули учун

$$\overset{s}{A}_i=\frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i-1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\frac{\overset{s}{y}{}_i^{j+1}+\overset{s}{y}{}_{i-1}^{j+1}}{2}\right)^{\sigma},\quad \overset{s}{B}_i=\frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i+1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\frac{\overset{s}{y}{}_{i+1}^{j+1}+\overset{s}{y}{}_i^{j+1}}{2}\right)^{\sigma},$$

$$\overset{s}{C}_i=\overset{s}{A}_i+\overset{s}{B}_i+1-\varepsilon\tau\cdot\gamma\left(t_j,x_i\right)\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{\beta-1},\quad \overset{s}{F}_i=\overset{s}{y}_i+\varepsilon\tau\cdot\gamma\left(t_j,x_i\right)\left[\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{\beta}-\beta\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{\beta}\right],\quad s=0,1,2\ldots,$$

$$i=1,2,\ldots,n .$$

Қуйидагича белгилашлар киритишни келишиб оламиз

$$y^j = y, \qquad y^{j+1} = \bar{y}.$$

Айирмали тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб олиш мумкин

$$\overset{s}{A}_i \overset{s+1}{\bar{y}}_{i-1} - \overset{s}{C}_i \overset{s+1}{\bar{y}}_i + \overset{s}{B}_i \overset{s+1}{\bar{y}}_{i+1} = -\overset{s}{F}_i, \qquad i = 1,2,\dots,n-1. \tag{6}$$

(6) тенгламалар системасини сонли ечиш учун прогонка усулини қўлланилади. (4) ва чегаравий шартлардан қуйидагини хосил қиламиз

$$\bar{y}_0 = \varphi_1(t_{j+1}), \qquad \bar{y}_n = \varphi_2(t_{j+1}).$$

$$\bar{y}_i = \alpha_i(\beta_i + \bar{y}_{i+1}), \tag{7}$$

бўлсин, бу ерда α_i, β_i - хозирча номаълум коэффициентлар [29].

α_i, β_i катталикларни қуйидагича топилади:

(6) тенгламага (7) белгилашларда i ва i-1 нуқталарни қўйиб

$$(A_i - C_i\alpha_i + B_i\alpha_{i-1}\alpha_i)\cdot \bar{y}_{i+1} + (-C_i\alpha_i\beta_i + B_i\alpha_{i-1}\beta_{i-1} + B_i\alpha_{i-1}\alpha_i\beta_i + F_i) = 0,$$

(6) да тенглик бажарилиши учун қуйидаги бажарилиши талаб этилади

$$\begin{cases} A_i - C_i\alpha_i + B_i\alpha_{i-1}\alpha_i = 0 \\ -C_i\alpha_i\beta_i + B_i\alpha_{i-1}\beta_{i-1} + B_i\alpha_{i-1}\alpha_i\beta_i + F_i = 0 \end{cases}.$$

Бу ердан прогонка коэффициентлари α_i, β_i топилади:

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{A_i}{C_i - \alpha_{i-1}B_i} \\ \beta_i = \dfrac{B_i\alpha_{i-1}\beta_{i-1} + F_i}{A_i} \end{cases}, \qquad i = \overline{2,n}. \tag{8}$$

α_1, β_1 катталики $i = 1$ бўлганда (7) ва (6) дан топилади:

$$\bar{y}_1 = \alpha_1(\beta_1 + y_2),$$

$$\bar{y}_1 = \frac{A_1\bar{y}_2 + B_1\bar{y}_0 + F_1}{C_1}.$$

Бу ердан

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{A_1}{C_1} \\ \beta_1 = \dfrac{B_1\varphi_1 + F_1}{A_1} \end{cases}. \tag{9}$$

Шундай қилиб $i = \overline{1,n}$ учун α_i, β_i коэффициентлар топилади.

(4) системасининг ечими (7) рекуррент формула ёрдамида топилади. $\bar{y}_n$ нинг қийматларини (4) чегаравий шартдан хосил қиламиз

$$\begin{cases} \bar{y}_n = \varphi_2 \\ \bar{y}_{n-1} = \alpha_{n-1}\left(\beta_{n-1} + \bar{y}_n\right) \\ \vdots \\ \bar{y}_i = \alpha_i\left(\beta_i + \bar{y}_{i+1}\right) \\ \vdots \end{cases} . \qquad (10)$$

Прогонка усулини қўллаш мумкин бўлиши учун (6) системанинг коэффициентлари ([50]) шартни қаноатлантиришини талаб этиш етарли

$$A_i \neq 0, \quad B_i \neq 0, \quad |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = \overline{1,n} . \qquad (11)$$

(5) итерацияи схема учун прогонка усули турғун ва ягона ечим беради.

Энди $\Omega = \{(t,x): \ 0 < t < T, \ 0 < x_\alpha < b_\alpha, \ \alpha = 1,2\}$ соҳада (1) тенгламани $N = 2$ учун кўриб чиқамиз

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(|x|^m u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(|x|^m u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \varepsilon \cdot \gamma(t,x) u^\beta \qquad (12)$$

бошланғич шартлар

$$u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \qquad 0 \leq x_\alpha \leq b_\alpha, \quad \alpha = 1,2 . \qquad (13)$$

$\overline{\Omega}$ да x_α ($\alpha = 1,2$) бўйича $h_1 = \dfrac{b_1}{n_1}$ ва $h_2 = \dfrac{b_2}{n_2}$ қадамлар билан тенг ўлчовли $\overline{\omega}_h$:

$$\overline{\omega}_h = \left\{x_{ij} = \left(x_1^i, x_2^j\right), \quad x_1^i = ih_1, \ \ x_2^j = jh_2, \quad i,j = 0,1,\ldots,n_\alpha, \ \alpha = 1,2\right\},$$

ва вақтинчали

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau, \quad \tau > 0, \quad k = 0,1,\ldots,m, \quad \tau m = T\}, \ \ T > 0$$

тўр қурамиз.

(12)-(14) масаласини сонли ечиш учун Писмен-Речфорд схемаси деб аталувчи ўзгарувчан йўналишлар усули қўлланади

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i,j}^{k+1/2} - y_{i,j}^k}{0.5 \cdot \tau} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + \Lambda_2 y^k + \varepsilon\gamma\left(t_{k+1/2}, x_{i,j}\right)\left(y_{i,j}^{k+1/2}\right)^\beta \\ \dfrac{y_{i,j}^{k+1} - y_{i,j}^{k+1/2}}{0.5 \cdot \tau} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + \Lambda_2 y^{k+1} + \varepsilon\gamma\left(t_{k+1}, x_{i,j}\right)\left(y_{i,j}^{k+1}\right)^\beta \end{cases} \qquad (15)$$

$$\Lambda_1 y^{k+1/2} = \frac{1}{h_1^2}\left[\left|x_{i+1,j}\right|^m a_{i+1,j}\left(y^{k+1/2}\right)\left(y_{i+1,j}^{k+1/2} - y_{i,j}^{k+1/2}\right) - \left|x_{i,j}\right|^m a_{i,j}\left(y^{k+1/2}\right)\left(y_{i,j}^{k+1/2} - y_{i-1,j}^{k+1/2}\right)\right],$$
$$\Lambda_2 y^k = \frac{1}{h_2^2}\left[\left|x_{i,j+1}\right|^m b_{i,j+1}\left(y^k\right)\left(y_{i,j+1}^k - y_{i,j}^k\right) - \left|x_{i,j}\right|^m b_{i,j}\left(y^k\right)\left(y_{i,j}^k - y_{i,j-1}^k\right)\right],$$
$$i, j = 1,2,\ldots,n_\alpha - 1, \qquad \alpha = 1,2.$$

Бу схемада k қатламдан $k+1$ қатламга ўтиш икки этапда амалга оширилади. Биринчи этапда (15) да $y_{i,j}^{k+1/2}$ оралиқ қийматлар аниқланади. Иккинчи этапда, $y_{i,j}^{k+1/2}$ нинг топилган қийматларидан фойдаланиб $y_{i,j}^{k+1}$ топилади.

Бошланғич ва чегаравий шартлар қуйидагича қайта ёзилади

$$\begin{cases} y_{i,j}^0 = u_0(x), & x \in \overline{\omega}_h \\ y_{i,j}^{k+1} = \varphi^{k+1}, & \text{при } j = 0 \text{ и } j = n_2 \\ y_{i,j}^{k+1/2} = \overline{\varphi}^{k+1/2}, & \text{при } i = 0 \text{ и } i = n_1 \end{cases} \tag{16}$$

где $\overline{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\varphi^{k+1} + \varphi^k\right) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2\left(\varphi^{k+1} - \varphi^k\right).$

(15) ни

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i,j}^{k+1/2}}{0.5\cdot\tau} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + F_{i,j}^k, & F_{i,j}^k = \dfrac{2}{\tau} y_{i,j}^k + \Lambda_2 y^k + \varepsilon\gamma\left(t_{k+1/2}, x_{i,j}\right)\left(y_{i,j}^k\right)^\beta \\ \dfrac{y_{i,j}^{k+1}}{0.5\cdot\tau} = \Lambda_2 y^{k+1} + \overline{F}_{i,j}^{k+1/2}, & \overline{F}_{i,j}^k = \dfrac{2}{\tau} y_{i,j}^{k+1/2} + \Lambda_1 y^{k+1/2} + \varepsilon\gamma\left(t_{k+1}, x_{i,j}\right)\left(y_{i,j}^{k+1/2}\right)^\beta \end{cases} \tag{17}$$

кўринишда қайта ёзамиз.

Қуйидагича белгилашлар киритишни келишиб оламиз

$$y^k = y, \; y^{k+1/2} = \overline{y}, \; y^{k+1} = \hat{y}.$$

(17) кўринишида хосил бўлган чизиқсиз тенгламалар системаси учун хам итерацион усул қўллаймиз ва қуйидаги схемани оламиз

$$\frac{\overset{s+1}{\overline{y}}_{i,j}}{0.5\cdot\tau} = \frac{1}{h_1^2}\left[\left|x_{i+1,j}\right|^m a_{i+1,j}\left(\overset{s}{\overline{y}}\right)\left(\overset{s+1}{\overline{y}}_{i+1,j} - \overset{s+1}{\overline{y}}_{i,j}\right) - \left|x_{i,j}\right|^m a_{i,j}\left(\overset{s}{\overline{y}}\right)\left(\overset{s+1}{\overline{y}}_{i,j} - \overset{s+1}{\overline{y}}_{i-1,j}\right)\right] + \overset{s}{F}_{i,j} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j}}{0.5\,\tau} = \frac{1}{h_2^2}\left[\left|x_{i,j+1}\right|^m b_{i,j+1}\left(\overset{s}{\hat{y}}\right)\left(\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j+1} - \overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j}\right) - \left|x_{i,j}\right|^m b_{i,j}\left(\overset{s}{\hat{y}}\right)\left(\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j} - \overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j-1}\right)\right] + \overset{s}{\overline{F}}_{i,j} = 0 \tag{19}$$

бу ерда $a_{i,j}(y) = K\left(\dfrac{y_{i-1,j} + y_{i,j}}{2}\right), \quad b_{i,j}(y) = K\left(\dfrac{y_{i,j-1} + y_{i,j}}{2}\right), \; i, j = 1,2,\ldots,n_\alpha - 1, \;\; \alpha = 1,2$.

Айирмали схема (18) да $\overset{s+1}{\bar{y}}_{i,j}$ га нисбатан, (19) да эса $\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j}$ га нисбатан чизиқлидир. (18) да $\overset{s+1}{\bar{y}}_{i,j}$ учун бошланғич итерация сифатида y нинг аввалги вақт бўйича қадамдаги $\overset{0}{\bar{y}}_{i,j} = y_{i,j}$ қиймати олинади. Итерацияли схема бўйича ҳисоблашда итерация аниқлиги берилади ва жараён қуйидаги шарт қаноатлантирилгунча давом этади

$$\max_{\substack{0\le i\le n_1\\ 0\le j\le n_2}} \left| \overset{s+1}{\bar{y}}_{i,j} - \overset{s}{\bar{y}}_{i,j} \right| < \varepsilon .$$

Шунингдек (19) да $\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j}$ учун бошланғич итерация сифатида y нинг аввалги вақт бўйича қадамдаги $\overset{0}{\hat{y}}_{i,j} = \bar{y}_{i,j}$ қиймати олинади. Итерацияли схема бўйича ҳисоблашда итерация аниқлиги берилади ва жараён қуйидаги шарт қаноатлантирилгунча давом этади

$$\max_{\substack{0\le i\le n_1\\ 0\le j\le n_2}} \left| \overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j} - \overset{s}{\hat{y}}_{i,j} \right| < \varepsilon .$$

(18) да қуйидагича белгилашлар киритиб

$$\overset{s}{A}_{i,j} = \frac{0.5\tau \cdot \left|x_{i+1,j}\right|^m}{h_1^2} \left(\frac{\overset{s}{\bar{y}}_{i+1,j} + \overset{s}{\bar{y}}_{i,j}}{2} \right)^{\sigma}, \quad \overset{s}{B}_{i,j} = \frac{0.5\tau \cdot \left|x_{i,j}\right|^m}{h_1^2} \left(\frac{\overset{s}{\bar{y}}_{i,j} + \overset{s}{\bar{y}}_{i-1,j}}{2} \right)^{\sigma},$$

$$\overset{s}{C}_{i,j} = \overset{s}{A}_{i,j} + \overset{s}{B}_{i,j} + 1, \quad s = 0,1,2\ldots, \quad i,j = 1,2,\ldots,n_\alpha - 1, \ \ \alpha = 1,2 .$$

айирмали тенгламани

$$\begin{cases} \overset{s}{A}_{i,j} \overset{s+1}{\bar{y}}_{i+1,j} - \overset{s}{C}_{i,j} \overset{s+1}{\bar{y}}_{i,j} + \overset{s}{B}_{i,j} \overset{s+1}{\bar{y}}_{i-1,j} = -\overset{s}{F}_{i,j} \\ \bar{y} = \varphi, \quad \text{при} \quad i = 0, n_1 \end{cases} \tag{20}$$

$i,j = 1,2,\ldots,n_\alpha - 1, \ \ \alpha = 1,2$.

кўринишда ёзиб олиш мумкин.

Мос равишда (19) ни

$$\begin{cases} \overset{s}{A}_{i,j} \overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j+1} - \overset{s}{C}_{i,j} \overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j} + \overset{s}{B}_{i,j} \overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j-1} = -\overset{s}{F}_{i,j} \\ \hat{y} = \overline{\varphi}, \quad \text{при} \quad j = 0, n_2 \end{cases} \tag{21}$$

где $\overset{s}{A}_{i,j} = \dfrac{0.5\tau \cdot |x_{i,j+1}|^m}{h_2^2} \left(\dfrac{\overset{s}{\hat{y}}_{i,j+1} + \overset{s}{\hat{y}}_{i,j}}{2} \right)^\sigma$, $\overset{s}{B}_{i,j} = \dfrac{0.5\tau \cdot |x_{i,j}|^m}{h_2^2} \left(\dfrac{\overset{s}{\hat{y}}_{i,j} + \overset{s}{\hat{y}}_{i,j-1}}{2} \right)^\sigma$,

$\overset{s}{C}_{i,j} = \overset{s}{A}_{i,j} + \overset{s}{B}_{i,j} + 1, \quad s = 0,1,2\ldots, \quad i, j = 1,2,\ldots, n_\alpha - 1, \ \alpha = 1,2$.

кўринишда ёзиб оламиз.

(20) ва (21) системаларни сонли ечиш учун прогонка усулини қўлланилади. (20) тенгламалар системаси $j = 1,2,\ldots,n_2 - 1$ сатрлар бўйлаб ечилади ва $\overline{y}$ ω_h тўрининг хар бир нуқтасида аниқланади. Сўнгра (21) тенгламалар системаси $i = 1,2,\ldots,n_1 - 1$ устунлар бўйлаб $\hat{y}$ ни ω_h тўрининг хар бир нуқтасида аниқлаган холда ечилади.

$k+1$ қатламдан $k+2$ қатламга ўтишда ҳисоблаш процедураси такрорланади.

Энди Ω сохада

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + P(u)\nabla\left(|x|^m \nabla u\right) + \varepsilon\,\gamma(t,x)Q(u) = 0 \tag{22}$$

тенгламани

$$u(0,x) = \psi(x) \geq 0, \qquad 0 \leq x \leq b\,, \tag{23}$$

$$\begin{cases} u(t,0) = \varphi_1(t) > 0 \\ u(t,b) = \varphi_2(t) = 0 \end{cases}, \qquad t \in [0, T], \tag{24}$$

бошланғич ва чегаравий шартлари билан кўриб чиқамиз. Бу масала бузулган ҳолида $u_0(x) \geq 0, \ |x| \geq l > 0$ финит бошланғич функцияли Коши масаласига эквивалентдир.

Бу ерда $P(u) = u^p$, $Q(u) = u^\beta$ - етарлича силлиқ функциялар, $m \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

Аввал бир ўлчовли ҳолни кўриб чиқамиз ($N = 1$).

$\overline{\Omega}$ соҳасида x бўйича h қадам билан тенг ўлчовли $\overline{\omega}_h$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, \quad h > 0, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad hn = b\},$$

ва вақтинчалик

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad \tau > 0, \quad j = 0,1,\dots,m, \quad \tau m = T\}$$

тўрларни қуриб оламиз.

Баланс усулини қўллаган ҳолда (1)-(3) масалани ошкормас айирмали схема билан алмаштирамиз ва $O(h^2+\tau)$ хатолик билан айирмали масалани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} = \dfrac{a\left(y_i^{j+1}\right)}{h^2}\left[\left|x_{i+1}\right|^m\left(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}\right)-\left|x_i\right|^m\left(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}\right)\right]+ \\ \qquad\qquad + \varepsilon\gamma\left(t_j, x_i\right)b_i\left(y^{j+1}\right), \quad i = 1,2,\dots,n-1; \quad j = 0,1,\dots,m-1, \\ y_i^0 = u_0\left(x_i\right), \quad i = 0,1,\dots,n, \\ y_0^j = \varphi_1\left(t_j\right), \quad j = 1,2,\dots,m, \\ y_n^j = \varphi_2\left(t_j\right), \quad j = 1,2,\dots,m, \end{cases} \tag{25}$$

бу ерда $a\left(y_i^{j+1}\right) = \left(y_i^{j+1}\right)^p$, $b_i\left(y^{j+1}\right) = \left(y_i^{j+1}\right)^\beta$.

(25) алгебраик тенгламалар системаси y^{j+1} га нисбатан чизиқсиз.

Чизиқсиз тенгламалар системасини ечиш учун хар ҳил итерация усулларидан фойдаланамиз ва қуйидагини хосил қиламиз:

$$\frac{\overset{s+1}{y_i^{j+1}}-y_i^j}{\tau} = \frac{a\left(\overset{s}{y_i^{j+1}}\right)}{h^2}\left[\left(\left|x_{i+1}\right|\right)^m\left(\overset{s+1}{y_{i+1}^{j+1}}-\overset{s+1}{y_i^{j+1}}\right)-\left(\left|x_i\right|\right)^m\left(\overset{s+1}{y_i^{j+1}}-\overset{s+1}{y_{i-1}^{j+1}}\right)\right]+$$

$$+\varepsilon\gamma\left(t_j, x_i\right)b_i\left(y^{j+1}\right), \tag{26}$$

Бу ерда $s = 0,1,2,\dots$.

(26) айирмали схема $\overset{s+1}{y}_i$ га нисбатан чизиқли. y нинг қиймати, $\overset{s+1}{y}_i$ учун бошланғич итерация сифатида аввалги вақт бўйича қадамдан олинади: $\overset{0}{y}{}^{j+1} = y^j$. Итерацияли схема бўйича ҳисоблашда итерация аниқлиги берилади ва жараён қуйидаги шарт қаноатлантирилгунча давом этади

$$\max_{0\le i\le n}\left|\overset{s+1}{y}_i - \overset{s}{y}_i\right| < \varepsilon$$

Огохлантириш. Хамма рақамли ҳисоблашларда $\varepsilon = 10^{-3}$ деб олинган.

(26) да қуйидагича белгилашлар киртамиз:

1) Пикар усули учун

$$\overset{s}{A}_i = \frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i-1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^p, \quad \overset{s}{B}_i = \frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i+1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^p,$$

$$\overset{s}{C}_i = \overset{s}{A}_i + \overset{s}{B}_i + 1, \quad \overset{s}{F}_i = \overset{s}{y}_i + \varepsilon\tau\cdot\gamma\left(t_j, x_i\right)\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^\beta, \quad s = 0,1,2\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,n\,.$$

2) масус усул учун

$$\overset{s}{A}_i = \frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i-1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^p, \quad \overset{s}{B}_i = \frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i+1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^p,$$

$$\overset{s}{C}_i = \overset{s}{A}_i + \overset{s}{B}_i + 1 - \varepsilon\tau\cdot\gamma\left(t_j, x_i\right)\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{\beta-1}, \quad \overset{s}{F}_i = \overset{s}{y}{}_i^{j+1}, \quad s = 0,1,2\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,n\,.$$

3) Ньютон усули учун

$$\overset{s}{A}_i = \frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i-1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^p, \quad \overset{s}{B}_i = \frac{\tau\cdot\left(\left|x_{i+1}\right|\right)^m}{h^2}\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^p,$$

$$\overset{s}{C}_i = \overset{s}{A}_i + \overset{s}{B}_i + 1 - \varepsilon\tau\cdot\gamma\left(t_j, x_i\right)\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^{\beta-1}, \quad \overset{s}{F}_i = \overset{s}{y}_i + \varepsilon\tau\cdot\gamma\left(t_j, x_i\right)\left[\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^\beta - \beta\left(\overset{s}{y}{}_i^{j+1}\right)^\beta\right],$$

$$s = 0,1,2\ldots, \quad i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Қуйидагича белгилашлар киритишни келишиб оламиз

$$y^j = y\,, \quad y^{j+1} = \bar{y}\,.$$

(26) айирмали тенгламани

$$\overset{s}{A}_i \overset{s+1}{\bar{y}}_{i-1} - \overset{s}{C}_i \overset{s+1}{\bar{y}}_i + \overset{s}{B}_i \overset{s+1}{\bar{y}}_{i+1} = -\overset{s}{F}_i\,, \quad i = 1,2,\ldots,n-1\,. \tag{27}$$

кўринишда ёзиб олиш мумкин.

(27) тенгламалар системасини сонли ечиш учун прогонка усулини қўлланади. Энди $\Omega = \{(t,x):\ 0 < t < T,\ 0 < x_\alpha < b_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$ соҳада (22) тенгламани икки ўлчовли ҳолда кўриб чиқамиз ($N = 2$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^p \frac{\partial}{\partial x_1}\left(|x|^m \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + u^p \frac{\partial}{\partial x_2}\left(|x|^m \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \varepsilon\cdot\gamma(t,x)u^\beta \tag{28}$$

бошланғич шартлар

$$u(0,x) = u_0\left(x\right) \geq 0, \quad 0 \leq x_\alpha \leq b_\alpha\,, \quad \alpha = 1,2\,. \tag{29}$$

$\overline{\Omega}$ соҳасида $x_\alpha\ (\alpha = 1,2)$ бўйича $h_1 = \dfrac{b_1}{n_1}$ ва $h_2 = \dfrac{b_2}{n_2}$ қадамлар билан тенг ўлчовли $\overline{\omega}_h$:

$$\overline{\omega}_h = \left\{x_{ij} = \left(x_1^i, x_2^j\right), \quad x_1^i = ih_1, \quad x_2^j = jh_2, \quad i, j = 0,1,\ldots, n_\alpha,\ \alpha = 1,2\right\},$$

ва вақтинчали

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{t_k = k\tau, \quad \tau > 0, \quad k = 0,1,\ldots, m, \quad \tau m = T\right\}, \quad T > 0.$$

тўрлар қурамиз.

(28)-(29) масаласини сонли ечиш учун Писмен-Речфорд схемаси деб аталувчи ўзгарувчан йўналишлар усули қўлланади

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i,j}^{k+1/2} - y_{i,j}^{k}}{0.5\cdot\tau} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + \Lambda_2 y^k + \varepsilon\gamma\left(t_{k+1/2}, x_{i,j}\right)\left(y_{i,j}^{k+1/2}\right)^\beta \\ \dfrac{y_{i,j}^{k+1} - y_{i,j}^{k+1/2}}{0.5\cdot\tau} = \Lambda_1 y^{k+1/2} + \Lambda_2 y^{k+1} + \varepsilon\gamma\left(t_{k+1}, x_{i,j}\right)\left(y_{i,j}^{k+1}\right)^\beta \end{cases}, \tag{31}$$

$$\Lambda_1 y^{k+1/2} = \frac{\left(y_{i+1,j}^{k+1/2}\right)^p}{h_1^2}\left[\left|x_{i+1,j}\right|^m\left(y_{i+1,j}^{k+1/2} - y_{i,j}^{k+1/2}\right) - \left|x_{i,j}\right|^m\left(y_{i,j}^{k+1/2} - y_{i-1,j}^{k+1/2}\right)\right],$$

$$\Lambda_2 y^{k} = \frac{\left(y_{i+1,j}^{k}\right)^p}{h_2^2}\left[\left|x_{i,j+1}\right|^m\left(y_{i,j+1}^{k} - y_{i,j}^{k}\right) - \left|x_{i,j}\right|^m\left(y_{i,j}^{k} - y_{i,j-1}^{k}\right)\right],$$

$i, j = 1,2,\ldots, n_\alpha - 1, \quad \alpha = 1,2$.

Чегаравий масалани қуйидаги кўринишда қайта ёзиб оламиз

$$\begin{cases} y_{i,j}^{0} = u_0(x), \qquad x \in \overline{\omega}_h \\ y_{i,j}^{k+1} = \varphi^{k+1}, \ \text{при} \ j = 0 \ \text{и} \ j = n_2 \\ y_{i,j}^{k+1/2} = \overline{\varphi}^{k+1/2}, \ \text{при} \ i = 0 \ \text{и} \ i = n_1 \end{cases}, \tag{32}$$

бу ерда $\overline{\varphi} = \dfrac{1}{2}\left(\varphi^{k+1} + \varphi^k\right) - \dfrac{\tau}{4}\Lambda_2\left(\varphi^{k+1} - \varphi^k\right).$

Қуйидагича белгилашлар киритамиз

$$\begin{aligned} F_{i,j}^k &= \frac{2}{\tau} y_{i,j}^k + \Lambda_2 y^k + \varepsilon\gamma\left(t_{k+1/2}, x_{i,j}\right)\left(y_{i,j}^k\right)^\beta, \\ \overline{F}_{i,j}^k &= \frac{2}{\tau} y_{i,j}^{k+1/2} + \Lambda_1 y^{k+1/2} + \varepsilon\gamma\left(t_{k+1}, x_{i,j}\right)\left(y_{i,j}^{k+1/2}\right)^\beta. \end{aligned} \tag{33}$$

шунингдек

$$y^k = y, \ y^{k+1/2} = \overline{y}, \ y^{k+1} = \hat{y}$$

белгилашга келишиб оламиз.

Хосил бўлган (31) чизиқсиз тенгламалар системасини ечиш учун итерацияли усул қўллаймиз ва қуйидаги схемани ҳосил қиламиз

$$\frac{\overset{s+1}{\bar{y}}_{i,j}}{0.5\cdot\tau}=\frac{\left(\overset{s}{\bar{y}}_{i,j}\right)^{p}}{h_1^2}\left[\left|x_{i+1,j}\right|^{m}\left(\overset{s+1}{\bar{y}}_{i+1,j}-\overset{s+1}{\bar{y}}_{i,j}\right)-\left|x_{i,j}\right|^{m}\left(\overset{s+1}{\bar{y}}_{i,j}-\overset{s+1}{\bar{y}}_{i-1,j}\right)\right]+\overset{s}{F}_{i,j}=0 \quad , \qquad (34)$$

$$\frac{\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j}}{0.5\,\tau}=\frac{\left(\overset{s}{\hat{y}}_{i,j}\right)^{p}}{h_2^2}\left[\left|x_{i,j+1}\right|^{m}\left(\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j+1}-\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j}\right)-\left|x_{i,j}\right|^{m}\left(\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j}-\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j-1}\right)\right]+\overset{s}{\bar{F}}_{i,j}=0 \ , \qquad (35)$$

$i,j=1,2,...,n_\alpha-1,\ \ \alpha=1,2$.

(34)да қуйидагича белгилашлар киритиб

$$\overset{s}{A}_{i,j}=\frac{0.5\tau\cdot\left|x_{i+1,j}\right|^{m}}{h_1^2}\left(\overset{s}{\bar{y}}_{i,j}\right)^{p},\qquad \overset{s}{B}_{i,j}=\frac{0.5\tau\cdot\left|x_{i,j}\right|^{m}}{h_1^2}\left(\overset{s}{\bar{y}}_{i,j}\right)^{p},$$

$$\overset{s}{C}_{i,j}=\overset{s}{A}_{i,j}+\overset{s}{B}_{i,j}+1,\quad s=0,1,2\ldots,\qquad i,j=1,2,...,n_\alpha-1,\ \ \alpha=1,2 .$$

Айирмали тенгламани

$$\begin{cases}\overset{s}{A}_{i,j}\,\overset{s+1}{\bar{y}}_{i+1,j}-\overset{s}{C}_{i,j}\,\overset{s+1}{\bar{y}}_{i,j}+\overset{s}{B}_{i,j}\,\overset{s+1}{\bar{y}}_{i-1,j}=-\overset{s}{F}_{i,j}\\ \bar{y}=\varphi,\quad \text{при}\quad i=0,n_1\end{cases} \qquad (36)$$

$i,j=1,2,...,n_\alpha-1,\ \ \alpha=1,2$.

кўринишда ёзиб олиш мумкин.

Мос равишда (35) ни

$$\begin{cases}\overset{s}{\bar{A}}_{i,j}\,\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j+1}-\overset{s}{\bar{C}}_{i,j}\,\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j}+\overset{s}{\bar{B}}_{i,j}\,\overset{s+1}{\hat{y}}_{i,j-1}=-\overset{s}{\bar{F}}_{i,j}\\ \\ \hat{y}=\bar{\varphi},\quad \text{при}\quad j=0,n_2\end{cases} \qquad (37)$$

бу ерда $\overset{s}{\bar{A}}_{i,j}=\dfrac{0.5\tau\cdot\left|x_{i,j+1}\right|^{m}}{h_2^2}\left(\overset{s}{\hat{y}}_{i,j}\right)^{p}$, $\overset{s}{\bar{B}}_{i,j}=\dfrac{0.5\tau\cdot\left|x_{i,j}\right|^{m}}{h_2^2}\left(\overset{s}{\hat{y}}_{i,j}\right)^{p}$, $\overset{s}{\bar{C}}_{i,j}=\overset{s}{\bar{A}}_{i,j}+\overset{s}{\bar{B}}_{i,j}+1$,

$s=0,1,2\ldots,\quad i,j=1,2,...,n_\alpha-1,\ \ \alpha=1,2$

кўринишда ёзиб оламиз.

(36) ва (37) системаларни сонли ечиш учун прогонка усули қўлланилади. (36) тенгламалар системаси $j=1,2,...,n_2-1$ сатрлар бўйлаб ечилади ва $\overline{y}\ \omega_h$ тўрининг хар бир нуқтасида аниқланади. Сўнгра (37) тенгламалар системаси $i=1,2,...,n_1-1$ устунлар бўйлаб $\hat{y}$ ни ω_h тўрининг хар бир нуқтасида аниқлаган холда ечилади.

$k+1$ қатламдан $k+2$ қатламга ўтишда ҳисоблаш процедураси такрорланади.

Ҳисоблаш экспериментлари (сонли ҳисоблашлар)

Ушбу бўлимда юқорида кўриб чиқилган масалаларнинг ҳисоблаш натижалари келтирилган. Ўрганилаётган фильтрлаш жараёнининг математик модели қурилиб, олинган ечимларни бахолаш асосида, замонавий дастурлаш воситаларидан фойдаланган холда алгоритм ва дастурлар ишлаб чиқилди. Масалани ечишнинг сонли схемалари келтирилди. Дастурлар MathCAD универсаль математик муҳит тилида ишлаб чиқилди.

Бир жинсли бўлмаган ютилиш ёки манбааси бўлган фильтрлаш жараёнининг бир ва икки ўлчовли холлари учун сонли модели келтирилган. Тенгламада иштирок этадиган параметрларнинг хар ҳил қийматлари учун ҳисоблаш эксперименти натижалари келтрилган. Жараённинг вақт бўйича ўзгариши тасвири шахсий компьютерда MathCADдан фойдаланган холда моделлаштирилди.

(1) тенгламани бир ва икки ўлчовли холлари учун сонли ечиш чоғида кўплаб экспериментлар ўтказилди.

1) Қуйида (1)-(3) ҳисоблашларнинг натижаларини $\varepsilon=-1$ (буғланиш ҳоли) ҳол учун келтирамиз:

Бошланғич яқинлашиш қуйидаги кўринишда олинган:

$$u_0(x)=\bar{u}(0)f_A(\xi),\quad \text{бу ерда}\quad f_A(\xi)=\left(a-\frac{\sigma}{4}\xi^2\right)^{1/\sigma},\ \bar{u}(0)=\left[\frac{\beta-1}{\alpha+1}T^{\alpha+1}\right]^{-\frac{1}{\beta-1}},$$

$$\xi=\frac{\varphi(x)}{[\tau(0)]^{1/2}},\qquad \varphi(x)=\frac{2}{2-m}|x|^{\frac{2-m}{2}},$$

$$\tau(0)=\left(\frac{\beta-1}{\alpha+1}\right)^{-\frac{\sigma}{\beta-1}}\frac{\beta-1}{\beta-1-(\alpha+1)\sigma}T^{\frac{\beta-1-(\alpha+1)\sigma}{\beta-1}}\qquad \beta\neq 1+(\alpha+1)\sigma\ \text{ҳоли учун.}$$

Параметрларнинг хар ҳил қийматлари учун баъзи бир сонли натижаларни таққослашларни келтирамиз. N=2 учун 1 жадвалда параметрларнинг σ=1, β=6, α=1, m=0, T=2 қийматларидаги натижалари келтирилган. N=2 учун 2 жадвалда параметрларнинг σ=1, β=6, α=1, m=1, T=2 қийматларидаги натижалари келтирилган. Тўр етарлича майда: $h=L/10$, L- $t=T$ даги фронт қиймати. t бўйича ҳисоблашлар $\tau=0.2$ қадам билан ўтказилган. Бир нечта фронтга яқин нуқталардан ташқари хамма ерда ҳисобланган ечимнинг аниқ ечимдан фарқи 10^{-2} дан ошмайди. Ҳисоблашлар $\max\limits_{1\le i\le n-1}\left|\overset{s+1}{y}_i-\overset{s}{y}_i\right|<\delta,\ \delta=0.001$ шарт бажарилгунча амалга оширилган. Итерациялар сони ν .

Мос равишда 1 хамда 2 расмларда m=0 ва m=1 қийматлар учун сонли натижаларни таққослаш мумкин.

1. жадвал. Параметрларнинг σ=1, β=6, α=1, m=0, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари.

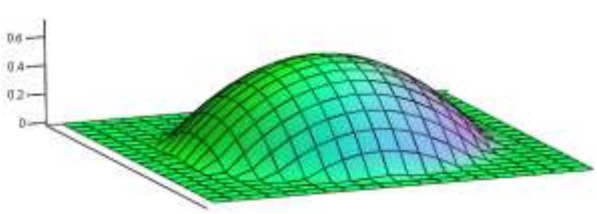
t	Сон-ли нат. (0;0)	Аниқ қий-мат (0;0)	Хато-лик	Сон-ли нат. (1;5)	Аниқ қий-мат (1;5)	Хато-лик	Сон-ли нат. (5;5)	Аниқ қий-мат (5;5)	Хато-лик	Итарация сони	фронт
0	0,63	0,63	0	0,35	0,35	0	0,08	0,082	0	1	2,512
0,13	0,63	0,62	2E-04	0,33	0,35	0,02	0,1	0,102	0	7	2,561
0,25	0,62	0,62	0	0,35	0,36	0,01	0,11	0,12	0,01	3	2,609
0,38	0,61	0,61	1E-04	0,33	0,37	0,03	0,12	0,136	0,01	7	2,656
0,5	0,61	0,61	0	0,35	0,37	0,02	0,13	0,151	0,02	3	2,702

0,63	0,6	0,6	1E-04	0,34	0,37	0,04	0,14	0,164	0,02	7	2,746
0,75	0,6	0,6	0	0,36	0,38	0,02	0,15	0,176	0,03	3	2,79
0,88	0,59	0,59	1E-04	0,35	0,38	0,04	0,15	0,187	0,03	7	2,832
1	0,59	0,59	0	0,36	0,39	0,02	0,16	0,198	0,04	3	2,874
1,13	0,59	0,59	8E-05	0,35	0,39	0,04	0,16	0,207	0,04	7	2,914
1,26	0,58	0,58	0	0,37	0,39	0,02	0,17	0,216	0,05	3	2,954
1,38	0,58	0,58	7E-05	0,36	0,39	0,04	0,17	0,224	0,05	7	2,993
1,51	0,57	0,57	0	0,37	0,4	0,03	0,17	0,231	0,06	3	3,031
1,63	0,57	0,57	6E-05	0,36	0,4	0,04	0,18	0,238	0,06	7	3,069
1,76	0,57	0,57	0	0,37	0,4	0,03	0,18	0,244	0,06	3	3,106
1,88	0,56	0,56	6E-05	0,36	0,4	0,04	0,18	0,25	0,07	7	3,142
2,01	0,56	0,56	0	0,37	0,4	0,03	0,19	0,256	0,07	3	3,178
2,14	0,56	0,56	5E-05	0,37	0,4	0,04	0,19	0,261	0,07	7	3,213
2,26	0,55	0,55	1E-16	0,38	0,4	0,03	0,19	0,266	0,07	3	3,247
2,39	0,55	0,55	4E-05	0,37	0,41	0,04	0,19	0,27	0,08	7	3,281
2,51	0,55	0,55	0	0,38	0,41	0,03	0,2	0,275	0,08	3	3,314

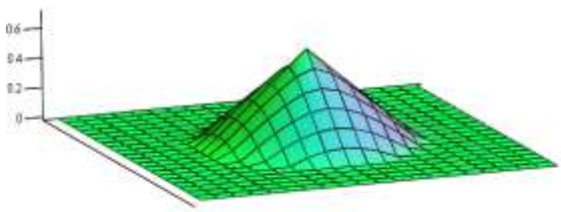
2. жадвал. Параметрларнинг σ=1, β=6, α=1, m=1, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари.

t	Сон-ли нат. (0;0)	Аниқ қий-мат (0;0)	Хато-лик	Сон-ли нат. (1;5)	Аниқ қий-мат (1;5)	Хато-лик	Сон-ли нат. (5;5)	Аниқ қий-мат (5;5)	Хато-лик	Итарация сони	фронт
0	0,63	0,63	0	0,07	0,07	0	0	0	0	1	1,5774
0,08	0,63	0,62	2E-04	0,08	0,09	0,008	7E-08	0	0	6	1,6402
0,16	0,62	0,62	0	0,11	0,11	0,004	3E-06	0	0	3	1,7024
0,24	0,61	0,61	1E-04	0,1	0,13	0,023	5E-05	0	0	6	1,764
0,32	0,61	0,61	0	0,13	0,14	0,008	3E-04	0	0	3	1,8251
0,39	0,6	0,6	1E-04	0,13	0,16	0,025	0,001	0	0	7	1,8857
0,47	0,6	0,6	0	0,16	0,17	0,01	0,004	0	0	3	1,9458
0,55	0,59	0,59	1E-04	0,15	0,18	0,027	0,008	0,02	0,01	7	2,0054

0,63	0,59	0,59	0	0,18	0,19	0,012	0,015	0,04	0,02	3	2,0646
0,71	0,59	0,59	8E-05	0,17	0,2	0,028	0,024	0,05	0,03	7	2,1234
0,79	0,58	0,58	0	0,19	0,21	0,014	0,035	0,06	0,03	3	2,1818
0,87	0,58	0,58	7E-05	0,19	0,22	0,028	0,045	0,08	0,03	7	2,2398
0,95	0,57	0,57	0	0,21	0,22	0,015	0,055	0,09	0,03	3	2,2974
1,03	0,57	0,57	6E-05	0,2	0,23	0,028	0,064	0,1	0,04	7	2,3547
1,1	0,57	0,57	0	0,22	0,24	0,016	0,072	0,11	0,04	3	2,4116
1,18	0,56	0,56	6E-05	0,22	0,24	0,028	0,079	0,12	0,04	7	2,4681
1,26	0,56	0,56	0	0,23	0,25	0,016	0,087	0,13	0,04	3	2,5244
1,34	0,56	0,56	5E-05	0,23	0,26	0,028	0,094	0,14	0,04	7	2,5803
1,42	0,55	0,55	1E-16	0,24	0,26	0,017	0,101	0,15	0,04	3	2,636
1,5	0,55	0,55	4E-05	0,24	0,26	0,028	0,107	0,15	0,05	7	2,6913
1,58	0,55	0,55	0	0,25	0,27	0,017	0,114	0,16	0,05	3	2,7464



1. расм Параметрларнинг σ=1, β=6, α=1, m=0, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари



2. расм. Параметрларнинг σ=1, β=6, α=1, m=1, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари

2) (1)-(3) ҳисоблаш натижалари $\varepsilon = -1$ (буғланиш ҳоли) ҳоли учун:

Бошланғич яқинлашиш қуйидаги кўринишда олинган:

$$u_0(x) = \bar{u}(0) f_A(\xi), \quad \text{бу ерда} \quad f_A(\xi) = a \cdot \tau(t) - \varphi(x), \qquad \bar{u}(0) = \left[\frac{\beta - 1}{\alpha + 1} T^{\alpha+1}\right]^{-\frac{1}{\beta-1}},$$

$$\varphi(x) = \frac{2}{2-m}|x|^{\frac{2-m}{2}}, \quad \tau(0) = \sigma^{-\frac{1}{\alpha+1}} \ln(T), \quad \beta = 1 + (\alpha+1)\sigma \ \text{ҳоли учун.}$$

Параметрларнинг хар ҳил қийматлари учун баъзи бир сонли натижаларни таққослашларни келтирамиз. 3 жадвалда N=2 учун параметрларнинг σ=0.7, $\beta = 1 + (\alpha+1)\sigma$, α=1, m=0, T=2 қийматларидаги ечимлари келтирилган. 4 жадвалда N=2 учун параметрларнинг σ=0.7, $\beta = 1 + (\alpha+1)\sigma$, α=1, m=1, T=2 қийматларидаги ечимлари келтирилган. Тўр етарлича майда: $h = L/10$, L -

$t = T$ даги фронт қиймати. t бўйича ҳисоблашлар $\tau = 0.2$ қадам билан ўтказилган. Бир нечта фронтга яқин нуқталардан ташқари хамма ерда ҳисобланган ечимнинг аниқ ечимдан фарқи 10^{-2} дан ошмайди. Ҳисоблашлар $\max\limits_{1 \le i \le n-1} \left| \overset{s+1}{y}_i - \overset{s}{y}_i \right| < \delta,$ $\delta = 0.001$ шарт бажарилгунча амалга оширилган. Итерациялар сони ν .

Мос равишда 3 хамда 4 расмларда m=0 ва m=1 қийматлар учун сонли натижаларни таққослаш мумкин.

3. жадвал. Параметрларнинг σ=0.7, β=1+(α+1)σ, α=1, m=0, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари.

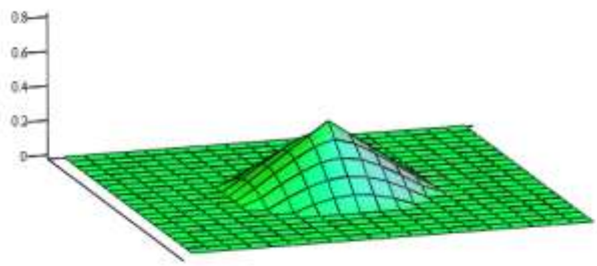
t	Сон-ли нат. (0;0)	Аниқ қий-мат (0;0)	Хато-лик	Сон-ли нат. (1;5)	Аниқ қий-мат (1;5)	Хато-лик	Сон-ли нат. (5;5)	Аниқ қий-мат (5;5)	Хат о-лик	Итарация сони	фронт
0	0,4	0,4	0	0	0	0	0	0	0	1	2,176
0,11	0,4	0,4	8E-04	0,02	0,02	0	0	0	0	7	2,251
0,22	0,39	0,39	0	0,04	0,04	0	0	0	0	4	2,321
0,33	0,39	0,39	4E-04	0,05	0,06	0,01	0	0	0	8	2,385
0,44	0,39	0,39	0	0,07	0,07	0,01	0	0	0	4	2,445
0,54	0,38	0,38	2E-04	0,07	0,09	0,02	0,01	0	0,01	8	2,502
0,65	0,38	0,38	0	0,08	0,1	0,01	0,02	0	0,02	4	2,555
0,76	0,37	0,37	1E-04	0,09	0,11	0,02	0,02	0	0,02	8	2,605
0,87	0,36	0,36	0	0,09	0,11	0,02	0,03	0,02	0,01	4	2,652
0,98	0,36	0,36	3E-05	0,1	0,12	0,02	0,04	0,03	0,01	8	2,697
1,09	0,35	0,35	0	0,09	0,13	0,03	0,04	0,04	0	4	2,739
1,2	0,35	0,35	1E-05	0,11	0,13	0,02	0,05	0,05	0	9	2,78
1,31	0,34	0,34	0	0,09	0,13	0,05	0,04	0,05	0,01	4	2,819
1,41	0,33	0,33	4E-05	0,11	0,14	0,03	0,06	0,06	0	9	2,856
1,52	0,33	0,33	6E-17	0,07	0,14	0,07	0,04	0,07	0,02	4	2,891
1,63	0,32	0,32	5E-05	0,11	0,14	0,03	0,08	0,07	0,01	14	2,925

1,74	0,32	0,32	6E-17	0,07	0,14	0,07	0,04	0,07	0,04	6	2,958
1,85	0,31	0,31	6E-05	0,11	0,14	0,03	0,08	0,08	0	9	2,989
1,96	0,31	0,31	6E-17	0,11	0,14	0,03	0,03	0,08	0,05	4	3,02
2,07	0,3	0,3	6E-05	0,12	0,14	0,02	0,06	0,08	0,02	9	3,049
2,18	0,3	0,3	0	0,11	0,14	0,03	0,04	0,09	0,04	4	3,077

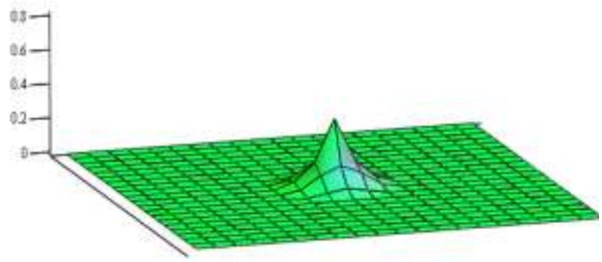
4. жадвал. Параметрларнинг σ=0.7, β=1+(α+1)σ, α=1, m=1, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари.

T	Сон-ли нат. (0;0)	Аниқ қий-мат (0;0)	Хато-лик	Сон-ли нат. (1;5)	Аниқ қий-мат (1;5)	Хато-лик	Сон-ли нат. (5;5)	Аниқ қий-мат (5;5)	Хато-лик	Итарация сони	фронт
0	0,4	0,4	0	0	0	0	0	0	0	1	1,18
0,06	0,4	0,4	8E-04	0	0	0	0	0	0	6	1,27
0,12	0,39	0,39	0	0	0	0	0	0	0	3	1,35
0,18	0,39	0,39	4E-04	0	0	0	0	0	0	6	1,42
0,24	0,39	0,39	0	0,01	0	0,01	0	0	0	3	1,49
0,3	0,38	0,38	2E-04	0	0	0	0	0	0	7	1,56
0,36	0,38	0,38	0	0,02	0	0,02	0	0	0	3	1,63
0,41	0,37	0,37	1E-04	0,01	0	0,01	0	0	0	8	1,7
0,47	0,36	0,36	0	0,03	0,01	0,01	0	0	0	3	1,76
0,53	0,36	0,36	3E-05	0,02	0,03	0	0	0	0	8	1,82
0,59	0,35	0,35	0	0,04	0,03	0	0,01	0	0,01	3	1,88
0,65	0,35	0,35	1E-05	0,04	0,04	0,01	0,01	0	0,01	9	1,93
0,71	0,34	0,34	0	0,04	0,05	0,01	0,02	0	0,02	4	1,99
0,77	0,33	0,33	4E-05	0,05	0,06	0,01	0,02	0,01	0,02	9	2,04
0,83	0,33	0,33	6E-17	0,04	0,06	0,02	0,02	0,02	0,01	4	2,09
0,89	0,32	0,32	5E-05	0,05	0,07	0,01	0,04	0,02	0,02	19	2,14
0,95	0,32	0,32	6E-17	0,04	0,07	0,03	0	0,03	0,02	13	2,19
1,01	0,31	0,31	6E-05	0,06	0,08	0,01	0,06	0,03	0,03	15	2,23
1,07	0,31	0,31	6E-17	0,05	0,08	0,03	0	0,04	0,04	12	2,28
1,12	0,3	0,3	6E-05	0	0,08	0,08	0	0,04	0,04	13	2,32

1,18	0,3	0,3	0	0,05	0,08	0,03	0	0,05	0,05	4	2,37



3. расм Параметрларнинг σ=.7 $\beta=(\alpha+1)\sigma$, α=1, m=0, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари



4. расм Параметрларнинг σ=.7 $\beta=(\alpha+1)\sigma$, α=1, m=1, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари

3) (28)-(29) ҳисоблаш натижалари $\varepsilon=-1$ (буғланиш холи) холи учун:

Бошланғич яқинлашиш қуйидаги кўринишда олинган:

$$u_0(x)=\bar{u}(0)f_A(\xi),\quad \text{бу ерда}\quad f_A(\xi)=\left(a-\frac{p}{4}\xi^2\right)^{1/p},\ \bar{u}(0)=T^{-\frac{1}{\beta-1}},\quad \xi=\frac{\varphi(x)}{[\tau(0)]^{1/2}}$$

$$,\quad \varphi(x)=\frac{2}{2-m}|x|^{\frac{2-m}{2}},\quad \tau(0)=\frac{1}{\beta-(1+p)}T^{\frac{\beta-(1+p)}{\beta-1}},\ \beta\neq 1+p \text{ холи учун.}$$

Параметрларнинг хар ҳил қийматлари учун баъзи бир сонли натижаларни таққослашларни келтирамиз. 5 жадвалда N=2 учун параметрларнинг σ p=0.1, β=4, α=1, m=0, T=2 қийматларидаги ечимлари келтирилган. 6 жадвалда N=2 учун параметрларнинг p=0.1, β=4, α=1, m=1, T=2 қийматларидаги ечимлари келтирилган. Тўр етарлича майда: $h=L/10$, $L\text{-}t=T$ даги фронт қиймати. t бўйича ҳисоблашлар $\tau=0.2$ қадам билан ўтказилган. Бир нечта фронтга яқин нуқталардан ташқари хамма ерда ҳисобланган ечимнинг аниқ ечимдан фарқи 10^{-2} дан ошмайди. Ҳисоблашлар $\max\limits_{1\le i\le n-1}\left|\overset{s+1}{y}_i-\overset{s}{y}_i\right|<\delta,\ \delta=0.001$

шарт бажарилгунча амалга оширилган. Итерациялар сони ν.

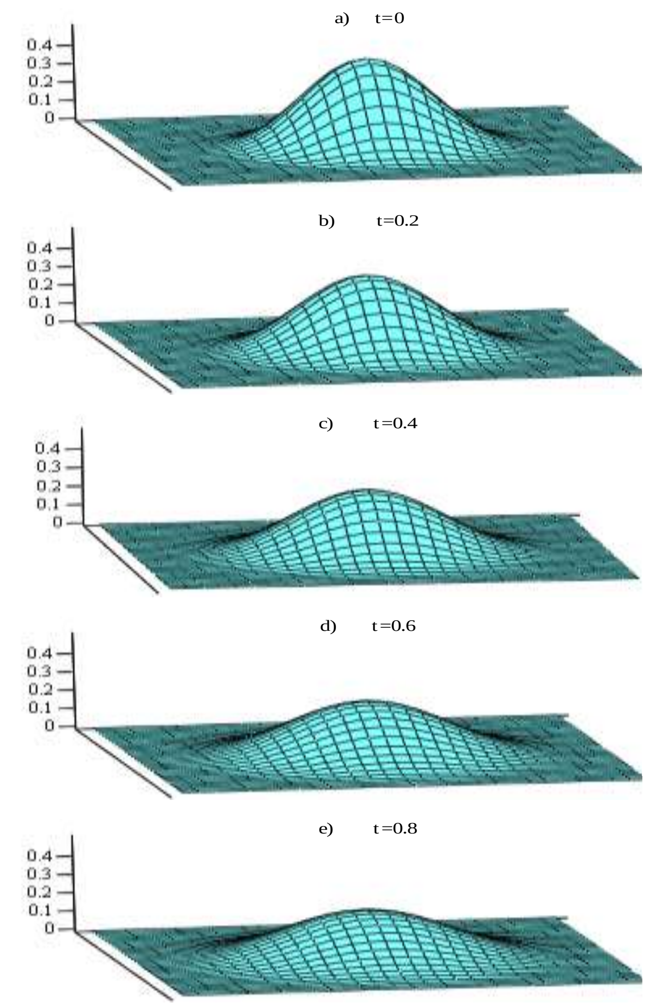
Мос равишда 5 хамда 6 расмларда m=0 ва m=1 қийматлар учун сонли натижаларни таққослаш мумкин.

5. жадвал. Параметрларнинг p=0.1, β=4, α=1, m=0, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари.

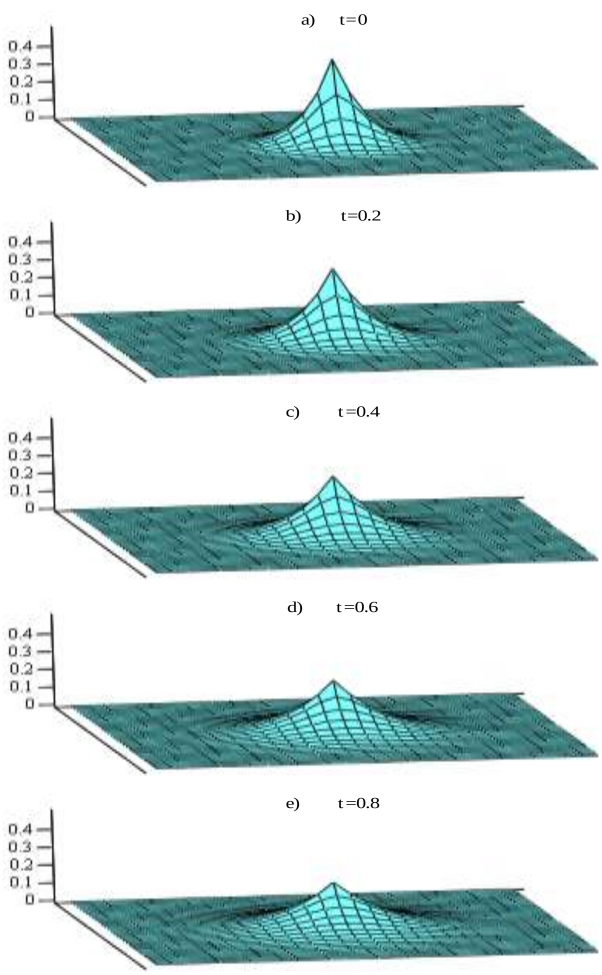
t	Сон-ли нат. (0;0)	Аниқ қий-мат (0;0)	Хато-лик	Сон-ли нат. (1;5)	Аниқ қий-мат (1;5)	Хато-лик	Сон-ли нат. (5;5)	Аниқ қий-мат (5;5)	Хато-лик	Итарация сони	фронт
0	0,79	0,79	0	0,02	0,02	0	0	0	0	1	5,192
0,26	0,76	0,76	0,003	0,02	0,03	0	0	0	0	6	5,555
0,52	0,73	0,73	0	0,03	0,04	0,01	0	0	0	3	5,894
0,78	0,7	0,7	0,002	0,04	0,06	0,02	0	0	0	6	6,213
1,04	0,68	0,68	0	0,05	0,07	0,01	0	0	0	3	6,516
1,3	0,66	0,66	0,001	0,06	0,08	0,03	0	0	0	6	6,805
1,56	0,64	0,64	1E-16	0,07	0,1	0,02	0	0	0,01	3	7,08
1,82	0,63	0,62	7E-04	0,08	0,11	0,03	0,01	0	0,01	6	7,345
2,08	0,61	0,61	0	0,09	0,12	0,03	0,01	0	0,01	3	7,6
2,34	0,6	0,6	5E-04	0,09	0,13	0,04	0,01	0	0,02	6	7,847
2,6	0,58	0,58	0	0,11	0,14	0,03	0,01	0	0,02	3	8,085
2,86	0,57	0,57	4E-04	0,11	0,15	0,04	0,01	0	0,02	6	8,316
3,12	0,56	0,56	0	0,12	0,16	0,03	0,01	0	0,03	3	8,54
3,37	0,55	0,55	3E-04	0,12	0,17	0,04	0,02	0	0,03	6	8,758
3,63	0,54	0,54	0	0,14	0,17	0,04	0,02	0,1	0,04	3	8,971
3,89	0,54	0,54	3E-04	0,14	0,18	0,04	0,02	0,1	0,04	6	9,178
4,15	0,53	0,53	0	0,15	0,19	0,04	0,02	0,1	0,05	3	9,38
4,41	0,52	0,52	2E-04	0,15	0,19	0,05	0,02	0,1	0,05	6	9,578
4,67	0,51	0,51	0	0,16	0,2	0,04	0,02	0,1	0,05	3	9,771
4,93	0,51	0,51	2E-04	0,16	0,2	0,05	0,02	0,1	0,06	6	9,961
5,19	0,5	0,5	0	0,16	0,21	0,04	0,02	0,1	0,06	3	10,15

6. жадвал. Параметрларнинг p=0.1, β=4, α=1, m=1, T=2 қийматлари учун ҳисоблаш натижалари.

t	Сон-ли нат. (0;0)	Аниқ қий-мат (0;0)	Хато-лик	Сон-ли нат. (1;5)	Аниқ қий-мат (1;5)	Хато-лик	Сон-ли нат. (5;5)	Аниқ қий-мат (5;5)	Хато-лик	Итарация сони	фронт
0	0,79	0,79	0	0,02	0	0,02	0	0	0	1	6,74
0,34	0,76	0,76	0,003	0,02	0	0,02	0	0	0	7	7,71
0,67	0,73	0,73	0	0,03	0	0,03	0	0	0	3	8,68
1,01	0,7	0,7	0,002	0,01	0	0,01	0	0	0	7	9,65
1,35	0,68	0,68	0	0,03	0	0,03	0,01	0	0,01	3	10,6
1,68	0,66	0,66	0,001	0,02	0	0,02	0,01	0	0,01	7	11,6
2,02	0,64	0,64	1E-16	0,03	0	0,03	0,01	0	0,01	3	12,5
2,36	0,63	0,62	7E-04	0,02	0	0,01	0,01	0	0,01	7	13,5
2,7	0,61	0,61	0	0,03	0	0,02	0,01	0	0,01	3	14,4
3,03	0,6	0,6	5E-04	0,02	0	0,01	0,01	0	0,01	7	15,4
3,37	0,58	0,58	0	0,03	0,01	0,02	0,01	0	0,01	3	16,3
3,71	0,57	0,57	4E-04	0,02	0,01	0,01	0,01	0	0,01	7	17,3
4,04	0,56	0,56	0	0,03	0,01	0,02	0,01	0	0,01	3	18,2
4,38	0,55	0,55	3E-04	0,02	0,01	0,01	0,01	0	0,01	7	19,2
4,72	0,54	0,54	0	0,03	0,02	0,01	0,01	0	0,01	3	20,1
5,05	0,54	0,54	3E-04	0,02	0,02	0	0,01	0	0,01	7	21,1
5,39	0,53	0,53	0	0,03	0,02	0,01	0,01	0	0	3	22
5,73	0,52	0,52	2E-04	0,03	0,03	0	0,01	0,01	0	7	22,9
6,07	0,51	0,51	0	0,04	0,03	0,01	0,01	0,01	0	3	23,9
6,4	0,51	0,51	2E-04	0,03	0,03	0	0,01	0,01	0	7	24,8
6,74	0,5	0,5	0	0,04	0,04	0	0,01	0,01	0	3	25,7

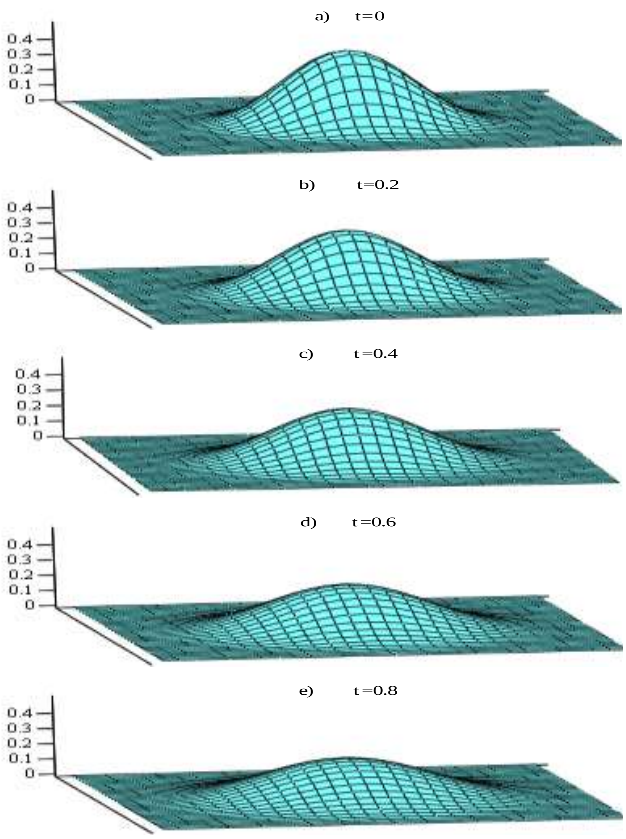


5. расм Параметрларнинг p=0.1, β=4, α=1, m=0, T=2: a) t=0; b) t=0,2; c) t=0,4; d) t=0,6; e) t=0,8. қийматлари учун ҳисоблаш натижалари



6. расм Параметрларнинг p=0.1, β=4, α=1, m=1, T=2. a) t=0; b) t=0,2; c) t=0,4; d) t=0,6; e) t=0,8. қийматлари учун ҳисоблаш натижалари

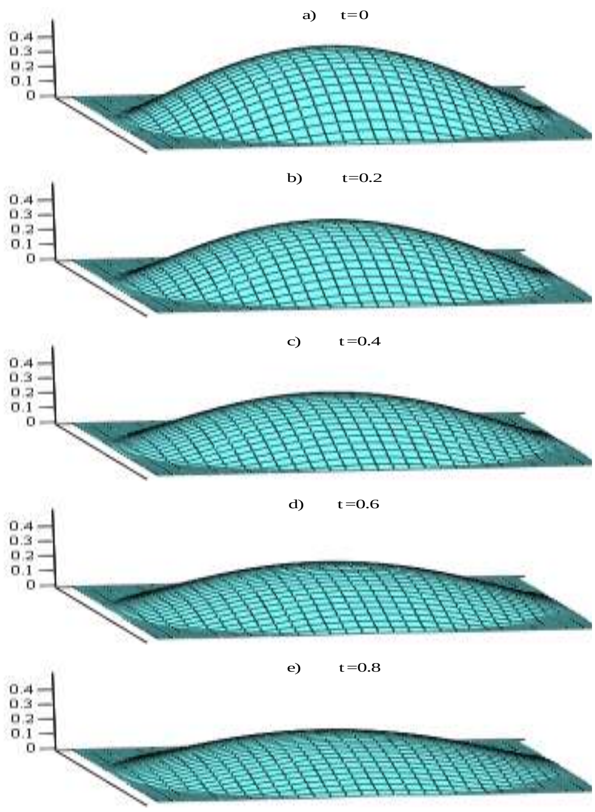
7 хамда 8 расмларда p=0.1 ва p=0.9 қийматлар учун сонли натижаларни таққослаш мумкин.



7. расм Параметрларнинг p=0.1, β=4, α=1, m=0, T=2: a) t=0; b) t=0,2;

c) e=0,4. в) e=0,6. у) e=0,8.

қийматлари учун ҳисоблаш натижалари



8. расм Параметрларнинг p=0.9, β=4, α=1, m=0, T=2. a) t=0; b) t=0,2;

c) e=0,4. в) e=0,6. у) e=0,8.

қийматлари учун ҳисоблаш натижалари

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

Амалий машғулотлар замонавий дидактик таъминот ва лаборатория жиҳозларига эга бўлган аудиторияларда ҳамда Интернет тармоғига уланган компьютер синфларида, таянч олий таълим муассасаларининг кафедраларида ташкил этилади.

Амалий машғулотларда физик жараёнларни тасвирловчи амалий масалаларнинг қўйилиши, уларни ечиш усуллари, масалани ечишнинг алгоритми ва дастурини яратиш, дастурнинг тўғрилигини тест масалаларда текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш ва олинган натижаларни таҳлил қилиш масалалари ўрганилади.

Амалий машғулотларда қуйидаги мавзулар ва вазиятли масалалар ўрганилади:

Отиш усули.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун Коши ва чегаравий масалалар. Ҳайдаш (прогонка) усули.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар. Чизиқли чегаравий масалалар учун ошкор ва ошкормас схемаларни қўллаш.

Квазичизиқли иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун баланс усулини қўллаш ва уларни сонли ечиш. Чизиқлаштириш.

Уч қатламли схемалар яратиш ёрдамида чизиқсиз чегаравий масалаларни сонли ечиш.

Икки ўлчамли масалаларни ўзгарувчан йўналишлар усулида ечиш.

Икки ўлчами масалаларни локал бир ўлчовли схемалар ёрдамида ечиш.

Тор тебраниши малалаларини сонли моделлаштириш.

НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Гиперболик, параболик ва эллиптик турдаги тенгламалар билан тасвирланувчи содда масалалар.
2. Бошланғич ва чегаравий масалалар қўйиш.
3. Оддий дифференциалларни аппроксимация қилиш, аппроксимация тартиби.
4. Тўрда аппроксимация хатолиги.
5. Ошкор ва ошкормас схемалар.
6. Параметрли схемалар.
7. Чекли айирмали схемаларнинг турғунлиги. Чекли айирмали схемаларнинг яқинлашиши ва аниқлиги.
8. Интегро—интерполяцион усули.
9. Уч қатламли схемалар яратиш.
10. Турғунмас, турғун, абсолют ва сўзсиз турғун схемалар.
11. Гаусс усули.
12. Прогонка усули. Прогонка усулининг турғунлиги.
13. Ўнг ва учрашувчи (встречная) прогонка усуллари.
14. Квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари ва чизиқсиз соҳаларда иссиқлик тарқалиш жараёнларининг моделлари.
15. Квазичизиқли ва чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари

учун чекли айирмали схемалар.

16. Чегаравий шартларни аппроксимация қилиш.
17. Чизиқсиз чекли айирмали тенгламаларни чизиқлаштириш.
18. Кўп ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун ўзгарувчан йўналишлар усули.
19. Кўп ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламалари учун локал бир ўлчовли усул.
20. Тор ва пластина тебраниши малалаларини сонли моделлаштириш.
21. Натижаларни визуаллаштириш. Визуализация учун алгоритмик тиллар ва математик пакетлардан фойдаланиш.

1. Простейшие задачи, описываемые уравнениями гиперболического, параболического и эллиптического типа.
2. Постановка начальных и краевых задач.
3. Аппроксимация простых дифференциальных операторов, порядок аппроксимации.
4. Ошибка аппроксимации на сетке.
5. Явные и неявные схемы.
6. Схемы с весами.
7. Устойчивость конечно-разностных схем. Сходимость и точность.
8. Интегро-интерполяционый метод.
9. Построение трехслойных схем.
10. Неустойчивые, устойчивые, абсолютно-устойчивые и безусловно-устойчивые схемы.
11. Метод Гаусса.
12. Метод прогонки. Устойчивость метода прогонки.
13. Правая и встречная варианты метода прогонки.
14. Квазилинейные уравнения теплопроводности и математические модели теплопроводности в нелинейной среде.
15. Конечно-разностные схемы для квазилинейных и нелинейных задач теплопроводности.
16. Аппроксимация граничных условий.
17. Линеаризация нелинейных конечно-разностных уравнений.
18. Метод переменных направлений для уравнения теплопроводности в многомерных областях.
19. Локально одномерная схема для уравнения теплопроводности в многомерных областях.
20. Численное моделирование задач колебания струны пластины.
21. Визуализация результатов. Применение алгоритмических языков и математических пакетов для визуализации.

V. КЕЙС БАНКИ

Амалий масалаларни математик моделлаштириш фанини ўқитиш маъруза, амалий машғулотлар ҳамда мустақил топшириқлардан иборат бўлиб, улар биргаликда фаннинг бутунлилигини таъминлайди. Маърузалар орқали олинган билимни мустаҳкамлаш учун амалий машғулотлар муҳим аҳамиятга эга. Мустақил машғулотлар бу фан доирасида мустақил билим олиш, ўзлаштириш ҳисобланади.

Ушбу фанни ўқитиш давомида *ақлий хужум* - ғояларни генерация (ишлаб чиқиш) методидан кенг фойдаланилади. «Ақлий ҳужум» методи бирор муаммони ечишда талабалар томонидан билдирилган эркин фикр ва мулоҳазаларни тўплаб, улар орқали маълум бир ечимга келинадиган энг самарали методдир. Ақлий хужум методининг ёзма ва оғзаки шакллари мавжуд бўлиб, бу фанда оғзаки шаклидан фойдаланилади. Фанни ўзлаштиришда талабалар замонавий ахборот технологиялари ютуқларидан, шунингдек охирги йилларда яратилган турли математик дастурий таъминотлардан фойдаланадилар.

Кейс топшириқ 1.

Қуйидаги квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Кейс топшириқ 2.

Қуйидаги чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x}\right) - v(t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Кейс топшириқ 3.

Қуйидаги квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - v(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + F(u).$$

Кейс топшириқ 4.

Қуйидаги чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-v\frac{\partial u^{v}}{\partial x}-F(t,x,u).$$

Кейс топширик 5.

Қуйидаги икки ўлчовли чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(t,x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(G\left(t,x,y,u,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Кейс топширик 6.

Икки ўлчовли квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси учун баланс усули ёрдамида схема яратинг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_1(t,x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_2(t,x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Кейс топшириқлар

Тартиб рақамингизга мос қуйидаги интегралларни трапеция ва Симпсон усулларидан фойдаланиб тақрибий ҳисобланг.

№	Integral osti funksiya	Oraliq [a,b]	Bo'li-nish soni	№	Integral osti funksiya	Oraliq [a,b]	Bo'li-nish soni
1	$\frac{\sqrt{x+1.2}}{\sqrt{x^2+1.2x+2.4}}$	[0.2;1.2]	10	16	$\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2x^2+1}}$	[3;2.4]	10
2	$\frac{(x^2+1)}{\sqrt{x+1}+2}$	[0.4;1.4]	20	17	$\frac{\cos^2 x}{x^2+1}$	[1.2;0.2]	10
3	$\frac{\sqrt{x+1.4}}{\sqrt[3]{x^2+0.6x+2}}$	[0.6;1.8]	12	18	(2x+0.5)cosx	[0.2;1.2]	20

4	$\frac{0.5x^2+1}{\sqrt{0.4x^2+1.3x+1}}$	[0.6;1.6]	10	19	$\frac{1+tg^2 x}{\sqrt{3x^2+1}}$	[1.1;2.2]	12
5	$\frac{\sqrt{1.2x^2+0.4}}{\sqrt{0.4x^2+1.6x+1}}$	[0.5;1.3]	8	20	$\frac{\sin^2 x}{x^2+1}$	[0.1;0.8]	8

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва мақолалардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мавзулар:

1. Математик моделлаштириш.
2. Содда жараёнларнинг математик моделларини яратиш.
3. Ҳисоблаш эксперименти структураси.
4. Алгебраик тенгламаларни ечиш усуллари.
5. Аппроксимация аниқлиги ва тартиби.
6. Нолокал чегаравий масалалар.
7. Ҳайдаш усулининг оқимли варианти.
8. Уч қатламли схемалар.
9. Чизиқсиз икки ўлчами масалаларни локал бир ўлчовли схемалар.
10. Математик пакетлар.
11. Юқори босқичли алгоритмик тиллар.
12. Натижаларни визуаллаштириш.

VII. ГЛОССАРИЙ

Модель - лотинча *модулус* сўзидан олинган бўлиб, ўлчов, намуна маъноларини англатади.

Модель – бу реал объектни алмаштириши мумкин бўлган, тадқиқот ва тажриба ўтказиш учун қулай ва арзон бўлган бошқа бир реал ёки абстракт объектдир. Модель реал объектнинг соддалаштирилган кўриниши бўлиб, унинг ҳамма хоссаларини эмас, балки асосий хоссаларинигина ўзида мужассам этади.

Математик модель – реал объектни тасавуримиздаги абстракт кўриниши бўлиб, у математик белгилар ва баъзи бир қонун–қоидалар билан ифодаланган бўлади. Масалан, Ньютон қонунлари, массанинг сақланиш қонуни.

Физик модель - Тажриба ўтказишга мўлжалланган тажриба участкалари катта экин майдонларининг, лаборатория машғулотларини ўтказишга мўлжалланган асбоб ускуналар физик моделларга мисол бўлади. Масалан, кимёвий ёки биологик лабораторияларда фойдаланиладиган асбоб ускуналар ҳамда токамак қурилмаси (ер шароитида термоядро реакциясини амалга оширадиган қурилма).

Графикли модель - Схемалар, чизмалар, расмлар, илмий ва тарихий асарлар мисол бўла олади. Масалан, глобус ер шарининг, инсоннинг сурати унинг ўзининг, М.З.Бобурнинг «Бобурнома» асари асарда келтирилган даврнинг графикли моделидир.

Факторлар - моделлаштиришда ташқи муҳитнинг текширилаётган объект параметрларига таъсир қилувчи кўрсаткичлари.

Математик моделлаштириш - реал объект ёки жараёнларни математик усуллар воситасида назарий тадқиқ қилиш усули.

Моделлаштиришнинг моҳияти - объектни бошқа соддароқ объект (модель) билан алмаштириб, моделни хусусиятини тадқиқ қилиш орқали оригинал объектни ўрганишдан иборат.

Реал объект ва унинг математик моделининг мувофиқлиги - объект ва унинг математик модели динамикаларининг сифат ва миқдор жиҳатдан ўхшашлиги.

Авж олувчи режимлар - вақтнинг чекли қийматида қандайдир миқдор чексизликка айланувчи жараёнлар.

Ҳисоблаш эксперименти – компьютер модели яратилган ходиса, жараён ва машиналарни тадқиқ қилиш усули.

Динамик модел – жараёнларнинг вақт бўйича кечишини тасвирловчи математик модел.

Имитацион модел - математическая модель, воспроизводящая поведение исследуемого объекта и применяемая для постановки компьютерных экспериментов, выявляющих особенности функционирования объекта при различных внешних условиях и управляющих воздействиях.

абиотик ўзгаришлар - табиий ўзгаришлар – зилзилалар, вулқонлар отилиши, сув тошқинлари ва шу кабилар.

биотик ўзгаришлар - популяциялар биомассасининг ёки сонининг ўзгариши, популяцияларнинг қирилиб кетиши.

антропоген ўзгаришлар - инсон фаолияти натижасида атроф муҳитда содир бўладиган ўзгаришлар.

Моделнинг универсаллиги - конкрет объектни модели бошқа ўхшаш объектларга қўлланиши учун етарли даражада универсал бўлиши керак. Бу дегани реал объектни математик модели бошқа ўхшаш объектларга жуда кам ўзгартиришлар оркали қўллаш учун етарли даражада умумий бўлиши керак.

Моделнинг компактлиги - модел шундай қурилиши керакки, уни деярли ўзгартиришсиз ўзидан юқори даражали моделга модел ости сифатида киритиш мумкин бўлсин. Масалан, дарахтни математик модели ўрмон экосистемаси моделининг бир блоки сифатида қўлланилиши. Фотосинтез жараёнининг математик модели дарахт математик моделини бир блоки сифатида ишлатилиши мумкин бўлсин.

Моделнинг соддалиги - математик моделни қуришда иккинчи, учинчи даражали факторлар ҳисобга олинмаслиги лозим. Бу факторларни ҳисобга олиш ММни мураккаблаштиради. Мисол: эпидемияни тарқалиши жараёни математик моделида шамол тезлигини ҳисобга олиш моделни анча мураккаблаштиради. Аммо атроф – муҳитни экологиясини ўрганишда шамол тезлигини ва йўналишини ҳисобга олмаслик мумкин эмас. Сув қувуридаги сувни ҳаракатини ўрганаётганда ойнинг тортишиш кучини ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Аммо, денгиз ва океанлардаги сув тошқинларини ўрганаётганда ойнинг тортишиш кучини албатта ҳисобга олиш лозим. Бу тошқинлар ойнинг тортиши натижасида ҳосил бўлади.

Моделнинг сезгирлиги - даражаси паст бўлиши лозим. ММни қуришда ҳисобга олиниши зарур бўлган асосий факторларга нисбатан моделни сезгирлик даражаси паст бўлиши лозим. Яъни, реал объектни ўрганаётган пайтда ўлгашлар кўп ҳолларда хатолик билан бажарилади. Айрим ҳолларда моделда иштирок этаётган асосий факторни аниқ ўлчашни имкони бўлмайди. Масалан, об – ҳавони башорат қилиш ҳалигача тахминий, пахта майдонидаги ҳашоратлар сонини аниқ ўлчаш мумкин эмас.

Моделнинг мослашувчанлиги - модел блокли принципда қурилиши лозим. Бунда ўзгарувчилар иложи борича алоҳида блокда, автоном ҳолда ҳисобланиши мақсадга мувофиқ. Бу эса математик моделни тез ўзгартириш, модификация қилиш имконини яратади. Умуман олганда бу талаб унга катта бўлмаган ўзгартириш орқали бошқа реал объектга мослашишни, яъни математик моделни универсаллигини характерлайди.

детерминирланган модель - ҳар бир мумкин бўлган кириш параметрлари тўплами учун чиқиш параметрлари бир қийматли аниқланган модель.

детерминирланмаган, стохастик (эҳтимолли) модель – ҳар бир мумкин бўлган кириш параметрлари тўплами учун чиқиш параметрлари бир қийматли аниқланмаган модель.

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Меъёрий- ҳуқуқий хужжатлар.

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг «Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» 2015 йил 12 июндаги ПФ-4732-сон Фармони.
2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2010 йил 2 ноябрдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагогик кадрлар тайёрлаш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1426-сонли Қарори.
3. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 йил. 11-12-сон, 295-модда.
4. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 24 июлдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагог кадрлар тайёрлаш ва аттестациядан ўтказиш тизимини янада такомиллаштириш тўғрисида”ги ПФ–4456-сон Фармони.
5. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 28 декабрдаги “Олий ўқув юртидан кейинги таълим хамда олий малакали илмий ва илмий педагогик кадрларни аттестациядан ўтказиш тизимини такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 365- сонли Қарори.

Махсус адабиётлар.

7. Самарский А. А.,., Михайлов.А. П. Математическое моделирование . Наука, М. 2005, 480 с
8. А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.:Наука, 1987, 477с.
9. Арипов М. М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. Тошкент Фан, 1988, 137 С.
10. Арипов М. Табиатшунослик ва технологияларда амалий математика. Тошкент 2013. 1-2 қисм
11. Juan L. Vazquez. The Porous medium equation. Mathematical theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2007. 183.
12. Victor A. Galaktionov and Juan L. Vazquez. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 8, №2, April 2002. 399-433.

Қўшимча адабиётлар

13.Wanjuan Du, and Zhongping Li Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition Int. Journal of Mathematic Analysis 2013 vol. 7, 11, 517-524
14.Zhongping Li, Wanjuan Du, Chunlai Mu Fujite Critical exponent for a fast diffusive equation with variable coefficients. Bull. Korean Math Soc. 2013, vol. 50, 1, 105-116
15.Aripov M. Sadullaeva Sh. To properties of solutions to reaction diffusion equation with double nonlinearity with distributed parameters. Journal of Siberian Federal university Mathematics&Physics 2013 , 6, (2), 150-156
16. P. Zheng, Ch. Mu, D. Liu, X. Yao and Sh. Zhou. Blow-up analysis for a quasilinear degenerate parabolic equation with strongly nonlinear source. Abstract and Appl. Anal. vol 2012. Article ID 109546. 19 pages.
17. C. Jin, J. Yin, Critical exponents and non-extinction for a fast diffusive polytrophic filtration equation with nonlinear boundary sources, Nonlinear Anal. 67 (2007) 2217–2223 480–489.
18. Z. Wang, J. Yin, C. Wang, Critical exponents of the non-Newtonian polytropic filtration equation with nonlinear boundary condition, Appl. Math. Lett. 20 (2007) 142–147
19. J. Zhou, C. Mu, Critical curve for a non-Newtonian polytrophic filtration system coupled via nonlinear boundary flux, Nonlinear Anal. 68 (2008) 1–12.

Интернет манбаалар

20.http://www.allmath.ru/
21. http://www.mcce.ru/
22. http://lib.mexmat.ru/
23. http://www.webmath.ru/
24. http://www.exponenta.ru/
25. http://www.ziyonet.uz/