ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ МИНТАҚАВИЙ МАРКАЗИ

«НОЧИЗИҚЛИ ЖАРАЁНЛАРНИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ» МОДУЛИНИНГ
ЎҚУВ – УСЛУБИЙ МАЖМУАСИ

Тошкент – 2018

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 27 мартдаги 247-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: ф.-м.ф.д., проф. **М.Арипов**

Тақризчи: ф.-м.ф.д., профессор
Б.Ф.Абдурахимов
ф.-м.ф.д., профессор
З.Х.Юлдашев

Ўқув -услубий мажмуа ЎзМУ Илмий кенгашининг 2017 йил 30 августдаги 1- сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Мазкур дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПФ-4732-сон Фармонидаги устувор йўналишлар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Маълумки мамлакатимиз мустақиллиги миллий таълим соҳасида туб ислоҳотларни амалга ошириш учун замин яратди. Замонавий талаблар инобатга олинган ҳолда, олий ўқув юртларининг педагог кадрларини қайта тайёрлаш йўналишлари бўйича қайта тайёрлаш ва малака оширишнинг ўқув дастурларини мунтазам такомиллаштириб бориш ишларини ташкил этиш бугунги куннинг долзарб вазифаларидан бири хисобланади.

Бу курсда тингловчилар барча фанлардан олган билимларини қўллаб физик жараёнлар учун математик моделлар яратиш, амалий масалалар қўйиш, яратилган математик моделларнинг адекватлигини текшириш, қўйилгаш масала учун ечиш усулларини танлаш, чекли айирмали схемалар яратиш, схемаларнинг турғунлигини таъминлаш, ҳосил қилинган сонли тенгламаларни ечиш усулларини танлаш, алгоритмлар яратиш ва дастурлар тузиш, дастурни созлаш, ҳисоблаш экспериментларини ўтказиш, олинган натижаларни таҳлил қилиш ва натижаларни жадвал, график ёки анимацион кўринишларда (визуал) тақдим этиш каби кўникмаларни олади.

Бу кўникмаларни олиш давомида тингловчилар барча математик фанларининг бир бирини тўлдириши, ҳаётий масалаларни ечишда уларнинг қанчалик зарурлигини тўлароқ тушуниб етадилар, бу масалаларни ечишда информацион технологияларнинг ролини ва янги технологиялардан фойдаланиш илмий-техника ривожига салмоқли таъсир кўрсатишига амин бўладилар.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Ночизиқли жараёнларни математик моделлаштириш” модулининг мақсади: Фанининг асосий мақсади тингловчиларда муайян жараёнларни математик моделлаштириш учун тушунча билим ва кўникмалар асосида, ночизиқли математик моделларни тадқиқ этиш учун татбиқ этилиши мумкин бўлган математик усуллар орасидан энг самаралисини ажратиб олиш, яратилган ёки мавжуд усулларнинг яроқлилигини баҳолаш каби бир қатор назарий ва амалий муаммолар бўйича билим ва кўникмаларни уйғунлаштиришдан иборат.

Тингловчилар учун бир қатор тушунчалар умумлаштирилган ҳолда, усуллар эса чуқур ва батафсил равишда ўргатилади. Жумладан фан дастури тингловчиларнинг илгари ўрганилган фундаментал ва ихтисослик фанларига таянади. Фанини ўргатиш белгиланган режа асосида маъруза ўқиш, аудитория ва компьютер залларидан фойдаланган ҳолда амалга оширилади. Бунда тингловчилар чизиқсиз масалалар, уларни аппроксимация қилиш усуллари, аппроксимация тартиби, яқинлашиши ва турғунлиги, чизиқлаштириш усуллари, сонли ечишнинг итерация, прогонка усуллари каби мавзуларни чуқур ўрганадилар. Улардан ташқари масалани ечиш алгоритмини ва дастурини яратиш, дастурни созлаш, тест масалалар яратиш ва дастурнинг ишончлилигини текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш, олинган натижаларни математик ва физик жиҳатдан таҳлил қилиш ва уларни визуаллаштириш каби мавзулар билан яқиндан танишадилар.

“Ночизиқли жараёнларни математик моделлаштириш” модулининг вазифалари:

- ночизиқли жараёнларни математик моделлаштириш;
- Ночизиқли математик моделлар ва уларнинг турларини ажрата билиш;
- ночизиқли математик моделларнинг сифат хоссаларини тадқиқ этиш усулларини таҳлил қилиш;
- Эмден–Фаулер тенгламалари ва уларнинг ечимларининг хоссаларини ўрганиш;
- физик жараёнларни тасвирловчи хусусий ҳосилали чизиқсиз дифференциал тенгламалар ва уларга қўйилган шартларни (бошланғич, чегаравий ва бошқа) физик маъносини ўрганиш;
- тингловчиларда амалий масалалар қўйиш ва уни ечиш усулларини танлаш кўникмаларини ҳосил қилиш.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

“Ночизиқли жараёнларни математик моделлаштириш” ўқув фанини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида:

Тингловчи:

– юқори даражали тилларнинг имкониятлари; алгоритмлар; модулли дастурлаш; математик моделларни қуриш, автомодел ечимлар ва уларни қуриш, автомодел ечимларнинг асимптотикаларини тадқиқ этиш, критик экспоненталарни топиш, чегараланмаган (blow-up) ва глобал ечимларнинг мавжудлик шартларини аниқлаш, ночизиқли моделларга хос эффектларни тадқиқ қилиш, операторларнинг чекли айирмали аппроксимацияси, аппроксимация ҳатоликлари; айирмали схемаларнинг турғунлиги ва ечимларнинг масала шартларига узлуксиз боғлиқлиги; чизиқлаштириш; итерацион жараёнларни қуриш; чизиқсиз масалаларни сонли ечишдаги ҳар ҳил аниқликдаги айирмали схемалар; айирмали масалани ечиш усулни танлаш; чизиқсиз схемаларни чизиқлаштириш усуллари; мос аналитик ва сонли ечимларни яратиш; ночизиқли масалаларни сонли моделлаштириш ва ҳисоблаш эксперименти натижаларини таҳлил қилишни ***билиши керак;***

– ночизиқли математик моделларни сифат хоссаларини тадқиқ этиш, чизиқсиз чегаравий масалаларни автомодел ёндошув асосида тадқиқ қилиш, ҳисоблаш эксперементини ўтказиш; масалаларни ечиш учун самарали методларни танлаш ва таҳлил қилиш; айирмали схемаларни танлаш; сақланиш қонунларига мос равишда схемаларни қўллаш; юқори аниқликдаги турғун схемаларни олиш; айирмали масалани ечишнинг турғун усулларини топиш; абсолют турғун айирмали схемаларни олиш; аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш; чизиқсиз чегаравий масалаларни сонли ечишда итерацион жараёнларни қуриш; сонли натижаларни таҳлил қилиш ва визуаллаштириш ***кўникмаларига эга бўлиши керак;***

– бошланғич-чегаравий шартларни аниқлаш; амалий масалаларни математик модделлаштириш ва компьютерда ечиш; олинган натижаларни аниқлик даражасини аниқлаш мақсадида таҳлил қилиш; сонли моделлаштириш натижаларининг ўрганилаётган жараёнлар ва объектларлар билан мослигини таъминлаш ***малакаларига эга бўлиши керак.***

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“Ночизиқли жараёнларни математик моделлаштириш” курси маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

-маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;

-ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Ночизиқли жараёнларни математик моделлаштириш” модули мазмуни ўқув режадаги “Дастурлаш технологиялари”, “Амалий математиканинг замонавий муаммолари”, “Ночизиқли масалаларни сонли ечиш усуллари” ўқув модуллари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг меъёрий - ҳуқуқий хужжатлар бўйича касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар амалий масалаларнинг математик моделлари, уларни ечиш усуллари ва дастурий таъминотлар яратиш, ҳисоблаш тажрибаларини ўтказиш, олинган натижаларни таҳлил этиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Модул мавзулари</th><th colspan="5">Тингловчининг ўқув юкламаси, соат</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Ҳаммаси</th><th colspan="3">Аудитория ўқув юкламаси</th><th rowspan="3">Мустақил таълим</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Жами</th><th colspan="2">жумладан</th></tr>
<tr><th>Назарий</th><th>Амалий машғулот</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Эмден–Фаулер тенгламалари ва уларнинг ечимларининг хоссалари</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Ночизиқли масалалар учун чизиқсиз эффектлар</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Икки карра ночизиқли реакция-диффузия жараёнларининг математик моделлари.</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Ўзаро рақобатга асосланган ночизиқли</td><td>8</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr>
</table>

	биологик популяция масаласининг сифат хоссалари					
5.	Нолокал чегаравий шартлар билан боғланган параболик тенгламалар системаси ва уларнинг глобал ечимларининг мавжудлик шартлари.	8	6	2	4	2
Жами: 30		**30**	**26**	**10**	**16**	**4**

НАЗАРИЙ ВА АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Эмден–Фаулер тенгламалари ва уларнинг ечимларининг хоссалари

Эмден–Фаулер тенгламалари ва уларнинг ечимларининг хоссалари. Ночизиқли математик моделлар ва уларнинг турлари. Ночизиқлилик эффектлари.

2-Мавзу: Ночизиқли масалалар учун чизиқсиз эффектлар

Ночизиқли масалалар учун чизиқсиз эффектлар (умумлашган ечимлар, таъсирнинг чекли тезликли ҳаракати, локализация ходисаси, ҳаракатланувчи муҳитдаги орқа фронт ходисаси ва бошқалар). Солиштириш теоремалари.

3-Мавзу: Икки карра ночизиқли реакция-диффузия жараёнларининг математик моделлари.

Икки карра ночизиқли реакция-диффузия жараёнларининг математик моделлари. Фуджита типидаги ва иккинчи тур критик экспоненталар. Чегараланмаган ечимлар (blow-up).

4-Мавзу: Эталон тенгламалар методи

Эталон тенгламалар методи. Ўзгарувчиларни алмаштириш. Тенгламаларни эталон тенгламалар усулидан фойдаланиб ечиш.

5-Мавзу: Нолокал чегаравий шартлар билан боғланган параболик тенгламалар системаси ва уларнинг глобал ечимларининг мавжудлик шартлари.

Нолокал чегаравий шартлар билан боғланган параболик тенгламалар системаси ва уларнинг глобал ечимларининг мавжудлик шартлари. Биологик популяция жараёнларининг математик моделлари. Нодивергент параболик тенгламалар ва уларнинг системалари орқали ифодаланувчи жараёнлар.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

Амалий машғулотлар замонавий дидактик таъминот ва лаборатория жиҳозларига эга бўлган аудиторияларда ҳамда Интернет тармоғига уланган компьютер синфларида, таянч олий таълим муассасаларининг кафедраларида ташкил этилади.

Амалий машғулотларда физик жараёнларни тасвирловчи амалий масалаларнинг қўйилиши, уларни ечиш усуллари, масалани ечишнинг алгоритми ва дастурини яратиш, дастурнинг тўғрилигини тест масалаларда текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш ва олинган натижаларни таҳлил қилиш масалалари ўрганилади.

Амалий машғулотларда қуйидаги мавзулар ва вазиятли масалалар ўрганилади:

Математик моделларни қуриш босқичлари, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун Коши ва чегаравий масалалар.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун қуйилган бошланғич ва чегаравий масалаларни автомодел ечимларини қуриш.

Реакция-диффузия типидаги масаларнинг ечимлари хоссаларини тадқиқ этиш.

Эталон тенгламалар методини қўллаш.

Нолокал чегаравий масалалар учун критик экспонентлаларни топиш.

Сонли ечиш ва ҳисоблаш эксперименти натижаларини визуаллаштириш.

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ

Тингловчи мустақил ишни муайян модулнинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- амалий машғулотларда берилган топшириқларни бажариш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади: маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);

баҳс ва мунозаралар (лойиҳалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

ЖОРИЙ НАЗОРАТ(АССИСМЕНТ)НИ БАҲОЛАШ МЕЗОНИ

Жорий назорат(ассисмент)ни бахолаш Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш Тармоқ (минтақавий) марказида тасдиқланган шакллари ва мезонлари асосида амалга оширади.

Ушбу модулнинг жорий назорат(ассисмент)га ажратирлан максимал балл-**0,8 балл.**

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Меъёрий- ҳуқуқий хужжатлар.

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг «Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» 2015 йил 12 июндаги ПФ-4732-сон Фармони.
2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2010 йил 2 ноябрдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагогик кадрлар тайёрлаш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1426-сонли Қарори.
3. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 йил. 11-12-сон, 295-модда.
4. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 24 июлдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагог кадрлар тайёрлаш ва аттестациядан ўтказиш тизимини янада такомиллаштириш тўғрисида”ги ПФ–4456-сон Фармони.
5. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 28 декабрдаги “Олий ўқув юртидан кейинги таълим хамда олий малакали илмий ва илмий педагогик кадрларни аттестациядан ўтказиш тизимини такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 365-сонли Қарори.

Махсус адабиётлар

1. Самарский А. А.,., Михайлов.А. П. Математическое моделирование . Наука, М. 2005, 480 с
2. А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.:Наука, 1987, 477с.

3. Арипов М. М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. Тошкент Фан, 1988, 137 С.
4. Арипов М. Табиатшунослик ва технологияларда амалий математика. Тошкент 2013. 1-2 қисм
5. Juan L. Vazquez. The Porous medium equation. Mathematical theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2007. 183.
6. Victor A. Galaktionov and Juan L. Vazquez. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 8, №2, April 2002. 399-433.

Интернет манбаалар

1. http://www.allmath.ru/
2. http://www.mcce.ru/
3. http://lib.mexmat.ru/
4. http://www.webmath.ru/
5. http://www.exponenta.ru/
6. http://www.ziyonet.uz/

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“Кейс-стади” методи

«Кейс-стади» - инглизча сўз бўлиб, («case» – аниқ вазият, ҳодиса, «стади» – ўрганмоқ, таҳлил қилмоқ) аниқ вазиятларни ўрганиш, таҳлил қилиш асосида ўқитишни амалга оширишга қаратилган метод хисобланади. Мазкур метод дастлаб 1921 йил Гарвард университетида амалий вазиятлардан иқтисодий бошқарув фанларини ўрганишда фойдаланиш тартибида қўлланилган. Кейсда очиқ ахборотлардан ёки аниқ воқеа-ҳодисадан вазият сифатида таҳлил учун фойдаланиш мумкин. Кейс ҳаракатлари ўз ичига қуйидагиларни қамраб олади: Ким (Who), Қачон (When), Қаерда (Where), Нима учун (why), Қандай/ Қанақа (How), Нима-натижа (Whaat).

“Кейс методи” ни амалга ошириш босқичлари

Иш босқичлари	**Фаолият шакли ва мазмуни**
1-босқич: Кейс ва унинг ахборот таъминоти билан таништириш	✓ якка тартибдаги аудио-визуал иш; ✓ кейс билан танишиш(матнли, аудио ёки медиа шаклда); ✓ ахборотни умумлаштириш; ✓ ахборот таҳлили; ✓ муаммоларни аниқлаш
2-босқич: Кейсни аниқлаштириш ва ўқув топшириғни белгилаш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муаммоларни долзарблик иерархиясини аниқлаш; ✓ асосий муаммоли вазиятни белгилаш
3-босқич: Кейсдаги асосий муаммони таҳлил этиш орқали ўқув топшириғининг ечимини излаш, ҳал этиш йўлларини ишлаб чиқиш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил ечим йўлларини ишлаб чиқиш; ✓ ҳар бир ечимнинг имкониятлари ва тўсиқларни таҳлил қилиш; ✓ муқобил ечимларни танлаш
4-босқич: Кейс ечимини ечимини шакллантириш ва асослаш, тақдимот.	✓ якка ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил вариантларни амалда қўллаш имкониятларини асослаш; ✓ ижодий-лойиҳа тақдимотини тайёрлаш; ✓ якуний хулоса ва вазият ечимининг амалий аспектларини ёритиш

«ФСМУ» методи

Технологиянинг максади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизни баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

III.НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1-Мавзу: Эмден–Фаулер тенгламалари ва уларнинг ечимларининг хоссалари

1. Эмден–Фаулер тенгламалари ва уларнинг ечимларининг хоссалари.
2. Ночизиқли математик моделлар ва уларнинг турлари.
3. Ночизиқлилик эффектлари.

Таянч сўзлар: *модель, математик модель, дифференциал тенгламалар, ночизиқли эффектлар*.

Бу бўлимда иккинчи ва учинчи тартиби ночизиқли оддий дифференциал тенгламаларни айрим синфи эталон тенгламалар усули ёрдамида ечиш тадқиқ қилинади [5-12].

Теоремаларни исботлашда [1-5] ишларда кўрилган усуллардан фойдаланилади.

Аввало, Эмден-Фаулер типли тенгламаларни муносабатини кўриб чиқамиз,

$$y^{(l)} + p(x)y - g(x)\, y^n\, y'^m = 0 \tag{1.1}$$

бу ерда, $l \geq 2,\ 0 < n \neq 1,\ g(x) > 0$ ва $p(x)$ - қандайдир силлиқ функция.

Турли хил ҳусусий ҳолларда (1.1) тенглама, кўпгина тадқиқотларга мисол бўлган (буни [9] ишларида кузатиш мумкин). Қуйидаги ҳолларда: $p(x) = 0, m = 0, l = 2, g(x) = x^{\sigma}$ Эмден-Фаулер тенгламаси, σ = -1/2, n = 3/2 – ҳолларда эса Томас-Ферма тенгламасидир [1]. x→∞ ҳолати учун Эмден-Фаулер тенгламалар асимптотик ечилган [2-3]. (1.1) тенгламанинг турли ҳоссалари: тебранувчи монотон ечимларини мавжудлиги (при) ($n > 1$ бўлса, $p(x) = 0,\ l = 2,\ m = 0$ бўлади) [4], $0 < n < 1$ ҳоли учун [6]. Штурм-Лиувилл масаласи учун «эталон» тенгламаларни ечиш усули (ВКБ усули) [8] ишда таклиф этилган.

(1.1) тенгламанинг $(l = 2,\ p(x) = 0,\ g(x) = x^{\sigma})$ асимптотик ечим ўрнатиш натижаларини [2] да топиш мумкин, янада умумий ҳолни [9]да кўриш мумкин.

1.1. ВКБ-ечимни қуриш

ВКБ-ечимини қуриш билан шуғулланамиз. ВКБ-ечим термини, одатда чизиқли тенгламалар учун фойдаланилади, энди ночизиқли ҳоли учун ҳам фойдаланамиз, ВКБ-ечим формаси учун чизиқли ва ночизиқли ҳоллар бир хилдир.

ВКБ-ечимнинг икки вариантини кўриб чиқамиз.

Таъриф 1.1. Функцияни

$$\bar{y}_1 = z\left[\phi\left(x\right)\right] \qquad (1.2)$$

бу ерда $\phi\left(x, x_0\right) = \int_{x_0}^{x} g^{1/(l-m)}(t)dtz$ - қуйидаги тенгламанинг ечими

$$\frac{d^l z}{d\phi^l} - z^n z'^m = 0, \qquad (1.3)$$

(1.1) тенгламанинг Харди формасидаги ВКБ–ечим деб номлаймиз

$$\bar{y}_2(x, x_0) = \left[\varphi'\left(x, x_0\right)\right]^{-\frac{l-1}{2}} \cdot z\left[\varphi\left(x, x_0\right)\right], \qquad (1.4)$$

бу ерда,

$$\varphi(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} g^{\frac{2}{2(l-m)+(l-1)(n-1+m)}}(t)dt,$$

$$2(l-m) + (l-1)(n-1+m) \neq 0,$$

ВКБ-ечим деб атаймиз.

(1.4) функция $n=1,\ m=0$ ҳолати учун l-чи тартибли чизиқли тенгламанинг ВКБ-ечимга айланади.

(1.4) функциянинг $m=0$ ҳолати учун бир маҳсус ҳоссасини келтирамиз.

Агар

$$\left\{\phi, x\right\} = \frac{\phi'''}{\phi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)^2 \qquad (1.5)$$

- x бўйича $\varphi(x,\ x_0)$ функциянинг инварианти ёки Шварцнинг иҳтиёрийсидир. У ҳолда (1.4) функция $l = 2, 3, 4$ ҳоллари учун қуйидаги шартни қаноатлантиради

$$y_2'' + \left\{\varphi, x\right\} y_2 - q(x) y^n = 0,$$

$$\bar{y}_2''' + 2\left\{\varphi, x\right\} \bar{y}_2^1 + \frac{d}{dx}\left\{\varphi, x\right\} \bar{y}_2 - g(x)\bar{y}_2^n = 0,$$

$$y_2^{IV} + 5\left\{\varphi, x\right\} \bar{y}_2'' + 5\frac{d}{dx}\left\{\varphi, x\right\} \bar{y}_2' + \left[\frac{3}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left\{\varphi, x\right\} + \frac{9}{4}\left\{\varphi, x\right\}^2\right]\bar{y}_2 - g(x) y_2'' = 0.$$

Ҳусусан, агар $\left\{\varphi, x\right\} = 0$ бўлса, у ҳолда (1.4) ВКБ-ечим, (1.1) тенгламанинг аниқ ечими ҳисобланади ($p(x) \equiv 0$). Шундай қилиб, $l = 3, 4$, агар $g(x)=(cx+d)^{-2(n+3)}$, $(l=3)$ ва $g(x)=(cx+d)^{-(3n+5)}$, у ҳолда ВКБ-ечим (1.4) агарда тенгламанинг аниқ ечими.

$p(x)=\dfrac{1}{2}\{\phi, x\}$ шарт (1.1) тенгламани $l=2,\ m=0$ қийматларда интеграллаш шартидир. Бундан $n=-1$ бўлса, Леко [8] интеграллаш шарти ҳосил бўлади.

Энди (1.2), (1.4) функцияни тузиш усулини кўрамиз.

(1.1) ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз

$$y(x)=z\left[\phi(x)\right], \tag{1.6}$$

бу ерда $\varphi(x)$ – ҳозирча ҳали аниқланмаган функция, (1.1) ифодага қўйиш орқали қуйидагига эга бўламиз,

$$\left(\phi'\right)^{l} z^{(l)}+\ldots+g(x)\phi^{m}z^{n}z'^{m}=0$$

Бундан $\varphi(x)$ функцияни қуйидаги шартдан танлаб оламиз,

$$\left(\phi'\right)^{l}=g(x)\phi'^{m},\ \text{яъни}\ \ \phi\left(x, x_0\right)=c+\int_{x_0}^{x} g^{\frac{1}{l-m}}(t)dt,$$

z эса (1.3) тенгламани қаноатлантиради.

Шуни таъкидлаш керакки, ажойиб натижа оркали ҳудди аввалгидек натижага эга бўламиз.

Теоремалар *Харди [8]. Агар $f(x)$ – функция, Хардига формасига тегишли бўлса, у холда*

а) агар f функция x нисбатан чексиз кетма-кетлик эга бўлса, у ҳолда иҳтиёрий бутун $n>0$ сони учун қуйидаги ифода ўринли

$$f^{(n)}(x)\sim[f'(x)]^{n}/[f(x)]^{n-1}; \tag{1.7}$$

б) агар f функция x нисбатан чекли μ кетма-кетликка эга булса, у холда ихтиёрий $n>0$ сони учун куйидаги ифода уринли

$$f^{(n)}(x)\sim\mu\left(\mu-z\right)\ldots(\mu-n+1)\frac{f(x)}{x}/x^{n}\sim\frac{\left(\mu-1\right)\ldots\left(\mu-n+1\right)}{\mu n-1}\left[f'(x)\right]^{n}/\left[f(x)\right]^{n-1}, \tag{1.8}$$

бу ҳолатдан бошқа, μ – мусбат бутун сон, ҳамда $n>\mu$.

Шу ҳол учун ва кейинчалик $f(x)\sim\psi(x)$ муносабат, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/\psi(x)=1$, ўринли $\psi(x)\neq 0$ бўлади, ҳамда $f(x)=0$ бўлса, $\psi(x)=0$ бўлади.

Энди (1.4) масаланинг қуйилиши билан шуғулланамиз, бунинг учун,

$$y(x)=f(x)z[\varphi(x)],$$

бу ерда, $f(x),\ \varphi(x)-[x_0,\infty]$ оралиққа тегишли ҳали аниқланмаган дифференциалланувчи функция, $z(\varphi)$ эса (1.3) тенгламанинг ечими.

$y(x)$ функцияни (1.1) қўйсак, у ҳолда қуйидаги муносабатга эга бўламиз,

$$f\phi'^{l}\frac{d^{l}z}{d\phi^{l}}+[\frac{l(l-1)}{2}f\phi'^{l-2}+lf'\phi'^{l-1}]+...+g(x)f^{n}[f'z+f\phi'z']^{m}z^{n}=0. \qquad (1.9)$$

f ва φ қуйидаги шардан танлаймиз

$$l(l-1)f\phi'^{l-2}\phi''+lf'\phi'^{l-1}=0, \qquad (1.10)$$

$$\phi'^{(l)}=g(z)f^{n-1+m}.$$

(1.10) тенгламалар системасини интегралласак, қуйидаги ифодага эришамиз,

$$f(x)=\left[\phi'(x,x_0)\right]^{-(l-1)/2},$$

$$\phi(x,x_0)=\int_{x_0}^{x}g^{\overline{\frac{2}{2(l-m)+(l-1)(n-1+m)}}}(t)dt.$$

Демак, (1.3) бир параметрли ечимлар оиласига эга,

$$z(\phi)=[b+((\alpha-1)...(\alpha-(l-1)\alpha^{1-m})^{-1/l-m}\phi]^{\alpha},$$

$$\alpha=\frac{l-m}{1-(m+n)}, \qquad (1.11)$$

бу ерда $b>0$ – иҳтиёрий ўзгармас.

Бу бобда биз эталон усулларини асослаш орқали Эмден-Фаулер типли иккинчи ва учинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларга қўллаш билан шуғулланамиз.

Шунинг дек, юқорида тузилган биринчи ва иккинчи типли ВКБ-ечим ишлатилади.

1.2. Ночизиқли иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун «эталон» усули

$[x_0,\infty]$ соҳага тегишли Эмден-Фаулер типли тенгламаларни кўриб чиқамиз:

$$y''+p(x)y-g(x)y^{n}y'^{m}=0 \qquad (1.12)$$

Айрим аниқликларни келтирамиз [8-9].

Таъриф 1.2. (1.12) тенгламанинг ечими $(x_0,\,\infty)$ оралиқда аниқланган бўлса, давом эттирилувчи дейилади, ва аксинча агарда $(x_0,\,x_1)$ оралиқда аниқланган бўлса, ҳамда x_3 нуқтадан кейин давом эттирилмайдиган.

Таъриф 1.1. (1.12) тенгламанинг ечими тебранмайдиган дейилади, агарда қаралаётган интервалда камида битта нол бўлмаса, ва тебранувчи дейилади, агарда қаралаётган интервалда камида иккита нуқтада нолга айланса.

Таъриф 1.4. (1.12) тенгламанинг ечими муҳим (финитли) дейилади, агарда $(x_0,\, x_1)$ якуний интервалда нолдан фарқли бўлса, яъни $x \ge x_1$ айнан нольга тенг бўлса.

Юқорида кўрилган ВКБ-ечимлар асимптотиканинг давом эттирилган, давом этирилмаган ва (1.12) тенгламанинг муҳим ечимлар беришини исботлаймиз.

(1.4) муносабатдан $n \to 1,\ m = 0$ қийматидан оддий ВКБ-ечим ҳосил бўлади.

Демак, (1.1) кўринишдаги тенгламанинг асимптотик ечимини аниқлашда қуйидаги муносабат муҳим ўринга эга,

$$y = f(x) z\left[\phi(x)\right]\omega(\tau) \tag{1.13}$$

бу ерда, $f(x),\, z(\varphi)$ ва $\tau(x)$— маълум бўлган функциялар, яъни (1.1) тенглама $\tau(x) \to \infty$ булганда ечимнинг асимптотик турғунлигини ўрганади, $x \to x_0,\ x_0 < +\infty$ ёки $x_0 \to +\infty$ ҳоллар учун. Демак, ҳосил қилинган, $\omega(\tau)$ нисбатан $f(x),\ [z(\varphi)]$ ва $\tau(x)$ дифференциал тенглама мос танлашнинг $\tau \to +\infty$ интилганлигида автономдек, баъзи ҳолда автоном бўлади.

Қуйидаги тенгламани кўриб чиқамиз,

$$\frac{d^2\omega}{d\tau^2} + b_1(\tau)\frac{d\omega}{d\tau} + b_2(\tau)\omega - b_3(\tau)\omega^n = 0\,, \tag{1.14}$$

бу $m = 0$ қийматда (1.13) тенгламани қайта ишлаш орқали, (1.12) тенгламадан ҳосил бўлади.

Кейинчалик бизга қуйидаги лемма керак бўлади [8].

Лемма 1. Агар функция $b_1(\tau)$ узлуксиз бўлса, $b_2(\tau),\ b_3(\tau)$ функциялар эса ҳар бир якуний ярим мусбат ўқида интегралланувчи бўлади. Агар кейинчалик $\tau \to +\infty$ бўлганда,

$$b_1(\tau) \sim \mathrm{b}_1\tau^{\sigma}, \quad b'(\tau) = b_1\sigma\tau^{\sigma-1},$$

$b_i(\tau) \sim \mathrm{b}_i$ (I=2,3) бўлади, бу ерда $0 \le \sigma \le 1, b_i > 0$.

Агар тенглама,

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + b_1(\tau)\frac{dv}{d\tau} + b_2(\tau)v = 0$$

тебранувчи ечимига эга бўлмаса, у ҳолда нотривиал учун тебранмайдиган (1.14) тенгламанинг $\omega(\tau)$ давом эттирилмаган ечими бўлади: $\tau \to +\infty$ ё $\omega(\tau) \sim (b_2 / b_3)^{1/(n-1)}$, ё $\omega(\tau) \sim \upsilon(\tau) \sim 0$, ҳолларда, бу ерда $\upsilon(\tau)$ - оҳирги тенгламанинг қандайдир нотривиал ечими.

Лемма 1.2. Агар функция $b_k(\tau)$ $(k=1,2,3)$ чекли оралиқ учун $(0,\ +\infty)$ ва $b_3(\tau)\geq b_3>0,\ b_2(\tau)/b_3(\tau)\sim b>0,$ интегралланувчи бўлса, у ҳолда (1.14) тенгламанинг иҳтиёрий тебранмайдиган ечим $\tau\to+\infty,\ b^{1/(n-1)}$ бўлади.

Леммы 1.2 дан маълумки,

Изоҳ 1.1. Агар $x\to+\infty$ интилганда $p(x)/g(x)\ \to c>0$ бўласа, у ҳолда (1.12) тенгламанинг тўғри ечими $(m=\ 0)$ қийматда қуйидагича асимптотикага эга бўлади,

$$y(x)\sim c^{1/(n-1)}.$$

[8] усуллардан фойдаланиб, ВКБ-ечим кўринишда давом эттирилувчи ва давом эттирилмайдиган асимптотик ечимларни олиш мумкин.

$$\left[\phi'\left(x,x_0\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[a\pm\frac{n-1}{\sqrt{2(n+1)}}\phi\left(x,x_0\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}},$$

бу ерда,

$$\phi\left(x,x_0\right)=\int\limits_{x_0}^{x}g^{\frac{2}{n+1}}(t)dt\,.$$

Одатда, ҳусусий ҳолда, $a=1,\ n\to1$ қуйидагига эга бўламиз,

$$\lim_{n\to1}\left[\phi'\left(x,x_0\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[1\pm\frac{n-1}{\sqrt{2\left(n+1\right)}}\phi\left(x,x_0\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}}=g^{-\frac{1}{4}}(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x}g^{\frac{1}{2}}(t)dt\right),$$

яъни, чизиқли тенгламаларда маълум бўлган ВКБ-ечим [8].

Айрим шартларни бажарилиш натижасида Харди формасидаги $g(x),\ p(x)$ ВКБ-ечим (1.12) тенгламанинг давом эттирилувчи асимптотик ечим бўлишини исботлаймиз .

Теорема 1.1. Агар $\psi(x,x_0)\to+\infty$ шарт бажарилганда $\psi\left(x,x_0\right)=\int\limits_{x_0}^{x}g^{\frac{1}{2}}(t)dt$ бўлса, $x\to+\infty$ интилганда

$$\frac{n-1}{2(n+1)}\left[p(x)-\frac{2\psi''}{\left(n-1\right)\psi}\right]\frac{\psi^2}{\psi'^2}\to c_1>-1\,,\ \frac{n-1}{n+3}\frac{\psi\psi''}{\psi'^2}\to c_2>-1$$

бўлади. У ҳолда (1.12) тенгламанинг $(m=0)\,x\to+\infty$ қийматида давом эттирилувчи асимптотик ечимига эга бўламиз,

$$y(x)\sim\frac{2(n-1)}{(n-1)^2}\left(1+c_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left[\psi\left(x,x_0\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}}.$$

Исбот. (1.12) тенгламанинг ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз,

$$y(x)=\frac{2(n-1)}{(n-1)^2}\left[\psi\left(x,x_0\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}}\omega\left(\tau\right),\ \tau\left(x\right)=\ln\psi\left(x,x_0\right), \qquad (1.15)$$

бу ерда,

$$\psi\left(x,x_0\right)=\int_{x_0}^{x}g^{\frac{1}{2}}(t)dt\ .$$

У ҳолда (1.12) тенглама $b_1\left(\tau\right)=\frac{n+3}{n-1}+\frac{\psi\psi''}{\psi'^2}$ билан, (1.14) кўринишда бўлади

$$b_2\left(\tau\right)=\mu\left[1+\frac{1}{\mu}\left(p(x)-\frac{2\psi''}{\left(n-1\right)\psi}\right)\frac{\psi^2}{\psi'^2}\right],\ b_3\left(\tau\right)=\mu=\frac{2(n+1)}{\left(n-1\right)^2}\ .$$

Теорема 1.1 шартларига мувофиқ лемма 1.2 шартлари ва $\tau\to+\infty$, $\omega\sim\left(1+c_1\right)^{\frac{1}{n-1}}$ бўлади. (1.15) асосан теорема 1.3 ўринли.

$0<n<1,\ m=0$ шартлар бажарилган (1.12) тенгламанинг асимптотик ечими ВКБ-ечим кўринишдаги ва Харди формасидаги ВКБ-ечимни қуйидаги леммага мувофиқ эга бўламиз [10].

Лемма 1.1. Агар (1.14) тенглама учун: $b_1(\tau),\ b_2(\tau)$ абсолют узлуксиз $[0,+\infty)$; чекли оралиқда, $x\to+\infty$ $b_1(\tau)\sim\ b_1\tau^{\sigma}$, $b_1'(\tau)\sim\ b_1\sigma\tau^{\sigma\text{-}1}$, $b_2(\tau)\sim b_2$ бу ерда $b_2'(\tau)\in L\left(0,\infty\right)$, $0\le\sigma\le1$, $-\infty<b_1<0$, $0<b_2<+\infty$ ва $b_3\sim1$.

Агар тенглама,

$$z''\left(\tau\right)+b_2z'\left(\tau\right)+b_3z\left(\tau\right)=0$$

тебранувчи ечимга эга бўлмаса (агар $\sigma=0$, $b_1^2-4b_2>0$булади, агар σ=1, $b_1+b_2>0$ бўлади), у ҳолда иҳтиёрий ўринли, тебранмайдиган ечими учун (1.14) тенглама $\omega(\tau)$ эга бўлади, ё $|\omega\left(\tau\right)|\sim b_2^{\frac{1}{1\text{-}n}}$, ё $\omega(\tau)\sim z(\tau)\sim\infty$, бу ерда $z(\tau)$— оҳирги тенгламанинг иҳтиёрий ечими.

Лемма 1.4. (1.14) тенгламанинг коэффиценти лемма 1.3 шарти бажарилса, $0\le\sigma\le1$, $0\le b_1$, $b_2<+\infty$. У ҳолда иҳтёрий тебранмайдиган ечими (1.14) тенглама қуйидаги кўрнига эга,

$$|\,\omega\left(\tau\right)|\sim b_2^{1/1\text{-}n}\,.$$

тенглама $x\to+\infty$ интилганда ВКБ-ечим кўринишдаги асимптотик ечимига эга,

$$A\left[\phi'\left(x,x_0\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\left[1\pm\frac{1-n}{\sqrt{2\left(n+1\right)}}\phi\left(x,x_0\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}},$$

бу ерда, $\phi\left(x,x_0\right)=\int\limits_{x_0}^{x} g^{\frac{2}{n+3}}(t)dt$, $n\to 1$, ВКБ-ечимга ўтиш маълум бўлган чизиқли тенгламалар усули ёрдамида [8]. (1.12) тенгламанинг маҳсус асимптотик ечими $(m=0)$ ВКБ-ечим Харди формасида, [8] мавжудлиги исботланган.

Теорема 1.2. Агар $\left(x_0,\infty\right)$, $p\left(x\right)\in C\left[x_0,\infty\right)$ лигида $0<g(x)\in C^1\left(x_0,\infty\right)$, $g'\left(x\right)>0$ булади. У ҳолда (1.12) тенгламанинг маҳсус ечими $x\to x_1$, $\alpha\int\limits_{x_0}^{x} g^{\frac{1}{2}}(t)dt=c$ муносабатдан аниқланувчи, асимптотик кўринишга эга,

$$y(x)\sim\left[c-\alpha\psi\left(x,x_0\right)\right]^{\frac{2}{1-n}},\ \psi\left(x,x_0\right)=\int\limits_{x_0}^{x} g^{\frac{1}{2}}(t)dt,$$

бу ерда ўзгармас $c>0$, $\alpha=\left(1-n\right)/2\left(n+1\right)$.

Исбот. Харди формасидаги ВКБ-ечим бу ҳолда қуйидаги кўринишга эга,

$$\bar{y}(x)=\left[c-\alpha\psi\left(x,x_0\right)\right]^{\frac{2}{1-n}}$$

x_1 нуқтанинг чап атрофида $\bar{y}(x)$ функция (1.12) тенгламанинг маҳсус асимптотик ечимига эга. (1.12) тенгламанинг ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз,

$$y(x)=\bar{y}(x)\omega\left(\tau\right),\ \tau=-\ln\left(c-\alpha\psi\left(x,x_0\right)\right).$$

Сўнг, (1.12) тенгламада $\omega\left(\tau\right)$ ни $y(x)$ ўрнига қўйсак, қуйидагига эга бўламиз,

$$\omega_{\tau\tau}-\left[1-\frac{1}{\alpha}\frac{\psi''\left(x,x_0\right)}{\psi'^2\left(x,x_0\right)}\exp(-\tau)\right]\omega'+\frac{1}{\alpha^2}\left(\omega-\omega^n\right)+\frac{2\exp\left(-\tau\right)}{\alpha\left(1-n\right)}\frac{\psi''\left(x,x_0\right)}{\psi'^2\left(x,x_0\right)}\omega=0.$$

$\psi\left(x,x_0\right)$ функция $x\to x_1$, $\tau\to+\infty$ аниқланган. Демак, биз лемму 1.5 фойдаланамиз. $\tau\to+\infty$ бўлганда, $\omega\sim 1$ эгамиз, 1.2 теоремани ўринлигини исботлайди.

$g(x)$ дан катта силлиқликни талаб этсак, масалан $0<g\left(x\right)\in C^2\left(x_0,\infty\right)$, исботланади, (1.12) тенглама $x\to x_1$ маҳсус ечим, асимптотикага эга бўламиз,

$$y(x)\sim \mathrm{g}^{-\frac{1}{n+3}}(x)\left[b+\alpha\int\limits_{x_0}^{x} g^{\frac{2}{n+3}}(t)dt\right]^{\frac{2}{1-n}}.$$

x_1 нуқта $\alpha\int\limits_{x_0}^{x} g^{\frac{2}{n-1}}(t)dt=-b$ тенгламани ечиш орқали топилади.

Бундан, $b=1,\ n\to 1,$

$$y(x)\sim g^{-\frac{1}{4}}(x)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} g^{\frac{1}{2}}(t)dt\right),$$

яна чизиқли тенгламалар ҳолатларда маълум бўлган ВКБ-ечимга эга бўламиз. Демак, ВКБ-ечим (1.12) тенгламанинг яқинлашувчи ҳусусий ечим қаторидан $m=0$ қопловчи хоссаларига ўтади, яъни етарлича катта синф учун $g(x)$ ечим $x\to x_1(x_1\le+\infty)$ қаралаётган функция айнан ВКБ-ечимга интилади.

Энди, (1.4) тенгламанинг ВКБ-ечим кўринишдаги асимптотикани текширишга ўтамиз,

$$y''=\beta g(x)y^n y'^m,\ x\in[a,b),\ (b\le+\infty), \tag{1.16}$$

бу ерда, $m,n\in R$, $m\ne 2,\ n\ne -1,\ m-n\ne 3,\ m+n\ne 1,\ \beta=\pm 1.$ (1.16) тенглама-нинг Харди формасидаги ВКБ-ечим асимптотик кўриншдаги ечим В. Евтуховым томонидан аниқланган [8].

Аввало, (1.16) тенгламанинг асимптотик ечимини аниқлашга ўтамиз, дифференциал тенгламалар системасини қараймиз,

$$\begin{cases} u_1'=f_1(\tau)+c_{11}(\tau)u_1+c_{12}(\tau)u_2+g_1(\tau)X_1(\tau,u_1,u_2) \\ u_2'=f_2(\tau)+c_{21}(\tau)u_1+c_{22}(\tau)u_2+g_2(\tau)X_2(\tau,u_1,u_2) \end{cases} \tag{1.17}$$

бу ерда функция $f_i:[\tau_0,+\infty)\to R$, $g_i:[\tau_0,+\infty)\to R(i=1,2)$,

$c_{ij}:[\tau_0,+\infty)\to R(i,j=1,2)$ узлуксиз, ҳамда

$$\Omega=[\tau_0,+\infty)\times D=\{(u_1,u_2):|u_1|\le\delta,|u_2|\le\delta,0<\delta\in R\},$$

соҳада ўзгарувчилар $X_i:\Omega\to R(i=1,2)$ узлуксиздир.

Фараз қилайлик, X_i $(i=1,2)$ функция Липщиц шартини қаноатлантирсин,

$$\left|X_i(\tau,u_1^0,u_2^0)-X_i(\tau,u_1^1,u_2^1)\right|\le\varepsilon\sum_{\ell=1}^{2}\left|u_\ell^0-u_\ell^1\right|$$

бу ерда, $0<\varepsilon\in R$, $\tau\ge\tau_0$ ва (u_1^0,u_2^0), (u_1^1,u_2^1) ~ D соҳадаги ихтиёрий нуқталар, ҳамда $X_i(\tau,0,0)\equiv 0(i=1,2)$. Қуйидаги тасдиқ ўринлидир.

Теорема 1.1. Фараз қилайлик X_i $(i=1,2)$ функцияси хоҳлаган $\varepsilon>0$ да келтирилган Липшиц шартини қаноатлантиради, $f_i,\ g_i,\ c_{ij}$ $(i,j=1,2)$ функциялари эса

а) $\lim\limits_{\tau\to+\infty} f_i(\tau)=0$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} g_i(\tau)=const(i=1,2)$;

б) $\lim\limits_{\tau\to+\infty} c_{ij}(\tau)=c_{ij}^0$, $|c_{ij}^0|<+\infty (i,j=1,2)$;

шартларини қаноатлантиради.

в) ξ_1, ξ_2 характеристик тенгламанинг ечимлари

$$\det\left(c_{ij}^0-\xi\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^2=0,$$

бу ерда δ_{ij}- Корнекер символи нольга тенг эмас ҳақиқий =исмларга бўлакларга эга. У ҳолда (1.17) тенгламалар системаси $\tau\to+\infty$ да нольга интиладиган ягона $\left(u_1(\tau),u_2(\tau)\right)$ ҳақиқий ечимларга эга бўлади. Агарда, Re $\xi_i<0$ дан ташқари битта i учун, (1.17) тенгламалар системаси учун $\tau\to+\infty$ да нольга интиладиган чексиз ҳақиқий ечимлар тўплами мавжуд.

Теорема 1.4. Фараз қилайлик, X_i $(i=1,2)$ функциялари хоҳлаган $\varepsilon>0$да Липшиц шартини қаноатлантиради, f_i, g_i, c_{ij} $(i,j=1,2)$ функциялари

а) $c_{ii}(\tau)\neq0$, $\int\limits_{\tau_0}^{+\infty}|c_{ii}(\tau)|\,d\tau=+\infty(i=1,2)$;

б) $\lim\limits_{\tau\to+\infty} f_i(\tau)/c_{ii}(\tau)=0$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty} g_i(\tau)/c_{ii}(\tau)=const(i=1,2)$;

в) $\lim\limits_{\tau\to+\infty} c_{21}(\tau)/c_{22}(\tau)=b_{10}$, $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\dfrac{c_{12}(\tau)c_{21}(\tau)}{c_{11}(\tau)c_{22}(\tau)}=b_{20}$,

шартларини қаноатлантиради, бу ерда $|b_{10}|<1$, $|b_{20}|<1$. У ҳолда (1.17) тенгламалар системаси $\tau\to+\infty$ да нольга интиладиган ҳеч бўлмаганда ҳақиқий $\left(u_1(\tau),u_2(\tau)\right)$ ечими мавжуд.

$$\varphi(x_0,x)=\int\limits_{x_0}^{x} g^{2/(3+n-m)}(t)\,dt$$

белгилашини киритамиз.

$\phi(x_0,b)<+\infty$ ҳолатини қара ймиз. $k>1$ да $\dfrac{2m_1}{2m_2-1}$ га тенг m ни, $0<k<1$ да $\dfrac{2m_1-1}{2m_2+1}$, $k<0$ да $\dfrac{m_1}{2m_2+1}$ сонларини танлаймиз, бу ерда m_1, m_2 бутун сонлар, $k=\dfrac{m-2}{m+n-1}$.

Теорема 1.5. Қуйидаги шартлар бажарилсин

$$A(\tau)\neq k,\ \lim_{\tau\to+\infty}A(\tau)=a_0,\ |a_0|<+\infty,\ a_0\neq k \tag{1.18}$$

бу ерда

$$A(\tau)=A\left(\tau\left(x\right)\right)=-\frac{1}{2\gamma_1}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-2}\left[c-\gamma_1\varphi\right];\ c=const>0,$$

$$\gamma_1=[(-k)^{-m}k(k-1)]^{\frac{1}{m-2}}>0,\ \ \tau=-\ln[c-\gamma_1\varphi\left(x_0,x\right)]$$

$$k-a_0\neq(m-1)(k+a_0-1),\tag{1.19}$$

$$k-a_0=(m-1)(k+a_0-1)\ \text{ и }\ (k-a_0)(k+a_0-1)(m+n-1)>0$$

ва муносабатларидан бири.

У ҳолда (1.16) тенгламанинг ечимлари ВКБ ечимларининг мавжудлиги учун

$$y(x)=v_0\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[c-\gamma_1\phi\left(x_0,x\right)\right]^k(1+0(1)),\tag{1.20}$$

асимптотикаси билан

бу ерда $v_0=\gamma_1^{-k}\,|(1-k-a_0)(a_0-k)^{1-m}|^{\frac{1}{m+n-1}}$

$$\beta(a_0-k)^{1-m}(1-k-a_0)>0\tag{**}$$

бўлганда, зарурли ва етарли бўлсин.

Бундан асимптотик тушунча (а.т.) ўринли бўлади.

$$y'(x)=v_0\gamma_1(a_0-k)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}\left[c-\gamma_1\varphi\right]^{k-1}(1+0(1)).\tag{1.21}$$

Исбот. Дастлаб (**) шартининг зарурлилигини исботлаймиз.

$$y(x)=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[c-\gamma_1\varphi\left(x_0,x\right)\right]^k v\left(\tau\right),\qquad \tau\left(x\right)=-\ln\left[c-\gamma_1\varphi\left(x_0,x\right)\right]\tag{1.22}$$

алмаштиришларини киритамиз. (1.16) тенгламани

$$v''+\left(1-2k\right)v'+\left[k(k-1)+A_1\left(\tau\right)\right]v=\alpha\gamma_1^{m-2}v^n\left[v'-(k-A(\tau))v\right]^m,\tag{1.23}$$

турига келтирамиз, бу ерда $A_1(\tau)=A'(\tau)+A(\tau)-A^2(\tau)$. Буерда $k\neq0,\ k\neq1/2$ ва $k\neq1$ эканлигини белгилаб ўтамиз. Умумийликни бўзмаган ҳолда, $\phi\left(x_0,b\right)=c/\gamma_1$ эканлигини ҳисобга оламиз. $\tau'(x)>0$, $\lim\limits_{x\to b}\tau(x)=+\infty$ бўлса, у ҳолда (1.16) тенгламанинг ечимини ўрганиш (1.23) тенгламанинг $\upsilon(\tau)$ ечимларини ўрганиш билан тенг кучли, ҳарбир баъзибир $\left[\tau_0,+\infty\right)$ ораликда қуйидаги хоссаларга эга бўлади

$$\upsilon\left(\tau\right)>0,\upsilon'\left(\tau\right)-(k-A(\tau))\upsilon\left(\tau\right)\neq0.$$

(1.18) шартини ҳисобга олиб, (1.23) тенгламанинг шундай $\upsilon(\tau)$ ечими нольдан фарқли $\tau \to +\infty$ да фақат (**) тенгсизлигининг бажарилганда охирги чеги υ_0 га эга бўлади. Ҳақиқатда эса, бу ечимларнинг хоҳлаганини (1.23)га қўйиб ва

$$u(\tau) = \upsilon'(\tau) - \left(k - A(\tau)\right)\upsilon(\tau),$$

деб фараз қилиб,

$$u' \equiv \beta\gamma_1^{m-2}\upsilon^n u^m - \left[1 - k - A(\tau)\right]u.$$

айниятига эга бўламиз.

Охирги муносабатнинг ўнг томонига мос келувчи ёрдамчи функцияни қараймиз

$$F(c_0, \tau) = \beta\gamma_1^{m-2}\upsilon^n(\tau)c_0^m - [1 - k - A(\tau)]c_0$$

бу ерда c_0 – ҳақиқий сон.

$$\beta\gamma_1^{m-2}\upsilon_0^n c_0^m + (k + \alpha_0 - 1)c_0 = 0$$

тенгламани қаноатлантирадиган c_0 қийматидан фарқли, ҳар бир c_0 қийматида

$F(c_0, \tau)$ функцияси баъзибир $[\tau_0, +\infty)$ оралиқда ўз ишорасини сақлайди. Шундай қилиб, ҳарбир фиксирланган қиймат ва $u = c_0$ учун $[\tau_0, +\infty)$ оралиқда $u'(\tau) > 0$ бўлади ёки $u'(\tau) < 0$ бўлади. Шунинг учун $u(\tau)$ функцияси учун $[\tau_0, +\infty)$ оралиқда лимити мавжуд. У ҳолда $\tau \to +\infty$ бўлганда $u(\tau) \square (\alpha_0 - k)\,\upsilon(\tau) \sim \upsilon_0(\alpha_0 - k)$. Бундан ва $u(\tau)$ учун ифодасидан (τ) функциясининг ҳосиласи $\tau \to +\infty$ да фақат нольга тенг охирги лимитга эришади. Шундай экан,

$$\lim_{\tau \to +\infty} u'(\tau) = \lim_{\tau \to +\infty} \left\{\beta\gamma_1^{m-2}\upsilon^n(\tau)u^m(\tau) - \left[1 - k - A(\tau)\right]u(\tau)\right\} = 0$$

ёки

$$\beta\gamma_1^{m-2}\upsilon_0^{m+n}(\alpha_0 - k)^m + \upsilon_0(\alpha_0 - k)(k + \alpha_0 - 1) = 0.$$

Бундан кейин

$$\upsilon_0^{m+n-1} = \beta\gamma_1^{2-m}(\alpha_0 - k)^{1-m}(1 - k - \alpha_0)$$

формуласини оламиз. $\upsilon_0 > 0$ бўлганда, у ҳолда охирги тенгламадан (**) шарти (1.22) учун зарурли. (1.22) алмаштириш эвазига ва $u(\tau)$ га боғлиқ ва $\upsilon(\tau)$ (**) шартининг зарурлиги исботланди.

(**) шартининг бажарилган деб фараз қиламиз. Алмаштиришлар ёрдамида

$$\upsilon(\tau)=\upsilon_0\left[1+u_1(\tau)\right],\upsilon^1(\tau)+\left(A(\tau)-k\right)\upsilon(\tau)=\upsilon_0\left(a_0-k\right)\left[1+u_2(\tau)\right]$$

тенгламалар системасига келамиз

$$\begin{cases} u_1'=f_1(\tau)+c_{11}(\tau)u_1+c_{12}(\tau)u_2, \\ u_2'=-f_1(\tau)+c_{21}(\tau)u_1+c_{22}(\tau)u_2+(1-k-a_0)X(u_1,u_2), \end{cases} \quad (1.17)$$

бу ерда

$$f_1(\tau)=a_0-A(\tau);c_{11}(\tau)=k-A(\tau);$$

$$c_{12}(\tau)\equiv a_0-k;c_{21}(\tau)\equiv n(1-k-a_0);$$

$$c_{22}(\tau)=A(\tau)-a_0-(m-1)(k+a_0-1);$$

$$X(u_1,u_2)=\left[1+u_1\right]^n\left[1+u_2\right]^m-\left[1+nu_1+mu_2\right].$$

Бу тенгламалар системасини $\Omega=[\tau_0,+\infty)\times D,$ $D=\left\{(u_1,u_2):|u_1|\le\frac{1}{2},|u_2|\le\frac{1}{2}\right\}$ соҳада қараймиз. Демак, $|u_1|+|u_2|\to 0,$да $\frac{\partial}{\partial u_i}\times X(u_1,u_2)\to 0$, у ҳолда D соҳада $X(u_1,u_2)$ функцияси хоҳлаган $\varepsilon>0$ да Липшиц шартини қаноатлантиради. $X(0,0)\equiv 0$ деб белгилаймиз. (1.18) дан 1.3 теореманинг а) ва б) шартлари бажарилади, фақат в) шартини ўрганиш қолади.

«Чеклидаги характеристик тенгламани» қараймиз

$$\det\left(c_{ij}^0-\xi\delta_{ij}\right)_{i,j=1}^2=0,$$

бу ерда

$$c_{11}^0=k-a_0,c_{12}^0=-c_{11}^0,c_{21}^0=-n(k+a_0-1),c_{22}^0=-(m-1)\times\left(k+a_0-1\right) \quad (1.17')$$

тенгламалар системасининг чизиқли бўлимига мос келувчи). Бу тенглама

$$\xi_{1,2}=0,5\left[k-a_0-(m-1)(k+a_0-1)\right]\pm$$

$$\pm\sqrt{0,25\left[k-a_0-(m-1)(k+a_0-1)\right]^2+(k-a_0)(k+a_0-1)(m+n-1)}$$

ечимларга эга бўлади. (1.19) муносабатларни ҳисобга олиб ξ_1 ва ξ_2 ечимлари учун мумкин бўлган ҳолатларни ўрганамиз.

А) $\left(k-a_0\right)\left(k+a_0-1\right)(m+n-1)>0$, яъни ξ_1 ва ξ_2 ечимлари ҳақиқий ва ҳар хил ишорада. 1.3 теоремага таяниб (1.17') тенгламалар системаси $\tau\to+\infty$да нольга интиладиган $\left(u_1(\tau),u_2(\tau)\right)$, чексиз ҳақиқий ечимлар тўпламига эга бўлади.

Б) $k-a_0>(m-1)(k+a_0-1)$ ва $\left(k-\alpha_0)(k+\alpha_0-1)(m+n-1)<0\right)$. ξ_1 ва ξ_2 ечимлари мусбат ҳақиқий бўлимларга эга. Шунинг учун 1.3 теореманинг асосида (1.17') тенгламалар системасига $\tau \to +\infty$да нольга интиладиган $\left(u_1(\tau), u_2(\tau)\right)$, энг бўлмаганда ягона ҳақиқий ечим мавжуд бўлади.

B) $k - a_0 < (m-1) \times (k + a_0 - 1)$ ва $\left(k - a_0\right)(k + a_0 - 1)(m + n - 1) < 0$. Бу ҳолатда ξ_1 ва ξ_2 ечимлари манфий ҳақиқий бўлимларга эга. 1.1 теоремага таяниб,

$$\left|u_i(\tau)\right| < \varepsilon, i = 1,2$$

бошланғич шартини қаноатлантирувчи $\tau \to +\infty$да нольга интиладиган шундай $\tau_1 \ge \tau_0$ ва $\varepsilon > 0 (0{,}5 > \varepsilon)$ ўзгармаслар мавжуд бўлсин.

Шунинг учун, $u_1(\tau), u_2(\tau)$ ва (1.22) ни $\upsilon(\tau)$ билан боғловчи алмаштиришларни ҳисобга олиб, (**) шартининг етарлилиги исботланганлигини тасдиқлаймиз.

Теорема 1.6. (1.18) шарти ва $\left(k - a_0\right) = (m-1)(k + a_0 - 1)$ ва $\left(k - a_0)(k + a_0 - 1)(m + n - 1\right) < 0$ муносабатлари бажарилсин. У ҳолда ВКБ-ечимнинг мавжудлиги учун (1.16) тенгламанинг (1.20) турдаги ечими (**) шартининг бажарилиши етарли. Агарда (**) шарти билан бир қаторда

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau^2 \left(a_0 - A(\tau)\right) = 0$$

ўринли бўлса, у ҳолда (1.16) тенгламаси ВКБ-ечимга эга бўлади (1.20) ва (1.21) а.т ни ҳисбга олиб.

Исбот. Бу теореманинг исботлаш учун (1.18) шарт бажарилганда, (1.16) тенгламанинг (1.20) ва (1.21) ўринли бўлгандаги ВКБ ечимнинг мавжуд былишини кырсатиш етарли.

$k - a_0 = (m-1)(k + a_0 - 1)$ ва $(k - \alpha_0)(k + \alpha_0 - 1)(m + n - 1) < 0$ муносабатларидан «чегаравий характеристик тенглама» нинг ξ_1 ва ξ_2 ечимлари мавҳум яъни Reξ_1=Reξ_2=0 келиб чи=ади.

Шунинг учун

$$\begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \sin\lambda\tau - \dfrac{\frac{\sin\lambda\tau}{\lambda}}{c_{11}^0} \cos\lambda\tau & \cos\lambda\tau + \dfrac{\frac{\cos\lambda\tau}{\lambda}}{c_{11}^0} \sin\lambda\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(\tau) \\ \omega_2(\tau) \end{pmatrix},$$

алмаштириши билан u_1, u_2 учунтенгламалар системасига

$$\begin{cases} \omega_1' = \tilde{f}_2(\tau) + \tilde{c}_{11}(\tau)\omega_1 + \tilde{c}_{22}(\tau)\omega_2 + c_{11}^0 (1 - k - \alpha_0) \dfrac{\cos\lambda\tau}{\lambda\tau} Y(\tau, \omega_1, \omega_2) \\ \omega_2' = \tilde{f}_2(\tau) + \tilde{c}_{21}(\tau)\omega_1 + \tilde{c}_{22}(\tau)\omega_2 + c_{11}^0 (1 - k - \alpha_0) \dfrac{\sin\lambda\tau}{\lambda\tau} Y(\tau, \omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

турига келамиз Буерда

$$\lambda=\sqrt{(k-\alpha_0)(k+\alpha_0-1)(m+n-1)},$$

$$f_1(\tau)=\tau(\alpha_0-A(\tau))\left(\sin\lambda\tau+2c_{11}^0\lambda^{-1}\cos\lambda\tau\right);$$

$$\tilde{c}_{11}(\tau)=\frac{1}{\tau}+\mu(\tau);\mu(\tau)=c_{11}^0\lambda^{-1}(\alpha_0-A(\tau))\left(\sin 2\lambda\tau+\lambda(c_{11}^0)^{-1}\cos 2\lambda\tau\right);$$

$$\tilde{c}_{12}(\tau)=(\alpha_0-A(\tau))\left(\sin 2\lambda\tau+2c_{11}^0\lambda^{-1}\cos^2\lambda\tau\right);$$

$$\tilde{f}_2(\tau)=\tau(\alpha_0-A(\tau))\left(\cos\lambda\tau-2c_{11}^0\lambda^{-1}\sin\lambda\tau\right);$$

$$\tilde{c}_{21}(\tau)=(\alpha_0-A(\tau))\left(\sin 2\lambda\tau-2c_{11}^0\lambda^{-1}\sin^2\lambda\tau\right);$$

$$\tilde{c}_{22}(\tau)=\frac{1}{\tau}-\mu(\tau);$$

$$Y(\tau,w_1,w_2)=\tau^2\left\{\left[1+\frac{\sin\lambda\tau}{\tau}\omega_1+\frac{\cos\lambda\tau}{\tau}\omega_2\right]^n\right.$$

$$\left[1+\frac{1}{\tau}\left(\sin\lambda\tau-\frac{\lambda}{c_{11}^0}\cos\lambda\tau\right)\omega_1+\frac{1}{\tau}\left(\cos\lambda\tau+\frac{\lambda}{c_{11}^0}\sin\lambda\tau\right)\omega_2\right]^m-$$

$$\left.-\left[1+\frac{1}{\tau}\left((m+n)\sin\lambda\tau-\frac{\lambda m}{c_{11}^0}\cos\lambda\tau\right)\omega_1+\frac{1}{\tau}\left((m+n)\cos\lambda\tau+\frac{\lambda m}{c_{11}^0}\sin\lambda\tau\right)\omega_2\right]\right\}.$$

Энди

$$Q=\left\{(\tau,\omega_1,\omega_2):|\omega_1|\le\frac{1}{2},|\omega_2|\le\frac{1}{2},\tau\ge 1\right\}$$

соҳадаги охирги тенгламалар системаси учун $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\tau^2\times(\alpha_0-A(\tau))=0$ шарти бажарилганда 1.4 теореманинг барча шартлари бажариладиганлигини осон кўрамиз.

u_1, u_2, ва $\upsilon(\tau), y(x)$ни боғловчи алмаштиришлар эвазига 1.6 теореманинг тасдиқини туғрилигига осон эришамиз. Теорема исботланди.

Изоҳ 1.2. Хоҳлаган (1.16) тенгламанинг (1.20) туридаги ВКБ- ечими $x\to b$да а.т бўлиши мумкин.

$$y(x)=\upsilon_0\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[c-\gamma_1\varphi(x_0,x)\right]^k\times\left[(m+n-1)(k+\alpha_0-1)\frac{I(x,\tau)}{I'(x,\tau)}\right]^{\frac{1}{1-m-n}}(1+0(1))$$

бу ерда

$$I(x,\tau)=\int_x^{\tau}\exp\left[(1-m-n)\int_{\tau_0}^{t}(1-k-A(s))ds\right]dt;$$

$$\chi=\begin{cases}\tau_0, I(\tau_0,+\infty)=+\infty\\ +\infty, I(\tau_0,+\infty)<+\infty.\end{cases}$$

Исбот. $u(\tau)=\upsilon'(\tau)-(k-A(\tau))\upsilon(\tau)$ ва $u(\tau)\sim(\alpha_0-k)\upsilon(\tau)\sim\upsilon_0(\alpha_0-k)$ $\tau\to+\infty$ дан $\tau\to+\infty$ да $\upsilon(\tau)=\dfrac{u(\tau)}{\alpha_0-k}(1+0(1))$га эга бўламиз. $u'=\beta\gamma_1^{m-2}\upsilon^n u^m-[1-k-A(\tau)]u$ нинг ўнг томонига $\upsilon(\tau)$ни қўйиб

$$z'+(1-k-A(\tau))z=\alpha\gamma_1^{m-2}(\alpha_0-k)^{m-1}z^{m+n}(1+0(1)),$$

ни оламиз, бу ерда $z(\tau)=u(\tau)/(\alpha_0-k)$.

Бу тенгламани интеграллаб ва $\upsilon(\tau)=\dfrac{u(\tau)}{\alpha_0-k}(1+0(1))$ (1.22), эканлигини ҳисобга олиб керак бўлган а.т ни оламиз.

$\varphi(x_0,b)=+\infty$ ҳолати. Буерда m, $m=p/q$ туридаги сон, бу ерда q — тоқ, p — жуфт, агарда $k<0$, ва хоҳлаган, агарда $k>1$ бўлса. Бундан ташқари, $k\in[0,1]$. Қуйидаги тасдиқларни келтирамиз.

Теорема 1.7. Агарда қуйидаги шартлар бажарилса

$$B(t)\neq -k, \lim_{t\to+\infty}B(t)=b_0, |b_0|<+\infty, b_0\neq k, =0, \tag{1.24}$$

бу ерда

$$B(t)=B(t(x))=-\frac{1}{2\gamma_2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}\left[c_1+\gamma_2\varphi(x_0,x)\right],$$

$$c_1=const>0, \gamma_2=\left[k^{1-m}(k-1)\right]^{\frac{1}{m-2}},$$

$$t(x)=\ln\left(c_1+\gamma_2\varphi(x_0,x)\right),$$

ва $k+b_0\neq(m-1)(k-b_0-1); k+b_0=(m-1)\times(k+b_0-1)$ ва $(k+b_0)(k-b_0-1)(m+n-1)>0$, шартларидан бири, унда (1.16) тенгламанинг мавжудлиги учун ВКБ ечим

$$y(x)=\omega_0\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[c_1+\gamma_2\varphi(x_0,x)\right]^k(1+0(1)). \tag{1.25}$$

турида бўлади, бу ерда $w_0=\gamma_2^{-k}\left|(k-b_0-1)(k+b_0)^{1-m}\right|^{\frac{1}{m+n-1}}$,

$$\beta(k-b_0-1)(k+b_0)^{1-m}>0, \tag{***}$$

бўлганда зарурли ва етарли, ҳарбир шундай ечимлар биринчи ҳосила учун а.т ўринли бўлади.

$$y'(x)=\omega_0\gamma_2(k+b_0)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}\left[c_1+\gamma_2\varphi(x_0,x)\right]^{k-1}(1+0(1)).$$

Теорема 1.8. (1.24), шарти бажарилган бўлсин $k+b_0=(m-1)(k+b_0\ -1)$ ва $(k+b_0)(k-b_0-1)(m+n-l)<0$. У ҳолда (1.16) тенгламанинг (1.25) туридаги ВКБ ечим, (***) шартининг бажарилиши зарурли.

(***) билан бир қаторда $\lim\limits_{\tau\to+\infty}t^2\left(b_0-B(t)\right)=0$ ўринли бўлса у ҳолда (1.16) тенглама (1.25) турдаги ВКБ ечимга эга бўлади ва бундай ечимнинг биринчи ҳосиласи 1.7 теоремасидек а.т ўринли бўлади.

Следствие 1.1. $x\to b$ да хоқлаган (1.16) тенглама (1.25) турдаги ВКБ ечимга эга.

$$y(x)=\omega_0\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[c_1+\gamma_2\varphi(x_0,x)\right]\times\left[(k-b_0-1)(1-m-n)\frac{I(\mu,t)}{I'(\mu,t)}\right]^{\frac{1}{1-m-n}}\left(1+0(1)\right),$$

бу ерда

$$I(\mu,t)=\int\limits_{\mu}^{t}\exp\left[(1-m-n)\int\limits_{t_0}^{s}\left(k-1-B(\theta)\right)d\theta\right]ds,$$

$$\mu=\begin{cases}t_0, I(t_0,+\infty)=+\infty\\ +\infty, I(t_0,+\infty)<+\infty\end{cases}$$

Келтирилган тасдиқларнинг исботи учун қуйидаг алмаштиришни қҳллаймиз.

$$y(x)=\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[c_1+\gamma_2\varphi(x_0,x)\right]^{k}w(t),$$

$$t=t(x)=\ln\left[c_1+\gamma_2\varphi(x_0,x)\right]$$

$t'(x)>0$, $\lim\limits_{x\to b}t(x)=+\infty$ ларни ҳисобга олиб (1.16) тенгламанинг ечимини ўрганиб $\omega(t)$ ечимни ўрганишга келамиз

$$\omega''-(1-2k)\omega'+\left[k(k-1)+B'(t)-B(t)-B^2(t)\right]\omega=\alpha\gamma_2^{m-2}\omega^n\left[\omega'+\left(k+B(t)\omega\right)\right]^m,$$

$(t_0,+\infty)$ баъзибир оралиқдаги ҳарбири қуйидаги хоссаларга эга бўлади:

$$\omega(t)>0,\ \omega'(t)+(k+B(t))\omega(t)\neq0.$$

Кейин, $t\to+\infty$ да ω_0 нольдан фарқли охирги лимитга эга бўлувчи охирги тенгламанинг ечимини мавжудлигини текширилади.

2.1 Таққослаш назарияси. Тенгсизликларни дифференциаллашда Чаплыгин усули.

Таққослаш принципига асосланган таққослаш теоремалари турли ночизиқли масалар синфини, ҳамда оддий дифференциал тенгламаларни ва ҳусусий ҳосилали тенгламаларни, айниқса ночизиқлиларини тадқиқ қилишда муҳим ўрин тутади. Мазкур теоремалар ушбу ёндашишнинг ночизиқли масаларни тадқиқ қилишда дифференциал тенгсизликлар методи деб ҳам номланади ва у мазмун жиҳатдан чекли ночизиқли тенгламалар ечимининг Чаплигин усули ғояларини ривожлантиришдан иборатдир. Мазкур усул, аввал биринчи тартибли скаляр оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи, сўнг ночизиқли параболик типдаги масалалар мисолида намоён этилади. Бу масала биринчи бўлиб, Чаплигин томонидан ўтган асрнинг 20 йиллари бошларида қаралган бўлиб, ночизиқли дифференциал тенгламалар назариясининг самарали усулларидан бирининг бошланишига олиб келган.

Энди, Коши масаласи мисолида кўриб чиқамиз

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = f(t,y),\ 0 \le t \le T, \\ &y(0) = y^0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Бунинг муҳим жиҳати шундаки, масаланинг берилишига кирувчи T - фиксирланган оралиқ вақтда қаралишидир. Бунда, (2.1) масала математик модель сифатида иштирок этади. Классик теореманинг мавжудлик ва ягоналиги локалдир, яъни етарлича кичик бошланғич нуқта атрофида ечимнинг мавжудлигини кафолатлайди [1].Теоремани келтирамиз.

Теорема 1. *Агар $f(t,y)$ функция $D = \{0 \le t \le T, |y - y^0| \le b\}$ оралиқда аниқланган ва узуликсиз бўлса, у ҳолда $\exists M = \max\limits_D |f(t,y)|$ бўлади. Шунинг дек, $f(t,y)$ функция D соҳада Липщиц шартини y ўзгарувчи бўйича $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le N|y_1 - y_2|$ қаноатлантирсин. У ҳолда, (2.1) Коши масала $0 \le t \le \min(T, \frac{b}{M})$ оралиқда ягона ечимга эга.*

Ҳақиқатдан, теорема 1 катта M да ечимнинг мавжудлик оралиғида қўпол баҳо беради. Бу сингуляр қўзғалувчи масалаларда яққол кўринади, яъни ўнг томони $\frac{1}{\mu} f(t,y)$ эга бўлганда. Бу ерда μ - кичик параметр. Теоремага асосан, қуйдаги $H \sim \mu$ баҳо бўйича ечимнинг оралиқ мавжудлигидир. Яна, маълум бир теореманинг тузилишини келтирамиз. Бу теореманинг исботи теорема 1 дагидек бажарилади, [2].

Теорема 2. *Агар* $f(t,y)$ *функция аниқланган, узуликсиз ва* $\pi=\{0\le t\le T, y\in R\}$ *да у ўзгарувчи бўйича Липщиц шарти бажарилсин. У ҳолда, (2.1) Коши масала* $0\le t\le T$ *оралиқда ягона ечимга эга.*

Теорема 2 локал эмас, $f(t,y)$ функциялар синфида теорема шарти бажарилиши тордир. Шунинг учун, (2.1) масалани текшириш учун, Чаплигин дифференциаль тенгсизлигидан фойдаланиш эффектлироқдир. Теореманинг намойиши қуйдаги классик натижадан бошлаймиз.

2.1. Дифференциал тенгсизликлар теоремаси

Теорема 3. (Чаплигин таққослаши). *(2.1) масаланинг y(t) (классик) ечими мавжуд. Қуйидаги функция мавжуд бўлса,* $z(t)\in C^1(0,T]\cap C[0,T]$:

$$\frac{dz}{dt}<f(t,z(t)),\ t\in(0,T],\ z(0)<y^0.$$

У ҳолда, $z(t)<y(t),\ t\in[0,T]$ *тенгсизликка эга бўламиз.*

Исбот. *t=0* да тенгсизлик бажарилади. Биринчи марта шарт $t_1\in(0,T]$да бузилсин, у ҳолда бу нуқтада $z(t_1)=y(t_1)$га эга бўламиз. $t=t_1$ эгри чизиқда, *y(t)* ва *z(t)* кесишади ёки урунади. Демак,

$$\frac{dz}{dt}(t_1)\ge\frac{dy}{dt}(t_1)=f(t_1,y(t_1))=f(t_1,z(t_1)),$$

муносабат теоремага зид. Теорема 3 исботланди.

Эслатма. С.А.Чаплигин *z(t)* функцияни қуйи функция деб атайди, ҳудди шундай юқори функция щам аниқланади.

2.2. Мавжудлик теоремаси

Теорема 3 ёрдамида (2.1) масаланинг мавжудлигини исботлаш мумкин. Бунинг учун биз, қуйи ва юқори ечимларни аниқлашимиз керак. Ҳозирги вақт адабиётларида, Чаплигиннинг қуйи ва юқори функцияси деб ёзиш келишилган.

Таъриф. *Функция* $\alpha(t)\in C^1[0,T]\cap C[0,T]$ *(2.1) масаланинг қуйи ечими дейилади, агар қуйидаги тенгсизлик бажарилса.*
$\frac{d\beta}{dt}<f(t,\beta(t)),\ 0<t\le T,\ \beta(0)<y^0$

Функция $\beta(t)\in C^1[0,T]\cap C[0,T]$ *(2.1) масаланинг юқори ечими дейилади, агар қуйидаги тенгсизлик* *бажарилса.*

Натижа. Таққослаш теоремасининг схемасига мувофиқ, қуйи $\alpha(t)$ ва юқори $\beta(t)$ ечимлар орасида $\alpha(t)<\beta(t)$ тенгсизликга эришиш қийин эмас.

Теорема 4. (Чаплигиннинг мавжудлик ва ягоналиги). *(2.1) масаланинг қуйи $\alpha(t)$ ва юқори $\beta(t)$ ечимлари мавжуд бўлсин, $\alpha(t)<\beta(t)$, $t\in[0;T]$ ҳолатда. Агар $f(t,y)$ функция узлуксиз ва y ўзгарувчи бўйича Липшиц шартлари бажарилса, $|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le N|y_1-y_2|,\ y_1,y_2\in[\alpha,\beta],t\in[0,T]$. У ҳолда, (2.1) Коши масаласи $\alpha(t)<y(t)<\beta(t),\quad 0\le t\le T$ тенгсизликни қаноатлантирувчи y(t) ягона ечимга эга.*

Исбот. (2.1) масаланинг ўрнига, *f(t,y)* функция $t\in[0,T],\ y\in R$ текисликда узлуксиз ва Липщиц шартини қаноатлантириши учун давом эттирамиз.

$$\begin{aligned}&\frac{dy}{dt}=h(t,y),\quad 0<t\le T\\&y(0)=y^0,\end{aligned}\tag{2.2}$$

бу ерда, *h(t,y)* мисол учун,

$$h(t,y)=\begin{cases}f(t,\beta(t))+(y-\beta(t)), & y>\beta\\ f(t,y), & 0\le t\le T\\ f(t,\alpha(t))+y-\alpha, & y<\alpha.\end{cases}$$

Теорема 2 га асосан, (2.2) масаланинг ечими мавжуд ва ягонадир ($h(t,y)$ функция Липщиц дойимийси $L=\max(L_0,1)$ билан Липщиц шартини қаноатлантирсин, бу ерда L $f(t,y)$ функциянинг Липщиц дойимийси). Теорема 3 га асосан бу ечим қуйи ва юқори ечимлар орасида ётади. Демак, $h(t,y)=f(t,y)$лар учун (2.2) масаланнинг ечими (2.1) масаланинг ечими ҳисобланади. ■

Изоҳ 1. Қуйи ва юқори ечимларни аниқлашда, қаттий бўлмаган тенгсизлик-лардан фойдаланишни кўрсатиш мумкин. Ҳусусий ҳолда, (2.1) масаланинг қуйи (юқори) ечими $y^*(t)$ кўринишида олиш мумкин, бунда бошланғич момент $y(0)<y^0(y(0)>y^0)$ бўлади. Ҳақиқатдан, фаразимиз t_1 нуқтада $y^*(t)$ билан $y(t)$ кесишади ва бу нуқта атрофида ечимнинг ягоналик шартини бузилишига олиб келади.

И***зоҳ 2.*** Агар қуйи ва юқори ечимлар $0\le t<\infty$ оралиқда аниқланган бўлса, $f(t,y)$ функция узлуксиз ва Липщиц дойимийси бўйича Липщиц шарти қаноатлантирсин. *t* га боғлиқ бўлмаган $0\le t<\infty$ оралиқда теорема 4 бажарилади.

Бундан биз =уйида фойдаланамиз.

2.3. Мисоллар.

1^0. Қуйидаги бошланғич масалани кўриб чиқамиз

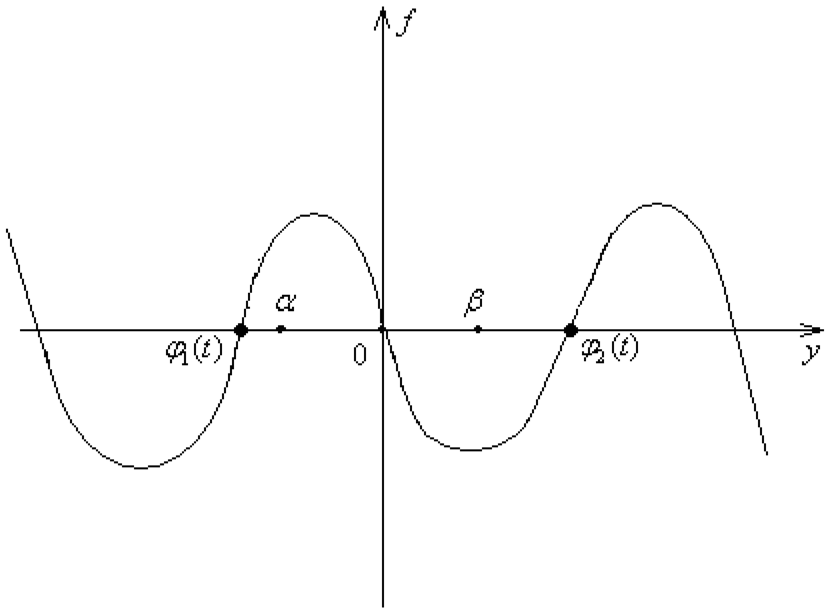
$$\frac{dy}{dt} = -y^2, \quad 0 < t \le T,$$
$$y(0) = y^0 > 0.$$

Мавжудлик ва ягоналик классик теорема ([1]), $0 \le t \le \frac{1}{4y^0}$ оралиқда ечимнинг мавжудлик баҳосини беради. Сўнг, Липщиц шарти $0 \le t \le T$, $-\infty < y < \infty$ бунда, бажарилмайди. $\alpha = 0$ қуйи ечимни танлаймиз (изоҳ 2). Ҳақиқатдан, келтирилган таъриф бажарилмоқда $\frac{d\alpha}{dt} - f(t,0) = 0$ юқори ечимни танлаймиз. Юқори ечимнинг $\beta(t) = d = const > y^0$ таърифи ҳам бажарилмоқда. $\frac{d\beta}{dt} - f(\beta,t) = 0 + d^2 > 0$. $f(t,y) = -y^2$ функция $y \in [0,d], 0 \le t \le T$ чекланишга эга, бу ерда T - иҳтиёрий сон, ҳосила ва Чаплыгин теоремаси шартларини қаноатлантиради. (Теоремы 4) (Липщиц шартини қаноатлантиради). У ҳолда, қуйидаги ечим мавжуд $y(t)$: $0 \le y(t) \le d$, $0 \le t < \infty$.

2^0. Бошланғич масалани кўриб чиқамиз

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad 0 < t \le T,$$
$$y(0) = y^0,$$

бу ерда, $f(t,y)$ функция теорема 4 шартларини қуйидаги расмда тасвирланган ҳар бир t да қаноатлантирсин.



Агар $\varphi_1(t)$ - биринчи манфий илдиз, $\varphi_2(t)$ - биринчи мусбат илдиз ва $\bar{\varphi}_1 = \max\limits_{[0,T]} \varphi_1(t),\ \underline{\varphi}_2 = \min\limits_{[0,T]} \varphi_2(t)$ муносабат ўринли бўлса ва y^0 бошланғич қиймат $\bar{\varphi}_1 < y^0 < \underline{\varphi}_2$ шартни қаноатлантирсин. Шунингдек, $\exists \varepsilon > 0 : \bar{\varphi}_1 + \varepsilon < y^0 < \underline{\varphi}_2 - \varepsilon$ бўлсин. У ҳолда $\alpha = \bar{\varphi}_1 + \varepsilon$ қуйи ва $\beta = \underline{\varphi}_2 - \varepsilon$ юқори ечимларни танлаймизки, $f(\alpha) > 0$, $f(\beta) < 0$ шартларда дифференциал тенгсизликлар бажарилсин. Чаплыгин (Теорема 4) теоремасидан, қаралаётган масалани $\bar{\varphi}_1 < y(t) < \underline{\varphi}_2$ шартни қаноатлантирувчи $y(t)$ ечими мавжуд

2.4. Турғунлик назариясида Чаплыгин теоремасини баъзи бир масалаларга тадбиғи

Қуйидаги автоном тенглама берилган бўлсин

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \tag{2.2}$$

яъни, тенгламанинг ўнг томонида t ошкор қатнашмаган. $f(y) = 0$ тенгламанинг ҳар бир илдизи (2.2) масаланинг ечими ҳисобланади. Умумийликни тарк этмаган ҳолда, (2.2) тенглама тривиал $y = 0$ ечимга эга, яъни $f(0) = 0$. Коши масаласининг ечими тривиаль ҳисобланади, қачонки (2.2) масалага

$$y(0) = 0. \tag{2.3}$$

қўшимча шарт берилса.

Бу савол Лапунов ечими бўйича ҳақиқий ҳисобланади, яъни бошланғич шартлар етарлича кичик қўзғатилган турғун. (2.3) шартни ўрнига (2.2) масалага қўшимча

$$y(0) = y^0, \tag{2.4}$$

шарт қўйилса.

Таъриф. $y(t) = 0$ *ечим (2.2) ва (2.3)масаларда Ляпунов бўйича турғун дейилади, агар* $\forall\varepsilon > 0$ *учун* $\exists\delta(\varepsilon)$ *сон мавжуд бўлсаки* $y^0 < \delta(\varepsilon)$ *да барча* $t \geq 0$ *(2.2) ва (2.4) масаланинг* $y(t)$ *ечими мавжуд бўлади. Қуйидаги тенгсизлик* $|y(t)| < \varepsilon$ *ўринли бўлади.*

Тривиал ечим асимптот турғун дейилади, агарда у тур\ун былиб, қўшимча $y(t) \to 0$ *талабни* $t \to \infty$ *да қаноатлантирса.*

Турғун бўлмаган ечим, *турғунмас* дейилади. Юқоридаги турғунлик шартларни инкор қилувчи ечимлар турғунмасдир.

Ляпуновнинг қуйидаги кенгроқ ёзилган теоремаси биринчи яқинлашиш бўйича турғунлик теоремасига асосан (2.2) ва (2.3) масалаларнинг ечими турғун ёки турғунмаслик саволига жавоб бўла олади. Натижа шаклини биз кейинроқ, исботни эса Чаплыгин теоремаси ёрдамида келтирамиз.

Теорема 2. *Агар* $f(0) = 0$ *ва* $f(y)$ *функция* $|y| \leq \nu$ *оралиқда узлуксиз бўлсин. Унда (2.2) ва (2.3) масалаларнинг* $y = 0$ *ечими турғун агар* $f_y(0) < 0$ *бўлса. Акс ҳолда, турғунмас агар* $f_y(0) > 0$ *бўлса.*

Исбот.

1. Асимптотик турғунлик. Фараз қилайлик $f_y(0) < 0$ бўлсин, у ҳолда иҳтиёрий $\varepsilon > 0$ шундай $\delta > 0$ танлаймизки, $\delta < \min(\nu, \varepsilon)$ бўлади. $\alpha(t)$ ва $\beta(t)$ функцияларни қуйидаги ифода орқали аниқлаймиз:

$$\alpha(t) = -\delta e^{-pt}, \beta(t) = \delta e^{-pt},$$

бу ерда, $p > 0$ - доймий. Энди етарлича кичик, δ ва pлар учун $|y^0| < \delta$ бўлсин. (2.2), (2.4) масалалар ечими $\alpha(t)$ ва $\beta(t)$ функциялари мос ҳолда қуйи ва юқори ечимлари дейилади. Теорема 4 дан (2.2), (2.4) масалаларнинг ечими мавжуд ва ягонадир агарда қуйидаги тенгсизлик бажарилса,

$$\alpha(t) < y(t) < \beta(t),\ 0 \leq t < \infty.$$

Бу тенгсизликдан $y = 0$ асимптотик турғунлиги аниқланади.

$\beta(t)$ учун дифференциал тенгсизликни бажарилишини текширамиз. Биз маълумки,

$$\frac{d\beta}{dt} - f(\beta(t)) = -\delta pe^{-pt} - f_y(\theta\delta e^{-pt}) = \delta e^{-pt}[-f_y(0) - p + (f_y(0) - f_y(\theta\delta e^{-pt}))],$$

бу ерда $0 \leq \theta \leq 1$. δ шундай кичик қилиб танлаймизки, қуйидаги бажарилсин

$$\left|(f_y(0)-f_y(\theta\delta e^{-pt})\right|\le\eta<\frac{-f_y(0)}{2}.$$

$p<\dfrac{-f_y(0)}{2}$ танласак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз $\dfrac{d\beta}{dt}-f(\beta(t))>0$, яъни $\beta(t)$ - юқори ечим.

Шунинг дек, тенгсизлик $\dfrac{d\alpha}{dt}-f(\alpha(t))<0$, яъни $\alpha(t)$ - қуйи ечим. Бу теорема 5 биринчи қисми исботи якуни билдиради. ■

2. Турғунмаслиги. Фараз қиламиз, $f_y(0)>0$. Шундай, $\varepsilon>0$ мавжудки, иҳтиёрий $\delta>0$да $y^0,\left|y^0\right|<\delta$ бўлсин. Бунда, баъзи бир t ларида (2.2), (2.4) масаланинг ечими ε дан катта бўлади. (2.2), (2.3) масалаларнинг тривиал ечими турғунмас. Яъни, иҳтиёрий y^0 учун (2.2), (2.4) масаланинг қуйи ечимини қуйидагича бўлади,

$$\alpha(t)=\rho(1-\sigma e^{-pt}),$$

бу ерда ρ - дойимий, $0<\rho<\nu$ ораликда, σ - дойимий, $0<\sigma<1$ ораликда, p - мусбат доймий. Ҳақиқатдан, $\alpha(0)=\rho(1-\sigma)$, σ ни бирга яқин қилиб шундай танлаймизки, иҳтийрий мусбат y^0дан кичик $\alpha(0)$ эга бўлиш мумкин. $t\to\infty$ $\alpha(t)\to\rho$ муносабатларда, шунинг дек, t нинг катта t^* қийматларида $\alpha(t)>\dfrac{\rho}{2}$ бўлади. (2.2), (2.4) масаланинг ечими (агар у мавжуд бўлса) Теорема 3 асосан $\varepsilon=\dfrac{\rho}{2}$ дан катта. Бу тривиал ечимларнинг турғунмаслигини билдиради. Қуйи ечимлар учун $\alpha(t)$, тенгсизликни қаноатлантиришини текширамиз. Бизга маълумки,

$$\frac{d\alpha}{dt}-f(\alpha(t))=\rho\sigma pe^{-pt}-f_y(\theta\alpha(t))=-f_y(0)+\rho\sigma pe^{-pt}+(f_y(0)-f_y(\theta\alpha(t))).$$

ρ шундай кичин танлаймизки, $\rho\sigma pe^{-pt}+(f_y(0)-f_y(\theta\alpha(t)))<f_y(0)$ бўлсин, у ҳолда $\dfrac{d\alpha}{dt}-f(\alpha(t))<0$ бўлади. Бу теореманинг иккинчи қисмининг якунин беради.

Танқидий изоҳ 3. $f(y)=0$ илдиз (2.2) тенгламанинг ечими ва тинч нуқтаси дейилади. $y=\bar{y}$ нольмас тинч нуқтанинг турғунлигини текширилиши, ноль тинч нуқта билан алмаштирилишига олиб келадик. Ҳусусий ҳолда, $y=\bar{y}$ тинч нуқта асимптотик турғун, агар $f_y(\bar{y})<0$ бўлса, акс ҳолда, $f_y(\bar{y})>0$ турғунмас.

2.5 Мисол

$f(y)=y(y^2-1)$ ҳолда (2.2) масалани кўриб чиқамиз ва тинч нуқтада турғунлигини текширамиз. Бунда учта тинч нуқтага эгамиз: $y=\pm1$ ва $y=0$. $f_y(\pm1)>0$, $f_y(0)<0$ муносабатга эришиш осон. Тинч нуқта $y=\pm1$ да – турғунмас, тинч нуқта $y=0$да эса - асимптотик турғундир.

2.6 Максимум принцип ива ечимни таққослаш теоремаси

Бошланғич ва чегаравий функциялар бўйича параболик типли тенгламалар ечимининг “монотонлиги” максимум принципи моҳиятини ташкил этади. Биз ночизиқли тенгламалар исботини аналогли таъкидлашнинг асоси бўлган чизиқли параболик типли тенгламаларнинг максимум принципи баённомасига тўҳталмаймиз. Бу ерда силлиқлик ва Ωчегара структкраси зарурий чекланишларини ҳам топиш мумкин (улар айниқса, Ω чегереланмаган соҳада мавжуддир). Энди юқорида келтирилган ночизиқли масалалар таъкидланишнинг тузилишига ўтамиз. Бир хил физик маъно ҳамда тақрибий исботлашнинг бир ҳил техник ёндашиш, яъни бундай таъкидланишларнинг бирлаштирилиши максимум принципи деб номланади. Қуйида келтирлган теоремаларни исботи [165, 259, 265] адабиётларда келтирилган.Теореманинг тузилиши чегаравий Коши масаласи учун берилади.

Теорема 1. *Агар (2.2) тенглама $(0,T)\times\Omega$ соҳада $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ номанфий классик ечимиларга эга бўлса, яъни*

$$u^{(2)}(0,x)\geq u^{(1)}(0,x),\ x\in\Omega. \qquad (2.4)$$

$$u^{(2)}(t,x)\geq u^{(1)}(t,x),\ t\in[0,T),\ \ x\in\partial\Omega. \qquad (2.5)$$

У ҳолда,

$$u^{(2)}(t,x)\geq u^{(1)}(t,x),\quad [0,T)\times\Omega, \qquad (2.6)$$

бўлади.

Физик нуқтаи назари асосида осон тушинтирилади. Ҳақиқатдан муҳитдаги ҳароратнинг катталиги, қўзғалишнинг бошланғич ҳароратининг катталигига ва чегарадаги ҳарорат тартибининг фаоллигига боғлиқдир. Теореманинг исботи, $z=u^{(2)}-u^{(1)}$ айирма учун чизиқли параболик тенглама таҳлилига асосланган z функция эктримум нуқтаси бўйтича Δz ортирмасидан фойдаланади.

Мисол 1. Агар $Q(0)=0$ ва (2.2)-(2.4) масалаларнинг $u(t,x)$ классик ечими бўлсин. У ҳолда, $u\geq 0,[0,T)\times\Omega$ бўлади.

Демак, (2.2) масаланинг $u^{(1)}\equiv 0$ ечими бўлади, яъни (2.4), (2.5) шартларнинг ўринлигида $u^{(2)}=u$ бўлади, ва барча $(0,T)\times\Omega$ соҳаларида

$u^{(2)} \geq u^{(1)} \equiv 0$. Параболик тенгламаларнинг турли ечимларини қандайдир битта фиксирланган ечими орқали бошқа кенг ечимлар синфи ҳусусиятларига мослаштирилади. Теоремада берилган масаланинг аниқ ечимларини шакллантиради, аммо у фойдаланишни чеклайди. Аммо бошқа тасдиқларда [165, 21, 259, 272] адабиётларда ночизиқли параболик тенгламаларни текшириш кенгайтиради.

Теорема 2. *Агар* $[0,T)\times\overline{\Omega}$ *соҳада (2.2)-(2.4) масалалар* $u(t,x)\geq 0$ *классик ечимга эга бўлсин, шунинг дек* $u_{\pm}(t,x)\in C^{1,2}_{t,x}((0,T)\times\Omega)\cap C([0,T)\times\overline{\Omega})$ *тенгсизлик бажарилсин ва* $(0,T)\times\Omega$ *соҳада,*

$$\frac{\partial u_+}{\partial t}\geq B(u_+),\ \frac{\partial u_-}{\partial t}\geq B(u_-)\,, \tag{2.7}$$

бундан ташқари,

$$u_-(0,x)\leq u_0(x)\leq u_+(0,x),\quad x\in\Omega\,, \tag{2.8}$$

$$u_-(t,x)\leq u_1(t,x)\leq u_+(t,x),\quad t\in[0,T),\quad x\in\partial\Omega\,. \tag{2.9}$$

бўлди. У ҳолда $[0,T)\times\overline{\Omega}$ *соҳада*

$$u_-\leq u\leq u_+\,, \tag{2.10}$$

бўлади.

Шуни таъкидлаш лозимки, теорема 1 дагидек тенгламанинг ечимини бошқа ечимлари билан таққослаш фикри юритилмаябди, балки, (2.7) дифференциаль тенгсизлик ечимига мувофиқдир. Қандайдир параболик тенгламанинг аниқ ечими ўрнига дифференциаль тенгсизликнинг келтирилган ечимини топиш осонлиги ночизиқли параболик тенгламалар ечимларнинг ҳусусияти мавжудлигини ўрганиш имкониятини кенгайтиради. (2.2) - (2.4) масалаларнинг (2.7) - (2.9) шартларини қаноатлантирувчи u_+ ва u_- мос равишда юқори ва қуйи ечимлари дейилади.

Тасдиқда, ночизиқли иккинчи тартибли параболик тенгламаларнинг умумий кўриниши теорема 1, 2 га мувофиқ ўринли, шунинг дек ҳақиқатдан ночизиқли (квазичизиқли) тенгламадаги

$$u_t = F(u,\nabla u,\Delta u,t;x)\,, \tag{2.11}$$

$F(p,q,r,t,x)$ функция, $R_+\times R^N\times R\times[0,T)\times\overline{\Omega}$ оралиқда ҳусусий ҳосиласи билан узлуксиздир. Параболик тенгламанинг шартлари қуйдаги кўринишга эга

$$\partial F(p,q,r,t,x)\geq 0 \qquad (2.11`)$$

F нинг ўрнига (2.1) ёки (2.2) тенгламадаги операторни олсак, у ҳолда (2.11`) шарт $k(p)\geq 0,\ p\geq 0$ тенгсизликка айланади. Юқорида келтирилган чегара шаклларининг тасдиқларида ва Ω соҳадаги айрим қўшимча чекланишларида иккинчи тартибли чегаравий масалалар учун ўринлидир, яъни $\partial\Omega$ соҳада (2.4)нинг ўрнига шарт берилса, масалан

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_2(t,x),\ t \in (0,T),\ x \in \partial\Omega;\ u_2 \in C,\ \sup u_2 < \infty\,, \tag{2.12}$$

бу ерда $\partial\Omega$ га *n* ташқи нормаль йўналиши бўйича ҳосилалар белгиланади. u_{x_i} ҳосила $(0,T)\times\overline{\Omega}$ да узлуксиз бўлса, (2.12) маънога эгадир. Бунинг оқибатида янги келишув шарти ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial n} = u_2(0,x),\ x \in \partial\Omega\,,$$

шундагина, иккинчи тартибли чегаравий масаланинг классик ечими ҳусусида сўз юритса бўлади. Бу ҳолда, теорема 1 да (2.5) тенгсизлик ўрнига

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} \geq \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n},\ t \in [0,T),\ x \in \partial\Omega\,, \tag{2.12`}$$

тенгсизлик бажарилиши лозим. Кўпайтма $k(u)\dfrac{\partial u}{\partial n}$, чегарада иссиқлик оқимига тенг бўлса, у ҳолда (2.12`) ифода оддий физик маънога эга. Шунинг дек, теорема 2 да иккинчи масала ҳолида (2.9) тенгсизлик ўрнига

$$\frac{\partial u_-}{\partial n} \leq \frac{\partial u}{\partial n} \geq \frac{\partial u_+}{\partial n},\ t \in [0,T),\quad x \in \partial\Omega, \tag{2.13}$$

тенгсизлик билан алмаштирилади ($u_\pm$ юқори ва қуйи ечимларига қўшимча силлиқлик шартлари қўйилади). $\partial\Omega$ да учинчи авлод ночизиқли чегаравий шартлар берилиши, келтирилган ўзгаришларда теорема ўринлидир. Мисол учун,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = a(u,t,x),\ t \in (0,T),\ x \in \partial\Omega\,, \tag{2.14}$$

бу ерда, $a(u,t,x)$ иҳтиёрий етарлича силлиқ функция [165, 259].

Теорем 3. Агар $u(t,x) \geq 0$ - (2.57), (2.58) масалаларнинг умумлашган ечими ва функцияси $u_\pm(t,x)$ қуйидагича бўлсин: Q соҳада $u_\pm \geq 0$, Q\D соҳада

$$u_\pm = 0,\quad u_\pm \in C^{1,2}_{t,x}(D) \cap C(Q)\quad |\nabla u^k|^{n-1}\ \nabla u^k \in C(Q)$$

D соҳада қуйидаги тенгсизлик бажарилсин R^N соҳада

$$Au_+ \leq 0,\quad Au_- \geq 0,\quad u_0(x) \leq u_+(0,x),\quad u_0(x) \geq u_-(0,x)\,,$$

ва бўлади. У ҳолда Q соҳада $u_0(x) \leq u_+(t,x),\quad u_0(x) \geq u_-(t,x)$.

u_+, u_- функциялар (2.57), (2.58) мос равишда юқори ва қуйи ечимлари дейилади.

3-Мавзу: Икки карра ночизиқли реакция-диффузия жараёнларининг математик моделлари.

$Q_T = [0,T] \times R^N$ да қуйидаги масалани кўриб чиқамиз:

$$AU = -\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(|\nabla u^k|^{n-1} \nabla u^k) + \varepsilon\gamma u^\beta = 0\,, \tag{3.57}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), x \in R^N, \sup_x u_0(x) < +\infty\,, \tag{3.58}$$

Бу ерда $\varepsilon = \pm 1, \nabla - grad(\cdot), \gamma > 0, k, n, \beta \geq 1$ - берилган константалар, $mes \sup pu_0(x) < +\infty, |\nabla u_0^k|^{n-1} \nabla u_0^k \in C(R^N)$.

(3.57) тенглама кўплаб физик жараёнларни ифодалайди: nқ1да – ньютоннинг политропик фильтрацияси, kқ1 да – ньютоннинг эгилувчан фильтрацияси, k>1, n>1да – ньютоннинг политропик фильтрацияси тенгламаси. Член $\varepsilon\gamma u^\beta$ ҳад ($\varepsilon = +1$) манбанинг ёки ($\varepsilon = -1$) оқимнинг мавжудлигига мос келади, унинг қуввати γu^βга тенг. (3.57) тенглама иссиқлик ўтказувчанликнинг чизиқсиз тенгламаси ёки диффузия тенгламаси номи билан ҳам аталади. Аммо табиий фанларнинг бошқа бўлимларида ҳам учрайди.

Q_T соҳада $|\nabla u^k|^{n-1} \nabla u^k$ узлуксиз оқим билан манфиймас, узлуксиз ечимларни кўриб чиқиш маънога эга.

(3.57), (3.58) масала келтириб чиқарувчи турли чизиқсиз эффектларни [72, 112] да ва у ерда келтирилган ҳаволалардан топиш мумкин.

$\varepsilon = -1$, nқ1 ёки kқ1 ҳолат [46] да ўрганилган эди, у критик ҳолат деб номланади. nқ1 даги критик қиймат $\beta = \beta^* = k + 2/N$ ҳисобланади, kқ1 да эса $\beta = n + (n+1)/N$. Манба ҳолида [//] ишларда кўрсатилганидек β параметрнинг бу қийматлари чегараланмаган ечимдан чегараланган ечимларни ажратади, оқимнинг асимптотик ҳолатида эса $t \to +\infty$ да (3.57), (3.58) масала ечими β параметрнинг қийматларига нисбатан ўзини бошқача тутади. Бу ҳолатда Коши масаласи ҳам глобал, ҳам чегараланмаган вақт бўйича ечимга эга бўлиши мумкин [///].

Қуйида параболик турдаги бошланғич тенгламанинг ажратишига асосланган алгоритм келтирилган, унинг ёрдамида (3.57), (3.58) масаланинг қуйи ва юқори ечимларига баҳо берилади, жумладан критик ҳолатда ҳам. (3.57), (3.58) масала учун критик қиймат сифатида $\beta = \beta^* = kn + (n+1)/N$ хизмат қилади.

Ажратиш алгоритми маъносини ифодалаб берамиз. Бу алгоритмга мос равишда биринчи босқичда қуйидаги тенглама ечилади

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\gamma \overline{u^{\beta}} ,$$

Интеграллаш қуйидагини беради

$$\bar{u}(t) = (T + \gamma(\beta - 1)t)^{-1/(\beta-1)} \qquad (3.59)$$

Бу функция (3.57) тенгламага оқимни «қўшиш» ни ифодалайди. Иккинчи босқичда (3.57) тенглама ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз

$$u(t,x) = \bar{u}(t)\omega(\tau(t),x) \qquad (3.60)$$

(3.57) га (3.60) ни қўйямиз ва $\tau(t)$ шундай танлаймизки

$$\tau(t) = \int [\bar{u}]^{kn-1} dt \qquad (3.61)$$

Для $\omega(\tau(t),x)$ учун қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \nabla(|\nabla \omega^k|^{n-1} \nabla \omega^k) + \gamma[\bar{u}(t)]^{\beta - nk}(\omega - \omega^{\beta}), \text{ агар } \beta \neq nk \qquad (3.62)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \nabla(|\nabla \omega^k|^{n-1} \nabla \omega^k) + \gamma(\omega - \omega^{\beta}), \text{ агар } \beta = nk \qquad (3.63)$$

(3.59) ва (3.61) ҳисобига қуйидагига эга бўламиз

$$\tau(t) = \begin{cases} \dfrac{(T + \gamma(\beta - 1)t)^{\frac{\beta - nk}{\beta - 1}}}{\gamma(\beta - nk)} + C, & агар \quad \beta \neq nk \\ C + \dfrac{1}{\gamma(\beta - 1)} \ln(T + \gamma(\beta - 1)t), & агар \quad \beta = nk \end{cases} \qquad (3.64)$$

Бу ерда $C \geq 0$ - интеграллаш доимийси.

Агар $\beta > nk$ бўлса, у ҳолда $t \to +\infty$ да $\tau(t) \to +\infty$ ва C доимийсини бу ҳолда нолга тенг деб олиш мумкин. (3.64) ҳисобига (3.62) тенглама қуйидаги кўринишга келади

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau} = \nabla(|\nabla\omega^k|^{n-1}\nabla\omega^k) + \frac{1}{(\beta - nk)\tau}(\omega - \omega^\beta) \qquad (3.65)$$

Бу тенглама хусусий холда Колмогоров Фишер туридаги умумлашган тенглама ҳисобланади. Энди (3.57) тенглама ечимида оқим қўшилиши ҳисоблангандан сўнг, (3.57)тенгламани оқимсиз кўриб чиқамиз, лекин унда диффузион қисмсиз тенглама ечимига боғлиқ бўлган бошқа вақтинчалик ўзгарувчилар қатнашади.

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\tau} = \nabla(|\nabla\overline{\omega}^k|^{n-1}\nabla\overline{\omega}^k) \qquad (3.66)$$

(3.57) учун эталон деб номланадиган (3.66) тенглама олти турдаги автомодел ечимга эга, улардан бири қуйидаги кўринишда

$$\overline{\omega}(\tau, x) = \overline{f}(\xi), \quad \xi = |x|/\tau^{1/(n+1)} \qquad (3.67)$$

бу ерда $\overline{f}(\xi)$ қуйидаги тенгламани қаноатлантиради

$$\xi^{1-N} = \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{d}{d\xi}\overline{f}^k\right|^{n-1}\frac{d}{d\xi}\overline{f}^k\right) + \frac{\xi}{n+1}\frac{a\overline{f}}{d\xi} = 0 \qquad (3.68)$$

бунда $\xi < (a/b)^{n/(n+1)}$. (3.65) дан кўриниб турибдики, агар тенглаштирувчи сифатида $z(t,x) = \overline{u}(t)\overline{\omega}(\tau, x)$ функция ва Q_T да $\overline{\omega} \le 1$ ни танласак, бу ерда $\overline{\omega}$ (3.65) тенглама ечими ва $\overline{u}(t)$ (3.59) формула билан берилган, у ҳолда у бошланғич масаланинг қуйи ечими бўлади, агар $u_0(x) \ge z(0,x)$ бўлса. Бу натижани юқорида фойдаланилган чизиқсиз ажратиш алгоритмини қайта қўллаш орқали яхшилаш мумкин. Бу билан алоҳида кейинроқ шуғулланамиз.

Энди

$$\omega(\tau, x) = f(\xi), \quad \xi = |x|/\tau^{1/(n+1)}$$

ни қўйиб, (3.65) тенгламани автомодел ечимга айлантирамиз

$$\varepsilon^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\frac{d}{d\xi}\left|f^k\right|^{n-1}\frac{df^k}{d\xi}\right) + \frac{\xi}{n+1}\frac{df}{d\xi} + \frac{1}{\beta - nk}(f - f^\beta) \qquad (3.69)$$

Агар $z(t,x) = \overline{u}(t)\overline{\omega}(\tau, x)$ функцияни қурсак, бу ерда $\overline{\omega}(\tau, x)$ - (3.66) эталон тенгламанинг юқори ечими, унинг учун Q_T да $Az \le 0$ ва $u_0(x) \le z(0,x)$ шарт бажарилади, у ҳолда $z(t,x)$ функция (3.57), (3.58) масаланинг юқори ечими бўлади.

Бу фикрлашлар (3.57), (3.58) Коши масаласининг юқори ва қуйи ечимларини қуриш алгоритмига асосланган, яъни бошланғич масаланинг глобал ҳал қилиниши ва β параметрнинг критик қийматини аниқлаш, бунда масала ечими чегараланмаган ҳолатга айланади ($\varepsilon=+1$) ва асимптотик кўриниши ўзгаради ($\varepsilon=-1$).

Белгилаш киритамиз $Q_\infty = Q,\quad D=\{(t,x):\ t>0, |x|<l(t)\}$ / бу ерда $l(t)>0$ $t\ge 0$ да - узлуксиз функция.

Ечимларни таққослаш учун қуйидаги леммани келтирамиз[33, 35, 67, 72].

Лемма 4. $u(t,x)\ge 0$ - (3.57), (3.58) масаланинг умумлашган ечими бўлсин ва $u_\pm(t,x)$ функциялар шундай бўлсинки,

$u_\pm \ge 0$ Q да, $u_\pm = 0$ Q\D да, $u_\pm \in C^{1,2}_{t,x}(D)\cap C(\bar D)$ $\ |\nabla u^k|^{n-1}\nabla u^k \in C(Q)$ ва D да, $Au_+\le 0,\quad Au_-\ge 0,\quad u_0(x)\le u_+(0,x),\quad u_0(x)\ge u_-(0,x)$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда Q да

$$u(t,x)\le u_+(t,x),\quad u(t/x)\ge u_-(t,x).$$

u_+, u_- функциялар (3.57), (3.58) масаланинг мос равишда юқори ва қуйи ечимлари деб аталади.

$$f_0(\xi)=\left[\left(C_1-b|\xi|^{\frac{n+1}{n}}\right)^+\right]^{\frac{n}{nk-1}}, \tag{3.70}$$

Бу ерда $C_1<0,\quad b=\dfrac{1}{k}\dfrac{nk-1}{n+1}a^{\frac{1}{n}}$, тенгламанинг умумлашган ечими ҳисобланади

$$\varepsilon^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\frac{d}{d\xi}\left|f^k\right|^{n-1}\frac{df^k}{d\xi}\right)+a\xi\frac{df}{d\xi}+aNf=0, \tag{3.71}$$

бу ерда $a>0$ доимийси.

Теорема 9. (3.59) да

$$\varepsilon=+1,\quad \beta>kn+\frac{n+1}{N},\quad u_0(x)\le u_+(0,x), x\in R^N, 0<C_1<\left[\frac{(\beta-kn)}{n+1}N-1\right]^{(nk-1)/(n\beta-1))}$$

бўлсин.

У ҳолда Q да (3.57), (3.58) масаланинг глобал ечими мавжуд, унинг учун

$$u(t,x)\le u_+(t,x)$$

баҳо ўринли, бунда

$$u_+(t,x)=\bar u(t)\,f_0(\xi), \tag{3.72}$$

Бу ерда $\bar u(t),\ f_0(\xi)$ (3.64) ва (3.70) формулалар билан берилган.

Исбот. 9-теорема ечимларни таққослаш усули билан исботланади. Таққословчи функция сифатида

$$u_+(t,x) = \bar{u}(t)\, f_0(\xi)$$

ни танлаб оламиз. Бу ерда $\bar{u}(t)$, $f_0(\xi)$ лар (3.64) ва (3.70) формулалар билан берилган, бунда $a = \dfrac{1}{n+1}$. У ҳолда (3.71) ҳисобига қуйидагига эга бўламиз

$$Au_+ = f_0\left(-\frac{N}{n+1} + \frac{1+f_0^{\beta-1}}{\beta-kn}\right)\frac{\bar{u}^{-kn}}{\tau(t)} \tag{3.73}$$

Теорема шартига кўра $\dfrac{1}{\beta-kn} - \dfrac{N}{n+1} < 0$. Шунинг учун $Au_+ \le 0$ бўлиши учун (3.70) да C_1 константани қуйидаги кўринишда танлаш етарли

$$0 < C_1 < \left(\frac{\beta-kn}{n+1}N - 1\right)^{\frac{nk-1}{n(\beta-1)}}.$$

Энди агар $u_0(x) \le u_+(0,x)$ бўлса, у ҳолда $u_+(t,x)$ 4-леммага биноан (3.57), (3.58) масаланинг юқори ечими бўлади. 9-теорема исботланди.

9-теорема nқ1, kқ1 ҳолида [90] да исботланган эди, nқ1, k>1 да – [35] да, kқ1, n>1 да – [33] да юқорида келтирилган мисолдан фарқли равишда исботланган.

9-теоремадан $|x_Ф(t)|$ фронт учун қуйидаги баҳога эга бўламиз

$$|x_Ф(t)| \le \left(\frac{C_1}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} [\tau(t)]^{\frac{1}{n+1}},$$

бунда $b = \dfrac{1}{k}(nk-1)(n+1)^{-\frac{n+1}{n}}$.

Бундан кўриниб турибдики, $k,n \to 1$, $t > 0$да $|x_Ф(t)| \to +\infty$ жараённинг физик маъносига мос келади: чизиқсиз ҳолда иссиқ тўлқинлар узлуксиз тезликда тарқалади ва $t \to +\infty$ да $|x_Ф(t)| \sim \infty$.

Ечим баҳосидан кўриниб турибдики, (3.70) даги C_1 константа β, k, n параметрларга ва N фазонинг ўлчовига боғлиқ. Глобал ечим мавжуд бўлши учун β критик қийматга қанча яқин бўлса, $u_0(x)$ бошланғич тўлқин етарли даражада кичик бўлиши керак. β критик нуқтада $u_+(t,x)$ функция қуйи ечим бўлади, яъни маънога эга.

Хулоса. $\varepsilon=+1,\quad \beta=kn+\dfrac{n+1}{N},\quad u_0(x)\ge u_+(0,x),\, x\in R^N$ бўлсин. У ҳолда Q нинг барча жойида $u(t,x)\ge u_+(t,x)$ бўлади.

Исбот. $\varepsilon=+1,\quad \beta=kn+\dfrac{n+1}{N}$ да Au_+ учун (3.73) га нисбатан қуйидагига эгамиз

$$Au_+=\frac{\bar{u}^{-kn}\tau^{-1}}{\beta-kn}f_0^{\beta}\ge 0 \text{ Q да.}$$

Исботни якунлаш учун 4-леммани қўллаш қолди.

Энди $\varepsilon=-1$ ҳолини кўриб чиқамиз.

Теорема 10. $\beta\ge kn+\dfrac{n+1}{N},\quad u_0(x)\le u_+(0,x),\, x\in R^N$ бўлсин. У ҳолда Q да (3.57), (3.58) масаланинг глобал ечими мавжуд, у учун

$$u(t,x)\le u_+(t,x)$$

баҳо ўринли, бунда $u_+(t,x)$ (3.72) формула билан берилган.

Исбот. Таққосланувчи функция сифатида (3.72) формула билан аниқланган функцияни $u_+(t,x)$ оламиз. У ҳолда, $f_0(\xi)$ (3.71) тенгламани қаноатлантириши билан $a=\dfrac{1}{n+1}$, қуйидагига эга бўламиз

$$Au_+(t,x)=\left[f_0\left(-\frac{N}{n+1}+\frac{1}{\beta-kn}\right)-\frac{1}{\beta-kn}f_0^{\beta}\right]\frac{\bar{u}^{-kn}}{\tau(t)}. \tag{3.74}$$

$Au_+\le 0$ бўлиши учун, қуйидаги шарт бажарилиши етарли

$$\frac{1}{\beta-kn}-\frac{N}{n+1}\le 0.$$

У теорема шартларини бажаради.

$\left|\nabla u_+^k\right|^{n-1}\nabla u_+^k\in C(R^N)$ эканлигидан, 4-леммага мос равишда ва условию $u_0(x)\le u_+(0,x)$ шартга кўра Q да

$$u(t,x)\le u_+(t,x)$$

эга бўламиз.

Теорема 10 исботланди.

(3.72) муносабатдан кўриниб турибдики, критик ҳолатда

$$Au_+(t,x)=-\frac{\bar{u}^{-kn}\tau^{-1}(t)}{\beta-kn}f_0^{\beta}\le 0,$$

у ҳолда $u_+(t,x)$ функция доимий, юқоридаги «захира» билан юқори ечим ҳисобланади.
(3.73), (3.74) дан фойдаланиб маънога эга эканлигини исботлаш осон.

Теорема 11. (3.57) да $kn < \beta < kn + \frac{n+1}{N}$ ва $u_0(x) \ge u_+(0,x), x \in R^N$ бўлсин, бунда $u_+(t,x)$ - функция, (3.72) формула билан аниқланган. У ҳолда Q да ихтиёрий $c_1 > 0$ да қуйидан $u(t,x) \ge u_+(t,x)$ баҳо ўринли агар $\varepsilon = +1$, агар $\varepsilon = -1$, бўлса, у ҳолда

$$c_1 < \left(1 - \frac{\beta - kn}{n+1} N\right)^{\frac{nk-1}{n(\beta-1)}}.$$

У ҳолда (3.64) да $\tau(\infty) < +\infty$, яъни $\beta < nk$, $c > 0$ ни танлаб, ечимни локаллашиш ўрни мавжудлигини исботлаш осон.

Теорема 12. (3.57) да

$\varepsilon = -1, \quad \beta < kn, \quad \gamma < \frac{1}{kn - \beta}, u_0(x) \le u_+(0,x), x \in R^N$ бўлсин. У ҳолда Q да $u(t,x) \le u_+(t,x)$, бунда $u_+(t,x)$ (3.22) даги функция, $\tau(t)$ (3.64) формула билан берилган.

Исбот. Таққосланувчи функция сифатида (3.72) ни танлаймиз. У ҳолда (3.71) ҳисобига қуйидаги ўринли

$$Au_+(t,x) = \left[-\frac{N}{n+1} f_0 + \frac{\tau\gamma}{c - \gamma(kn-\beta)\tau} (f_0 - f_0^{\beta}) \right].$$

$\tau_{\max} = c$ эканлигидан ва $\gamma < \frac{1}{kn-\beta}$ теорема шартига кўра, D да $Au_+(t,x) \le 0$ га эга бўламиз. У ҳолда 4-леммага биноан Q да $u(t,x) \le u_+(t,x)$ ни оламиз, $\tau_{\max} = c > 0$ га нисбатан (3.57), (3.58) Коши масаласининг локал ечимини билдиради ва

$$|x|_{\max} \le (c_1 / b)^{\frac{n}{n+1}} |\tau(t)_{\max}|^{1/n+1}.$$

$\beta = kn$ ҳолида (3.65) формладан кўриниб турибдики, агар $\overline{\omega}$ - (3.66) тенглама ечими ва $0 < \overline{\omega} \le 1$ бўлса, у ҳолда

$$z(t,x) = \overline{u}(t)\overline{\omega}(t,x)$$

функция, чунки $\beta > 1$ қуйи ечим бўлади, агар $u(0,x) \ge z(0,x),\ x \in R^N$. Бу ҳолда $\overline{\omega}(t,x)$ сифатида Зельдович-Компанейц туридаги ечимларни олиш мумкин:

$$\overline{\omega}(t,x) = (\tau)^{-\alpha} f(c_1,\xi),$$

бунда доимий

$$c_1 > 0,\ \tau(t) = c + \frac{1}{(\beta-1)\gamma}\ln(T+\gamma(\beta-1)t),\ c>0,\ T>1,\ \alpha = mN,\ m = [n+1+N(kn-1)]$$

$$\xi = |x|/\varphi(\tau),\ \varphi(\tau) = \tau^m,$$

$$f(c_1,\xi) = \left[\left(c_1 - b|\xi|^{\frac{n+1}{n}}\right)^+\right]^{\frac{n}{nk-1}}, \quad b = \frac{nk-1}{k(n+1)} m^{\frac{1}{n}}$$

Шуни таъкидлаш керакки, $\lim\limits_{k,n\to 1} f(1,\xi) = \exp(-\xi^2/4)$. У ҳолда $x_\Phi(t)$ фронт учун $\beta = kn$ да қуйидан баҳога эга бўламиз

$$|x_\Phi(t)| \ge \left(\frac{c_1}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} [\tau(t)]^m$$

$$\tau(t) = c + \frac{1}{(\beta-1)\gamma}\ln(T+\gamma(\beta-1)t).$$

Шуни ҳам эслатиб ўтиш керакки, $\beta = kn$ да (3.66) га таяниб

$$\omega(\tau,x) = f(\xi);\ \ \xi = \tau - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i;$$

$$a_i > 0; \quad \tau(t) = c + \frac{1}{(\beta-1)\gamma}\ln(T+\gamma(\beta-1)t),$$

Автомодел ечимни ҳосил қиламиз

$$\frac{d}{d\xi}\left(a\left|\frac{df^{kn-1}}{d\xi}\right|\frac{df^k}{d\xi}\right) + \frac{df}{d\xi} + \gamma(f + \varepsilon f^\beta) = 0, \qquad (3.75)$$

Бу ерда $a = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i^{n+1}$, $c_2 < 1 (\varepsilon = -1)$ да ва c_2 - ихтиёрий $(\varepsilon = +1)$;

$$\overline{f}(c_2,\xi) = \left[(c_2 - b\xi)^+\right]^{\frac{n}{nk-1}},$$

бунда $b = \left(\dfrac{nk-1}{ank}\right)^{1/n}$

қуйи ечим бўлади, агар

$$u_0(x) \geq T^{-\frac{1}{\beta-1}} \left[\left(c_2 - b\left(c + \frac{1}{(\beta-1)\gamma} \ln T - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \right) \right)^+ \right]^{\frac{n}{nk-1}}$$ бўлса.

Алмаштиришдан фойдаланиб

$$f = \overline{f}(c_2, \xi) z(\eta), \quad \eta = -\ln(c_2 - b\xi),$$

$\overline{f}$ функция (3.75) нинг $\xi = c_2 / b$ фронтнинг чап қисмидаги асимптотик ечими ҳисобланишини исботлаш осон.

Энди $\beta = kn + (n+1)/N$ критик ҳолатни кўриб чиқамиз.

Дастлаб белгилашларни киритамиз

$$a(t) = T + \gamma(\beta - 1)t, \quad T > 1$$

$$\phi(t) = [a(t)^{\frac{\beta-kn}{(n+1)(\beta-1)}} [\ln a(t)]^{-\frac{kn-1}{(n+1)(\beta-1)}},$$

$$\varphi(t) = \left(1 + \frac{b_0}{\ln a(t)} \right)^{-\frac{1}{n+1}} \phi(t),$$

$$u_-(t,x) = (a(t) \ln a(t))^{-\frac{1}{\beta-1}} f_1(c_1, \xi),$$

бунда $0 < c_1 < 1, \quad \xi = |x| / \phi(t);$

$$f_1(c_1, \xi) = \left[\left(c_1 - b_1 |\xi|^{\frac{n+1}{n}} \right)^+ \right]^{\frac{n}{nk-1}},$$

$$u_+(t,x) = [a(t) \ln a(t)]^{-\frac{1}{\beta-1}} f_1(c_2, \xi); \quad \xi = |x| / \phi(t);$$

$0 < c_2$ - етарли катта;

$$f_2(c_2, \xi) = \left[\left(c_2 - b_2 |\xi|^{\frac{n+1}{n}} \right)^+ \right]^{\frac{n}{nk-1}};$$

b_0, b_1, b_2 - баъзи константалар.

Теорема 13. $\varepsilon = -1, \quad u_-(0,x) \leq u_0(x) \leq u_+(0,x)$ бўлсин. У ҳолда Q да қуйидаги баҳо ўринли

$$u_-(t,x) \leq u(t,x) \leq u_+(t,x),$$

Бу ерда u_-, u_+, юқорида аниқланган қуйи ва юқори функциялар, $\varepsilon = +1$ да $u(t,x) \geq u_-(t,x)$

Исбот. Исботлаш D да $Au_- \geq 0, \quad Au_+ \leq 0$ тенгсизликларни ҳосил қилишга асосланади, уни текшириш 4-леммани қўллаш билан амалга оширилади. Бунда қуйидаги факт қўлланилади: f_1, f_2 функциялар мос равишда b_1, b_2 кўринишда (3.71) кўринишидаги тенгламани қаноатлантиради.

Бу теоремадан кўриниб турибдики, етарлича катта t юқорида аниқланган $\phi(t)$ функция каби ўзини тутади. Хусусий ҳолда $n=1, \quad k>1; k=1, n>1$да бу натижа [46] да олинган эди, $n=1, \quad k=1$ ҳол эса [41] да аниқланган эди. Таъкидлаб ўтамиз, [20] да фронт учун ёзилган формула аниқмас, лекин бу ерда ўзгартириш киритилган.

3.7.2 Тақрибий автомодел ечимни қуриш

Таъкидлаб ўтамизки, юқорида таклиф этилган $Q=[0,\infty]\times R^N$ да Коши масаласининг ечими хоссаларини тадқиқ қилиш учун ажратишнинг чизиқсиз алгоритми (3.57) квазичизиқли параболик турдаги тенгламага нисбатан

$$Bu=-\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla(k(x)\,|\nabla u^k|^{n-1}\nabla u^k)+\varepsilon\gamma(t)u^{\beta}, \tag{3.76}$$

$$u\big|_{t=0}=u_0(x)\geq 0,\ x\in R^N,\ \text{messupp}\ u_0(x)<+\infty, \tag{3.77}$$

бу ерда $t\geq 0$, $k(x)>0$, $x\in R^N$ да $\varepsilon=\pm 1$, k, n, $\beta\geq 1$, $\gamma(t)>0$ $k(x)\left|\nabla u_0^k\right|^{n-1}\nabla u_0^k\in C(R^N)$ силлиқликка эга. (3.76) тенглама диффузия жараёнлари, газ ва суюқликда фильтрацияни ифодалайди.

(3.76) учун тақрибий автомодел ечим қуриш билан шуғулланамиз. Бунинг учун (3.76) бошланғич тенгламани қуйидаги усулда бўламиз:

$$\bar{u}(t)=-\gamma(t)\bar{u}^{\beta}, \tag{3.78}$$

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\tau}=\nabla\left(k(x)\left|\nabla\bar{w}^k\right|^{n-1}\nabla\bar{w}^k\right). \tag{3.79}$$

Биринчи тенглама ечими қуйидагини беради

$$\bar{u}(t)=\left[T+(\beta-1)\int\gamma(t)dt\right]^{-\frac{1}{\beta-1}}, \tag{3.80}$$

бунда $T>0$ — интеграллаш доимийси. Сўнгра (3.76), (3.77) юқори (u_+) ва қуйи (u_-) ечимларни (3.78), (3.9) ечимлар билан қуйидагиларни танлаб аралаштирамиз

$$\tau(t)=\int\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-1}dt+c,\ c\geq 0 \tag{3.81}$$

қуйидаги кўринишда

$$u_{\pm}(t,x)=\bar{u}(t)\bar{w}(\tau(t),x), \tag{3.82}$$

бунда $\bar{u}(t)$ (3.80) формула билан берилган, $\bar{w}(\tau, x)$ —(3.79) тенгламанинг хусусий ёки юқори умумлашган ечими.

Энди $t \to +\infty$ да $\tau(t) \to +\infty$ ёки $\tau(t) \to \tau_{\max}$, $\tau_{\max} < +\infty$ га боғлиқ ҳолда локализация, глобал мавжудлик, Коши масаласининг юқори ва қуйи баҳоси ҳақида гапириш мумкин. Агар $t \to +\infty$ да $\tau(t) \to +\infty$ бўлса, (3.81) да c константага аҳамият бермаса ҳам бўлади.

Таъкидлаш керакки, агар (3.80) да $T = 1$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{\beta \to 1} u_{\pm}(t, x) = u(t, x)$, бунда $u(t, x)$ — (3.76) тенглама ечими. (3.76), (3.77) масаланинг турли хусусий ҳоллари учун бу муносабатни қўллаб, чизиқсиз эффектлар ўрнатилган эди (масалан [72, 95, 97, 112] ва у ерда келтирилган ҳаволаларга қаранг). Таъкидлаб ўтамиз, $k(x) = r^m$, $r = |x|$, $m < 2$, $\gamma(t) = \gamma$ да (3.76), (3.77) масала автомодел. Ҳақиқатдан,

$$u(t, x) = \left[T + \gamma(\beta - 1)t\right]^{-\frac{1}{\beta - 1}} f(\xi),$$

$\xi = \phi(r) / \psi(t)$, бу ерда $\phi(r) = r^p / p$, $p > 0$, $r = |x|$, $\phi(r) = \ln r$, агар $p = 0$,

$$p = (1 + n - m) / (n + 1),\ \psi(t) = \left[\frac{T + \gamma(\beta - 1)t}{\gamma(\beta - kn)}\right]^{\frac{\beta - kn}{(\beta - 1)(n + 1)}} \text{ бўлса}$$

$f(\xi)$ учун қуйидагига эга бўламиз

$$\xi^{1-s} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}\left|\frac{df^k}{d\xi}\right|^{n-1} \frac{df^k}{d\xi}\right) + \frac{\xi}{n+1}\frac{df}{d\xi} + \frac{f + \varepsilon f^{\beta}}{\beta - kn} = 0, \qquad (3.83)$$

бунда $s = \dfrac{N}{p}$. (3.83) тенглама чизиқсиз ажратиш алгоритми асосида ҳосил қилинган. $\gamma(t) = \gamma$ ҳолида ўринли.

Теорема 14. R^N да $\beta > kn + \dfrac{n + 1 - m}{N}$, $|x|^m \left|\nabla u_+^k\right|^{n-1} \nabla u_+^k \in C(R^N)$, $u_0(x) \le u_+(0, x)$ бўлсин.

У ҳолда Q да (3.76), (3.77) масаланинг глобал ечими мавжуд, у учун қуйидаги баҳо ўринли

$$u(t, x) \le u_+(t, x),$$

бунда $u_+(t, x)$ (3.72) ифода ξ билан аниқланган, у (3.83) формула билан аниқланган.

Исбот. 14-теорема исботи ечимларни таққослаш асосида келтирилади. Таққосланувчи функция квазичизиқли тенгламанинг чизиқсиз ажратиш алгоритми асосида қурилади.

Агар $\beta > kn + \frac{n+1-m}{N}$ шарт бажарилса, у ҳолда $D = (0, +\infty) \times \{|x| < l(t)\}$ да $Bu_+(t, x) \le 0$ бўлишига ишониш қийинмас, бу ерда

$$l(t) = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{n}{p(n+1)}} \left[p\psi(t)\right]^{\frac{1}{p}},$$

$\psi(t)$ — юқорида аниқланган функция, $u_+(t, x)$ — $\xi = \frac{r^p}{p \cdot \psi(t)}$ билан (3.72) даги юқори ечим. $Bu_+ \le 0$ шартнинг бажарилиши 4-лемма шартларини қаноатлантиради, справедливость которой для более обҳего случая оправдана вўпуклостью функции u^β, входяҳей как источник или сток, характера нелинейнўх зависимостей в уравнении (3.76), что $u_+(t, x)$ — верхнее решение для задачи Коши (3.76), (3.77).

Таъкидлаб ўтамиз, β параметрнинг критик қиймати $\beta = \beta_k = kn + \frac{n+1-m}{N}$ ҳисобланади.

Ажратиш алгоритми локаллашиш шартини ўрнатиш, (3.76), (3.77) масаланинг қуйи ечими баҳосини олиш имконини ҳам беради.

(3.76), (3.77) ($k(x) = r^m$) масала учун критик ҳолат $t > 0$да қуйидаги шартнинг бажарилиши ҳисобланади

$$\gamma(t)\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-\beta} \tau(t) = \frac{s}{n+1}, \tag{3.84}$$

бунда $s = N / p$, $p = (n+1-m)/(n+1)$, $\bar{u}(t)$, $\tau(t)$ (3.80), (3.81) формулалар билан берилган ($t \to +\infty$ да $\tau(t) \to +\infty$).

Қуйидаги шарт бажарилганда

$$\gamma(t)\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-\beta} \tau(t) < \frac{s}{n+1} \tag{3.85}$$

($\varepsilon = -1$) (3.76), (3.77) масаланинг глобал ечимлари мавжуд бўлади, $\varepsilon = +1$ шарт учун (3.76), (3.77) масаланинг глобал ечими мавжуд бўлиши учун қуйидаги кўринишга эга бўлиши керак

$$\gamma(t)\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-\beta} \tau(t)\left(1 + c_2^{\frac{(\beta-1)n}{kn-1}}\right) < \frac{s}{n+1} \tag{3.86}$$

бунда $c_2 > 0$ доимий.

Мисол. (3.76) да $\gamma(t) = (t+A)^\alpha$, $\alpha > -1$, $k(x) = r^m$ бўлсин, бу ерда $A > 0$ доимий, у ҳолда (3.85) формула баъзи қўшимчалардан сўнг, (3.76), (3.77)

Коши масаласининг глобал ечими мавжудлигининг қуйидаги шартларини беради:

$$\beta > 1 + (1+\alpha)\left[kn - 1 + (n+1)/s\right],\ \alpha > -1.$$

Чизиқсиз ажратиш алгоритмидан фойдаланиб, юқори ва қуйи ечимларни қуриш қийин эмас, жумладан критик ҳолатда ҳам:

$$\beta = 1 + (1+\alpha)\left[kn - 1 + (n+1)/s\right].$$

(3.84) – (3.86) шартларни ҳосил қилишни кўрсатамиз.

Бунинг учун (3.76), (3.77) масаланинг $u_+(t, x)$ юқори ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз

$$u_+(t, x) = \bar{u}(t)\, f_0(\xi),$$

бунда $\bar{u}(t)$ (3.80) формула билан берилади, а $f_0(\xi)$ $-\xi = \varphi(r)/\psi(t)$, $\varphi(r) = r^p / p$, $r = |x|$ билан берилган (3.70) даги функция.

$$p = \frac{n+1-m}{n+1},\ \psi(t) = \left[\tau(t)\right]^{\frac{1}{n+1}},\ \tau(t) = \int \left[\bar{u}(t)\right]^{kn-1} dt.$$

У ҳолда $u_+(f, x)$ учун D да $Bu_+ \le 0$ шартнинг бажарилиши қуйидагини беради

$$\xi^{1-s} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1}\left|\frac{df_0^k}{d\xi}\right|^{n-1} \frac{df_0^k}{d\xi}\right) + \frac{\xi}{n+1}\frac{df_0}{d\xi} + \gamma(t)\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-\beta} \tau(t)\left(f_0 + \varepsilon f_0^\beta\right) \le 0$$

$f_0(\xi)$ D да (3.71) тенгламани қаноатлантиришини ҳисобга олган ҳолда, қуйидагига эга бўламиз

$$\gamma(t)\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-\beta} \tau(t)\left(f_0 + \varepsilon f_0^\beta\right) - \frac{s}{n+1} f_0 \le 0.$$

Бундан кўриниб турибдики, $\varepsilon = -1$ ҳолида $Bu_+ \le 0$ бўлиши учун (3.85) шартнинг, $\varepsilon = +1$ да эса (3.86) шартнинг бажарилиши етарли. (3.84) шартнинг бажарилиши ҳолида охирги тенгсизлик қуйидаги кўринишга эга бўлади

$$\varepsilon\gamma(t)\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-\beta} \tau(t)\, f_0^\beta \le 0.$$

§ 3. Чизиқсиз ажратиш алгоритми ва «линеаризация»

Бу параграфда юқори ва қуйи функцияларни қуриш линеаризации ёрдамида амалга оширилиши мумкинлигини кўрсатамиз.

Қуйидаги квазичизиқли тенгламани кўриб чиқамиз

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla\left[\left(x\left(^{m}\left(\nabla u^{k}\left(^{n-1}\nabla u^{k}\right]-\gamma(t)u^{\beta}\right.\right.\right.\right. \qquad (1)$$

$$\bar{u}(t)=(T+\gamma(\beta-1)\gamma(t))^{\frac{-1}{\beta-1}}$$

ни берадиган

$\frac{d\bar{u}}{dt}=-\gamma(t)\bar{u}^{\beta}$ тенгламани ечамиз.

$f(\xi)$ учун

$$\omega(\tau(t),x)=f(\xi),\ \xi=\varphi(x)/\tau^{\frac{1}{n+1}}$$

деб олиб, қуйидаги тақрибий автомодел тенгламани ҳосил қиламиз

$$\xi^{1-s}\frac{d}{d\xi}(\xi^{s-1}|\frac{df^{k}}{d\xi}|\frac{df^{k}}{d\xi})+\frac{\xi}{n+1}\frac{df}{d\xi}+\gamma(t)\tau(t)\left[\overline{u(t)}\right]^{\beta-kn}(f-f^{\beta})=0$$

Бошланғич тенгламани

$$\bar{u}(t)=(T+\gamma(\beta-1)\gamma(t))^{\frac{-1}{\beta-1}}$$

атрофида қуйидаги усулда «чизиклаштирамиз»

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla((x(^{m}(\nabla u^{k}(^{n-1}\nabla u^{k})-\gamma(T+\gamma(\beta-1)\beta(t))^{-1}u;$$

бу ерда u(t,x) учун линеаризацияланган тенглама ифодаси сақланган.

Энди (1) тенгламанинг ечимини қуйидаги кўринишда қидирамиз

$$u(t,x)=\left[a(t)\right]^{-\frac{1}{\beta-1}}W(\tau(t),x),\ \text{бу ерда}\ a(t)=T+\gamma(\beta-1)\gamma(t)$$

У ҳолда $W(\tau(t),x)$ учун ютиш хади булмаган бошланғич тенгламани ҳосил қиламиз, лекин t ўрнига янги $\tau(t)$ ўзгарувчиси қатнашади, яъни

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}=\nabla((x(^{m}(\nabla W^{k}(^{n-1}\nabla W^{k}),\tau(t)=\int\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-1}dt,\ \text{бунда}\ \bar{u}(t)=\left[a(t)\right]^{-\frac{1}{\beta-1}}$$

(2)

Шундай қилиб биз юқорида бошқа усулда қурилган $z_{\pm}(t,x)$ функцияни ҳосил қилдик.

Куйидаги

$$\gamma(t)\tau(t)\bar{u}^{\beta-kn}(t)=\frac{s}{n+1},$$

бунда $s=\frac{n+1}{n+1-m}N;$

критик хол деб аталади.

Бу ҳолатда (1) ни «линеаризируем»

$$\tilde{u}(t)=\left[a(t)\ln a(t)\right]^{-\frac{1}{\beta-1}}$$

У ҳолда юқоридагиларни такрорлаб қуйидагига эга бўламиз

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla((x(^{m}(\nabla u^{k}(^{n-1}\nabla u^{k})-\gamma(t)\left[a(t)\ln a(t)\right]^{-1}u$$

Алмаштириш ёрдамида охирги ҳаддан қутулиш

$$u(t,x)=\left[\ln a(t)\right]^{-\frac{1}{\beta-1}}W(\tau(t),x))$$

$W(\tau(t),x)$ учун қуйидаги тенгламани беради

$$\frac{\partial W}{\partial \tau_1}=\nabla((x(^{m}(\nabla W^{k}(^{n-1}\nabla W^{k}), \qquad (3)$$

бунда $\tau_1(t)=\int\left[\tilde{u}(t)\right]^{kn-1}dt$

Бу ҳолда (1) тенглама қуйидаги тақрибий автомодел ечимга эга бўлади

$$W(\tau(t),x)=(T_1+\tau_1(t))^{-\frac{1}{\beta-1}}f_0(\xi)$$

бунда

(3) формула билан аниқланади. Таъкидлаб ўтамиз, kқnқ1 яримчизиқли ҳолда, $\tau(t)=t+A$ ни аниқлаш осон. Шунинг (1) тенгламанинг тақрибий автомодел ечими қуйидаги кўринишга эга бўлади

$u(t,x)\sim\tilde{u}(t)f_0(\xi)$,

бу ерда $f_0=B\exp-\xi^2/4);\xi=\varphi(x)/(t+A)^{\frac{1}{2}}$; ва бошланғич тенгламанинг юқори ечими ҳисобланади. (47) ишда кўрсатилганидек, (1) (nқkқ1) тенглама учун Коши масаласи ечимининг асимптотикаси қуйидаги тенгламанинг автомодел ечимига мос келади

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=\Delta u_a-\frac{n}{2}*\frac{1}{(T+t)\ln(T+t)}*u_a$$

Пастда (1) да ечим атрофида линеаризацияни амалга оширию, қуйидагига эга бўламиз

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nabla((x(^{m}(\nabla u^{k}(^{n-1}\nabla u^{k})-\frac{\gamma(t)}{q(t)}u$$

Чизиқли тенглама

$$\frac{du}{dt}=-\frac{\gamma(t)}{a(t)}u$$

Ечими юқорида аниқланган функция билан мос тушади, яъни $\frac{d\bar{u}}{dt}=-\gamma(t)\bar{u}^{\beta}$

тенглама ечими билан

Шунинг учун

$$u(t,x)=\bar{u}(t)W(\tau(t),x)\ ,\ \mathrm{W}(\tau(t),\mathrm{x})$$

учун қуйидаги тенгламани оламиз

$$\frac{\partial W}{\partial t_2}=\nabla((x(^m\left(\nabla W^k\left(^{n-1}\nabla W^k,\right.\right.$$

бу ерда $\tau_2(t)=\int\left[\bar{u}(t)\right]^{kn-1}dt$, яъни t>0 да $\tau_2(t)=\tau(t)$, бунда $\tau_2(t)=\tau(t)$ (2)

формула билан аниқланган.

4 Автомодел ечимлар Гамильтон Якоби тенгламаси ечими сифатида

Юқорида қурилган юқори ва қуйи ечимлар Гамильтон-Якоби тенгламасининг автомодел ечими сифатида олиниши мумкинлигини кўрсатамиз.

$$\text{Q да } \bar{u}(t)=[T+\gamma(\beta-1)\int\gamma(t)dt]^{-1/\beta-1}$$

ечимга эга. Энди

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u^k+\varepsilon\gamma u^\beta$$

тенгламани кўриб чиқамиз.

(1) тенглама ўрнига қуйидаги Гамильтон-Якоби тенгламасига қўрамиз

$$\frac{\partial u}{\partial t}=ku^{k-2}(\nabla u)^2-\gamma(t)u^\beta \tag{4}$$

$\bar{u}(t)$ функцияси $\frac{d\bar{u}}{dt}=-\gamma(t)\bar{u}^\beta$,тенгламани ечими бўлсин

Тенгламанинг u^β ҳадини линеаризация қиламиз. У ҳолда (4) дан қуйидаги тегламага келамиз.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=ku^{k-2}(\nabla u)^2-\frac{\gamma}{T+\gamma(\beta-1)\gamma(t)}u$$

Қуйидаги

$$u(t,x)=(T+\gamma(\beta-1)\gamma(t))^{-\frac{1}{\beta-1}}W(\tau(t),x)$$

олмаштириш киритиб охирги тенглама ўрнига

$$\frac{\partial W}{\partial\tau}=kW^{k-2}(\nabla W)^2\ ,$$

тенгламага эга бўламиз бу ерда $\tau(t)=\int\left[\bar{u}(t)\right]^{k-1}dt$

Охирги тенглама қуйидаги кўринишдаги

$$W = f(\xi) = \left(A - \frac{k-1}{k}\xi^2 \right)_+^{\frac{1}{k-1}}$$, бунда A>0 – константа, $\xi = \left(x\left(/ \left[\tau(t)\right]^{1/2}\right.\right.$

автомодел ечимга эга эканлигини кўриш қийин эмас

Бу эса аввал биз кўрган

$$u_+(t,x) = (T + \gamma(\beta-1)\gamma(t))^{-\frac{1}{\beta-1}}(A - \frac{k-1}{k}\xi^2)_+^{\frac{1}{k-1}}$$

тақрибий автомодель ечим билан бир хилдир.

Б функция эса (1) тенглама учун Коши масаласининг юқори (қуйи) ечими ҳисобланади. Худи шунга ўхшаш натижа $\varepsilon = +1$ ҳоли учун ҳам ўринли бўлади.

4-Мавзу: Ўзаро рақобатга асосланган ночизиқли биологик популяция масаласининг сифат хоссалари

Тақсимланган параметрли Колмогоров-Фишер турига мансуб бўлган диффузияли реакция масаласига тегишли умумлашган тенгламанинг ечими

Тезлиги вақтга боғлиқ бўлган конвектив кўчишга оид Колмогоров-Петров-Пискунов-Фишер туридаги диффузияли реакция умумлашган масаласини кўриб чиқамиз. Бундай диффузияли реакция жараёнини ифодалайдиган тенгламани қуйидагича

$$Lu = -p(x)\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\left(D|x|^m \nabla u\right) + kp(x)u\left(1-u^\beta\right) = 0(1) \qquad (4.36)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) > 0, \qquad x \in R^n, \qquad N \ge 1 \qquad (4.37)$$

ёзиш мумкин

Бу ерда D, $k > 0, \beta \ge 1$ мос равишда диффузия ва реакция коэффициентлари, $p(x) = |x|^{2-n}$.

(4.36) тенглама популяция ўсишининг логистик модели учун оддий диффузион моделнинг умумлашган вариантидир. Уни чизиқсиз фильтрация тенгламаси ёки қуввати $kp(x)u, kp(x)u^\beta$ га тенг бўлган, ҳам манба ҳам ютиш жараёнлари бир вақтнинг ўзида баравар таъсирини ўтказадиган муҳитдаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси каби қараш мумкин.

Бу тенглама диплоид кўпайишдаги яхши генлар тарқалишининг стохастик моделини детерминик тури сифатида, $m=0$, $k(t)=k>0$ – ўзгармас, бўлган ҳолда, Фишер томонидан [1] (ўнг томондаги квадратик чизиқсизлик ўрнига учинчи даражадагисини қўйилиши сингари) таклиф қилинган.

У тенгламани атрофлича қараб чиқиб, бир қатор фойдали натижаларга эришди. А.Н.Колмогоров, И.Г.Петровский ва Н.С.Пискуновлар бу тенгламани эвристик ва генетикага асосланган ҳолда келтириб чиқаришди. Улар томонидан яратилган [2] классик иш Фишер тенгламасига нисбатан қатъиян аналитик ёндошишга хизмат қилди.

$m=0$ ва $k(t)=k$ –ўзгармас бўлган ҳол учун бир жинсли муҳитда Коши масаласининг ечими ва (4.36) тенгламанинг тўлқин ечимларининг хусусиятлари бошқа кўпгина авторлар томонидан ҳам атрофлича ўрганилган (масалан, [1] да бу ишларга мурожаатлар кўрсатилган).

(4.36) тенглама учун бошланғич масала ечимларининг хоссаси яхши ўрганилмаганлиги сабабли, гетероген муҳитдаги диффузияли реакция жараёнининг эволюциясини ва реакция коэффициенти вақтга боғлиқ бўлган хол, яъни $k = k(t)$ ни кузатиш бир мунча қизиқарли.

Бизни яна (4.36) тенгламанинг кўп ўлчовли холи учун диффузияли реакция жараёни эволюцияси қизиқтиради.

Тақдим қилинаётган параграф (4.36), (4.37) масала ечимининг хусусиятларини ўрганишга бағишланган.

Тўлқинни чекли тезлик билан тарқалишини таъминловчи m параметр ва $k(t)$ диффузия коэффициентига қўйиладиган шартлар аниқланган. Тўлқиннинг тарқалиш чуқурлиги ва тезлиги учун формула чиқарилган. Бундан ташқари (4.36) тенгламанинг ечимини икки томонлама баҳолаш мезони исботланган. Тенглама ечимини инвариант хоссага эга эканлиги кўрсатилган.

4.6.1. Ечимларнинг инвариантлик хоссаси

Қуйидаги

$$u(t,x) = \bar{u}(t)w(t,x) \tag{4.38}$$

функция (4.36) тенгламани яна қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Бу ерда $\bar{u}(t)$ (4.36) тенламанинг диффузия қисмисиз бўлган ечими

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = k(t)\bar{u}\left(1-\bar{u}\right), \qquad \text{яъни } \bar{u}(t) = e^{\int_0^t k(t)dt} \Big/ \left(1 + e^{\int_0^t k(t)dt}\right) \tag{4.39}$$

Хақиқатан, (4.38)ни (4.36)-га олиб бориб қўйиш натижасида, (4.38) ни ҳисобга олган ҳолда, (4.39) ни осонлик билан ҳисоблаш мумкин. $w(t,x)$ учун қуйидаги тенгламага эга бўламиз

$$Lw = -\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(Dx^m \cdot \frac{\partial w}{\partial x}\right) + u_1(t)(1-w) = 0 \ . \tag{4.40}$$

Бу ерда $u_1(t) = k(t)\bar{u}(t)$.

Лекин, $\int_0^t k(t)dt$ бўлса, (4.39) га кўра $\lim\limits_{t\to\infty} \bar{u}(t) = 1$ бўлади. Шунинг учун етарли катта t лар учун $u_1(t) \sim k(t)$ бажарилади, яъни яна (4.36) тенгламани ҳосил қиламиз.Шунинг учун $\bar{u}(t)w(t,x)$ функцияни (4.36) тенгламанинг инварианти деб ҳисоблаймиз. Бу ерда $\bar{u}(t)$ – (4.39) тенгламанинг ечими, $w(t,\ x)$ эса (4.40) тенгламанинг ечими.

4.6.2. Ечимни баҳолаш

(4.36), (4.37) масаланинг ечими учун қуйидаги теорема ўринлидир

Теорема 1. $0 \le u_0(x) \le 1,\quad x \in R$ бўлсин. У ҳолда (4.36), (4.37) масаланинг ечими учун $Q = \{(t,x): t > 0,\ x \in R)\}$ да икки томонлама баҳолаш ўринли

$$\bar{u}(t)(T+t)^{-s/2} e^{-\frac{(x)^{2-m}}{4D(T+t)}} \le u(t,x) \le e^{\int_0^t k(t)d(t)} (T+t)^{-s/2} e^{-\frac{(x)^{2-m}}{4D(T+t)}} \qquad (4.41)$$

Бу ерда $\bar{u}(t)$ юқорида аниқланган функция ва $s = \dfrac{2}{2-m}$.

Исботи. Теоремани исботлаш учун аввал юқори баҳони олишимиз керак. Бунинг учун (4.36) да қуйидаги алмаштиришни бажарамиз

$$u(t,x) = e^{\int_0^t k(t)d(t)} w_1(t,x)..$$

У ҳолда $w_1(t,x)$ учун қуйидаги тенгламага эга бўламиз

$$L_1 w_1 = -\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(D x^m \frac{\partial x_1}{\partial x} \right) - k(t) w_1^2 = 0 \qquad (4.42)$$

(4.42) тенгламани $\varphi(x) = 2x^{\frac{2-m}{2}}$ бўлганда, $u(t,x) = w(t,\varphi(x))$, алмаштиришни бажарган ҳолда, қуйидаги «радиал симметрик» кўринишга олиб келамиз

$$L_1 w_1 = -\frac{\partial w_1}{\partial t} + \varphi^{1-s} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(D\varphi^{1-s} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) - k(t) w_1^2 = 0 \qquad (4.43)$$

Ҳар қандай $T > 0$ да $w_+(t,x)$ учун

$$L_1 w_+ = -k(t)(T+t)^{-s/2} e^{-\frac{x^{2-m}}{4D(T+t)}} \le 0$$

бўлгани сабабли, $w_+(t,x)=\left(T+t\right)^{-s/2}e^{\frac{-x^{2-m}}{4D(T+t)}}$ функция (4.42) тенгламани юқори ечими эканлиги аниқдир.

Шунинг учун ечимларни солиштириш теоремасидан [3] агар $w_+\left(0,x\right)\le u_0(x),\ \ x\in R^N$ бўлса, Q соҳада қуйидаги

$$u(t,x)\le e^{\int_0^t k(t)d(t)}w_+(t,x) \tag{4.44}$$

юқори баҳога эга бўламиз.

Қуйи баҳони олиш учун, олдинги қуйи ечимга чизиқсиз парчалаш усулини [4] қўллаймиз. Бу усулга асосан, қуйи ечим қуйидаги ифода орқали қидирилади

$$u(t,x)=\bar{u}(t)w\_(t,x), \tag{4.45}$$

бу ерда $\bar{u}(t)$ юқоридаги(4.39) формуладан топиладиган функция.

Унда (4.36) дан $Lw\_$ ва

$$w_0=\left(T+t\right)^{-s/2}e^{\frac{-x^{2-m}}{4D(T+t)}}$$

функция учун

$$L_1w_0=u(t)k(t)w_0(1-w_0)\ge 0\quad Q\text{да ,агар } T\ge 1 \text{ўзгармас бўлса}$$
$$L_1w\_=-\frac{\partial w\_}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(Dx^m\frac{\partial w\_}{\partial x}\right)+\bar{u}(t)k(t)w\_(1-w\_)=0$$

га эга бўламиз.

У ҳолда, ечимларни солиштириш теоремасини [3] қўллаб, (4.45) га асосан, қуйидагига эга бўламиз

$$u(t,x)\ge\bar{u}(t)\left(T+t\right)^{-s/2}e^{-\frac{x^{2-m}}{4D(T+t)}}$$

ва (4.43) ни ҳисобга олган ҳолда теорема1 исботланди.

4.6.3. Кўп ўлчовли ва умумлашган ҳол

Энди Колмогоров-Фишер турига мансуб бўлган даражали чизиқсизликка эга бўлган умумийроқ масалани кўриб чиқамиз

$$t>0,\ x\in R^N \text{ да } L_2u\equiv -\frac{\partial u}{\partial t}+D\Delta u+k(t)u\left(1-u^{\beta}\right) \tag{4.46}$$

$$u\,|_{t=0}=u_0(x) \qquad x\in R^N \tag{4.47}$$

$\beta\ge 1,\ 0\le u_0(x)\le 1,\ 0<k(t)\in C(0,\infty)$ деб қабул қиламиз. Бу масалани ечиш учун теорема2 ни исботлаймиз.

Теорема2. $0\le u_0(x)\le 1 \quad x\in R^N$ берилган. У ҳолда (4.46),(4.47) масаланинг ечими Qда қуйидагича баҳоланади

$$\bar{u}(t)(T_0+t)^{-N/2}e^{-\frac{|x|^2}{4d(T+t)}}\le u(t,x)\le e^{\int_0^t k(t)dt}(T+t)^{-N/2}e^{-\frac{|x|^2}{4d(T+t)}} \tag{4.48}$$

Бу ерда $\bar{u}(t)$ – (4.46) тенгламанинг диффузия қисми бўлмаган ҳолдаги ечими:

$$\frac{d\bar{u}}{dt}=k(t)\bar{u}\left(1-\bar{u}^{\beta}\right),\ \text{яъни}\ \bar{u}(t)=\left(\frac{\beta\cdot e^{\int_0^t k(t)dt}}{1+\beta\cdot e^{\int_0^t k(t)dt}}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{4.49}$$

бу ерда $T_0\ge 1$ ўзгармас катталик.

(4.46), (4.47) масала ечимларининг (4.48) баҳоланиши, аввалги 1-теоремадаги баҳолашдан, (4.48) даги s нинг ўрнида фазо ўлчами N ва бошқа юқоридаги $\bar{u}(t)$ ишлатилганлиги билан фарқ қилади.

4.4. Тўлқин кўринишдаги ечимнинг ҳаракат тезлигини баҳолаш

(4.36)даги $m=0,\ k(t)=k$ ўзгармас бўлсин. У ҳолда (4.36) тенгламадаги тўлқин ечимининг c тўлқин тарқалиш тезлиги учун

$$Df''-cf'+f\left(1-f^{\beta}\right)=0 \tag{4.50}$$

$$u(t,x)=f(\xi), \qquad \xi=ct+x, \tag{4.51}$$

[1, 2] ишларнинг авторлари $c\ge 2\sqrt{kD}$ баҳони олишган.

(4.36) тенгламадаги тўлқин тезлиги c t га боғлиқ яъни, $c = c(t)$ бўлиши кераклиги аёндир.

Бу ҳолда, (4.36) тенгламадаги қуйидагича

$$u(t,x) = e^{\int_0^t k(t)dt} w(t,x) \tag{4.52}$$

алмаштириш бажариб,

$$L_3 w = -\frac{\partial w}{\partial t} + D\Delta w - e^{\beta \int_0^t k(t)dt} w^{\beta} = 0 \tag{4.53}$$

тенламани ҳосил қиламиз.

Иккинчи томондан қуйидаги алмаштиришни бажарамиз

$$u(t,x) = \bar{u}(t) w(t,x). \tag{4.54}$$

Бу ерда, $\bar{u}(t)$ (4.39) тенгламанинг ечими бўлиб, $w(t,x)$ учун қуйидагига

$$L_4 w = -\frac{\partial w}{\partial t} + D\Delta w + \bar{u}(t)k(t)w\left(1 - w^{\beta}\right) = 0 \tag{4.55}$$

эга бўламиз

Энди юқорида қайд қилинган фикрларга асосан қуйидаги теорема исбот қилинади:

Теорема3. (4.46) да $\beta \geq 1,\ 0 < k(t) \in C(0, \infty)$ и $0 \leq u_0(x) \leq 1$ бўлсин. У ҳолда (746), (4.47) масаланинг ечими учун $Q = \left\{(t,\ x):\ t > 0,\ x \in R^N\right\}$ соҳада қуйидаги

$$\bar{u}(t)(T_0 + t)^{-N/2} e^{-\frac{|x|^2}{4D(T+t)}} \leq u(t,x) \leq e^{\int_0^t k(t)dt} (T + t)^{-N/2} e^{-\frac{|x|^2}{4D(T+t)}}$$

баҳо ўринлидир. Бу ерда, $\bar{u}(t)$ – (4.49) формула асосида берилади, тўлқиннинг тарқалиш тезлиги $c(t) = \frac{d|x|}{dt}$ учун t нинг етарли катта қийматлари учун,

$$c(t) = \frac{d|x|}{dt} \geq 2\sqrt{Dk(t)}$$

баҳо ўринлидир.

Агар, функция $k(t) = k = const$ ва $\beta = 1$ бўлса, бундай натижадан [3] да қайд қилинган натижа келиб чиқади. Бу усулларни қуйидаги тенглама

$$L_5 w = -\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\left(D|x|^m \nabla w\right) + k(t) w\left(1 - w^{\beta}\right) = 0$$

учун ҳам ўринли бўлади.

4.4.1. Ечим инварианти ҳақида.

Аввал

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Du^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + ku(1-u) \tag{4.56}$$

тенгламани (4.47) бошланғич шарт билан қараймиз ва бу масала ечимларининг ҳоссаларини ўрганамиз.

Бунинг учун

$$u(t,x) = u(t) w\left(\tau\left(t,x\right)\right) \tag{4.57}$$

алмаштириш бажарамиз. Бу ерда $\bar{u}$ қуйидаги

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = k\bar{u}(1-\bar{u})$$

тенгламанинг ечими бўлиб, бу ерда $\bar{u}(t) = \frac{e^{kt}}{1+e^{kt}}$ бўлади.

Натижада (4.56) тенглама

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(w^{\sigma}\frac{\partial w}{\partial x}\right) - k\bar{u}^{-\sigma+1} w(1-w) \tag{4.58}$$

кўринишга келади. Бунда (4.56) тенгламанинг кўриниши ўзгармаган бўлиб, фақат t ўзгарувчи ўрнига янги ўзгарувчи киритилди

$$\tau(t) = \int\left(e^{kt}/(1+e^{kt})\right)^{\sigma} dt = \frac{1}{k(1-\sigma)}\left(1+e^{kt}\right)^{1-\sigma}, \sigma \neq 1$$

Агар $\sigma = 1$ бўлса, у ҳолда $\tau(t) = \frac{1}{k}\ln\left(1+e^{kt}\right)$бўлиб, (4.58) тенглама $t \to +\infty$ да қуйидаги

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(w^{\sigma}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + kw(1-w) \tag{4.59}$$

асимптотик кўринишга келади. Шуни айтиб ўтиш керакки, $t > 0$ бўлганда $0 < \bar{u}^{\sigma} \leq 1$ ва $t \to +\infty$ да $\bar{u}(t) = 1$ бўлади.

Бу эса, (4.59) тенглама (4.56) тенгламанинг (асимптотик) инварианти дейишга асос бўла олади.

4.4.2. Ҳаракатланувчи муҳит ҳоли

Жараён

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v(t)\frac{\partial u}{\partial x} + ku(1-u^\beta)$$

тенглама билан ифодаланганда

$$u(t,x) = w(t,\xi),\ \xi = x - \int_0^t v(t)dt \tag{4.60}$$

алмаштириш ёрдамида

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - kw(1-w^\beta) \tag{4.61}$$

кўринишга келамиз, яъни бу кўринишдаги тенглама юқорида айтиб ўтилган олимлар томонидан илгари ўрганилган. Шуни таъкидлаш жоизки, (4.60) алмаштириш бажарилганда, бошланғич шарт ўзгармайди.

(4.61) тенгламанинг тўлқинли ечими

$$w = f(z),\ z = ct \pm \xi \tag{4.62}$$

учун қуйидаги автомодель тенгламага эга бўламиз

$$Df'' \pm Cf' + kf(1 - f^\beta) = 0\,. \tag{4.63}$$

Эслатма: (4.63) тенгламада $\beta > 0$ ўринли бўлсин. У ҳолда (4.63) тенглама $\xi \to +\infty$ бўлганда,

$$Df'' + cf' + kf = 0$$

чизиқли тенгламанинг ечими нолга интилувчи асимптотикалардан бирига, яъни, ёки $f(\xi) \sim 1$ ёки $f(\xi) \to 0$ асимптотикага эга бўлади.

5-Мавзу: Нолокал чегаравий шартлар билан боғланган параболик тенгламалар системаси ва уларнинг глобал ечимларининг мавжудлик шартлари

Рассмотрим следующее параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u^{\beta}, \qquad (x,t)\in R_{+}\times(0,+\infty), \tag{1}$$

с нелинейным граничным потоком и начальным условием

$$-\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=u^{q}(0,t), \quad t>0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\ge 0, \quad x\in R_{+}, \tag{3}$$

где $p>2,\ \beta,\ q>0$, $u_0(x)$ - ограниченная, непрерывная, неотрицательная функция.

Уравнения (1) встречается в различных областях естествознание. В частности, его можно рассматривать как модель распространение тепла с нелинейным коэффициентом теплопроводности зависящей от градиента, встречающей в химической реакции. Кроме того, уравнения (1) возникает при математическом моделировании диффузии в нелинейных средах, при исследование проблем течения жидкостей через пористые пласты, в задачах динамики биологических популяций, политропической фильтрации, образования структур в синергетике и в ряде других областях [2, 3].

Хорошо известно, что вследствие вырождения уравнения (1) при $u=0$ может не имеет классического решения. Поэтому ее решение естественно понимать в обобщенном смысле из класса $0\le u,\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\in C\left(R_{+}\times(0,+\infty)\right)$ и удовлетворяющее уравнению (1) в интегральном смысле.

Исследованию различных качественных свойств решений задачи (1)-(3) для частных значений числовых параметров посвящено большое количество работ. Условия существования или несуществования глобального по времени решения задачи Коши для уравнения (1) были изучены в работах [5] и получены условие глобальной разрешимости:

$$q > 2p - 1$$

при достаточно малом $u_0(x)$. Доказано, что если $1 < q < 2p - 1,$ то любое нетривиальное решение взрывается за конечное время.

Значение $q_c = 2p - 1$ принято называть критической экспоненты типа Фужита[4]. Многие аналогичные результаты были установлены для различных нелинейных уравнений параболического типа.

В работах [6], было впервые для задачи (1)-(3) в случае без источника установлено, что решение задачи (1)-(3) становятся неограниченными за конечное время, если $2(p-1)/p < q < 2(p-1)$. И были доказаны следующие утверждения:

1. Решения задачи (1)-(3) является глобальным, если $0 < q \le 2(p-1)/p$;
2. Пусть $q > 2(p-1)$ и $u_0(x)$ достаточно мала, тогда решения задачи (1)-(3) является глобальным.

Свойств неограниченности решение для следующей модели реакции-диффузии с нелокальними нелинейностями

$$u_t = \Delta u^m + u^\beta, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = u^q, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

где $\Omega \in R^N$, были изучены в [7, 8].

В работе [10] изучено условие существование неограниченных и глобальных решений на основе построения нижних и верхних автомодельных решений. Показаны, что решение задачи является(1)-(3) неограниченным, если выполняется одно из следующих условий

1) $1 < \beta \le 2(p-1)+1$, $2(p-1)/p < q < 2(p-1)$;

2) $\beta > 1$, $q > 2(p-1)/p$;

3) $\beta > 2(p-1)+1$, $q > 2(p-1)$;

Авторы работ [11] изучали задачу (1)-(3) для многомерного случая без источника. Ими получены критическая экспонента глобального существования решения

$$q_0 = 2(p-1)/p$$

и критическая экспонента типа Фужита

$$q_c = \left(1 + 1/N\right)\left(p-1\right)$$

с помощью построения нижних и верхних решений.

В работе авторов [12] исследованы задачи Коши для (1) и были получены главный член асимптотики автомодельных решений.

Целью данной работы является получение главного члена асимптотики автомодельных решений на основе метода эталонных уравнений [2], которая играет важную роль при исследовании качественных свойств изучаемых процессов. При критических значениях числовых параметров установлена асимптотика решений вблизи свободной границы. Предлагается способ выбора подходящего начального приближения для итерационного процесса при численных исследованиях решение рассматриваемой задачи (1)-(3).

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Асимптотика автомодльных решений рассматриваемой задачи понимается в следующем смысле:

будем, говорит, что $\Phi_2(\eta)$ *является асимптотикой функции* $\Phi_1(\eta)$*, если*

$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{\Phi_1(\eta)}{\Phi_2(\eta)} = 1 \ \textit{при}\ \Phi_2(\eta)\neq 0 \ \textit{и}\ \lim_{\eta\to\infty}\Phi_1(\eta) = 0 \ \textit{при}\ \Phi_2(\eta) = 0.$$

1. Случае $\beta \le 1,\ q > 2(p-1)$**.** Рассмотрим следующего автомодельного решения задачи (1)-(3)

$$u_1(x,t) = t^{\alpha}\varphi(\xi),\ \xi = xt^{-\gamma}, \tag{4}$$

где $\alpha=\dfrac{1}{1-\beta},\ \gamma=\dfrac{p-1-\beta}{p(1-\beta)}$.

С помощью хорошо известного принципа сравнения решений можно показать, что $u_1(x,t)$ будет нижним решением задачи (1)-(3). Для этого функция $\varphi(\xi)$ должна удовлетворят следующей краевой задаче:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi+\varphi^{\beta}=0 \qquad (5)$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}=0 \qquad (6)$$

Рассмотрим функцию

$$\bar{\varphi}(\xi)=\left(a-\frac{p-2}{p}\gamma^{\frac{1}{p-1}}\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{\frac{p-1}{p-2}} \qquad (7)$$

где $a>0,\ (y)_+=\max(0,y),$ которое строится на основе метода эталонных уравнений [2].

Покажем, что функция (7) будет асимптотикой решений задачи (5), (6).

Теорема 1. Решение задачи (5), (6) с компактным носителем при

$$\xi\to\left(\frac{ap}{(p-2)\gamma^{1/(p-1)}}\right)^{(p-1)/p}$$

имеет асимптотическое представление

$$\varphi(\xi) \sim \bar{\varphi}(\xi)(1+o(1))$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (5) в следующем виде

$$\varphi=\bar{\varphi}(\xi)w(\tau), \qquad (8)$$

где $\tau = -\ln\left(a - b\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)$, $b = \frac{p-2}{p}\gamma^{1/(p-1)}$, при этом $\tau \to +\infty$ при $\xi \to \left(\frac{ap}{(p-2)\gamma^{1/(p-1)}}\right)^{(p-1)/p}$, что позволяет исследовать асимптотическую устойчивость решения задачи (5), (6) при $\tau \to +\infty$.

Подставляя (8) в уравнение (5) с учетом (7) оно примет вид

$$\frac{d}{d\tau}(L_1w)^{p-1} + \left(k_1\phi_1(\tau) - \frac{p-1}{y}\right)(L_1w)^{p-1} + k_2L_1w - k_3w\phi_2(\tau) - k_4w^{\beta}\phi_2(\tau) = 0, \tag{9}$$

здесь и далее

$$L_1w = \frac{w}{p-2} - \frac{w'}{p-1}, \quad \phi_1(\tau) = e^{-\tau}\big/\left(a - e^{-\tau}\right), \quad \phi_2(\tau) = \frac{e^{-[(\beta+1)(p-1)-p]\tau/(p-2)}}{\left(a - e^{-\tau}\right)^{p-2}}, \quad J = bp, \quad k_1 = \frac{p-1}{bp},$$

$$k_2 = \frac{\gamma(p-1)}{(bp)^{p-1}}, \ k_3 = \frac{\alpha(p-1)}{b^{p-1}p^{p}}, \ k_4 = \frac{p-1}{(bp)^{p}}.$$

Отметим, что изучение решений последнего уравнения является равносильным изучению тех решений уравнения (1.1), каждое из которых в некотором промежутке $[\tau_0, +\infty)$ удовлетворяет неравенствам:

$$w(\tau) > 0, \ \frac{w(\tau)}{p-2} - \frac{w'(\tau)}{p-1} \neq 0.$$

Проверим, что решение $w(\tau)$ уравнения (9) имеет конечный предел w_0 или нет при $\eta \to +\infty$. Пусть

$$v(\tau) = (L_1w)^{p-1}.$$

Тогда для произодной функции $v(\tau)$ имеем

$$v' = -\left(k_1\phi_1(\tau) - \frac{p-1}{p-2}\right)v - k_2L_1w + k_3w\phi_2(\tau) + k_4w^{q}\phi_2(\tau).$$

Для анализа решений последнего уравнения введем вспомготельную функцию

$$\theta(\tau,\mu) = -\left(k_1\phi_1(\tau) - \frac{p-1}{p-2}\right)\mu - k_2L_1w + k_3w\phi_2(\tau) + k_4w^{q}\phi_2(\tau) \tag{10}$$

где μ - вещественное число. Отсюда нетрудно видеть, что при каждом значении μ функция $\theta(\tau,\mu)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\tau_1,+\infty)\subset[\tau_0,+\infty)$ и при всех $\tau\in[\tau_1,+\infty)$ выполняется одно из неравенств

$$\nu'(\tau)>0,\ \nu'(\tau)<0.$$

Тогда анализируя (10) с учетом теоремы Боля [2] заключаем, что для функции $\nu(\tau)$ существует предел при $\tau\in[\tau_1,+\infty)$.

Произведем теперь предельный переход. Очевидно, что при $\xi\to(a/b)_-^{(p-1)/p}$

$$\lim_{\tau\to+\infty}\phi_1(\tau)\to 0,\ \lim_{\tau\to+\infty}\phi_2(\eta)\to 0,$$

Тогда с учетом последнего лимита и $w'=0$ из (9) для w получим следующее алгебраическое уравнение

$$(p-1)\left(\frac{w}{p-2}\right)^{p-1}-k_2w=0,$$

решения, которого является $w=1$. Тогда в силу (8) $\varphi(\xi)\,\square\,\bar{\varphi}(\xi)$. Теорема доказана

2. Случае $\beta>2p-1,\ q<\dfrac{2(p-1)}{p}$**.** **В** этом случае автомодельное решение уравнения (1) ищется в виде

$$u_2(x,t)=t^{\alpha}\varphi(\xi),\ \xi=xt^{-\gamma},$$

где $\alpha=\dfrac{p-1}{2(p-1)-pq},\ \gamma=\dfrac{p-1-q}{2(p-1)-pq}$. Известно [11], что решения задачи (1)-(3) при $\beta>2p-1,\ q<\dfrac{2(p-1)}{p}$ является неограниченным. Согласно принципу сравнения решений для того, чтобы функция $u_2(x,t)$ была верхним решением, она должна удовлетворят следующему неравенству

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}\le\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right),\qquad (x,t)\in R_+\times R_+,$$

$$-\left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u_2}{\partial x}(0,t)\le u_2^q,\quad t>0.$$

Тогда, с учетом конкретного вида функции $u_2(x,t)$ для последних неравенств получим

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi\geq 0 \tag{11}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}\leq\varphi^q(0). \tag{12}$$

Рассмотрим теперь следующую функцию

$$\overline{\varphi}(\xi)=K(a-\xi)_+^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

где $K>0,\ a>0,\ (y)_+=\max(0,y)$. Имеет места

Теорема 2. Решение задачи (11), (12) с компактным носителем имеет асимптотику

$$\varphi(\xi)\sim C\overline{\varphi}(\xi),$$

где $C=\left(\frac{p-2}{p-1}a\gamma\right)^{1/(p-2)}\frac{p-2}{K(p-1)}$.

Теорема 2 доказывается аналогично доказательств теорем 1.

3. Случае $pq<(p-1)(\beta+1),\ q>2(p-1)$**.** Уравнения (1) допускает автомодельное решение вида

$$u_3(x,t)=(T+t)^{-\alpha}f(\xi),\ \xi=x(T+t)^{-\gamma},$$

где $\alpha=\frac{p-1}{qp-2(p-1)},\ \gamma=\frac{q-(p-1)}{qp-2(p-1)}$. В этом случае решение задачи является глобальным, если $u_0(x)$ достаточно мало [11]. Поэтому, $u_3(x,t)$ будет верхним решением задачи (1)-(3), если

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{df}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{df}{d\xi}+(\alpha+\delta)f\leq 0 \tag{13}$$

$$-\left|\frac{df}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}\geq f^q(0) \tag{14}$$

где $\delta=\frac{1}{2(p-1)}-\alpha$.

Рассмотрим функцию

$$\overline{f}(\xi)=\left(a-d(\xi+h)^{\frac{p}{p-1}}\right)_{+}^{\frac{p-1}{p-2}}$$

где $d=\dfrac{p-2}{p}\gamma^{\frac{1}{p-1}},\ h>0.$

Теорема 3. Решение задачи (13), (14) с компактным носителем имеет асимптотика

$$\varphi(\xi)\sim\overline{f}(\xi),$$

Теорема 3 доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

4. Критический случай $pq=2(p-1)$. Этот случай является аналогичном продолжением 2-случая, когда $pq=2(p-1)$. В этом случае решение задачи (1)-(3) ищется в следующем экспоненциальном виде

$$u_4(x,t)=e^{\alpha(t-\tau)}\varphi(\xi),\ \xi=xe^{-\gamma(t-\tau)},$$

где $\alpha=\dfrac{p}{2p-1},\ \gamma=\dfrac{p-2}{2p-1},$

Для того , чтобы функция $u_4(x,t)=e^{\alpha(t-\tau)}\varphi(\xi)$, была нижным решением функция $\varphi(\xi)$ должна удовлетворять неравенствам.

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)+\gamma\xi\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha\varphi\geq 0 \tag{11}$$

$$-\left|\frac{d\varphi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\varphi}{d\xi}\Bigg|_{\xi=0}\leq\varphi^{q}(0). \tag{12}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\overline{\varphi}(\xi)=D\left(D^{m-1}\left(\frac{m}{m-1}\right)^{m+1}-\xi\right)_{+}^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

Теорема 4. Решение задачи (11), (12) с компактным носителем при

$\xi\to D^{m-1}\left(\dfrac{m}{m-1}\right)^{m+1}$

имеет асимптотику

$$\varphi(\xi) \sim C\overline{\varphi}(\xi)(1+o(1)),$$

где $C = \left(\dfrac{p-1}{p-2}\gamma\right)^{1/(p-2)}$

Теорема 4 доказывается аналогично доказательства теоремы 1.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ

При численном решение задачи (1)-(3) применяется итерационный процесс в котором основную роль играет выбор начального приближения в зависимости от значение числовых параметров и начального условия. Для численного решения задачи (1)-(3) уравнение (1) аппроксимировалось со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым порядком по t. При этом во внутренних шагах итерации значений узлов вычисляются методом прогонки. Хорошо известно, что итерационные методы требует наличия хорошего начального приближения, которое приведет к быстрой сходимости к искомому решению и сохраняет качественные свойства изучаемых нелинейных процессов, что является основной трудностью при численном решение задачи. Эта трудность в зависимости от значения числовых параметров уравнения преодолевается путем удачного выбора начальных приближений, в качестве которого при вычислениях брались выше установленные асимптотические формулы. На основе выше приведенных результатов были произведены численые расчеты. Ниже приведем некоторые результаты численных экспериментов. Результаты численных экспериментов показывае численно аналитического подхода для решения нелинейных вырождающихся задач.

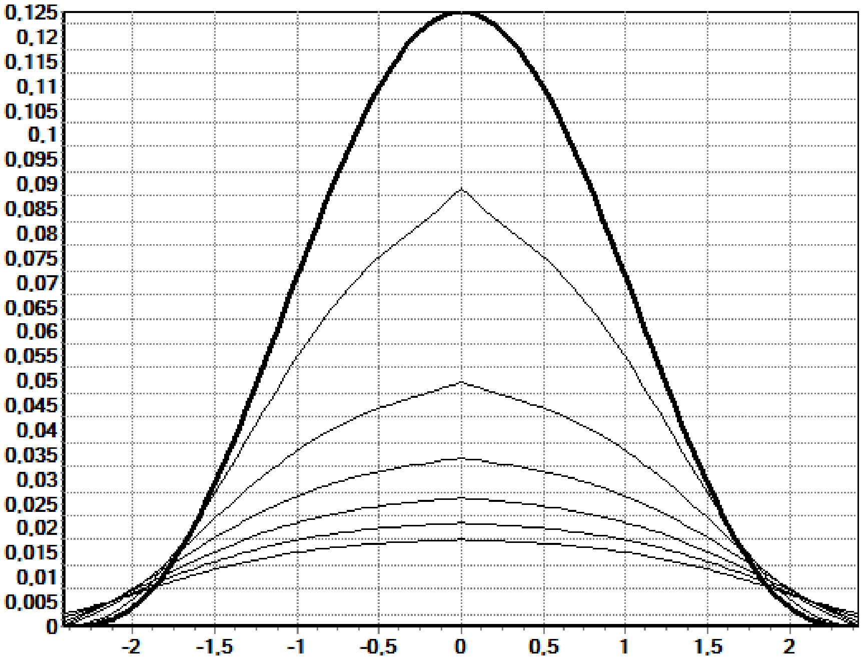


Рис 1. $p = 2.5,\ \beta = 2,\ q = 2.85.$

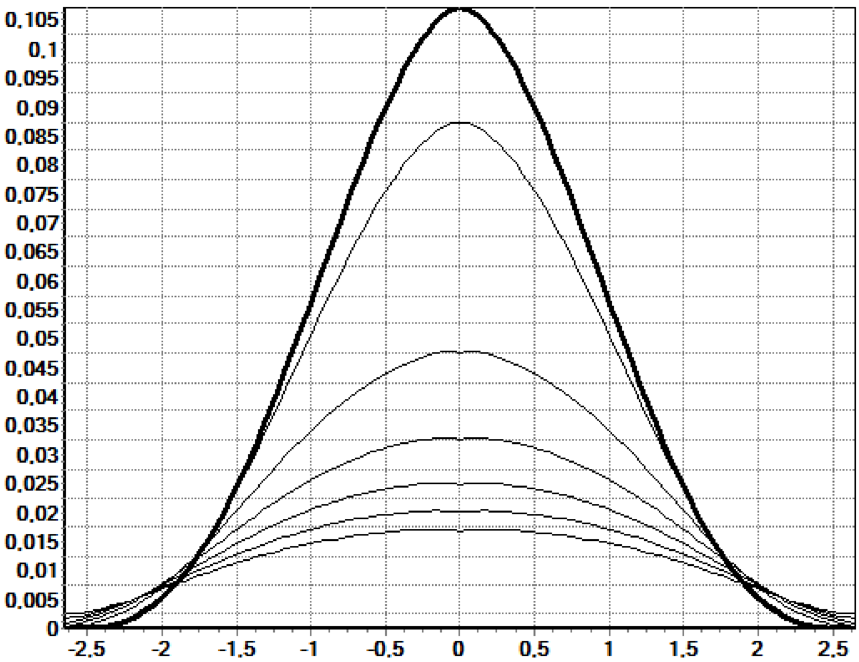


Рис 2. $p = 2.45,\ \beta = 2,\ q = 4.$

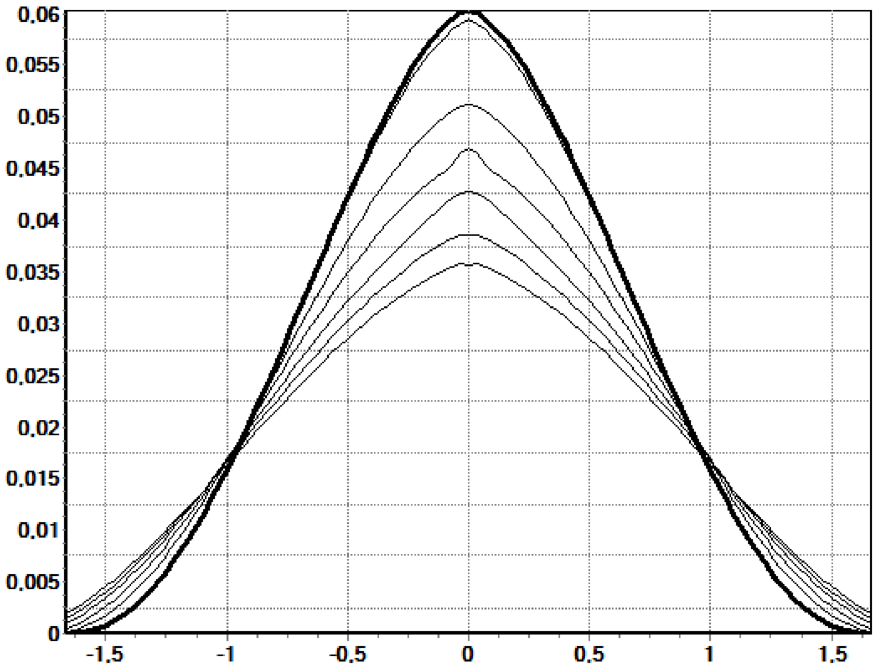


Рис 2. $p = 2.75,\ \beta = 2.5,\ q = 3.5.$

Результаты численных экспериментов показывают быструю сходимость итерационного процесса за счет удачного выбора предложенного нами начального приближения, сохраняя при этом свойсвто конечной скорости распространение возмущения.

К свойствам решений одной многомерной задачи нелинейной фильтрации с переменной плотностью и нелокальным граничным условием в случае быстрой диффузии

В настоящей работе изучаются качественные свойства решений следующего квазилинейного параболического уравнения

$$\rho(x)u_t = \nabla\left(\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\nabla u^m\right), \qquad (x,t)\in R_+^N\times(0,+\infty), \tag{1}$$

с нелинейным граничным

$$-\left|\nabla u^m\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x_1}(0,t)=u^q(0,t), \quad t>0, \tag{2}$$

и начальным условием

$$u(x,0)=u_0(x)\ge 0, \quad x\in R_+^N, \tag{3}$$

где $R_+^N=\{(x_1,x')\,|\,x'\in R^{N-1}, x_1>0\}$, $\rho(x)=(1+|x|)^n$, $n>-p$, $m>1$, $q>0$, $1<p<1+1/m$ и $u_0(x)\neq 0$ – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция.

Задача (1)-(3) встречается в различных приложениях[2]. Она описывает многие физические, химические, биологические и других процессы. Например, уравнение (1) возникает при математическом моделировании диффузии в нелинейных средах, при исследовании проблем течения жидкостей через пористые пласты, в задачах динамики биологических популяций, политропической фильтрации, образования структур в синергетике и в ряде других задач [2, 4]. Уравнение (1) принято называть параболическим уравнением с неоднородной плотностью [2], а в случае $1<p<1+1/m$ оно соответствует уравнению быстрой диффузии[2]. Изучению условий глобальной разрешимости и неразрешимости задачи (1)-(3) при различных значениях числовых параметров посвящено большое количество работ [3, 5-14] (подробно см. в библиографии [7, 9]).

В работе [11], впервые для одномерного случая было установлено, что решение задачи (1)-(3) при $m=1, n=0$ становится неограниченным за конечное время, если $2(p-1)/p<q<2(p-1)$. В этой работе были доказаны следующие утверждения:

3. Решение задачи (1)-(3) является глобальным, если $0<q\le 2(p-1)/p$;
4. Пусть $q>2(p-1)$ и $u_0(x)$ достаточно мало, тогда решение задачи (1)-(3) является глобальным.

Значение $q_c = 2(p-1)$ принято называть критической экспонентой типа Фужита [3]. Многие аналогичные результаты были установлены для различных нелинейных уравнений параболического типа [3, 4, 8, 14, 15].

Некоторые свойства решений задачи (1)-(3) при $\rho(x)=1$ были изучены в [5]. В случае медленной диффузии было доказано, что решения задачи (1)-(3) при произвольных начальных данных $u_0(x)\neq 0$ взрывается за конечное время, если $(m+1)(p-1)/p < q < (m+1)(p-1)$. Кроме того, установлены следующее условия для существования глобального решения по времени:

- при $0 \le q \le (m+1)(p-1)/p$ всякое решение задачи (1)-(3) является глобальным;
- при $q > (m+1)(p-1)$ и для достаточно малых u_0 всякое решение задачи (1)-(3) является глобальным.

Аналогичные результаты для случая быстрой диффузии также были получены в работах [6, 7].

Авторы работ [9] изучали задачу (1)-(3) при $m=1,\ n=0$. Ими получены критическая экспонента глобального существования решения

$$q_0 = 2(p-1)/p$$

и критическая экспонента типа Фужита

$$q_c = (1+1/N)(p-1)$$

с помощью построения нижних и верхних решений.

Данная работа посвящена исследованию условий глобальной разрешимости или неразрешимости в целом по времени решений задачи (1)-(3) на основе автомодельного анализа и метода эталонных уравнений [1], а также влиянию неоднородности среды на изучаемый процесс. Построены различные автомодельные решения задачи (1)-(3) для случая разрешимости в целом по времени, являющиеся асимптотикой решений рассматриваемой задачи. При численном исследовании предлагается способы выбора подходящего начального приближения для итерационного процесса, сохраняющие качественные свойства задачи (1)-(3). В отличие от работ [5-7, 9, 11-15] для многомерной задачи (1)-(3) в неоднородной среде получены оценки решений, установлены критические значение параметров типа Фужита и критическое значение глобальной разрешимости, из которых в частности, вытекают результаты других авторов, полученные в однородной среде. Также исследован более общий случай и асимптотика решений для достаточно большого значения аргумента и проведены численные расчеты, показывающие быструю сходимость к точному решению.

Сформулируем результаты глобальной разрешимости или неразрешимости задачи (1)-(3).

Введем обозначения

$$q_0 = \frac{(m(n+1)+1)(p-1)}{p+n},\ q_c = m(p-1) + \frac{p-1}{N+n}.$$

Теорема 1. Если $0 \le q \le q_0$, то всякое решение задачи (1)-(3) является глобальным.

Доказательство. Пусть

$$u_+(x,t) = e^{Lt} g(\xi),\ g(\xi) = M\left(K + e^{-\xi}\right)^{1/m}, \xi = (1+x_1)e^{Jt},\ x_i = 0,\ i = \overline{2,N},$$

где $L = \dfrac{(p-1)(p+n)mM^{m(p-1)-1}K^{\frac{1+m}{m}}}{mK(p+n) - (1-m(p-1))e^{-1}},\ J = \dfrac{1-m(p-1)}{p+n}L,$

$$M = e^{\frac{p-1}{m(m(p-1)-q)}}\left(K + e^{-1}\right)^{\frac{q}{m(m(p-1)-q)}},\ K > \|u_0\|_\infty^m.$$

Легко вычислить, что

$$-\left|\frac{\partial u_+^m}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial u_+^m}{\partial x}\Bigg|_{x_1=0} = -e^{(p-1)(Lm+J)t}\left|\left(g^m\right)'\right|^{p-2}\left(g^m\right)'(1) = M^{m(p-1)} e^{(Lm+J)(p-1)t} e^{-(p-1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u_+^m}{\partial x}\right|^{p-2} \frac{\partial u_+^m}{\partial x}\right)(x,t) = e^{(Lm(p-1)+Jp)t}\left|\left(g^m\right)'\right|^{p-2}\left(g^m\right)'(\xi) = (p-1)M^{m(p-1)} e^{(Lm(p-1)+Jp)t} e^{-(p-1)\xi}$$

,

$$\rho(x)\frac{\partial u_+}{\partial t}(x,t) = e^{(L-Jn)t}\xi^n\left(Lg(\xi) + J\xi g'(\xi)\right) =$$

$$= e^{(L-Jn)t}M\xi^n\left(L\left(K+e^{-\xi}\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{J}{m}\xi e^{-\xi}\left(K+e^{-\xi}\right)^{\frac{1}{m}-1}\right) \ge e^{(L-Jn)t}MK^{\frac{1}{m}}\left(L - \frac{Je^{-1}}{mK}\right).$$

Покажем, что функция $u_+(x,t)$ будет верхним решением задачи (1)-(3). Согласно принципу сравнения решений [1, 6] она должна удовлетворять следующим неравенствам:

$$\rho(x)\frac{\partial u_+}{\partial t} \ge \frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u_+^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u_+^m}{\partial x}\right), (x,t) \in R_+^N \times (0, +\infty), \tag{4}$$

$$-\left|\frac{\partial u_+^m}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u_+^m}{\partial x}(0,t) \ge u_+^q(0,t),\ t > 0. \tag{5}$$

Не трудно проверить, при $0 \le q \le q_0$ и по определению M, L, K, J (4) и (5) будут выполнены. Следовательно, учитывая, $u_+(x,0) \ge u_0(x)$ и $u_+(0,0) > u_0(0)$, по принципу сравнения решений приходим к утверждению теоремы 1.

Теорема 2. Если $q > q_c$ и начальная функция $u_0(x)$ достаточно мала, то всякое решение задачи (1) - (3) является глобальным.

Доказательство. Построим верхнее решение задачи (1)-(3)

$$u_+(t,x) = (T+t)^{-\gamma} f(\xi), \tag{6}$$

в области $\square_T = \{(x,t):\ x \in R_+^N, 0 < t < +\infty\}$, где

$$\xi = |\zeta|, \quad \zeta_i = (1+x_i)(T+t)^{-\sigma}, \quad i = 1,\dots,N, \quad \gamma = \frac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)},$$

$$\sigma = \frac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}.$$

Для того чтобы функция $u_+(t,x)$ была верхним решением задачи (1)-(3), функция $f(\xi)$ согласно принципу сравнения решений должна удовлетворять следующим неравенствам [3, 6, 7]

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^m}{d\xi}\right) + \sigma\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi} + \gamma\xi^n f \le 0, \tag{7}$$

$$-\left|\left(f^m\right)'\right|^{p-2}\left(f^m\right)'(1) \ge f^q(1). \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$\bar{f}(\xi) = \left(a + b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{-\frac{p-1}{1-m(p-1)}}, \tag{9}$$

где $b = \dfrac{1-m(p-1)}{m(p+n)}\sigma^{1/(p-1)} > 0$, $a > 0$.С учетом (9) неравенство (7) приведём к виду

$$-\left(\frac{(q-m(p-1))(N+n)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)} - \frac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}\right)\xi^n \bar{f} \le 0, \tag{10}$$

легко видеть, что согласно условию теоремы 2 неравенство (10) всегда выполняется.

Теперь проверим выполнение условия (8). Подставляя функцию $\bar{f}(\xi)$ вместо $f(\xi)$ в (8) получим следующее выражение:

$$\sigma\left(a+b\right)^{-\frac{p-1}{1-m(p-1)}}\Big|_{\xi=1} \ge \left(a+b\right)^{-\frac{q(p-1)}{1-m(p-1)}}\Big|_{\xi=1} \tag{11}$$

оно справедливо при

$$a+b \le \sigma^{-\frac{1-m(p-1)}{(q-1)(p-1)}}.$$

В заключении отметим, что полученное автомодельное решение $u_+\left(t,x\right)$ является верхним решением задачи (1)-(3), так как из принципа сравнения решений следует, что

$u\left(t,x\right) \le u_+\left(t,x\right)$ в $\square_T$,

если $u_0\left(x\right)$ достаточно мало.

Теорема 3. Пусть $q > q_0$, тогда всякое решение задачи (1)-(3) является неограниченным при достаточно больших начальных данных.

Доказательство. Для доказательства теоремы 3 решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

$$u_-\left(x,t\right) = \left(T-t\right)^{-\gamma}\,\vartheta\left(\xi\right), \tag{12}$$

где $\xi = \left|\zeta\right|$, $\zeta_i = \left(1+x_i\right)\left(T-t\right)^{-\sigma}$, $i=1,\ldots,N$, $\vartheta\left(\xi\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{d\vartheta^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\vartheta^m}{d\xi}\right) - \sigma\xi^{n+1}\frac{d\vartheta}{d\xi} - \gamma\xi^n\vartheta = 0, \tag{13}$$

γ и σ заданные выше числа.

Покажем, что функция $u_-\left(x,t\right)$, определенная формулой (12) будет нижним решением, если в качестве $\theta(\xi)$ выбрать функцию

$$\overline{\vartheta}\left(\xi\right) = A\left(a+\xi^{\frac{p+n}{p}}\right)_+^{-\frac{p-1}{1-m(p-1)}},$$

где постоянные $a>0$, A - определяются ниже. Покажем, что функция $\overline{\vartheta}\left(\xi\right)$ является нижним решением уравнения (13). Для этого функция $\overline{\vartheta}\left(\xi\right)$ согласно принципу сравнения решений должна удовлетворять следующим неравенствам

$$\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{d\vartheta^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\vartheta^m}{d\xi}\right)-\sigma\xi^{n+1}\frac{d\vartheta}{d\xi}-\gamma\xi^n\vartheta\geq 0, \quad (14)$$

$$-\left|\left(\vartheta^m\right)'\right|^{p-2}\left(\vartheta^m\right)'(1)\leq\vartheta^q(1). \quad (15)$$

После подстановки функции $\bar{\vartheta}(\xi)$ в (14) и (15) согласно принципу сравнения решений должны выполняться неравенства

$$j_1\left(\xi^{\frac{p+n}{p}}\right)^2+j_2\xi^{\frac{p+n}{p}}-j_3\geq 0, \quad (16)$$

$$A^{m(p-1)}\left(\frac{m(p-1)(p+n)}{p\left(1-m(p-1)\right)}\right)^{p-1}(a+1)^{\frac{p-1}{1-m(p-1)}}\leq A^q(a+1)^{-\frac{q(p-1)}{1-m(p-1)}} \quad (17)$$

где $j_1=\dfrac{(p+n)(p-1)}{p\left(1-m(p-1)\right)}\sigma-\gamma$,

$j_2=\left(\dfrac{(p+n)(p-1)}{p\left(1-m(p-1)\right)}-\lambda\right)\left(\dfrac{m(p+n)(p-1)}{p\left(1-m(p-1)\right)}\right)^{p-1}A^{m(p-1)-1}-\gamma a$,

$j_3=a\lambda\left(\dfrac{m(p+n)(p-1)}{p\left(1-m(p-1)\right)}\right)^{p-1}A^{m(p-1)-1},\ \lambda=N-1+\dfrac{n(p-1)}{p}$.

Теперь определим условия на величины A,a. Отметим, что неравенство (16) будет выполнено только при следующих условиях:

1) если $j_1>0$, тогда из (16) следует, что $q>q_0$;
2) если $j_2\geq 0$, тогда из (16) следует, что
$$\left(\frac{(p+n)(p-1)}{p\left(1-m(p-1)\right)}-\lambda\right)\left(\frac{m(p+n)(p-1)}{p\left(1-m(p-1)\right)}\right)^{p-1}A^{m(p-1)-1}\geq\gamma a;$$
3) если (16) выполняется при $\xi\to 1_+$, тогда имеем $j_1+j_2-j_3\geq 0$.

Так как из (17) имеем

$$A^{q-m(p-1)}(a+1)^{\frac{(q-1)(p-1)}{m(p-1)-1}}\geq\left(\frac{m(p-1)(p+n)}{p\left(1-m(p-1)\right)}\right)^{p-1}. \quad (18)$$

то для любых $q>q_0$ найдутся постоянные A, a, удовлетворяющие неравенствам 1)-3) и (18). Таким образом, (12) является нижним решением задачи (1)-(3).

Теорема 4. Если $q_0 < q < q_c$, то всякое нетривиальное решение задачи (1)-(3) является неограниченным.

Доказательство. Доказательство теоремы 4 опирается на построение функции

$$u_1(x,t) = (\tau + t)^{-\frac{N+n}{Nm(p-1)+p-N}} H(\xi),\ \xi = |\zeta|,\ \zeta = (1+x_i)(\tau+t)^{-\frac{1}{Nm(p-1)+p-N}},$$

где $\tau \geq 0$,

$$H(\varsigma) = \left(c_1 + b_1 \xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_+^{-\frac{p-1}{1-m(p-1)}},\ b_1 = \frac{1-m(p-1)}{(p+n)m}\left(\frac{1}{m(p-1)(n+1)+p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Легко проверить, что $H'(\xi) = 0$ и в $\xi \in \{\xi > 0 |\, H(\xi) \geq 0\}$ функция $H(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\xi^{1-N} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{dH^m}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{dH^m}{d\xi}\right) + \frac{1}{m(p-1)(n+1)+p-1}\xi^{n+1}\frac{dH}{d\xi} + \frac{n+1}{m(p-1)(n+1)+p-1}\xi^{n}$$

.

С помощью хорошо известного свойства слабых решений задачи (1)-(3) получим, что существует такое $t_0 \geq 0$, для которого $u(0,t_0) > 0$. Таким образом, при достаточно больших $\tau > 0$ и малых $c_1 > 0$ выполняется

$$u(x,t_0) \geq u_1(x,t_0),\ x \in R_+^N$$

для всех $x > 0$. Тогда из принципа сравнения решений вытекает

$$u(x,t) \geq u_1(x,t),\ (x,t) \in R_+^N \times (t_0, +\infty).$$

Теперь покажем, что существует $t_* > t_0$ и достаточно большое T для которого

$$u_1(x,t_*) \geq u_-(x,0),\ x \in R_+^N, \tag{19}$$

где $u_-(x,t)$ определенная выше функция. Поэтому из (19) получим следующие неравенства

$$(\tau + t_*)^{-\frac{N+n}{Nm(p-1)+p-N}} \sim T^{-\frac{p-1}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}},$$

$$(\tau + t_*)^{-\frac{1}{Nm(p-1)+p-N}} \sim T^{-\frac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)}}.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{(p-1)/(N+n)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)} > \frac{q-m(p-1)}{q(p+n)-(p-1)(m(n+1)+1)} \tag{20}$$

если $q < q_c$. Следовательно, $u(x,t_*) \geq u_1(x,t_*) \geq u_-(x,0)$ и таким образом решение $u(x,t)$ задачи (1)-(3) является неограниченным.

Теорема 5. Пусть $\frac{(N+n)(m+1)-n}{(N+n)m+1} < p < 1+\frac{1}{m}$. Тогда решение задачи (1)-(3) при $\xi \to +\infty$ имеет асимптотическое представление

$$u(x,t) \sim C(T+t)^{-\gamma}\left(a+b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{1-m(p-1)}},$$

где $C=\left(\sigma\left((N+n)(m(p-1)-1)+p+n\right)\right)^{1/[1-m(p-1)]}$

Критический случай $(m(p-1)-1=0)$. Назовем случай $m(p-1)-1=0$ критическим (особым), так как в этом случае поведения решения меняется. При $m(p-1)-1=0$ уравнения (1) допускает решение следующего автомодельного вида

$$u_+(t,x)=(T+t)^{-\gamma_c} z(\xi), \tag{21}$$

где $z(\xi)=e^{-d\xi^{\frac{p+n}{p-1}}}$, $\xi=|\zeta|$, $\zeta_i=(1+x_i)(T+t)^{-\sigma_c}$, $i=1,\ldots,N$, $\gamma_c=\frac{p-1}{(q-1)(p+n)}$,

$\sigma_c=\frac{1}{p+n}, d=\frac{p-1}{m(p+n)}\left(\frac{1}{p+n}\right)^{1/(p-1)}$. С помощью теорем сравнения решений можно показать, что $u_+(t,x)=(T+t)^{-\gamma_c} z(\xi)$ будет верхним решением задачи (1)-(3) при достаточно малых начальных данных.

Теорема 6. Решение задачи (1)-(3) при $\xi \to +\infty$ имеет асимптотику $u(t,x) \sim C_1(T+t)^{-\gamma_c} z(\xi)$, где C_1 - произвольное положительное число.

Теорема 5 и 6 доказывается аналогично доказательству теорем, как в работах [12-14].

Этот результат показывает, что при критических значений числовых параметров задача (1)-(3) имеет место неединственности решения.

Известно, что при численных решений нелинейных задач весьма важным является выбор подходящего начального приближения сохраняющей нелинейные свойство. В связи с этим, проводился вычислительный эксперимент на основе установленных выше качественных свойств решений для случая глобальной разрешимости. Для этого, уравнение (1) аппроксимировалось со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым порядком по времени. Для численного моделирования сконструирован итерационный процесс, во внутренних шагах итерации значения узлов вычисляются методом прогонки. Известно, что итерационные методы требует наличия хорошего начального приближения, которое быстро сходятся к искомому решению и сохраняет качественные свойства изучаемых нелинейных процессов, что является основной трудностью численного анализа рассматриваемой задачи. Эту трудность в зависимости от значения числовых параметров входящей в уравнение можно преодолевать путем удачного выбора начальных приближений. Ниже приведем численные схемы для одномерного случая и некоторые результаты численных экспериментов.

Для удобства перепишем задачи (1)-(3) следующим образом:

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(P(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ (x,t)\in R_{+}\times(0,+\infty) \tag{22}$$

$$-P(u)\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=u^{q}(0,t),\quad t>0 \tag{23}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,\quad x\in R_{+} \tag{24}$$

$$\begin{cases} u(t,0)=\phi_1(t)>0 \\ u(t,b)=\phi_2(t)=0 \end{cases} \tag{25}$$

где $P(u)=u^{l-1}\left|u^{l-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}$.

Заменим задачу (22)-(24), с применением метода баланса, неявной разностной схемой и получим разностную задачу с погрешностью $\mathrm{O}(h^2+\tau)$:

$$\begin{cases} \rho(x_i)\dfrac{y_i^{j+1}-y_i^{j}}{\tau}=\dfrac{1}{h^2}\left[a_{i+1}\left(y^{j+1}\right)\left(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}\right)-a_i\left(y^{j+1}\right)\left(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}\right)\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2,\ldots,n-1;\quad \mathrm{j}=0,1,\ldots,n-1, \\ y_i^0=u_0(x_i),\qquad i=0,1,\ldots,n, \\ y_0^j=\varphi_1(t_j),\qquad j=1,2,\ldots,n, \\ y_n^j=\varphi_2(t_j),\qquad j=1,2,\ldots,n, \end{cases} \tag{26}$$

Здесь разностный коэффициент теплопроводности $a(y)$ должен удовлетворять условиям второго порядка аппроксимации. Для вычисления используется одна из следующих формул

$$\text{а)}\quad a_i(y)=P\left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right), \tag{27}$$

$$б)\ a_i\left(y\right)=\frac{P\left(y_{i-1}\right)+P\left(y_i\right)}{2}. \qquad (28)$$

На концах отрезка $0\le x\le b$ положим $\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{i=0}\approx\frac{y_1-y_0}{h}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{i=n}\approx\frac{y_{n-1}-y_n}{-h}$.

Система алгебраических уравнений (26) является нелинейным относительно y^{j+1}. Для решения системы нелинейных уравнений применим простой итерационной метод:

$$\rho\left(x_i\right)\frac{\overset{s+1}{y_i^{j+1}}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}\left(\overset{s}{y}^{j+1}\right)\left(\overset{s+1}{y_{i+1}^{j+1}}-\overset{s+1}{y_i^{j+1}}\right)-a_i\left(\overset{s}{y}^{j+1}\right)\left(\overset{s+1}{y_i^{j+1}}-\overset{s+1}{y_{i-1}^{j+1}}\right)\right]$$

(28)

где $s=0,1,2,\ldots$.

Относительно $\overset{s+1}{y}_i$ разностная схема (28) линейна. В качестве начальной итерации для $\overset{s+1}{y}_i$ берется значений из предыдущего шага по времени: $\overset{0}{y}^{j+1}=y^j$. При счете по итерационной схеме задаются точность итерации, и процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{0\le i\le n}\left|\overset{s+1}{y}_i-\overset{s}{y}_i\right|<\varepsilon .$$

Условимся о следующих обозначениях

$$y^j=y,\qquad y^{j+1}=\bar{y}.$$

Тогда, разностное уравнение можно записать в виде

$$\overset{s}{A}_i\,\overset{s+1}{\bar{y}}_{i-1}-\overset{s}{C}_i\,\overset{s+1}{\bar{y}}_i+\overset{s}{B}_i\,\overset{s+1}{\bar{y}}_{i+1}=-\overset{s}{F}_i,\qquad i=1,2,\ldots,n-1, \qquad (29)$$

где $A_i=\frac{\tau}{h^2}a_i\left(y\right)$, $B_i=\frac{\tau}{h^2}a_{i+1}\left(y\right)$, $C_i=A_i+B_i+\rho\left(x_i\right)$, $F_i=\rho\left(x_i\right)y$.

При счете $a_i\left(y\right)$ использовано формул (28), для которых имеем

$$a_i(y)=\frac{1}{2}\left[\left(y_i\right)^{l-1}\left|\left(y_i\right)^{l-1}\frac{y_i-y_{i-1}}{h}\right|^{p-2}+\left(y_{i-1}\right)^{l-1}\left|\left(y_{i-1}\right)^{l-1}\frac{y_{i-1}-y_{i-2}}{h}\right|^{p-2}\right].$$

Для численного решения системы уравнений (29) применяется метод прогонки.

Теперь приведем результаты численных экспериментов. Шаг сетки h = 0.05, число узлов N = 10000 и точность итерации $\varepsilon = 10^{-3}$. Счет проводился до t=4 шагом $\tau = 0.04$. Во всех рисунках штриховых линии соответствуют начальных приближение при $t=0$ и $t=tn=4$, а сплошных численных решений.

В качестве начального приближения для итерационного процесса брались (6), (9).

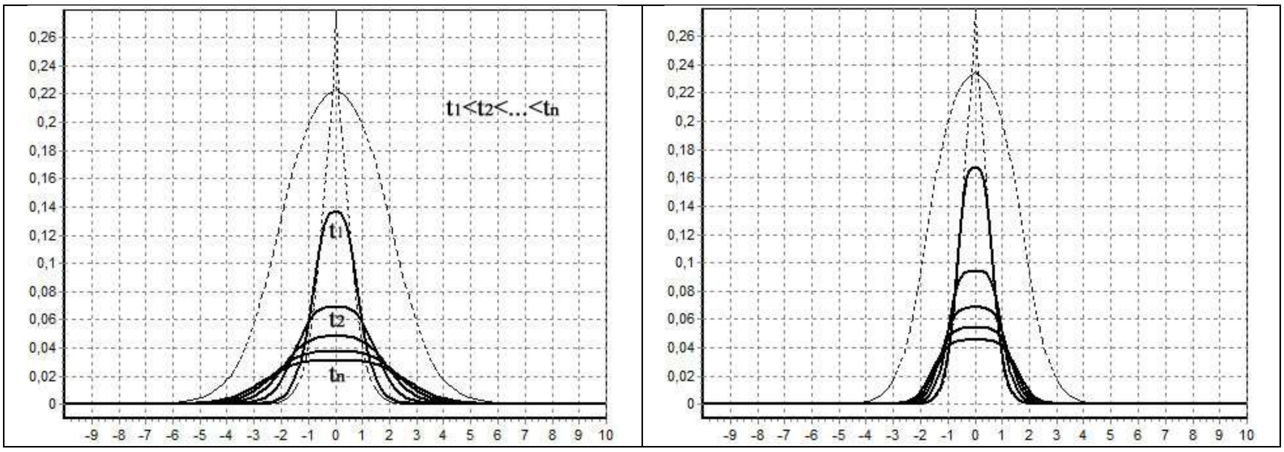


Рис. 1.

В рис. 1 показано график численного решения краевой задачи (1)-(3) при $q > q_c$. В этом случае процесс имеет свойство бесконечной скорости распространения возмущения. За счет неограниченности коэффициента фильтрации скорость распространение возмущения гораздо больше, чем в случае медленной диффузии ($p > 1 + 1/m$), при которым имеет место конечная скорость распространения возмущений. Процесс фильтрации охватывает всю область и исчезает на бесконечности. В рис. 2 приведен график вблизи критической точки ($m(p-1)-1 \to 0$).

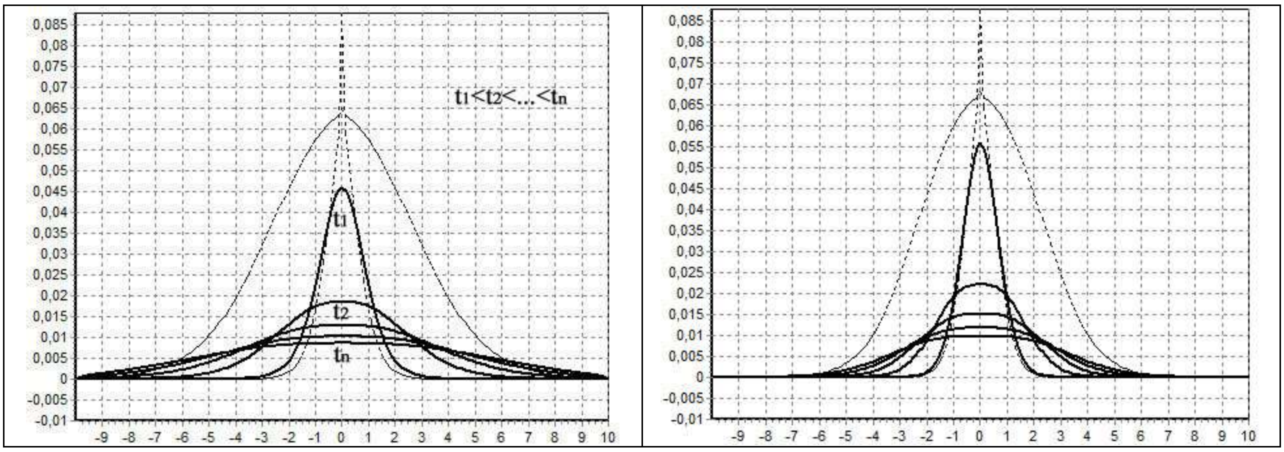


Рис. 2.

В качестве начального приближения для итерационного процесса брались (21).

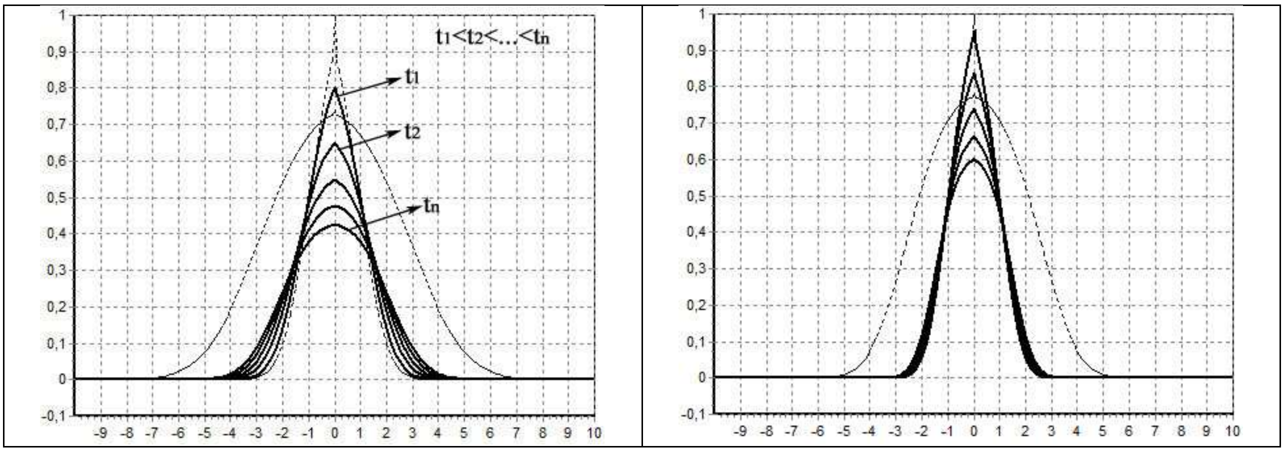


Рис. 3.

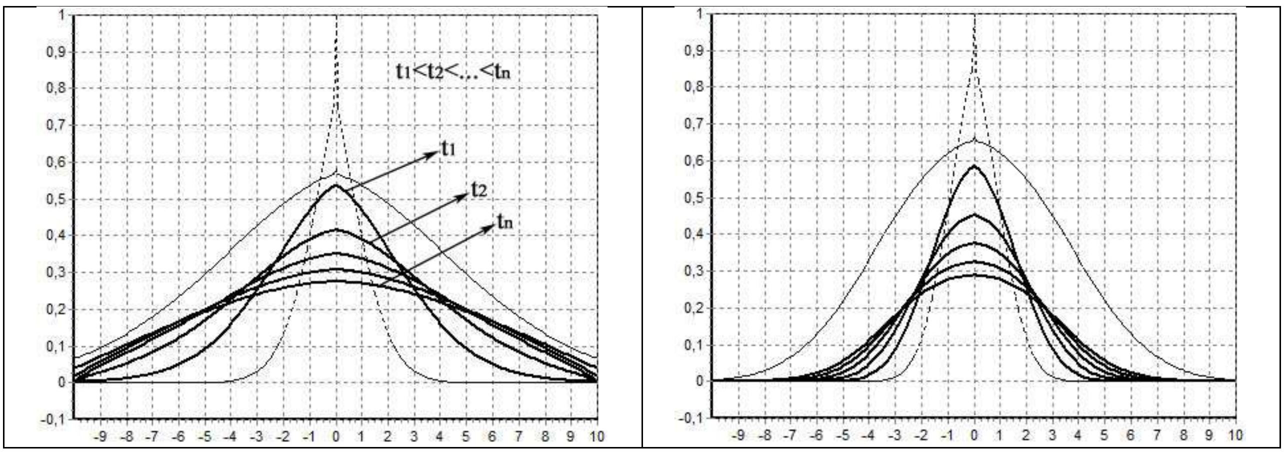


Рис. 4.

Во всех рисунках показано, что рост фильтрации зависят от плотности среды. Вычислительные эксперименты показали быструю сходимость итерационного процесса к точному решению, за счет выбора подходящего начального приближения. Количества итераций для различных значений числовых параметров не превосходит 6.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

Амалий машғулотлар замонавий дидактик таъминот ва лаборатория жиҳозларига эга бўлган аудиторияларда ҳамда Интернет тармоғига уланган компьютер синфларида, таянч олий таълим муассасаларининг кафедраларида ташкил этилади.

Амалий машғулотларда физик жараёнларни тасвирловчи амалий масалаларнинг қўйилиши, уларни ечиш усуллари, масалани ечишнинг алгоритми ва дастурини яратиш, дастурнинг тўғрилигини тест масалаларда текшириш, ҳисоблаш экспериментлари ўтказиш ва олинган натижаларни таҳлил қилиш масалалари ўрганилади.

Амалий машғулотларда қуйидаги мавзулар ва вазиятли масалалар ўрганилади:

Эталон тенгламалар методи.

Ўзгарувчиларни алмаштириш.

Тенгламаларни эталон тенгламалар усулидан фойдаланиб ечиш.

Солиштириш теоремалари.

Ночизиқлилик эффектлари.

V. КЕЙС БАНКИ

Амалий масалаларни математик моделлаштириш фанини ўқитиш маъруза, амалий машғулотлар ҳамда мустақил топшириқлардан иборат бўлиб, улар биргаликда фаннинг бутунлилигини таъминлайди. Маърузалар орқали олинган билимни мустаҳкамлаш учун амалий машғулотлар муҳим аҳамиятга эга. Мустақил машғулотлар бу фан доирасида мустақил билим олиш, ўзлаштириш ҳисобланади.

Ушбу фанни ўқитиш давомида *ақлий хужум* - ғояларни генерация (ишлаб чиқиш) методидан кенг фойдаланилади. «Ақлий ҳужум» методи бирор муаммони ечишда талабалар томонидан билдирилган эркин фикр ва мулоҳазаларни тўплаб, улар орқали маълум бир ечимга келинадиган энг самарали методдир. Ақлий хужум методининг ёзма ва оғзаки шакллари мавжуд бўлиб, бу фанда оғзаки шаклидан фойдаланилади. Фанни ўзлаштиришда талабалар замонавий ахборот технологиялари ютуқларидан, шунингдек охирги йилларда яратилган турли математик дастурий таъминотлардан фойдаланадилар.

Кейс топширик 1.

Қуйидаги квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг автомодел ечимларини қуринг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Кейс топширик 2.

Қуйидаги чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг автомодел ечимларини қуринг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial u}{\partial x}\right)-v(t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Кейс топширик 3.

Қуйидаги квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг автомодел ечимларини қуринг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-v(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+F(u).$$

Кейс топширик 4.

Қуйидаги чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг автомодел ечимларини қуринг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-v\frac{\partial u^{\nu}}{\partial x}-F(t,x,u).$$

Кейс топширик 5.

Қуйидаги икки ўлчовли чизиқсиз иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг автомодел ечимларини қуринг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\left(t,x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(G\left(t,x,y,u,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Кейс топширик 6.

Икки ўлчовли квазичизиқли иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасининг автомодел ечимларини қуринг

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_1(t,x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_2(t,x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва мақолалардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;

- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;

- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;

- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;

- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мавзулар:

1. Математик моделлаштириш.
2. Содда жараёнларнинг математик моделларини яратиш.
3. Ҳисоблаш эксперименти структураси.
4. Алгебраик тенгламаларни ечиш усуллари.
5. Аппроксимация аниқлиги ва тартиби.
6. Нолокал чегаравий масалалар.
7. Ҳайдаш усулининг оқимли варианти.
8. Уч қатламли схемалар.
9. Чизиқсиз икки ўлчами масалаларни локал бир ўлчовли схемалар.
10. Математик пакетлар.
11. Юқори босқичли алгоритмик тиллар.
12. Натижаларни визуаллаштириш.

VII. ГЛОССАРИЙ
(Изоҳли луғат)

Модель - лотинча *модулус* сўзидан олинган бўлиб, ўлчов, намуна маъноларини англатади.

Модель – бу реал объектни алмаштириши мумкин бўлган, тадқиқот ва тажриба ўтказиш учун қулай ва арзон бўлган бошқа бир реал ёки абстракт объектдир. Модель реал объектнинг соддалаштирилган кўриниши бўлиб, унинг ҳамма хоссаларини эмас, балки асосий хоссаларинигина ўзида мужассам этади.

Математик модель – реал объектни тасавуримиздаги абстракт кўриниши бўлиб, у математик белгилар ва баъзи бир қонун–қоидалар билан ифодаланган бўлади. Масалан, Ньютон қонунлари, массанинг сақланиш қонуни.

Физик модель - Тажриба ўтказишга мўлжалланган тажриба участкалари катта экин майдонларининг, лаборатория машғулотларини ўтказишга мўлжалланган асбоб ускуналар физик моделларга мисол бўлади. Масалан, кимёвий ёки биологик лабораторияларда фойдаланиладиган асбоб ускуналар ҳамда токамак қурилмаси (ер шароитида термоядро реакциясини амалга оширадиган қурилма).

Графикли модель - Схемалар, чизмалар, расмлар, илмий ва тарихий асарлар мисол бўла олади. Масалан, глобус ер шарининг, инсоннинг сурати унинг ўзининг, М.З.Бобурнинг «Бобурнома» асари асарда келтирилган даврнинг графикли моделидир.

Факторлар - моделлаштиришда ташқи муҳитнинг текширилаётган объект параметрларига таъсир қилувчи кўрсаткичлари.

Математик моделлаштириш - реал объект ёки жараёнларни математик усуллар воситасида назарий тадқиқ қилиш усули.

Моделлаштиришнинг моҳияти - объектни бошқа соддароқ объект (модель) билан алмаштириб, моделни хусусиятини тадқиқ қилиш орқали оригинал объектни ўрганишдан иборат.

Реал объект ва унинг математик моделининг мувофиқлиги - объект ва унинг математик модели динамикаларининг сифат ва миқдор жиҳатдан ўхшашлиги.

Авж олувчи режимлар - вақтнинг чекли қийматида қандайдир миқдор чексизликка айланувчи жараёнлар.

Ҳисоблаш эксперименти – компьютер модели яратилган ходиса, жараён ва машиналарни тадқиқ қилиш усули.

Динамик модел – жараёнларнинг вақт бўйича кечишини тасвирловчи математик модел.

Имитацион модел - математическая модель, воспроизводящая поведение исследуемого объекта и применяемая для постановки компьютерных экспериментов, выявляющих особенности функционирования объекта при различных внешних условиях и управляющих воздействиях.

абиотик ўзгаришлар - табиий ўзгаришлар – зилзилалар, вулқонлар отилиши, сув тошқинлари ва шу кабилар.

биотик ўзгаришлар - популяциялар биомассасининг ёки сонининг ўзгариши, популяцияларнинг қирилиб кетиши.

антропоген ўзгаришлар - инсон фаолияти натижасида атроф муҳитда содир бўладиган ўзгаришлар.

Моделнинг универсаллиги - конкрет объектни модели бошқа ўхшаш объектларга қўлланиши учун етарли даражада универсал бўлиши керак. Бу дегани реал объектни математик модели бошқа ўхшаш объектларга жуда кам ўзгартиришлар оркали қўллаш учун етарли даражада умумий бўлиши керак.

Моделнинг компактлиги - модел шундай қурилиши кераккки, уни деярли ўзгартиришсиз ўзидан юқори даражали моделга модел ости сифатида киритиш мумкин бўлсин. Масалан, дарахтни математик модели ўрмон экосистемаси моделининг бир блоки сифатида қўлланилиши. Фотосинтез жараёнининг математик модели дарахт математик моделини бир блоки сифатида ишлатилиши мумкин бўлсин.

Моделнинг соддалиги - математик моделни қуришда иккинчи, учинчи даражали факторлар ҳисобга олинмаслиги лозим. Бу факторларни ҳисобга олиш ММни мураккаблаштиради. Мисол: эпидемияни тарқалиши жараёни математик моделида шамол тезлигини ҳисобга олиш моделни анча мураккаблаштиради. Аммо атроф – муҳитни экологиясини ўрганишда шамол тезлигини ва йўналишини ҳисобга олмаслик мумкин эмас. Сув қувуридаги сувни ҳаракатини ўрганаётганда ойнинг тортишиш кучини ҳисобга олмаса ҳам бўлади. Аммо, денгиз ва океанлардаги сув тошқинларини ўрганаётганда ойнинг тортишиш кучини албатта ҳисобга олиш лозим. Бу тошқинлар ойнинг тортиши натижасида ҳосил бўлади.

Моделнинг сезгирлиги - даражаси паст бўлиши лозим. ММни қуришда ҳисобга олиниши зарур бўлган асосий факторларга нисбатан моделни сезгирлик даражаси паст бўлиши лозим. Яъни, реал объектни ўрганаётган пайтда ўлгашлар кўп ҳолларда хатолик билан бажарилади. Айрим ҳолларда моделда иштирок этаётган асосий факторни аниқ ўлчашни имкони бўлмайди. Масалан, об – ҳавони башорат қилиш ҳалигача тахминий, пахта майдонидаги ҳашоратлар сонини аниқ ўлчаш мумкин эмас.

Моделнинг мослашувчанлиги - модел блокли принципда қурилиши лозим. Бунда ўзгарувчилар иложи борича алоҳида блокда, автоном ҳолда ҳисобланиши мақсадга мувофиқ. Бу эса математик моделни тез ўзгартириш, модификация қилиш имконини яратади. Умуман олганда бу талаб унга катта бўлмаган ўзгартириш орқали бошқа реал объектга мослашишни, яъни математик моделни универсаллигини характерлайди.

детерминирланган модель - ҳар бир мумкин бўлган кириш параметрлари тўплами учун чиқиш параметрлари бир қийматли аниқланган модель.

детерминирланмаган, *стохастик (эҳтимолли) модель* – ҳар бир мумкин бўлган кириш параметрлари тўплами учун чиқиш параметрлари бир қийматли аниқланмаган модель.

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Меъёрий- ҳуқуқий хужжатлар.

1. Ўзбекистон Республикаси Президентининг «Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида» 2015 йил 12 июндаги ПФ-4732-сон Фармони.
2. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2010 йил 2 ноябрдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагогик кадрлар тайёрлаш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-1426-сонли Қарори.
3. Кадрлар тайёрлаш миллий дастури. Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг Ахборотномаси, 1997 йил. 11-12-сон, 295-модда.
4. Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2012 йил 24 июлдаги “Олий малакали илмий ва илмий-педагог кадрлар тайёрлаш ва аттестациядан ўтказиш тизимини янада такомиллаштириш тўғрисида”ги ПФ–4456-сон Фармони.
5. Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 28 декабрдаги “Олий ўқув юртидан кейинги таълим хамда олий малакали илмий ва илмий педагогик кадрларни аттестациядан ўтказиш тизимини такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги 365- сонли Қарори.

Махсус адабиётлар.

7. Самарский А. А.,., Михайлов.А. П. Математическое моделирование . Наука, М. 2005, 480 с
8. А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П.Курдюмов, А.П.Михайлов. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.:Наука, 1987, 477с.
9. Арипов М. М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. Тошкент Фан, 1988, 137 С.
10. Арипов М. Табиатшунослик ва технологияларда амалий математика. Тошкент 2013. 1-2 қисм
11. Juan L. Vazquez. The Porous medium equation. Mathematical theory, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2007. 183.
12. Victor A. Galaktionov and Juan L. Vazquez. The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. Discrete and continuous dynamical systems, vol. 8, №2, April 2002. 399-433.

Қўшимча адабиётлар

13. Wanjuan Du, and Zhongping Li Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition Int. Journal of Mathematic Analysis 2013 vol. 7, 11, 517-524

14.Zhongping Li, Wanjuan Du, Chunlai Mu Fujite Critical exponent for a fast diffusive equation with variable coefficients. Bull. Korean Math Soc. 2013, vol. 50, 1, 105-116
15.Aripov M. Sadullaeva Sh. To properties of solutions to reaction diffusion equation with double nonlinearity with distributed parameters. Journal of Siberian Federal university Mathematics&Physics 2013 , 6, (2), 150-156
16. P. Zheng, Ch. Mu, D. Liu, X. Yao and Sh. Zhou. Blow-up analysis for a quasilinear degenerate parabolic equation with strongly nonlinear source. Abstract and Appl. Anal. vol 2012. Article ID 109546. 19 pages.
17. C. Jin, J. Yin, Critical exponents and non-extinction for a fast diffusive polytrophic filtration equation with nonlinear boundary sources, Nonlinear Anal. 67 (2007) 2217–2223 480–489.
18. Z. Wang, J. Yin, C. Wang, Critical exponents of the non-Newtonian polytropic filtration equation with nonlinear boundary condition, Appl. Math. Lett. 20 (2007) 142–147
19. J. Zhou, C. Mu, Critical curve for a non-Newtonian polytrophic filtration system coupled via nonlinear boundary flux, Nonlinear Anal. 68 (2008) 1–12.

Интернет манбаалар

20.http://www.allmath.ru/
21. http://www.mcce.ru/
22. http://lib.mexmat.ru/
23. http://www.webmath.ru/
24. http://www.exponenta.ru/
25. http://www.ziyonet.uz/