O’ZBEKİSTAN RESPUBLİKASI JOQARI HA’M ORTA ARNAWLI BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİGİ

QARAQALPAQ MA’MLEKETLİK UNİVERSİTETİ QASINDAG’I PEDAGOG KADRLARDI QAYTA TAYaRLAW HA’M OLARDIN’ QA’NİGELİGİN ASIRIW REGİONALLIQ ORAYI

“GEOMETRİYaNIN’ ZAMANAGO’Y MA’SELELERİ”
moduli boyınsha

O Q I W – M E T O D İ K A L I Q K O M P L E K S

NO’KİS – 2017

Oqıw metodikalıq kompleks Joqarı h'a'm orta arnawlı bilimlendiriw ministrliginin' 2016-jıl 6-apreldegi 137-sanlı buyrıg'ı menen tastıyıqlang'an oqıw reje h'a'm bag'darlaması tiykarında tayarlandı.

Du'zgen: **R.E.Jiemuratov**

Pikir bildiriwshi: **doc. K. Qudaybergenov**

Pa'nin' ishi oquw bagdarlamasi aymaqliq oraydi'n ilimiy metodikaliq ken'esinin' 2017 jil "_____" __________dag'i ___-sanli bayannama menen tastiyqlang'an

MAZMUNI

I. İS BAG’DARLAMA

Kirisiw

Bul bag’darlama O’zbekistan Respublikası Prezidentinin’ 2015-jıl 12- iyundag’ı “Oliy talim muassasalarining rah’bar va pedagog kadrlarini qayta tayYorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari twg’risida” gi PF-4732-sanlı Pa’rmanındag’ı a’h’miyetli bag’darlar mazmunınan kelip shıqqan h’alda du’zilgen bolıp, ol zamanago’y talaplar tiykarında qayta tayarlaw h’a’m qa’nigeligin asırıw protsesslerinin’ mazmunın jetilistiriw h’a’m de joqarı oqıw orınları pedagog kadrlarının’ ka’siplik kompetentligin turaqlı asırıp barıwdı ma’qset qıladı.

Ja’miyet rawajlanıwı tek g’ana ma’mleket ekonomikalıq da’rejesinin’ joa’arılıg’ı menen emes, ba’lkim bull da’reje h’a’r bir insannın’ kamal tabıwı h’a’m rawajlanıwına qanshelli bag’darlang’anlıg’ı, innovatsiyalardı qollana biliwi menen o’lshenedi. Demek, bilimlendiriw sisteması na’tiyjeliligin asırıw, pedagoglardı zamanago’y bilim h’a’m de a’meliy ko’nlikpe h’a’m ta’jiriybeler menen qurallandırıw, shet el ta’jiriybelerin u’yreniw h’a’m oqıw a’meliyatına qollanıw bu’gingi ku’nnin’ a’h’miyetli wazıypası bolıp esaplanadı. «Geometriyanın’ zamanago’y ma’seleleleri» moduli usı bag’dardag’ı ma’selelerdi sheshiwge qaratılg’an.

Bull «Geometriyanın’ zamanago’y ma’seleleleri» kursı qa’nigelik pa’nlerdin’ tiykarg’ılarınan biri esaplanadı. Bull kursta matematika oqıtıwdın’ ulıwma usılların h’a’m jan’a informatsion texnologiyalar ja’rdeminde joqarı matematikanı usılları u’yreniledi.

Moduldin’ maqseti h’a’m wazıypaları

«Geometriyanın’ zamanago’y ma’seleleleri» modulinin’ maqseti: pedagog kadrlardı qayta tayarlaw h’a’m mamanlıg’ın asırıw kursı tın’lawshılardı joqarı bilimlendiriwde matematika h’a’m onın’ bo’limleri boyınsha bilimlerin jetilistiriw, informatsion texnologiyalardı qollaw, sonın’ menen birge olarda joqarı ta’limnin’ joqarı matematika h’a’m onı oqıtıw boyınsha ko’nlikpe h’a’m ta’jiriybelerin qa’liplestiriw.

Moduldin’ wazıypaları:

- **Geometriya** boyınsha tın’lawshılarda ko’nlikpe h’a’m ta’jiriybelerin qa’liplestiriw;
- **Geometriya** boyınsha informatsion texnologiyalardan paydalanıw mamanlıg’ın qa’liplestiriw;
- Analitikalıq geometriya, differentsial geometriya h’a’m Riman geometriyasının’ tiykarg’ı bo’limleri menen tanıstırıwdan ibarat.

Modul boyınsha tın'lawshılardın' bilimi, ko'nlikpesi, mamanlıg'ı h'a'm kompetentsiyalarına qoyılatug'ın talaplar.

«Geometriyanın' zamanago'y ma'seleleleri» kursın o'zlestiriw barısında a'melge asırılatug'ın ma'seleler shen'berinde:

Tın'lawshı:

- geometriya h'a'm onın' bo'limleri, onı oqıtıw boyınsha jan'a texnologiyalardı biliwi;
- geometriya bo'limleri h'a'm olardın' rawajlanıwlar h'aqqında pikirge iye bolıwı;
- geometriya bo'limleri boyınsha jan'a teoriyalıq bilimlerge iye bolıwı;

Tın'lawshı:

- ka'siplik iskerlik tarawlarında joqarı matematika h'a'm onın' bo'limleri, onı oqıtıw boyınsha jan'a texnologiyalardı a'meliyatta qollay alıw sıyaqlı **ko'nlikpelerdi iyelewi kerek.**

Moduldi sho'lkemlestiriw h'a'm onı o'tkeriw boyınsha usınıslar

«Geometriyanın' zamanago'y ma'seleleleri» kursı lektsiya h'a'm a'meliy sabaqlar ko'rinisinde alıp barıladı.

Kurstı oqıtıw barısında ta'limnin' zamanago'y metodları, axborot-kommunikatsiya texnologiyaları qollanılıwı na'zerde tutılg'an:

- Lektsiya sabaqlarında zamanago'y kompyuter texnologiyaları ja'rdeminde prezentatsion h'a'm elektron-didaktikalıq texnologiyalardan;
- o'tkeriletug'ın a'meliy sabaqlarda texnikalıq qurallardan, ekspress-sorawlar, test sorawları, aqlıy h'u'jim, gruppalı pikirlew, kishi toparlar menen islew, kollokvium o'tkeriw h'a'm basqa da interaktiv ta'lim usılların qollaw na'zerde tutıladı.

Moduldin' oqıw rejedegi basqa moduller menen baylanısı.

«Geometriyanın' zamanago'y ma'seleleleri» "Matematik analizdin' arnawlı bapları", "Algebralıq sistemalar h'a'm operator algebralar teoriyası" pa'nleri menen tıg'ız baylanıslı.

Bull pa'ndi oqıtıw barısında da'stu'riy formalardan tısqarı jan'a pedagogik texnologiyalar da isletiledi. Bunda matematikalıq programmalar Powerpoint, Maple, Mathcad h'a'm bar bolg'an elektron oqıwlıqlar, veb saytlardan paydalanıladı.

Moduldin' joqarı ta'limdegi ornı.

Geometriya pa'ni respublika joqarı oqıw orınlarında matematika pa'nin joqarı ilimiy h'a'm metodikalıq da'rejede oqıtıwdı ta'miynlewde, matematika oqıtıwshılarının' joqarı da'rejedegi pedagog bolıwları, keleshekte ilimiy izleniwler alıp barıwı ushın tiykarg'ı orındı tutadı.

Bul kursta geometriya bo'limleri, onın' tiykarg'ı tu'siniklerin oqıtıw metodikası menen tanıstırıw ko'zde tutılg'an. Bunnan tısqarı joqarı matematikanı oqıtıwda jan'a informatsion texnologiyalardan paydalanıwdı u'yretiw de na'zerde tutılg'an.

“Geometriyanın’ zamanago’y ma’seleleri” moduli boyınsha saatlardın’ bo’listriliwi.

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Modul temaları</th><th colspan="5">Tın’lawshının’ oqıw ju’klemesi, saat</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Ha’mmesi</th><th colspan="3">Auditoriya oqıw ju’klemesi</th><th rowspan="3">O’z betinshe</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Jami</th><th colspan="2">sonnan</th></tr>
<tr><th>Lektsiya</th><th>A’meliy</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Analitikalıq geometriya pa’ni h’a’m onın’ predmeti: ekinshi ta’rtipli sızıqlar h’a’m betlikler</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Differentsial geometriya pa’ni h’a’m onın’ predmeti. Sızıqlar teoriyası</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Betlikler teoriyası</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Riman geometriyası elementleri. Chiger-Gromol probleması</td><td>8</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jami:</td><td>22</td><td>20</td><td>8</td><td>12</td><td>2</td></tr>
</table>

Bah’alaw kriteriyası.

<table>
<tr><th rowspan="2">№</th><th rowspan="2">Oqıw-tapsırma tu’rleri</th><th>Maksimal ball</th><th colspan="3">Bah’alaw kriteriyası</th></tr>
<tr><th>2,5</th><th>"ayrıqsha"
2,2-2,5</th><th>"jaqsı"
1,8-2,1</th><th>"orta"
1,4-1,7</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Test-sınaw tapsırmaların orınlaw</td><td>0,5</td><td>0,4-0,5</td><td>0,34-0,44</td><td>0,28-0,3</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Oqıw-proekt islerin orınlaw</td><td>1</td><td>0,9-1</td><td>0,73-0,83</td><td>0,56-0,7</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>O’z betinshe tapsırmalardı orınlaw</td><td>1</td><td>0,9-1</td><td>0,73-0,83</td><td>0,56-0,7</td></tr>
</table>

II. MODULDİ OQITIWDA PAYDALANILATUG'IN İNTERAKTİV TA'LİM METODLARI

"Keys-stadi" metodı

«Keys-stadi» - inglis tilinen alıng'an bolıp, («case» – anıq jag'day, h'a'diyse, «stadi» – u'yreniw, analiz qılıw) anıq jag'daylardı u'yreniw, analiz qılıw tiykarında oqıtıwdı a'melge asırıwg'a qaratılg'an metod esaplanadı. Bull metod da'slep 1921-jıl Garvard universitetinde praktikalıq jag'daylardan ekonomikalıq basqarıw pa'nlerin u'yreniwde paydalanıw ta'rtibinde qollanılg'an. Keysde ashıq axborotlardan yaki anıq waqıya-h'a'diyseden jag'day sıpatında analiz ushın paydalanıw mu'mkin.. Keys h'a'reketleri o'z ishine to'mendegilerdi qamrap aladı: Kim (Who), Qashan (When), Qaerde (Where), Ne ushın (Why), Qanday (How), Ne na'tiyje (What).

"Keys metodı" n a'melge asırıw basqıshları.

Basqıshları	İskerlik tu'ri h'a'm mazmunı
1-basqısh: Keys h'a'm onın' axborotlı ta'miynleniwi menen tanıstırıw	✓ jeke ta'rtiptegi audio-vizual is; ✓ keys penen tanısıw (tekstli, audio yaki media formada); ✓ axborottı ulıwmalastırıw; ✓ axborot analizi; ✓ mashqalalardı anıqlaw
2-basqısh: Keysti anıqlastırıw h'a'm oqıw tapsırmasın belgilew	✓ individual h'a'm toparda islew; ✓ mashqalalardın' a'h'miyetlilik ierarxiyasın anıqlaw; ✓ tiykarg'ı mashqalalı jag'daydı belgilew
3-basqısh: Keysdegi tiykarg'ı mashqalanı analizlew arqalı oqıw tapsırmasının' sheshimin izlew, sheshiw jolların islep shıg'ıw	✓ individual h'a'm toparda islew; ✓ alternativ sheshim jolların islep shıg'ıw; ✓ h'a'r bir sheshimnin' imkaniyatları h'a'm tosıqların analizlew; ✓ alternativ sheshimlerdi tan'law
4-basqısh: Keys sheshimin qa'liplestiriw h'a'm tiykarlaw, prezentatsiya	✓ individual h'a'm toparda islew; ✓ alternativ variantlardı a'melde qollaw imkaniyatların tiykarlaw; ✓ juwmaqlaw h'a'm jag'day sheshiminin' a'meliy aspektlarin jarıtıw

“Assesment” metodı.

Metodtın’ maqseti: Bull metod ta’lim alıwshılardın’ bilim da’rejesin bah’alaw, baqlaw, o’zlestiriw ko’rsetkishi h’a’m a’meliy ko’nlikpelerin tekseriwge bag’darlang’an. Bull texnika arqalı ta’lim alıwshılardın’ biliw iskerligi tu’rli bag’darlar (test, a’meliy ko’nlikpeler, mashqalala jag’daylar shınıg’ıwı, salıstırmalı analiz, simptomlardı anıqlaw) boyınsha bah’alanadı.

Metodtı a’melge asırıw ta’rtibi tartibi:

“Assesment”lerden lektsiya sabaqlarında studentlerdin’ yamasa qatnasıwshılardın’ bilim da’rejesin u’yreniwde, jan’a mag’lıwmatlardı bayan etiwde, seminar, a’meliy sabaqlarda bolsa tema yamasa mag’lıwmatlardı o’zlestiriw da’rejesin bah’alaw, sonın’ menen birge o’zin-o’zi bah’alaw ma’qsetinde individual formada paydalanıw usınıladı. Sonın’ menen birge oqıtıwshı do’retiwshilik penen jantasıwı h’a’m de oqıw maqsetlerinin kelip shıg’ıp, assesmentke qosımsha tapsırmalardı kiritiw mu’mkin.

III. Teoriyalıq shınıg'ıwlar materialları

1-tema: ANALITIKALIQ GEOMETRIYA PA'NI HA'M ONIN' PREDMETI: EKINSHI TA'RTIPLI SIZIQLAR HA'M BETLIKLER.

JOBA:

1.1. Analitikalıq geometriya pa'ni ha'm predmeti

1.2. Ekinshi ta'rtupli sızıqlar ha'm tuwrı sızıqlar

Tayanısh tu'sinikler: *Analitikalıq geometriya, ekinshi ta'rtipli sızıqlar, ekinshi ta'rtipli betlikler.*

1.1.Analitikalıq geometriya pa'ni ha'm onın' predmeti.

Tegislik yaki ken'islikde koordinatalar sistemasın kiritgenimizde, geometriyalıq figurag'a tiyisli noqatlar koordinatalarg'a iye boladı. Eger figurag'a tiyisli noqatlardın' koordinataları qandayda bir algebralıq ten'lemeni qanaatlandırsa, ol algebralıq ten'leme menen anıqlanıwshı geometriyalıq figura delinedi. Ma'selen, orayı $A(a;b)$ noqatda bolg'an ha'm radiusı R ge ten' shen'ber ten'lemesi $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$ ko'riniske iye boladı.

Analitikalıq geometriya u'yreniw metodlarının' tiykarın koordinatalar metodı quraydı [1-4]. Biz tiykarınan figuralardı olardın' ten'lemeleri ja'rdeminde u'yrenemiz, yag'nıy algebralıq ten'lemelerdi u'yreniw menen shug'ıllanamız. Bul jerde algebralıq metodlar tiykarg'ı roldi oynaydı. Biz tiykarınan birinshi ha'm ekinshi da'rejeli ten'lemeler menen jumıs alıp baramız. Analitikalıq geometriya kursında u'yreniletug'ın geometriyalıq figuralar klası ju'da' u'lken bolmasa da, birinshi ha'm ekinshi da'rejeli ten'lemeler menen anıqlanıwshı geometriyalıq figuralar pa'n ha'm texnikada ju'da' u'lken rol oynaydı [1].

Birinshi da'rejeli algebralıq ten'lemeler menen anıqlanıwshı geometriyalıq figuralar – tuwrı sızıq ha'm tegislik. Usı tiykarg'ı geometriyalıq figuralar menen siz elementar geometriya kursınan bilesiz. Tegislikda ekinshi da'rejeli ten'lemeler ekinshi ta'rtipli sızıqlardı, ken'islikde bolsa ekinshi ta'rtipli betliklerdi anıqlaydı. Joqarıdag'ı mısaldan ko'rinip turg'anınday, shen'ber ekinshi ta'rtipli sızıq.

Ken'islikde $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$ ten'leme menen anıqlanıwshı noqatlar ko'pligi bolsa sferadan ibarat bolıp, ol ekinshi ta'rtipli betlik.

Analitikalıq geometriya kursında vektorlar algebrası da u'yreniledi. Vektor tu'sinigi tiykarg'ı fundamental tu'siniklerden bolıp, tek g'ana analitikalıq geometriya kursında emes, matematikanın' basqa bo'limlerinde de tiykarg'ı roldi oynaydı.

Biz bul bapta tegislikte dekart koordinatalar sistemasında

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \quad (1)$$

ten’leme menen berilgen ekinshi ta’rtipli sızıqtı tekseriw menen shug’ıllanamız. Bul jumıstı koordinatalar sistemasın o’zgertiw ha’m (1) ten’lemeni a’piwayılastırıw ja’rdeminde a’melge asıramız. Birinshi gezekte parallel ko’shiriwde (1) ten’leme koeffitsientleri qanday o’geriwin tekseremiz. Bunın’ ushın

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0 \quad (2)$$

formulalar ja’rdeminde almastırıwlardı orınlaymız. Bul jag’dayda koordinata ko’sherlerinin’ bag’ıtları o’zgermeydi, tek koordinata bası $O'(x_0, y_0)$ noqatqa ko’shedi. Bul formulalardan x, y lardı tawıp ha’m (1) ge qoyıp

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \quad (3)$$

ten’lemeni payda etemiz. Bul ten’lemede koeffitsientler ushın

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = a_{22} \ ,$$

$$a'_{13} = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \quad a'_{23} = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \ a'_{33} = F(x_0, \ y_0) \quad (4)$$

ten’likler orınlı bolıp, $F(x, \ y)$ penen (1) ten’lemenın’ shep ta’repindegi an’latpa belgilengen.

Joqarıdag’ı (3) formulalardan ko’rinip turg’anınday, parallel ko’shiriwde ekinshi da’rejeli ag’zalar aldındag’ı koeffitsientler o’zgermeydi. Eger $O'(x_0, y_0)$ noqattın’ koordinataları

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

sistemanı qanaatlandırsa, (3) ten’lemede birinshi da’rejeli ag’zalar qatnaspaydı.

Bunnan tısqarı, eger $O'(x_0, y_0)$ noqattın’ koordinataları (5) sistemanı qanaatlandırsa, $O'(x_0, y_0)$ noqat ekinshi ta’rtipli sızıq ushın simmetriya orayı boladı. Haqıyqatında da bul jag’dayda koordinatalar orayın $O'(x_0, y_0)$ noqatqa ko’shirsek, ten’lemede birinshi da’rejeli ag’zalar qatnaspaydı. Sonın’ ushın jan’a koordinatalar sistemasında

$$F(x', \ y') = F(-x', -y')$$

ten’lik orınlı boladı. Demek, $O'(x_0, y_0)$ noqat sızıq ushın simmetriya orayı. Kerisinshe, eger qandayda bir A noqat sızıq ushın simmetriya orayı bolsa onın’ koordinataları (5) sistemanı qanaatlandırıwın ko’rsetemiz. Koordinata basın A noqatqa jaylastırıp, jan’a □ x, y koordinatalar sistemasın kiritemiz. Eger $M(x, y)$ noqat sızıqqa tiyisli bolsa,

$$F(x, \ y) = 0$$

ten’lik orınlı boladı. Koordinata bası simmetriya orayı bolg’anı ushın $F(-x, -\ y) = 0$ ten’likte orınlı boladı. Bul ten’liklerdin’ ekinshisin birinshisinen alıp

$$a_{12}x + a_{23} = 0$$

ten’likti payda etemiz. Eger a_{13}, a_{23} koeffitsientlerdin’ keminde birewi nolden o’zgeshe bolsa, bul ten’leme tuwrı sızıqtı anıqlaydı, yag’nıy ekinshi ta’rtiplisızıqtın’ barlıq noqatları bir tuwrı sızıqta jatadı. Eger ekinshi ta’rtipli sızıq bir tuwrı sızıqta jatpasa, bulkoeffitsientlerdin’ ha’r ekewide nolge ten’ boladı. Bul bolsa A noqattın’ koordinataları (5) sistemanı qanaatlandırıwın ko’rsetedi. Bul faktlerdi esapqa alıp to’mendegi anıqlamanın’ geometriyalıq ma’nisi jaqsı tu’sinikli boladı.

Anıqlama-1. Tegisliktegi $M_0(x_0, y_0)$ noqattın’ koordinataları (5) sistemanı qanaatlandırsa, ol (1) ten’leme menen berilgen ekinshi ta’rtipli sızıqtın’ orayı delinedi.

Bunnan, (5) sistema jalg’ız sheshimge iye bolıwı, sheksiz ko’p sheshimge iye bolıwı yaki ulıwma sheshimge iye bolmawı mu’mkin. Eger

$$a_{11}a_{22}-a^2{}_{21}\neq 0$$

qatnası orınlı bolsa, (5) sistema jalg’ız sheshimge iye boladı. Eger

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$$

qatnası orınlı bolsa, sistema sheksiz ko’p sheshimge,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$$

qatnası orınlanbasa sistema sheshimge iye emes. Bulardı itibarg’a alıp, biz ekinshi ta’rtipli sızıqlardı u’sh klasqa ajıratamız:

a) bir orayg’a iye bolg’an sızıqlar;

b) sheksiz ko’p orayg’a iye bolg’an sızıqlar;

v) orayg’a iye bolmag’an sızıqlar;

Biz to’mendegi determinantlardı kiritemiz.

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

bul jerde $a_{21}=a_{12},\quad a_{31}=a_{13},\quad a_{32}=a_{23}$ belgilewleri kiritilgen. Bir orayg’a iye bolg’an sızıqlar ushın $\delta\neq 0$, bir orayg’a iye bolmag’an sızıqlar ushın $\delta=0$. Sızıqlar sheksiz ko’p orayg’a iye bolıwı ushın $\Delta=0$ ten’lik orınlanıwı kerek.

U’shinshi ta’rtipli determinanttı

$$\Delta=a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ko’riniste jazıp alsaq, aqırg’ı determinant δ g’a ten’. Eger $\delta=0$ bolsa, qandayda bir k sanı ushın

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=k\ ,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

qatnas orınlanadı. Bul ten’likti esapqa alıp

$$\Delta=\left(a_{13}-ka_{23}\right)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ten’likti payda etemiz. Eger $\Delta=0$ ten’likte orınlansa

$$a_{13}-k\,a_{23}=0\,\text{ha’m}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=0$$

ten’liklerden keminde birewi orınlı boladı. Bul ten’liklerdin’ birinshisi orınlı bolsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=k$ qatnastan $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}=k$ qatnası kelip shıg’adı. Eger

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=0$$

bolsa, $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=k$ ha’m $\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$ ten’liklerinen

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}=k$$

qatnas kelip shıg’adı. Demek $\delta=0$ ha’m $\Delta=0$ ten’liklerdin’ bir waqıtta orınlanıwı

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}=k$$

sha'rtke ten'ku'shli. Na'tiyjede biz to'mendegi tastıyıklaudı payda etemiz:

Tastıyıqlaw-*1.Ekinshi ta'rtipli sızıq*

a) $\delta\neq 0$ bolsa bir orayg'a iye,

b) $\delta=0$ ha'm $\Delta=0$ bolsa sheksiz ko'p orayg'a iye ha'm oraylar da'stesi bir tuwrı sızıqtı quraydı;

v) $\delta=0$ ha'm $\Delta\neq 0$ bolsa orayg'a iye emes.

Tastıyıqlaw-2. *Bir orayg'a iye bolg'an ekinshi ta'rtipli sızıq orayı og'an tiyisli bolıwı ushın $\Delta=0$ ten'liktin' orınlanıwı za'ru'rli ha'm jetkilikli.*

Da'lillew. Ekinshi ta'rtipli sızıq orayı $M_0(x_0,y_0)$ noqatta bolıp, ol sızıqqa tiyisli bolsa

$$\begin{aligned}a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0\\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0\end{aligned}\quad(6)$$

ha'm

$$a_{11}x_0^{\ 2}+2a_{12}x_0\,y_0+a_{22}y_0^{\ 2}+2\,a_{13}x_0+2\,a_{23}\,y_0+a_{33}=0\ (7)$$

ten'likler orınlanadı. Joqarıdag'ı (6) ten'liktin' birinshisin x_0 g'a, ekinshisin y_0 g'a ko'beytip, (7) ten'likten alsaq

$$a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}=0$$

ten'likti payda etemiz. Demek $(x_0,y_0,1)$ u'shlik

$$\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0\end{aligned}\quad(8)$$

bir tekli sistemanın' trivial emes sheshimi. Bul bolsa $\Delta=0$ sha'rtke ten' ku'shli. Kerisinshe $\Delta=0$ bolsa, (8) sistema trivial emes (x_0,y_0,z_0) sheshimge iye. Bul u'shlikte $z_0\neq 0$, sebebi $\delta\neq 0$. Biz $z_0=1$ dep esaplay alamız, sebebi $\delta\neq 0$ bolg'anlıg'ı ushın ha'r bir z_0 ushın (x_0,y_0) juplıg'ı bar. Joqarıdag'ı (8) sistemada $z_0=1$ bolg'anda (x_0,y_0) juplıq oray koordinataları ekenligi kelip shıg'adı. Bunnan tısqarı (8) sistemadan paydalanıp

$$a_{11}x_0^{\ 2}+2a_{12}x_0\,y_0+a_{22}y_0^{\ 2}+2\,a_{13}x_0+2\,a_{23}\,y_0+a_{33}=0$$

ten'likti alıw mu'mkin [1,3,6].

1.2. Ekinshi ta'rtipli sızıqlar ha'm tuwrı sızıqlar.

Bizge (1) ten'leme menen anıqlang'an ekinshi ta'rtipli sızıq ha'm

$$\begin{aligned}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\end{aligned}\quad(9)$$

parametrlik ten'lemeler ja'rdeminde ℓ tuwrı sızıq berilgen bolsın. Tuwrı sızıq ha'm ekinshi ta'rtipli sızıqtın' kesilisiw noqatların tabıw ushın (9) an'latpaların (1) ge qoyamız. Na'tiyjede to'mendegi

$$\begin{aligned}&\left(a_{11}l^2+2a_{12}lm+a_{22}m^2\right)t^2+\\ &+2\left(a_{11}lx_0+a_{12}\left(ly_0+mx_0\right)+a_{22}my_0+a_{13}l+a_{23}m\right)t+F\left(x_0,y_0\right)=0\end{aligned}\quad(10)$$

kvadrat ten'lemeni payda etemiz. Bul ten'lemede ekinshi da'rejeli ag'za aldındag'ı an'latpa tuwrı sızıqtın' bag'ıtına baylanıslı. Ayırım bag'ıtlar ushın bul an'latpa nolge ten' boladı ha'm joqarıdag'ı ten'leme sızıqlı ten'lemege aylanadı. Ayırım bag'ıtlar ushın bul an'latpa nolge ten' emes ha'm joqarıdag'ı ten'leme kvadrat ten'leme boladı.

Anıqlama-1.*Berilgen* $\{\ell, m\}$ *bag'ıt ushın*

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \quad (11)$$

ten'lik orınlansa,bul bag'ıt asimptotik bag'ıt,

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0 \quad (12)$$

qatnas orınlansa asimptotik emes bag'ıt delinedi.

Tuwrı sızıqtın' bag'ıtı asimptotik emes bolsa,joqarıdag'ı ten'leme kvadrat ten'leme boladı. Demek bul tuwrı sızıq (1) sızıq penen eki yaki bir ulıwma noqatqa iye bolıwı mu'mkin. Asimptotik emes bag'ıttag'ı tuwrı sızıq ekinshi ta'rtipli sızıq penen bir noqatta kesilisse, ol urınba dep ataladı.

Tuwrı sızıqtın' bag'ıtı asimptotik bolsa, joqarıdag'ı ten'leme sızıqlı ten'leme boladı. Demek bul jag'dayda tuwrı sızıq (1) menen bir noqatta kesilisedi, yaki tuwrı sızıqtın' barlıq noqatları (1) ge tiyisli boladı. Eger ekinshi da'rejeli ag'za koeffitsienti nolge ten' bolıp, saltan ag'za nolden o'zgeshe bolsa, tuwrı sızıq ekinshi ta'rtipli sızıq penen kesilispeydi. Asimptotik bag'ıttag'ı tuwrı sızıq ekinshi ta'rtipli sızıq penen kesilispese ol ekinshi ta'rtipli sızıq ushın asimptota delinedi.

Biz $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ ten'lemede $\ell \neq 0$ bolsa, $k = \dfrac{m}{\ell}$ belgilewin kiritip, onı

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

ko'riniste, eger $m \neq 0$ bolsa, $k = \dfrac{\ell}{m}$ belgilewin kiritip,onı

$$a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$$

ko'rinisinde jazamız. Eki jag'dayda da diskriminant ushın

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = -4\delta$$

ten'lik orınlı. Demek $\delta > 0$ bolsa asimptotik bag'ıt bar emes. Bul jag'dayda (1) sızıq elliptik sızıq delinedi, eger $\delta = 0$ bolsa, asimptotik bag'ıt birew ha'm bul jag'dayda (1) sızıq parabolik, $\delta < 0$ bolsa eki asimptotik bag'ıt bar, sızıq bolsa giperbolik sızıq delinedi.

Joqarıdag'ı (11) ten'lemedegi birinshi da'rejeli ag'za aldındag'ı koeffitsient

$$(a_{11}\ell + a_{12}m)x + (a_{12}\ell + a_{22}m)y + a_{13}\ell + a_{22}m = 0 \quad (13)$$

ko'riniske iye. Eger

$$\begin{aligned} a_{11}\ell + a_{12}m &= 0 \\ a_{21}\ell + a_{22}m &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ten'likler bir waqıtta orınlanbasa, (13) ten'leme tuwrı sızıqtı anıqlaydı.

Berilgen $\{\ell, m\}$ bag'ıt ushın (14) ten'likler orınlansa, $\{\ell, m\}$ bag'ıt arnawlı bag'ıt delinedi. Ekinshi ta'rtipli sızıq ushın $\delta \neq 0$ bolsa, (14) sistema tek trivial sheshimge iye, demek bir orayg'a iye bolg'an sızıqlar ushın arnawlı bag'ıtlar joq.

Anıqlama-2. *Arnawlı bolmag'an* $\{\ell, m\}$ *bag'ıt ushın (13) ten'leme anıqlawshı tuwrı sızıq ekinshi ta'rtipli sızıqtın'* $\{\ell, m\}$ *bag'ıtqa tu'yinles diametri dep ataladı.*

Diametr tu'siniginin' korrekt anıqlang'anlıg'ın ko'rsetemiz. Da'slep $\{\ell, m\}$ bag'ıt asimptotik bag'ıt bolg'an jag'daydı qaraymız. Bul jag'dayda

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

ten'liktin' shep ta'repi ushın

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = (a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m \quad (14)$$

ten'lik orınlı. Demek

$$(a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m = 0 \quad (15)$$

ten'lik kelip shıg'adı. Bul ten'likten

$$\frac{\ell}{-(a_{12}\ell + a_{22}m)} = \frac{m}{a_{11}\ell + a_{12}m} \quad (16)$$

proportsionallıq qatnası kelip shıg'adı.

Diametr ushın $\{-(a_{12}l + a_{22}m),\, a_{11}l + a_{12}m\}$ vektor bag'ıtlawshı vektor bolg'anlıg'ı ushın diametr $\{\ell, m\}$ bag'ıtqa parallel boladı. Diametrge tiyisli noqatlar ushın (11) ten'lemedegi birinshi da'rejeli ag'za aldındag'ı koeffitsient nolge ten' boladı. Demek bul jag'dayda diametr ekinshi ta'rtipli sızıq ushın asimptota boladı (kesilispeydi) yaki diametrge tiyisli barlıq noqatlar (1) sızıqta jatadı.

Asimptotik emes $\{\ell, m\}$ bag'ıtqa iye bolg'an tuwrı sızıq (1) sızıqtı eki M_1 ha'm M_2 noqatlarda kesip o'tse, M_1M_2 kesimnin' ortasın $M_0(x_0, y_0)$ menen belgilep tuwrı sızıqtın' parametrlik ten'lemelerin

$$x = x_0 + lt, \; y = y_0 + mt$$

ko'riniste jazamız. Parametrdin' M_1, M_2 noqatlarg'a sa'ykes keliwshi ma'nislerin t_1, t_2 menen belgilesek, olar (10) ten'lemenın' sheshimleri boladı ha'm Viet teoreması boyınsha $t_1 + t_2 = 0$ ten'lik orınlı boladı. Bul ten'likten $M_0(x_0, y_0)$ noqattın' diametrge tiyisli ekenligi keliip shıg'adı. Demek asimptotik emes $\{\ell, m\}$ bag'ıtqa parallel xordalardın' ortalarınan o'tiwshi tuwrı sızıq usı bag'ıtqa tu'yinles diametr boladı.

Asimptotik emes $\{\ell, m\}$ bag'ıtqa iye bolg'an ha'm tu'yinles diametrge tiyisli $M_0(x_0, y_0)$ o'tiwshi tuwrı sızıq (1) sızıqtı M_1 ha'm M_2 noqatlarda kesip o'tse, bul noqatlarg'a sa'ykes keliwshi parametrdin' ma'nisleri (10) ten'lemenın' sheshimleri boladı. Tuwrı sızıqtın' $M_0(x_0, y_0)$ noqatı diametrge tiyisli bolg'anlıg'ı ushın (10) ten'lemede birinshi da'rejeli ag'za aldındag'ı koeffitsient nolge ten' boladı. Viet teoreması boyınsha $t_1 + t_2 = 0$ bolg'anlıg'ı ushın $M_0(x_0, y_0)$ noqat M_1M_2 kesimnin' ortası boladı. Demek, diametr tu'sinigi korrekt anıqlang'an.

Berilgen $\{\ell, m\}$ bag'ıtqa tu'yinles diametr ten'lemesin

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\ell + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})m = 0 \quad (17)$$

ko'riniste jazıw mu'mkin. Bul ten'lemeden ko'rinip turg'anınday, ha'r qanday diametr (1) sızıq orayınan o'tedi.

Tu'yinles bag'ıtlar ha'm bas bag'ıtlar

Berilgen $\{\ell, m\}$ bag'ıtqa tu'yinles diametr bag'ıtı $\{\ell', m'\}$ ushın

$$l' : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m) \quad (18)$$

qatnas orınlı. Bul qatnastı

$$(a_{11}l + a_{12}m)l' + (a_{12}l + a_{22}m)m' = 0 \quad (19)$$

ko'riniste yaki

$$a_{11}ll' + a_{12}\left(lm' + ml'\right) + a_{22}mm' = 0 \quad (20)$$

ko'riniste de mu'mkin.

Anıqlama- 1. *Eki $\{\ell, m\}$ ha'm $\{\ell', m'\}$ bag'ıtlar ushın (20) qatnas orınlansa, bul bag'ıtlar (1) sızıqqa qarata tu'yinles bag'ıtlar delinedi.*

Anıqlama-2. *Qandayda bir bag'ıt o'zine perpendikulyar bag'ıtqa tu'yinles bolsa, ol bas bag'ıt delinedi.*

Bul anıqlama boyınsha $\{\ell, m\}$ bag'ıt bas bag'ıt bolıwı ushın u $\{-m, \ell\}$ bag'ıtqa tu'yinles bolıwı kerek. A'lbette, eger $\{\ell, m\}$ bag'ıt bas bag'ıt bolsa, $\{-m, \ell\}$ bag'ıt da bas bag'ıt boladı. Berilgen $\{\ell, m\}$ bag'ıttın' bas bag'ıt bolıw sha'rti

$$a_{11}ll' + a_{12}\left(lm' + ml'\right) + a_{22}mm' = 0$$

ten'likte $\{\ell', m'\}$ vektordi $\{-m, \ell\}$ menen almastırıw na'tiyjesinde payda boladı ha'm to'mendegi ko'riniste boladı:

$$a_{12}\,\ell^2 + \left(a_{22} - a_{11}\right)\ell\, m - a_{21}\, m^2 = 0 \quad (21)$$

Eger $\{\ell, m\}$ arnawlı bag'ıt bolsa,

$$\frac{\ell}{m} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} = \frac{-a_{22}}{a_{12}}$$

ten'lik orınlı boladı ha'm joqarıdag'ı (21) sha'rt orınlang'an. Biz bilemiz, tek $\delta = 0$ bolg'an jag'dayda g'ana ekinshi ta'rtipli sızıq arnawlı bag'ıtqa iye bolıp, ol ekinshi ta'rtipli sızıq ushın asimptotik bag'ıt boladı. Demek, bir orayg'a iye bolmag'an ekinshi ta'rtipli sızıqlar ushın asimptotik bag'ıt bas bag'ıt boladı. A'lbette arnawlı bag'ıtqa perpendekulyar bag'ıtta bas bag'ıt boladı. Basqa bas bag'ıtlar joq. Demek, bir orayg'a iye bolmag'an ekinshi ta'rtipli sızıqlar ushın o'z-ara perpendekulyar tek eki bas bag'ıt bar.

Joqarıdag'ı (21) ten'likte $a_{12} = 0$ ha'm $a_{11} = a_{22}$ qatnaslar orınlansa, bul ten'lik qa'legen $\{\ell, m\}$ bag'ıt ushın orınlanadı. Demek, bul jag'dayda qa'legen bag'ıt bas bag'ıt boladı. Eger $a_{12} \neq 0$ bolsa, (21) ten'lik $k = \frac{\ell}{m}$ (ha'm $k = \frac{m}{\ell}$) an'latpa ushın kvadrat ten'leme boladı. Bul ten'lemede diskriminant ushın

$$D = \left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a^2_{12} > 0$$

qatnas orınlı bolg'anı ushın ol eki sheshimge iye, demek ekinshi ta'rtipli sızıq ushın eki o'z-ara perpendekulyar bas bag'ıt bar.

Tekseriw ushın sorawlar:

1. To'mendegi ekinshi ta'rtipli sızıqlardın' orayın tabın'.

a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

v) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$ g) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

d) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

2. To'mendegi ekinshi ta'rtipli sızıqlardın' tu'rin anıqlan'.

a) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$

b) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$

v) $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$

g) $y^2+5xy-14x^2=0$

d) $x^2-xy-y^2-x-y=0$.

3. To'mendegi giperbolalardın' asimptotaların tabın'.

a) $3x^2+2xy-y^2+8x+10y+14=0$

b) $3x^2+10xy+7y^2+4x+2y+1=0$

v) $10xy+6x+4y-21=0$

g) $2x^2-3xy-x+3y+4=0$

Juwapları:

1. a) $O_1(7;5)$, b) $O_1(-1;-1)$. v) $O_1(0;1)$. g) Orayg'a iye emes. d) $O_1(-1;-1)$

2. a) giperbola. b) haqıyqıy ellips. v) kesilisiwshi haqıyqıy qos tuwrı sızıq. g) kesilisiwshi haqıyqıy qos tuwrı sızıq. d) giperbola.

3. a) $2x+2y-1=0,\ 6x-2y+19=0$. b) $6x+14y+11=0,\ 2x+2y-1=0$. v) $5x+2=0,\ 5y+3=0$. g) $x-1=0,\ 8x-12y-7=0$.

Test tapsırmaları

№	Test tapsırması	Tuwrı juwap	Nadurıs juwap	Nadurıs juwap	Nadurıs juwap
1	U'sh ko'sherli ellipsoidtın' ten'lemesi	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
2	To'mendegi ekinshi ta'rtipli sızıqlardan qaysı biri asimptotag'a iye	Parabola	Giperbola	Tuwrı sızıq	Ellips
3	Qanday ekinshi ta'rtipli sızıqlar bir jup bas bag'ıtqa iye	Barlıq sızıqlar	Elliptik tiptegi sızıqlar	Giperbolik tiptegi sızıqlar	Parabolik tiptegi sızıqlar
4	Konustın' ten'lemesi	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
5	To'mendegi ekinshi ta'rtipli sızıqlardan qaysı biri	Parabola	Giperbola	Ellips	Eki parallel tuwrı sızıq

	orayg'a iye emes				
6	To'mendegi ekinshi ta'rtipli sızıqlardan qaysı biri sheksiz ko'p bas bag'ıtqa iye	Shen'ber	Giperbola	Parabola	Ellips
7	Eki geuekli giperboloidtın' ten'lemesi	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
8	To'mendegi ekinshi ta'rtipli sızıqlardan qaysı biri asimptotik bag'ıtqa iye emes	Ellips	Tuwrı sızıq	Giperbola	Parabola
9	To'mendegi ekinshi ta'rtipli sızıqlardan qaysı biri bir jup asimptotik bag'ıtqa iye	Giperbola	Ellips	Parabola	Shen'ber
10	Bir geuekli giperboloidtın' ten'lemesi	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Paydalanılg'an a'debiyatlar:

1. Narmanov A.Ya. Analitikalıq geometriya. T., "O'zbekstan filosofları milliy ja'miyeti", 2008 .
2. Izu Vaisman. Analytical geometry.World scientific.2007.
3. www.mathnet.ru
4. www.ru.bookos.org

2-tema: DIFFERENTSIAL GEOMETRIYA PA’NI HA’M ONIN’ PREDMETI . SIZIQLAR TEORIYASI.

JOBA:

2.1. Differentsial geometriya ma’seleleri.

2.2. Iymek sızıq urınbası ha’m normal tegisligi.

Tayanısh tu’sinikler:*elementar iymek sızıq, parametrlengen elementar iymek sızıq, ulıwmalıq iymek sızıq, urınba, dog’a uzınlıg’ı.*

2.1.Differentsial geometriya ma’seleleri.

Biz bul bo’limde differentsial geometriya kursının’ tiykarg’ı obiektlerinen biri bolg’an iymek sızıq tu’sinigin kiritemiz, onın’ beriliw usılları ha’m tiykarg’ı geometriyalıq xarakteristikaların u’yrenemiz.

Anıqlama. *Ken’isliktegi (yaki tegisliktegi) γ ko’plik qandayda bir ashıq intervaldın’ topologiyalıq (gomeomorf) sa’wlelendiriwdegi obrazı bolsa, ol* ***elementar iymek sızıq*** *dep ataladı.*

Bul anıqlama boyınsha, qandayda bir $f:(a;b)\to R^3$ sa’wlelendiriw ushın, $f((a;b))=\gamma$ ten’lik orınlı bolıp, $f:(a;b)\to\gamma$ topologiyalıq sa’wlelendiriw bolsa, γ **elementar iymek sızıq** dep ataladı.

Biz $f:(a;b)\to R^3$ sa’wlelendiriw ja’rdeminde berilgen elementar γ iymek sızıqtı qaraymız. Ashıq $(a;b)$ intervalg’a tiyisli qa’legen t noqatqa sa’ykes keliwshi noqattı $\gamma(t)$ menen belgilesek, f gomeomorfizmin $t\to\gamma(t)$ ko’riniste jaza alamız. Bul $\gamma(t)$ noqattın’ koordinataların $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funktsiyalar menen belgilesek, f sa’wlelendiriw

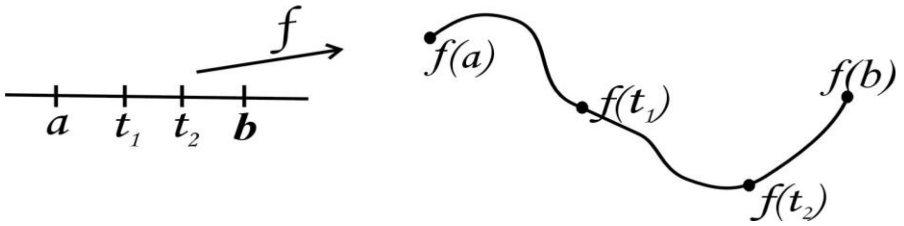
$$t\to(x(t),y(t),z(t))$$

ko’riniste boladı. Sonın’ ushın to’mendegi ten’likler sisteması γ sızıqtın’ *parametrlik ten’lemeleri* delinedi:

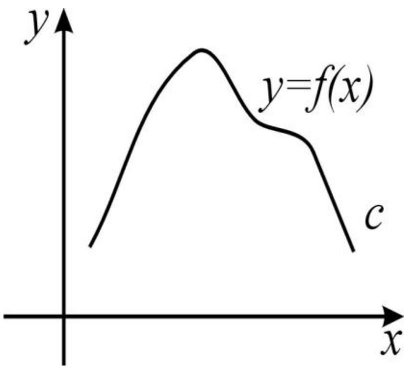
$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad a<t<b \quad (1) \\ z=z(t), \end{cases}$$

f – u’zliksiz sa’wlelendiriw bolg’anlıg’ı ushın, $x(t),\ y(t),\ z(t)$ koordinatalar t o’zgeriwshinin’ u’zliksiz funktsiyaları. Eger γ elementar iymek sızıq $y=f(x)$ funktsiyanın’ grafigi bolsa, onın’ parametrlik ten’lemeleri $x=t,\ y=f(t)$ ko’riniste boladı. Elementar iymek sızıqtın’ parametrlik ten’lemeleri topologiyalıq f sa’wlelendiriw ja’rdeminde anıqlanadı. Sonın’ ushın, eger γ sızıqtı basqa gomeomorfizm ja’rdeminde anıqlasaq, onın’ parametrlik ten’lemeleri o’zgeredi. Birinshi bapta ko’rgenimizdey, ha’r qanday eki ashıq interval o’z-ara gomeomorf.

Sonın’ ushın, $f:(a,b)\to R^3$ sa’wlelendiriw ja’rdeminde anıqlang’an elementar γ iymek sızıqtı qa’legen (c,d) intervaldın’ basqa gomeomorf sa’wlelendiriwdegi obrazı dep qaraw mu’mkin. Haqıyqatında da, eger $g:(c,d)\to(a,b)$ gomeomorfizm bolsa, onda γ sızıqtı $F:(c,d)\to R^3$ sa’wlelendiriw ja’rdeminde bere alamız. Bul jerde F sa’wlelendiriw $F(\tau)=f(g(\tau))$ nızam menen anıqlanadı. Gomeomorfizmlerdin’ kompozitsiyası sıpatında F de gomeomorfizm. Demek, ha’r bir elementar iymek sızıqtı sheksiz ko’p usıllar menen parametrlew mu’mkin.



Sızılma-1



Sızılma-2

Differentsial geometriya kursında iymek sızıq (1) ko’rinistegi parametrlik ten’lemeler ja’rdeminde u’yreniledi, yag’nıy γ sızıqtı anıqlawshı f sa’wlelendiriw tan’lanıp, onın’ parametrlik ten’lemeleri jazıladı.

Bul jag’dayda γ sızıqtı **parametrlengen elementar iymek sızıq** dep ataymız. Matematikalıq analiz tiykarg’ı matematikalıq apparat bolg’anlıg’ı ushın $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funktsiyalarg’a qosımsha sha’rtler qoyamız.

Anıqlama. *Berilgen γ elementar iymek sızıqtı differentsiallanıwshı $x(t),\ y(t),\ z(t)$ funftsiyalar ja’rdeminde parametrlew mu’mkin bolsa, ol sıypaq elementar iymek sızıq dep ataladı.*

Eskertiu: Za’ru’r bolg’an jag’daylarda, biz joqarı ta’rtipli tuwındılardın’ bar ha’m u’zliksiz bolıwın talap etemiz.

Mısallar:

1. Ha’r qanday tuwrı sızıq elementar iymek sızıq. Haqıyqatında da, eger l tuwrı sızıq

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \qquad -\infty < t < +\infty \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

parametrlik ten’lemeler menen berilgen bolsa, $t \to (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ sa’ykeslik $(-\infty; +\infty)$ interval menen l tuwrı sızıq noqatları ortasında topologiyalıq sa’wlelendiriw boladı.

2. Ashıq intervalda anıqlang’an ha’r qanday u’zliksiz funktsiyanın’ grafigi elementar iymek sızıq. Haqıyqatında da, eger $y = f(x)$ funktsiya (a,b) da anıqlang’an ha’m u’zliksiz bolsa, $x \to (x, f(x))$ sa’ykeslik (a,b) interval menen $y = f(x)$ funktsiya grafigi noqatları ortasında gomeomorf sa’wlelendiriwdi beredi.

3. Biz birinshi kursda u’yrengen ekinshi ta’rtipli sızıqlardan tek parabola elementar iymek sızıq boladı. Haqıyqatında da parabola ashıq intervaldın’ topologiyalıq sa’wlelendiriwdegi obrazı, sebebi parabolanı u’zliksiz funktsiyanın’ grafigi sıpatında su’wretlew mu’mkin.

Anıqlama. *Baylamlı γ ko’plikke tiyisli ha’r qanday M noqattın’ qandayda bir U_M do’geregi bar bolıp, γ ko’liktin’ U_M do’geregindegi bo’legi elementar iymek sızıq bolsa, γ a’piwayı iymek sızıq dep ataladı.*

Shen’ber elementar iymek sızıq emes, sebebi ol hesh qanday ashıq intervalg’a gomeomorf emes. (Ne ushınq Bul sorawg’a juwaptı oqıwshılar 1-baptan tabıwı mu’mkin). Biraq ol a’piwayı iymek sızıq. Bunı ko’rsetiw ushın shen’ber jatıwshı tegislikte dekart koordinatalar sisteması kiritemiz ha’m ulıwmalıqtı shegaralamastan koordinata bası shen’ber orayında dep esaplaymız. Sonda radiusı R ge ten’ shen’berdin’ parametrlik ten’lemeleri to’mendegishe boladı:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Eger $M(t_0)$ noqat shen’berdin’ $(R\cos t_0; R\sin t_0)$ noqatı bolsa, jeterlishe kishi $\varepsilon > 0$ ushın

$$t \to (R\cos t; R\sin t), \quad t \in (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$$

sa’wlelendiriw $(t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$ intervaldı onın’ obrazına gomeomorf sa’wlelendiredi. Demek, qa’legen $M(t_0)$ noqat ushın onın’ jeterlishe kishi do’gereginde shen’ber elementar iymek sızıqqa aylanadı.

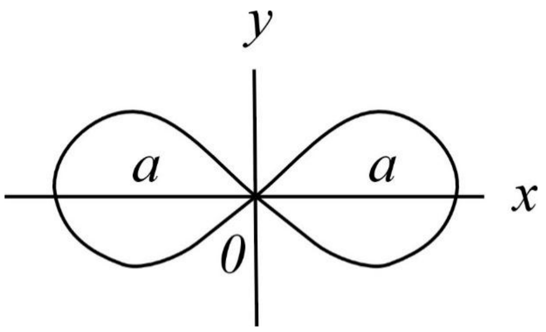
A’piwayı iymek sızıq strukturası haqqındag’ı to’mendegi teoremanı da’lillewsiz keltiremiz.

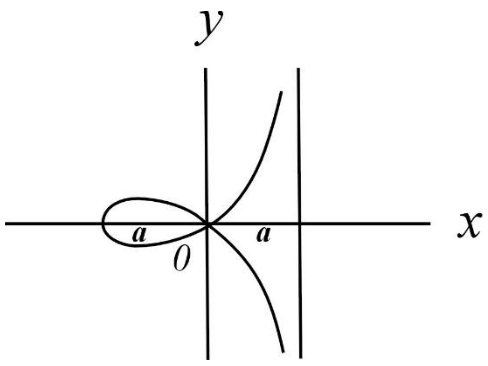
Teorema-1. *Ha’r qanday a’piwayı iymek sızıq yaki elementar iymek sızıq, yaki shen’berge gomeomorf.*

Endi sızıqlar semeystvosın ja’nede ken’eytemiz.

Bunın’ ushın ulıwma iymek sızıq tu’sinigin kiritemiz. Bizge a’piwayı γ iymek sızıq berilgen bolıp, M bolsa og’an tiyisli noqat bolsın. Eger U_M ko’plik M noqattın’ do’geregi bolsa, $U_M \cap \gamma$ kesilispeni M noqattın’ γ ***sızıqtag’ı do’geregi*** dep ataymız. Na’tiyjede, γ topologiyalıq ken’islikke aylanadı.

Eger $f : \gamma \to R^3$ sa’wlelendiriw ushın qa’legen $M \in \gamma$ noqattın’ γ da U do’geregi bar bolıp, $f|_U : U \to f(U)$ topologiyalıq sa’wlelendiriw bolsa, f ***lokal topologiyalıq sa’wlelendiriw*** delinedi. A’piwayı iymek sızıqtın’ lokal topologiyalıq sa’wlelendiriwdegi obrazı ***ulıwma iymek sızıq*** delinedi. To’mendegi sızılmalarda, a’piwayı iymek sızıq bolmaytug’ın ulıwma iymek sızıqlar ko’rsetilgen.





Sızılma-3 **Sızılma-4**

Bunnan keyin, kurs dawamında biz iymek sızıq degende, elementar iymek sızıqtı, a'piwayı iymek sızıqtı yaki ulıwma iymek sızıqtı tu'sinemiz. Ulıwma iymek sızıqlardın' anıqlamasına ko're ol o'zine tiyisli qa'legen noqattın' jeterlishe kishi do'gereginde elementar iymek sızıqtın' topologiyalıq sa'wlelendiriwdegi obrazı.

Sonın' ushın, ulıwma iymek sızıqtı da qa'legen noqatının' do'gereginde (1) ko'rinistegi paramaetrlik ten'lemeler ja'rdeminde beriw mu'mkin. Eger bizge

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a < t < b$$

ten'likler sisteması berilgen bolsa, bul sistema qandayda bir iymek sızıqtın' parametrlik ten'lemeleri sisteması bolama, degen soraw tuwıladı. Bul sorawg'a to'mendegi teorema juwap beredi.

Teorema-2: *Sıypaq* $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$ *funktsiyalar tuwındıları ha'r bir* $t \in (a;b)$ *ushın* $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$ *sha'rtti qanaatlandırsa,*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (a,b) \\ z = z(t). \end{cases}$$

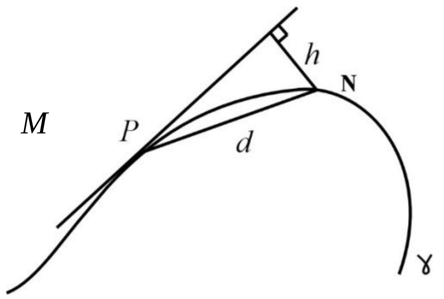
ten'lemeler sisteması ulıwma iymek sızıqtı anıqlaydı.

Bul ulıwma iymek sızıq (a,b) *intervaldın'* $f : t \to (x(t), y(t), z(t))$ *sa'wlelendiriwdegi obrazı.*

2.2. Iymek sızıq urınbası ha'm normal tegisligi

Elementar γ iymek sızıqtın' M noqatınan o'tiwshi urınba tu'sinigin kiritip, onın' ten'lemesin keltirip shıg'arayıq. Bunın' ushın M noqattan l tuwrı sızıqtı o'tkereyik, N menen M ge jaqın bolg'an γ sızıqtın' qandayda bir noqatın belgileyik. Iymek sızıqtag'ı M ha'm N noqatlar arasındag'ı aralıqtı d menen, N noqattan $l-$ tuwrı sızıqqa shekem bolg'an aralıqtı h penen belgileyik. Eger, N noqat M ge jaqınlassa, d ha'm h aralıqlar nolge umtıladı. Biraq, $\frac{h}{d}$ an'latpanın' nege umtılıwı haqqında hesh na'rse ayta almaymız.

Anıqlama. *Iymek sızıq* γ *nın'* N *noqatı* M *ge umtılg'anda* $\frac{h}{d}$ *an'latpa nolge umtılsa,* $l-$*tuwrı sızıq,* γ *nın'* M *noqattag'ı urınbası* dep ataladı.

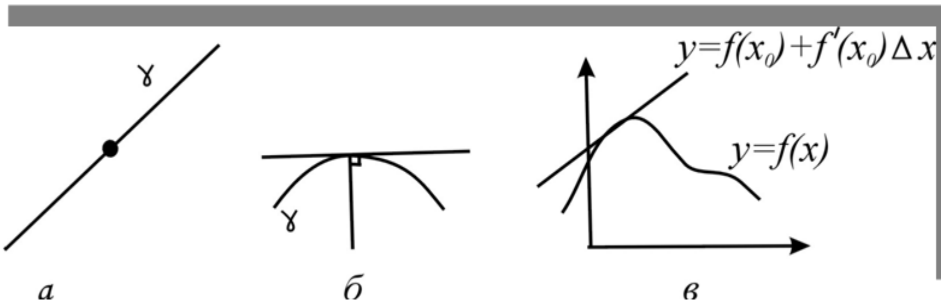


Sızılma-5

Eger φ menen l ha'm MN tuwrı sızıqlar arasındag'I mu'yeshti belgilesek, $\sin\varphi = \frac{h}{d}$ boladı. Demek, eger $l-$ urınba bolsa, N noqat M ge umtılg'anda, MN tuwrı sızıq $l-$tuwrı sızıqqa umtıladı. Kerisinshe N noqat M ge umtılg'anda MN tuwrı sızıq qandayda bir $l-$tuwrı sızıqqa umtılsın. Sonda, $l-$urınba boladı.

Teorema-3. *Regulyar iymek sızıqtın' ha'r bir noqatınan bir urınba o'tedi. Eger γ iymek sızıq, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ten'leme ja'rdeminde berilgen bolsa, $M(t_0)$ noqattag'ı urınba $\vec{r}'(t_0)$ vektorg'a parallel.*

Anıqlama. *Regulyar γ iymek sızıq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ten'leme menen anıqlansa, $M(t_0)$ noqattan o'tiwshi ha'm $\vec{r}'(t_0)$ vektorg'a parallel tuwrı sızıq γ nın' $M(t_0)$ noqatınan o'tiwshi* ***urınbası*** *dep ataladı.*



Sızılma-6

Analitikalıq geometriya kursınan bilemiz, eger tuwrı sızıqtın' bir noqatı ha'm bag'ıtlawshı vektorı (yag'nıy og'an parallel vektor) berilgen bolsa, onın' ten'lemesin du'ze alamız. Regulyar γ iymek sızıq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ten'leme menen anıqlansa onın' $M(t_0)$ noqatınan o'tiwshi urınba ten'lemesi

$$\vec{\rho}(t_0) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0), \ (\lambda\text{-parametr})$$

ko'riniste boladı.

Regulyar iymek sızıq parametrlik ten'lemeler ja'rdeminde, yag'nıy,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad , \quad a < t < b \\ z = z(t) \end{cases}$$

sistema ja'rdeminde anıqlang'an bolsa, $M(t_0)$ noqattan o'tiwshi urınba ten'lemesi

$$\frac{x - x_0}{x\,(t_0)} = \frac{y - y_0}{y\,(t_0)} = \frac{z - z_0}{z\,(t_0)}$$

ko'riniste boladı. Bul jerde $x_0 = x(t_0), \quad y_0 = y(t_0), \quad z_0 = z(t_0)$.

Regulyar iymek sızıq $y = y(x), \quad z = z(x)$ ten’lemeler ja’rdeminde berilse, onın’ urınba ten’lemesi

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)}$$

ko’riniste boladı.

Eger ken’isliktegi iymek sızıq

$$\begin{cases} \phi\left(x, y, z\right) = 0 \\ \psi\left(x, y, z\right) = 0 \end{cases}$$

ten’lemeler ja’rdeminde anıqlang’an ha’m $\begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y & \phi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix}$ matritsanın’ rangi ekige ten’ bolsa, $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ noqattan o’tiwshi urınba ten’lemesi

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \phi_y & \phi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \phi_z & \phi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_x \end{vmatrix}}$$

ko’riniste boladı. Bul jerde dara tuwındılar $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ noqatta esaplang’an. Haqıyqatında da, birinshi paragraftag’ı teorema boyınsha, $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$ noqat do’gereginde γ iymek sızıq

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

ten’lemeler ja’rdeminde anıqlanadı.

Demek,

$$\phi\left(x(t), \quad y(t), \quad z(t)\right) \equiv 0, \quad \psi\left(x(t), \quad y(t), \quad z(t)\right) \equiv 0$$

ten’liklerdi differentsiallap,

$$\phi_x x' + \phi_y y' + \phi_z z' = 0$$
$$\psi_x x' + \psi_y y' + \phi_z z' = 0$$

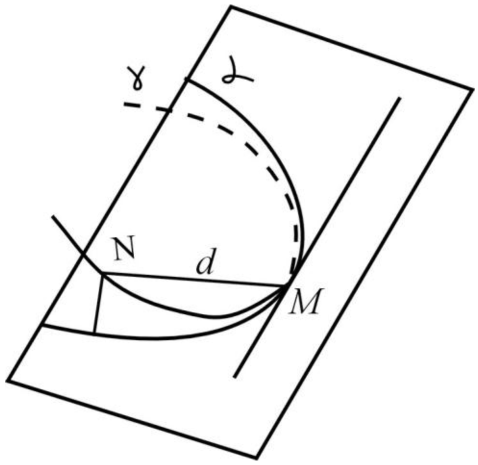
ten’liklerin alamız. Bunnan bolsa

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix} \phi_y & \phi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix}} = \frac{y'}{\begin{vmatrix} \phi_z & \phi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix}} = \frac{z'}{\begin{vmatrix} \phi_x & \phi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}$$

qatnastı payda etemiz.

Yopishma tegislik ha’m onın’ ten’lemesi

Iymek sızıq ushın tiyisiushi tegislik tu’sinigin kiritip, onın’ ten’lemesin keltirip shıg’aramız. Iymek sızıq γ nın’ M noqatınan o’tiwshi qandayda bir α tegislik ha’m sızıqtag’ı M ge jaqın N noqat ushın d menen M,N noqatlar arasındag’ı aralıqtı, h penen bolsa N noqattan α tegislikke shekem bolg’an aralıqtı belgileyik.



Sızılma-7

Anıqlama. *Sızıqtag’ı N noqat M noqatqa jaqınlasqanda $\frac{h}{d^2}$ nolge umtılsa, α tegislik γ nın’ M noqattag’ı **tiyisiushi tegisligi** dep ataladı.*

Teorema-4. *Eki ma’rte differentsiallanıwshı regulyar γ iymek sızıqtın’ ha’r bir noqatınan o’tiwshi Yopishma tegislik bar bolıp, urınba Yopishma tegislikte jatadı. Eger iymek sızıq $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ten’leme ja’rdeminde anıqlang’an bolsa, $M(t_0)$ noqattan o’tiwshi Yopishma tegislik $\vec{r}'(t_0),\vec{r}''(t_0)$ vektorlarg’a parallel boladı.*

Da’lillew: YOpishma tegislik $\vec{r}'(t_0)$ ha’m $\vec{r}''(t_0)$ vektorlarg’a parallel bolg’anlıg’ı ushın, eger bul vektorlar o’z-ara parallel bolsa, $M(t_0)$ noqattan o’tiwshi Yopishma tegislikler sheksiz ko’p. Biraq $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ vektorlar parallel bolmasa, $M(t_0)$ noqattan o’tiwshi Yopishma tegislik birew.

Endi Yopishma tegislik ten’lemesin jazamız. Bunın’ ushın $\vec{r}'(t_0)$ ha’m $\vec{r}''(t_0)$ vektorlardın’ basların $M(t_0)$ noqatqa jaylastırıp, $P(x,y,z)$ penen Yopishma tegislik noqatın belgilesek, $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$, $\overline{MP}$ vektorlar komplanar vektorlar semeystvosın quraydı. Sonın’ ushın olardın’ aralas ko’beymesi nolge ten’ boladı. Ekinshi ta’repten, olardın’ aralas ko’beymesi nolge ten’ bolg’anda $P(x,y,z)$ noqat Yopishma tegislikke tiyisli boladı. Demek, $\vec{r}$ menen R noqattın’ radius vektorın belgilesek, Yopishma tegislik ten’lemesin $(\vec{r}-\vec{r}(t_0))\vec{r}'(t_0)\vec{r}''(t_0)=0$ ko’riniste jaza alamız.

Eger iymek sızıq $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ parametrlik ten’lemeler ja’rdeminde berilse, Yopishma tegislik ten’lemesi

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0$$

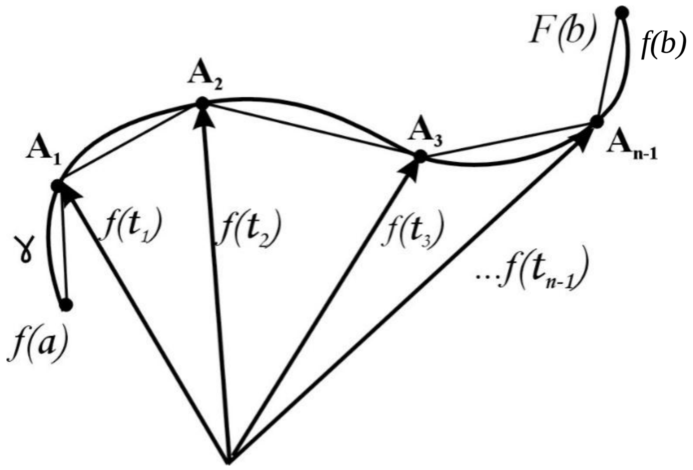
ko'riniste boladı.

YOpishma tegislikte jatıwshı normal ***bas normal*** dep ataladı, Yopishma tegislikke perpendikulyar normal bolsa ***binormal*** dep ataladı.

Iymek sızıq dog'ası uzınlıg'ı ha'm onı esaplaw

Ken'islikte γ iymek sızıq, M bolsa og'an tiyisli noqat bolsın. Biz bilemiz, M noqattın' γ sızıqtag'ı jeterlishe kishi do'geregi elementar iymek sızıq. Usı elementar iymek sızıq γ_M ashıq $(a;b)$ intervaldın' f topologiyalıq sa'wlelendiriwdegi obrazı bolsın.

Eger $c,d \in (a,b)$ ha'm $c<d$ bolsa, γ_M nın' c,d – noqatlarg'a sa'ykes keliwshi noqatları menen shegaralang'an dog'a uzınlıg'ı tu'sinigin kiritemiz. Bunın' ushın $[a,b]$ kesindini n bo'lekke ajıratıwshı $t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}$ noqatlardı alıp, olardın' γ_M sızıqtag'ı obrazların $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ menen belgileyik. Ushları $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ noqatlarda bolg'an sınıq sızıqtı γ_M sızıqqa ishley sızılg'an ***sınıq sızıq*** dep ataymız. Eger M dı o'z ishine alıwshı qandayda bir dog'a ushın og'an ishley sızılg'an sınıq sızıqlar uzınlıqları joqarıdan tegis shegaralang'an bolsa, γ iymek sızıq M noqat do'gereginde ***tuwrılanıwshı*** delinedi.



Sızılma-9

Teorema-5. *Regulyar iymek sızıq o'zine tiyisli ha'r qanday noqat do'gereginde tuwrılanıwshı.*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) & a<t<b \\ z = z(t) \end{cases}$$

parametrlik ten'lemeler ja'rdeminde berilse, $\grave{I}_1 \overset{\smile}{} \grave{I}_2$ dog'a uzınlıg'ı

$$\int_c^d \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

formula boyınsha esaplanadı. Eger γ_M iymek sızıq OXY tegislikte $y = f(x)$ funktsiyanın' grafigi bolsa, $\grave{I}_1 \overset{\smile}{} \grave{I}_2$ dog'a uzınlıg'ı

$$\int_{c}^{d}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

ge ten'.

Dog'a uzınlıg'ın iymek sızıqtı parametrlew ushın da isletiw mu'mkin. Eger $t_0, t\in(a,b)$ bolsa, γ_M – nın' t_0 ha'm t g'a sa'ykes keliwshi noqatları menen shegaralang'an dog'a uzınlıg'ın $s(t)$ menen belgilep,

$$\sigma(t)=s(t), \quad t>t_0,$$
$$\sigma(t)=-s(t), \quad t<t_0,$$
$$\sigma(t)=0, \quad t=t_0.$$

qag'ıyda boyınsha $\sigma(t)$ funktsiyasın anıqlasaq, bul funktsiya monoton o'siwshi funktsiya boladı. Sebebi onın' tuwındısı $|\vec{r}'(t)|$ ge ten' ha'm demek, ha'r dayım nolden u'lken. Eger $\sigma(t)$ ge keri funktsiyanı $t=t(\sigma)$ menen belgilesek ha'm $\vec{r}=\vec{r}(t)$ dag'ı t ornına qoysaq,

$$\vec{r}=\vec{r}\left(t(\sigma)\right)=\vec{\rho}(\sigma)$$

ten'likti alamız.

Payda bolg'an ten'leme γ_M nın' ta'biyiy parametr ja'rdeminde anıqlang'an ten'lemesi, σ bolsa ***ta'biyiy parametr*** delinedi.

Ta'biyiy parametrdın' za'ru'rligi sonnan ibarat, urınba vektor uzınlıg'ı ha'r dayım birge ten'.

Iymek sızıq iyiliwi ha'm onı esaplaw

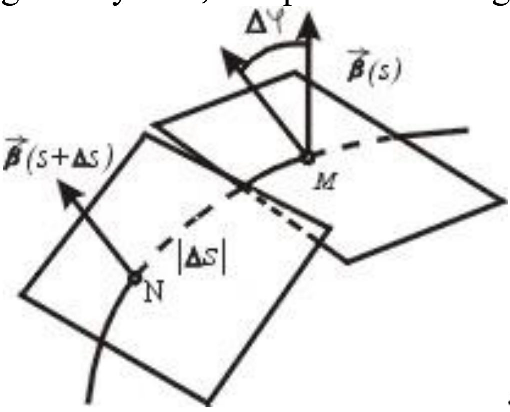
Bizge regulyar γ –iymek sızıq ha'm M og'an tiyisli noqat berilgen bolsın. Berilgen M noqattag'ı iymeklik tu'sinigin kiritip, onı esaplaw formulasın keltirip shıg'aramız. Bunın' ushın γ – iymek sızıqta M ge jaqın bolg'an N noqattı alıp, bul noqatlardan o'tiwshi urınbalar araasındag'ı mu'yeshti $\Delta\phi$ menen, $\overset{\smile}{MN}$ dog'a uzınlıg'ın ΔS menen belgileyik. N noqat M qa umtılg'anda $\Delta\varphi$ ha'm ΔS ma'nnisler nolge umtıladı. Biraq $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta S}$ an'latpa nege umtılıwın aldınnan ayta almaymız.

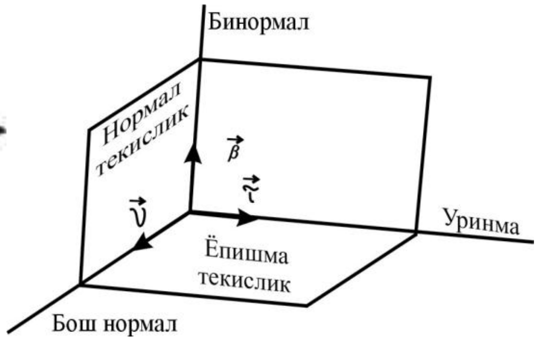
Anıqlama. *Sızıqtag'ı N noqat M ge umtılg'anda $\dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}$ an'latpanın' limiti bar bolsa,ol γ sızıqtın' M noqattag'ı* ***iymekligi*** *dep ataladı.*

Teorema-6. *Eki ma'rte differentsiallanıwshı regulyar iymek sızıq ushın $k=\lim\limits_{M\to N}\dfrac{\Delta\phi}{\Delta S}$ bar. Eger γ sızıq $\vec{r}=\vec{r}(s)$ ten'leme menen ta'biyiy parametr ja'rdeminde berilgen bolsa, $k=\left|\ddot{\vec{r}}(s_0)\right|$ ten'lik orınlı. Bul jerde s_0 ta'biyiy parametrdın' M ge sa'ykes keliwshi ma'nisi.*

Iymek sızıqtın’ buralıwı ha’m onı esaplaw

Iymek sızıqtın’ berilgen M noqatındag’ı buralıwı tu’sinigin kiriteyik. Bizge γ iymek sızıq ha’m og’an tiyisli M noqat berilgen bolsın. M noqatqa jaqın ha’m γ ge tiyisli noqattı N menen, $\Delta\varphi$ menen bul noqatlardan o’tiwshi Yopishma tegislikler arasındag’ı mu’yeshti, Δs penen $\overset{\cup}{MN}$ dog’a uzınlıg’ın belgileyik.





Sızılma-**12** Sızılma-**13**

Anıqlama: N noqat M noqatqa umtılg’anda $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ an’latpanın’ limiti γ iymek sızıqtın’ M noqattag’ı absolyut buralıwı delinedi ha’m $|\sigma|$ menen belgilenedi.

Teorema-7. U’sh ma’rte differentsiallanıwshı regulyar γ iymek sızıqtın’, M noqatta iymekligi nolden o’zgeshe bolsa, $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ an’latpa limitke iye. Eger γ iymek sızıq ta’biyiy parametr ja’rdeminde

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

ten’leme menen berilgen bolsa, onın’ absolyut buralıwı,

$$|\sigma| = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}}\right|}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|^2}$$

formula boyınsha esaplanadı.

Da’lillew. M noqattag’ı iymeklik nolden o’zgeshe bolsın dep uyg’arayıq. Iymeklik u’zliksiz funktsiya bolg’anlıg’ı ushın M ge jaqın noqatlarda da iymeklik nolden o’zgeshe boladı.

Sonın’ ushın, M noqatqa jaqın noqatlarda $\dot{\vec{r}}$ ha’m $\ddot{\vec{r}}$ vektorlar o’z-ara kollinear emes boladı. Demek, ha’r bir noqattan jalg’ız Yopishma tegislik o’tedi. Eger $\vec{\beta}(s_\circ)$, $\vec{\beta}(s_\circ + \Delta s)$ – vektorlar M ha’m N noqattag’ı Yopishma tegislikke perpendikulyar birlik vektorlar (yag’nıy birlik binormal vektorlar) bolsa,

$$2\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \left|\vec{\beta}(s_0 + \Delta s) - \vec{\beta}(s_0)\right|$$

ten’lik orınlı boladı.

Sonın’ ushın

$$\frac{\left|\vec{\beta}(s_\circ+\Delta s)-\vec{\beta}(s_\circ)\right|}{\Delta s}=\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}=\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

ten’lik orınlı. Bul ten’likte $\Delta s\to 0$ limitke o’tip, $|\sigma|=\left|\dot{\vec{\beta}}\right|$ ten’likti payda etemiz. Binormal $\vec{\beta}$ vektor birlik vektor bolg’anlıg’ı ushın $\dot{\beta}\perp\vec{\beta}$ boladı. Eger $\vec{\tau}(s)=\dot{\vec{r}}(s)$ bolsa, $\vec{v}=\frac{\ddot{\vec{r}}}{k}$ – birlik bas normal vektor, $\bar{\tau}$ - birlik urınba vektor boladı. Sonın’ ushın $\vec{\beta}=[\vec{\tau},\vec{v}]$ boladı. Demek, $\dot{\vec{\beta}}=\left[\dot{\vec{\tau}},\vec{v}\right]+\left[\vec{\tau},\dot{\vec{v}}\right]=\left[\vec{\tau},\dot{\vec{v}}\right]$, sebebi $\left[\dot{\vec{\tau}},\vec{v}\right]=\vec{0}$. Bul ten’likten, $\dot{\vec{\beta}}\perp\vec{\tau}$ ekenligi kelip shıg’adı. Demek, $\dot{\vec{\beta}}\,//\,\vec{v}$. Sonın’ ushın, $|\sigma|=\left|\left(\dot{\vec{\beta}},\vec{v}\right)\right|$ ten’liktı jaza alamız. Bul ten’likke $\vec{v}=\frac{\ddot{\vec{r}}}{k}$, $\vec{\beta}=\frac{\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]}{k}$ an’latpaların qoyıp, $|\sigma|=\frac{\left|\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\right|}{k^2}$ formulanı payda etemiz.

Endi buralıwdı anıqlayıq. $\dot{\vec{\beta}}$ vektor $\vec{v}$ vektorg’a parallel bolg’anlıg’ı ushın iymek sızıq boylap ha’reket qılsaq (s o’se baslag’anda) Yopishma tegislik urınba do’gereginde aylana baslaydı. Eger Yopishma tegislik buralıwı bag’ıtı $\vec{\beta}$ dan $\vec{v}$ g’a bag’ıtlang’an bolsa, (+) belgi menen keri jag’dayda bolsa (-) belgi menen alıp, $\sigma=\pm|\sigma|$ formula boyınsha buralıwdı kiritemiz. $|\sigma|$ nın’ an’latpasın esapqa alıp

$$\sigma=\frac{\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}}}{k^2}$$

formulanı payda etemiz.

Endi qa’legen t parametr ushın buralıwdı esaplaw formulasın keltirip shıg’aramız. Bunın’ ushın dog’a uzınlıg’ı $S=S(t)$ parametr t nın’ funktsiyası ekenliginen paydalanamız. Iymek sızıq ten’lemesi $\vec{r}=r(s)$ bolsa,

$$\dot{\vec{r}}=\vec{r}'\cdot\frac{dt}{ds},\quad \ddot{\vec{r}}=\vec{r}''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\vec{r}'\cdot\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\dddot{\vec{r}}=\vec{r}'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3+2\vec{r}''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2r}{ds^2}+\vec{r}''\frac{d^2r}{ds^2}\frac{dt}{ds}+\vec{r}'\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}$$

an’latpalardı buralıw formulasına qoysaq

$$\sigma=\frac{\vec{r'}\ \vec{r''}\ \vec{r'''}}{\left[\vec{r'},\vec{r''}\right]^2}$$

formulanı payda etemiz.

Eger qandayda bir sızıqtın’ buralıwı barlıq noqatlarda nolge ten’ bolsa, ol a’lbette sıypaq sızıq boladı,yag’nıy qandayda bir tegislikte jatadı.

Joqarıda ko’rsetip o’tkenimizdey, eger regulyar γ sızıq

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad a < t < b$$

ten'leme menen berilip, ha'r bir t ushın $\vec{r}'(t)$ ha'm $\vec{r}''(t)$ vektorlar kollinear vektorlar bolmasa, γ sızıqtın' ha'r bir noqatına ortonormal sistemanı du'zetug'ın u'sh vektordı sa'ykes qoyıw mu'mkin. Bul u'shlik birlik urınba vektor, birlik bas normal vektor ha'm birlik binormal vektorlardan ibarat. Bul u'shlikti Frene u'shligi dep ataymız. Ha'zur biz ken'isliktegi orientatsiyanı saqlawshı ha'reket regulyar sızıqtı regulyar sızıqqa o'tkeriwin ha'm bunda Frene u'shligi de tag'ı Frene u'shligine o'tiwin da'lilleymiz.

Ken'islikte regulyar γ iymek sızıq

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \qquad a < t < b$$

ten'leme menen,onın' $F: R^3 \to R^3$ ha'reketdegi obrazı $F(\gamma)$

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad a < t < b$$

ten'leme menen berilgen bolsın. Eger

$$\vec{\rho}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

bolıp, F ha'reket

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matritsa ha'm

$$a = \{a_1, a_2, a_3\}$$

vektor ja'rdeminde berilgen bolsa, $F(x, y, z)$ noqattın' koordinataları

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 \\ y_1 &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 \\ z_1 &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 \end{aligned}$$

ko'riniste boladı. Sonın' ushın $\vec{r}(t)$ vektordın' koordinataları

$$x_1(t), \quad y_1(t), \quad z_1(t)$$

funktsiyalar bolsa,

$$(x_1(t), \quad y_1(t), \quad z_1(t)) = F(x(t), \quad y(t), \quad z(t))$$

ten'likten

$$\vec{r}'(t) = A\vec{\rho}'(t)$$

formula kelip shıg'adı. Bul ten'likte $\vec{r}'(t)$ ha'm $\vec{p}'(t)$ vektorlar bag'ana ko'riniste jazılg'an. Bul jerde A ortogonal matritsa bolg'anı ushın

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \left|A\vec{\rho}'(t)\right| = \left|\vec{\rho}'(t)\right|,$$

$$\left(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)\right) = \left(A\vec{\rho}'(t), A\vec{\rho}''(t)\right) = \left(\vec{\rho}'(t), \vec{\rho}''(t)\right),$$

$$\left|\left[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)\right]\right| = \left|\left[A\vec{\rho}'(t), A\vec{\rho}''(t)\right]\right| = \left|\left[\vec{\rho}'(t), \vec{\rho}''(t)\right]\right|$$

ten'likler orınlı. Bul ten'liklerden aqırg'ısı orınlı bolıwı ushın $\det A > 0$ sha'rtti de yag'nıy F ha'reket orientatsiyasın saqlawın talap ettik.Bul ten'liklerden

$$\tau_1 = \frac{\vec{r'}}{\left|\vec{r'}\right|} = \frac{A\vec{\rho'}}{\left|A\vec{\rho'}\right|} = \frac{A\vec{\rho'}}{\left|\vec{\rho'}\right|} = A(\vec{\tau})$$

$$\vec{\nu_1} = A(\vec{\nu}), \quad \vec{\beta_1} = \left[A(\vec{\tau}), A(\vec{\nu})\right] = A(\vec{\beta})$$

formulalar payda etemiz. Bul formulalar γ sızıqtın' Frene u'shligi F sa'wlelendiriwde $F(\gamma)$ sızıqtın' Frene u'shligine o'tiwin da'lilleydi.

Bul formulalardan orientatsiyanı saqlawshı ha'rekette sızıqlardın' iymekligi ha'm buralıwı da o'zgermey qalıwı kelip shıg'adı. Haqıyqatında da, iymeklik ha'm buralıw formulalarınan paydalanıp,

$$k_1 = \frac{\left|\left[\vec{r'}, \vec{r''}\right]\right|}{\left(\vec{r'}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = k = \frac{\left|\left[\vec{\rho'}, \vec{\rho''}\right]\right|}{\left(\vec{\rho'}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sigma_1 = -\frac{\vec{r'} \cdot \vec{r''} \cdot \vec{r'''}}{k_1^2} = \sigma = -\frac{\vec{\rho'} \cdot \vec{\rho''} \cdot \vec{\rho'''}}{k^2}$$

ten'liklerdi payda etemiz.

Frene formulaları

Iymek sızıq γ ta'biyiy parametr ja'rdeminde

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

ten'leme menen berilgen bolsın. Eger M noqat γ parametrdın' $s_{\circ}$ ma'nisine sa'ykes keliwshi noqat bolsa, bul noqattan shıg'ıwshı o'z-ara orthogonal u'sh vektor barlıg'ın ko'rdik.

Bular, $\vec{\tau}(s_{\circ})$ – birlik urınba vektor, $\vec{\nu}(s_{\circ})$ – birlik bas normal vektor, $\vec{\beta}(s_{\circ})$ – birlik binormal vektorlar. Iymek sızıq γ dın' M noqat do'geregindegi bo'legin tekseriwde M noqattı koordinata bası esabında, $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ –vektorlardı koordinata ko'sherlerinin' bag'ıtlawshı vektorları sıpatında alamız. Bunın' ushın, aldın ala $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ vektorlardın' tuwındıların $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ vektorlar arqalı an'latayıq. Birinshiden, $\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\vec{r}} = k\vec{\nu}$ qatnasın bilemiz. Aldıng'ı paragrafta $\dot{\bar{\beta}} = \sigma\bar{\nu}$ ekenligin ko'rsetken edik. Bulardı ha'm $\vec{\nu} = \left[\vec{\beta}, \vec{\tau}\right]$ nı esapqa alıp $\dot{\vec{\nu}} = \left[\dot{\vec{\beta}}, \vec{\tau}\right] + \left[\vec{\beta}, \dot{\vec{\tau}}\right]$ dan $\dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau} - \sigma\vec{\beta}$ formulanı payda etemiz. Demek,

$$\begin{cases} \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu} \\ \dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau} - \sigma\vec{\beta} \\ \dot{\vec{\beta}} = \sigma\vec{\nu} \end{cases}$$

formulaların payda etemiz.

Endi $\vec{r}(s_{\circ} + \Delta s)$ vektor-funktsiyanı Teylor qatarına jayayıq

$$\vec{r}(s_0+\Delta s) = \vec{r}(s_0) + \dot{\vec{r}}\,\Delta s + \ddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^2}{2} + \dddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^3}{6} + ...$$

M noqat koordinata bası bolg'anlıg'ı ushın $\vec{r}(s_0) = \vec{0}$ bul qatarda $\dot{\vec{r}} = \vec{\tau},\ \ddot{\vec{r}} = k\vec{\nu},\ \dddot{\vec{r}} = k\dot{\vec{\nu}} - k\sigma\vec{\beta} - k^2\vec{\tau}$ qatnasların esapqa alıp,

$$\vec{r}(s_{\circ} + \Delta s) = \left(\Delta s - \frac{k^2\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{\tau} + \left(\frac{k\Delta s^2}{2} + \frac{\sigma\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{\nu} + \left(-\frac{k\sigma\Delta s^2}{6} + \ldots\right)\vec{\beta}$$

ten'likti payda etemiz.

Endi x, y, z ko'sherleri sa'ykes tu'rde $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$ vektorlar bag'ıtlarına iye ekenliginen paydalanıp

$$x = \Delta s - k\frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$
$$y = k\cdot\frac{\Delta s}{2} + k\frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$
$$z = -k\sigma\frac{\Delta s^2}{6} + \ldots$$

ten'lemelerdi payda etemiz. Bul ten'lemelerde tek iymeklik ha'm buralıw qatnaspaqta. Demek, sızıqtı anıqlaw ushın onın' barlıq noqatlarında iymeklik ha'm buralıwdı biliwimiz jetkilikli.

Endi usı ma'seleni talıqlayıq. Bizge parametrlengen regulyar γ iymek sızıq berilgen bolsa, onın' qa'legen noqatında u'sh $s(t), k(t), \sigma(t)$ funktsiyalar anıqlang'an. Bul funktsiyalar u'zliksiz ha'm $k(t) > 0,\ s(t) > 0,$ qatnasları orınlı. Eger parametr sıpatında dog'a uzınlıg'ın alsaq, funktsiyalar sanı ekew boladı.

Teorema-8. Eki regulyar iymek sızıqlardın' dog'aları γ_1 ha'm γ_2 sa'ykes tu'rde

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t),\ \vec{r} = \vec{r}_2(t), \qquad a \le t \le b$$

ten'lemeler ja'rdeminde berilip,

$$\int_a^t \left|\vec{r}_1'(t)\right| dt = \int_a^t \left|\vec{r}_2'(t)\right| dt$$

ten'lik qa'legen $t \in [a,b]$ ushın orınlı bolsın. Bunnan tısqarı ha'r bir $t \in [a,b]$ ushın $k_1(t) = k_2(t), \quad \sigma_1(t) = \sigma_2(t)$ ten'likler orınlı bolsa, jalg'ız $F\colon R^3 \to R^3$ ha'reket bar bolıp,

$$F(\gamma_2) = \gamma_1$$

qatnas orınlı boladı.

Da'lillew. Bul sızıqlardın' uzınlıqları ten' bolg'anı ushın

$$s_0 = \int_a^b \left|\vec{r}_1'(t)\right| dt = \int_a^b \left|\vec{r}_2'(t)\right| dt$$

belgilew kiritip, sızıqlar ten’lemelerin ta’biyiy parametr ja’rdeminde jazamız. Sonda olardın’ ten’lemeleri

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_1(s)$$

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_2(s), \quad 0 \le s \le s_0$$

ko’riniste boladı. Endi ha’r bir sızıqta ta’biyiy parametrdın’ $s = 0$ ma’nisine sa’ykes keliwshi noqatlardı sa’ykes tu’rde M_1 ha’m M_2 menen belgileymiz. Bul noqatlardag’ı Frene u’shlikleri sa’ykes tu’rde, $\vec{\tau}_1(0)$, $\vec{\nu}_1(0)$, $\vec{\beta}_1(0)$ ha’m $\vec{\tau}_2(0)$, $\vec{\nu}_2(0)$, $\vec{\beta}_2(0)$ vektorlardan ibarat boladı. Bul u’shlikler ken’islikte birdey orientatsiyalardı ushın sonday $F: R^3 \to R^3$ ha’reket bar,ol M_2 noqattı M_1 noqatqa, $\vec{\tau}_2(0)$, $\vec{\nu}_2(0)$, $\vec{\beta}_2(0)$ vektorlardı sa’ykes tu’rde $\vec{\tau}_1(0)$, $\vec{\nu}_1(0)$, $\vec{\beta}_1(0)$ vektorlarg’a o’tkeredi. Biz $F(\gamma_2) = \gamma_1$ ten’likti da’lilleymiz. Bunın’ ushın $F(\gamma_2(s))$ noqattın’ radius-vektorın $\vec{\rho}(s)$ menen belgilep, $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$, $s \in [0, s_0]$ ten’leme menen anıqlang’an regulyar iymek sızıqtın’ Frene u’shligin $\{\vec{\tau}(s), \ \vec{\nu}(s), \ \vec{\beta}(s)\}$ menen belgileymiz. Sonda biz $\vec{\tau}(0) = \vec{\tau}_1(0)$, $\vec{\nu}(0) = \vec{\nu}_1(0)$, $\vec{\beta}(0) = \vec{\beta}_1(0)$ ten’liklerge iye bolamız. Ha’rekette vektorlardın’ skalyar ko’beymesi saqlang’anı ushın

$$k(s) = k_2(s), \qquad \sigma(s) = \sigma_2(s)$$

ten’likler orınlı boladı. Demek, $k(s) = k_1(s)$, $\sigma(s) = \sigma_1(s)$ ten’likler de orınlı.Endi $\vec{\rho}(s) = \vec{\rho}_1(s)$ ten’likti da’lillew ushın

$$h(s) = (\vec{\tau}_1(s), \vec{\tau}(s)) + (\vec{\nu}_1(s), \vec{\nu}(s)) + (\vec{\beta}_1(s), \vec{\beta}(s))$$

funktsiyanı qaraymız. Bul funktsiya ushın $h(0) = 3$ ten’lik orınlı. Bul funktsiyanı differentsiallaymız

$$h'(s) = (\dot{\vec{\tau}}_1(s), \vec{\tau}(s)) + (\vec{\tau}_1(s), \dot{\vec{\tau}}(s)) + (\dot{\vec{\nu}}_1(s), \vec{\nu}(s)) + (\vec{\nu}_1(s), \dot{\vec{\nu}}(s)) +$$
$$+ (\dot{\vec{\beta}}_1(s), \vec{\beta}(s)) + (\vec{\beta}_1(s), \dot{\vec{\beta}}(s))$$

ha’m Frene formulalarınan patdalanıp,

$$h'(s) = k_1(\vec{\nu}_1(s), \vec{\tau}(s)) + k(\vec{\tau}_1(s), \vec{\nu}(s)) - k_1(\vec{\tau}_1(s), \vec{\nu}(s)) - \sigma_1(\vec{\beta}_1(s), \vec{\nu}(s)) -$$
$$- k(\vec{\nu}_1(s), \vec{\tau}(s)) - \sigma(\vec{\nu}_1(s), \vec{\beta}(s)) + \sigma_1(\vec{\nu}_1(s), \vec{\beta}(s) + \sigma(\vec{\beta}_1(s), \vec{\nu}(s)) =$$
$$= (k_1 - k)(\vec{\nu}_1(s), \vec{\tau}(s)) + (k - k_1)(\vec{\tau}_1(s), \vec{\nu}(s)) + (\sigma_1 - \sigma)(\vec{\nu}_1(s), \vec{\beta}(s)) -$$
$$- (\sigma_1 - \sigma)(\vec{\beta}_1(s), \vec{\nu}(s))$$

Tekseriw ushın sorawlar:

To’mendegi ten’lemeler menen berilgen sızıqlardın’ ko’rsetilgen noqatlarda urınba ha’m normallarn tabın’.

1. $y = x^2 + 4x + 3$, abtsissası $-1, 0, 1$ bolg’an A, B, C noqatlarda;

2. $y = x^2$, abtsissası $0,1$ bolg’an A, B noqatlarda;

3. $y=\sin x$, abtsissası $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ bolg'an noqatlarda;

4. $y=tgx$, abtsissası $0, \frac{\pi}{4}$ bolg'an noqatlarda;

5. $x=t^3-2t,\ y=t^2+1,\ A(t=1)$ noqatta.

6. Usı $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ sızıqtın' $M\left(2,-\frac{1}{3},-6\right)$ noqattan o'tiwshi Yopishma tegisliklerin tabın'.

7. Usı $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2-y^2=3$ sızıqtın' $M(2,1,2)$ noqattag'ı Yopishma tegislik ten'lemesin tabın'.

8. Usı $x=t,\ y=t^2,\ z=e^t$ sızıqtın' $t=0$ noqattag'ı bas normalı ha'm binormalı ten'lemelerin du'zin'.

9. Usı $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ sızıqtın' $t=1$ noqattag'ı bas normalı ha'm binormalı ten'lemelerin du'zin'.

To'mendegi sızıqlardın' iymekligin ha'm buralıwın tabın'.

10. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$.

11. $x=acht,\ y=asht,\ z=at$.

12. $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=\sqrt{2}t$.

13. $x=2t,\ y=\ln t,\ z=t^2$.

14. $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t$.

15. Berilgen $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t$ sızıqtın' iymekligi minimum ma'nis qabıl etetug'ın noqatlardı tabın'.

Juwapları:

1. A noqattag'ı urınba $2x-y+2=0$, normal $x+2y+1=0$. B noqattag'ı urınba $4x-y+3=0$, normal $x+4y+12=0$. C noqattag'ı urınba $6x-y+2=0$, normal $x+6y-49=0$. **2.** A noqattag'ı urınba $y=0$, normal $x=0$. B noqattag'ı urınba $3x-y-2=0$, normal $x+3y-4=0$. **3.** A noqattag'ı urınba $y=x$, normal $y=-x$. B noqattag'ı urınba $y=1$, normal $x=\frac{\pi}{2}$. C noqattag'ı urınba $x-y+\pi=0$, normal $x+y+\pi=0$.

4. A noqattag'ı urınba $y=x$, normal $y=-x$. B noqattag'ı urınba $2x-y+1-\frac{\pi}{2}=0$, normal $x+2y-2-\frac{\pi}{4}=0$. **5.** Urınba $2x-y+4=0$, normal $x+2y-3=0$. **6.** $3x+3y+z+1=0$, $3x-3y+z-1=0$, $108x-18y+z-216=0$. **7.** $4x-y+z-9=0$. **8.** Bas normal ten'lemesi: $\frac{x}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z-1}{-1}$. Binormal ten'lemesi: $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$. **9.** Bas normal ten’lemesi: $\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{9}$. Binormal ten’lemesi: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1}$. **10.** $k=\frac{a}{a^2+b^2}$, $\sigma=\frac{b}{a^2+b^2}$. **11.** $k=\sigma=\frac{1}{ach^2t}$. **12.** $k=-\sigma=\frac{2t}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}$. **13.** $k=-\sigma=\frac{2t}{\left(1+2t^2\right)^2}$. **14.** $k=\frac{3}{25\sin t\cos t}$, $\sigma=\frac{4}{25\sin t\cos t}$. **15.** Parametrdın’ $t=2k\pi,\left(k=0,\pm1,\pm2,...\right)$ ma’nislerine sa’ykes keliwshi noqatlar.

Test tapsırmaları

№	Test tapsırması	Tuwrı juwap	Nadurıs juwap	Nadurıs juwap	Nadurıs juwap
1	Sızıqtın’ sıypaq bolmag’an noqatı onın’ … delinedi.	arnawlı noqatı	sıypaq noqatı	urınba noqatı	sınıq noqatı
2	φ,ψ,ϕ − $[a,b]$ dag’ı u’zliksiz funktsiyalar da $L=\{\varphi(t),\psi(t),\phi(t):t\in[a,b]\}$. Eger t nın’ ha;r tu’rli ma’nislerine L dın’ ha’r tu’rli noqatları sa’ykes kelse, L … sızıq delinedi.	a’piwayı ken’islik	tuyıq ken’islik	sıypaq	quramalı
3	Eger L - $r(t)$ vektor ko’riniste berilgen bolsa, $r=r(t_0)$ noqattag’ı urınba bag’ıtı … bag’ıtlang’an boladı	$r'(t_0)$ boyınsha	$r(t_0)$ boyınsha	$r''(t_0)$ boyınsha	Normal vektor boyınsha
4	$\varphi(x,y)=0$ ten’leme menen berilgen tegis sızıqtın’ (x_0,y_0) noqattag’ı urınbası ten’lemesın tabın’	$\frac{x-x_0}{\varphi_y}=\frac{y-y_0}{-\varphi_x}$	$\frac{x-x_0}{\varphi_x}=\frac{y-y_0}{\varphi_y}$	$\frac{x-x_0}{\varphi_x}=\frac{y-y_0}{-\varphi_y}$	$\frac{x-x_0}{\varphi_y}=\frac{y-y_0}{\varphi_x}$
5	Eger L a’piwayı sızıqqa ishley sızılg’an barlıq sınıq sızıqlar uzınlıqları ko’pligi shegaralang’an bolsa,	tuwrılanıwshı	a’piwayı	quramalı	sıypaq

	L … sızıq delinedi.				
6	$(x-a)^2+y^2=25$ shen’berler semeystvosının’ oramasın tabın’	$y+5=0,\ y-5=0$	$y+3=0,\ y-4=0$	$y+4=0,\ y-3=0$	$y+2x=0,\ y=0$
7	$x=t^2,\ y=1-t,\ z=t^3$ sızıqtın’ $t=1$ noqattag’ı urınba vektorın tabın’	$r'=2i-j+3k$	$r'=2i+j$	$r'=2i+3k$	$r'=3j-2k$
8	$x^2+y^2+z^2=3,\ x^2+y^2=2$ sızıqtın’ $(1,1,1)$ noqattag’ı iymekligin tabın’	$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$k=\sqrt{2}$	$k=\frac{3}{\sqrt{2}}$	$k=3\sqrt{2}$
9	$r=4$ sızıq qanday sızıqtın’ polyar ten’lemesi	$x^2+y^2=16$	$x^2-y^2=16$	$x^2=16y$	$y^2=16x$
10	$y^2=4x$ ha’m $x^2=4y$ sızıqlardın’ kesilisiw noqatın tabın’	$M_1(0,0),M_2(4,4)$	$M_1(0,0),M_2(1,1)$	$M_1(1,1),M_2(4,4)$	$M_1(-1,-1),M_2(4,4)$

Paydalanılg’an a’debiyatlar:

1. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Universitet, 2003
2. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001
3. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S.,Aslanov J. Differentsial geometriya ha’m topologiya fanidan mashq va masalalar toplami . T. Universitet, 2014
4. Mishenko A.S., Fomenko A.T. Kurs differentsialnoy geometrii i topologii. M., izd. MGU,2004
5. www.mathnet.ru
6. www.ru.bookos.org

3-Tema: Betlikler teoriyasi.

Reje:

3.1. Betlik Teoriyasi. Bag'it boyinsha iymeklikler.
3.2. Betlik ashiq emes ko'riniste beriliwi
3.3. Betlik ustinde jatiwshi iymek siziqlar.

Tayansh so'zler: Elementar betlik, apiwayi betliktin' beriliw usillari, urinba tegislik.

3.1. Betlikler Teoriyasi. Bag'iti boyinsha iymeklikler.

Tegisliktegi ashiq don'gelekke gomeomorf ko'pligin elementar oblast dep ataymiz .

1-Aniqlama. ***Ken'isliktegi*** $\hat{O}$ ***ko'plik elementar betliktin' topologik sa'wleleniwdegi obrazi bolsa ol elementar betlik dep ataladi.***

Demek, $\hat{O}$ ko'plik elementar betlik bolsa, $f: G \to \hat{O}$ - ***topologik sa'wleleniwdiriw payda boliwi kerek. Bul jerde*** $G \subset R^2$ elementar betlik $\hat{O}$ bolsa R^3 tan keltirilgen topologiya ja'rdeminde topologik ken'islikke aylantirilg'an. Eger $\hat{O}$ elementar betlik bolsa (f, G) jupliq $\hat{O}$ *betlikine parametrlew usili dep ataladi* .

A'lbetlikte G_1 basqa elementar betlik bolsa, G ha'm G_1 betlikler oz-ara gomeomorf boladi ha'm eger $g: G_1 \to G$ gomeomorfizm berilgen bolsa $f \cdot g: G_1 \to \hat{O}$ gomeomorfizm $\hat{O}$ betlik betlikti parametrlewdin' basqa usili.

Demek, elementar betlik ushin sheksiz ko'p parametrlew usillari bar. Birden bir ko'pliknin' elementar betlik ekenligin ko'rsetiw ushin, onin' ushin birden bir parametrlew usilin ko'rsetiw kerek.

Eger $\hat{O}$ betlik (f, G) parametrlew usili menen berilip $(u,v) \in G$ ushin *f(u,v) noqatlardin' koordinatalari* $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ ko'rinisinde belgilesek

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (1)$$

Sistema $\hat{O}$ betliktin' parametric ten'lemeler sistemasi dep ataladi.

2-Aniqlama. Kenislikdegi baylanisli $\hat{O}$ ***ko'plikg'a tiyisli ha'rbir noqattin' bir ha' bir atrapindaelementar betlikqa aylansa*** $\hat{O}$ ***apiwayi betlik deyiledi.***

Demek, $\hat{O}$ apiwayi betlik boliwi ushin tiyisli ha'r bir $p \in \hat{O}$ noqat ushin sonday $U(p)$ atrap (R^3kenislikde) payda bolip, kesilispe $U(p) \cap \hat{O}$ elementar betlik boliwi kerek.

Keyin ala kurs dawaminda betlik degende elementar yamasa apiwayi betlikti tu'sinemiz.

Misallar:

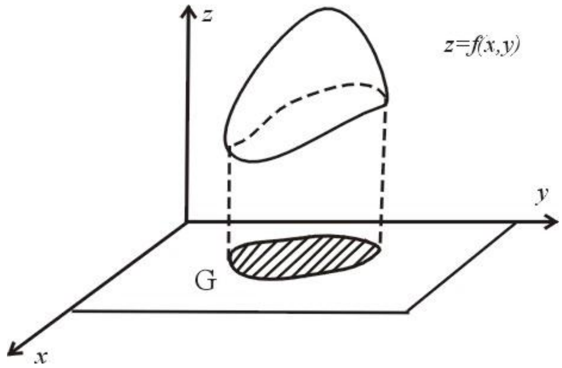
1) Ha’r qanday tegislik elementar betlik boladi , sebebi tegislik do’ngelekke gomeomorf boladi.

Eger $M(x_0, y_0, z_0)$ tegislik noqati , $\vec{a}$ ha’m $\vec{b}$ vektorlar tegislikke parallel olsa oni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v, -\infty < u < +\infty, -\infty < v < \infty$$

koriniste parametirlew mu’mkin. Bul jerde $\vec{r}_0 = \{x_0, y_{0,} z_0\}$ vektor M noqattin radius vektori esaplanadi.

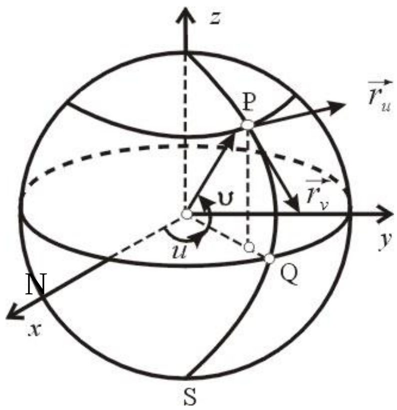
2) elementar G betlikte aniqlang’an $z = f(x,y)$ – u’zliksiz funktsiasinin’ grafigi elementar betlik boladi. Sebebi, $(x, y, f(x,y)) \to (x,y)$ – sawlelendiriw (proektsiya) gomeomorfizmdir.



sizilma-1

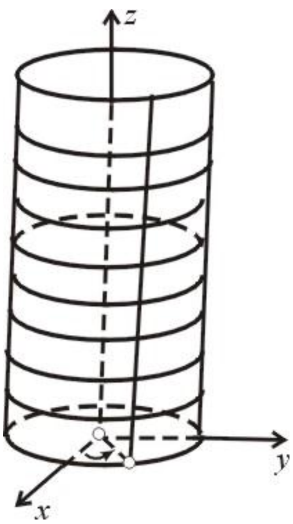
3) Eki o’lshemli sfera S^2 elementar bolmagan apiwayi betlik. Radiusi R g’a ten’ S^2 sferanin’ orayi koordinatalar basin jayg’astirsaq oni $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ ko’plik betlikinda qarawimiz mumkin.

Bul sferanin’ betliknin da’lilew ushin og’an tiyisli qa’legen P noqatin alayiq. Bul P noqattan parqli S noqatinin’ qubla polius sipatinda, og’an diametric qarama qarsi bolg’an N noqatin arqa poliusunda esaplap , z koordinata ko’sherin basinda N noqat arqali otkizemiz, Oxy tegisligi bolsa O noqat ko’sherinden o’tkende ON g’a perpendikulyar tegislik boladi. Bul tegislik ha’m sfera kesilisiwden payda bolg’an shen’ber ***ekvator*** dep ataladi . Endi u menen OQ nur ha’mde Ox kosheri arasindag’I muyeshti , v menen OP ha’m OQ nurlar arasindag’I muyeshti belgilep alamiz. Bul jerde Q noqat NPS mediyananin’ Ekvator menen kesiliken noqati boladi $0 < u < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Sonday S^2 sferanin’ NS meredin shig’arip taslag’n qismi $\phi : P \to (u,v)$ sawlendiriw ja’rdeminde $[0;2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ elementar betlik gagomeofakslantirildi ha’m $x = R\cos u \cos v,\ y = R\sin u \cos v,\ z = \sin v$ tenllemeler jardeminde parametrlendirildi.



Sizilma-2

4) Do'ngelekli silindirdi $x = R\cos u,\ \ y = R\sin u,\ \ z = v$ tenlemeler sistemasi jardeminde parametrlew mumkin. Bul jerde $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$. A'lbetlikte silindrda elementar betlik emes (3 –Sizilma).



Sizilma-3

Eger biz $\vec{r}(u,v) = \{x(u;v); y(u;v); z(u;v)\}$ vektor funktsiyasini kiritsek (1) ten'lemeler sistemasi birew

$$\vec{r} = \vec{r}(u;v)\ ,\ (u,v) \in G \qquad (2)$$

Vektordi tenleme jardeminde jaza alamiz. Bul tenleme $\hat{O}$ betliktin' ***Vektor ko'rinisindegi ten'lemesi*** dep ataymiz. Biz bilemiz $\hat{O}$ betlik elementar betlik bolmasa , (1) ha'm (2) ten'lemeler oni baribir noqat atrapinda aniqlamaydi. Eger $\hat{O}$ elementar betlik bolsa oni toliq (1) yaki (2) ten'lemeler jardeminde aniqlaw mumkin.

3.2. Betliktin' ashiq emes ko'rinisinde beriliwi.

Bizge $G \subset R^3$ ashiq ko'plik ha'mde G da aniqlangan $F(x;y;z)$ funktciyasi berilgen bolsin.

Sonda $\hat{O} = \{(x;y;z) \in G : F(x;y;z) = 0\}$ ko'plik F funktciyanin' ***betlik ko'pliki*** yamasa betliki dep ataladi. Eger $gradF \neq 0$ bolsa, $\hat{O}$ sonliqtanda da apiwayi betlik boladi. Sonliqtan, eger $p = (x_0; y_0; z_0) \in \hat{O}$ noqatda $F_z \neq 0$ bolsa, ashiq emes funktciya haqqindag'i teoreomag'a qarap, sonday $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ sanlari ha'm $G_0 = \{(x;y) : |x_0 - x| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ betlikinde aniqlang'an $z = f(x;y)$ funktciya payda bolip, $(x;y) \in G_0$ bolg'an $F(x;y,f(x;y)) = 0$ ten'lik ha'm $z_0 = f(x_0;y_0)$, $|z_0 - f(x;y)| < \varepsilon$ munasebetlik orinlanip ,

$$\ddot{I} = \{(x;y;z) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta, |z_0 - z| < \varepsilon\}$$

Parallelipedtin' $\hat{O}$ menen kesilispesi $z = f(x;y)$ funktciyanin' grafiginan ibarat boladi. Demek, $\hat{O}$ o'zine tiyisli ha'r qanday noqattin' jeterli kishi a'trapinda elementar betlik boladi.

Bizdin' kursimizda tiykarg'I metod matematikaliq analiz bolganligi ushin, biz betliklerdin' qosimsha shartlerin talap qilmaymiz

Aniqlama. *Berilgen $\hat{O}$ betlik ushin ozine tiyisli qa'legen a'trapta (f,G) parametrlew usili bar, bunda $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ funktciya uzliksiz ozinin' integrallarina iye ha'm $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ matricanin' rangi ekige ten' bolsa $\hat{O}$ betlik* ***REGULYAR betlik deyiledi.*** *Parametrlew usili bolsa regulyar parametrlew dep ataladi.*

Betliktin' regulyarliq sha'rti $\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] = \vec{0}$ ko'rinisinde ha'mde jazilmasiz boliwi mumkin. Biz kursimizda tiykarinan regulyar betliklerdi uyrenemiz

Endi betliklerdin' beriliwi haqqindag'I to'mendegi teoremalardi da'lilep ko'reyik.

Teorema-1. *bizge G oblastta aniqlangan $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ funkciyalar berilip harir noqatta $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ ten'lik orinli bolsa ,*

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \ (u;v) \in G \\ z = z(u;v) \end{cases}$$

Sistema reguliyar etti aniqlamaydi.

Teoremani da'lillew ushin.

$$\text{F} = \{(x;y;z) : x = x(u;v), y = y(u;v), z = z(u;v), (u;v) \in G\}$$

ko'pliginin' apiwayi betlik ekenin korsetemiz. Bunin' ushin $\hat{O}$ ko'plikga tiyisli qalegen $p_0 = (x(u_0;v_0), y(u_0;v_0), z(u_0;v_0))$ noqattin' jeterli kishi atrapinda $\hat{O}$ elementar betlik ekenligin korsetemiz. Birdebir $\varepsilon > 0$ ham $G_\varepsilon = \{(u;v) \in G : (u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2 < \varepsilon\}$ ashiq don'gelek ushin $f : (u;v) \to (x(u;v), y(u;v), z(u;v))$ qagiyda menen aniqlangan

$f:G_\varepsilon \to f(G_\varepsilon)$ sawlelendiriwdi qaraymiz. Berilgen $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ funktciyalar uzliksiz bolganligi ushin f ham uzliksiz sawleleniwdir. Eger f oz ara bir manisli bolsa onin' kerisi f^{-1} bar ha'm uzliksiz boladi (f^{-1} uzliksizligi ham $x(u;v), y(u;v)$ ham $z(u;v)$ funktciyalar uzliksizligi ham teorema shartinen kelip shigadi demek $\hat{O}$ tin' p_0 noqatti oz ishine aliwshi $f(G_\varepsilon)$ bolegi elementar betlik boladi.

Sonin' ushin birdebir $\varepsilon > 0$ ushin f sawlendiriwdin' oz ara bir manisli sawlelendiriw ekenligin Da'lillewlaymiz

Oylayiq , $\varepsilon_i > 0,\ \varepsilon_i \to 0,\quad i = 1,2,3,...$ ham G_{ε_i} dongelekke tiyisli $(u_i^1; v_i^1)$ ham $(u_i^2; v_i^2)$ har turli noqtlar ushin $f(u_i^1; v_i^1) = f(u_i^2; v_i^2)$ ten'lik orinli bolsin. Ulumaliqti shegaralamastan aniqliq ushin $u_i^1 \le u_i^2$ va $v_i^1 \le v_i^2$ dep oylayiq

Sonda $x(u_i^1; v_i^1) - x(u_i^2; v_i^2) = 0$, $y(u_i^1; v_i^1) - y(u_i^2; v_i^2) = 0$, $z(u_i^1; v_i^1) - z(u_i^2; v_i^2) = 0$

Tenlliklerden ham Lagranj teoremasinan

$$x_u(p_i^1, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + x_v(u_i^2, q_i^1)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$
$$y_u(p_i^2, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + y_v(u_i^2, q_i^2)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$
$$z_u(p_i^3, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + z_v(u_i^2, q_i^3)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

Tenliklerdi alamiz. Bul jerde $p_i^1,\ p_i^2,\ p_i^3 \in \left[u_i^1, u_i^2\right],\ q_i^1,\ q_i^2,\ q_i^3 \in \left[v_i^1, v_i^2\right],\ u_i^2 - u_i^1$ ham $v_i^2 - v_i^1$ sanlari bir waqitta nolge aylana almaydi

Sonin' ushin joqaridagi tenlliklerden

$$\frac{x_u(p_i^1; v_i^1)}{x_v(u_i^2; q_i^1)} = \frac{y_u(p_i^2; v_i^1)}{y_v(u_i^2; q_i^2)} = \frac{z_u(p_i^3; v_i^1)}{z_v(u_i^2; q_i^3)}$$

Qatnasin alamiz bul qatnasta $x_u,\ x_v,\ y_u,\ y_v$ ham $z_u,\ z_v$ funkciyalar uzluksisliginen paydalaip, $i \to \infty$ limitqa utsaq

$$\frac{x_u(u_0, v_0)}{x_v(u_0, v_0)} = \frac{y_u(u_0, v_0)}{y_v(u_0, v_0)} = \frac{z_u(u_0, v_0)}{z_v(u_0, v_0)}$$

Qatnasti alamiz . Bul qatnas teorema shartine qarsi bolgan.

$$rang \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} < 2$$

ten'sizlikke ten kushli. Demek , oylawimiz qate ham $\varepsilon > 0$ jeterli kishi bolganda $f:G_\varepsilon \to f(G_\varepsilon)$ sawlelendiriw topologik sawlelendiriw dir. Bunnan bolsa $\hat{O}$ ko'pliknin p_0 noqatin oz ishine aliwshi $f(G_\varepsilon)$ bolegi elementar betlik ekenlgi kelip shigadi

Teorema-2. *Regulyar* $\hat{O}$ *betlik ogan tiyisli* $p(u_0, v_0)$ *nuqat atrapinda,*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v),\ (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Parametric tenlemeler jardeminde berilip , p *noqatta* $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ *determinant nolden parqli bolsa sonday* $f(x,y)$ *funkciya payda boladi* p *noqattin atrapinda* $\hat{O}$ *betlik* $z = f(x,y)$ *funkciyanin grafiginen ibarat .*

Aniqlama. Biz regulyar betliklerdin parametrlew usilin ten'lememizde ha'r qashan $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ tuwindilar bar ha'm uzliksiz boliwin talap etemiz

Da'lillew. Teoremani da'lillew ushin

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(u_0, v_0) = x_0 \\ y(u_0, v_0) = y_0 \end{matrix}$$

Sistemaga matematik analiz kursindagi keri funkcialar haqqindagi teoremani qollaymiz . Bul teoremada sonday tikarinan $\delta > 0$ sani ham

$$\Pi_\delta = \{(x,y): |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$$

Oblistta aniqlangan sonday deferensiallawshi $u = u(x;y),\ v = v(x;y)$ funkcialar bar olar $x(\ u(x;y),\ \ v(x;y)\ ) \equiv x,\ \ y(\ u(x;y),\ \ v(x;y)) \equiv y$ tenliklerdi qanatlandiradi ham $u(x_0;y_0) = u_0,\ v(x_0;y_0) = v_0,$ qatnasiqlar orinli boladi. Demek , p noqat atrapinda $\hat{O}$ betlik $z = z(\ u(x;y),\ v(x;y)) = f(x;y)$ funkcianin grafiginen ibarat.

3.3. Betlik ustinde jatiwshi iymek siziqlar

Reguliyar $\hat{O}$ betliktin' $p \in \hat{O}$ noqat atrapinda reguliyar (f, G) parametrlew usili

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

Tenleme jardeminde berilgen betlik ustinde M noqattan otiwshi γ iymek siziq berilgen bolip ol

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t),\ a < t < b. \ (2)$$

Tenleme jardeminde parametrlengen ham $\gamma \subset f(G)$ bolsin

Aniqliq ushin M betlik noqti sipatinda $(u_0;v_0)$ koordinatalarga iymek siziq noqati sipatinda t parametrinin' t_0 manisine mas kelsin. Sonin ushin har bir $t \in (a;b)$ ushin sonday $(u(t), v(t)) \in G$ noqat bar bolip

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t), v(t)) \ (3)$$

Tenlik orinli boladi. Eger γ iymek siziq bolsa $u(t), v(t)$ funkciyalarda deferenciyalaniwshi funkciyalar boladi. Buni dalilew ushin $\hat{O}$ betliktin reguliyar betlik ekenin paydalanamiz $\hat{O}$ reguliar betlik bolgani ushin $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ ten'lik orinli. Aniqlaw ushin $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ bolsin dep oylap $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$ sistemani qaraymiz

Eger γ iymek siziq bolsa $\vec{\rho}(t)$ vektor funkciyanin' koordinatalari $x(t), y(t), z(t)$ diferencialaniwshi funkciya boladi Birar bir $t^* \in (a;b)$ ushin $x^* = x(t^*),\ y^* = y(t^*),\ z^* = z(t^*).$ ham $u^* = u(t^*),\ v^* = v(t^*)$ belgilewler kiritip

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$$

Sistemani

$$\begin{cases} x(u^*, v^*) = x^* \\ y(u^*, v^*) = y^* \end{cases}$$

Sorawlar

1. jaswshilari $\vec{a}(1,2,3)$ vektorga parallel bagitlawshisi $x=u,\ y=u^2,\ z=u^3$ siziqtn ibarat cilindrik betliktin tenlemesin duzin
2. $A(4,2,3),\ B(1,4,-2)$ noqatlardin qaysilari $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ betlikke tiyisli
3. $x=u+sinv,\ y=u+\cos v,\ z=u+a$ tenleme qanday betliktin tenlemesi boladi
4. Bul $x=2u-v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^2-v^2$ betlikkea $M(3,5,7)$ noqatta jurgizilgen urinba tegislik tenlemesin duzin
5. Bul $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ $M(u=2,\ v=1)$ noqatta jurgizilgen urinba tegisliginin tenlemesin korsetin
6. Bul $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ $M(u=2,\ v=1)$ noqatta otkizigen normal tuwri siziq tenlemesin duzin
7. Tomendegi betlikler tenlemelerinin oramalarin tabin

a) $x^2+y^2+(z-C)^2=1$, b) $x+C^2y+z-2C=0$, v) $(x-C)^2+(y-C)^2+(z-C)^2=C^2,\ (C\neq 0)$

Tomendegi aylanba sirlardin birinshi kvadratik formasi tabilsin

8. $x=R\cos u\cos v,\ y=R\cos u\sin v,\ z=R\sin u$ - sfera
9. $x=a\cos u\cos v,\ y=b\cos u\sin v,\ z=c\sin u$ - aylanba ellipsoid
10. $x=achu\cos v,\ y=bchu\sin v,\ z=cshu$ - bir palleli aylanba giperboloit
11. $x=ashu\cos v,\ y=bshu\sin v,\ z=cchu$ - eki palleli aylanbali giperboloit.
12. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u^2$ - aylanba paraboloid
13. $x=R\cos v,\ y=R\sin v,\ z=u$ - aylanba cilindir

Juwaplari: **1**. $x=u+v,\ y=u^2+2v,\ z=u^3+3v$. **2**. A tiyisli, B tiyisli emes. **3**. Elleptik cilindir. **4**. $18x+3y-4z-41=0$. **5**. $3x-y-2z-4=0$. **6**. $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}$. **7**. a) Aylaba cilindir: $x^2+y^2=1$, b) Giperbolik cilindir: $xy+yz=1$, v) Ushqa iye bolmagan konus: $x^2+y^2+z^2-2xz-2xy-2yz=0$. **8**. $ds^2=R^2\left(du^2+\cos^2 udv^2\right)$.

9. $ds^2=\left(a^2\sin^2 u+c^2\cos^2 u\right)du^2+a^2\cos^2 udv^2$.

10. $ds^2=\left(a^2sh^2u+c^2ch^2u\right)du^2+a^2ch^2udv^2$.

11. $ds^2=\left(a^2ch^2u+c^2sh^2u\right)du^2+a^2sh^2udv^2$.

12. $ds^2=\left(1+4u^2\right)du^2+u^2dv^2$.

13. $ds^2=du^2+R^2dv^2$.

Test tapsirmalari

№	Test tapsirmalari	Duris juwap	toliq juwap	toliq juwap	toliq juwap
1	Jasawshilari $\vec{a}(1,2,3)$ vektorga paralel, bagitlawshi $x=u,\ y=u^2,\ z=u^3$ siziqlardan ibaratcilindrik betliktin tenlemesi	$x=u+v,$ $y=u^2+2v,$ $z=u^3+3v$	$x=u-v,$ $y=u^2+2v,$ $z=u^3+3v$	$x=u+v,$ $y=u^2-2v,$ $z=u^3+3v$	$x=u+v,$ $y=u^2+2v,$ $z=u^3-3v$
2	$x=u+sinv,\ y=u+\cos v,$ $z=u+a$ tenleme qanday betliktin tenlemesi	Elliptikliq cilindr	Elliptik giperbola	Paraboloid	Giperboloid
3	$x^2+y^2+(z-C)^2=1$ betlikler klasinin oramasin tabin	$x^2+y^2=1$	$x^2-y^2=4$	$x^2-y^2=1$	$x^2+y^2=4$
4	$A(4,2,3),\ B(1,4,-2)$ noqatlardin qaysilari $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ betlikke tiyisli.	A tiyisli B tiyisli emes	Ekewida tiyisli	B tiyisli A tiyisli emes	Ekewineda tiyisli emes
5	$x+C^2y+z-2C=0$ betlikler klasinin oramasin tabin	$xy+yz=1$	$xy-yz=1$	$xz+yz=1$	$xz-yz=1$
6	Ushbu $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ $M(u=2,v=1)$ noqatqa otkerilgen normaltuwri siziq tenlemesi	$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-2}$	$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-2}$	$\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{2}$	$\frac{x+3}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{2}$
7	$x=R\cos u\cos v,\ y=R\cos u\sin v,$, $z=R\sin u$ betliktin birinshi kvadratik formasi	$ds^2=R^2\left(du^2+\cos^2 u dv^2\right)$	$ds^2=R^2\left(du^2-\cos^2 u dv^2\right)$	$ds^2=R^2\left(\cos^2 u du^2+dv^2\right)$	$ds^2=R^2\left(\cos^2 u du^2-dv^2\right)$
8	$\vec{r}=\vec{r}(u)$ (u tabiyiy parametr) siziq binormalinan bolekten payda bolgan S betliktin birinshi kvadratik formasi	$ds^2=\left(1+\sigma^2v^2\right)du^2+dv^2$	$ds^2=\left(1-\sigma^2v^2\right)du^2+dv^2$	$ds^2=\left(1+\sigma^2\right)du^2+dv^2$	$ds^2=\left(1+v^2\right)du^2+dv^2$
9	Ushbu $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv$ $M(u=2,v=1)$ noqatqa	$3x-y-2z-4=0$	$3x+2y-2z+4=0$	$3x-2y+2z-4=0$	$2x+3y-2z-4=0$

	otkerilgen urinba tegislik tenlemesi				
10	$x = R\cos v,\ y = R\sin v,\ z = u$ betliktin birinshi kvadratik formasi	$ds^2 = du^2 + R^2 dv^2$	$ds^2 = du^2 + Rdv^2$	$ds^2 = R^2 du^2 + dv^2$	$ds^2 = Rdu^2 + dv^2$

Paydalanilgan a'debiyatlar

Narmanov A.YA. Differentsial geometriya. T. Universitet, 2003

1. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001
2. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S.,Aslonov J.Differentsial geometriya va topologiya fanidan dan mashq va masalar twplami. T. Universitet, 2014.
3. Mishenko A.S., Fomenko A.T. Kurs differentsialnoy geometrii i topologii. M., izd. MGU,2004.
4. www.mathnet.ru
5. www.ru.bookos.org

4-TEMA:RIMAN GEOMETRIYASI ELEMENTLATI. CHIGLER-GROMOL PROBLEMASI

Reje:

4.1. Riman geometriyasi elementlari

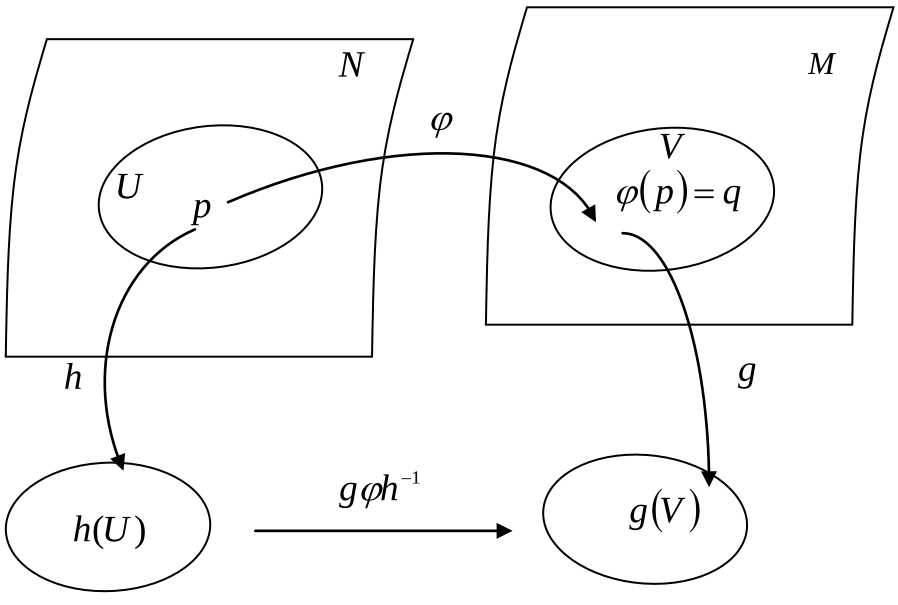
4.2. Iymeklik teris emesligi ko'pobrazliliq geometriyasi.

4.3. Ha'zirgi zaman geometriyasi xalqara konfirenciyalarda usinis etikgen problemalar ha'm olardin' seshimleri.

Tayansh sozler: *ko'pobrazliliq, riman ko'pobrazlilig'i, batiriw , Jaygas ,Riman metrikasi, vektor maydanlar*

4.1.Riman geometriyasi elementler .

Tegis k -olshemi N ko'pobrazliliqti n-olsgemli uzliksiz sawlelendiriwshisi $\phi : N \longrightarrow M$ yegislik deyiledi deyiledi harqanday $p \in N$ noqat atrapinda N va M dagi birar kartadan siypaq funkciyalar bilan erilsa $g\varphi h^{-1}$ funkciya M ***siypaqliq funkciya bolsa*** (2-sizilma). Esletip qoyamiz bunday N, M ko'pobrazliliqlardin" o'lshemleri k, n qa'legen boliwi mumkin



2-sizilma

ko'pxilliklar esa diffeomorf deyiladi.

da siypaq yo'l deb siypaq akslantirishga aytamiz. Lokal koordinatalarda yo'l nuqtalarining qar bir koordinatasi siypaq funksiya bo'ladi.

va nuqtalar yo'lning boshi va oxiri deyiladi.

Teorema 3. - siypaq ko'pxilliklarni siypaq akslantirish va akslantirishning regulyar nuqtasi bo'lsin. U qolda nuqtaning to'la proobrazi

da o'lchami bo'lgan siypaq qism ko'pxillik bo'ladi.

Da'lilleniwi. qatlamning ko'pxillik ekanini isbotlash uchun, qar bir nuqtaning atrofida oshkormas funksiya qaqidagi teoremani qo'llash yetarli.

Natijada qar bir nuqtaning yevklid fazosidagi soqaga gomeomorf atrofga ega bo'ladi. atrofda lokal koordinitalar sifatida

ko'pxillikning nuqtasi atrofidagi lokal koordinatalardan biror tasini olish mumkin. Agar bu koordinatalar bo'lsa, u qolda qolgan lokal

koordinatalar orqali siypaq funksiyalar bilan ifodalanadi. Bundan ning siypaq ko'pxillik ekanligi kelib chiqadi. ko'pxillikning nuqtasi

atrofidagi boshqa koordinata sistemasi bo'lsin. sistema da lokal koordinatalar sistemasini tashkil etadi. U qolda

$$y_{j_k} = y_{j_k}(x_1,...,x_n) = y_{j_k}(x_1(x_{i_1},...,x_{i_{n-m}}),...,x_n(x_{i_1},...,x_{i_{n-m}}))$$

Sawlelendiriw Defferenciali

φ : N → M —siypaq N ko'pobrazliliqti siypaq M ko'pobrazliliqqa siypaq sawlelendiriw bolsin . N dagi har bir γ jolga M da $\varphi\circ\gamma$ joli mas keledi M da biror φ *(r) noqattin' atrapinda berilgen har bir f funkciyalarga* N da bir *r* noqat atrapinda berilgen $f \circ \varphi$ funktciyasi mas keledi

Tegis φ Sawlelendiriwdin' p noqatagi defferenciyalin tabiw kerek $d_p\varphi$ dep $d_p\varphi$:$T_pN \to T_{\varphi(p)}$ M Sawlelendiriwge aytiladi ol har bir $u \in T_pN$ *vektorga* $d_p\varphi(u) \in T_{\varphi(p)}$M vektordi maslastirip qoyadi M da garesiz f tegis funkciyag'a tomendegi qagiyda boyinsha tasir etedi

$$(d_p\varphi(u))f=u(f\circ\varphi) .$$

Eger *u vektor* γ jolinin' *r* = γ*(t) noqatta tezlik vektori bolsa olda* $d_p\varphi(u)$ vektor $\varphi\circ\gamma$ jolinin' *t da tezlik vektori boladi* (3-rasm),

$d_p\varphi(\gamma'(t)) = (\varphi\circ\gamma)'(t)$.

Joqardagi formulalardan korinedi qalegen jagdayda $u, v \in T_pN$, $a \in R$ da $d\varphi(u+v) = d\varphi(u) + d\varphi(v)$, $d\varphi(au) = ad\varphi(u)$, yagniy φ :N→M tegis Sawlelendiriw defferenciali $d_p\varphi$ siziqli Sawlelendiriw sonin; ushin jeke jagdaylarda tegis Sawlelendiriw boladi.

$d_p\varphi : T_pN \to T_{\varphi(p)}M$

Tabiy qagiyda boyinsha aniqlangan $d_p\varphi(p, u) = (\varphi(r), d_p\varphi(u))$ *urinba qatlamlarini* Sawlelendiriw $d\varphi$ *:TN→TM di qaraymiz. Bul* Sawlelendiriw uluma siziqli emes alki qatlamda siziqli .

Batiriw, jaylastiriw submersiya.

Eger har bir $p \in N$ *noqatta* $d_p\varphi$ siziqli sawlelendiriw yadrosi tek nolden ibarat bolsa yagniy $d_p\ \varphi\ T_pN$ kenislikti $T_{\varphi(p)}M$ nin' bolek kenisligine siziqli izomorf sawlelendirse onda φ sawlelendiriw N kopturlilikti M g'a batiriw delinedi. Sonliqtan, bunda $k = dimN \le dimM = n$ *boliwi kerek*.

N de r noqatti o'z ishine aliwshi (V, g) kartanin lokal koordinatalari $x^1, ..., x^k$ ham M ta $\varphi(p)$ noqatti oz ishine aliwshi (U, h) kartanin $u^1, ..., u^n$ lokoal koordinatalarinda sawlelendiriw funkcialar menen beriledi

$$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^k);\ i = 1, \ldots, n.$$

φ sawlelendiriw batiriw boliwi ushin $k \le n$ bolip har bir $p \in N$ noqatta yamasa matritsasi $\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,k}$ nin'rangi k ga ten boliwi yamasa maksimal boliwi zarur .

Eger $\varphi : N \to M$ sawlelendiriw N ozinin obrazina diffemorf bolsa onda φ akslantirish jaygastiriw delinedi . Bul batiriwdin' xsusiy xali.

Qa'legen batiriw local jaygastiriw boladi.

Eger $k>n$ da yamasa matritsanin' rangi har bir noqatta maksimal bolsa yamasa n ga ten bolsa onda φ sawlelendiriw swmbersiya delinedi.

misallar**. 1.** sawlelendiriw $\pi : TM^{2n} \to M^n$ proektsialaw TM dagi har bir (p,u) vektorga onin noqati $\pi(p,u) = p$ mas boladi . Bul sawlelendiriwdin har bir noqatta rangi maksimal yagniy n ga ten boladi.

4.2. Iymekliligi teris emes koplikler geometriyasi. Kopliklerde vector maydanlar.

M siypaq kopturlilik A qisim ko'pliginda X vektor maydan berilgen, eger har bir $x \in A$ noqatqa birar $X_x \in T_xM$ vector mas qoyilsa .

X vektor maydandi $x \mapsto X_x$ sawlelendiriw spatinda qaraw ushin barliq $X_x$vektorlar jatiwshi bir ko'plikdi korsetiw tiyis sebebi turli noqatlarga turli urinba kenislikten vektorlar mas qoyiladi. Bunday ko'plik urinba TM esaplanadi . Sonin ushin vector maydandi tomendegi sawlelendiriw siyaqli aniqlaw qolay.

$X : A \to TM$, bunda $A \subset M$

Qosimsha xossani qanatlanditiwshi : iqtiyariy $x \in A$ noqat ushin proekcia $\pi(X_x) = x$, yagniy $\pi \circ X = id_A$. Bunday sawlelendiriw r TM nin' kesimleri delinedi .

$G \subset M$ soxada berilgen X vektor maydan siypaq delinedi eger ush tenkushli tastiqlardan biri bolsa

a)$X : A \to TM$sawlelendiriw spatinda qaralip atqan vector maydan $A = G$siypaq koplikti TMsiypaq koplikke sawlelendirse siypaq boladi

b) Mdag'i G soxada berilgen qa'legen siypaq funkcia $(Xf)(x) = X_xf$tenlik penen aniqlaniwshi $X f$ funkcia siypaq bolsa ;

v) har bir $x \in G$ ushin (U, h) karta tawilsa onda X_x vektordin koordinatalari X_x^i lar$x$ noqattin $x^1, ..., x^n$ koordinatalari sipaq baylanisli bolsa

Vektor maydan kenisligi . Bir $A \subset M$ ko'plikda berilgen X, Y vektor maydanlari tomendegi qagiyda boyinsha qosiw ham sanga kobeytiw mumkin: $(aX + bY)_x = aX_x + bY_x$, bunda $a, b \in R$. Bul amellerge qarata an A dagi vektor maydanlar siziqli kenislik quraydi . Bunday tisqari , $A\subset M$ dagi vektor maydanlarin funkciaga tomendegishe kobeytiw mumkin :

$$fX)_x = f(x) X_x$$

M dagi siypaq vector maydanlar siziqli kenislikti (R ustida) χ menen belgileymiz.

Li qawisi

V vektor kenislik onda aniqlangan [,] binar amel menen Li algebrasi delinedi eger ixtiyari $u,v,w\in V$ va $a,b\in R$ ushin tomendegi aksiomalar isletilse

1) kososimetriklik *[u, v] = -[v, u]*;

2) siziqliliq *[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w];*

3) Yakobi birdeyligi *[[u, v], w]+ [[v, w], u]+ [[w, u], v] = 0.*

Li algebrasina missal etip R^3 Evklid vector kenisliktegi apiwayi vector kobeymeni keltiriw mumkin .

$G\subset M$ soxanin' $x\in G$ noqattagi har eki siypaq vector maydanga siypaq funkcialarga tomendegi qagida boyinsha tasir etiwshi $[X, Y]_x$ funkcional mas qoyiladi

$$[X, Y]_x f=X_x(Yf)-Y_x(Xf)$$

Bul funkcional ham vector boladi . Bul funkcional lokal koordinatalarda qarasaq

$$[X,Y]_x f = X_x(Y^i\partial_i f) - Y_x(X^i\partial_i f) =$$
$$= X_x^j(\partial_j Y^i)\partial_i f + X_x^j Y_x^i\partial_j\partial_i f - Y_x^j(\partial_j X^i)\partial_i f - Y_x^j X_x^i\partial_j\partial_i f = \qquad \text{tap}$$
$$=(X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i)_x\partial_i f,$$

usinday M da $X, Y\in\aleph$ har eki vector maydanlarga *[X, Y]* yagniy vector maydandi mas qoyamiz . *X* ham *Y* vektor maydanlarinin Li qabsi delinedi

Eger *X*, *Y* vector maydanlar S^k –sipaq bolsa onda onin Li qabsi S^{k-1} – siypaq vector maydan boladi .

Li qabsi qasiyetleri

a. Ixtiariy local koordinatalar sistemasinin bazis maydanlari ushin

$$[d_i, d_j] = 0.$$

b . Ixtiariy $X, Y\in\aleph$ ham φ siypaq funkcialar ushin

$$[X,\varphi Y]_x = \varphi(x)[X, Y]_x + (X_x\varphi)Y_x.$$

v. Eger N — M ga jaygastirilgan qisim kopturlilik ham *X*, *Y* — N da sipaq vector maydanlar , $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, — olardin N qisim kopturliliktin M dagi atrapinda keneytpesi bolsa onda $x\in N$ da

$$[X, Y]_x = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_x.$$

Riman ko'pobrazlilig'i

Eger har bir T_xM urinba kenislikte x noqatqa siypaq baylanisli $\langle\,,\rangle$ skalyar kobeyme aniqlangan bolsa , M kopturlilikte Riman strukturasi berilgen delinedi yamasa M dagi qa'legen X, Y siypaq vector maydanlar ushin $\langle X, Y\rangle$ M da siypaq funkcia boladi

.

(U,h) local koordinatalarda M dagi qa'legen $x \in h(U)$ noqat ushin tomendegini keltirip shigaramiz

(U,h) $\langle X,Y\rangle_x = \langle X^i\partial_i, Y^j\partial_j\rangle_x = X_x^iY_x^j\langle\partial_i,\partial_j\rangle_x = g_{ij}(x)X_x^iY_x^j,$

Bunda d_i — $x$noqattin (U, h) koordinatalarinin bazis $g_{ij}(x)$ menen $\langle\partial_i,\ \partial_j\rangle$ belgilengen . $g_{ij}(x)$ qiymat M riman

Kopturliliginin x noqatina (U, h) koordinatalarinin „metric tenzori " koefitsentleri delinedi.

eger ϕ — izometria , (U, h) — M_1 dagi karta , $(U, \phi\circ h)$ — M_2 dagi karta

bolsa onda $\bar{g}_{ij}$ funkcianin manisleri x^1 , ..., x^n local koordinatalarda birdey boladi.

.

Misal. Riman kopturliligine en' apiwayi missal noqatliq Evklit kenisligi .

γ : $[a, b] \to M$M da bolekli siypaqjol bolsin .

Har bir $t \in [a, b]$ushin $\gamma'(t)$ tezlik vektori aniqlangan . γ' vector γ' $| = \sqrt{\langle\gamma', \gamma'\rangle}$ uzinliqqa iye a. γ jol uzinligi tomendegishe aniqlanadi

$$s(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\,dt.$$

Teorema 4. $\rho(p,q) = \inf s(\gamma)$ tenlik menen aniqlangan ρ funkcia M da metrika boladi yagniy

1) ρ *(r, q) > 0,*

2) ρ *(r, q) =* ρ *(q, p),*

3) ρ *(r, l) +* ρ *(l, q)>* ρ *(p, q),*

4) ρ *(p, p) = 0,*

5) eger p ≠ q bolsa onda ρ *(p, q)>0 boladi .*

ρ funkciaga riman delinedi

ρ N riman kopturliligi M riman kopturliligi batiriw ϕ:$N\to M$ izotermik delinedi eger ϕ batiriw indukcirlangan skalyar kobeyme N dagi menen ustpe ust tusedi yagniy qa'legen, $x \in N$ noqat ham $u,v \in T_xN$ ushin $\langle d_x\phi(u), d_x\phi(V)\rangle_M = \langle u,v\rangle_N$ isletilse.

4.3. Zamanagoy geometriya boyinsha xalqara konferensialarda usinis etilgen mashqalalar ham olardin sheshimleri taxlili

Kovariant differenciallaw

M — siypaq kopturlilik ham $x \in M$ bolsin n.:

$$\nabla_{au+bv} X = a\nabla_u X + a\nabla_v X,$$
$$\nabla_u (aX + bY) = a\nabla_u X + b\nabla_u Y,$$
$$\nabla_u (fX) = (uf) X_x + f(x)\nabla_u X$$

Bul jerde , adattegidey , *uf* - *f* funkcianin ham vector jonelisindegi tuwindisi , X_x —ese X maydannin x noqattagi qiymati i. $\nabla_u X$ vektror X vector maydannin jonelisindegi kovariant tuwindisi delinedi

Lemma. Eger $u \in T_r M$ ham X , $\tilde{X}$ vector maydanlar r noqattin birar atrapinda ustpe ust tusse onda *r*noqatta $\nabla_u X = \nabla_u \tilde{X}$.

Levi Chivita baylanisi

1. T e o r e m a. Qa’legen *M Riman kopturliliginde simmetrik Riman baylanis bar ha’m ol birew . Ol M degi Levi Chivita baylanisi delinedi.*

2. Da’lillew.Birden-birligi ∇ — sonday baylanis bolsin . Richchi birdeyligi *X*, *Y*, *Z* maydanlarin tsikllik almastirip 3 ma’rte jazamiz.

$$\begin{aligned} &X\langle Y,Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0,\\ &Y\langle Z,X\rangle - \langle \nabla_Y Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle = 0,\\ &Z\langle X,Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

da’slep eki ten’likti qosip, ushinshisin ayiramiz

$$\begin{aligned} &X\langle Y,Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle \nabla_Y Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle +\\ &+\langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0. \end{aligned} \tag{4*}$$

Baylanis simmetriyali ekeninen:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],\ \nabla_X Z - \nabla_Z X = [X,Z], \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y,Z].$$

(4*) tenliktin shep tarepine $\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ ag’zani qosip, alsaq to’mendegige iye bolamiz

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = &\{X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle\} + \{Y,\langle Z,X\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle\} -\\ &-\{Z\langle X,Y\rangle - \langle Z,[X,Y]\rangle\}. \end{aligned} \tag{5}$$

bulardi esaplap, Koshul formulasi dep ataliwshi (5) formulani payda etemiz: (5) nin’ on’ ta’repi ∇ g’a baylanisli emes. Sonin’ ushin a’melde eki sonday ∇ ni ∇' baylanis bar boladi, qa’legen $x \in M$ noqatta to’mendegi ten’lik orinlanadi:

$$\langle \nabla_{X_x} Y, Z_X\rangle = \langle \nabla'_{X_x} Y, Z_x\rangle$$

qa’legen *Z* maydan ushin orinlaniwinan,yag’niy

$$\langle \nabla_{X_x} Y - \nabla'_{X_x} Y, Z_x\rangle = 0$$

Na’tiyjede, $(\nabla_{X_x} Y)_x = (\nabla'_{X_x} Y)_x$. Bul ten’lik qa’legen *x* noqatta ha’m qa’legen *X, Y* maydanlar ushin orinli. Demek, $\nabla = \nabla'$.■

Esap-kitapti jen’illestiriw ushin da’slep da’lillengenlerden paydalanamiz. *M* de qa’legen simmetriyaliq $\tilde{\nabla}$ baylanis kiritemiz. (4) nin’ ha’r bir ten’liginin’ shep ta’repi talap etilgen qa’siyetlerdi qanaatlandiradi, 8.1.3 lemma boyinsha, (5) ten’liktin’ on’ ha’m shep ta’repleri ayirmasi da *X,Y,Z* vektor maydanlardin’ x noqattag’i ma’nisine baylanisli. Biraq (5) nin' shep ta'repi, yag'niy $2\langle\tilde{\nabla}_{X_x}Y,Z_x\rangle$, da tap sonday on' ta'repi de *Z* maydannin' *x* noqattan basqa noqattag'i ma'nisine baylanisli emes.

Endi, (5) nin' on' ta'repi *X, Y* maydanlardin' fikserlengen ma'nisinde $x\in M$ noqatta tek $Z_x\in T_xM$ ge baylanisli bolsa, ol jag'dayda (5) on' tarepi T_xM de *L* siziqli funktsionaldi aniqlaydi.

Sonin' ushin barliq $Z_x\in T_xM$ ushin $\langle w,Z_X\rangle = L(Z_x)$ bolatug'in (*X, Y* maydanlarg'a baylanisli) $w\in T_xM$ bar boladi.

Aniqlamag'a ko're $\nabla_{X_x}Y = w/2$ dep alsaq, Levi-Shivita baylanisin payda etemiz. Haqiyqatinda da, kiritilgen ∇ a'mel 7.2 degi (6) nin' da'slepki eki sha'rtin qanaatlandiradi. Du'zilisine ko're ∇ qa'legen *X, Y, Z* maydanlar ushin (5) qatnasti qanaatlandiradi. (5) ni *X, Y, Z* ha'm *X, Z, Y* ushin qollasaq ha'm na'tiyjelerin qossaq, ∇ a'mel Rishshi (1) birdeyligin qanaatlandiradi:

$$2\langle\nabla_X Y,Z\rangle+2\langle\nabla_X Z,Y\rangle=\{X\langle Y,Z\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}+\{Y\langle Z,X\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}-\{Z\langle X,Y\rangle-$$
$$-\langle Z,[X,Y]\rangle\}+\{X\langle Z,\mathrm{Y}\rangle-\langle Z,[X,\mathrm{Y}]\rangle\}+\{\mathrm{Z}\langle Y,X\rangle-\langle X,[\mathrm{Z},\mathrm{Y}]\rangle\}-\{\mathrm{Y}\langle X,\mathrm{Z}\rangle-\langle Y,[X,\mathrm{Z}]\rangle\}.$$
$$\Rightarrow\ 2\langle\nabla_X Y,Z\rangle+2\langle\nabla_X Z,Y\rangle=2X\langle Y,Z\rangle$$

(1) ni qa'legen *X, fY, Z* maydanlar ushin qollasaq,

$$X\langle fY,Z\rangle_x=\langle\nabla_{X_x}fY,Z_x\rangle+\langle f(x)Y_x,\nabla_{X_x}Z\rangle=f(x)\langle\nabla_{X_x}Y,Z_x\rangle+X(f)\langle Y_x,Z_x\rangle+$$
$$+\langle f(x)Y_x,\nabla_{X_x}Z\rangle$$
$$\Rightarrow\langle(Xf)\cdot Y,Z\rangle+f\cdot\langle\nabla_X Y,Z\rangle=\langle\nabla_X(fY),Z\rangle$$

ge iye bolamiz.

Bunnan , *Z* maydannin' qa'legen maydan ekenliginen, to'mendegige iye bolamiz.

$$\nabla_x(fY)=(Xf)\cdot Y+f\cdot\nabla_X Y,$$

bul bolsa 7.2 degi (6) nin' u'shinshi sha'rti orinlaniwin bildiredi ha'm ∇ — baylanis ekenin da'lilleydi. (5) ni *X, Y,Z* ha'm *Y, X, Z* u'shliklerge qollap, na'tiyjelerin alsaq, to'mendegige iye bolamiz:

$$2\langle\nabla_X Y,Z\rangle-2\langle\nabla_Y X,Z\rangle=\{X\langle Y,Z\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}+\{Y,\langle Z,X\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}-\{Z\langle X,Y\rangle-$$
$$-\langle Z,[X,Y]\rangle\}-\left(\{Y\langle X,Z\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}+\{X,\langle Z,Y\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}-\{Z\langle Y,X\rangle-\langle Z,[Y,X]\rangle\}\right)$$
$$\langle\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],Z\rangle=0\,.$$

Bul $\langle\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]\rangle$ ekenin ko'rsetedi, yag'niy kiritilgen baylanis simmetriyalilig'in ko'rsetedi. ■

(2) Rishshi birdeyligi local koordinatalarda to'mendegi ten'lemeler sistemasina ten' ku'shli

$$\partial_i g_{jk}-\langle\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_k\rangle-\langle\partial_j,\nabla_{\partial_i}\partial_k\rangle=0;\quad i,j,k=1,\dots,n,\qquad(6)$$

yaki

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^s\partial_s,\ \langle\partial_s,\partial_k\rangle=g_{sk}.\ (8)$$

ekenin esapqa alsaq to'mendegi sistemag'a iye bolamiz:

$$\partial_i g_{jk}-\Gamma_{ij}^s g_{sk}-\Gamma_{ik}^s g_{sj}=0\ (7)$$

Haqiyqatinda da, (6) nin' ha'r bir ten'lemesi $\partial_i,\partial_j,\partial_k$ bazis maydanlarg'a qollang'an (2) Rishshi birdeyligin beredi, sonin' ushin (6) ten'likler (2) dden kelip shig'adi. (2) ni (6) dan keltirip shig'ariw ushin, 8.1.3 ge ko're (2) nin' shep ta'repinin' ma'nisi ha'r bir $x \in M$ noqatta tek *X, Y, Z* vektor maydanlardin' usi noqattag'i ma'nisleri X_x, Y_x, Z_x ge baylanisli boladi. Sonin' ushin qa'legen *X, Y, Z* maydanlar ushin (2) nin' shep ta'repin mu'mkin bolg'an barliq bazis maydanlar u'shligi ushin analogik an'latpalardin' siziqli kombinatsiyasi ko'rinisinde an'latiw mu'mkin. Biraq olar ushin (6) g'a ko're bul an'latpalar nolge ten'.

Lokal koordinatalarda $\partial_i, \partial_j, \partial_k,$ bazis maydanlar ushin (5) tenlik to'mendegi ko'rinisti aladi:

$$2\Gamma_{ij}^{s} g_{sk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (9)$$

i, j fikserlengende (9) ten'lemeler sistemasinan $s = 1, ..., n$ de Kristoffel simvollarin aniq tabiw mu'mkin.

$$\Gamma_{ij}^{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) g^{sk}, \quad (10)$$

bunda (g^{sk}) — matritsa, (g_{sk}) ge keri matritsa.

Biraq ha'r bir simmetriyali baylanis qandayda bir Riman metrikasi ushin Levi-Shivita baylanisi bola bermeydi.

SORAWLAR:

1. Differencial 1-formalar. Funkciya differenciali – differencial 1-forma.
2. Funkciya gradienti ha'm funkciya differenciali .
3. Betliklerdin' birinshi ha'm ekinshi kvadratik formalari – differencial formalar
4. Riman ko'ptu'rlilikler aniqlamasi ha'm misallar. Koviant differencial ha'm Krostofel simvollari.
5. Simetrik baylanisliliq Riman ha'm Levi – Chivita baylanislilig'i.
6. Sawlediriw boylap vector maydani Ywl bwylab kovariant differentsiallaw. Parallel vector maydanilari.
7. Parallel koshieriw ham geodezik siziqlar.Geodezik siziqlardin' barligi
8. Ekspotencial ha'm geodezik sawlelendiriw
9. Ekspotencial sawlelendiriwding qa'siyetleri. Geodezik sawlelendiriwdin' qa'siyetleri
10. Gauss lemmasi. Sharlar ham qisqa siziqlar
11. Xopf-Rinov teoremasi
12. Jabiq geodezik siziqlar. Berje lemasi.
13. Iymeklik tenzolari ham onin' algebrik qasiyetleri.
14. Riman iymekliligi . Sekcion iymekliligi. Iymekligi ozgermes ken'isslikler

A'debiyatlar:

1. D.Gromoll, G.Walschap. Metric Foliations and Curvature. Progress in Mathematics Volume 268,2009,ISBN: 978-3-7643-8714-3 , 1-80 betlar
2. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Universitet, 2003
3. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S.,Aslonov J.Differentsial geometriya va topologiya fanidan dan mashq va masalar twplami. T. Universitet, 2014.

4. Materialı mejdunaorodnoy konferentsii «Geometriya v Odesse-2014».Odesa,Ukraina.2014.
5. www.mathnet.ru
6. www.ru.bookos.org

IV. A'meliy shinigiw materiallari

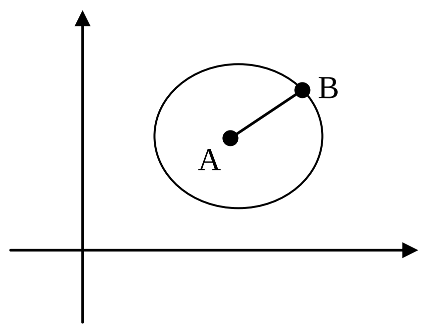
1-A'meliy shinig'iw: Ekinshi ta'rtipli siziqlar ha'm olardin' klassifikatsiyası.

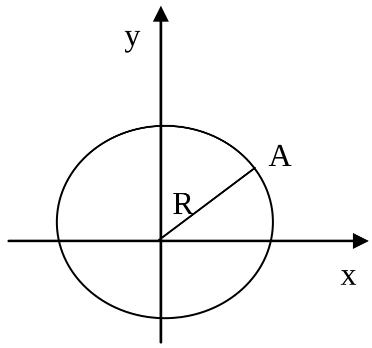
Eki belgisizli ekinshi da'rejeli algebraliq ten'lemeler bolsa ekinshi ta'rtipli iymek siziqlardan ibarat bolip, to'mendegi uliwma ko'riniske iye boladi:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (2)$$

Bundag'i A, B, C, D, E, F ler o'zgermes sanlar bolip algebraliq ten'lemelerdin' koeffitsentleri. (2) ten'lemege ten' kushli bolg'an barliq ten'lemeler ekinshi ta'rtipli iymek siziqti an'latadi. Ekinshi ta'rtipli iymek siziqlardin' a'piwayi ko'rinislerinen birine aylanadi.

Aniqlama: Tegisliktin' qalegen noqatinan birdey araliqta jatqan noqatlardin'geometrik ornina shen'ber dep ataladi .





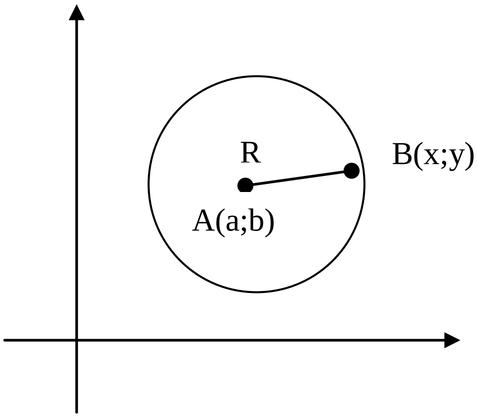
Eger shen'berdin' orayi koordinatalar basinda ha'mde radiusi $OA=R$ den ibarat bolsa, bunday shen'berdin' ten'lemesi to'mendegishe ko'riniste boladi:

$$x^2+y^2=R^2 \quad (3)$$

Bul ten'leme koordinatalar basinan shen'berdin' qalegen A noqatina shekem bolg'an OA araliqtin' kvadrati R^2 g'a ten' ekenligin aniqlaydi.

Orayi A(a; b) noqatda jatiwshi ha'm radiusi R den ibarat bolg'an shen'berdin' ten'lemesi to'mendegishe boladi:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (4)$$



(4) den ko'rinedi, $A(a;\ b)$ ha'm $B(x;\ y)$ noqatlar arasindag'i AV araliqtin' kvadrati R^2 g'a ten'.

Eger (4) ten'lemedegi qawsirmalardi ashıp turlendiriwler orinlasaq , to'mendegishe ko'riniske iye boladi:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (5)$$

Bunday ko'rinistegi (5) shen'ber ekinshi ta'rtipli iymek siziqtan ibarat eken.

Ekinshi ta'rtipli iymek siziqlardin' tu'rli ko'rinistegi ten'lemelerdin' barlig'I da shen'ber bolabermewi mu'mkin. Olardin' barlig'i shen'ber boliwi ushin to'mendegi sha'rtler orinlaniwi lazim:

a) Ten'lemede xy ko'rinistegi ko'beymeli ag'za bolmawi kerek;

b) x^2 ha'm y^2 lerdin' koeffitsentleri o'z-ara ten' boliwi lazim;

v) A, B, C, D koeffitsentler

$$B^2+C^2-4AD>0 \qquad (6)$$

Sha'rtin orinlasa ,

$$Ax^2+Bx+Ay^2+Cy+D=0 \qquad (7)$$

Ko'rinistegi ten'leme shen'ber ten'lemesi boladi.

(6) ten'sizlik orinlang'anda (7) shen'ber ten'lemesinen onin' orayi $(a,\ b)$ ti ha'm radius R di to'mendegi formulalar ja'rdeminde tabiw mu'mkin:

$$a=-\frac{B}{2A}, \quad b=-\frac{C}{2A}, \quad R^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2} \qquad (8)$$

1-misal. Orayi $(3;\ -4)$ noqatda jatqan ha'mde radiusi 6 g'a ten' bolg'an shen'ber ten'lemesin duzin'.

Sheshiliwi: Sha'rtke ko're $a=3$, $b=-4$ ha'm $R=6$. Berilgenlerdi (4) ten'lemege qoyamiz:

$$(x-3)^2+(y+4)^2=6^2,$$

Budan ,

$$x^2\text{-}6x+9+y^2+8y+16=6^2,$$
$$x^2+y^2-6x+8y-11=0.$$

2-misal. Radiusi 7 ha'm orayi (5; 4) noqatda bolg'an shen'ber ten'lemesin tabin'.

Sheshiliwi: Ma'sele sha'rtine ko're a =5, b=4, R=7. (4) ten'lemege tiykarlanip:

$$(x\text{-}5)^2+(y\text{-}4)^4=7^2,$$
$$x^2\text{-}10x+25+y^2\text{-}8y+16\text{-}49=0,$$
$$x^2+y^2\text{-}10x\text{-}8y\text{-}8=0.$$

Bul izlenip atirg'an ten'leme.

Qadag'alaw ushin sorawlar:

1. To'mendegi siziqlardin' tu'ri aniqlansin:

1) $x^2+2xy+y^2+y=0;$
2) $x^2+2xy+y^2+y+x=0;$
3) $(x+2y)^2-3y^2=1;$
4) $(2x-y)(x-y)-1=0.$

2. Ekinshi da'rejeli ko'pag'zalini Lagranj usilinan paydalanip, kvadratlar qosindisina keltirin', ha'm ekinshi ta'rtipli siziqlardin' tu'rin aniqlan'.

1) $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0;$
2) $4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0;$
3) $2xy-4y^2+6x+6y+1=0.$

3. Koordinatalardi almastiriw ja'rdeminde to'mendegi ekinshi ta'rtipli siziqlar tu'rin ha'm jaylasiwin aniqlan'.

1) $x^2+2y^2+4x-4y=0;$
2) $4x^2-y^2-8x-6y-4=0;$
3) $4x^2+4x+2y-1=0;$
4) $6x^2+8y^2+3x-4y+1=0;$
5) $2x^2-3y^2-6x+9y-2=0;$
6) $2x^2+6x+3y+6=0;$
7) $4y^2+4x-2y+1=0;$
8) $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0;$
9) $xy+x+y=0.$

4. To'mendegi ten'lemeler menen berilgen ekinshi ta'rtipli siziqlardin' tu'ri , o'lshemleri ha'm jaylasiwin aniqlan':

$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$

$9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0.$

$5x^2+12xy-12x-22y-19=0.$

$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0.$

$4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0.$

$2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0;$

$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0;$

$5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0;$

$6xy-8y^2+12x-26y-11=0;$

$7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0;$

$7x^2-24xy-38x+24y+175=0;$

$9x^2+24xy+16y^2-40x-30y=0;$

$x^2+2xy+y^2-8x+4=0;$

$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0.$

Paydalang'an a'debiyatlar:

1. Na'rmanov A.Ya Analitik geometriya T., "O'zbekistan felosiplari milliy ja'miyeti", 2008 j.
2. Izu Vaisman. Analytical geometry.World scientific.2007.
3. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometruyadan masalalar to'plami.T,Universitet, 2006.

2- A'meliy shinig'iw: Ekinshi ta'rtipli betler.

Sfera. Orayi *C(a,b,c)* noqatdag'i, *r* radiusli sfera ten'lemesi to'mendegi ko'riniske iye :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

(1-sizilma). Bul ten'lemege sferanin' normal ten'lemesi dep ataladi . Eger sfera orayi koordinatalar basi menen ustpe-ust tu'se ,normal ten'lemege to'mendegi

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

ko’riniske iye boladi.

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+2Bx+2Cy+2Dz+E=0$$

Ten’leme

$$A\neq 0,\ B^2+C^2+D^2-AE>0$$

Sha’rtte orayi $\left(-\frac{B}{A},\ -\frac{C}{A},\ -\frac{D}{A}\right)$ noqatdag’i ha’m radiusi $r=\sqrt{\frac{B^2+C^2+D^2-AE}{A^2}}$ ge ten’ bolg’an shen’berdi aniqlaydi.

M noqatdin’ radiusi *r,* orayi *C* noqatda bolg’an sferag’a salistrmali da’rejesi dep

$$u=d^2-r^2$$

sanga aytiladi. Bul jerde $d = MC$ san *M* noqatdan *C* orayg’a shekem bolg’an araliq.

Eger *M* noqat sfera srtinda jatsa, bul noqatdin’ sferag’a salistrmali da’rejesi on’ san boladi. Bul san *M* noqatdan sferag’a o’tkerilgen urinba uzinlig’inin’ kvadratina ten’. Eger *M* noqat sfera ishinde jatsa, bul noqattin’sferag’a salistrmali da’rejesi teris san boladi ha’m a’bsalyut ma’nisi boyinsha $MP\cdot MQ$ ko’beymege ten’. *MP, MQ* kesindiler *M* noqatdan o’tiwshi qa’legen vatar bo’leklerdin’ uzinliqlarina ten’.

Eger *M* noqat sferada jatsa, bul noqattin’sferag’a salistrmali da’rejesi nolge ten’. $M(x,y,z)$ noqattin’ orayi $C(a,b,c)$ noqatda jatiwshi ha’m radiusi *r* ge ten’sferag’a salistrmali da’rejesi

$$u=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2$$

formuladan aniqlanadi.

Konsentrik bolmag’an eki sferalarg’a salistrg’an ten’ da’rejeli noqatlarinin’ geometriyaliq orni tegislikten ibarat. Bul tegislik eki sferanin’ radikal tegisligi dep ataladi. Eger sferalar kesilisse, radikal tegislig olardin’ uliwma shen'beri arqali o'tedi.

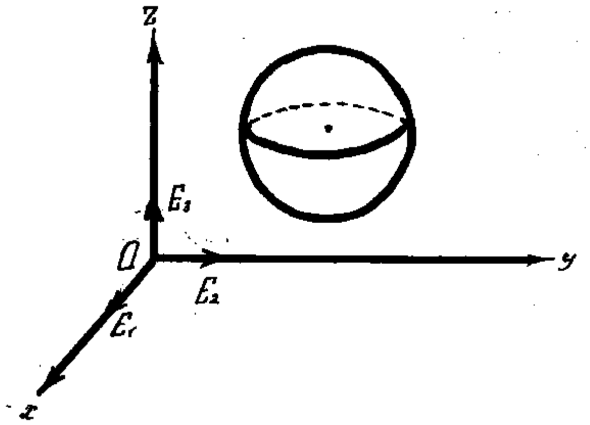
Eki sfera ten’lemelerin qarayiq :

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r_1^2=0,$$

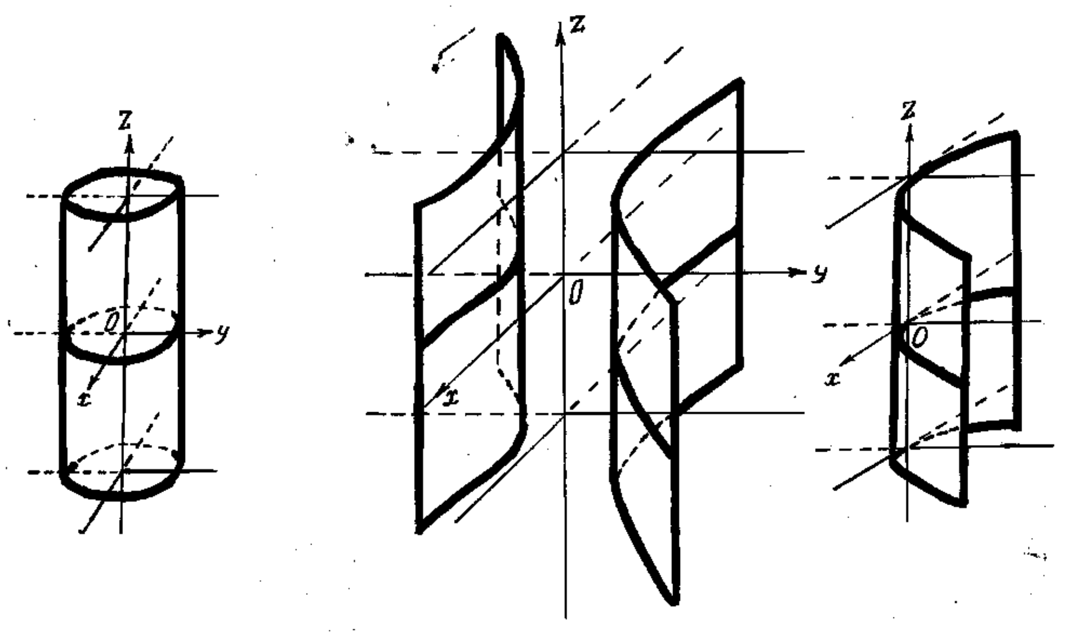
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r_2^2=0$$

Ha’m olardin’ shep ta’replerin u_1, u_2 dep belgilesek.

$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 = 0$ ten’leme λ_1, λ_2 sanlar bir waqitta nolge ten’ bolmag’an halda sfera yaki tegislikti aniqlaydi. Eger sferalar kesilisse,bul ten’leme olardin’ uliwma shen'berinen o'tetug'in sferani yaki tegislikti aniqlaydi. $u_1=u_2$ ten'leme radikal tegislikti aniqlaydi.



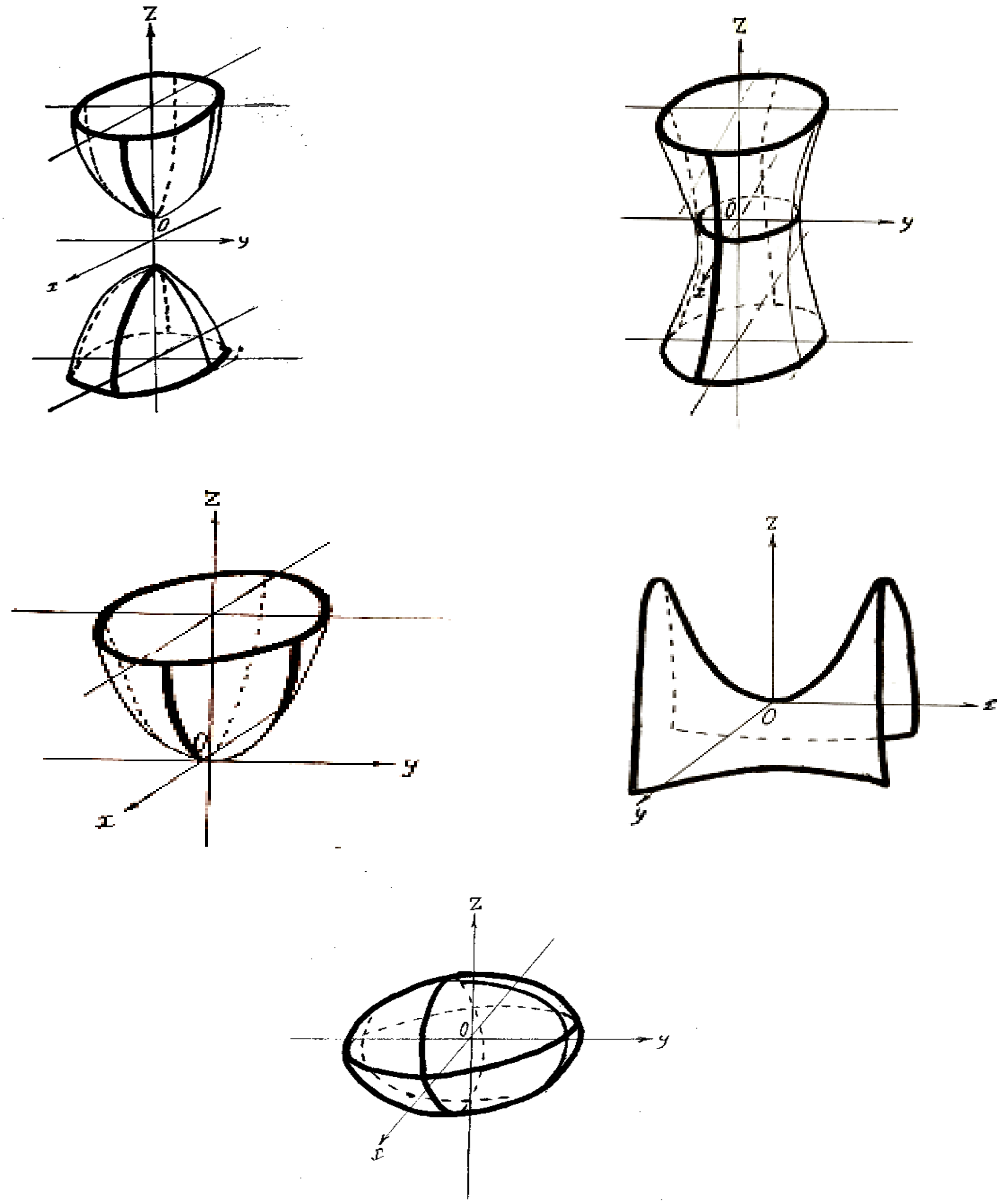
1–sizilma



2–sizilma

3-sizilma 4- sizilma

5- sizilma 6- sizilma



7- sizilma

$\lambda u + \mu v = 0$ ten'lemede $u = 0$ sfera ten'lemesi ha'm $v = 0$ tegislik ten'lemesi bolsa, $\lambda \neq 0$ sha'rtte sferani, yaki $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ sha'rtte tegislikti aniqlaydi. Eger olar kesilisse bul sfera $v = 0$ tegisliktin' sfera menen kesilisiw sizig'i arqali o'tedi.

Qadag'alaw ushin sorawlar:

1. To'mendegi sfera orayinin' koordinatalari ha'm radiusi aniqlansin.

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$,

2) $x^2+y^2+z^2+8x=0$,

3) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0,$

4) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0.$

2. To'mendegi shen'ber orayinin' koordinatalari ha'm radiusi aniqlansin.

$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0,\ 2x+2y+z+1=0.$

3. To'mendegi shen'berdin' orayi aniqlansin.

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ Ax+By+Cz+D=0$$

4. $A(3;0;4),\ B(3;5;0), C(3;4;4), D(5;4;6)$ noqatlardin' $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49$ *sferag'a* salistrgan jagdayi aniqlansin.

5. To'mendegi tegisliklerdin' usi $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$ sferag'a salistrg'an jag'dayi aniqlansin.

1) $2x+2y+z+2=0,$

2) $2x+2y+z+5=0,$

3) $2x+2y+z+11=0.$

6. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ sferanin' usi $x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$ *tuwri siziqg'a* ko'shpe bolg'an diametriyal tegisliktin' ten'lemesi duzilsin.

7. Usi $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=25$ sferanin' $M(3,5,1)$ noqatda ten' ekige bo'linetug'in xordanin'geometiriyaliq orni tabilsin.

8. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ sferanin' $S(x_0\ y_0\ z_0)$ noqatdan olardin' geometriyaliq orni tabilsin..

9. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ sferanin' $(-R,0,0)$ noqatdan o'tiwshi xordalarolardin' geometriyaliq orni tabilsin..

10. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ sferanin' $M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ noqatdan o'tiwshi xordalar olardin' geometriyaliq orni tabilsin..

11. $S(x_0\ y_0\ z_0)$ noqatdan $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferag'a o'tkerilgen urinba tegislikke tu'sirilgen perpendiklyar ultanlarinin' geometriyaliq orni tabilsin.

12. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$ sferag'a $M\ (7,\ -1,\ 5)$ noqatda o'tkizilgen urinba tegislik ten'lemesi du'zilsin.

13. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ sferag'a $M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ noqatda o'tkizilgen urinba tegislik ten'lemesi du'zilsin.

14. $x^2+y^2+z^2=R^2$ sferag'a $M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ noqatda o'tkizilgen urinba tegislik ten'lemesi du'zilsin.

15. $x^2+y^2=9,\ z=0$ va $x^2+y^2=25,\ z=2$ shen'berlerden o'tiwshi sfera ten'lemesi du'zilsin

16.Koordinatalar basinan ha'm $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=49,\quad 2x+2y-z+4=0$ shen'berden o'tetug'in sfera ten'lemesi du'zilsin

17. $(1,\ -2,\ 0)$ noqatdan ha'm $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=49,\ \ 2x+2y-z+4=0$ shen'berden o'tiwshi sfera ten'lemesi du'zilsin

18. Tuwri siziqlardin' baylamli S_1 ha'm bul baylamdag'i tuwri siziqlarg'a perpendikulyar bolg'an tegislikler baylamli S_2 berilgen. S_1 baylamlinin' tuwri siziqlari ha'm S_2 baylaminin' tegislikleri kesilisedi. Kesilisiw noqatlarinin' geometriyaliq orni tabilsin. S_1 baylam tegislikleri menen S_2 baylaminin' tegisliklerge perpendikulyar bolg'an Tuwri siziqlardin' kesilisken noqatlarinan payda bolg'an geometriyaliq orni alding'i geometriyaliq orninin' o'zinen ibaratlig'i da'lillensin.

19. Qanday zarurli $1,\ x=0\ \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ siziqlar boylap kesip o'tiwshi ellipsoid ten'lemesi du'zilsin

21. Ko'sherleri koordinata ko'sherlerinen ibarat, $z=0,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ ellips ha'm $M(1,\ 2,\ \sqrt{23})$ noqat arqali o'tiwshi ellipsoid ten'lemesi du'zilsin

22 Ko'sherleri koordinata ko'sherlerinen ibarat bolg'an ha'm $x^2+y^2+z^2=9,\ z=x$ shen'berden ha'mde $M(3,\ 1,1)$ noqatdan o'tken ellipsoid ten'lemesi du'zilsin

23. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1$ ellipsoidtin' $M(3,2,5)$ noqattindag'i urinba tegisligi ten'lemesi du'zilsin

24. $Ax+By+Cz+D=0$ tegisliginin' $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidqa uriniwi ushin za'rurli ha'm jeterli sha'rti tabilsin.

25. $Ax+By+Cz+D=0$ tegisliginin' $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid penen kesilisiwi ushin qanday sha'rtinin' orinlaniwi za'rurli ha'm jeterliq

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidtin' oraydan onin' urinba tegisligine tu'sirilgen perpendiklyar qasiyetlerinin' geometriyaliq orni tabilsin.

27. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidtin’ $Ax+By+Cz+D=0$ tegislik menen kesilisiw sizig’inin’ orayi tabilsin.

28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidtin’ $M(x_1, y_1, z_1)$ noqatda ten’ ekige bo’linetug’in xordalardin’ geometriyaliq orni tabilsin.

29. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ ellipsoidtin’ $\boldsymbol{a}(2,1,2)$ vektorg’a parallel, xordalari ten’ ekige bo’liwshi diametrial tegisliginin’ ten’lemesi du’zilsin

30. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidtin’ $P(x_0, y_0, z_0)$ noqatdan o’tiwshi xordasi olardin’ geometriyaliq orni aniqlansin.

31. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid penen $x^2+y^2+z^2=R^2$ sfera urinba tegisliklerinin’ kesilisiwinen payda bolg’an ellips oraylarinin’ geometriyaliq orni aniqlansin.

32. Ko’sherleri koordinata ko’sherlerine , $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoid penen $Ax+By+Cz+D=0$ tegisliginin’ kesilisiw sizig’inan o’tiwshi ellipsoid ten’lemesi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\lambda$ *(Ax+By+Cz+D ko’rinisinde boliwi aniqlansin*.

33. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ *-1-* λ $(Ax+By+Cz+D)=0$ ten’leme menen aniqlamg’an ellipsoidlar oraylarinin’ geometriyaliq orni tabilsin (λ– qa’legen ma’nislerin qabil qiladi).

34. Eki $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>b)$ ellipsoid qanday siziq boylap kesilisediq

35. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a>b>c)$ ellipsoidti shen’berler boyinsha kesip o’tetug’in ha’mme tegislikler ten’lemesi du’zilsin

36. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ellipsoidtin’ oraydan barliq noqatlarida og’an o’tkizilgen urinba tegisliklerge shekem bolg’an araliqlar *d* g’a ten’ bolatug’in noqatlardin’ geometriyaliq orni tabilsin.

37. 36-ma’seleni $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ ellipsoid ushin sheshin’.

38. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *(a>b>c)* ellipsoid do’ngelek bo’limlerinen duzilgen geometriyaliq orni tabilsin.

3-a’meliy shinig’iw: Siziqlar teoriyasi.

1-ma’sele. Vint sizig’i

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \quad (a>0, \quad b>0). \\ z = bt. \end{cases}$$

Ten’lemeler ja’rdeminde beriledi. Vint sizig’i ten’lemelerdin’ ta’biyg’iy parameter ja’rdeminde jazin’.

Sheshiliwi. Bunin’ ushin aldin ala vint sizig’i ushin dog’a uzinlig’in esaplaymiz ($M_1(0)$ ha’m $M_2(t)$ noqatlar menen chegaralangan dog’a uzinlig’i)

$$S=\int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t.$$

bul jerden $t=\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}$ di tabin’,

$$\begin{cases} x = a\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = a\sin\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}S \end{cases}$$

Ten’lemelerdi payda etemiz. Tekseriw ushin

$$\begin{cases} \dot{x}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dot{y}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dot{z}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Tuwindilarin esaplap,

$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$ ni payda etemiz.

2-ma'sele. Yarim shen'ber

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \quad (0 \le t \le \pi) \end{cases}$$

Ten'lemeler menen berilgen bolsa, ol tabiug'iy parameter menen berilgenligin ko'rsetin'.

Sheshiliwi. Dog'a uzinlig'in esaplaymiz.

$$s = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = t$$

ha'm ten'likdi payda etemiz. Demek, $t = s$ parametir tabiyg'iy parametiri boladi.

3-ma'sele. Siziq

$$\begin{cases} x^3 = 3a^2 y \\ 2xz = a^2 \quad (a \ne 0). \end{cases}$$

ten'lemeler menen berilgen bolsa, bul siziqtin' $y = \frac{a}{3}$ ha'm $y = 9a$ tegislikler menen shegeralang'an dog'anin' uzinlig'in tabin'.

Sheshiliwi. Aldinnan bul tegislikler menen berilgen siziq bir ma'rteden kesilisedi. Birinshi $y = \frac{a}{3}$ tegislik menen kesilisiw noqati $M_1(a, \frac{a}{3}, \frac{a}{2})$, ekinshi $y = 9a$ tegislik penen kesilisiw noqati $M_2(3a, 9a, \frac{a}{6})$.

Endi siziqtin' parametirik ten'lemelerin

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \dfrac{1}{3a^2} t^3 \\ z = \dfrac{a^2}{2t} \end{cases}$$

Ko'rinisinde jazip, dog'a uzinliqlarin esaplan'.

$$S = \int_a^{3a} \sqrt{1^2 + \frac{t^4}{a^4} + \frac{a^4}{4t^4}}\,dt = \int_a^{3a} \sqrt{\frac{4a^4t^4 + 4t^8 + a^8}{4a^4t^4}}\,dt = \int_a^{3a} \frac{\sqrt{(a^4 + 2t^4)^2}}{2a^2t^2}\,dt =$$

$$= \int_a^{3a} \frac{a^4 + 2t^4}{2a^2t^2}\,dt = \frac{a^2}{2}\int_a^{3a} \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{a^2}\int_a^{3a} t^2 dt = \frac{a^2}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_a^{3a} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_a^{3a} =$$

$$= -\frac{a}{6} + \frac{a}{2} + 9a - \frac{a}{3} = \frac{-a + 3a - 2a}{6} + 9a = 9a.$$

Qadag'alaw ushin sorawlar:

1. $x = t,\ y = t^2\ \ z = t^3$ siziqtin' $t = 1$ noqatdag'i binormal ten'lemesin duzin'
2. $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 - 2$ ten'leme menen berilgen iymek siziqqa qaysi noqatlar tegishliq
3. $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 - 2$ ten'leme menen berilgen iymek siziq Oxy Koordinatalar sistemasinin' Ox ko'sheri menen qaysi noqatlarda kesilisediq
4. $x = t^3 - 2t,\ y = t^2 - 2$ ten'leme menen berilgen iymek siziq Oxy Koordinatalar sistemasinin' Oy ko'sheri menen qaysi noqatlarda kesilisediq
5. $x = t^2 - t + 1,\ y = t^2 + t + 1$ ten'leme menen berilgen siziqtin' obrizin tabin'q
6. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ ten'leme menen berilgen iymek sizig'inin' $x_1 = 1$ ha'm $x_2 = 4$ noqatlari arasindag'i dog'anin' uzinlig'in tabin'q

Paydalang'an a'debiyatlar:

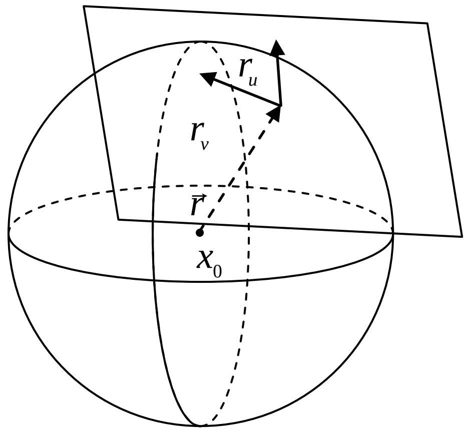
1. Izu Vaisman Analytical Geometry World Scientific 1997
2. Narmanov A. Ya. Analitik geometriya.T. Ozbekiston Respublikasi faylasuflar milliy jamiyati nashriYoti, 2008 y.
3. Postnikov M.M. Lektsii po geometrii. Semestr 1. M., Nauka, 1983.
4. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar toplami T. Universitet, 2006.
5. İlin V.A., Poznyak E.G. Analiticheskaya geometriya M. Nauka, 1981.
6. Sbornik zadach po differentsiyalnoy geometrii. Pod red. Fedenko A.S. M., 1979.

4-a'meliy shinig'iw: Betler teoriyasi.

Misal ha'm ma'seleler sheshiliwi u'lgileri.

Ma'sele. Bizge tegislikdegi qandayda bir G ma'nisinde aniqlang'an differentsiyalaniwshi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funktsiya berilgen bolsin. Berilgen $\vec{r}(u,v)$ vektor-funktsiyanin' uzinlig'i o'zgermes boliwi ushin, $(\vec{r},\vec{r}_u) = (\vec{r},\vec{r}_v) = 0$ ten'liklerdin' orinlaniwi za'rur ha'm jeterliligin aniqlan' (1-rasm).

Sheshiliwi. Za'rurligi. Aniqlamani za'rurliligin aniqlaw ushin $|\vec{r}|^2=(\vec{r},\vec{r})$ ten'likden paydalanamiz. Berilgen vektor-funktsiyanin' uzinlig'i o'zgermes bolsin dep esaplayiq, yag'niy $|\vec{r}(u,v)|=const$ ten'lik orinlansin.



1-sizilma

Ol jag'dayda

$$0=\frac{d}{du}\left|\vec{r}\right|^2=\frac{d}{du}(\vec{r},\vec{r})=2(\vec{r},\vec{r}_u)\,;\ 0=\frac{d}{dv}\left|\vec{r}\right|^2=\frac{d}{dv}(\vec{r},\vec{r})=2(r,\vec{r}_v)$$

ten'liklerden usi $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ ten'likler kelip shig'adi.

Jeterliligi. Endi $\vec{r}\perp\vec{r}_u,\ \vec{r}\perp\vec{r}_v$ bolsin dep esaplayiq. Ol jagdayda

$$\frac{d}{du}\left|\vec{r}\right|^2=2(r,\vec{r}_u)=0,\ \frac{d}{du}\left|\vec{r}\right|^2=2(r,\vec{r}_v)=0$$

ten'liklerden $\left|\vec{r}(u,v)\right|$ funktsiyanin' o'zgermes ekenligi kelip shig'adi. Ma'sele toliq sheshildi.

Ma'sele. Tegislikdegi qandayda bir G oblista aniqlang'an differentsiyalaniwshi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funktsiyanin' $\vec{r}_u,\ r_v$ vektorlarinin' ekewide kollinear boliwi ushin onin' bag'iti o'zgermes ekenliginen ten' ku'shli ekenligi kelip shig'adi.

Sheshiliwi. Eger $\vec{r}(u,v)$ vektor-funktsiyanin' bag'dari o'zgermes bolsa, oni $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{e}$ ko'riniste jaziw mu'mkin. Bul jerde $\lambda(u,v)-$ skslyar funktsiya bolip, $\vec{e}-$o'zgermes birlik vector bolip esaplanadi. Bul ko'rinisten $\vec{r}_u=\lambda_u(u,v)\vec{e},$ $\vec{r}_v=\lambda_v(u,v)\vec{e}$ ten'liklerdi payda etemiz.

Demek, $\vec{r}(u,v)$ vektor $\vec{r}_u,\ \vec{r}_v$ vektordin' ekewine de kollinear bolip esaplanadi.

Endi $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{r}_u$, $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{r}_v$, ten'likler orinli dep oylap, $\vec{e}(u,v)=\dfrac{\vec{r}(u,v)}{|\vec{r}(u,v)|}$ vektordin o'zgermes vektor ekenligin korseteyik. Bunin ushin $\dfrac{d}{du}\vec{e}=\vec{0}$, $\dfrac{d}{dv}\vec{e}=\vec{0}$ ten'liklerdi dalilleymiz. Bolinbenin tuwindisi formulasinan mina ten'likke,

$$\frac{d}{du}\vec{e}=\frac{\vec{r}_u|\vec{r}|-\vec{r}\,\dfrac{(\vec{r},\vec{r}_u)}{|\vec{r}|}}{|\vec{r}^2|}=\frac{\vec{r}_u|\vec{r}|^2-\vec{r}(\vec{r},\vec{r}_u)}{|\vec{r}|^3}=\frac{\lambda^2|\vec{r}_u|^2\vec{r}_u-\lambda^2|\vec{r}_u|^2\vec{r}_u}{|\vec{r}|^3}=\vec{0},$$

tap sog'an uqsas

$$\frac{d}{dv}\vec{e}=\frac{\mu^2|\vec{r}_v|^2\vec{r}_v-\mu^2|\vec{r}_v|^2\vec{r}_v}{|\vec{r}|^3}=\vec{0}$$

ten'likti alamiz. Bulardan bolsa aldingi maselege tiykarlanip $\vec{e}$ birlik vektordin ozgermesligi kelip shigadi.

Demek, $\vec{r}(u,v)=|\vec{r}(u,v)|\vec{e}$ bolip, $\vec{r}$ vektordin bagdari ozgermes bolip esaplanadi.

Ma'sele. Qandayda bir G oblistda aniqlangan differentsiyalaniwshi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funktsiyanin ayriqsha qasiyetleri $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ vektorlar nol vector boliwi $\vec{r}(u,v)$ vektor-funktsiyanin o'zgermes vektor boliwina ten kushli ekenligin korsetin.

Sheshiliwi. Ayriqsha tuwindilar ushin

$$\vec{r}_u=\vec{0},\ \vec{r}_v=\vec{0}$$

ten'likler orinli bolsa, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funktsiyanin koordinata funktsiyalari ushin

$$x_u=0,\quad x_v=0$$
$$y_u=0,\quad y_v=0$$
$$z_u=0,\quad z_v=0$$

ten'liklerdi payda etemiz.

Demek, $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ funktsiyalar o'zgermes funktsiyalar bolip esaplanadi. Bulardan bolsa

$$\vec{r}(u,v)=\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)\}$$

Vektordin o'zgermes ekenligi kelip shig'adi.

Kerisinshe, $\vec{r}(u,v)$ vektor-funktsiyanin o'zgermes vektor ekenligi $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$ funktsiyalar o'zgermes boliwi kelip shig'adi. Budan bolsa

$$\vec{r}_u=\vec{0},\ \vec{r}_v=\vec{0}$$

ten'likler payda boladi.

Qadag’alaw ushin sorawlar:

1. Berilgen vektor funktsiyalar ushin $\lim\limits_{M\to M_0} \vec{r}_i(M) = \vec{a}_i \quad (i = 1,2,3)$, $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = \lambda$ qatnaslar belgili bolsa, minalardi aniqlan’:

1. $\lim\limits_{M\to M_0} (\vec{r}_1(M) \pm \vec{r}_2(M)) = \vec{a}_1 \pm \vec{a}_2;$ **2.** $\lim\limits_{M\to M_0} (f(M)\vec{r}_1(M)) = \lambda\vec{a}_1;$

3. $\lim\limits_{M\to M_0} (\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M)) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2);$ **4.** $\lim\limits_{M\to M_0} [\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M)] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2];$

5. $\lim\limits_{M\to M_0} (\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M), \vec{r}_3(M)) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3).$

2. Vektor funktsiyanin uzliksizligi onin komponentalarinin uzliksizligine ten kushli ekenligin aniqlan’.

3. Berilgen $\vec{r} = \vec{r}(M)$ vektor funktsiyanin uzliksizliginen $|\vec{r}| = |\vec{r}(M)|$ funktsiyanin uzliksizligi kelip shig’amaq Kerisinshesi orinlimaq

Mina $\vec{r}_i(M)$ vektor funktsiyalardin ha’m $f(M)$ funktsiyanin M_0 noqatda uzliksizliginen mina:

4. $\vec{r}_1(M) \pm \vec{r}_2(M)$;**9.** $(\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M))$;**10**. $f(M)\vec{r}_1(M)$;**11**. $[\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M)]$;

5. $(\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M), \vec{r}_3(M))$ funktsiyalardinuzliksizligi kelip shig’adimaq

6. Vektor funktsiyanin siypaqligi onin payda etiwshilerinin siypaqligina ten kushli ekenligin aniqlan’.

7. Vektor funktsiya ushin $\vec{r}^{(k)}(t) = \left(x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t)\right)$ qatnas orinli ekenin aniqlan’.

Berilgen $\vec{r}_i : I \to R^3$ vektor funktsiya ha’m C^1 klassina tiyisli $f : I \to R$ funktsiya ushin tomendegi qatnaslardi aniqlan’:

8. $(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \pm \vec{r}_2{}';$

9. $(f\,\vec{r})' = f'\vec{r} + f\,\vec{r}';$

10. $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = \left(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2\right) + \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2{}'\right);$

11. $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = \left[\vec{r}_1{}', \vec{r}_2\right] + \left[\vec{r}_1, \vec{r}_2{}'\right];$

12. $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)' = (\vec{r}_1{}', \vec{r}_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2{}', \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3{}').$

Tomendegi bir ozgeriwshili vektor funktsiyalardin tuwindilarin tabin’:

13. $\vec{r}^{\,2};$

14. $\vec{r}\,'^{2};$

15. $[\vec{r}\,', \vec{r}\,''];$

16. $(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''');$

17. $[[\vec{r}\,', \vec{r}\,''], \vec{r}\,'''];$

18. $\sqrt{\vec{r}^{\,2}}$.

19. Ellipstin qalegen *M* noqatina o’tkizilgen urinba sol noqattagi fokal radiuslar payda etken muyesh bissektrisasi boliwin aniqlan’.

Paydalang'an a'debiyatlar:

1. Izu Vaisman Analytical Geometry World Scientific 1997

2. Narmanov A. Ya. Analitik geometriya.T. Ozbekiston Respublikasi faylasuflar milliy jamiyati nashriYoti, 2008 y.

3. Postnikov M.M. Lektsii po geometrii. Semestr 1. M., Nauka, 1983.

4. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar toplami T. Universitet, 2006.

5. İlin V.A., Poznyak E.G. Analiticheskaya geometriya M. Nauka, 1981.

6. Sbornik zadach po differentsiyalnoy geometrii. Pod red. Fedenko A.S. M., 1979.

V. KEYSLER BANKI

Ekinshi tartipli siziqlardan qaysi biribizdin kursimizda kiritilgen maniste siziq boliwin teksereyik.

Sizge belgili, ekinshi tartipli siziq

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (2)$$

ten'leme menen aniqlanadi. Eger

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

determinant nolden ozgeshe bolsa, (2) ten'leme jalgiz orayga iye bolg'an ekinshi tartipli siziqti aniqlayidi. Bunday siziqlar orayliq siziqlar dep ataladi.

Orayliq siziqlar ellips, giperbola ha'm eki kesilisiwshi tuwri siziqlardan ibarat boladi. Bulardan ellips a'piwayi siziq boladi. Giperbola bolsa eki elementar siziqtan ibarat.Eki kesiliwshi tuwri siziqlar bolsa biz kiritken ma'niste bir siziq bolmaydi.

Eger $\delta=0$ bolsa, ekinshi ta'rtipli siziq yaki orayg'a iye bolmaydi, yaki sheksiz ko'p orayg'a iye boladi. Demek bul jag'dayda, (2) ten'leme parabola,eki parallel tuwri siziq yaki ustpe-ust tusiwshi eki tuwri siziqlardan qandayda birewin aniqlaydi.

Parabolanin' kanonik ten'lemesi

$$y'^2=2px', \qquad p>0$$

ko'rinisinde boladi. Demek, parabola

$$x'=\frac{y'^2}{2p}$$

funktsiyanin' grafigi ha'm elementar siziqlar. Eki parallel tuwri siziqlar bolsa eki elementar siziqtan, ustpe-ust tusiwshi tuwri siziqlar bolsa bir elementar siziqtan ibarat.

2. Parabolanin' reguliyar siziq ekenligin da'lilleyik. Bulnin' ushin onin' ten'lemesin

$$y^2=2px, \qquad p>0$$

kanonik ko'rinisinde jazamiz. Eger y=t ten'lik penen parametir kiritsek, parabola

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2p}, \\ y=t. \qquad -\infty<t<+\infty \end{cases}$$

Parameter ten'lemelerge iye boladi. Bul jerde

$$x'^2+y'^2=\frac{t^4}{4p^2}+1>0$$

bolg'anlig'i ushin parabola sheksiz ko'p ma'rte differentsiyalaniwshi reguliyar siziq boladi.

3. Bizge $y' = ky$ differentsiyal ten'leme berilgen bolsin. Onin' sheshimi $y' = Ce^{kx}$ ko'rinisinde boladi. Sheshimnin' grafigi

$$\begin{cases} x = t, \\ y = Ce^{kt}. \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

parametir ten'lemelerge iye bolg'an reguliyar siziq boladi.

4. Tegislikda

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

parametir ten'lemeler menen berilgen siziq reguliyar emes, sonday ol $M(t=0)$ noqat a'trapinda reguliyar parametrlew usilina iye emes.

5. Tegislikte

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

parametir ten'lemeler menen berilgen siziq uliwma siziq boladi, sonday $M_1(t=-1)$ ha'm $M_2(t=1)$ noqatlar tegislikte ustpe-ust tu'sedi. Bul uliwma siziq

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

ten'lemeler menen aniqlang'an elementar siziqtin'

$$f(t) = (t^2 - 1, \quad t^3 - t)$$

formula menen aniqlang'an $f : \gamma \to R^2$ lokal tapalogiyaliq sawlelendiriwdegi obrizi boladi (4-sizilma).

6. Bernulliy lemniskatasi (3-sizilma). Tegislikde ha'r birinen berilgen F_1 ha'm F_2 noqatlarg'a shekem bolg'an araliqlardin' ko'beymesi F_1 ha'm F_2 noqatlar arasindag'i araliq yariminin' kvadratina ten' bolg'an noqatlar ko'pligi Bernulliy lemniskatasi dep ataladi. Bernulliy lemniskatasinin' uliwma siziq ekenligin ko'rsetemiz. Bunin' ushin tegislikde OX ko'sheri spatinda $F_1\,F_2$ tuwri siziqti, OY ko'sheri spatinda $F_1\ F_2$ kesindi ortasinan o'tiwshi ha'm OX ko'sherine perpendikuyar tuwri siziqti alip, $|F_1F_2| = 2C$ belgilew kiritemiz. Sonda Bernulliy lemniskatasina tiyisli qa'legen $M(x, y)$ noqat ushin

$$\sqrt{(x+C)^2 + y^2}\sqrt{(x-C)^2 + y^2} = C^2$$

ten'lik orinli boladi. Bul ten'liktin' kvadratina ko'terip a'piwayilastiriwlar na'tiyjesinde, to'mendegi ten'lemeni payda etemiz.

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2C^2(y^2 - x^2) = 0.$$

Endi $x = \rho\cos\varphi$, $\quad y = \rho\sin\varphi$ formulalar ja'rdeminde qubla Koordinatalar sistemasina o'tsek

$$\rho^2 = 2C^2 \cos^2 \varphi$$

ten'leme payda etemiz. Endi bul siziqtin' uliwma siziq ekenligi

$$\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

ten'lemeler menen aniqlang'an shen'berdin'

$$f : M(\varphi) \to (C\sqrt{2\cos^2\varphi}, \varphi)$$

formula ja'rdeminde aniqlang'an lokal tapalogiyaliq sawlelendiriwdegi obrizi Bernulliy lemniskatasi menen ustpe-ust tu'siwden kelip shig'adi.

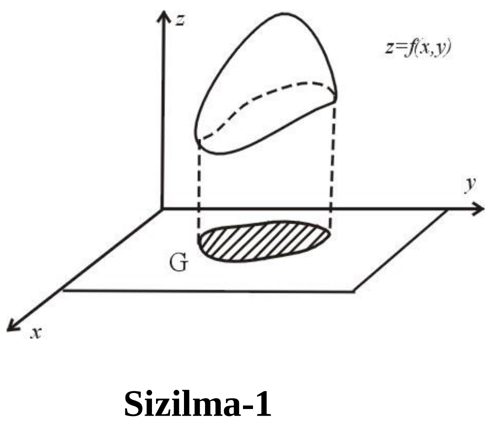
1) Ha'r qanday tegislik elementar beti boladi, sonday tegislik do'ngelekkge gomeorfir boladi.

Eger M(x_0,u_0,z_0) tegislik noqati, $\vec{a}$ ha'm $\vec{b}$ vektorlar tegislikge parallel bolsa, oni

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,u + \vec{b}\,v, \quad -\infty < u < +\infty, \ -\infty < v < +\infty$$

Ko'riniste parametrlew mumkin. Bul jerde $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ - M noqatnin' radius vektori boladi.

2) Elementar G -ma'nisinde aniqlang'an $z = f(x,y) -$ u'zliksiz funktsiya grafigi elementar beti boladi. Sebebi, $(x, y, f(x,y)) \to (x,y) -$ sawlelendiriw (proektsiya) gomeorfizim boladi.



Sizilma-1

3) Eki o'lshemli sfera S^2 elementar bolmag'an a'piwayi beti boladi. R raduisli sfera S^2 nin' orayina Koordinatalar basina jaylastirsaq, oni $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ ko'plik spatinda qarawimiz mumkin. S^2 nin' bet ekenligin da'lillew ushin og'an tiyisli qandayda bir R ni alayiq.

R dan pariqli S noqatin janubiy qutb sipatinda, og'an diametrik qarama-qarsi bolg'an N noqatin shimoliy qutb esaplan', z ko'sherin koordinata basinan N noqat arqali o'tkizemiz, Oxu tegisligi bolsa O noqattan o'tiwshi ha'm ON ga perpendikuyar tegislik boladi.

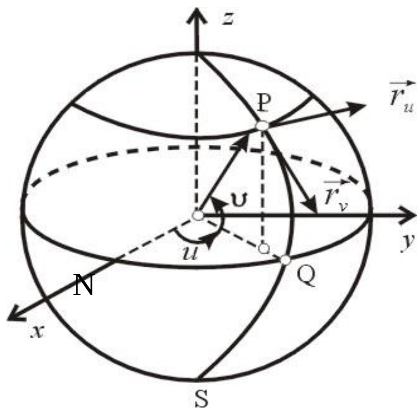
Bul tegislik ha'm sfera kesilisiwinen payda bolg'an shen'berdin' ekvator dep ataymiz. Endi u menen 0Q nur ha'm 0x ko'sheri arasindag'i muyeshti, v menen 0P ha'm 0Q nurlar arasindag'i muyeshti belgileymizZ.

Bul jerde Q - NPS medirananin' ekvator menen kesilisiw noqati boladi, $0 < u < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$.

Sonda S^2 nin' NS - meridian shig'arip taslag'an bo'legi $\varphi\!:\!P \to (u,v)$ sawlelendiriw ja'rdeminde $]0;2\pi[\times\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ elementar bo'legine gomeomorf sawlelendiredi ha'm

$$x = R\cos u\cos v,\ \ y = R\sin u\cos v,\ \ z = \sin v$$

ten'lemeler ja'rdeminde parametrlenedi.



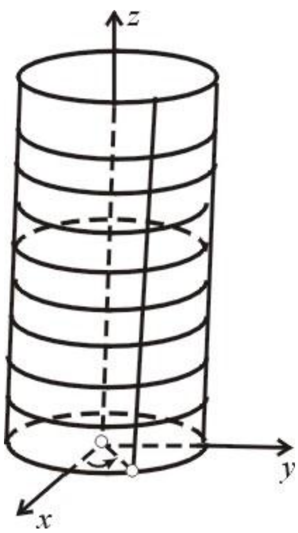
Sizilma-2

4)do'ngelek tsilindrdin' parametir ten'lemeleri

$$x = R\cos u,\ y = R\sin u,\ z = v.$$

ko'rinisinde boladi. Bul jerde -∞<u<+∞, -∞<v<+∞.

A'lbette tsilindr ha'm elementar bet emes.



Sizilma-3

VI. PITKERIW JUMISI TEMALARI

1. Tegislikte ekinshi ta’rtipli sızıqlar. Konuslıq kesimler.
2. Ekinshi ta’rtipli sızıqlardın’ ulıwma ten’lemeleri.
3. Asimptotikalıq h’a’m assimptotikalıq emes bag’ıtlar.
4. Ekinshi ta’rtipli sızıqlardın’ ulıwma ten’lemelerin a’piwayılastırıw.
5. Ekinshi ta’rtipli betlikler.
6. Tuwrı sızıqlı betlikler.
7. İymek sızıqlar, olardın’ beriliw usılları.
8. İymek sızıqtın’ a’piwayı h’a’m ayrıqsha tochkaları.
9. İymek sızıqlı koordinatalar sisteması.
10. Betliklerdin’ beriliw usılları. Betlikte jatıwshı iymek sızıqlar.
11. Betliktin’ urınba tegisligi h’a’m normalı. Urınba vektor, onın’ koordinataları.
12. Betliktin’ ekinshi kvadratlıq forması. Betliktn’ normal iymekligi.
13. Bas iymeklikler h’a’m bag’ıtlar. Eyler formulası.
14. Betlik tochkalarının’ klassifikatsiyası.

VII. GLOSSARİY

Termin	O’zbek tilindegi kommentariyası	İnglis tilindegi kommentariyası
Analitikalıq geometriya	Ekinshi ta’rtipli sızıqlar h’a’m betliklerdi u’yreniwshi pa’n	the subject which studies second order lines and second order surfaces
ekinshi ta’rtipli sızıqtın’ orayı	ekinshi ta’rtipli sızıqtın’ simmetriya orayı	symmetry center of the second order line
ekinshi ta’rtipli sızıqtın’ diametri	parallel xordalar ortalarınan o’tiwshi tuwrı sızıq	The line which through centers of parallel hords
Konuslıq kesimler	Konustı tegislik penen kesiw na’tiyjesinde payda bolg’an ekinshi ta’rtipli sızıqlar	Second order lines which are intersection of the cone and plane
differentsial geometriya	Differentsiallanıwshı funktsiyalar ja’rdeminde parametrlengen sızıqlar h’a’m betliklerdi u’yreniwshi pa’n	the subject which studies curves and surfaces, parametrized by differentsiable functions
elementar iymek sızıq	Ashıq intervaldın’ topologiyalıq (gomeomorf) sa’wlelendiriwdegi obrazı	The image of open segment under topological (gomeomorf) mapping
a’piwayı iymek sızıq	o’zine tiyisli h’a’r qanday tochkanın’ bazıbir do’gereginde elementar iymek sızıq bolatug’ın baylanıslı ko’plik	Connected set which is a elementary curve in some neighborhood of any point
Topologiya	Geometriyalıq obektlerdin’ topologiyalıq qa’siyetlerin u’yreniwshi pa’n	the subject which studies topological properties of geometric objects
Geodeziyalıq sızıq	Betliklerde evklid geometriyasındag’ı tuwrı sızıqlardın’ analogi	It is analog of strigth line of Euclidean geometry
Topologiyalıq qa’siyetler	Geometriyalıq figuralardın’ gomeomorf sa’wlelendiriwde saqlanatug’ın qa’siyetleri	Properties of geometric figures which is preserved under homeomorf mappings
Betliktin’ bag’ıt boyınsha normal iymekligi	berilgen bag’ıtqa parallel h’a’m betlikti tik kesiwshi tegislik penen kesiw ja’rdeminde payda bolg’an	The curvature of a curve which is normal section

	sızıqtın’ iymekligi	
Puankare gipotezası	Kompakt shegarasız bir baylanıslı u’sh o’lshemli betlik u’sh o’lshemli sferag’a gomeomorf	simply connected compact three-dimensional manifold without boundary is homeomorphic to the three-dimensional sphere
G.Ya.Perelman	Puankare gipotezasın sheshken Sankt-Peterburglı matematik	Mathematician from Saint Petersburg who solved Puankare hypothesis
Gromol-Chiger gipotezası	Ha’r qanday teris emes iymeklikli tolıq kompakt emes betlik o’z qa’lbinin’ normal qatlamasına diffeomorf	complete non-compact surface of negative curvature is diffeomorphic to the normal bundle of its soul

VIII. A’debiyatlar dizimi

A’debiyatlar.

1. Narmanov A.Ya. Analitik geometriya. T., “Wzbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriYoti”, 2008 y.
2. Izu Vaisman.Analytical geometry.World scientific.2007.
3. D. Gromoll, G. Walschap. Metric Foliations and Curvature. Progress in Mathematics Volume 268, 2009, ISBN: 978-3-7643-8714-3 , 1-80 betlar
4. B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov Modern Geometry Methods and Applications: Part I,II Germany, 1992, English
5. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Universitet, 2003
6. Narmanov A.Ya., Sharipov A.S.,Aslonov J.Differentsial geometriya va topologiya fanidan dan mashq va masalar twplami. T. Universitet, 2014
7. Materialı mejdunaorodnoy konferentsii «Geometriya v Odesse-2014». Odessa, Ukraina. 2014
8. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001
9. Mishenko A.S., Fomenko A.T. Kurs differentsialnoy geometrii i topologii. M., izd. MGU,2004
10. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar twplami. T,Universitet, 2006
11. Blyashke V. Vvedenie v differentsialnuyu geometriyu. - 2-e izd., ispravl. - İjevsk: İzdatelskiy dom «Udmurtskiy universitet». 2000 -212 s.
12. Taymanov İ. A. Lektsii po differentsialnoy geometrii. — İjevsk: İnstitut kompyuternıx issledovaniy, 2002. - 176 str. ISBN 5-93972-105-2
13. Mishenko A. S, Solovev Yu. P., Fomenko A. T. Sbornik zadach po differentsialnoy geometrii i topologii: Ucheb. posobie dlya vuzov.— 2-e izd., pererab. i dop.—M.: İzdatelstvo fiziko-matematicheskoy literaturı, 2004.—412 s— ISBN 5-94052-078-2.

Tsuberbiller O. N. Zadachi i uprajneniya po analiticheskoy geometrii. 31-e izd., ster. — SPb.: İzdatelstvo «Lan», 2003. — 336s. il. — Uchebnik dlya vuzov.