ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ
JOQARI HÁM ORTA ARANAWLÍ BILIM MINISTRLIGI

JOQARI TÁLIM SISTEMASI BASSHI HÁM PEDAGOG KADRLARIN QAYTA TAYARLAW HÁM OLARDIŃ QÁNIYGELIGIN JETILISTIRIWDI SHÓLKEMLESTIRIW BAS ILIMIY-METODIKALIQ ORAYI

BERDAQ ATINDAǴI QARAQALPAQ MÁMLEKETLIK UNIVERSITETI QASÍNDAǴÍ PEDAGOG KADRLARDÍ QAYTA TAYARLAW HÁM OLARDIŃ QÁNIGELIGIN JETÍLÍISTÍRÍW AYMAQLÍQ ORAYÍ

"ALGEBRALIQ SISTEMALAR" MODULI BOYÍNSHA

O Q Í W –M E T O D I K A L Í Q K O M P L E K S

Nókis – 2017

Bul oqıw-metodikalıq kompleks Joqarı hám orta arnawlı bilim ministrliginiń 2017 jıl 24-avgustdag'I MO 603-3-18-sanli buyrıǵı menen tastıyıqlanǵan oqıw reje hám dástúr tiykarında tayarlandı.

Dúziwshi: **docent X.S.Allambergenov**

Pıkir bildiriwshi: **docent A.Omarov**

Oqıw-metodikalıq kompleks QQMU dıń 2017-jıl 31-avgustdaǵı 1-sanlı qararı menen baspaǵa usınıldı

MAZMUNI

I. ISSHI BAĞDARLAMA 4
II. MODULDI OQÍTÍWDA PAYDALANÍLATUĞÍN INTERAKTIV TÁLIM METODÍ 10
III. TEORIYALÍQ MATERIALLAR 12
IV. ÁMELIY SABAQLAR 56
V. KEYSLER BANKI 71
VI. ÓZBETINSHE TÁLIM TEMALARÍ 72
VII. GLOSSARIY 73
VIII. ÁDEBIYATLAR DIZIMI 75

I. ISSHI BAĞDARLAMA

Kirisiw.

Bul bağdarlama Ózbekistan Respublikası Prezidentiniń 2015 jıl 12 iyundaǵı "Joqarı oqıw orınlarınıń basshı hám pedagog kadrların qayta tayarlaw hám qánigeligin arttırıw sistemasın jánede jetilistiriw is-ilajları haqqında" ǵı PQ-4732-sanlı Qararındaǵı tiykarǵı bağdarlar mazmunınan kelip shıqqan halda dúzilgen bolıp, ol zamanagóy talaplar tiykarında qayta tayarlaw hám qánigeligin arttırıw protsessiniń mazmunın jetilistiriw hámde joqarı oqıw orınları pedagog kadrlarınıń kásiplik kompetentligin turaqlı asırıp barıwdı maqset etedi.

Jámiyet rawajlanıwı tek ǵana mámleket ekonomikalıq potentsialınıń joqarılıǵı menen, bálki bul potentsial hár bir insannıń kamal tabıwı hám rawajlanıwına qanshelli bağdarlanǵanlıǵı, innovatsiyalardı qollanılǵanlıǵı menen de ólshenedi. Demek, tálim sisteması nátiyjeliligin asırıw, pedagoglardı zamanagóy bilim hámde ámeliy kónlikpe hám uqıplılıqlar menen qurallandırıw, shet ellerdiń aldıńǵı tájiriybelerin úyreniw hám tálim protsessine qollanıw búgingi kúnnin eń áxmiyetli wazıypası esaplanıladı. "Algebralıq sistemalar" moduli áne usı bağdardaǵı máselelerdi sheshiwge qaratılǵan.

«Algebralıq sistemalar» kursınıń maqseti tıńlawshılardı zamanagóy algebralıq sistemalar hám olardı oqıtıwdıń zamanagóy texnologiyaları, tálimdegi innovatsiyalar menen tanıstırıw hám bul innovatsiyalar hám texnologiyalardan sheberlik penen paydalanıw uqıplılıǵın qaliplestiriwden ibarat.

Moduldiń maqseti hám wazıypaları:

"**Algebralıq sistemalar**" **moduliniń maqseti:** matematika bağdarı boyınsha pedagog kadrlardı qayta tayarlaw hám qánigeligin arttırıw kursı tıńlawshıların algebranıń rawajlanıp atırǵan zamanagóy tarawların oqıtıwdaǵı zamanagóy pedagogikalıq hám innovatsiyalıq texnologiyalar, modullı texnologiyalar haqqındaǵı bilimlerin jetilistiriw, bundaǵı mashqaalalardı anıqlaw, analiz etiw hám bahalaw. Ilimiy izertlew nátiyjelerin úyreniw hám ámelde qollay alıw kónlikpe hám uqıplılıqların qáliplestiriw.

"Algebralıq sistemalar" moduliniń wazıypaları:

- Tıńlawshılarǵa matematikanıń jańa ilimiy tarawları hám bul tarawlardaǵı alınǵan nátiyjeler analizi, kelip shıǵıw tariyxı haqqında maǵlıwmatlar beriw, zamanagóy modulli texnologiyalardan paydalanıp tıńlawshılardı bul tarawda qánigeligin asırıwǵa kómeklesiw;
- Tálim-tárbiya protsessinde modulli texnologiyalardı qollawdıń kólaylılıqların jarıtıw hám tıńlawshılarda olardan paydalanıw texnologiyaları menen tanıstırıw;
- Matematikanıń rawajlanıw tendentsiyaların analiz etiw hám joqarı mamanlı qánige kadrlar tayarlaw boyınsha reformalardı ámelge asırıw protsessinde aldıńǵı shet el tájiriybesin úyreniw, olardan únemli paydalanıw sheberligin qáliplestiriwden ibarat.

Modul boyınsha tıńlawshılardıń bilimi, kónlikpesi, uqıplıǵı hám kompetentsiyalarına qoyılatuǵın talaplar:

“**Algebralıq sistemalar**” modulin ózlestiriw barısında ámelge asırılatuǵın máseleler sheńberinde**:**

Tıńlawshı:

- modul, modulli oqıtıw, kredit, reyting túsinigi;
- texnologiyalastırıw qaǵıydaları, printsipler;
- qadaǵalaw barısın shólkemlestiriw;
- interaktiv texnologiyalar hám olardan únemli paydalanıw haqqında **bilimlerge** iye bolıwı lazım;

Tıńlawshı:

- pedagogikalıq iskerligin modullestiriw;
- qadaǵalaw protsessin tez hám únemli ótkere alıw;
- qadaǵalawdıń hár qıylı túrlerinen únemli paydalanıw;
- interaktiv metodlardı maqsetli túrde durıs tańlaw hám paydalanıw ***kónlikpelerin*** iyelewi lazım;

Tıńlawshı:

- oqıw kursınıń modulin dúziw;
- materiallardı strukturalastırıw;
- talabalardıń ózbetinshe ámeliy iskerligin shólkemlestiriw;
- kiriw hám shıǵıw qadaǵalawın shólkemlestiriw erisilgen nátiyjelerdi analiz etiw;
- interaktiv metodlardan paydalanıw **uqıplılıqların** iyelewi lazım;

Tıńlawshı:

- óz tarawına tiyisli maǵlıwmatlardı logikalıq bloklarǵa ajıratıw hám anıq, túsinikli bayan etiw;
- modulli jandasıw tiykarında oqıw protsessin shólkemlestiriw;
- texnologiyalıq jandasıw tiykarında tálim hám tárbiya protsessin basqarıw;
- kommunikativlikti hám ózbetinshe iskerlikti shólkemlestiriw boyınsha ***kompetenttsiyalarına*** iye bolıwı lazım.

Moduldi shólkemlestiriw hám ótkeriw boyınsha usınıslar.

“**Algebralıq sistemalar**” moduli lektsiya hám ámeliy sabaqlar kórinisinde alıpbarıladı.

Kurstı oqıtıw barısında tálimniń zamanagóy metodları, xabar-kommunikatsiya texnologiyaları hám ilimiy jetiskenliklerdi qollaw názerde tutılǵan:

Teoriyalıq sabaqlardı zamanagóy kompyuter texnologiyaları járdeminde prezentatsiyalıq hám elektron-didaktikalıq texnologiyalardan paydalanıladı;

Óńkiziletuǵın ámeliy sabaqlarda hám kóshpe sabaqlarda texnikalıq qurallardan, ekspress-sorawlar, test sorawları, aqıliy hújim, toparlı pikirlew, kishi toparlar menen islew hám basqa interaktiv tálim usılların qollaw názerde tutıladı.

Moduldiń oqıw rejedegi basqa modullar menen baylanıslılıǵı hám úzliksizligi.

"**Algebralıq sistemalar**" moduli oqıw rejedegi birinshi blok hám qánigelik pánlerdiń barlıq tarawları menen tıǵız baylanısqan halda pedagoglardıń ulıwma tayarlıq dárejesin asırıwǵa xızmet etedi.

Moduldiń joqarı tálimdegi ornı.

Moduldi ózlestiriw arqalı tıńlawshılar algebranıń tiykarǵı temaları boyınsha tálim protsessin shólkemlestiriwde texnologiyalıq jandasıw tiykarların hám bul jónindegi aldınǵa tájiriybeni, ilimiy jetiskenliklerdi úyrenedi, olardı analiz etiw, ámelde qollaw hám bahalawǵa tiyisli kásiplik kompetentlikke iye boladı.

MODULDIŃ MAZMUNÍ.

Algebranı oqıtıwda qollanılatuǵın ámeliy dástúrler, olardıń bólimleri, olardıń qollanılıwı, Maple, Matematica, mathcard paketleri. Matematikalıq dástúrler paketi Maple járdeminde algebradan sabaqlardı shólkemlestiriw. Algebradaǵı tiykarǵı túsiniklerdi hám anıqlamalardı kiritiw metodikası, olardan paydalanıw, olardıń analizi. Sáwlelendiriwler. Gruppalar. U'les gruppalar. Normal úles gruppalar. Izomorfizm. Gomomorfizm. Kolco. Kolconıń ulıwma qásiyetleri. Kolconıń ideallları. Maydan hám onıń qásiyetleri. Shekli maydan. Banax algebrası. Gomomorfizmler. Kommutativ Banax algebraları. Spektr hám rezolventa. Ideallar. Gelfand obrazları. S* algebralar. Algebralardıń túrleri hám olardı klassifikatsiyalaw usılları; bunda matematikanıń ámeliy dástúrler paketinen paydalanıw. Algebra hám sanlar teoriyasınıń klassikalıq mashqalaları házirgi kúndegi aktual máseleleri. Zamanagóy algebra mashqalaları boyınsha sońǵı jıllarda shet el hám respublikamızda úyrenilip atırǵan aktual mashqalalar hám olardıń sheshimleri analizi.

“Algebralıq sistemalar”
Modul boyınsha saatlar bólistiriliwi.

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Modul temaları</th><th colspan="5">Tıńlawshınıń oqıw júklemesi, saat</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Jámi</th><th colspan="3">Auditoriya oqıw júklemesi</th><th rowspan="3">Ózbetinshe tálim</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Jámi</th><th colspan="2">sonnan</th></tr>
<tr><th>Teoriyalıq</th><th>Ámeliy sabaqlar</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Algebra páni rawajlanıwınıń qısqasha tariyxı hám zamanagóy matematikadağı ornı. Algebralıq sistema túsinigi.</td><td>4</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Gruppa, kolco hám maydanlar</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Associativ algebralar haqqında túsinikler.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Associativ emes algebralardıń túrleri hám olardıń klassifikatsiyalaw usılları.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Algebralıq sistemalardıń fizika, ximiya, biologiya, kvant mexanikası, kriptografiya, kompyuter texnologiyaları hám basqa tarawlardağı qollanılıwları.</td><td>4</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Zamanagóy algebra mashqalaları boyınsha sońğı jıllarda shet elde hám respublikamızda úyrenilip atırğan aktual mashqalalar hám olardıń sheshimleriniń analizi.</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Jámi:</td><td>24</td><td>20</td><td>8</td><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

TEORIYALÍQ SABAQLAR MAZMUNÍ

1-tema: Gruppa, kolco hám maydanlar.

Binar ámel. Yarımgruppalar. Monoidlar. Dárejeler hám qosındı. Keri element. Gruppalar, qásiyetleri hám mısallar. U’lesgruppalar hám olardıń qásiyetleri. Minimal úlesgruppalar. Tsiklli gruppalar hám olardıń qásiyetleri. Kolco. Kolconıń ulıwma qásiyetleri. Mısallar. Gomomorfizmler hám kolconıń idealları. Kolconıń túrleri. Maydan hám onıń qásiyetleri. Mısallar. Shekli maydan. Maydannıń xarakteristikaları.

2-tema: Associativ algebralar haqqında túsinikler.

Algebra hám onıń qásiyetleri. Mısallar. Associativ algebralar, birlik element, ideal, oń hám shep ideallar, maksimal ideal, matritsalar algebrası.

3-tema: Associativ emes algebralardıń túrleri hám olardıń klassifikatsiyalaw usılları.

Associativ emes algebralar, Yordan algebraları, Li algebraları. Li, Yordan hám associativ algebralar arasındaǵı baylanıslar. Algebralardı klassifikatsiyalaw usılları. Kishi ólshemli algebralardıń klassfikatsiyalanıwı.

4-tema: Zamanagóy algebra mashqalaları boyınsha sońǵı jıllarda shet elde hám respublikamızda úyrenilip atırǵan aktual mashqalalar hám olardıń sheshimleriniń analizi.

Algebra hám sanlar teoriyasınıń házirgi kúndegi aktual máseleleri. Operatorlar algebrası, Li algebraları hám olardıń ulıwmalıǵı boyınsha hám olardıń ulıwmalıqları boyınsha úyrenilip atırǵan máseleler. Funktsional analizdiń zamanagóy máseleleri.

ÁMELIY SABAQLARDIŃ MAZMUNI

1-ámeliy sabaq:
Algebra páni rawajlanıwınıń qısqasha tariyxı hám zamanagóy matematikadaǵı ornı. Algebralıq sistema túsinigi.

Algebra páni rawajlanıw tariyxın úyreniw. Algebralıq sistema túsinigin úyreniw. Algebralıq sistemalarǵa mısallar kóriw.

2-ámeliy sabaq:
Gruppa, kolco hám maydonlar

Yarımgruppalar hám monoidlarǵa baylanıslı mısallar sheshiw. Gruppalardıń qásiyetlerin dálillew. U'les gruppalar hám olardıń qásiyetlerin úyreniw. Tsiklllı gruppalar hám olardıń qásiyetlerin úyreniw.

3-ámeliy sabaq:
Gruppa, kolco hám maydanlar.

Kolcolarǵa baylanıslı mısallar sheshiw. Kolconıń ulıwma qásiyetlerin úyreniw. Kolco gomomorfizmi hám kolconıń ideallarına baylanıslı mısallar sheshiw. Kolconıń túrlerin anıqlaw. Maydan hám onıń qasiyetlerin úyreniw. Shekli hám sheksiz maydanǵa baylanıslı mısallar kóriw. Maydannıń xarakteristikaların anıqlaw.

4-ámeliy sabaq:
Associativ algebralar haqqında túsinikler.

Associativ algebralarǵa baylanıslı mısallar sheshiw. Matritsalar algebrasınıń qasyietlerin anıqlaw. Berilgen algebranıń birlik elementi, idealları, oń hám shep ideallarǵın tabıw. Birlik elementli allgebranıń maksimal idealın anıqlaw.

5-ámeliy sabaq:
Associativ emes algebralardıń túrleri hám olardıń klassifikatsiyalaw usılları; bunda matematikanıń ámeliy dástúrler paketinen paydalanıw.

Associativ emes algebralar túrlerin úyreniw, Yordan algebraları, Li algebralarına mısallar kóriw. Li, Yordan hám associativ algebralar arasındaǵı baylanıslardı anıqlaw. Algebralardı klassifikatsiyalaw usılların úyreniw. Eki hám úsh ólshemli Li algebralardı klassifikatsiyalaw.

6-ámeliy sabaq:
Algebralıq sistemalardıń fizika, ximiya, biologiya, kvant mexanikası, kriptografiya, kompyuter texnologiyaları hám basqa tarawlardaǵı qollanılıwları.

Associativ emes algebralardıń fizika, ximiya hám biologiyaǵa qollanılıwların úyreniw. Genetikalıq algebralar hám olardıń qásiyetlerin úyreniw. Evolyutsion algebralar hám olardıń qollanılıwlarına baylanıslı mısallar sheshiw.

OQITIW TU'RLERI.

Bul modul boyınsha tómendegi oqıtıw túrlerinen paydalanıladı:

- lektsiyalar, ámeliy sabaqlar (maǵlıwmatlar hám túsiniklerdi ańlay alıw, aqılıy qızıǵıwdı rawajlandırıya, teoriyalıq bilimlerdi bekkemlew);
- sáwbetlesiwler (kórilip atırǵan proekt sheshimleri boyınsha usınıs beriw qabilietin asırıw, esitiw, qabıl etiw hám logikalıq juwmaqlar shıǵarıw);
- bahs hám munozaralar (máseleler sheshimi boyınsha dáliller hám tiykarlı argumentlerdi kórsetiw, esitiw hám mashqalalar sheshimin tabıw qabilietin rawajlandırıw).

BAHALAW KRITERIYALARÍ.

№	Oqıw-tapsırma túrleri	Maksimal ball	Bahalaw kriteriyası		
		2,5	**"ayrıqsha" 2,2-2,5**	**"jaqsı" 1,8-2,1**	**"orta" 1,4-1,7**
1.	Test-sınaw tapsırmaların orınlaw	0,5	0,4-0,5	0,34-0,44	0,28-0,3
2.	Oqıw-proekt jumısların orınlaw	1	0,9-1	0,73-0,83	0,56-0,7
3.	Ózbetinshe jumıs tapsırmaların orınlaw	1	0,9-1	0,73-0,83	0,56-0,7

II. MODULDI OQÍTÍWDA PAYDALANÍLATUǴIN INTERAKTIV TÁLIM METOD

“Assesment” metodı

Metodtıń maqseti: bul metod tálim alıwshılardıń bilim dárejesin bahalaw, qadaǵalaw, ózlestiriw kórsetkishi hám ámeliy kónlikplerin teksheriwge baǵdarlanǵan. Bul texnika arqalı tálim alıwshılardıń biliw iskerligi túrli baǵdarlar (tapsırmalar, ámeliy kónlikpeler, salıstırma analiz, sheshimlerdi analiz etiw) boyınsha analiz etiledi hám bahalanadı.

Metodtı ámelge asırıw tártibi:

“Assesment” lerden lektsiya sabaqlarında talabalardıń yaki qatnasıwshılardıń bar bilim dárejesin úyreniwde, jańa maǵlıwmatlardı bayan etiwde, seminar, ámeliy sabaqlarda bolsa tema yakiy maǵlıwmatlardı ózlestiriw dárejesin bahalaw, sonıń menen birge, ózi-ózin bahalaw maqsetinde individual paydalanıw usınıs etiledi. Sonıń menen birge, oqıtıwshınıń ijadiy jandasıwı hám oqıw maqsetlerinen kelip shıǵıp, assesmentke qosımsha tapsırmalardı kiritiw múmkin.

U’lgi. Hár bir ketekshedegi durıs juwap 5 ball yamasa 1-5 balǵa shekem bahalanıwı múmkin.

1 **Tapsırma**
- Algebralardıń sheshimliligin kórsetiń
- algebralardıń nilradikalın tabıń.

3 **Salıstırma analiz**
- Nilpotent, nilindeks hám nilradikallardıń salıstırma analizi.

2 **Túsinik analizi**
- algebralardıń sheshiminiń anıqlaması;
- nilradikaldı tabıw usulı;

4 **Ámeliy kónlikpe**
- Algebralardıń klassifikaciyaları.

“Juwmaqlaw” (Rezyume, Veer) metodı.

Metodtıń maqseti: Bul metod quramalı, kóp tarmaqlı, múmkin qáder, mashqalalaı xarakterdegi temalardı úyreniwge qaratılǵan. Metodtıń mánisi sonnan ibarat, bunda temanıń túrli tarmaqları boyınsha birdey xabar beriledi hám sol waqıtta, olardıń hár biri ayırım aspektlerde dodalanadı. Máselen, mashqala unamlı hám unamız tárepleri, qolaylılıq hám kemshilikleri, payda hám zárerleri boyınsha úyreniledi. Bud interaktiv metod sın, analiz, anıq logikalıq pikirlewdi rawajlandırıwǵa hámde oqıwshılardıń ózbetinshe ideyaları, pikirlerin jazba hám awızeki túrde sistemalı bayan etiw, qorǵawǵa imkániyat jaratadı. “Juwmaqlaw” metodınan lektsiya sabaqlarında individual hám juplıqlardaǵı jumıs kórinisinde, ámeliy hám seminar sabaqlarında kishi toparlardaǵı jumıs kórinisinde tema boyınsha bilimlerin bekkemlew, analiz etiw hám salıstırıw maqsetinde paydalanıw múmkin.

Metodtı ámelge asırıw tártibi:

trener-oqıtıwshı qatnasıwshılardı 5-6 adamnan ibarat kishi toparlarǵa ajıratadı;

trening maqseti, shártleri hám tártibi menen qatnasıwshılardı tanıstırıp, hár bir toparǵa ulıwma mashqalanı analiz etiliwi zárúr bolǵan bólekleri túsirilgen tarqatpa materiallardı tarqatadı;

hár bir topar ózine berilgen mashqalanı hár tárepleme analiz etip, óz pikirlerin usınıs etilip atırǵan sxema boyınsha tarqatpaǵa jazba bayan etedi;

Náwbettegi basqıshta barlıq toparlar óz prezentaciyaların ótkeredi. Bunnan soń, trener tárepinen analizler ulıwmalastırıladı, zárúrli materiallar menen toltırıladı hám tema juwmaqlanadı.

III. TEORIYALÍQ MATERIALLAR

1-tema. GRUPPA, KOLCO HÁM MAYDANLAR

REJE:

1.1. Gruppa hám onıń tiykarǵı qásiyetleri. Mısallar.
1.2. Kolco. Kolconıń gomomorfizmleri hám idealları.
1.3. Maydan. Maydanlar xarakteristikası.

Tayanısh sózler: *gruppa, kolco, maydan, binar qatnas, yarım gruppa, kommutativ gruppa, trivial gruppa, monoid, gomomorfizm, monomorfizm, epimorfizm, izomorfizm.*

1.1. Gruppa hám onıń tiykarǵı qásiyetleri. Mısallar.

Eger G kópliginiń elementleriniń qálegen tártiplengen (a,b) jubına qanday da bir * sáykesligi boyınsha usı kópliktiń bir mánisli anıqlanǵan c elementi sáykes qoyılsa - bul jaǵdayda $a*b=c$ dep jazıladı - onda G kópliginde * binarlıq ámeli berilgen delinedi. Eger G kópliginde * binarlıq ámeli berilgen bolıp, ol tómendegi úsh shártti qanaatlandırsa:

1) qálegen $a,b,c \in G$ elementleri ushın $(a*b)*c=a*(b*c)$ – associativlik shárti;

2) G kópligi e birlik elementine iye: qálegen $a \in G$ ushın $a*e=e*a=a$;

3) G kópligi óziniń qálegen a elementi ushın oǵan keri a^{-1} elementine iye: $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$, onda G kópligi usı * ámeline qarata gruppa dep ataladı hám ol $(G,*)$ dep belgilenedi.

Eger qálegen $a,b \in G$ ushın $a*b=b*a$ bolsa, G gruppası kommutativ yamasa abellik gruppa dep ataladı. G kópliginiń quwatlılıǵı G gruppasınıń tártibi dep ataladı hám ol $|G|$ dep belgilenedi. Elementleriniń sanı shekli yamasa sheksiz bolıwına qarap gruppalar sáykes shekli hám sheksiz gruppalar bolıp bólinedi.

Gruppanıń a elementiniń tártibi $|a|$ dep $a^n=e$ bolatuǵın eń kishi n natural sanına aytıladı. Qosıw ámeline qarata gruppanı additiv gruppa dep, al kóbeytiw ámeline qarata gruppanı multiplikativ gruppa dep ataw kelisilgen.

G gruppasınıń H úles kópligi gruppadaǵı ámelge qarata gruppa dúzse, ol G gruppasınıń úlesgruppası dep ataladı. Multiplikativ belgilerde bunıń maǵanası bunday: 1) egre $a,b \in H$ bolsa, onda $a \cdot b \in H$; 2) sonday $e_1 \in H$ elementi bar boladı, hár qanday $a \in H$ elementi ushın $ae_1 = a$; 3) hár qanday $a \in H$ elementi ushın sonday $b \in H$ elementi bar boladı, $a \cdot b = e_1$.

Bunnan $e_1 \in H$ elementiniń G gruppasınıń birlik e elementine teń bolıwı kelip shıǵadı. Haqıyqatında da, $ae_1 = a$ teńliginen $a^{-1}ae_1 = a^{-1}a$, yaǵnıy kelip shıǵadı. Sonıń ushın $a \cdot b = e_1 = e$ teńligin qanaatlandıratuǵın $b \in H$ elementi a^{-1} ge teń, sebebi $a^{-1}ab = a^{-1}e = a^{-1}$.

Demek, G gruppasınıń H úlesgruppası sonday úles kóplik, oǵan G gruppasınıń birlik elementi tiyisli, hár qanday eki elementiniń kóbeymesi ózine tiyisli hár hár qanday elementtiń kerisi ózine tiyisli.

1-teorema. G gruppasınıń H úles kópligi qálegen $a,b \in H$ ushın $a \cdot b^{-1} \in H$ shártin qanaatlandırsa, onda G gruppasında H úlesgruppa boladı.

Dálillew. Qandayda bir $a \in H$ elementin alamız. Onıń ushın $e = a \cdot a^{-1} \in H$ hám $a^{-1} = e \cdot a^{-1} \in H$. Eger $a,b \in H$ bolsa, $a \cdot b^{-1} \in H$.

Demek, $a \cdot b = a(b^{-1}) \in H$.

Eger G gruppasında H úles kópligi ushın $a,b \in H$ dan barlıq waqıt $a^{-1}b \in H$ kelip shıqsa, H dıń úlesgruppa ekenligi kelip shıǵadı.

Dáliyllengen teorema gruppanıń berilgen úles kópligi úlesgruppa ekenligin tekseriwdiń ápiwayı usılın beredi.

Mısallar: 1) Simmetriyalıq S_n gruppasında jup ornına qoyıwlardan ibarat A_n úles kópligi úlesgruppa boladı.

2) Barlıq haqıyqıy elementli, aynımaǵan, n - tártipli kvadratlıq matricalar gruppasında determinantı birge teń bolǵan matricalardan ibarat úles kóplik úlesgruppa boladı.

3) Additiv Z gruppasında berilgen pútin teris bolmaǵan m sanı ushın m ge bólinetuǵın barlıq pútin sanlardan ibarat mZ kópligi úlesgruppa boladı.

2-teorema. Additiv Z gruppasınıń hár qanday úlesgruppası mZ kóriniske iye, bul jerde m-teris emes pútin san.

Dálillew: Z gruppasınıń qandayda bir H úlesgruppası berilgen bolsın. Eger H tek ǵana nol elementinen ibarat bolsa, onda $H = 0 \cdot Z$.

Endi $H \neq 0 \cdot Z$ bolǵandaǵı jaǵdaydı qaraymız. Bul jaǵdayda H da hám oń, hám teris sanlar bar, sebebi $a \in H$ benen H úlesgruppa bolǵanı ushın $(-a) \in H$. H daǵı eń kishi oń sandı m arqalı belgileymiz. Ol jaǵdayda m ge bólinetuǵın hár qanday san da H qa tiyisli bolǵanı ushın $mZ \subseteq H$. Ekinshi jaǵınan, eger $x \in H$ hám x tı m ge bólgende shıqqan qaldıq r ge teń bolsa, onda $r = x - qm \in H,$ q - pútin san, $0 \leq r < m$. Eger $r > 0$ bolsa, onda H da m nen kishi bolǵan oń san bolar edi - bul bolsa m niń tańlanıwına qarama-qarsı. Sonıń ushın $r = 0$ demek, $x = qm \in mZ$. Bul jerde x qálegen bolǵanı ushın $H \subseteq mZ$. Nátiyjede $H \subseteq mZ$.

G gruppasınıń qálegen úlesgruppalarınıń kesispesi jáne de úlesgruppa boladı. G gruppasında qálegen M úles kópligi berilgen bolsın. Ol jaǵdayda M kópligin óz ishine alatuǵın barlıq úlesgruppalardıń kesispesi H_M úlesgruppa bolıp, ol G gruppasında M kópligin óz ishine alatuǵın úlesgruppalardıń «eń kishisi». M kópligi H_M úlesgruppasınıń jasawshı kópligi dep ataladı.

3-teorema. H_M úlesgruppası barlıq múmkin bolǵan mına $a_1^{k_1}, a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}$ shekli kóbeymelerden ibarat, bul jerde $a_1, \ldots, a_s \in M,$ $k_1, \ldots, k_s \in Z$.

Dálillew. P arqalı sonday shekli kóbeymeler kópligin belgileymiz. Eger $a, b \in P$ bolsa, onda $a_1^{k_1}, a_2^{k_2} \ldots a_s^{k_s}$,

$b = b_1^{l_1} \ldots b_t^{l_t}$, $a_1, \ldots, a_s$, $b_1, \ldots, b_t \in M$, hám $a \cdot b = a_1^{k_1} \ldots a_s^{k_s} \cdot b_t^{l_t} \quad b_1^{l_1} \in P$

Demek, P kópligi M kópligin óz ishine alǵan úlesgruppa. Sonıń ushın $H_M \subseteq P$. Ekinshi jaǵınan M di óz ishine alǵan hár qanday úlesgruppa P ǵa kiretuǵın barlıq shekli kóbeymelerdi de óz ishine aladı, yaǵnıy $H_M \subseteq P$. Nátiyjede $P = H_m$ kelip shıǵadı.

1.2. Kolco. Kolconıń gomomorfizmleri hám idealları.

Qandayda bir bos bolmaǵan K kópliktiń elementleri ushın eki algebralıq ámel anıqlanǵan bolsın, yaǵnıy tártiplengen (a,b) juplıqqa hár bir ámelde bir c elementi sáykes qoyılǵan bolıp, $c \in K$ bolsın.

Bul algebralıq ámellerdi biz qosıw hám kóbeytiw dep ataymız.

1-anıqlama. Qosıw hám kóbeytiw ámelleri anıqlanǵan K kópliktiń elementleri ushın tómendegi aksiomalar orınlı bolsa, onda K kópligi kolco delinedi:

1. Qosıw nızamları:

a) $\forall a,b\ c \in K \quad a+(b+c)=(a+b)+c$ (qosıwdıń associativligi)

b) $\forall a,\ b \in K \quad a+b=b+a$ (qosıwdıń kommutativligi)

c) $\forall a,\ b \in K\ \exists x \in K \quad a+x=b.$

2. Kóbeytiw nızamları: $\forall a,b\ c \in K \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (kóbeytiwdiń associativligi);

3. a) $\forall a,b\ c \in K \quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c;$

b) $\forall a,b\ c \in K \quad (b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a.$

K kópligi payda qılǵan kolconı K háribi arqalı belgileymiz. Eger K kolcosınıń qálegen a hám b elementleri ushın $a \cdot b = b \cdot a$ teńligi orınlansa, onda K kolcosı kommutativ kolco delinedi.

Endi joqarıdaǵı aksiomalardan kelip shıǵatuǵın bazı bir juwmaqlarǵa toqtap ótemiz.

Dáslepki úsh aksioma K kolcosınıń qosıw ámeline qarata abel gruppası ekenligin bildiredi.

Demek, abel gruppası ushın orınlı bolǵan qásiyetler kolcoda da orınlı boladı, yaǵnıy kolcoda tómendegi qásiyetler orınlı:

1. K kolcosınıń qálegen a elementi ushın $a+\theta=a$ teńligi qanaatlandırıwshı nol elementi bar hám ol tek birew boladı.

2. K kolcosınıń qálegen a elementi ushın usı kolcoda sonday $-a$ elementi tabıladı, ol $a+(-a)=\theta$ boladı.

Bunda $-a$ elementi a ǵa qarama-qarsı element delinedi.

3. K kolcoda $a+x=b$ teńlemesi sheshimge iye hám ol tek birew. Bul sheshim $x=-a+b$ bolıp, biz onı $x=b-a$ arqalı belgileymiz.

2-anıqlama. Eger K kolcosınıń qálegen a elementi ushın $ae=ea=a$ bolsa, onda e elementi kolconıń birlik elementi delinedi.

4. $a-b=a+(-b)$ bolǵanı ushın tómendegi teńlikti jazıw múmkin:

$$\forall a,b\ c\in K\ (a-b)-c=(a-c)-b.$$

5. $-(-a)=a$ hám $a-a=\theta$.

3-anıqlama. Qaralıp atırǵan ámel qosıw bolǵanda n sandaǵı a nıń qosındısı $a+a+...+a=na$ túrindegi belgilenip, na nı a elementiniń pútin oń n koefficientli eseligi dep ataydı.

6. K kolcosındaǵı qálegen a elementi hám n natural sanı ushın $n(-a)=-(na)=-(na)$ teńligi orınlı.

Haqıyqatında da, qosılıwshılardı gruppalap, tómendegige iye bolamız:

$$na+n(-a)=n(a+c-a)=n\theta=\theta, \quad na+n(-a)=\theta.$$

Bunnan $n(-a)=-na$ boladı.

Associativlik nızamnıń orınlılıǵı tómendegilerdi talap etedi:

Qaralıp atırǵan elementler sanı ekiden artıq bolǵanda, olar ústinde orınlanǵan algebralıq ámel kóbeytiwshilerdiń (qosılıwshılardıń) gruppalanıwına baylanıslı bolıp qalıwı múmkin, basqasha aytqanda, $u=bc,\ v=ab$ bolǵanda $au=va$ teńligi orınlanbawı múmkin. Kolcodaǵı associativlik nızamı bolsa sol eki elementtiń teń, yaǵnıy $a(bc)=(ab)c$ ekenligin bildiredi.

Kolcoda anıqlanǵan associativlik nızamı hár qanday shekli sandaǵı elementler ushın da orınlı boladı. Bul tastıyıqlawdıń dáliylleniwin matematikalıq indukciya principi tiykarında, alıp baramız: $n=3$ te 2-aksiomaǵa sáykes tastıyıqlaw orınlı.

Aytayıq, $n>3$ bolǵanda bul pikirimiz n nen kishi sandaǵı elementler ushın ras bolsın, yaǵnıy

$$a_1(a_2\cdot a_3\ldots a_k) \text{ hám } (a_{k+1}\cdot a_{k+2}\ldots a_{n-1})\cdot a_n$$

lardıń nátiyjeleri qawsırmalardıń qoyılıwına baylanıslı bolmasın. Biz bul ekewin kóbeytip, kóbeymeniń de qawsırmaǵa baylanıslı emesligin kórsetemiz. Hár bir kóbeyiwshidegi elementler sanı n nen kishi bolǵanı sebepli olardıń hár biri bir mánisli usılda anıqlanǵan.

Sonıń ushın biz hár qanday k hám l ushın

$$(a_1\cdot a_2\ldots\cdot a_k)(a_{k+1}\cdot a_{k+2}\ldots\cdot a_n)=(a_1\cdot a_2\ldots\cdot a_l)(a_{l+1}a_{l+2}\ldots a_n)$$

teńliginiń $l=k+1$ ushın da orınlı ekenligin kórsetiwimiz jetkilikli. Eger $l=k+1$ bolǵanda

$$a_1\cdot a_2\ldots a_k=b,\quad a_{k+2}\cdot a_{k+3}\ldots a_n=c$$

desek, úsh element kóbeymesiniń associativligine sáykes $b\cdot(a_{k+1}\cdot c)=(b\cdot a_{k+1})\cdot c$ boladı. Tastıyıqlaw dálillendi.

4-anıqlama. Eger kóbeytiwshi elementler sanı n bolıp, olar óz-ara teń bolsa $a\cdot a\ldots a$ payda bolıp, bul kóbeyme a^n kórinisinde belgilenedi hám ol pútin oń dárejeli element delinedi.

Endi distributivlik nızamınan kelip shıǵatuǵın bazı bir nátiyjelerdi kórip ótemiz.

Bul nızamnıń shekli sandaǵı qosılıwshılar ushın orınlı ekenligi matematikalıq indukciya principi tiykarında dálillenedi hám bul nızam alıw ámeline qarata da saqlanadı.

Haqıyqatında da, ayırmanıń anıqlamasına sáykes $b-a$ element ushın

$$a+(b-a)=b$$

teńligi orınlı. Onıń eki tárepin c ǵa kóbeytemiz hám qosıwdıń kóbeytiwge qarata distributivliginen

$$ac+(b-a)\cdot c=bc$$

nı alamız.

Bunnan $(b-a)c$ elementi bc dan ac nıń ayırması ekenligi kelip shıǵadı.

$$(b-a)\cdot c=bc-ac \text{ yamasa } c(b-a)=cb-ca.$$

Aqırǵı teńlikten dara jaǵdayda $b=a$ bolsa, $c\cdot\theta=c\cdot(b-b)=cb-cb=\theta,\ \ c\cdot\theta=\theta$ kelip shıǵadı.

Demek, kolcoda kóbeytiwshilerdiń biri nolge teń bolsa, kóbeyme de nollik element boladı eken. Biraq geypara jaǵdaylarda bul tastıyıqlawdıń kerisi orınlı bolmaydı. Máselen,

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$$

matricaların alsaq, olardıń hár biri nollik matrica emes. Biraq olardıń kóbeymesi nollik matrica.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

5-anıqlama. Kolcoda $a\neq 0,\ b\neq 0$ bolǵanda $a\cdot b=0$ orınlı bolsa, a onda b hám elementleri noldiń bóliwshileri delinedi.

Ádette, kolconıń nol elementi de noldiń bóliwshisi dep qaraladı.

6-anıqlama. Eger kolcoda noldiń ózinen basqa noldiń bóliwshileri bar bolmasa, yaǵnıy

$$\forall a,\ b\in K a\cdot b=0\Rightarrow a=0\vee b=0$$

bolsa, bunday kolco noldiń bóliwshilerine iye bolmaǵan kolco delinedi.

Mısallar. 1. Barlıq pútin sanlar kópligi kommutativ kolco boladı, sebebi bul kóplik qosıw ámeline sáykes abel gruppası bolıp, onda kóbeytiw ámeli tuyıq hám pútin sanlardı kóbeytiw associativ, jáne de bul ámel qosıwǵa qarata distributiv.

2. Barlıq jup sanlar kópligi kolco boladı.

3. Barlıq taq sanlar kópligi kolco bolmaydı, sebebi eki taq sannıń qosındısı bul kóplikke tiyisli emes.

4. Kompleks sanlar kópligi kommutativ kolco boladı, sebebi bul kóplikte de kolconıń barlıq aksiomaları orınlı boladı.

Bul kolcolar ádette sanlı kolcolar dep ataladı. Sanlı kolcolardıń birewi de noldiń bóliwshilerine iye emes.

5. F kópligi (-1; 1) aralıqta anıqlanǵan hám úzliksiz funkciyalardıń kópligi bolsın. Eger

$$f(x)=\begin{cases}0, & eger \quad x\geq 0;\\ x, & eger \quad x<0;\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}0, & eger \quad x<0;\\ x, & eger \quad x\geq 0.\end{cases}$$

bolsa, onda $f(x)\neq 0,\ g(x)\neq 0$ bolıp, $f(x)\cdot g(x)=0$ teńligi orınlanadı.

Sonday-aq (-1; 1) aralıqtaǵı úzliksiz funkciyalar kópligi kolco bolatuǵınlıǵın ańsat ǵana anıqlaw múmkin. Demek, F noldiń bóliwshilerine iye bolǵan kolco eken.

6. $A=\{0,\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$ kóplik te noldiń bóliwshilerine iye bolǵan kolco. Bul jerde $0,\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}$ ler $m=6$ moduli boyınsha qaldıqlar klasslarınan ibarat.

Faktor gruppalar hám faktor kolcolar.

Eger G gruppasınıń H úlesgruppası hám hár qanday $a\in G$ elementi ushın $aH=Ha$ bolsa, H normal úlesgruppa dep ataladı. Normal úlesgruppa ushın hár bir shep irgeles klass sáykes oń irgeles klass penen ústpe-úst túskeni ushın olar qısqasha irgeles klasslar dep ataladı.

Abellik gruppanıń hár qanday úlesgruppası normal ekenligi anıq. Qálegen gruppanıń birlik úlesgruppası hám ózi (óziniń úlesgruppası dep qaralsa) normal úlesgruppalar boladı, olar gruppanıń menshikli emes normal úlesgruppaları boladı. Abellik emes gruppada menshikli normal gruppaǵa mısal retinde $n>2$ de S_n simmetriyalıq gruppasındaǵı jup ornına qoyıwlardan ibarat bolǵan A_n úlesgruppası alınıwı múmkin. Haqıyqatında da, hár qanday $a\in S_n$ ushın

$$aA_n = A_n a = \begin{cases} A_n, & eger \quad a \in A_n, \\ S_n \setminus A_n, & eger \quad a \notin A_n. \end{cases}$$

Kóbinese H úlesgruppası normallıǵınıń tómendegi ápiwayı belgisi qollanıladı: H úlesgruppasınıń normal bolıwı ushın hár qanday $a \in G$ ushın $aHa^{-1} \subseteq H$ qatnasınıń orınlanıwı zárúr hám jetkilikli. Bul sharttiń zárúrligi anıq. Jetkilikligi bolsa tómendegishe kórsetiledi: eger hár qanday $a \in G$ ushın $aHa^{-1} \subseteq H$ bolsa, onda hár qanday $a \in G$ ushın $a^{-1}Ha \subseteq H$ qatnası da orınlı; bularǵa sáykes $aH \subseteq Ha$, $Ha \subseteq aH$, yaǵnıy hár qanday $a \in G$ ushın $aH = Ha$.

G gruppası hám ondaǵı H normal úlesgruppası anıq bolǵan jaǵdayda hár qanday $a \in G$ ushın $\overline{a}$ arqalı a nı óz-ishine alatuǵın G nıń H boyınsha irgeles klassın belgileymiz: $\overline{a} = aH = Ha$. G nıń H boyınsha barlıq irgeles klasslarınan dúzilgen kóplikti G/H arqalı belgileymiz. G hám H lar anıq bolǵan jaǵdayda G/H ornına $\overline{G}$ belgisin de qollanamız.

Hár qanday $a, b \in G$ elementleri ushın $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$ dep esaplap, $\overline{G}$ kópliginde klasslardı kóbeytiw ámelin kiritemiz. Hár bir irgeles klass ózindegi qálegen element arqalı anıqlanǵanı sebepli $\overline{a}$ hám $\overline{b}$ klasslarınıń kóbeymesi bul klasslardı anıqlawshı elementlerdi tańlawǵa baylanıslı emesligin kórsetiw kerek. Haqıyqatında da, eger $a_1 \in \overline{a}, b_1 \in \overline{b}$ (yaǵnıy $\overline{a_1} = \overline{a}, \overline{b} = \overline{b_1}$) bolsa, onda $\overline{a_1 b_1} = \overline{a_1} \cdot \overline{b_1} = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}$.

Teorema. Eger G gruppa hám H onıń normal úlesgruppası bolsa, onda kiritilgen klasslardı kóbeytiw ámeline qarata G/H kópligi gruppa dúzedi.

Dálillew. Irgeles klasslardı kóbeytiw associativ boladı: eger $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in G/H$ bolsa, onda

$$\overline{a}(\overline{b}\overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{bc} = \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c} = \overline{ab} \cdot \overline{c} = (\overline{a} \cdot \overline{b})\overline{c}.$$

Mına $\overline{e} = H$ klassı klasslardı kóbeytiw ámeli ushın birlik element wazıypasın orınlaydı, sebebi hár qanday $\overline{a} \in G/H$ elementi ushın $\overline{a}\overline{e} = \overline{ae} = \overline{a}$.

Mına $\overline{a^{-1}}$ klassı $\overline{a}$ klasına keri, sebebi $\overline{a}\cdot\overline{a^{-1}}=\overline{aa^{-1}}=\overline{e}$.

G/H gruppası G nıń H normal úlesgruppası boyınsha faktorgruppası dep ataladı.

Máselen, m moduli boyınsha shegirme klasslardan dúzilgen Z_m additiv gruppası Z additiv gruppasınıń mZ úlesgruppası boyınsha faktor gruppası boladı: $Z_m = Z/mZ$.

Meyli $K-$ kolco, I hám J usı kolconıń idealları (eki jaqlı) bolsın.

1-anıqlama. K kolcosınıń I hám J ideallarınıń qosındısı dep

$$I+J=\{x+y \mid x\in I,\ y\in J\} \tag{1}$$

teńligi menen anıqlanatuǵın $I+J$ kópligine aytıladı.

2-anıqlama. I hám J ideallarınıń kesilispesi dep

$$I\cap J=\{x \mid x\in I \wedge x\in J\} \tag{2}$$

teńligi menen anıqlanatuǵın $I\cap J$ kópligine aytıladı.

3-anıqlama. I hám J ideallarınıń kóbeymesi dep

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n,\ x_i\in I,\ y_i\in J,\ n\in Z$$

túrindegi elementlerdiń kópligine aytıladı.

Bul ámellerdi qálegen sandaǵı ideallar ushında anıqlawǵa boladı. Ideallardı qosıw ámeli associativ hám kommutativ, ideallardıń kesilispesi jáne taǵı kolcoda ideal, ideallardıń kóbeymeside kolcoda ideal bolatuǵınlıǵın ańsat dálillewge boladı.

K kommutativ kolcosınıń a elementinen jasalǵan (a) bas idealı a nı óz ishinde tutatuǵın barlıq ideallardıń kesilispesi boladı, demek (a) idealı a nı ishinde tutatuǵın eń kishi ideal boladı.

Usıǵan uqsas K kommutativ kolcosınıń $a_1,a_2,\ldots,a_n$ elementlerinen jasalǵan $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ idealıda $a_1,a_2,\ldots,a_n$ lerdi ishinde tutatuǵın barlıq ideallardıń kesilispesi boladı hám, demek, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ elementlerin tutaǵın eń kishi ideal boladı.

Meyli I idealı K kolcosına tiyisli bolsın.

4-anıqlama. Eger K kolcosınıń qálegen a,b elementleri ushın $a-b$ ayırması I ge tiyisli bolsa, onda a hám b elementleri I idealı boyınsha salıstırmalı delinedi.

$a\equiv b(\mathrm{mod}\,I)$ jazıwı a hám b elementleri I moduli boyınsha salıstırmalı degendi ańlatadı.

1-teorema. K kolcosındağı I idealı boyınsha salıstırıw qatnası ekvivalentlik qatnas boladı.

Dálillew. $a-a\in I$ bolǵanlıqtan I moduli boyınsha salıstırıw qatnası refleksiv, I idealı boyınsha salıstırıw qatnası tranzitiv. Sebebi, eger $a\equiv b(\mathrm{mod}\,I)$ hám $b\equiv c(\mathrm{mod}\,I)$ bolsa, onda $a-b\in I$ hám $b-c\in I$ ekenliginen $a-c=(a-b)+(b-c)=a-c\in I$ ekeni, yaǵnıy $a\equiv c(\mathrm{mod}\,I)$ ekeni kelip shıǵadı.

$a-b\in I$ ekeninen $b-a\in I$ ekeni kelip shıǵatuǵın bolǵanlıqtan I idealı boyınsha salıstırıw qatnası simmetriyalı. Teorema dálillendi.

5-anıqlama. K kolcosındağı I idealı boyınsha salıstırıw qatnasınıń ekvivalentlik klassları I idealı boyınsha qaldıqlar klası yamasa K kolcosındağı I idealı boyınsha irgeles klasslar delinedi.

K kolcosınıń a elementi tiyisli bolatuǵın qaldıqlar klasın $\overline{a}$ arqalı belgileymiz. $\overline{a}=a+I$ ekeni túsinikli.

2-teorema. K kolcosınıń I idealı boyınsha qaldıqlar klasları tómendegi qásieytlerge iye.

1) Qaldıqlardıń qálegen eki klası óz-ara kesispeydi yamasa betlesedi.

2) K kolcosınıń I idealı boyınsha barlıq qaldıqlar klasslarınıń birikpesi K ǵa teń.

3) $\overline{a}$ hám $\overline{b}$ qaldıqlar klassları $a\equiv b(\mathrm{mod}\,I)$ bolǵanda, tek sonda ǵana teń boladı.

4) Eger $c\in\overline{a}$ bolsa, onda $a=c+\overline{1}$ (dara jaǵdayda $\overline{a}=a+\overline{1}$).

Teoremadağı 1)-4) qásiyetler additiv K gruppasınıń I úlesgruppası boyınsha irgeles klasslardıń sáykes qásiyetlerin ańlatadı.

Endi I idealı boyınsha salıstırıwlardıń tómendegi tiykarǵı qásiyetlerin qaraymız.

1-qasiyet. Salıstırıwlardı aǵzama-aǵza qosıwǵa hám alıwǵa boladı. Yaǵnıy, eger $a \equiv b(\mathrm{mod}\, I)$ hám $c \equiv d(\mathrm{mod}\, I)$ bolsa, onda $a+c \equiv b+d(\mathrm{mod}\, I)$ hám $(a-c) \equiv (b-d)(\mathrm{mod}\, I)$ boladı.

Haqıyqatında da, eger $a-b \in I$ hám $c-d \in I$ bolsa $a+c-(b+d) \in I$ hám $(a-c)-(b-d) \in I$.

2-qásiyet. Salıstırıwdıń eki jaǵın qálegen pútin sanǵa kóbeytiwge boladı, yaǵnıy $a \equiv b(\mathrm{mod}\, I)$ dan $na \equiv nb(\mathrm{mod}\, I)$ ekenligi kelip shıǵadı, bunda $n \in Z$.

Haqıyqatında da $a-b \in I$ dan $na-nb \in I$ ekeni kelip shıǵadı.

3-qásiyet. Salıstırıwdıń eki jaǵın K kolcosınıń qálegen elementine kóbeytiwge boladı, yaǵnıy

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, I) \text{ dan } ca \equiv cb(\mathrm{mod}\, I)$$

kelip shıǵadı.

Haqıyqatında da I idealı ushın $\forall c \in I$ bolǵanda da $cI \subseteq I$. Demek $\forall c \in K$ ushın $a-b \in I$ dan $ca-cb \in I$ ekeni kelip shıǵadı.

4-qásiyet. Salıstırıwdı aǵzama-aǵza kóbeytiwge boladı, yaǵnıy, eger $a \equiv b(\mathrm{mod}\, I)$ hám $c \equiv d(\mathrm{mod}\, I)$ bolsa, onda $ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, I)$.

Haqıyqatında da $a-b \in I$ hám $c-d \in I$ bolǵanlıqtan hám $\forall x \in K$ ushın $xI \subseteq I$ ekenliginen:

$$ac-bd = ac-bc+bc-bd = (a-b)c+b(c-d) \in I$$

Endi faktor-kolco túsnigin anıqlaymız. Meyli I kópligi K kolcosında ideal bolsın. K kolcosınıń I idealı boyınsha irgeles klasslarınıń kópligin K/I arqalı belgileymiz. Bul kóplikte irgeles klasslardı qosıw hám kóbeytiw ámellerin tómendegishe anıqlaymız.

Eger $\overline{a} = a + I, \overline{b} = b + I$ bolsa, onda

$$\overline{a}+\overline{b} = a+I+b+I = a+b+I = \overline{a+b} \qquad (*)$$

$$\bar{a}\bar{b}=(a+I)(b+I)=ab+I=\overline{ab} \qquad (**)$$

3-teorema. K/I kópligi joqarıda anıqlanǵan qosıw hám kóbeytiw ámellerine baylanıslı kolco dúzedi. Bul kolco K kolcosınıń I idealı boyınsha faktor-kolcosı delinedi.

Dálillew. Teoremanı dálillew ushın K/I kópliginde kolco aksiomaları orınlanatuǵının kórsetiw jetkilikli.

1) $a+I, b+I, c+I \in K/I$ bolsa, onda

$$a+I+(b+I+c+I)=a+I+(b+c+I)=a+(b+c)+I=$$

$$=(a+b)+c+I=(a+b+I)+c+I=(a+I+b+I)+c+I,$$

2) $0=I$, sebebi $a+I+I=I+a+I=a+I$,

3) $-(a+I)=-a+I$, haqıyqatında da $a+I+(-a+I)=a-a+I=I$,

4) $a+I+b+I=a+b+I=b+a+I=b+I+a+I$,

5) $(a+I)\cdot\left[(b+I)\cdot(c+I)\right]=(a+I)(bc+I)=a(bc)+I=$

$$=(ab)c+I=(ab+I)(c+I)=\left[(a+I)(b+c)\right](c+I),$$

6) $(a+I)\left[(b+I)+(c+I)\right]=(a+I)\left[(b+c)+I\right]=a(b+c)+I=$

$$=ab+ac+I=(a+I)(b+I)+(a+I)(c+I),$$

7) $\left[(a+I)+(b+I)\right](c+I)=\left[(a+b)+I\right](c+I)=(a+b)c+I=$

$$=ac+bc+I=(a+I)(c+I)+(b+I)(c+I).$$

Teorema dálillendi.

1.3. Maydan. Maydanlardıń xarakteristikası.

Bos emes P kópliginde qosıw hám kóbeytiw ameli anıqlanǵan bolsın $< P,+,\cdot >$

1-aniqlama. Eger $< P,+,\cdot >$ sisteması tómendegi shártlerdi qanaatlandırsa maydan dep ataladı.

I. $< P,+ >$ - kommutativ gruppa

II. $< P,\cdot >$ - kommutativ gruppa

III. $\forall, a, b, c \in P\big((a+b)c = ac + bc \wedge a(b+c) = ab + ac\big)$ - bólistiriw nızamları.

Eger bul úsh shártti aksomalar járdeminde jazatuǵın bolsaq, tómendegi anıqlamaǵa iye bolamız.

2-aniqlama. Bos emes P kópliginde qosıw hám kóbeytiw ámelleri aniqlanǵan bolıp tómendegi aksiomalar orınlansa maydan delinedi.

1. $\forall, a, b, c \in P \; a + (b + c) = (a + b) + c,$
2. $\exists 0 \in P, \forall a \in P, \; a + 0 = 0 + a = a,$
3. $\forall a \in P, \exists (-a) \in P, a + (-a) = (-a) + a = 0,$
4. $\forall, a, b \in P, a + b = b + a,$
5. $\forall, a, b, c \in P, a(bc) = (ab)c,$
6. $\exists 1 \in P, \forall a \in P, \; 1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$
7. $\forall a \in P, \; \exists a^{-1} \in P, \; aa^{-1} = a^{-1}a = 1,$
8. $\forall a, b \in P, \; ab = ba,$
9. $\forall a, b, c \in P, \; a(b + c) = ab + ac,$
10. $\forall a, b, c \in P, \; (a + b)c = ac + bc.$

Mısallar. Q, R, C - rasional, haqıyqıy hám kompleks sanlar kóplikleri ádettegi qosıw hám kóbeytiw ámellerine baylanıslı maydan boladı. Sonday aq $a, b \in Q$ bolǵanda $a + b\sqrt{2}$ túrindegi sanlar kópligi maydan. Z_n n –moduli boyınsha qalındılar kópligi $n = p$ ápiwayı san bolǵanda maydan dúzedi.

Qálegen maydanda 0, qarama-qarsı element, 1 hám keri element tek ǵana birew.

Haqıyqatında da P maydanda 0 hám $0'$ degen eki element bar dep esaplayıq.

Onda 2- aksioma boyınsha $0 + 0' = 0' + 0 = 0'$ hám $0' + 0 = 0 + 0' = 0$ teńliklerine iye bolamız. Bunnan $0 = 0'$ 1 diń hám keri elementtiń tek ǵana birew ekenligide usıǵan uqsas dálillenedi.

Eger P nıń úles kópligi Q ózide maydan bolsa úles maydan delinedi. Q úles maydan bolıwı ushın tómendegi shártler orınlanıwı zárúr hám jetkilikli.

1. $\forall a,b \in Q \ (a+b \in Q \wedge ab \in Q)$,
2. $\forall (a \neq 0) \in Q \Rightarrow a^{-1} \in Q$

$\{0\} \subseteq P \wedge \{P\} \subseteq P$ trivial úles maydan dep ataladı. Eger P da basqa úles maydanlar bolmasa ápiwayı maydan delinedi. Úles maydanlardıń kesilispesi jáne úles maydan boladı.

$1+1+...+1=n\cdot 1=0$ teńligi orınlanatuǵın eń kishi n- sanı maydannıń xaraktiristikası dep ataladı. Eger bunday san joq bolsa maydannıń xarakteristikası 0 ge teń dep aytıladı. Maydannıń xarakteristikası nolden ózgeshe bolsa ápiwayı san boladı.

Mısalları. Q, R, C maydanlar $Q \subseteq R \subseteq C$ nıń úles maydanları. Zp hám Q- ápiwayı maydan. $\chi(Q)=\chi(R)=\chi(C)=0 \quad \chi(Zp)=p$.

1-teorema. Hár bir P maydanı tek ǵana bir ápiwayı maydan P_0 di óziniń ishinde tutadı. Bul ápiwayı maydan Q ǵa yamasa bazı bir ápiwayı p sanı ushın Z_p ǵa izomorf boladı.

Dálilleniwi. Eki P', P'' - ápiwayı úles maydanları bar deyik. Onda olardıń kesispesi $P' \cap P''$ $(0,1 \in P' \wedge 0,1 \in P''$ bolǵanlıqtan bos emes) P' hám P'' tan basqa úles maydan boladı. P' hám P'' lar ápiwayı úles maydanlar bolǵanlıqtan bul múmkin emes.

Demek $P_0 \in P$ ápiwayı úles maydanı tek ǵana birew.

P_0 úles maydanı 1 menen birge onıń barlıq eseliklerinde ózinde tutadı.

$s\cdot 1+t\cdot 1=(s+t)\cdot 1, \quad (s\cdot 1)(t\cdot 1)=(st)\cdot 1$ teńlikleri orınlı bolǵanlıqtan $f: Z \to P, \ f(n)=n\cdot 1$ sáwlelendiriwi gomomorfizm bolıp, onıń yadrosı Z te idial, hám $Kerf=mZ$ kórinisine iye. Eger $m=0$ bolsa, onda $P \cong Q$ $m \neq 0$ bolsa, $m=p$ ápiwayı san hám $P_0 \cong Zp$.

2-teorema. p ápiwayı sanınıń qálegen $q=p^n$ dárejesi ushın q elementten turatuǵın tek ǵana bir shekli maydan bar boladı. Bul maydannıń elementleri x^q-x kópaǵzalınıń korenleri boladı.

Dálilleniwi. Meyli F xaraktiristikası p ǵa teń maydan bolsın $X(F)=p$. F maydanı ústinde x^q-x kópaǵzalısı sızıqlı kóbeytiwshilerge jiklenetuǵın maydandı qaraymız. Bul maydanda x^q-x kópaǵzalınıń korenlerin qaraymız. Bul kóplik maydan boladı. Sebebi, eger $x^{p^n}=x,\ y^{p^n}=y$ bolsa, onda $(x-y)^{p^n}=x^{p^n}-y^{p^n}$ hám $y\neq 0$ bolsa $\left(\frac{x}{y}\right)^{p^n}=\frac{x^{p^n}}{y^{p^n}}$.

Solay etip, eki korenniń ayırması hám qatnası jáne koren boladı. x^q-x kópaǵzalısı tek ápiwayı korenlerge iye. Sebebi

$$(x^q-x)^1=qx^{q-1}-1=-1, \qquad q\equiv 0(p) \text{ al } -1\neq 0.$$

Solay etip x^q-x kóp aǵzalısınıń korenleriniń kópligi q elementten turatuǵın maydan boladı.

Shekli maydanlar hám olardıń avtomorfizmleri Gaus teoriyasında úlken áhmiyetke iye ekenligin atap ótemiz.

Qadaǵalaw ushın sorawlar:

1. Binar ámeller.
2. Yarımgruppa hám monoidlar.
3. Kerileniwshi elementler.
4. Gruppalar. Agıqlaması hám mısallar.
5. Gruppalardıń gomomorfizmi hám izomorfizmleri.
6. U’lesgruppalar hám faktor gruppalar.
7. Kolcolar hám pútinlik oblastları.
8. Kolcolardıń gomomorfizmleri hám ideallarы.
9. Maydan anıqlaması, mısallar.

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

2-tema. ASSOCIATIV ALGEBRALAR HAQQÍNDA TÚSINIKLER.

REJE:

2.1. Associativ algebralar haqqında ulıwma maǵlıwmatlar
2.2. Birlik elementke iye algebralar.
2.3. Algebranıń orayı. Ideal.

Tayanısh túsinikler: *Associativ algebralar, birlik element, ideal, oń hám shep ideallar, maksimal ideal, matritsalar algebrası.*

2.1. Associativ algebralar haqqında ulıwma maǵlıwmatlar.

Bizge belgili $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}[a, b]$, $M_n(\mathbf{R})$, $\mathbf{F}[a, b]$, kolcoları haqıyqıy sanlar maydanı ústinde anıqlanǵan vektorlıq keńislik (sızıqlı keńislik) dúzedi.

Anıqlama. Eger (A, +, *) algebralıq struktura **P** maydanı ústinde vektorlıq keńislik dúzse, yaǵnıy $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbf{P}$ ushın

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

teńligi orınlı bolsa, onda ol algebra delinedi hám (A, +, *, λ) túrinde belgilenedi.

Eger (A, +, *) kolcosı associativ kolco bolsa, onda (A, +, *, λ) associativ algebra delinedi.

Eger (A, +, *) kolcosı kommutativ kolco bolsa, onda (A, +, *, λ) kommutativ algebra delinedi.

(A, +, λ) sızıqlı keńisliginiń ólshemi algebranıń ólshemi delinedi. Kolcolar teoriyasındaǵı bazıbir qásiyetler algebralar ushında orınlı boladı.

Anıqlama. Eger A algebranıń úles kópligi V berilgen ámellerge baylanıslı algebra dúzse, onda ol *úles algebra* delinedi.

Meyli B kópligi A nıń úleskópligi bolsın. B nı óz ishine alatuǵın eń kishi úles algebra B kóplik járdeminde jasalǵan úles algebra delinedi hám A[B] túrinde belgilenedi.

A[B] kópligi B nı óz ishine alıwshı barlıq úles algebralardıń kesilispesinen ibarat bolatuǵınlıǵı málim.

Algebranıń idealı hám ideal boyınsha dúzilgen faktor algebra túsnikleri, kolconıń idealı hám faktor kolco túsinikleri sıyaqlı anıqlanadı.

Algebralarda anıqlanǵan *gomomorfizm*, sızıqlı sáwlelendiriw bolıp, bir waqıtta kolcolar arasında anıqlanǵan gomomorfizm boladı.

Aassociativ algebranıń orayı tómendegishe anıqlanadı:

$$Z(A) = \{a \in A: ax = xa, \forall x \in A\}.$$

1-Tastıyıqlaw. A algebranıń orayı Z(A) úles algebra boladı.

► Haqıyqatında da, eger $a, a` \in Z(A)$ bolsa onda

1) $(a-a`)x = ax-a`x = xa-a`x = x(a-a`)$, yaǵnıy $a-a` \in Z(A)$.

2) $(aa`)x = a(a`x) = a(xa`) = (xa)a` = x(aa`)$, yaǵnıy $aa` \in Z(A)$.

3) $(\lambda a)x = \lambda(ax) = \lambda(xa) = x(\lambda a)$, yaǵnıy $\lambda a \in Z(A)$. ◄

2-Tastıyıqlaw. Eger A – kommutativ bolsa Z(A) = A hám kerisinshe, Z(A) = A bolsa, onda A – kommutativ.

►Eger A – associativ birlik elementke iye algebra bolsa, onda $\lambda\mathbf{1} \in Z(A)$, $\forall\lambda \in P$ ushın, sebebi $(\lambda 1)x = \lambda(1x) = \lambda x = \lambda(x\cdot 1) = x(\lambda\cdot 1))$.

Demek, $\lambda \to \lambda\cdot 1$ sáwlelendiriwi P nı $Z(A) \subset A$ ǵa ótkeretuǵın monomorfizm boladı. ◄

Mısallar. 1) **P** maydanınıń qálegen (keńeymesi) **F** keńeymesi **P** maydan ústinde anıqlanǵan kommutativ hám associativ birlik elementli algebra boladı:

Q maydanınıń $\mathbf{F} = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ ni qarasaq, ol 2 ólshemli algebra boladı;

Q maydanınıń keńeymesi **R** sheksiz ólshemli algebra boladı.

R maydanınıń keńeymesi **C** 2 ólshemli algebra boladı.

2) Koeffitsientleri **P** maydanına tiyisli bolǵan n ózgeriwshili $K=\mathbf{P}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ kópaǵzalılar kolcosı **P** maydanı ústinde sheksiz ólshemli kommutativ, associativ algebra boladı.

Bunda

$$K = K_0 \oplus K_1 \oplus \ \ldots$$

Yaǵnıy, K – birtekli, dárejesi m (K_0 = **P**) bolǵan kópaǵzalılar K_m úles keńisliklerdiń tuwrı qosındısınan ibarat, bul jerde

$$K_i K_j \subset K_{i+j}.$$

Bunday jikleniwge iye bolǵan algebralar, *graduirlengen algebra* delinedi.

3) elementleri **P** maydanına tiyisli bolǵan barlıq $n\times n$ kvadrat matritsalar kópligi $M_n(\mathbf{P})$, **P** maydanı ústinde ólshemli n^2 bolǵan algebra boladı. Bul algebranıń bazisi sıpatında tómendegi matritsalardı alıw múmkin.

$$\left\{E_{ij} \,/\, i,j=\overline{1,n}\right\},$$

Bul jerde E_{ij} – matritsası i – jol menen j – baǵana kesispesinde 1 (P maydanınıń **1** elementi), basqa elementleri 0 ge teń matritsa. Bul bazis elementleri tómendegi kóbeytiw nızamına baǵınatuǵınlıǵı málim

$$E_{ik} E_{lj} = \delta_{kl}E_{ij}.$$

qálegen $(a_{i,j}) \in M_n(P)$ matritsası E_{ik} lardıń sızıqlı kombinatsiyası arqalı ańlatıladı:

$$\left(a_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Bul algebranıń birlik elementi tómendegi birlik matritsadan ibarat:

$$E=\sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$M_n(\mathbf{P})$ algebrasınıń λE kórinisindegi elementi, onıń qálegen elementi menen orın almasıw qásiyetine iye, yaǵnıy λE elementi algebranıń orayı $Z(M_n(\mathbf{P}))$ da jatadı.

TEOREMA. $Z(M_n(\mathbf{P})) = \{\lambda E : \lambda\in \mathbf{P}\}$.

► Meyli, $Z = (z_{ij}) \in Z(M_n(\mathbf{P}))$ bolsın. Onda

$$ZE_{ij} = E_{ij}Z, \quad i,j=\overline{1,n}.$$

Bul teńlikten

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & z_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & z_{2i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & z_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{j1} & z_{j2} & \dots & z_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ekenligi kelip shıǵadı. Demek, $z_{kj}= 0$ hám $z_{ii}=z_{jj}$.

Eger $z_{ii}= z_{jj}= \lambda$ (i, j = $\overline{1,n}$) bolsa,

$$z_{ij} = \begin{cases} \lambda & егер \quad i = j \\ 0 & егер \quad i \neq j \end{cases} \text{ bolsa, yaǵnıy } z = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E \ \blacktriangleleft.$$

Mısal 1. S(X) – kópligi X topologiyalıq keńisliktegi úzliksiz funktsiyalar kópligi bolsın. S(X) kópligi qosıw, sanǵa kóbeytiw hám kóbeytiw λf, $f+g$, fg ámellerige baylanıslı kommutativ algebra boladı.

2. Aytayıq X – sızıqlı keńislik bolsın. L(X) arqalı X da anıklanǵan barlıq sızıqlı túrlendiriwler B: $X \to X$ kópligin belgileymiz. L(X) kópligi qosıw, sanǵa kóbeytiw hám superpozitsiya ámellerine baylanıslı algebra dúzedi. L(X) algebra kommutativ bolıwı ushın X bir ólshemli bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Eger X – shekli ólshemli bolsa, onda $L(X) \cong M_n(\mathbf{C})$ boladı. L(X) taǵı ámeller matritsalardı qosıw, sanǵa kóbeytiw hám kóbeytiw ámelleri menen birdey boladı.

3. Eger X – banax keńisligi bolsa, V(X) arqalı barlıq shegaralanǵan operatorlar kópligin belgilesek, onda B(X) kópligi qosıw, sanǵa kóbeytiw hám kóbeytiw λV, $A+V$, $A \circ V$ ámellerine baylanıslı algebra dúzedi.

2.2. Birlik elementli algebra.

Eger A algebrası $\forall x \in A$ ushın ex=xe=x (1) teńligin qanaatlandıratuǵın e elementke iye bolsa, onda ol birlik elementli yaki birli algebra dep ataladı.

(1) shártti qanaatlandırıwshı e elementi A algebranıń birlik elementi delinedi.

2.1-Tastıyıqlaw. Birlik elementke iye bolmaǵan qálegen R algebranı birli R\` algebranıń úles algebrası sıpatında qaraw múmkin.

►. R\` algebranı $\{\alpha, x\}$ juplardan dúzilgen keńislik sıpatında qaraw múmkin, bul jerde $\alpha\in\mathbf{C}$, $x\in R$, bolıp, ámeller tómendegishe anıqlanǵan

$$\beta\{\alpha, x\}=\{\beta\alpha, \beta x\};$$

$$\{\alpha_1, x_1\}+\{\alpha_2, x_2\}=\{\alpha_1+\alpha_2, x_1+x_2\};$$

$$\{\alpha_1, x_1\}\{\alpha_2, x_2\}=\{\alpha_1\alpha_2, \alpha_1x_2+ \alpha_2x_1+x_1x_2\}.$$

Bul jerde $e=\{1, 0\}$ elementi R\` algebranıń birlik elementi boladı, sebebi

$$e\{\alpha, x\}=\{1, 0\}\{\alpha, x\}=\{\alpha, x\}$$

R algebra bolsa $\{0, x\}$, $x\in R$ kórinisindegi elementlerden dúzilgen R\` tıń úles algebrası boladı ◄.

R\` algebra R di óz ishine alatuǵın minimal birli algebra bolatuǵını túsinikli. R algebradan R\` algebranı dúziw <u>birdi qosıw</u> dep ataladı.

Eger R – birli algebra bolıp, S onıń úles algebrası bolsa, onda S algebranı óz ishine alıwshı birli algebralardıń kesispesi S ti ishine alıwshı eń kishi algebra boladı hám ol $R`_a(S)$ arqalı belgilenedi.

$R`_a(S)$ kópligi $R_a(S)$ algebrasına birdi qosıw arqalı alınadı hám onıń elementleriniń ulıwma qorinisi $\alpha e+\sum_k \alpha_k a_k$ arqalı ańlatıladı, bul jerde a_k elementi S kópliktiń elementleriniń kóbeymelerinen payda bolǵan.

2.2- Tastıyıqlaw. R birli algebranıń maksimal kommutativ úles algebrası R_1 jáne birlik elementli algebra boladı.

►Eger $e \notin R_1$, bolsa onda e ge birdi qosıw nátiyjesinde R kommutativ algebranı payda etemiz. Bul bolsa R_1 diń maksimal ekenligine qarama-qarsı ◄.

Eger x hám u elementler ushın $ux=e$ shárti orınlansa, onda u element x tiń shep jaq keri eelemnti delinedi, al x element bolsa u tiń ońjaq keri elementi delinedi. x elementiniń shep jaq keri elementi x_l^{-1} hám ońjaq keri elementi x_r^{-1} dep belgilenedi.

Qálegen elementtiń ońjaq keri elementi menen sol jaq keri elementi óz-ara teń boladı:

$$x_r^{-1}=(x_l^{-1}x)\, x_r^{-1}=x_l^{-1}(xx_r^{-1})= x_l^{-1}e= x_l^{-1}.$$

2.3-Tastıyıqlaw. Eger x hám u elementler orın almasıwshı bolıp, x^{-1} bar bolsa, onda x^{-1} de orın almasıwshı boladı.

► xu=ux teńliginiń eki jaǵın x^{-1} ge kóbeytsek $ux^{-1}=x^{-1}u$ teńligi kelip shıǵadı ◄.

2.4-Tastıyıqlaw. Eger R_1 maksimal kommutativ úles algebra bolıp $x\in R_1$ hám $\exists x^{-1}$ bar bolsa, onda $x^{-1}\in R_1$.

► 2.3 tastıyıqlawı boyınsha x^{-1} element R_1 diń barlıq elementleri menen orın almasıwshı bolsa, R_1 diń maksimal ekenliginen $x^{-1}\in R_1$ kelip shıǵadı ◄.

Birlik elementli hám qálegen elementikerileniwshi bolǵan algebra **dene** delinedi.

2.5-Tastıyıqlaw. Eger R birlik elementli hám qálegen elementiniń shep keri elementi bar bolsa, onda R – dene boladı.

► Aytayıq, $x \in R$, hám $x\neq 0$ bolsın. Shárt boyınsha, $\exists a \in R$ bolıp ax=e boladı. Aytayıq, xa=b bolsın. Onda, $b\neq 0$, sebebi keri jaǵdayda a=axa=ab=0 boladı hám bul qarama-qarsılıq. Sonıń ushın b shep jaq keri elementke iye. Bul elementti u dep belgilesek, ub=e boladı, demek uxa=e.

Solay etip, biz a element (ux) shep jaq keri elementke hám x oń keri elementke iye ekenin kórsettik. Shep hám oń keri elementler teń bolǵanlıqtan x=ux, demek e=uxa=xa. Demek a elementi x tiń oń hám shep keri elementi boladı, yaǵnıy $a=x^{-1}$ ◄.

Joqarıdaǵıǵa uqsas tastıyıqlaw ońjaq keri element ushında orınlı.

Eger e+u elementi e+x elementine shep jaq keri element bolsa, onda u elementi x elementiniń shep jaq kvazikeri elementi delinedi, yaǵnıy

$$(e+u)(e+x)=e \Leftrightarrow x+u+ux=0,$$

Oń jaq kvazikeri elementide usıǵan uqsas anıqlanadı.

Mısal. 1. S(X) birlik elementli kolco boladı, bunda birlik funktsiya birlik element rolin atqaradı.

2. L(X) hám V(X) algebralar hám birlik elementli kolco boladı, bul jerde e=E – operator birlik element rolin atqaradı.

2.3. Algebranıń orayı. Ideal.

Tómendegi Z(A) kópligi A associativ algebranıń *orayı* delinedi:

$$Z(A) = \{a \in A: ax = xa, \forall x \in A\}.$$

3.1-Tastıyıqlaw. A algebranıń orayı Z(A) úles algebra boladı.

Z(A)=A hám kerisinshe Z(A)=A bolsa A kommutativ.

R algebrasınıń I úles kópligi tómendegi shártlerdi qanaatlandırsa ol ideal delinedi.

1^0. I kópligi R diń úles keńisligi.

2^0. $IR \subset I$, yaǵnıy $ax \in I$, $\forall a \in I$, $x \in R$.

(sáykes túrde $RI \subset I$, yaǵnıy $ax \in I$, $\forall a \in I$, $x \in R$).

Eger $I \neq R$ bolsa, onda I menshik idealı delinedi.

Eger R birlik elementli algebra bolsa, onda onıń menshik idealı birlik elementti óz ishine alıwı múmkin emes. Haqıyqatında da, eger $e \in I$, bolsa $\forall x \in R$ ushın $x=ex=xe \in I$, yaǵnıy, R=I – bul qarama-qarsılıq ◄.

3.2-Tastıyıqlaw. Birlik elementli algebranıń x elementi shep (oń) keri elementke iye bolıwı ushın ol hesh qanday shep(oń) idealǵa tiyisli bolmawı zárúr hám jetkilikli.

► Aytayıq x shep keri elementke iye, yaǵnıy $e= x_l^{-1}x$ hám bazıbir shep I idealǵa tiyisli bolsın. Onda $e=x_l^{-1}x \in RI \subset I$, bul bolsa qarama-qarsılıq, demek x hesh qanday shep idealǵa tiyisli emes.

Kerisinshe, eger x hesh qanday shep(oń) idealǵa tiyisli bolmasa, onda I arqalı ux, $u \in R$ kórinisindegi barlıq elementlerdi belgileymiz. Bul kóplik R ge teń bolıwı múmkin emes. Keri jaǵdayda, $u_o \in R$ tabılıp, $u_o x=e$, yaǵnıy $u_o=x_l^{-1}$ boladı. Bunnan $I=\{ux : u \in R\}$ diń shep ideal ekenligi hám bul ideal x=ex elementti óz ishine alatuǵınlıǵı kelip shıǵadı ◄.

R algebranıń shep(oń) idealı R den basqa ideallarda úles ideal bolmasa **maksimal** ideal delinedi.

3.3-Tastıyıqlaw. R birlik elementli algebranıń qálegen shep(oń) idealı bazıbir maksimal idealǵa úles(ideal) boladı.

►Aytayıq, I ideal R diń shep idealı bolsın. I di óz ishine alatuǵın ideallar kópliginde dara tártip ornatamız. Bul tártip Tsorn lemması shártlerin qanaatlandıradı. Haqıyqatında da I idealdı óz ishine alıwshı $I_\alpha \supset I$ ideallar ushın, olardıń birikpesi $\bigcup_\alpha I_\alpha$ joqarı shegara wzaıypasın atqaradı. $e \notin I_\alpha$ bolǵanlıqtan $e \notin \bigcup_\alpha I_\alpha$ boladı, demek, $\bigcup_\alpha I_\alpha$ ideal R ge teń emes. Tsorn lemması boyınsha, I idealdı óz ishine alıwshı ideallar ushında bul tastıyıqlaw joqarıdaǵı sıyaqlı dálillenedi.

Saldar. Birlik elementli R algebranıń x elementi shep keri elementke iye bolıwı ushın ol hesh qanday maksimal shep idealǵa tiyisli bolmawı zárúr hám jetkilikli.

R algebranıń I úles kópligi bir waqıtta oń hám shep ideal bolsa, o leki jaqlı ideal delinedi.

Eger R algebra ózi hám nolden basqa idealǵa iye bolmasa ápiwayı algebra delinedi.

Aytayıq, I kópligi R diń eki jaqlı idealı bolsın. $x_1, x_2 \in R$ elementleri ushın $x_1 - x_2 \in I$ bolsa, bul eki eoement I ǵa baylanıslı ekvivalent elementler delinedi. Demek, R algebra berilgen I ideal boyınsha kesispeytuǵın ξ, η, … ekvivalent klasslarǵa bólinedi. Bul klasslar R algebranıń berilgen I idealı boyınsha irgeles klassları delinedi.

R_1 arqalı algebranıń berilgen I ideal boyınsha irgeles klasslarınıń kópligin belgileymiz. I_i kópliginde qosıw, sanǵa kóbeytiw hám kóbeytiw ámellerin tómendegishe anıqlaymız:

$$(x+I)+(y+I)=x+y+I,$$

$$\lambda(x+I)=\lambda x+I,\ \ \lambda\in I,$$

$$(x+I)\,(y+I)=xy+I.$$

I – eki jaqlı ideal bolǵanı ushın, R_I de anıqlanǵan ámeller durıs(korrekt) boladı hám R_I – bul ámellerge baylanıslı algebra dúzedi. R_I algebra faktor algebra delinedi hám R/ I dep belgilenedi.

Eger eki jaqlı ideal basqa heshqanday eki jaqlı idealǵa úles bolmasa, onda ol maksimal ideal delinedi.

Joqarıdaǵıǵa uqsas tómendegi tastıyıqlawdı dálillew múmkin.

3.4-Tastıyıqlaw. Birlik elementli algebranıń qálegen eki jaqlı idealı bazıbir maksimal idealǵa úles boladı.

Qadaǵalaw sorawları:

1. Associativ kolco anıqlaması. Mısallar.
2. Associativ algebra anıqlaması. Mısallar.
3. Kommutativ kolco anıqlaması. Mısallar.
4. Kommutativ algebra anıqlaması. Mısallar.
5. Associativ algebranıń orayı.
6. Graduirlengen algebra. Mısallar.

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

3-tema. ASSOCIATIV EMES ALGEBRALARDÍŃ TÚRLERI HÁM OLARDÍ ANÍQLAW USÍLLARÍ.

REJE:

3.1. Associativ emes algebralardıń túrleri.
3.2. Associativ emes algebralar arasındağı baylanıslar.
3.3. *Kishi ólshemli Li, Leybnic va Zinbiel algebralarınıń klassifikaciyası.*

Tayanısh sózler: *algebra, Li algebrası, Leybnits algebrası, ideal, differentsiallaw.*

3.1. Associativ emes algebralar túrleri.

1 – anıqlama: Tómendegi shártler orınlansa R kópligi(sızıqlı) algebra delinedi

1) R – sızıqlı keńislik bolsa;

2) R de kóbeytiw ámeli anıqlanǵan bolsa, ol $\forall x, y, z \in R$ hám $\forall \alpha$ sanı ushın tómendegi teńliklerdi qanaatlandırsa:

a) *α(xy)=(αx)y=x(αy)*,

b) *(xy)z=x(yz)*,

v) *(x+y)z=xz+yz*,

g) *x(y+z)=xy+xz*.

1–mısal. C(X) – X topologiyalıq keńisliktegi barlıq kompleks mánisli úzliksiz funktsiyalar kópligi $\lambda f,\ f+g,\ fg$ ámellerine baylanıslı kommutativ algebra dúzedi. Dara jaǵdayda S[0,1].

2–anıqlama. F maydan ústindegi G algebranıń qálegen x,y,z$\in$G elementi ushın

1. *[x, x] = 0* – antikommutativlik

2. *[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0* – Yakobi birdeylikleri orınlansa,

onda G algebrası Li algebrası delinedi.

3–anıqlama. F maydanı ústindegi L algebranıń qálegen x,y,z elementleri ushın

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

teńligi orınlansa, onda L algebrası Leybnits algebrası delinedi.

4–anıqlama. F maydanı ústinde A algebrası tómendegi eki shártti qanaatlandırsa:

1) $xy = yx$

2) $x^2(yx) = (x^2y)x$

Yordan algebrası delinedi.

Yordan algebraların úyreniwde onnan keńirek associativ algebra- alternativ algebralar úlken rol oynaydı. Bul algebralar tómendegi birdeylikler menen anıqlanadı.

1) $x^2(yx) = x(xy)$ 2) $yx^2 = (yx)x$

1) ni qanaatlandıratuǵın algebralar shep alternativ algebralar,

2) ni qanaatlandıratuǵın algebralar oń alternativ algebralar delinedi.

Qálegen associativ algebra alternativ algebra boladı. Basqa jaqtan alternativ algebranıń qálegen eki elementi associativ úles algebra jasaydı, demek alternativ algebralar associativ algebralarǵa júdá jaqın.

5-anıqlama. F maydanı ústinde anıqlanǵan L algebrası hám onıń J úles kópligi ushın $\forall x \in L$ hám $\forall a \in J$ ushın $xa \in J$ ($ax \in J$) shárti orınlansa, onda J úles kópligi L algebranıń oń(shep) idealı delinedi.

Egerde J– bir waqıttıń ózinde oń hám shep ideal bolsa, onda J di L diń idealı deymiz.

6-anıqlama. A hám G algebralar berilgen bolsın. φ:A→G sáwlelendiriwi $\forall$x,y$\in$A ushın φ(xy)=φ(x)φ(y) teńligi orınlansa onda φ gomomorfizm delinedi. φ óz-ara bir mánisli φ gomomorfizmin izomorfizm delinedi.

7-anıqlama. L algebra hám H onıń úles kópligi bolsın. Eger H kópligi L degi ámellerge baylanıslı algebra dúzetuǵın bolsa, bul algebra L diń úles algebrası delinedi.

8-anıqlama. L algebrası hám J onıń idealı ushın L/J - faktor kópligi L degi ámellerge baylanıslı algebra dúzse, L/J ge L diń faktor algebrası delinedi.

9-anıqlama. Eger qálegen $x,y\in L$ ushın tómendegi teńlik orınlansa**:**

$$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$$

onda $d:L\to L$ sızıqlı sáwlelendiriwi berilgen L algebrasında differentsiallaw delinedi.

Eger d_1 hám d_2 – differentsiallawlar bolsa,

$$[d_1,d_2]=d_1\circ d_2-d_2\circ d_1$$

de differentsiallaw boladı.

Der(L) arqalı L algebrasınıń barlıq differentsiallawlar kópligin belgileymiz. (der(L),[-,-]) – Li algebrası bolatuǵını málim. L- Li algebrasında $\forall a\in L$ ushın

$$ad_a:L\to L$$

sálelendiriwdi tómendegishe anıqlaymız:

$ad_a(x)=[x,a]$ ada – differentsiallaw dúzedi

Inder(L) - arqalı tómendegi kóplikti belgileymiz

$$Inder(L)=\{ad_a|a\in L\}$$

Bul kóplikke L algebranıń ishki differentsiallawı delinedi.

Frantsuz matematigi J.L.Loday Li algebrası túsinigin keńeytip Leybnits algebrasın kiritken. Li algebrası teoriyalıq fizikada, kvant maydanlar teoriyasında, fizika hám matematikanıń basqa bir qansha bólimlerinde áhmiyetli rol oynaydı.

Leybnits algebrası tómendegi birdeylik penen anıqlanadı:

$$[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]] \qquad (1)$$

Bul algebra Li algebrasınıń kommutativ emes ulıwmalasqanı boladı, sebebi L de $[x,x]=0$ shárti orınlansa (1) birdeylik Yakobi birdeyligine aylanadı.

Házirgi zaman algebrasında associativ, kommutativ, Li, Leybnits algebraları menen baylanıslı bolǵan jańa Zinbiel, diassociativ, dendriform algebralar keń úyrenilmekte.

3.2. Associativ emes algebralar arasındaǵı baylanıslar.

Eger associativ, kommutativ, Li, Leybnits, dendriform, diassociativ, Zinbiel algebralar dúrkinlerin sáykes túrde As, Com, Lie, Lieb, Dend, Dias, Zinb dep belgilesek, onda bul algebra dúrkinleri arasında tómendegi baylanıs ornatıladı:

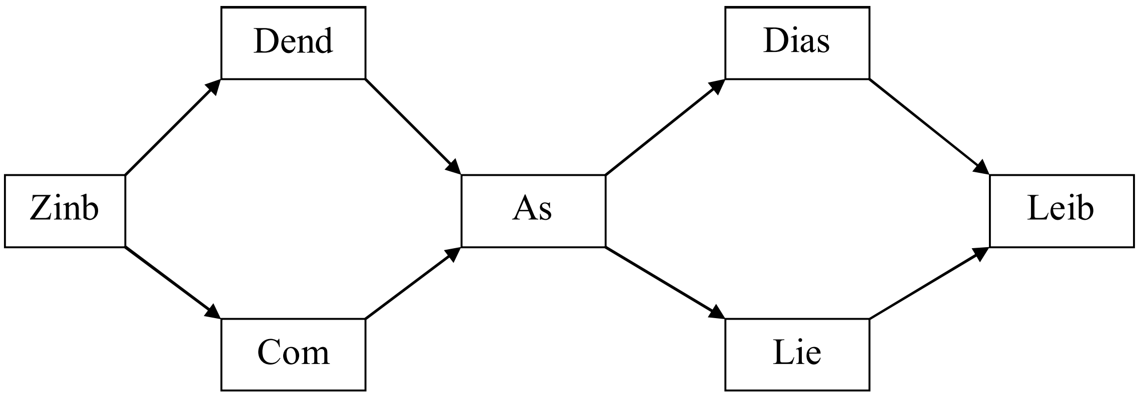
$[x,y]_{Lie}$:As$\rightarrow$ Lie: $[x,y]_{Lie}=xy-yx$ – associativ algebrada eańa ámel anıqlanǵan bolıp Li algebrasın hasıl qılamız.

$\bullet$:Zind$\rightarrow$ Com: $x\bullet y=xy+yx$

*:Dend$\rightarrow$ As $x*y=x<y+x>y$

$[x,y]_{Leib}$:Dias$\rightarrow$ Leib: $[x,y]_{Leib}=x\dashv y-y\vdash x$

Demek, biz dúrkinler arasındaǵı baylanıslardı anıqlawshı tómendegi diagrammaǵa iye bolamız.



K maydanı ústinde berilgen qálegen shekli ólshemli algebralarda $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ bazis bar bolıp, $e_i\cdot e_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ij}^{k}e_k$ orınlı, bunda $\alpha_{ij}^{k}\in K$.

Shekli ólshewli algebralardı úyreniwde olardıń bayanı úlken áhmiyetke iye.

3.3. Kishi ólshemli algebralardıń klassifikatsiyası.

F – skalyarlar kolcosı ústindegi Li algebrası dep

$$x^2=0 \text{ (antikommutativlik)}$$

$$(xy)z+(yz)x+(zx)y=0 \text{ (Yakobi birdeyligi)}$$

orınlanatuǵın L algebrasıga aytılatuǵınlıǵın eskertip ótemiz. (Kóbinese F – maydan bolǵan jaǵday úyreniledi).

Eger A– associativ algebra bolsa (F – diń ústinde) onda $A^{(-)}$ kópligi [x,y]=xy-yx kóbeytiwge baylanıslı Li algebrası boladı. Usıǵan baylanıslı Li algebrasındaǵı kóbeytiwdi [x,y] arqalı belgileydi. Eger F=F – maydan bolsa, onda Puankare-Birkxof-Viet teoreması boyınsha qálegen Li algebrası L bazıbir múnásip $A^{(-)}$ associativ algebrasına (biriktiriledi) jaylastırıladı. F=F – maydan bolǵanda Li algebrası $gl(n,F)$ – tolıq sızıqlı Li algebrası delinedi. Shekli ólshemli Li algebrasın klassifikatsiyalawda tómendegi tórt A_l, B_l, C_l, D_l algebraları úlken rol oynaydı. Bul algebralar klassikalıq Li algebraları dep ataladı.

A_l: Meyli $\dim V = l+1$ bolsın $sl(V)$ yamasa $sl(l+1,F)$ arqalı izi nolge teń bolǵan V nıń endomorfizmler kópligin belgileymiz. Onda $sl(V)$ kópligi $gl(V)$ da úles algebra boladı hám arnawlı sızıqlı Li algebrası dep ataladı. $\dim sl(l+1,F) = l(l+2)$ ekenligin túsiniw qıyın emes.

B_l: Meyli $\dim V = 2l+1$ hám f–aynımaǵan simmetriyalıq bisızıqlı forma (Vda) bolıp onıń matritsası V nıń bazıbir bazisinde $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_l \\ 0 & E_l & 0 \end{pmatrix}$ kórinisine iye bolsın, bunda E_i – tártibi l –ge teń bolǵan birlik matritsa. Ortogonal Li algebrası $O(2l+1,F)$ dep, $gl(V)$ algebrasınıń V nıń barlıq kososimmetriyalıq φ endomorfizmlerinen turatuǵın úles algebrasına aytıladı (yaǵnıy $f = (\varphi(v), w) = -\varphi(v, \varphi(w))$) shártin qanaatlandıratuǵın hám $\dim O(2l+1,F) = l(2l+1)$ bolatuǵın.

C_l: Meyli $\dim V = 2l$ hám f aynımaǵan V daǵı matritsası $\begin{pmatrix} 0 & E_i \\ E_i & 0 \end{pmatrix}$ bolǵan kososimmetriyalıq Li algebrası dep $gl(V)$ algebrasınıń f ke baylanıslı kososimmetriyalıq bolatuǵın V nıń barlıq endomorfizmlerinen turatuǵın úles algebrası $Sp(V)$ yamasa $Sp(2l,F)$ algebrasına aytıladı, bunda $\dim Sp(2l,F)=l(2l+1)$ boladı.

D_l: Ortogonal Li algebrası B_l jaǵdayındaǵıǵa uqsas anıqlanadı. Bul jaǵdayda $\dim V=2l$ hám f formasınıń matritsası $\begin{pmatrix} 0 & E_i \\ E_i & 0 \end{pmatrix}$ túrine iye bolıp, bul jaǵdayda $\dim O(2l+1,F)=l(2l-1)$.

Eger F xarakteristikası 0 ge teń bolǵan maydan bolsa, onda barlıq Li klassikalıq algebra $A_l,B_l,C_l,D_l\ (l\geq 1)$ hám $D_l\ (l\geq 3)$ lerdiń bári ápiwayı algebralar boladı.

Endi ayrıqsha ápiwayı shekli ólshemli Li algebralarınıń mısalların keltiremiz.

Meyli $O=O(F)$, F maydanı ústinde anıqlanǵan Kelt-Dikson algebrası bolsın, $J=H(O_3)$ $-O$ ústindegi tártibi 3 ke teń ermit matritsalarınıń Yordan algebrası bolsın.(Albert algebrası). Onda $G_2=DerO,\ F_4=DerJ,\ E_6=strL_0J$ (J algebrasınıń keltirilgen strukturalıq algebrası) hám $E_7=K(J)$ (Tite-Kantor-Këxer) algebrası ólshemleri sáykes 14, 52, 78 hám 133 ke teń bolǵan ápiwayı oraylıq Li algebraları boladı. E_8 algebrası tómendegi Tite konstruktsiyası járdeminde dúziledi.

Meyli $t(a), a$ elementiniń O algebrasındaǵı izi, $tr(x)-x$ matritsasınıń J algebrasındaǵı izi bolsın. O_0 hám J_0 ler sáykes O hám J de izi nolge teń elementler kópligi bolsın. $\forall a,b\in O$ hám $x,y\in J$ ushın $a*b=ab-\frac{1}{2}t(ab),\ x*y=xy-\frac{1}{3}tr(xy)$ dep alamız. Onda $a*b\in O_0,\ x*y\in J_0$. Endi vektorlıq keńisliklerdiń tuwrı qosındısın qaraymız

$$E_8=derO\oplus O_0\oplus J_0\oplus DerJ$$

Bul kóplikte anti kommutativ kóbeytiw ámelin tómendegishe anıqlaymız.

1) $DerO\oplus DerJ$ qosındısı E_8 úles algebra;

2) $[a\otimes x,D]=aD\otimes x,\ [a\otimes x,E]=a\otimes xE$ barlıq $D\in DerO,\ E\in DerJ,$

$a\in O_0,\ x\in J_0$;

3) $[a\otimes x,b\otimes y]=\frac{1}{12}tr(xy)D_{a,b}+(a*b)\otimes(x*y)+\frac{1}{2}t(ab)[R_x,R_y],\forall a,b\in O_0$, $x,y\in J_0$, bunda $D_{a,b}=R_{[a,b]}-L_{[a,b]}-3[L_a,R_b]\cong DerO$. Payda bolǵan E_8 algebrası ólshemi 248 ge teń bolǵan ápiwayı Li algebrası boladı eken. G_2,F_4,E_6,E_7,E_8 algebraları ayrıqsha Li algebraları delinedi.

Joqarıda keltirilgen mısallar menen barlıq ápiwayı shekli ólshemge iye Li algebraları ($xap=0$ maydan ústinde) jazıladı.

Qálegen shekli ólshemli ápiwayı Li algebrası yamasa $A_l(l41),B_l(l42),C_l(l43),D_l\ (l\geq 4)$ klassikalıq algebralarınıń birine yamasa G_2,F_4,E_6,E_7,E_8 algebralarınıń birewine izomorf.

Li algebrasınıń strukturalıq teoriyası xarakteristikası 0 ge teń F maydanı ushın juwmaqlanǵan kóriniske iye.

Meyli L li algebrası shekli ólshemli F maydanı ústinde anıqlanǵan bolsın S=S(L) – onıń sheshimli radikal, N=N(L) eń úlken nilpotent idealı yamasa L algebrasınıń nilradikalı bolsın. N(A) qálegen shekli ólshemli Li algebrası A ushın bir mánisli anıqlanǵan. Sebebi, qálegen Li algebrasında eki nilpotent idealdıń qosınlısıda nilpotent ideal boladı. $N\leq S$ qatnası qatań bolıwı múmkin, biraq N=0 bolsa S=0. Bul jaǵdayda L algebrası yarımápiwayı boladı; F maydanı ústindegi qálegen yarımápiwayı algebra ápiwayı algebralardıń tuwrı qosındısına izomorf. Kerisinshe ápiwayı algebralardıń tuwrı qosındısı yarımápiwayı boladı.

Shekli ólshemli associativ algebralar ushın dálillengen Vedderbern-Maltsevtiń radikaldıń bólinip shıǵıwı haqqındaǵı teoremaǵa uqsas teorema Li algebraları ushın Levi-Maltsev-Xarish Chandra tárepinen dálillengen. Bul teorema boyınsha L algebrası $B\cong L/S$ yarımápiwayı úles algebraǵa iye bolıp $L=B\oplus S$ (vektorlıq keńisliklerdiń tuwrı qosındısı) teńligi orınlanadı, bunda eger B_1 basqa yarımápiwayı úles algebra bolsa, onda $B_1=\varphi(B)$, bul jerde φ - L diń avtomorfizmi.

Yordan algebraları. Eger algebra tómendegi eki birdeylikti qanaatlandırsa:

$$xy = yx, \quad (x^2 y)x = x^2(yx)$$

Yordan algebrası dep ataladı.

Tiykarǵı mısalları.

1. A- associativ algebrada $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ dep $A^{(+)}$ – algebraǵa iye bolamız bul joqarıdaǵı eki birdeylikti qanaatlandıradı.

Qadaǵalaw sorawları:

1. Sızıqlı algebra.
2. Li algebrası.
3. Leybnits algebrası.
4. Yordan algebrası.
5. Li, Leybnits hám Yordan algebralarınıń klassifikatsiyası.

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. Albeverio, S., Ayupov, Sh.A. and Omirov, B.A.: On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. Algebra. (2005), 159–172.

2. Loday. J. L. Dialgeras. Prepublication del'Inst. De Recherche Math. Avancee (Strasbourg). V. 14(1999). 61 pp.

3. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. – 1993. - Vol. 39. – P. 269-293.

4. Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M. Nilpotency of Zinbiel algebras. J. Dyn. Control. Syst., vol. 11(2), 2005, p. 195-213.

4-tema. ZAMANAGÓY ALGEBRA MÁSELELERI BOYÍNSHA SOŃǴÍ JÍLLARDA SHET ELDE HÁM RESPUBLIKAMIZDA ÚYRENILIP ATIRǴAN MASHQALALAR HÁM OLARDIŃ SHESHIMLERINIŃ ANALIZI.

REJE:

4.1. Házirgi kúnde associativ emes algebralardı úyreniwdiń aktuallıǵı.
4.2. Associativ emes algebralar boyınsha tiykarǵı túsinikler.
4.3. Sońǵı jıllarda alınǵan tiykarǵı nátiyjeler.

Tayanısh sózler: *Leybnits algebrası, Leybnits superalgebrası, nilpotent, nilindeks, nilradikal, filiform, nul-filiform, differentsiallaw, graduirlengen grL algebra.*

4.1. Házirgi kúnde associativ emes algebralardı úyreniwdiń aktuallıǵı.

Algebralıq qurallar kvant teoriyasınıń elementar bóleksheler, qattı hám kristal zatlardıń qásiyetleri, populyatsiyalıq biologiya máseleleri, ekonomikalıq máselelerdiń modellarin analiz etiwde júdá paydalı esaplanıladı. Algebralardıń dáslepki klassı esaplanǵan, associativ algebralar matritsalardı kóbeytiw ámeli boyınsha jabıqlıǵı nátiyjesinde payda bolǵan bolsa, keyinrek algebralar teoriyasınıń pát penen rawajlanıw nátiyjesinde, matematikanıń basqa tarawları menen baylanıslı bolǵan alternativ, Li hám Yordan algebraları teoriyası payda boldı. Leybnits algebraları Li algebralarınıń ulıwmalıǵı bolıp esaplanıladı, Li algebralarında orınlı bolatuǵın bir qansha qásiyetlerdi Leybnits algebraları ushında dawam ettiriw múmkin. Li algebraları teoriyasınan belgili bolǵan teoremalardı Leybnits algebraları ushın dálillew menen birge Li bolmaǵan Leybnits algebralarınıń qasiyetlerin tabıw menen baylanıslı izertlewler házirgi kúnde associativ emes algebralar teoriyasınıń tiykarǵı baǵdarlarınan biri bolıp kelmekte.

Li algebralarınıń klassikalıq teoriyasınan belgili, shekli ólshemli Li algebraları ústinde alıp barılatuǵın izertlewler sheshiliwsheń Li algebraların klassifikatsiyalawǵa alıp kelinedi. Óz gezeginde Leybnits algebraları da yarımápiwayı Li algebrası hám sheshiliwsheń radikaldıń tuwrı qosındısı kórinisinde ańlatıladı. Nilradikalı ayrıqsha tipke iye bolǵan shesheliwsheń algebralar túrli fizikalıq modeller menen baylanıslı. Sonıń ushın Li algebraları teoriyasında bolǵanı sıyaqlı, nilradikallı berilgen shekli ólshemli sheshiliwsheń Leybnits algebralardı klassifikatsiyalawda aktual mashqalalardan esaplanıladı.

Nilpotent algebralar sheshiliwsheń algebralardıń úles klassı esaplanıp, barlıq nilpotent algebralardı klassifikatsiyalaw máselesi júdá quramalı. Sonıń ushın, nilpotent algebralardı qosımsha shártlertiykarında klassifikatsiyalanadı. Dara jaǵdayda, olardı klassifikatsiyalawda nilindeksi anıq bolǵan algebralar klassın ajıratıp alıw tiykarǵı belgilerdiń biri bolıp, bunday klasslardıń dáslepkisi filiform Leybnits algebraları. Filiform Leybnits algebraları ápiwayıraq shártlerge iye bolıwına qaramastan, jeterli dárejede quramalı dúiziliske iye hám olardı kllassifikatsiyalawda graduirovka shártin qollaw qolay esaplanılad. Maksimal graduirovkanıń nátiyjeliligi sonnan ol algebranıń kóbeytiw tablitsasındaǵı strukturalıq turaqlılıar haqqında anıq maǵlıwmat beredi.

Qısıw, buzılıw hám deformatsiya túsinikleri algebraǵa fizikadan kirip kelgen bolıp, tiykarınan Li algebrasın qısıw, fizikalıq kóz qarastan, qandayda bir fizikalıq model basqasın invariantlar gruppası tásiriniń limiti járdeminde payda etilgenligin ańlatadı. Óz gezeginde, deformatsiya berilgen tiptegi obektlar kóptúrliliginiń kishi átirapındaǵı lokal dúzilisin xarakterleydi. Sonıń ushın, Leybnits algebralarınıń deformatsiyaları, geometriyalıq qásiyetleri, strukturalıq teoriyaları hám kogomologiyasın úyreniw júdá kerekli. Berilgen algebralıq kóptúrlilik shekli sandaǵı keltirlmeytuǵın komponentalardıń birikpesinen ibarat bolǵanlıǵı, qattı algebralar orbitalarınıń jabılması bolsa keltirilmeytuǵın komponentanı bergenligi sebepli, shekli ólshemli algebralardıń geometriyalıq qásiyetlerin anıqlawda qattı algebralardı tabıw ayrıqsha áhmiyetke iye. Leybnits algebraları hám olardıń kogomologiyalıq qásiyetleriniń, Yordan algebraları, Li algebraları, hámde olardıń ulıwmalıǵı menen óz-ara baylanıslılıǵı dissertatsiya teması menen baylanıslı izertlewlerdiń zárúrligin ańlatadı.

Li algebralarınıń jáne bir ulıwmalıǵı esaplanǵan Li superalgebraları matematikalıq fizikanıń supersimmetriya qásiyetleri járdeminde anıqlanǵan. Leybnits superalgebraları tek ǵana Leybnits algebralarınıń, bálki Li superalgebralarınıń da ulıwmalıǵı esaplanıp, olardıń qásiyetlerin anıqlawda tábiyiy túrde Leybnits algebraları hám Li superalgebraları kóptúrliligindegi usıllardan paydalanıladı. Leybnits algebrasındaǵı sıyaqlı maksimal nilindeksli yaki nilindeksi ólshemine teń bolǵan nilpotent Leybnits superalgebraların klassifikatsiyalaw shekli ólshemli Leybnits superalgebraları teoriyasınıń ayrıqsha máselelerinen biri bolıp esaplanıladı.

Házirgi kúnde Li algebralardıń ulıwmalıǵı esaplanǵan Leybnits algebraları klassı pát penen úyrenilmekte. Leybnits algebraları ótken ásirdiń 90-jıllarında frantsuz matematigi J.L. Lode tárepinen usı

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Leybnits birdeyligi menen xarakterlenetuǵın algebra sıpatında pánge kiritilgen[1].

Aytıp ótiw kerek, Leybnits birdeyligin qanaatlandırıwshı algebra birinshi bolıp 1965 jılda A. Bloxniń jumısında D-algebralar atı menen kiritlgen edi. Biraq, D-algebralardı úyreniwge onsha itibar berilmegen bolıp, tekǵana J.L. Lode hám T.Pirashviliniń jumıslarınan Leybnits algebraları tereń úyrenile baslandı hám házirgi kúnge kelip bul algebraǵaa baǵıshlanǵan bir qatar maqalalar shıǵarıldı.

J.L. Lode hám onıń ilimiy kásiplesleri tárepinen tiykarınan Leybnits algebraları kogomologiyalıq kóz qarastan úyrenilgen bolsa, Sh.A. Ayupov, B.A. Omirov, I.S.Raximov, I.M. Rixsiboev, A.X.Xudoyberdiev hám basqa alımlardıń jumıslarında bul obekttiń strukturalıq teoriyası úyrenilgen.

Leybnits algebraları klassı Li algebralarınıń ulıwmalıǵı bolǵanlıǵı ushın, tábiyiy túrde nilpotent hám sheshimli Li algebralar teoriyasında orınlı bolatuǵın bir qansha nátiyjeler hám usıllar Leybnits algebralarına shekem keńeytirildi.

Shekli ólshemli Li algebraları klassikalıq teoriyasınan belgili, shekli ólshemli Li algebraların úyreniw nilpotent Li algebraların úyreniw máselesine keltirilgen. Maksimal nilindekske iye bolǵan Li algebralar klassı bolsa nilpotent Li

[1] Goze M., Khakimdjanov Yu. Nilpotent Lie Algebras. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. – 1996. Vol. 361. – 336 p.

algebralar klassınıń tiykarǵı bólimi esaplanıladı.

Li algebraları ushın maksimal nilindeks, algebra ólshemi menen birdey, hámde bunday algebralar filiform algebraları dep atalatuǵınlıǵı belgili. Leybnits algebralarınıń Li algebralarınan parıq etiwshi táreplerinen biri sonda, onıń maksimal nilindeksi algebra ólsheminen birewge kóp boladı hám bunday Leybnits algebralar nul-filiform Leybnits algebraları delinedi.

Sonıń ushın, nilindeksi algebranıń ólshemine teń bolǵan Leybnits algebraların, yaǵnıy filiform Leybnits algebraların úyreniw ayrıqsha esaplanıladı. Filiform Leybnits algebraları nilpotent algebralarınıń derlik ápiwayı bólimi bolıwına qaramastan, olar jeterli dárejede quramalı qásiyetlerge iye. Sonıń ushın, olardı graduirovka shártleri menen úyreniw qolaylıraq hám bul boyınsha tábiyiy túrdegi graduirovka, maksimal uzınlıqtaǵı graduirovka, berilgen filtrlewge sáykes keliwshi graduirovkalar sıyaqlı túrli graduirovkalardan paydalanıladı.

Sheshimli Leybnits algebraların úyreniwde Leybnits algebrasınıń nilradikalı hám nilradikaldıń differentsiallawları tiykarǵı rol oynaydı. Sheshimli Leybnits algebrasınıń hám nilradikal ólshemleriniń parqı nilradikaldıń nil-nilpotent bolmaǵan differentsiallawlardıń maksimal sanınan asıp ketpeydi. Sońǵı jıllarda nilradikalı berilgen sheshimli Leybnits algebralarınıń qollanılıwına baylanıslı bir qansha jumıslar baspadan shıǵarılǵan[2].

Deformatsiyalar teoriyası berilgen algebralar kóptúrliliginde ayrıqsha áhmiyetke iye hám ol algebranıń geometriyalıq kóz qarastan úyreniw imkániyatın beredi. Associativ hám Li algebraları ushın deformatsiyalar teoriyası M. Gerstenxaber hám A.Nijenxuis, R.V.Richardsonlardıń jumıslarında keltirilgen. Bir ózgeriwshili deformatsiyalar teoriyası Li algebralarınıń kogomologiyası hám infinitezimal deformatsiyalar arasındaǵı baylanıstı tabıw imkánın beredi. Bunnan tısqarı infinitezimal deformatsiyalardı tabıw Li algebralar kóptúrliligindegi qattı

[2] Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.
Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 4. – P. 1259–1277.
Loday J.-L., Pirashvili T. Leibniz representations of Leibniz algebras. // J. Algebra. – 1996. - Vol. 181. – P. 414-425.

algebralardı tabıwda qollanıǵanlıǵı ushın olardı esaplaw algebralıq geometriyanıń tiykarǵı máseleleri esaplanıladı. A.X.Xudoyberdiev, B.A.Omirovtiń jumıslarında nulfiliform Leybnits algebralarınıń infinitezimal deformatsiyaları tolıq klassifikatsiyalanıp, alınǵan klassifikatsiya járdeminde bazıbir qattı algebralar tabılǵan.

Bul paragrafta sheshimli Leybnits algebralarınıń infinitezimal deformatsiyaların esaplawǵa baǵıshlanǵan. Paragrafta nilradikalı filiform Leybnits algebrasınan ibarat bolǵan sheshimli Leybnits algebralarınıń infinitezimal deformatsiyaları tabılǵan. Aytıp ótiw kerek, filiform Leybnits algebraları úsh klasstan ibarat bolıp, hár bir klass bir neshe sheshimli Leybnits algebraların beredi. Ekinshi klass filiform Leybnits algebrası arqalı 7 sheshimli Leybnits algebralar klassı payda etilgen bolıp, bul paragrafta usı sheshimli algebralardan biri úyrenilgen hám infinitezimal deformatsiyaları tolıq klassifikatsiyalanǵan. Bunnan tısqarı, tańlanǵan algebranıń differentsiallawlar keńisligi de tolıq klassifikatsiyalanıp, alınǵan klassifikatsiyalar járdeminde 2 – gruppa kotsiklları $ZL^2(L, L)$ koshegaralarınıń $BL^2(L, L)$ ólshemleri tabılǵan. $ZL^2(L, L)$ hám $BL^2(L, L)$ ti tabıw 2 – gruppa kogomologiya $HL^2(L, L)$ nı tabıw imkániyatın beredi, hámde $HL^2(L, L)$ diń nolge teń bolıwı algebranıń qattı bolıwı jetkiliklilik shárti esaplanıladı.

4.2. Associativ algebralar boyınsha tiykarǵı túsinikler.

1-anıqlama. Eger qálegen x, y, z $\in G$ elementler ushın tómendegiler orınlansa:

$$[x, x] = 0 \text{ – antikommutativlik birdeyligi,}$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \text{ – Yakobi birdeyligi,}$$

bul jerde [-,-] – G da anıqlanǵan kóbeytiw ámeli.

Onda, F maydanı ústindegi G algebrası Li algebra delinedi.

2-anıqlama. Eger qálegen x, y, $z \in L$ elementler ushın Leybnits birdeyligi orınlansa:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

bul jerde [-,-] – L da anıqlanǵan kóbeytiw ámeli.

Onda, F maydan ústindegi L algebrası Leybnits algebrası delinedi.

Qálegen Li algebrası Leybnits algebrası boladı.

A algebrası Z_2-graduirlengen algebra yamasa superalgebra delinedi, eger $A=A_0\oplus A_1$ bolsa, bul jerde $A_i\cdot A_j \subseteq A_{i+j(\mathrm{mod}\ 2)}$, $i, j\in Z_2$.

3-anıqlama. Eger tómendegi shártler orınlansa:

$$[x, y] = -(-1)^{\alpha\beta}[y, x] \quad \text{qálegen } x\in G_\alpha,\ y\in G_\beta \text{ lar ushın,}$$

$$(-1)^{\alpha\gamma}[x, [y, z]] + (-1)^{\alpha\beta}[y, [z, x]] + (-1)^{\beta\gamma}[z, [x, y]] = 0$$

qálegen $x\in G_\alpha$, $y\in G_\beta$, $z\in G_\gamma$ lar ushın (Yakobi superbirdeyligi).

Berilgen [-,-] kóbeymeli Z_2 – graduirlengen algebra $G=G_0\oplus G_1$ Li superalgebrası delinedi.

4-anıqlama. Eger tómendegi shártler orınlansa:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{\alpha\beta}[[x, z], y]$$

qálegen $x\in L$, $y\in L_\alpha$, $z\in L_\beta$, lar ushın (Leybnits superbirdeyligi).

Onda berilgen [-,-] kóbeymeli Z_2 – graduirlengen algebra $L=L_0\oplus L_1$ Leybnits superalgebrası delinedi.

5-anıqlama. Eger qálegen $x,y\in L$ ushın tómendegi teńlik orınlansa**:**

$$d(xy)=d(x)y+xd(y).$$

Onda usı $d:L\to L$ sızıqlı sáwlelendiriw berilgen L algebrada differentsial delinedi.

Qálegen L Leybnits algebrası ushın tómendegi izbe-izliklerdi anıqlaymız:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}],\ \ k \geq 1$$

$$L^{1}=L,\ L^{k+1}=[L^{k}, L^{1}],\ \ k \geq 1.$$

6-anıqlama. L Leybnits algebrası sheshimli delinedi, eger sonday $m\in N$ bar bolsa, nátiyjede $L^{[m]}=0$ bolsa. Usınday m lardıń eń kishisine L sheshimli algebranıń indeksi delinedi.

7-anıqlama. L Leybnits algebrası nilpotentli delinedi, eger sonday $s\in N$ bar bolsa, nátiyjede $L^{s}=0$ bolsa. Usınday qásiyetke iye bolǵan minimal s sanı nilpotentlik indeksi yamasa L algebrasınıń nilindeksi delinedi.

8-anıqlama. L Leybnits algebrasınıń maksimal nilpotent idealına onıń nilradikalı delinedi.

9-anıqlama. Eger $\dim L^i = n+1-i$ bolsa, bul jerde $n = \dim L$ hám $1 \le i \le n$.

Onda, n-ólshemli L Leybnits algebrası nul-filiform delinedi,

1-Teorema. Qálegen n-ólshemli nul-filiform Leybnits algebrası L da sonday $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ bazis bar bolıp, L algebrasındaǵı kóbeyme tómendegi kóriniske keledi:

$$[e_i, e_1] = e_{i+1},\ 1 \le i \le n-1,$$

bul jerde qatnaspaǵan kóbeymeler nolge teń boladı.

10-anıqlama. Eger $\dim L^i = n-i$, $2 \le i \le n$ bolsa, onda, L Leybnits algebrası filiform delinedi.

L – shekli ólshemli nilpotentli Leybnits algebrası bolsın. $gr(L)_i := L^i/L^{i+1}$, $1 \le i \le s-1$ dep alamız, bul jerde s –L algebrasınıń nilindeksi, hám $grL = gr(L)_1 \oplus gr(L)_2 \oplus \ldots \oplus gr(L)_{s-1}$ dep belgilep alamız. Onda $[gr(L)_i, gr(L)_j] \subseteq gr(L)_{i+j}$, boladı hám biz graduirlengen grL algebrasına iye bolamız.

11-anıqlama. Joqarıdaǵı sıyaqlı anıqlanǵan graduirovkalardı tábiyiy graduirovkalasıw dep ataladı. Eger L Leybnits algebrası grL algebrasına izomorf bolsa, L tábiyiy usıl menen graduirlengen Leybnits algebrası delinedi.

4.3. Sońǵı jıllarda alınǵan tiykarǵı nátiyjeler.

Tómendegi teoremada tábiyiy usılda graduirlengen filiform Leybnits algebrasınıń klassifikatsiyası keltirilgen.

3.1-Teorema.[3] Qálegen n–ólshemli kompleks tábiyiy graduallasqan Leybnits algebrası tómendegi jubı menen izomorf bolmaǵan algebralarǵa izomorf boladı

$$F_n^1: \quad [e_1,e_1]=e_3,\ [e_i,e_1]=e_{i+1} \text{ gde } 2 \le i \le n-1,$$

[3] Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.

$$F_n^2: \quad [e_1,e_1]=e_3,\ [e_i,e_1]=e_{i+1} \text{ gde } 3 \le i \le n-1,$$

$$F_n^3: \quad [e_i,e_1]=-[e_1,e_i]=e_{i+1},\ [e_i,e_{n+1-i}]=[e_{n+1-i},e_i]=\alpha(-1)^{i+1}e_n \text{ gde } 2 \le i \le n-1,$$

bul jerde qatnaspaǵan kóbeymeler nolge teń boladı, $\alpha\in\{0,1\}$, eger n jup bolsa hám $\alpha=0$, eger n taq bolsa.

L – shekli sandaǵı nol bolmaǵan keńislikli Z-graduirovkalanǵan Leybnits algebrası bolsın, yaǵnıy qálegen i, $j\in Z$ lar ushın $L=\bigoplus_{i\in Z} V_i$ orınlı bolsın, bul jerde $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$.

L nilpotent Leybnits algebrası Leybnits baylanısqan graduirovkaǵa imkán jaratadı deymiz, eger $L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus \ldots \oplus V_{k_t}$, bul jerde $V_i\neq 0$ qálegen i ushın ($k_1 \le i \le k_t$). $l(\oplus L)=k_t-k_1+1$ sanı graduirovka uzınlıǵı delinedi. Keyinshelik $l(L)=\max\{len(\oplus L)=k_t-k_1+1 \mid L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus \ldots \oplus V_{k_t}$ baylanısqan halda graduirlengen$\}$ L Leybnits algebrasınıń uzınlıǵı dep ataymız. L Leybnits algebrası maksimal uzınlıqtaǵı algebra delinedi, eger $l(L)=\dim L$ bolsa.

3.1-Mısal. Nul-filiformlı L Leybnits algebrası maksimal uzınlıqtaǵı algebra boladı. Haqıyqatında da, 1.1.1-teorema da $1\le i \le n$ ushın $V_i:=\{e_i\}$ dep qabıl etsek, biz $L=V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_n$ ge iye bolamız, bul jerde $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$.

3.2-Teorema.[4] Qálegen n-ólshemli kompleks sheshilmeytuǵın filiform Li bolmaǵan maksimal uzınlıqtaǵı L algebrasında sonday bazis $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bar bolıp, L daǵı kóbeyme ushın tómendegi orınlı boladı:

$$[x_i,x_1]=x_{i+1},\ 2\le i\le n-1$$

(qatnaspaǵan kóbeymeler nolge teń boladı).

Uzınlıǵı n–1 bolǵan kompleks n–ólshemli filiformlı Leybnits algebrası L berilgen bolsın. 1.2.1-teoremadan kelip shıǵadı, L algebrasında sonday bazis bar bolıp, onda onıń kóbeymesi tómendegi úsh kórinisten birine iye iboladı F_1, F_2, F_3.

3.1-Tastıyıqlaw. L – uzınlıǵı F_1 klassına tiyisli bolǵan, uzınlıǵı n–1

[4] Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length (n–1) and their derivations. // Journal of Algebra. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488.

bolǵan filiformlı Leybnits algebrası bolsın. Onda n–1 uzınlıqtaǵı graduirovka tábiyiy graduirovka menen birdey boladı.

3.2-Tastıyıqlaw.[5] Uzınlıǵı n–1 bolǵan F_2 klassına tiyisli bolǵan qálegen n-ólshemli filiformlı Leybnits algebrası tómendegi algebralardıń birewine izomorf boladı:

$$F_n^2:\begin{cases}[y_1,y_1]=y_3, & \\ [y_i,y_1]=y_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$M_1(k):\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_i,y_n]=y_{k+i-1}, & 1\le i\le n-k,\ 3\le k\le n-1,\end{cases}$$

$$M_2:\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_i,y_n]=y_{\frac{n+1}{2}+i-1}, & 1\le i\le \dfrac{n-1}{2},\\ [y_n,y_n]=\alpha y_{n-1}, & \alpha\ne 0,\end{cases}$$

$$M_3:\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_n,y_n]=y_{n-1}, & \end{cases}$$

bul jerde qatnaspaǵan kóbeymeler nolge teń hám $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – tiyisli algebranıń bazisi boladı.

Qadaǵalaw sorawları:

1. Associativ emes algebralar. Mısallar.
2. Li algebrası Leybnits algebrası bolama?
3. Yakobi superbirdeyligi.
4. Leybnits superbirdeyligi.
5. L algebrada differentsial túsinigi.
6. L Leybnits algebrası nilpotenti.
7. L Leybnits algebrasınıń nilradikalı ne?
8. L Leybnits algebrası filiformı.
9. Graduirlengen Leybnits algebrası ne?

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.

2. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length (n–1) and their derivations. // Journal of Algebra. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488.

[5] Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 4. – P. 1259–1277.

3. Barnes D.W. On Levi's theorem for Leibniz algebras. // Bull. Austr. Math. Soc., – 2012. - Vol. 86. - № 2. – P. 184-185.

4. Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 4. – P. 1259–1277.

5. Loday J.-L., Pirashvili T. Leibniz representations of Leibniz algebras. // J. Algebra. – 1996. - Vol. 181. – P. 414-425.

6. Goze M., Khakimdjanov Yu. Nilpotent Lie Algebras. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. – 1996. Vol. 361. – 336 p.

IV. ÁMELIY JUMÍSLAR

1 – ámeliy jumıs:
Algebra páni rawajlanıwınıń qısqasha tariyxı hám zamanagóy matematikadağı ornı. Algebralıq sistemalar túsinigi.

Jumıstıń maqseti: Algebralıq sistema túsinigi haqqında kónlikpelerge iye bolıw. Algebralıq sistemalarğa baylanıslı mısallar sheshiw.

Máseleniń qoyılıwı:

1. Tómendegi gruppalar additiv gruppa ekenligin kórsetiń.

(Z, +), (Q, +), (R, +), (C, +)

Jumıstı orınlaw ushın úlgi:

1. (Z, +) tiń additiv gruppa ekenligin kórsetemiz.

Birinshi (Z, +) tiń gruppa ekanligin tekseremiz,

i) $\forall a,b,c \in Z$ ushın assatsiativlikke tekseremiz:

$$(a+b)+c=a+b+c=a+(b+c)$$

ii) $e=0 \in Z$, element $\forall a \in Z$ ushın neytral element:

$$e+a=0+a=a$$
$$a+e=a+0=a$$

iii) $\forall a \in Z$ ushın sonday $b \in Z$, $b=a^{-1}$

$$a+b=b+a=e=0 \Rightarrow \quad a^{-1}=-a$$

Qadağalaw sorawları:

1. M(n, R) n×n matritsalar kópligi qosıw ámeliyne qarata additiv gruppa bolıwın kórsetiń.
2. R_n sızıqlı keńislik qosıw ámeline qarata additiv gruppa boladı.
3. C[a, b] – [a, b] kesindide anıqlanğan úzliksiz funktsiyalar qosıw ámeline qarata additiv gruppa boladı.
4. Tómendegi gruppalar multiplikativ gruppalar ekenligin kórsetiń

$Q^* = Q\setminus\{0\}$, $R^* = R\setminus\{0\}$, $C^* = C\setminus\{0\}$

5. M(n, R) determinantı nolden ózgeshe bolğan n×n matritsalar kópligi kóbeytiw ámeline qarata multiplikativ gruppa boladı.
6. Qálegen sandağı úlesgruppalardıń kesispesi jáne úles gruppa bolıwın kórsetiń.

Paydalanılğan ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

2- ámeliy jumıs:
Gruppa, kolco hám maydanlar

Jumıstıń maqseti: Gruppalar járdeminde kolco hám maydanlardıń payda etiliwin biliw. Maydanlardıń hám aynıqsa shekli maydanlardıń strukturasın dúziw, olarǵa baylanıslı mısallar sheshiw.

Máseleniń qoyılıwı:

1) $(Z,+,\cdot)$. m ǵa bóliniwshi barlıq pútin sanlar kópligi m**Z, Z** tiń úles kolco boladı;

2) $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ – ratsional sanlar kolcosı;

Jumıstı orınlaw ushın úlgi:

$s=\{x=(x_1,x_2, \ldots, x_n, \ldots), x_i\in\mathbf{R}\}$ – haqıyqıy sanlardan dúzilgen izbe-izlikler keńisligi hám K – barlıq a: $s \rightarrow s$ sızıqlı sáwlelendiriwler kolcosı bolsın. s ta ámeller koordinatalar boyınsha anıqlanǵan. K kolcoda qosıw hám operatorlar superpozitsiyası (kompozitsiyası) ámellerin tómendegishe anıqlaymız: $(a_1\oplus a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x)$, $(a_1 \otimes a_2)(x)=a_2(a_1(x))$, $x\in s$.

$a_i : s\rightarrow s$ operatorlar tómendegishe anıqlanǵan bolsın:

$$a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \rightarrow (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$
$$a_2: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \rightarrow (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ldots).$$

Onda,

$$a_1 \otimes a_2 :x=(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ldots) \rightarrow (0, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$
$$a_2\oplus a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \rightarrow(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

yaǵnıy $a_2\oplus a_1=1$ – birdeylik operator.

Demek, $a_1\oplus a_2\neq1$, $a_2\oplus a_1=1$, yaǵnıy a_1 oń (shep bolmaǵan), a_2 bolsa shep (oń bolmaǵan) K daǵı birdiń bóliwshileri.

Qadaǵalaw sorawları:

1) $(Z,+,\cdot)$. m ǵa bóliniwshi barlıq pútin sanlar kópligi m**Z, Z** tiń úles kolco boladı;

2) $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ – ratsional sanlar kolcosı;

3) $(\mathbf{R},+,\cdot)$ – haqıyqıy sanlar kolcosı. **Z hám Q** kóplikler **R** diń birlik yarım kolcosı;

4) $M_n(\mathbf{R})$–**R** maydan ústinde anıqlanǵan $n\times n$ matritsalar kolcosı, birlik kolco boladı. $n> 1$ de $M_n(R)$ – kommutativ emes, $M_n(Q)$, $M_n(Z)$ – yarım kolco;

5) Kommutativ kolco ústinde anıqlanǵan $n\times n$ matritsalar $M_n(\mathbf{K})$ kolcosı,

6) Funktsiyalar kolcosı. X –qálegen kóplik, **K**- kolco. Barlıq f: $X\rightarrow\mathbf{K}$ funktsiyalar $K^x=\{f: X\rightarrow\mathbf{K}\}$ kópligi f+g qosındı hám fg kóbeyme:

$$(f+g)(x)=f(x)\oplus g(x),\ (fg)(x)=f(x)\otimes g(x),$$

ámellerine qarata kolco boladı, bul jerde $\oplus$, $\otimes$– **K** kolcodaǵı ámeller.

7) Eger 0 hám 1 **K** kolconıń nol hám birlik elementi bolsa, onda 0_x: x→ 0 hám 1_x: x→ 1 – turaqlı funktsiyalar K^x kolconıń noli hám biri boladı.

Eger K –kommutativ bolsa, onda K^x – kommutativ.

Eger K=**R** yaki X=[0.1] bolsa, K^x = $\mathbf{R}^{[0.1]}$ –[0; 1] de anıklanǵan barlıq haqıyqıy funktsiyalar kolcosı. Ol óz ishine tómendegi úleskolcolardı aladı:

V[0.1] – barlıq shegaralanǵan haqıyqıy funktsiyalar kolcosı;

C[0.1] – barlıq haqıyqıy úzliksiz funktsiyalar kolcosı.

8) **Z**, **Q**, **R**, **C** kolcolarda ab=0 ⇒ a=0 yamasa b=0, biraq

a) M_n(R) kolco ab=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$;

v) Z_4 kolcoda 2⊗2=0;

s) R^2 kolcoda (1,0)(0,1)=0 hám t.b.

Mısallar. 1) f: **Z**→$\mathbf{Z}_m$ epimorfizm boladı hám Kerf=m**Z**, m**Z**- **Z** te ideal(ulıwma **Z** te qálegen úleskolco m**Z** kóriniske iye, yaǵnıy ideal);

2) M_2(**Z**) – **Z** maydan boyınsha 2x2 matritsalar kolcosı. K_0=$\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \delta \in Z\right\}$ yarım kolco boladı, ideal emes: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \notin K_0$;

3) Kommutativ kolcoda ideal qurıw metodları:

a) ∀a ∈K, aK –K ning idealı boladı: ax+ay=a(x+y), (ax)y=a(xy). aK ideal a∈K element járdeminde dúzilgen tiykarǵı ideal dep júritiledi.

Mısal. s={x=(x_1,x_2, …, x_n, …), x_i∈**R**} – haqıyqıy sanlardan dúzilgen izbe-izlikler keńisligi hám K – barlıq a: s → s sızıqlı sáwlelendiriwler kolcosı bolsın. s ta ámeller koordinatalar boyınsha anıqlanǵan. K kolcoda qosıw hám operatorlar superpozitsiyası (kompozitsiyası) ámellerin tómendegishe anıqlaymız: (a_1⊕a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x), (a_1 ⊗ a_2)(x)=a_2(a_1(x)), x∈s.

a_i : s→s operatorlar tómendegishe anıqlanǵan bolsın:

$$a_1: x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots),$$
$$a_2: x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots).$$

Onda,

$$a_1 \otimes a_2 : x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (0, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots),$$
$$a_2 \oplus a_1: x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots),$$

yaǵnıy a_2⊕a_1=1 – birdeylik operator.

Demek, a_1⊕a_2≠1, a_2⊕a_1=1, yaǵnıy a_1 oń (shep bolmaǵan), a_2 bolsa shep (oń bolmaǵan) K daǵı birdiń bóliwshileri.

M_n=M_n(**R**) matritsalar kolcolsında kerileniwshi elementler, bul kerileniwshi matritsalar(yaǵnıy nolden ózgeshe determeninantqa iye bolǵan maritsalar). Kerileniwshi element noldiń bóliwshisi bola almaydı:

$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow (a^{-1}a)b=0 \Rightarrow b=0$, (usıǵan uqsas, $ba=0 \Rightarrow b=0$).

Mısal. $Q(\sqrt{2}) = \{c: c=a + b\sqrt{2},\ a, b\in Q\}$.

$$.\ (\sqrt{2})^2 = 2,\ \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$$

Mısal. Tórt elementli GF(4)={0, 1, α, β}gruppanı qaraymız:

+	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

*	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

3 - ámeliy jumıs:
Gruppa, kolco hám maydanlar
Kolco. Kolconıń gomomorfizmleri hám idealları.

Jumıstıń maqseti: Gruppa, kolco hám maydanlardıń gomomorfizmlerin biliw. Bul gomomorfizmlerde ideallardıń áhmiyetin túsiniw hám gomomorfizmlerdiń tiykarǵı qásiyetlerine baylanıslı mısallar sheshiw.

Máseleniń qoyılıwı:

1) (Z,+,·). m ǵa bóliniwshi barlıq pútin sanlar kópligi m**Z, Z** tiń úleskolcosı boladı;

2) (**Q**,+,·) – ratsional sanlar kolcosı;

Jumıstı orınlaw ushın úlgi

Elementleri **P** maydanǵa tiyisli bolǵan barlıq n×n kvadrat matritsalar kópligi M_n(**P**), **P** maydan ústinde ólshemi n^2 bolǵan algebra boladı.

Bu algebranıń bazisi sıpatında tómendegi matritsalardı alıw múmkin:

$$\left\{E_{ij} \,/\, i, j = \overline{1, n}\right\},$$

Bul jerde E_{ij} – matritsa i – qatar hám j – baǵana kesispeindegi 1 (P maydannıń **1** elementi), basqa elementleri 0 ge teń matritsa. Bul bazis elementleri tómendegi kóbeytiw nızamına boysınadı.

$$E_{ik} E_{lj} = \delta_{kl} E_{ij}.$$

Qálegen $(a_{i,j}) \in M_n(P)$ matritsa E_{ik} lardıń sızıqlı kombinatsiyası arqalı ańltıladı:

$$\left(a_{ij}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

Bul algebranıń birlik elementi tómendegi birlik matritsadan ibarat boladı:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

λE kórinisindegi element M_n(**P**) algebranıń qálegen elementi menen orın almasıwshı boladı, yaǵnıy λE element Z(M_n(**P**)) orayda jatadı.

Qadaǵalaw sorawları:

1) f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_m$ epimorfizm boladı hám Kerf = m**Z**, m**Z** – **Z**da ideal(ulıwma **Z** ta qálegen úleskolco m**Z** kóriniske iye, yaǵnıy ideal);

2) M_2(**Z**) –**Z** maydan boyınsha 2×2 matritsalar kolcosı. $K_0 = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \delta \in Z\right\}$ yarımkolco boladı, ideal emes: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \notin K_0$

;

3) Kommutativ kolcoda ideal kurıw usılları:

a) $\forall a \in K$, aK –K nıń idealı boladı: ax+ay=a(x+y), (ax)y=a(xy). aK ideal $a\in K$ element járdeminde dúzilgen tiykargı ideal dep júritiledi.

1) **P** maydannıń qálegen **F** keńeymesi **P** maydanı ústinde anıqlanǵan kommutativ hám associativ birlik algebra boladı :

Q maydannıń $\mathbf{F} = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ keńeymesin qarasaq, ol 2 ólshemli algebra boladı;

Q maydannıń keńeymesi **R** sheksiz ólshemli algebra boladı.

R maydannıń keńeymesi **C** 2 ólshemli algebra boladı.

2) Koeffitsientleri **P** maydanǵa tiyisli bolǵan n ózgeriwshili $K=\mathbf{P}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ kópaǵzalılıar kolcosı **P** maydan ústinde sheksish ólshemli kommutativ associativ algebra. Bunda

$$K = K_0 \oplus K_1 \oplus \ \ldots$$

yaǵnıy, K – birtekli, dárejesi m ($K_0 = \mathbf{P}$) bolǵan kópaǵzalılar K_m úles keńisliklerdiń tuwrı kósındısınan ibarat, bul jerde

$$K_i\, K_j \subset K_{i+j}.$$

Bunday jayılmaǵa iye bolǵan algebralar, *graduirlengen algebra* delinedi.

3) elementleri **P** maydanǵa tiyisli bolǵan barlıq n×n kvadrat matritsalar kópligi $M_n(\mathbf{P})$, **P** maydan ústinde ólshemi n^2 bolǵan algebra boladı.

Bul algebranıń bazisi sıpatında tómendegi matritsalardı alıw múmkin:

$$\left\{E_{ij} / i, j = \overline{1, n}\right\},$$

Bul jerde E_{ij} – matritsa i – qatar hám j – baǵana kesispesindegi 1 (P maydannıń **1** elementi), bsqa elementleri 0 ge teń matritsa. Bul bazis elementleri tómendegi kóbeytiw ámeline boysınadı.

$$E_{ik}\, E_{lj} = \delta_{kl} E_{ij}.$$

Qálegen $(a_{i,j}) \in M_n(P)$ matritsa E_{ik} lardıń sızıq kombinatsiyası arqalı ańlatıladı

$$\left(a_{ij}\right) = \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}\,.$$

Bul algebranıń birlik elementi tómendegi birlik matritsadan ibarat boladı:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

λE kórinisindegi element $M_n(\mathbf{P})$ algebranıń qálegen elementi menen orın almasıwshı boladı, yaǵnıy λE element $Z(M_n(\mathbf{P}))$ orayda jatadı.

Mısal 1. S(X) – kóplik X topologiyalıq keńisliktegi úzliksiz funktsiyalar kópligi bolsın. S(X) kóplik qosıw, sanǵa kóbeytiw hám kóbeytiw λf, $f+g$, fg ámellerine qarata kommutativ algebra dúzedi.

2. Aytayıq, X – sızıqlı keńislik bolsın, L(X) arqalı X ta anıqlanǵan barlıq sızıqlı almastırıwlar B: $X \to X$ kópligin belgileymiz. L(X) kóplik qosıw, sanǵa kóbeytiw hám superpozitsiya λV, $A+V$, $A \circ V$ ámellerine qarata algebra dúzedi. L(X) algebra kommutativ bolıwı ushın X bir ólshemli bolıwı zárúrli hám jetkilikli.

Eger X – shekli ólshemli bolsa, onda $L(X)=M_n(\mathbf{C})$ boladı. L(X) daǵı ámeller matritsalardı qosıw, sanǵa kóbeytiw hám kóbeytiw ámelleri menen birdey.

3. Eger X – banax keńisligi bolsa, V(X) arqalı barlıq shegaralanǵan operatorlı belgilesek B(X) kóplik sanǵa kóbeytiw hám kóbeytiw λV, $A+V$, $A \circ V$ ámellerine qarata algebra dúzedi.

Mısal. 1. S(X) birlik elementli kolco boladı, bul jerde birdeylik fukntsiya birlik element wazıypasın atqaradı.

2. L(X) hám V(X) algebralar hám birlik elementli kolco boladı, bul jerde birdeylik e=E – operator birlik element wazıypasın atqaradı.

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

4- ámeliy jumıs:
Associativ algebralar haqqında túsinikler.

Jumıstıń maqseti: Algebra haqqında oyǵa iye bolıwı, olardıń dúzilisi mısallar járdeminde anıqlaw, associativ algebralardıń strukturalıq teoriyasın mısallar járdeminde tekseriw.

Máseleniń qoyılıwı:

Tómendegi algebralardı associativ algebra bolıwın tekseriń:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1,e_1]=e_3+6e_4$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

d) $[e_1, e_1]=e_2+3e_4$, $[e_2,e_1]=e_3+3e_4$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

Jumıstı orınlaw ushın úlgi

Tómendegi algebranı associativ algebra bolıwın tekseriń:

$[e_2,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

Bunıń ushın barlıq úshliklerdi (ab)c=a(bc) shártke kóre tekseremiz, eger shárt orınlanbasa associativ algebra bolmaydı.

$$[e_3,e_1]e_4= -[e_2, e_4]= e_3$$

Ekinshi tárepten:

$$e_3\,[e_1,e_4]= [e_3, 0]= 0$$

Teń emes, demek, associativ algebra emes.

Qadaǵalaw sorawları:

1-anıqlama. Eger qálegen x, y, z $\in$G elementler ushın tómendegi birdeylikler orınlansa:

$$[x, x] = 0 \text{ – antikommutativlik birdeylik,}$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \text{ – Yakobi birdeyligi,}$$

bul jerde [-,-] – G da anıqlanǵan kóbeytiw ámeli.

Onda, F maydanı ústindegi G algebrası Li algebrası delinedi.

2-anıqlama. Eger qálegen x, y, z$\in$L elementler ushın Leybnits birdeyligi orınlansa:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] – [[x, z], y]$$

bul jerde [-,-] – L da anıqlanǵan kóbeytiw ámeli.

Onda, F maydanı ústindegi L algebrası Leybnits algebrası delinedi.

Qálegen Li algebrası Leybnits algebrası boladı.

3-anıqlama. Eger qálegen x,y$\in$L ushın tómendegi teńlik orınlansa**:**

$$d(xy)=d(x)y+xd(y).$$

onda usı $d:L\to L$ sızıqlı sáwlelendiriw berilgen L algebrada differentsial delinedi.

Qálegen L Leybnits algebrası ushın tómendegi izbe-izliklerdi anıqlaymız:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}],\ k \geq 1$$

$$L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1],\ k \geq 1.$$

4-anıqlama. L Leybnits algebrası sheshimli delinedi, eger sonday m$\in$N bar bolıp, nátiyjede $L^{[m]}=0$ bolsa. Usıeday m lardıń eń kishisine L sheshimli algebranıń indeksi delinedi.

5-anıqlama. L Leybnits algebrası nilpotentli delinedi, eger sonday $s\in N$ bar bolıp, nátiyjede $L^s=0$ bolsa. Usınday qásiyetke iye bolǵan minimal s sanı nilpotentlik indeksi yamasa L algebrasınıń nilindeksi delinedi.

Mısal. Tómendegi algebralardıń nilindeksi *n*-1 ge teń ekenligin kórsetiń.

$$F_n^2:\begin{cases}[y_1,y_1]=y_3, & \\ [y_i,y_1]=y_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$M_1(k):\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_i,y_n]=y_{k+i-1}, & 1\le i\le n-k, 3\le k\le n-1,\end{cases}$$

$$M_2:\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_i,y_n]=y_{\frac{n+1}{2}+i-1}, & 1\le i\le \dfrac{n-1}{2},\\ [y_n,y_n]=\alpha y_{n-1}, & \alpha\ne 0,\end{cases}$$

$$M_3:\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_n,y_n]=y_{n-1}, & \end{cases}$$

bul jerde qatnaspaǵan kóbeymeler nolge teng hám $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – tiyisli algebranıń bazisi boladı.

1–mısal. C(X) – X topologiyalıq keńisliktegi barlıq kompleks mánisli úzliksiz funktsiyalar kópligi $\lambda f,\ f+g,\ fg$ ámellerine qarata kommutativ algebra dúzedi. Dara jaǵdayda S[0,1].

2–mısal. X–sızıqlı keńislik, L(X)–barlıq sızıqlı $B:X\to X$ operatorlar kópliginde λB, $A+B$, $A\circ B$ (cuperpozitsiya) ámeller bolsın. Onda L(X)–algebra hám L(X) kommutativ tek ǵana hám tek sonda, eger X–bir ólshemli keńislik bolsa.

3–mısal: Aytayıq, $C^\infty_{[0,1]}$-[0,1] kesindidegi barlıq sheksiz differentsiallanıwshı funktsiyalar kópligi bolsın. Bul kóplikte kóbeytiw ámelin tómendegishe kiritemiz:

$$(a\circ b)(x) = a(x)\int_0^x b(t)d(t),\ \text{bul jerde } a(x),\ b(x)\in C^\infty_{[0,1]}.$$

Onda $(C^\infty_{[0,1]},\circ)$ Zinbiel algebrasın dúzedi.

Eger d_1 hám d_2 – differentsiallawlar bolsa, onda

$$[d_1,d_2]=d_1\circ d_2-d_2\circ d_1$$

da differentsiallaw boladı.

L- Li algebrasında $\forall\ a\in L$ ushın $ad_a:L\to L$ sáwlelendiriwdi tómendegishe anıqlaymız:

$ad_a(x)=[x,a]$ada – differentsiallaw quraydı

1. Tómendegi algebralardıń Leybnits algebrası bolıwın dálilleń:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1,e_1]=e_3+6e_4$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

d) $[e_1, e_1]=e_2+3e_4$, $[e_2,e_1]=e_3+3e_4$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

2. Tómendegi algebralardıń nilpotentligin kórestiń hám nilindeksin tabıń:

a) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_2 + e_5, [e_2, e_4] = e_3, [e_4, e_4] = e_3$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_5, [e_4, e_4] = e_3$,

d) $[e_1, e_2]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_4 +e_3$, $[e_3,e_4]= -e_2$,

3. Tómendegi algebralardıń sheshimli ekenligin kórsetiń hám nilradikalın tabıń:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$

b) $[e_1, e_1]=e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4]=2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_4] = e_2$

c) $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_4, e_2] = – e_2$,

d) $[e_1, e_3] = e_2 +e_4$, $[e_2, e_3] = e_1 – 3e_4$, $[e_4, e_2] = – e_2$,

4. Tómendegi algebralardıń ishki hám sırtqı differentsiallawların tabıń.

a) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]= -e_3$, $[e_2,e_2]= -2e_3 + e_4$

b) $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = 2e_1$, $[e_3, e_4] = 3e_1$, $[e_4, e_1] = -e_1$

c) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=e_1$, $[e_2, e_5]=e_2$, $[e_4, e_1] =– e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_3, e_5] = e_3$

d) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=2e_1$, $[e_2, e_5]=3e_2$, $[e_4, e_1] =– e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$,

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

5 - ámeliy jumıs:
Associativ emes algebralardıń túrleri hám olardıń klassifikatsiyalaw usılları.

Jumıstıń maqseti: Associativ emes algebralardıń strukturalıq teoriyasın biliw. Bazıbir associativ emes algebralardı máselen Li, Leybnits, dendriform, diassociativ, Zinbiel algebralardı mısallar járdeminde biliw hám olardıń parıqların túsiniw.

Máseleniń qoyılıwı:

Tómendegi algebralardıń sheshimli ekenligin kórsetiń hám nilradikalın tabıń:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$

b) $[e_1, e_1]=e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4]=2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_4] = e_2$

c) $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_4, e_2] = – e_2$,

Jumıstı orınlaw ushın úlgi.

Tómendegi algebranı associativ emes algebra bolıwın tekseriń:

$[e_2,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

Bunıń ushın barlıq úshliklerdi (ab)c=a(bc) shártine tekseremiz, eger shárt orınlanbasa, associativ emes algebra boladı.

$$[e_3,e_1]e_4= -[e_2, e_4]= e_3$$

Ekinshi tárepten:

$$e_3 [e_1,e_4]= [e_3, 0]= 0$$

Teń emes, demek, associativ emes algebra boladı.

Qadaǵalaw sorawları:

Eger associativ, kommutativ, Li, Leybnits, dendriform, diassociativ, Zinbiel algebralar dúrkinlerin sáykes túrde As, Com, Lie, Lieb, Dend, Dias, Zinb dep belgilep alsaq, onda dúrkinler ortasında tómendegi baylanıs ornatıladı:

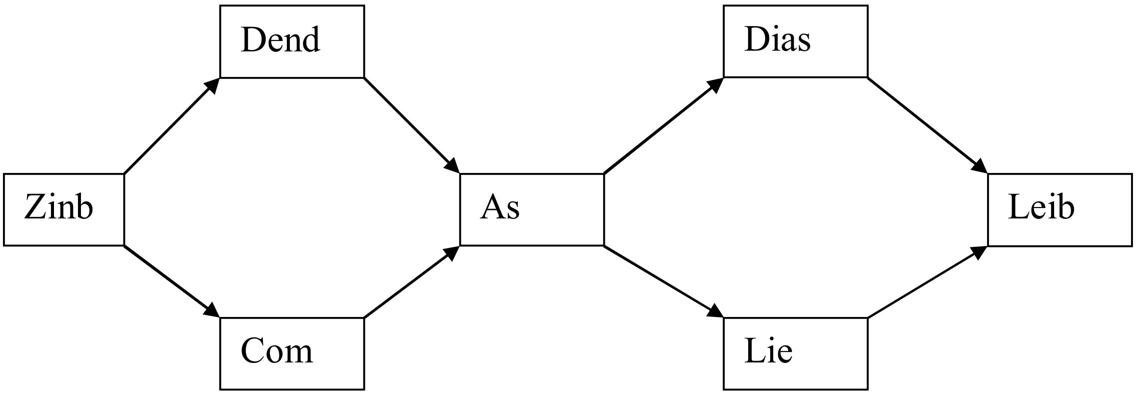
$[x,y]_{Lie}$:As$\rightarrow$ Lie: $[x,y]_{Lie}=xy-yx$ associativ algebrada jańa ámel anıqlap, Li algebrasın payda etemiz.

$\bullet$:Zind$\rightarrow$ Com: $x\bullet y = xy+yx$

*:Dend$\rightarrow$ As $x*y = x<y+x>y$

$[x,y]_{Leib}$:Dias$\rightarrow$ Leib: $[x,y]_{Leib} = x\dashv y - y \vdash x$

Demek, biz dúrkinler ortasında baylanıstı kańlatıwshı tómendegi diagrammaǵa iye bolmaız.



1. Tómendegi algebralardıń Leybnits algebrası bolıwın dálilleń:
a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$
b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,
c) $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$
2. Tómendegi algebralardıń nilpotentligin kórsetiń hám nilindeksin tabıń:
a) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_2 + e_5, [e_2, e_4] = e_3, [e_4, e_4] = e_3$
b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,
c) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_5, [e_4, e_4] = e_3,$
3. Tómendegi algebralardıń sheshimli ekenligin kórsetiń hám nilradikalın tabıń:
a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$
b) $[e_1, e_1]=e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4]=2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_4] = e_2$
c) $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_4, e_2] = – e_2$,
4. Eger $\lim\limits_{t\to 0} g_t \cdot A = B$ bolsa, g_t nı tabıń

- A: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$, B: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_3,e_3]=e_4$
- A: $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_4$, $[e_2,e_2]= -e_3$, B: $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_3,e_2]= -e_1$

5. A: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$ hám $g_t(e_1)=t^{-1}e_1$, $g_t(e_2)=t^{-1}e_2$, $g_t(e_3)= -t^{-2}e_3$, $g_t(e_4)=t^{-2}e_3 + t^{-1}e_4$ bolsa $\lim\limits_{t\to 0} g_t \cdot A$ nı anıqlań.
6. Tómendegi algebralardıń ishki hám sırtqı differentsiallawların tabıń
a) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]= -e_3$, $[e_2,e_2]= -2e_3 + e_4$
b) $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = 2e_1$, $[e_3, e_4] = 3e_1$, $[e_4, e_1] = -e_1$
c) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=e_1$, $[e_2, e_5]=e_2$, $[e_4, e_1] = – e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_3, e_5] = e_3$

Mısal. 1. L algebra I boyınsha faktor algebrası L / I úsh ólshemli ápiwayı Li algebrası sl_2 ǵa izomorf bolatuǵın algebra bolsın. Onda ondaǵı kóbeymeler tómendegishe anıqlanadı:

$$[e, h] = 2e, \qquad [f, h] = –2f, \qquad [e, f] = h,$$
$$[h, e] = –2e, \qquad [h, f] = 2f, \qquad [f, e] = –h,$$

$[x_k, e] = -k(m+1-k)x_{k-1}, \qquad 1 \leq k \leq m,$

$[x_k, f] = x_{k+1}, \qquad 0 \leq k \leq m-1,$

$[x_k, h] = (m-2k)x_k, \qquad 0 \leq k \leq m.$

2. Aytayıq, L algebra $L/I \cong sl_2$ shártin qanaatlandırıwshı 7 ólshemli Leybnits algebrası bolsın. Onda, onıń differentsiallawlarınıń $\{e, f, h, x_0, x_1, x_2, x_3\}$ bazistegi ulıwma kórinisi tómendegishe boladı:

$$\begin{pmatrix} -2\lambda_3 & 0 & 2\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_3 & -2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3\lambda_3 & -3\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda+\lambda_3 & -4\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda-\lambda_3 & -3\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda-3\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

6 - ámeliy jumıs:
Algebralıq sistemalardıń fizika, ximiya, biologiya, kvant mexanikası, kriptografiya, kompyuter texnologiyaları hám basqa tarawlardaǵı qollanıwları.

Jumıstıń maqseti: Algebralıq sistemalar sońǵı jıllarda júdá kóplep basqa tarawlarǵa qollanılmaqta. Atap aytqanda, fizika, ximiya, biologiya, kvant mexanikası, kriptografiya, kompyuter texnologiyalarına keń qollanılmaqta hám bunıń nátiyjesinde bul tarawlar da rawajlanbaqta. Aynıqsa, kriptografiya, kompyuter texnologiyaları tarwlarında júlá pát penen rawajlanǵanlıǵın mısallar járdeminde keltirish hám tıńlawshılarǵa túsindiriw.

Máseleniń qoyılıwı:

1. X–sızıqlı keńislik, L(X)–barlıq sızıqlı $B:X\rightarrow X$ operatorlar kópliginde λB, $A+B$, $A\circ B$ (cuperpozitsiya) ámeller bolsın. Onda L(X)–algebra hám L(X) kommutativ tek ǵana hám tek sonda ǵana, eger X–bir ólshemli keńislik bolsa.

2. Aytayıq, $C^{\infty}_{[0,1]}$-[0,1] kesindidegi barlıq sheksiz differentsiallanıwshı funktsiyalar kópligi bolsın. Bul kóplikte kóbeytiw ámelin tómendegishe kiritemiz:

$$(a\circ b)(x) = a(x)\int_0^x b(t)d(t), \text{ bul jerde } a(x),\ b(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}.$$

Onda $(C^{\infty}_{[0,1]},\circ)$ Zinbiel algebrasın dúzedi.

Jumıstı orınlaw ushın úlgi:

Aytayıq, $C^{\infty}_{[0,1]}$-[0,1] kesindidegi barlıq sheksiz differentsiallanıwshı funktsiyalar kópligi bolsın. Bul kóplikte kóbeytiw ámelin tómendegishe kiritemiz:

$$(a\circ b)(x) = a(x)\int_0^x b(t)d(t), \text{ bul jerde } a(x),\ b(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}.$$

Onda $(C^{\infty}_{[0,1]},\circ)$ Zinbiel algebrasın dúzedi.

Eger d_1 hám d_2 – differentsiallawlar bolsa, onda

$$[d_1,d_2]=d_1\circ d_2-d_2\circ d_1$$

da differentsiallaw boladı.

L- Li algebrasında $\forall\ a\in L$ ushın $ad_a:L\rightarrow L$ sáwlelendiriwdi tómendegishe anıqlaymız:

$ad_a(x)=[x,a]$ada – differentsiallaw quraydı

Qadaǵalaw sorawları:

1. C(X) – X topologiyalıq keńisliktegi barlıq kompleks mánisli úzliksiz funktsiyalar kópligi $\lambda f,\ f+g,\ fg$ ámellerine qarata kommutativ algebra payda

etedi. Dara jaǵdayda, S[0,1].

2. X–sızıqlı keńislik, L(X)–barlıq sızıqlı $B:X\to X$ operatorlar kópliginde λB, $A+B$, $A\circ B$ (cuperpozitsiya) ámeller bolsın. Onda L(X)–algebra hám L(X) kommutativ tek ǵana hám tek sonda, eger X–bir ólshemli keńislik bolsa.

3. Aytayıq, $C^{\infty}_{[0,1]}$-[0,1] kesindidegi barlıq sheksiz differentsiallanıwshı funktsiyalar kópligi bolsın. Bul kóplikte kóbeytiw ámelin tómendegishe kiritemiz:

$$(a\circ b)(x) = a(x)\int_0^x b(t)d(t),\text{ bul jerde } a(x),\ b(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}.$$

Onda $(C^{\infty}_{[0,1]},\circ)$ Zinbiel algebrasın dúzedi.

4. A:$[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$ hám $g_t(e_1)=t^{-1}e_1$, $g_t(e_2)=t^{-1}e_2$, $g_t(e_3)= -t^{-2}e_3$, $g_t(e_4)=t^{-2}e_3 + t^{-1}e_4$ bolsa $\lim\limits_{t\to 0} g_t\cdot A$nı anıqlań.

5. Tómendegi algebralardıń ishki hám sırtqı differentsiallawların tabıń

a) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]= -e_3$, $[e_2,e_2]= -2e_3 + e_4$

b) $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = 2e_1$, $[e_3, e_4] = 3e_1$, $[e_4, e_1] = -e_1$

c) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=e_1$,$[e_2, e_5]=e_2$, $[e_4, e_1] =- e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_3, e_5] = e_3$

6. **P** maydannıń qálegen **F** keńeymesi **P** maydan ústinde anıqlanǵan kommutativ hám associativ birlik algebra boladı :

7. **Q** maydannıń **F** = **Q**($\sqrt{2}$) keńeymesin qarasak, ol 2 ólshemli algebra boladı; **Q** maydannıń keńeymesi **R** sheksiz ólshemli algebra boladı. **R** maydannıń keńeymesi **C** 2 ólshemli algebra boladı.

8. Koeffitsientleri **P** maydanǵa tiyisli bolǵan n ózgeriwshili K=**P**[x_1, x_2, …, x_n] kópaǵzalılar kolcosı **P** maydan ústindegi sheksiz ólshemli kommutativ associativ algebra.

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

V. KEYSLAR BANKI

1. Tómendegi kórinistegi matritsalar kópligi kommutator ámeline qarata Li algebrasın payda etiwin dálilleń hám bul Li algebrasınıń nilindeksin tabıń:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Tómendegi algebralardıń sheshimliligin kórsetiń hám nilradikalın tabıń:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$

b) $[e_1, e_1]=e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4]=2e_3$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_4, e_4] = e_2$

c) $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_4, e_2] = -e_2$,

d) $[e_1, e_3] = e_2 + e_4$, $[e_2, e_3] = e_1 - 3e_4$, $[e_4, e_2] = -e_2$,

3. Tómendegi algebralardıń ishki hám sırtqı differentsiallawların tabıń.

a) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]= -e_3$, $[e_2,e_2]= -2e_3 + e_4$

b) $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = 2e_1$, $[e_3, e_4] = 3e_1$, $[e_4, e_1] = -e_1$

c) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=e_1$, $[e_2, e_5]=e_2$, $[e_4, e_1] =- e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_3, e_5] = e_3$

d) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=2e_1$, $[e_2, e_5]=3e_2$, $[e_4, e_1] =- e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$,

4. Tómendegi algebralardıń nilpotentligin kórsetiń hám nilindeksin tabıń:

a) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_2 + e_5, [e_2, e_4] = e_3, [e_4, e_4] = e_3$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_5, [e_4, e_4] = e_3,$

VI. ÓZBETINSHE JUMÍS TEMALARÍ

1. Ózbetinshe jumıstı shólkemlestiriw túri hám mazmunı. Algebralıq sistemalar pánin úyreniwshiler auditoriyada alǵan teoriyalıq bilimlerin bekkemlew hám kriptografiya, kompyuter texnologiyalarında ámeliy máselelerdi sheshiwde kónlikpe payda etiw ushın ózbetinshe tálim sistemasına tiykarlanıp, pán oqıtıwshısı basshılıǵında, óz betinshe jumıslardı orınlaydı. Bunda olar qosımsha ádebiyatlardı úyrenip hámde Internet saytlarınan paydalanıp, jańa bilim kónlikpelerge iye boladı hám olar tiykarında ilimiy bayanatlar tayarlaydı.

2. Ózbetinshe jumıs temaları:

1. Gruppa, kolco hám maydanlar
2. Gruppanıń gomomorfizmi, gomomorfizm haqqında teoremalar.
3. Neter hám Artin kolcoları
4. Shekli maydanlar, maydan keńeymeleri.
5. Associativ algebralar haqqında túsinikler
6. Associativ emes algebralardıń túrleri hám olardıń klassifikatsiyalaw
7. Yordan algebraları hám olardıń klassifikatsiyaları.
8. Nilpotent hám sheshliwsheń Li algebraları.
9. Sheshiliwsheń hám nilpotent radikallar, hámde olar arasındaǵı baylanıs.
10. Kishi ólshemli nilpotent Li algebralarınıń klassifikatsiyaları.
11. Li algebraları ushın Engel hám Li teoremaları.
12. Xarakteristikalıq nilpotent Li algebraları.
13. Nilpotent Li algebralarınıń differentsiallawları hám ishki differentsiallawları.
14. Nilpotent Li algebrasında sırtı differentsiallawdıń barlıǵı.
15. Ápiwayı hám yarimápiwayı Li algebraları.
16. Shekli ólshemli ápiwayı Li algebralardıń klassifikatsiyası.
17. Kartan matritsası, Dinkin sxeması.
18. Yarımápiwayı Li algebraların ápiwayı ideallardıń tuwrı qosındısı kórinisinde jikleniwi haqqında teorema.
19. Li algebralarınıń ulıwmalıǵı hám olar arasındaǵı baylanıslar.
20. Li superalgebraları, Leybnits algebraları.
21. Nilpotent hám sheshliwsheń Leybnits algebraları.
22. Nilpotent Leybnits algebralarınıń klassifikatsiyası.

VII. GLOSSARIY

Termin	Qaraqalpaq tilindegi mánisi	Ingliz tilidagi sharhi
binar qatnas	Qandayda bir α: $M\times M \to M$ sáwlelendiriw járdeminde anıqlanıp, hár bir (x, y) (x, y$\in$M) juplıq ushın $z=\alpha(x, y)\in M$ element sáykes qoyılatuǵın sáykeslik.	The map α: $M\times M \to M$, wich correspond to each par of (x, y) to element $z=\alpha(x, y)\in M$.
yarım gruppa	associativlik shártin qannatlandıratuǵın binar ámeli hám M kóplik.	The set with the operation which satisfy the assosiative low.
gruppa	Jalǵız neytral elementke iye hám hár bir g$\in$G ushın jalǵız keri elementi bar bolǵan yarım gruppa	The semigroup which have unique unit element and any element g$\in$G has an inverse.
kolco	Eki algebralıq (binar) ámel: + (qosıw) hám * (kóbeytiw)anıqlanǵan bolıp (K1) (K,+) – Abel gruppa; (K2) (K,*) – yarımgruppa; (K3) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot s$, $c\cdot (a+b)=c\cdot a+s\cdot b$, $\forall a,b,s\in K$. shártler orınlanatuǵın K kóplik.	The set with the two binary operation + (addition) and * (multiplication) (K1) (K,+) – Abelian group; (K2) (K,*) – semi-group; (K3) $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot s$, $c\cdot (a+b)=c\cdot a+s\cdot b$, $\forall a,b,s\in K$.
birlik kolco	birlik elementi bar kolco	The ring with a unit element
ideal	$ax\in I$ $\forall a\in I$, $x\in R$ shártti qanaatlandıratuǵın úles kóplik	The subset of R that for any $a\in I$, $x\in R$, $ax\in I$
algebra	Qandayda bir (A, +, *) kolcoda qosımsha binar ámel anıqlansa	The ring (A, +, *) with another bunary operation
associativ algebra	associativ (A, +, *) kolco	The ring (A, +, *) with assosiative condition
kommutativ	kommutativ (A, +, *) kolco	The ring (A, +, *) with

algebra		commutative condition
Algebranıń orayı	$a \in A$: $ax = xa$, $\forall x \in A$ shártti qanaatlandıratuǵın elementler kópligi.	The subset, which any element $a \in A$: satisfying the condition $ax = xa$, $\forall x \in A$
Li algebrası -	$x,y,z \in G$ ushın $[x, x] = 0$ hám $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ shártleri orınlı bolǵan algebra	The algebra with the following condition $[x, x] = 0$ and $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ for any elements $x,y,z \in G$
Zinbiel algebrası	$x,y,z \in A$ elementi ushın $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y)$ teńlik orınlı bolǵan algebra.	The algebra with the following condition $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y)$ for any elements $x,y,z \in A$
Leybnits algebrası	$x, y, z \in L$ elementler ushın $[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$ birdeylikti orınlaytuǵın *L* algebra	The algebra with the following condition $[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$ for any elements $x,y,z \in A$
differentsiallaw	$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$ shartin orınlaytuǵın d sızıqlı sáwlelendiriw	The linear map with the condition $d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$
sheshimli algebra	$L^{(n)} = 0$ bolatuǵın L algebra	The algebra with condition $L^{(n)} = 0$
nilpotentli	$L^s=0$ bolatuǵın *L* algebra	The algebra with condition $L^s=0$
nilradikallı	algebranıń maksimal nilpotent idealı	The maximal nilpotent ideal of algebra

VIII. ÁDEBIYATLAR DIZIMI

Tiykarǵı ádebiyatlar:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

3. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.

4. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length (n–1) and their derivations. // Journal of Algebra. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488.

5. Barnes D.W. On Levi's theorem for Leibniz algebras. // Bull. Austr. Math. Soc., – 2012. - Vol. 86. - № 2. – P. 184-185.

6. Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 4. – P. 1259–1277.

7. Loday J.-L., Pirashvili T. Leibniz representations of Leibniz algebras. // J. Algebra. – 1996. - Vol. 181. – P. 414-425.

8. Goze M., Khakimdjanov Yu. Nilpotent Lie Algebras. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. – 1996. Vol. 361. – 336 p.

9. Albeverio, S., Ayupov, Sh.A. and Omirov, B.A.: On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. Algebra. (2005), 159–172.

10. Loday. J. L. Dialgeras. Prepublication del'Inst. De Recherche Math. Avancee (Strasbourg). V. 14(1999). 61 pp.

11. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. – 1993. - Vol. 39. – P. 269-293.

12. Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M. Nilpotency of Zinbiel algebras. J. Dyn. Control. Syst., vol. 11(2), 2005, p. 195-213.