ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“АНАЛИТИК МЕХАНИКА ВА УСТУВОРЛИК НАЗАРИЯСИ” МОДУЛИ БЎЙИЧА

Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тошкент 2017

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2017 йил 24 августдаги 603-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: ЎзМУ доценти, **М.Н. Сидиқов**

Тақризчи: **Dilmurat Azimov. Ph.D.Sc Assistant Professor. Doctor of Technical Sciences. Department of Mechanical Engineering. University of Hawaii at Manoa. USA.**

Ўқув -услубий мажмуа ЎзМУнинг ...... кенгашининг 2017 йил __________даги ___-сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш.

Дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги "Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПФ-4732-сонли, 2017 йил 7 февралдаги "Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида"ги ПФ-4947-сонли Фармонлари, шунингдек 2017 йил 20 апрелдаги "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ПҚ–2909-сонли қарорида белгиланган устивор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир. "Аналитик механика ва устуворлик назарияси" модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

"Аналитик механика ва турғунлик назарияси" модулининг мақсади: тингловчиларга классик механиканинг фундаментал асосларини етарли даражада ўқитиш ва бу назарий билимлар ёрдамида механик масалаларнинг харакат дифференциал тенгламаларини тузишга ва уларни интеграллаш усуллари ёрдамида татқиқ қилишга, боғланишдаги жисмлар ҳаракатига оид масалаларни ечишда қўллашга, турғунлик назариясининг асосий методлари билан таништириш ва аниқ масалаларни ечишда бу методлардан фойдаланишни ўргатишдан иборат.

Модулнинг вазифаси мазкур дастур доирасида тингловчиларга классик механика жараёнларини аниқ тасаввур қилиш, бу жараёнларнинг математик моделини тузиш ва ечимларини топиш методларини ўрганиш, ечимларни механик таҳлил қилиш, тегишли усуллар ёрдамида ишлаб чиқаришда ишлатиладиган қурилмаларнинг ҳаракатлари назарий томондан устиворликка текширишдан иборат.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

"Аналитик механика ва устуворлик назарияси" модулининг ўзлаштириш

жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида **тингловчи:**
Модулни ўзлаштириш жараёнида механика масалаларини тўғри қўйишни, масалани ечиш усули танлашни, технологик ва амалий масалаларни ечишда олинган натижаларни таҳлил қилиш ва бу билимлар асосида муайян механик системалар ҳаракатини ўрганишда, уларнинг математик моделларини қуришда, ҳаракат дифференциал тенгламаларини ечишда ҳамда тадқиқ қилишда аналитик механиканинг асосий принципларини, теоремаларини қўллаш **кўникмаларига** эга бўлишлари керак, шунингдек, механик системанинг ҳаракат тенгламаларини тузишни, хусусий ечимларини аниқлашни, аналитик механикага тегишли усуллар ёрдамида тенгламалар системасининг тартибини пасайтириш, оғдирилган ҳаракат тенгламаларини тузишни, устиворликка Ляпунов методлари ёрдамида текширишни ва бу билимларни табиатда учрайдиган механик жараёнларни турғун ёки нотурғунликка текширишда қўллай **билишлари** лозим.

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

"Аналитик механика ва устуворлик назарияси" курси маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, коллоквиум ўтказиш ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

"Аналитик механика ва устуворлик назарияси" модули мазмуни ўқув режадаги "Таълимда ахборот-коммуникацион технологиялар" ўқув модули билан узвий боғланган ҳолда механиканинг долзарб муаммолари бўйича педагогларнинг касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар ишлаб чиқаришда, космик парвозларни амалга оширишда ишлатиладиган механизм ва машиналарни лойиҳалаш жараёнида ва уларда кечадиган механик ҳаракатларни ўрганишда, устивор дастурий ҳаракатларни амалга оширишда мазкур модулда ўрганиладиган теоремалар, принциплар, асосий усуллар муҳим ўрин тутади, чунки механизмларнинг узоқ вақт ишлаши, мустаҳкамлиги ва ҳаракатининг устиворлиги уларда кечадиган жараёнлар билан бевосита боғлиқ.

“Аналитик механика ва устуворлик назарияси”
Модул бўйича соатлар тақсимоти

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат					
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси				Мустақил таълим
			Жами	жумладан			
				Назарий	Амалий машғулот	Кўчма машғулот	
	Боғланишлар. Мумкин бўлган кўчиш принципи. Умумлашган кучлар. Раус ва Аппель тенгламалари	4	4	2	2		-
	Гамильтон принципи.	4	4	2		2	-
	Каноник алмаштиришлар. Гамильтон -Якоби дифференциал тенгламалари.	4	4	2	2		-
	Асосий тушунчалар ва теоремалар. Автоном системалар учун Ляпунов функциялари.	4	4	2	2		-
	Ляпунов функцияси ва уларни қуриш усуллари.	4	2		2		2
	Консерватив системаларнинг устуворлиги. Циклик координаталар. Циклик интеграллар. Чизиқли системаларнинг устуворлиги. Чизиқли автоном системалар учун Ляпунов функцияларини қуриш.	10	8	2	4	2	2
	Жами	**30**	**26**	**10**	**12**	**4**	**4**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Боғланишлар. Мумкин бўлган кўчиш принципи. Умумлашган кучлар. Раус ва Аппель тенгламалари

Механик система. Боғланишлар ва уларнинг таснифи. Умумлашган координаталар. Координата вариацияси. Мумкин бўлган ҳақиқий ва вертуал кўчишлар. Системанинг эркинлик даражаси. Идеал ва ноидеал боғланишлар. Умумлашган кучлар. Квазикоординаталар. Раус ва Аппель тенгламалари. Тезланишлар энергияси.

2-Мавзу: Гамильтон принципи

Гамильтон принципи. Пуанкаре-Картан интеграл инвариантлари. Пуанкаре-Картан интеграли тузилиши. Биринчи интеграллар ёрдамида тенгламалар системасининг тартибини пасайтириш.Уиттекер тенгламаси. Универсал интеграл инвариантлар орасидаги боғланиш.

3-Мавзу: Каноник алмаштиришлар. Гамильтон-Якоби дифференциал

тенгламалари

Каноник алмаштиришлар. Эркин каноник алмаштиришлар. Алмаштиришнинг канониклик аломати. Гамильтон-Якоби дифференциал тенгламалари ва Якоби теоремаси. Гамильтон бўйича таъсир ва келтириб чиқарувчи функция.

4-Мавзу: Асосий тушунчалар ва теоремалар. Автоном системалар учун Ляпунов функциялари

Устуворликнинг Ляпунов бўйича таърифи. Оғдирилган ҳаракат тенгламалари. Автоном системалар учун Ляпунов функциялари. Ляпунов функцияларининг хоссалари. Автоном системалар учун бевосита усулнинг асосий теоремалари: устуворлик ва асимптотик устуворлик ҳақидаги Ляпунов теоремалари, асимптотик устуворлик ҳақидаги Н.Н. Красовский теоремаси, ноустуворлик ҳақидаги Четаев ва Ляпунов теоремалари.

5-Мавзу: Консерватив системаларнинг устуворлиги. Циклик интеграллар. Чизиқли системаларнинг устуворлиги. Чизиқли автоном системалар учун Ляпунов функцияларини қуриш

Консерватив системалар абсолют мувозанатининг устуворлиги. Лагранж, Четаев теоремалари. Консерватив системалар нисбий мувозанатининг устуворлиги. Циклик интеграллар. Раус функцияси. Гироскопик кучлар. Стационар ҳаракатлар ва уларнинг устуворлик шартлари. Раус, Ляпунов теоремалари. Гироскопик боғланмаган системалар.

Чизиқли автоном системаларнинг устуворлиги. Ўзгармас коэффициентли чизиқли Гамильтон системаларнинг устуворлиги. Биринчи яқинлашиш бўйича устуворлик ва тургунмаслик ҳақидаги теоремалар. Критик ҳоллар тушунчаси.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАЗМУНИ

1-Амалий машғулот

Раус ва Аппель тенгламалари

Идеал ва ноидеал боғланишли системаларга аниқ масалалар. Аниқ механик система учун Раус ва Аппель тенгламаларини тузиш усуллари, системанинг ишқаланиш қонуни. Ноидеал системаларда боғланишларни комбинациялаш.

2-Амалий машғулот

Каноник алмаштиришлар. Гамильтон -Якоби дифференциал тенгламаси

Интеграл инвариантларга ва вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлган каноник алмаштиришларга масалалар ечиш. Алмаштиришларни канониклик аломатига кўра келтириб чиқарувчи фунцияни, алмаштиришларни валентлигини ва янги Гамильтон функциясини аниқлашга доир масалалар ечиш.

3-Амалий машғулот

Асосий тушунчалар ва теоремалар. Автоном системалар учун Ляпунов функциялари.

Қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатланаётган қаттиқ жисмни бош ўқлар атрофидаги прецессион ҳаракатини устуворлигини Ляпунов функцияси ва теоремаси ёрдамида ўрганиш. Функцияларни Ляпунов функцияси аломатига текшириш.

4-Амалий машғулот

Ляпунов функцияси ва уларни қуриш усуллари.

Ляпунов функциясини хозирда маълум бўлган учта усулига оид масалалар (квадратик форма кўринишида, биринчи интегралларнинг комбинацияси кўринишида ва алмаштиришлар ёрдамида масалани Ляпунов функцияси маълум бўлган системага келтириш)

5 – Амалий машғулот

Консерватив системаларнинг устуворлиги. Циклик интеграллар. Чизиқли системаларнинг устуворлиги

Абсолют ва нисбий яккаланган мувозанат ҳолатининг устуворлигига тегишли аниқ масалалар. Лагранж теоремаси. Стационар ҳаракатнинг устуворлиги хақидаги Раус теоремасига масала.

КЎЧМА МАШҒУЛОТ МАЗМУНИ

Кўчма машғулотлар модул соҳаси бўйича етакчи олий таълим кафедралари ва илмий-тадқиқот муассасалари лабораториялари ҳамда ишлаб чиқариш корхоналари бўлимларида ташкил этилади. Мазкур машғулотлар соҳага оид долзарб мавзуларда тажриба-синов ва лаборатория машғулотлари ҳамда танишув амалиёти шаклларида олиб борилади. Шунингдек, таъкидланган муассасалар ва корхоналар етакчи мутахассислари томонидан республика ва хорижий илмий марказларда соҳа йўналишида амалга оширилаётган илғор илмий ва амалий тадқиқотлар бўйича таҳлилий шарҳлар берилиши масқадга мувофиқдир.

Қўчма машғулотлар учун қуйидаги мавзулар тавсия этилади:

1 мавзу: Гамильтон принципи.

2 мавзу: Консерватив системаларнинг устуворлиги. Циклик координаталар. Циклик интеграллар. Чизиқли системаларнинг устуворлиги. Чизиқли автоном системалар учун Ляпунов функцияларини қуриш.

Кўчма машғулотларда фотоника соҳасида Республикамизда олиб борилаётган илмий тадқиқотлар билан танишиш, шу соҳада изланаётган олимлар билан учрашувлар ташкил этиш ва имконият доирасида экспериментал тадқиқотларда қатнашиш назарда тутилган.

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ

Тингловчи мустақил ишни модулни хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва меъёрий хужжатлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш;
- фанга оид статистик маълумотларни ўрганиш, уларни таҳлил қилиш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул маъруза ва семинар машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

ЖОРИЙ НАЗОРАТ(АССИСМЕНТ)НИ БАҲОЛАШ МЕЗОНИ

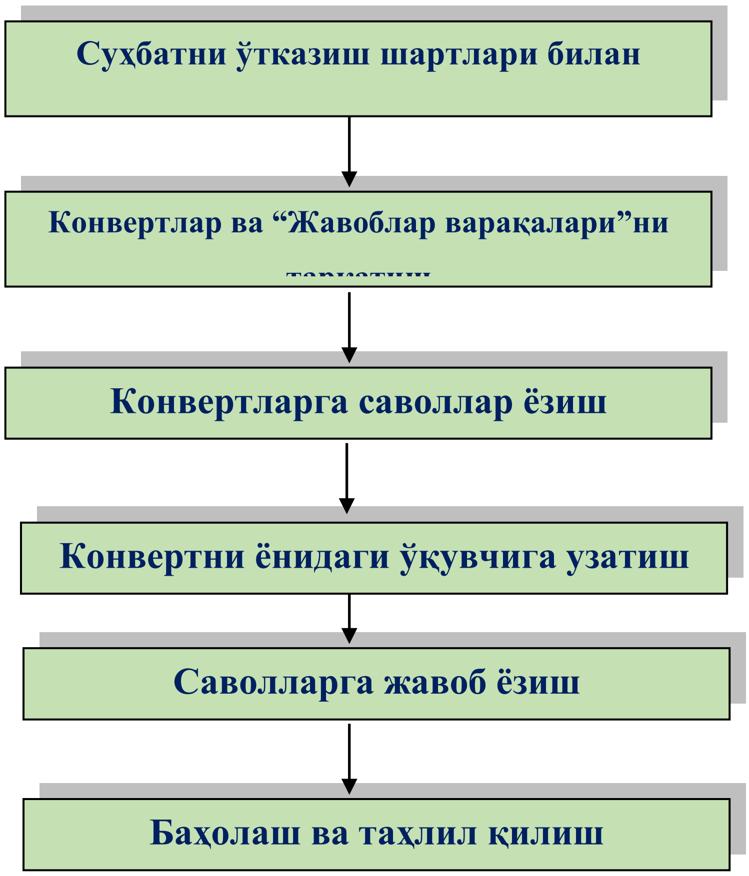
Жорий назорат(ассисмент)ни бахолаш Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш Тармоқ (минтақавий) марказида тасдиқланган шакллари ва мезонлари асосида амалга оширади.

Ушбу модулнинг жорий назорат(ассисмент)га ажратирлан максимал балл-**0,8 балл.**

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДИ.

Давра столининг тузилмаси.

Ёзма давра суҳбатида стол-стуллар айлана шаклида жойлаштирилиб, ҳар бир таълим олувчига конверт қоғози берилади. Ҳар бир таълим олувчи конверт устига маълум бир мавзу бўйича ўз саволини беради ва “Жавоб варақаси”нинг бирига ўз жавобини ёзиб, конверт ичига солиб қўяди. Шундан сўнг конвертни соат йўналиши бўйича ёнидаги таълим олувчига узатади. Конвертни олган таълим олувчи ўз жавобини “Жавоблар варақаси”нинг бирига ёзиб, конверт ичига солиб қўяди ва ёнидаги таълим олувчига узатади. Барча конвертлар айлана бўйлаб ҳаракатланади. Якуний қисмда барча конвертлар йиғиб олиниб, таҳлил қилинади. Қуйида “Давра суҳбати” методининг тузилмаси келтирилган



S	Аналитик механикага тегишли усуллардан фойдаланишнинг кучли томонлари	Механик системалар ҳаракатининг аналитик, яъни аниқ ечимларини топиш имкониятини беради.
W	Аналитик механикага тегишли усуллардан фойдаланишнинг кучсиз томонлари	Деформацияланувчи механик системаларнинг ҳаракатини ўрганишда ҳар доим ҳам қўллаб бўлмайди.
O	Аналитик механика фанининг усулларидан фойдаланиш имкониятлари	Ҳар доим ҳам умумий ечимни аниқлаб бўлмасада, аналитик механиканинг усуллари ёрдамида хусусий ечимларни аниқлаш имконияти мавжуд.
T	Тўсиқлар (ташқи)	Аналитик усулларни эркинлик даражаси юқори бўлган системаларга қўлланилганда тахлил қилишнинг мураккаблиги..

“Ассисмент” методи.

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур метод орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташҳис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби:

“Ассисмент” лардан маъруза машғулотларида талабаларнинг ёки қатнашчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, семинар, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассесментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

“Ассесмент” методига мисол

Тест

- 1.Гамильтон принципида қандай ҳаракатлар бир-бири билан солиштирилади ?
- А. ихтиёрий
- В. Хақиқий ва кинематик мумкин бўлган ҳаракатлар
- С. Бир нуқтадан чиқувчи

Қиёсий таҳлил

- Гамильтон принципини қулланиш соҳасини таҳлил қилинг?

Тушунча таҳлили

- Гамильтон бўйича таъсир қисқармасини изоҳланг...

Амалий кўникма

- Каноник алмаштириш аломатини бажариш кетма-кетлтгини чизиқли алмаштиришда келтиринг

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-мавзу: БОҒЛАНИШЛАР. МУМКИН БЎЛГАН КЎЧИШ ПРИНЦИПИ. УМУМЛАШГАН КУЧЛАР. РАУС ВА АППЕЛЬ ТЕНГЛАМАЛАРИ.

РЕЖА:

1.1.Боғланишлар классификацияси. Мумкин бўлган кўчиш.
1.2.Идеал боғланишли системалар учун Лагранж принципи.
1.3.Кинематик боғланишли системаларнинг ҳаракат тенгламалари.

Таянч иборалари: *боғланиш, кинематик, идеал, ноидеал боғланишлар, реаном, умумлашган координата, умумлашган куч.*

1.1. Боғланишлар классификацияси. Мумкин бўлган кўчиш.

Система нуқталарининг ҳолати ва ҳаракатига қўйилган ҳар қандай чегара механикада боғланиш дейилади. Богланишлар бирор координаталар системасига нисбатан система нуқталарининг координаталари $x_i, y_i, z_i\ (i=1,2,...N)$ улардан вақт буйича олинган биринчи тартибли ҳосилалари $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i\ (i=1,2,...N)$ орасидаги маълум муносабатлар билан ифодаланади. Бу муносабатларда t вақт ошкор равишда қатнашиши мумкин.

Система нуқталарига қўйилган боғланишларни ифодаловчи муносабатлар тенгламалар ёки тенгсизликлардан иборат бўлиши мумкин.

Система нуқталарнга қуйилган боғланишлар актив кучлар таъсиридаги система нуқталарининг ҳаракатини худди шу кучлар таъсиридаги эркин система нуқталарининг ҳаракатига нисбатан маълум маънода чеклайди.

Бундай чеклашдан техникаииг турли соҳаларида, амалиёт учун зарур бўлган, мақсадга мувофиқ бирор йўналиш буйича ҳаракатини таъминлашда фойдаланилади. Двигател цилиндри ичида ҳаракатланаётган поршен бунга мисол бўла олади. Бунда цилиндр боғланиш вазифасини ўтайди.

Шундай қилиб, боғланишдаги система нуқталарининг ҳаракати фақат система нуқталарига таъсир этувчи кучлар ва бошланғич шартларгагина боғлик бўлмай, балки қуйилган боғланишларга ҳам боғлиқ бўлади. Бу ҳолда бошланғич шартлар боғланиш тенгламаларини қаноатлантириши керак.

Система нуқталарига қуйилган боғланишлар турига қараб система нуқталари турлича ҳаракатда бўлади. Боғланишларнинг турли хилларини кўриб ўтамиз.

Боғланишлар фақат система нуқталарининг координаталарини чекласа, бундай богланишлар геометрик боғланишлар дейилади. Геометрик боғланишнинг тенгламаси

$$f(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots N),$$

кўринишда ёзилади. f - функция ва унинг ҳосилалари узлуксиз функция деб қаралади.

Агар боғланиш система нуқталарининг координаталаридан ташқари тезлигини ҳам чекласа, бундай боғланиш кинематик ёки дифференциалли боғланиш, дейилади. Кинематик боғланиш тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\varphi(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots N) \ .$$

Геометрик боғланишлар ва интегралланадиган кўринишдаги дифференциал боғланишлар Герц таърифига кўра голоном богланишлар дейилади. Интегралланмайдиган дифференциал боғланишлар ноголоном боғланишлар дейилади. Ноголоном боғланиш тенгламаларини система нуқталари координаталарининг функциясидан иборат бўлган бирор функциянинг тўлиқ дифференциали тарзида ифодалаб бўлмайди. Агар боғланиш тенгламаси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлса, бундай боғланиш ностационар(реоном) боғланиш дейилади[1] [1](12-14 бетлар).

Мумкин бўлган кўчиш.

Аналитик механикада мумкин бўлган кўчиш тушунчаси асосий тушунчалардан бири ҳисобланади. Бу тушунчани голоном(геометрик) боғланиш қўйилган нуқта учун киритамиз. Моддий нуқтага

---

[1] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. С.12-14

$$f(x,y,z,t)=0,$$

голоном ностационар боғланиш қўйилган бўлсин. Бирор пайтда сирт устидаги нуқтанинг эгаллаган ҳолатидаи боғланишни қаноатлантирган ҳолда фикран ҳар қандай элементар (жуда кичик) кўчишларни олнш мумкннлигини тасаввур қилайлик. Бу кўчишларни нуқта раднус-векторинииг сирт устида жойлашган орттирмалари тарзида тасвирлаш мумкин. Мазкур кўчишиларни бириичи тартибли кичик миқдоргача аниқлик билан олсак, у ҳолда бу кўчишлар M иуқтада сиртга ўтказилган уринма текисликда ётади. **Қуйилган боғланишни берилган онда қаноатлантирувчи нуқтанинг ҳар қандай тасаввур қилинадиган чексиз кичик кўчиши мумкин бўлган кўчиш ёки виртуал кўчиш дейилади.** Нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши $\delta\vec{r}(\delta x,\delta y,\delta z)$ билан белгиланади.

Агар нуқтага стационар бўлмаган

$$f(x,y,z,t)=0$$

боғланиш қуйилган бўлса, у ҳолда нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши вақтнинг берилган пайтидаги аниқ қайд қилинган қиймати учун ҳисобланади, яъни бунда $\delta t=0$ деб қаралади. Масалан, ҳаракатдаги ёки деформацияланувчи сирт устидаги нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши, берилган пайтда сирт эгаллаган ҳолатда нуқтанинг сирт бўйлаб элементар кўчишларидан иборат бўлади ва қуйидаги тенгламани қаноатлантиради:

$$grad f\delta\vec{r}=0.$$

Агар системага қўйилган боғланишлар $\sum_{\nu=1}^{3N} a_{\nu\rho}\dot{x}_{\nu}+a_{\rho}=0$ чизиқли кинематик боғланишдан иборат бўлса, у ҳолда мумкин бўлган кўчишлар $\sum_{\nu=1}^{3N} a_{\nu\rho}\delta x_{\nu}=0$ муносабатларни қаноатлантириши керак.

Боғланишни қаноатлантирган ҳолда нуқтанинг фазода dt вақт ичида элементар кўчиши ***ҳақиқий кўчиш*** дейилади. Агар нуқтага $f(x,y,z,t)=0$ боғланиш қўйилган бўлса, у ҳолда M нуқтанинг dt вақт ичидаги ҳақиқий кучиши $d\vec{r}$ шу пайтда траекторияга уринма бўйича йўналади. Нуқтанинг хақиқий кўчиши нуқтага таъсир этувчи кучларга, унга қуйилган боғланишга ва бошланғич шартларга боғлиқ бўлади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши билан хақиқий кўчиши орасидаги муносабатни аниқлаймиз. Агар нуқтага стационар боғланиш қўйилган бўлса, у ҳолда нуқтанинг ҳар бир хақиқий кўчиши бирорта мумкин бўлган кўчиши билан устма-уст тушади. Нуқтанинг ҳар бир мумкин бўлган кучишини голоном боғланиш билан ифодаланган сиртга нисбатан нуқтанинг нисбий кўчиши деб қараш мумкин. Агар боғланиш стационар бўлса, яъни сирт геометрик шаклини ўзгартирмаса ва фазода кўчмаса, сирт устидаги нуқта кўчирма ҳаракатда қатнашмайди ва нуқтанинг барча мумкин бўлган кучишлари абсолют кўчишлардан иборат бўлади. Бинобарин, кучлар таъсиридаги нуқтанинг исталган хақикий кўчиши $d\vec{r}$ шу нуқтанинг бирор мумкин бўлган кўчиши $\delta\vec{r}$ билан устма-уст тушади. Стационар бўлмаган боғланишлар қўйилган нуқтанинг хақиқий кўчиши бирорта ҳам мумкин бўлган кўчиш билан устма-уст тушмаслиги мумкин.

Механик система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишлари $\delta\vec{r}_i$ тўплами системанинг мумкин бўлган кўчиши дейилади. Нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши билан хақиқий кўчиши орасида ўрнатилган муносабатлар система нуқталарининг кўчишига ҳам тааллуқли бўлади.

Агар система M_i нуқтасининг радиус-векторини $\vec{r}_i$ ва координаталарини x_i, y_i, z_i билан белгиласак, M_i нуқтанинг мумкин бўлган кўчиши

$$\delta\vec{r}_i = \delta x_i\vec{i} + \delta y_i\vec{j} + \delta z_i\vec{k}$$

вектор билан ифодаланади. Бунда $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ лар $Oxyz$ инерциал система координата ўқларининг бирлик векторларини, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ лар эса мумкин бўлган кўчишнинг мазкур ўқлардаги проекцияларини ифодалайди ва координаталарнинг вариациялари дейилади.

M_i нуқтанинг хақиқий кўчиши эса

$$d\vec{r}_i = dx_i\vec{i} + dy_i\vec{j} + dz_i\vec{k}$$

вектор билан ифодаланади. Бунда dx_i, dy_i, dz_i лар координаталарнинг дифференциалини ифодалайди.

Системанинг ҳолати умумлашган координаталар орқали ифодаланганда системанинг мумкин бўлган кўчишларини ҳам умумлашган координаталарнинг вариациялари орқали ифодалаш мумкин.

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

Юқорида кўрганимиздек, системанинг мумкин бўлган кўчишини аниқлашда боғланиш тенгламасида *t* ни ўзгармас деб қараш керак[2] [1](15-18 бетлар)

Аналитик механикада системанинг ҳаракати ёки мувозанатини текширишда муҳим ахамиятга эга бўлган яна битта тушунча ***кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги иши*** тушунчаси киритилади. Кучнинг мумкин бўлган кўчишдаги элементар иши δA қуйидагича аниқланади:

$$\delta A = \vec{F} \delta \vec{r} \,.$$

Агар системанинг ҳар қндай мумкин бўлган кўчишида система нуқталарига қуйилган боғланиш реакция кучларининг элементар бажарган ишлари йиғиндиси нолга тенг бўлса, бундай боғланишлар **идеал богланишлар** дейилади. Идеал богланишлар учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{N}_i \delta \vec{r} = 0 \,.$$

Ўз навбатида системага қўйилган боғланишлар ноидеал деб аталади, агар системанинг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида система нуқталарига қуйилган боғланиш реакция кучларининг элементар бажарган ишларининг йиғиндиси учун қуйидаги муносабат ўринли бўлса:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{N}_i \delta \vec{r} = \tau \neq 0$$

---

[2] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 15-18

Мумкин бўлган кўчиш принципи берилган кучлар таъсиридаги маълум боғланишлар қуйилган механик системанинг мувозанат шартини ифодалайди[3] [1](30-33 бетлар).[2](16-17 бетлар)

Актив кучлар таъсиридаги идеал ва стационар боғланишлар қуйилган механик система мувозанатда бўлиши учун система нуқталарининг ҳар қандай мумкин бўлган кўчишида барча актив кучлани элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг (бўшатмайдиган) ва нолдан кичик ёки нолга тенг (бўшатадиган боғланишлар учун) бўлиши зарур ва етарлидир, яъни

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta \vec{r} \le 0 .$$

Шуни таъкидлаш керакки, бу Лагранж принципи ёрдамида ихтиёрий принцип шартларини қаноатлантириувчи механик системанинг мувозанат ҳолатини ўрганиш мумкин.

1.2.Циклик координаталар. Циклик интеграллар ёрдамида ҳаракат тенгламаларининг тартибини пасайтириш.

Таъриф. $q_1, q_2, ..., q_l \ (l < n)$ координаталар циклик координаталар деб аталади, агар бу координаталар L Лагранж функциясига ошкор равишда қатнашмаса. Таърифга кўра $L = L(q_{l+1}, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t)$ ёки $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ ва Лагранж тенгламаларидан $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = c_k, (k = 1,2,...,l)$ циклик интегралларни оламиз. Бунда $c_1, c_2, ..., c_l$ интеграллаш доимийлари. Раус циклик интеграллардан фойдаланиб, система ҳаракат тенгламаларининг тартибини пасайтирган. Бунинг учун $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = c_k, (k = 1,2,...,l)$ циклик интеграллар ёрдамида циклик тезликларни позицион координаталар ва уларнинг тезликларга $\dot{q}_k = \dot{q}_k (q_{l+1}, q_{l+2}, ...q_n, \dot{q}_{l+1}, \dot{q}_{l+2}, ..., \dot{q}_n c_1, c_2, ...c_l, t)$ нисбатан ечиб оламиз ва қолган Лагранж тенгламаларига циклик тезликларни ўрнига қўйиб позицион координаталарга нисбатан тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Мана шу усул Раус томонидан амалга оширилган ва

[3] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 30-33
Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013. C.16-17

тенгламалар системасининг тартиби пасайтирилган. Раус томонидан худди Лагранж функциясини ролини бажарадиган $R = L - \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k$ функция киритилган ва циклик тезликлар интеграллар ёрдамида позицион координаталар ва тезликлар орқали алмаштирилган. Бунга кўра Раус функцияси $R = R(q_{l+1}, q_{l+2}, ... q_n, \dot{q}_{l+1}, \dot{q}_{l+2}, ..., \dot{q}_n c_1, c_2, ... c_l, t))$ позицион координаталар, тезликлар ва интеграллаш доимийларининг функциясидан иборат бўлади. Раус функциясининг иккала томонини вариациялаб

$$\sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial R}{\partial c_k} \delta c_k = \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i +$$
$$+ \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{l} \delta (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i$$

ва бу тенгламанинг иккала томонидаги бир хил вариациялар олдидаги коэффициентларни тенглаб

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ (i = l+1, ..., n), \ \dot{q}_k = -\frac{\partial R}{\partial c_k}, \ (k = 1, 2, ..., l) .$$

Бундан Раус функциясидан олинган хусусий ҳосилалар Лагранж функциясидан олинган хусусий ҳосилаларга тенг бўлиши келиб чиқар экан. Олинган натижани ўрнига қўйиб,

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial R}{\partial q_i} = 0 \quad i = l+1, l+2, ..., n,$$

позицион координаталарга нисбатан ҳаракат тенгламаларини ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, циклик интеграллар ёрдамида тенгламалар системасининг тартибини циклик координаталар сонига камайтирса бўлар экан.

Раус тенгламалари.

Қуйида кинематик боғланишли системанинг ҳаракат тенгламаларини Лагранж кўпайтувчилари ёрдамида тузишни кўриб чиқамиз. Фараз қиламиз, N та моддий нуқтадан ташкил топган системага S геометрик идеал

$$f_\alpha(x, t) = 0 \qquad (\alpha = \overline{1, S}),$$

ва r чизиқли кинематик

$$\sum_{k=1}^{3N} a_{\rho k}\dot{x}_k + a_\rho = 0$$

ёки
$$\sum_{k=1}^{3N} a_{\rho k} dx_k + a_\rho dt = 0 \ \left(\rho = \overline{1,r}\right),$$

кўринишдаги кинематик боғланишлар қўйилган бўлсин. Бунда $a_{\rho k}, a_\rho$ - x, t ўзгарувчиларнинг функияси. Агар механик система учун ўринли бўлган Даламбер–Лагранж принципида фақатгина геометрик боғланишларни ҳисобга оладиган бўлсак қуйидаги муносабатга эга бўламиз:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{Q_i - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\right\}\delta q_i = 0 \ . \qquad (1)$$

Бу тенгламадаги δq_i умумлашган координаталар вариацияларининг ҳаммаси ҳам эркин бўлмай, улар кинематик боғланишлар тенгламалари билан боғланган. Биринчи навбатда умумлашган координаталар

$$x_k = x_k(q,t) \qquad \left(k = \overline{1,3N}\right)$$

киритиш билан геометрик боғланишларни ҳисобга оламиз. Бунга кўра:

$$dx_k = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial x_k}{\partial t}dt \qquad (n = 3N - S)$$

ва кинематик боғланишлар тенгламаларига қўйиб умумлашган координаталарга нисбатан кинематик боғланишларни оламиз.

$$\sum_{k=1}^{3N} a_{\rho k}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}dq_i + \sum_{k=1}^{3N} a_{\rho k}\frac{\partial x_k}{\partial t}dt + a_\rho dt = 0 \qquad \left(\rho = \overline{1,r}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{3N} a_{\rho k}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\right]dq_i + \left(\sum_{k=1}^{3N} a_{\rho k}\frac{\partial x_k}{\partial t} + a_\rho\right)dt = 0$$

ёки
$$\sum_{i=1}^{n} A_{\rho i}dq_i + A_\rho dt = 0 \qquad \left(\rho = \overline{1,r}\right),$$

бунда
$$A_{\rho i} = \sum_{k=1}^{3N} a_{\rho k}\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\ , \quad A_\rho = \sum_{k=1}^{3N} a_{\rho k}\frac{\partial x_k}{\partial t} + a_\rho\ .$$

Кинематик боғланишларга кўра умумлашган координаталарнинг вариациялари учун
$$\sum_{i=1}^{n} A_{\rho i}\delta q_i = 0 \qquad \left(\rho = \overline{1,r}\right)$$

муносабатлар ўринли. Бу системани ҳар бир тенгламасини λ_ρ кўпайтувчиларга кўпайтириб қўшиб чиқамиз.

$$\sum_{\rho=1}^{\kappa}\lambda_\rho\sum_{i=1}^{n}A_{\rho i}\delta q_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho A_{\rho i}\right)\delta q_i=0. \qquad (2)$$

(1)ва (2) тенгламаларни қўшиб

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{Q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_i}+\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho A_{\rho i}\right\}\delta q_i=0,$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу тенгламадаги λ_ρ Лагранж кўпайтувчиларини шундай танлаб оламизки, ўзаро боғлиқ бўлган rта вариациялар олдидаги коэффициентлар ҳам нолга айлансин. Бундан

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho A_{\rho i}\qquad \left(i=\overline{1,n}\right) \qquad (3)$$

Бу тенгламалардаги номаълумлар сони $q_1,q_2,...q_n,\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_r$ $n+r$ та бўлиб тенгламалар сони эса nта. Бу тенгламалар системасига кинематик боғланишлар тенгламаларини қўшиб $n+r$та номаълумли $n+r$та тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{\rho=1}^{r}\lambda_\rho A_{\rho i}\qquad \left(i=\overline{1,n}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}A_{\rho i}dq_i+A_\rho dt=0\qquad \left(\rho=\overline{1,r}\right)$$

Олинган тенгламалар системаси **Раус тенламалари** деб аталади ва системага киритилган умумлашган координаталар q_i формал равишда умумлашган дейилади, чунки бу координаталар кинематик боғланишлар орқали ўзаро боғланган.[2](347 бет)

1.3.Кинематик боғланишли системаларнинг ҳаракат тенгламалари. Аппель тенгламалари.

Энди тенгламалар сони системанинг эркинлик даражасига тенг бўлган ҳаракат тенгламаларини келтириб чиқараш устида тўхталамиз. Фараз қиламиз, Nта моддий нуқтадан ташкил топган системанинг ҳолати $q_1,q_2,...q_n$ умумлашган координаталар билан аниқлансин.

У ҳолда Декарт координаталари

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \ldots q_n, t) \qquad \left(\nu = \overline{1{,}3N}\right) \tag{4}$$

$$dx_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_\nu}{\partial t} \tag{5}$$

$$\delta x_\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad \left(\nu = \overline{1{,}3N}\right) \tag{6}$$

умумлашган координаталар ва вақтнинг функцияси бўлади.

Бундан ташқари, системага

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\rho k} \dot{q}_i + a_\rho = 0 \qquad \left(\rho = \overline{1, r}\right), \tag{7}$$

ёки дифференциал кўринишдаги

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\rho k} dq_i + a_\rho dt = 0 \qquad \left(\rho = \overline{1, r}\right) \tag{8}$$

кинематик боғланишлар қўйилган бўлсин.

Бу боғланишлар умумлашган координаталарнинг вариацияларига қуйидагича чегара қўяди:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\rho i} \delta q_i = 0 \qquad \left(\rho = \overline{1, r}\right) \tag{9}$$

Шундай қилиб, умулашган координаталарнинг n та $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ вариациялари r та (9) боғланишлар билан боғланган. (7) ва (8) муносабатлардан фойдаланиб (5) ва (6) тенгламалардаги ўзаро боғлиқ бўлган хақиқий кўчишларни, вариацияларни

$$dx_k = \sum_{j=1}^{n-r} B_{kj} dq_j + B_k dt \qquad \left(k = \overline{1{,}3N}\right), \tag{10}$$

$$\delta x_k = \sum_{j=1}^{n-r} B_{kj} \delta q_j \,,$$

чиқариб ташлаймиз. Бунда B_{kj}, B_k – $q_1, \ldots, q_n, t$ ларга боғлиқ бўлган янги функциялар.

Бу ҳолда ўзаро боғлиқ бўлмаган вариациялар сони $(n - r)$ га тенг бўлади. Бунга кўра Даламбер-Лагранж $\sum_{k=1}^{3N} (X_k - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k = 0$ принципини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\sum_{j=1}^{n-r} \left[\sum_{k=1}^{3N} (X_k - m_k \ddot{x}_k) B_{kj} \right] \delta q_j = 0. \tag{11}$$

Актив кучларнинг элементар бажарган ишлари эса

$$\sum_{k=1}^{3N} X_k \delta x_k = \sum_{j=1}^{n-r}\sum_{k=1}^{3N} X_k B_{kj}\delta q_j = \sum_{j=1}^{n-r} Q'_j \delta q_j \tag{12}$$

кўринишда аниқланади. Бунда $Q'_j = \sum_{k=1}^{3N} X_k B_{kj}$ ўзаро боғлиқ бўлмаган вариацияларга тегишли умумлашган кучлар.

Принципга тегишли иккинчи ҳад устида тўхталамиз. (10) га кўра

$$\dot{x}_k = \sum_{j=1}^{n-r} B_{kj}\dot{q}_j + B_k \qquad \left(k = \overline{1,..,3N}\right).$$

Бу муносабатнинг иккала томонидан вақт бўйича ҳосила оламиз.

$$\ddot{x}_k = \sum_{j=1}^{n-r} B_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{n-r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_i + \sum_{j=1}^{n-r}\frac{\partial B_{kj}}{\partial t}\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial B_k}{\partial t} \qquad \left(k = \overline{1,3N}\right)$$

Бундан

$$B_{kj} = \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_j} \tag{13}$$

муносабат келиб чиқади.

Энди қуйидаги

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k^2 \tag{14}$$

функцияни киритамиз. Бу S - функция Аппель томонидан киритилган бўлиб, тезланишлар энергияси деб аталади (кинетик $T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N} m_k \dot{x}_k^2$ энергияга ўхшаш) ва умумлашган тезлпаниш бўйича олинган ҳосила учун

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{q}_j} = \sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k B_{kj} \tag{15}$$

муносабат ўринли.

(13) и (15) га кўра Даламбер-Лагранж принципи қуйидаги кўринишга келади:

$$\sum_{j=1}^{n-r}\left(Q'_j - \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}\right)\delta q_j = 0. \tag{16}$$

Бундан δq_j вариациацияларнинг ҳаммаси ўзаро боғлиқ бўлмагани учун

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j} = Q'_j \qquad \left(j = \overline{1,n-r}\right) \tag{17}$$

тенгламалар системаси келиб чиқади. Бу тенгламалар системаси Аппель томонидан келтириб чиқарилган бўлиб, Аппель номи билан аталади. Бу тенгламаларнинг сони системани эркинлик даражасига тенг.

Ўзаро боғлиқ бўлмаган вариацияларга тегишли умумлашган кучларни топиш учун, актив кучларнинг мумкин бўлган кўчишлардаги ишларини ҳисоблаймиз

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{i=1}^{n-r} Q_i^{/} \delta q_i$$

ва кинематик боғланишлар ёрдамида боғлиқ бўлган вариацияларни чиқариб ташлаймиз.

Шуни таъкидлаш керакки, тезланишлар энергияси $S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N} m_k \ddot{x}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}\right)^2$ учун кинетик энергия учун ўринли бўлган Кенига теоремасига ўхшаш теорема ўринли:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_k'}{dt^2}\right)^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \left(\frac{d^2\vec{r}_k'}{dt^2}\right)^2 + \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2}\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k'}{dt^2}$$

ва $\sum_{k=1}^{N} m_k \frac{d^2\vec{r}_k'}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum m_k \vec{r}_k'\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(M\vec{r}_c'\right) = 0$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\boxed{S = \frac{1}{2}M\vec{W}_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \vec{W}_k'^2}$$

Бунда C - система масса маркази; $M = \sum m_k$ - системанинг массаси;

Шундай қилиб, системанинг тезланишлар энергияси масса марказининг тезланиш энергиясидан (бу нуқтага системанинг массаси жамланган) ва масса маркази атрофидаги нисбий ҳаракат тезланишлари энергияларининг йиғиндисидан иборат бўлар экан[4][1](67-73 бетлар).

[4] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 67-73

Назорат саволлари:

1. Ноидеал боғланишлар деб қандай боғланишларга айтилади.
2. Лагранж принципи қандай системалар учун ўринли.
3. Мумкин бўлган кўчиш билан хақиқий кўчиш орасидаги фарқ нимада
4. Кинематик боғланишли системалар учун Лагранж тенгламалари ўринли бўладими.
5. Раус тенгламаларидаги координаталарни умумлашган координаталар сифатида қараш мумкинми.
6. Аппел тенгламаларининг сони системанинг эркинлик даражасидан қанчага фарқ қилади.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X.
2. Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013.
3. Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006
4. Уиттекер Е. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 2001.

2- мавзу: ГАМИЛЬТОН ПРИНЦИПИ

РЕЖА:

2.1.Гамильтон бўйича таъсир.
2.2.Механиканинг асосий интеграл инварианти.
2.3.Универсал интеграл инвариантлар орасидаги боғланиш.

Таянч сўзлар: *вариация, умумлашган импульс, хақиқий ҳаракат, мумкин бўлган ҳаракат, инвариант*.

2.1.Гамильтон бўйича таъсир.

Классик механикада каноник алмаштиришлар Гамильтон тенгламаларига тегишли бўлиб, бу тенгламаларнинг интеграл инвариантларига асосланади. Шунинг учун бу инвариантларни келиб чиқишига тўхталиб ўтамиз.

Лагранж функцияси $L(t, q_i, \dot{q}_i)$ ва эркинлик даражаси n га тенг бўлган ихтиёрий геометрик боғланишли механик системани кўриб чиқамиз.

Маълумки, қуйидаги интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i) dt$$

$(t_{0?}, t_1)$ вақт оралиғидаги **Гамильтон таъсири** деб аталади.

Интеграл остидаги L Лагранж функцияси системанинг умумлашган координата ва тезликларнинг функцияси бўлгани учун, интегрални ҳисоблашда $(t_{0?}, t_1)$ вақт оралигида $q_i(t)$ умумлашган координаталар маълум бўлиши керак. Бошқача қилиб таърифлаганда, Гамильтон таъсири система ҳаракатига боғлиқ бўлган функционал бўлади.

Система ҳаракатини талқин қиладиган бўлсак, ҳаракатни $(n+1)$ ўлчовли кенгайтирилган фазода нуқта траекторияси деб қараш мумкин. Кенгайтирилган фазода иккита «фиксирланган» $M(t_0, q_i^0)$ ва $M_1(t_1, q_i^1)$ нуқталардан ўтувчи, системани бошланғич (q_i^0) ҳолатдан (t_0 вақтга мос келувчи) (q_i^1) (t_1 вақтга мос келувчи) кейинги ҳолатига ўтказувчи мумкин бўлган ҳаракатларни кўриб чиқамиз. Фараз қиламиз, мумкин бўлган ҳаракатлар орасида хақиқий ҳаракат мавжуд деб ва бу ҳаракат учун $L(t, q_1, ... q_n, \dot{q}_1, ... \dot{q}_n)$ Лагранж функцияси мос келади, умумлашган $q_i(t)$ координаталар эса

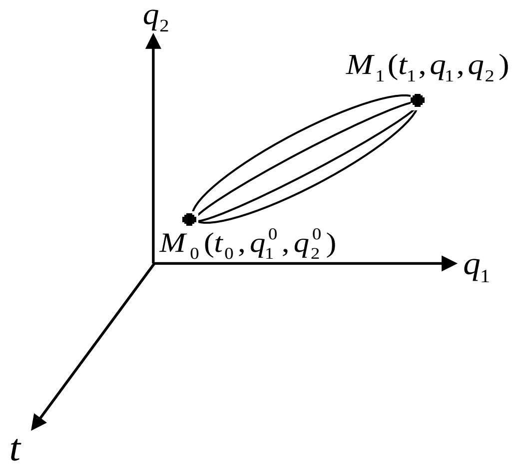
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \ (i = 1, ..., n)$$

Лагранжнинг 2-тур дифференциал тенгламаларини қаноатлантиради.

Қолган, M_0 ва M_1 нуқталардан ўтувчи бошқа траекториялар тўпламини **мумкин бўлган** (атроф йўллар**)** ҳаракатлар деб атаймиз.

Гамильтон принципи:

Гамильтон таъсири хақиқий ҳаракат учун мумкин бўлган ҳаракатлардан фарқли, экстремал (стационар) қийматга эга бўлади (Гамильтон таъсирининг вариацияси $\delta w = 0$ бўлади).



1-Расм

Гамильтон принципининг яна бир кўринишига тўхталиб ўтамиз. $(n+1)$ ўлчамли кенгайтирилган $(t, q_1, \ldots, q_n)$ координата фазоси ўрнига $(2n+1)$ ўлчамли кенгайтирилган $t, q_i, p_i (i = 1, \ldots, n)$ (p_i умумлашган импульслар) фазони кўриб чиқамиз. Бу фазода фиксирланган $B_0(q_i^0, p_i^0, t_0)$ ва $B_1(q_i^1, p_i^1, t_1)$ нуқталар орқали ўтувчи хақиқий ҳаракатга мос келувчи траекторияни, шунингдек бу нуқталардан ўтувчи барча бошқа мумкин бўлган ҳаракатларни («атроф» йўлларни) қараб чиқамиз(1-расм). Хақиқий ҳаракатга мос келувчи $H(q_i(t), p_i(t), t)$ ва $q_i(t)$, $p_i(t)$ ўзгарувчилар

Гамильтон тенгмаларини $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \ (i = 1, ..., n)$ қаноатлантиради.

Гамильтон функцияси $H(q_i(t), p_i(t), t)$ билан Лагранж функцияси $L(t, q_i, \dot{q}_i)$ орасидаги боғланишни

$$L^* = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(t, q_i, p_i)$$

ҳисобга олсак, у ҳолда Гамильтон принципи қуйидаги

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L^* dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H)dt = 0$$

кўринишда ёзилади (принципнинг биринчи кўринишидан шартли ўларок) ва атроф йўллар сифатида таққослашга B_0 ва B_1 нуқталардан ўтувчи $(2n+1)-$ ўлчамли кенгайтирилган ҳаракат фазосининг ихтиёрий эгри чизиқлари олинади. Лекин кенгайтирилган $(2n+1)$ ўлчовли фазонинг $p_1,\ldots,p_n$ ўзгарувчилари (умумлашган импульслар)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1,\ldots,n)$$

тенгламани қаноатлантиришини ҳисобга олсак, у ҳолда Гамильтон принципининг иккинчи кўриниши биринчи кўринишга ўтади.

2.2. Механиканинг асосий интеграл инварианти (Пуанкаре-Картан интеграл инварианти).

Гамильтон таъсирининг вариациясини, вақтнинг шунингдек координаталарнинг бошланғич ва охирги қийматлари ўзгарувчан бўлган ҳолда, яъни α параметрнинг

$$\begin{aligned} t_0 &= t_0(\alpha), \quad q_i^0 = q_i^0(\alpha), \\ t_1 &= t_1(\alpha), \quad q_i^1 = q_i^1(\alpha) \end{aligned} \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{1}$$

функцияси бўлган ҳол учун кўриб чиқамиз.

Бу ҳолда $W = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$ интегрални параметр бўйича дифференциаллаб қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \delta W = \delta\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt = L_1\delta t_1 - L_0\delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt = L_1\delta t_1 + \\ \sum_{i=1}^{n} p_i^1[\delta q_i]_{t=t_1} - L_0\delta t_0 - \sum_{n=1}^{n} p_i^0[\delta q_i]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt; \end{aligned} \tag{2}$$

$$[\delta q_i]_{t=t_\lambda} = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} q_i(t,\alpha)\right]_{t=t_\lambda}\delta\alpha \quad (i = 1,\ldots,n; \lambda = 0,1). \tag{3}$$

Лекин $q_i^1 = q_i^1(t_1, \alpha)$ умумлашган координаталарнинг чегарадаги тўлиқ вариациялари учун

$$\delta q_i^1 = \dot{q}_i^1 \,\delta t_1 + \left[\frac{\partial q_i(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{t=t_1} \delta\alpha,$$

формулага эгамиз.

Ёки

$$\delta q_i^1 = [\delta q_i]_{t=t_1} + \dot{q}_i^1 \delta t_1 \;\; (i = 1, \ldots, n).$$

Бу ердан

$$[\delta q_i]_{t=t_1} = \delta q_i^1 - \dot{q}_i^1 \delta t_1 \;\; (i = 1, \ldots, n)\,. \qquad (4)$$

Айнан шундай ифода умумлашган координатанинг бошланғич қийматлари учун ҳам ўринли:

$$[\delta q_i]_{t=t_0} = \delta q_i^0 - \dot{q}_i^0 \delta t_0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (5)$$

(4) ва (5) тенгламалардан фойдаланиб δw учун (2) ифодани қуйидаги

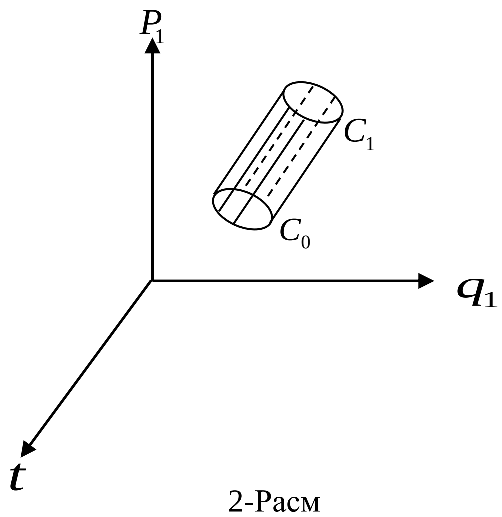
$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i \, dt. \qquad (6)$$

кўринишини (одатдагидай умумлашган $\dot{q}_i$ тезликларни умумлашган импульслар p_i орқали ифодалаб ва $\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L' = H$ тенгликни ҳисобга олиб) ҳосил қиламиз.

Бу тенгламада

$$\left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\,\delta t\right]_0^1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta q^0{}_i + H_0 \delta t_0\,.$$

Хусусий ҳолда, ҳар қандай α учун мос келувчи йўл ҳақиқий йўл бўлганда, яъни $q_i = q_i(t, \alpha)$ $(i = 1, \ldots, n)$ ҳақиқий ҳаракатлар тўпламидан иборат бўлса, (6) тенгликни ўнг томонидаги интеграл ҳар қандай α учун нолга тенг бўлади ва Гамильтон таъсири вариацияси учун ифода



2-Расм

$$\delta W = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 \qquad (7)$$

оддий кўринишни қабул қилади[5]. [2](34-39:354-358),[1](103-108:113-117),[3](312-314)

Кенгайтирилган $(n+1)$ ўлчовли фазо ўрнига $(2n+1)$ ўлчовли фазо олинса, у ҳолда бу фазода нуқтанинг координаталари q_i, p_i, t катталиклардан иборат бўлади. Бу фазода

$$q_i = q^0{}_i(t,\alpha), \quad p_i = p_i^0(t,\alpha), \quad t = t_0(\alpha) \qquad (8)$$

$$(i = 1,.., n; \quad 0 \le \alpha \le L)$$

ихтиёрий ёпиқ C_0 эгри чизиқни оламиз ва α параметрни шундай танлаб оламизки. $\alpha = 0$, $\alpha = L$ қийматлар C_0 ёпиқ эгри чизиқнинг айнан битта нуқтасига мос келсин. C_0 ёпиқ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан тегишли ҳақиқий ҳаракат траекторияларини ўтказамиз ва ҳақиқий ҳаракат траекториялари найчасини ҳосил қиламиз (2-расм).

$$q_i = q_i(t,\alpha), \quad p_i = p_i(t,\alpha) \ (i = 1,..., n. \ 0 \le \alpha \le L) \qquad (9)$$

Бу ифодада $q_i(t,0) \equiv q_i(t,L), \quad p_i(t,0) \equiv p_i(t,L) \quad (i = 1,..., n).$

Бу найчада ихтиёрий равишда найчани қамраб олувчи ва ҳар бир ясовчи билан фақат биттагина умумий нуқтага эга бўлган C_1 эгри чизиқни танлаб оламиз. C_1 эгри чизиқнинг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$q_i = q_i^1(\alpha), \ p_i = p_i^1(\alpha), \ t = t_1(\alpha) \qquad (10)$$

Гамильтон таъсирини $W = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt$ ҳақиқий ҳаракатлар найчаси бўйлаб C_0 эгри чизиқдан C_1 эгри чизиққача қараб чиқамиз.

У ҳолда ҳар қандай α учун (7) ифодага кўра

---

[5] Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013.C 34-39
Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X. С. 103-117.
Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006. С. 312-314

$$\delta W = W'(\alpha)\delta\alpha = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 .$$

Бу тенгликни $0 < \alpha < l$ ораликда интеграллаб қуйидаги

$$0 = W(l) - W(0) = \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]_0^1 = \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^1 \delta q_i^1 - H_1 \delta t_1\right] -$$

$$-\int_0^l \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^0 \delta q_i^0 - H_0 \delta t_0\right] = \oint_{c_1} \sum_{i=1}^{n} (p_i \delta q_i - H\delta t) - \oint_{c_0} \sum_{i=1}^{n} (p_i \delta q_i - H\delta t)$$

ифодани ҳосил киламиз.

Яъни
$$\oint_{c_0} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right] = \oint_{c_1} \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t\right]. \qquad (11)$$

Шундай қилиб, ихтиёрий ёпиқ контур бўйича

$$I = \int_c \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t \qquad (12)$$

интеграл бу контурни тўғри йўллар найчаси бўйлаб ихтиёрий силжитилганда (деформация билан) ўз қийматини ўзгартирмайди, яъни интеграл ***инвариант*** бўлади. Биз система Гамильтон систамасидан иборат бўлса, у ҳолда (12) кўринишдаги интеграл инвариант бўлишини кўрсатдик.

Энди система ҳаракати қуйидаги биринчи тартибли дифференциал

$$\frac{dq_i}{dt} = Q_i(t, q_j p_j), \quad \frac{dp_i}{dt} = P_i(t, q_j, p_j), \quad (i = 1,\ldots,n) \qquad (13)$$

тенгламалар системаси билан аниқланиши муълум бўлсин ва $t = 0$ да q_i^0, p_i^0 $(i = 1,\ldots,n)$ Коши (бошланғич) шартлари қўйилган бўлсин.

Бундан ташқари, (12) Пуанкаре-Картан интеграли (13) тенгламалар системаси билан аниқланувчи хақиқий ҳаракатларга нисбатан интеграл инвариант бўлсин, яъни бу хақиқий ҳаракатларнинг ҳар қандай найчаси учун ёпиқ контурни қамраб олган эгри чизиқ бўйича ҳисобланган Пуанкаре-Картан интеграли ўз қийматини ўзгартирмайди. У ҳолда биз Гамильтон функцияси H ва Q_i, P_i функциялар ўртасида қуйидагича

$$Q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{14}$$

боғланиш мавжуд.

2.3. Унверсал интеграл инвариантлар орасидаги боғланиш.

Энди системанинг фиксирланган вақтдаги ҳолатларидан ташкил топган C контур бўйлаб

$$I = \oint \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t \right]$$

интегрални кўриб чиқамиз. Бундай контур тўғри йўллар найчасини $t=const$ гипертекислик билан кесганда ҳосил бўлади ва Пуанкаре-Картан интеграл инварианти $\delta t = 0$ эканлигини ҳисобга олсак қуйидаги кўринишни олади:

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i .$$

Бу интегрални биринчи булиб Пуанкаре киритган. Кейинроқ, бу интегрални Картан $H\delta t$ қўшилувчи киритиб, вақт ўзгарувчан бўлган ҳолатлардан таркиб топган контурларга ҳам қўллади. Пуанкаре интеграл инварианти, агар C контур бир хил вақтли ҳолатлардан иборат C_1 контурга ўтишида тўғри йўллар найчаси бўйлаб кўчса, у ўз қийматини ўзгартирмайди.

Пуанкаре интегралининг ифодасига Гамильтон функцияси H қатнашмайди, демак I_1 Пуанкаре интеграли ҳар қандай Гамильтон системаси учун ***инвариантдир***. Шунинг учун бу интеграл ***универсал интеграл инвариант*** деб аталади.

I Пуанкаре-Картан ва I_1 Пуанкаре интеграллари **биринчи тартибли интеграл инвариантлар** ҳам деб аталади.

Биринчи тартибли I_1 интеграл инвариант Стокс формуласи

$$\oint_D \sum_{i=1}^{n} A_i \delta x_i = \iint_s \sum_{i<k}^{1,\ldots,n} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) \delta x_i \delta x_k$$

ёрдамида иккинчи даражали абсолют интеграл инвариант кўринишида берилиши мумкинлигини таъкидлаб ўтамиз.

1947 йилда хитойлик олим Ли Хуа-чжун универсал интеграл инвариантнинг ягоналигини исботлади. У ҳар қандай бошқа универсал интеграл инвариант санаб ўтилган интегралларнинг бирортасидан (доимий) ўзгармас кўпайтувчи билан фарқ қилишини кўрсатди.

Ли Хуа- чжун теоремаси.

Агар

$$I' = \oint \sum_{i=1}^{n} \left[A_i\left(t, q_k, p_k\right)\delta q_i + B_i(t, q_k, p_k)\delta p_i \right]$$

универсал интеграл инвариант бўлса, у ҳолда

$$I' = c\, I_1$$

бўлади. c-ўзгармас сон., I_1 -эса Пуанкаре интеграли.

Назорат саволлари:

1. Гамильтон принципидаги хақиқий йўл билан мумкин бўлган йўлнинг фарқи нимада?
2. Гамильтон принципининг биринчи ва иккинчи кўринишлари орасидаги фарқи нимадан иборат?
3. Интеграл инвариант Лагранж системалари учун ўринлими?
4. Нима учун Пуанкаре интеграл инварианти универсал деб аталади?
5. Биринчи тартибли универсал интеграл инвариантлар орасида қандай боғланиш мавжуд?
6. Консерватив системалар учун Пуанкаре-Картан интеграли ҳар доим ҳам инвариант бўладими?

Фойдаланилган адабиётлар:

1.Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X.

2.Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013

3.Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006

4.Уиттекер Е. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 2001.

3-мавзу: КАНОНИК АЛМАШТИРИШЛАР. ГАМИЛЬТОН-ЯКОБИ ТЕНГЛАМАСИ.

РЕЖА:

3.1. Гамильтон системаларида ўзгарувчиларни алмаштириш.
3.2. Алмаштиришларни канониклик аломати.
3.3. Гамильтон-Якоби тенгламаси.

Таянч иборалар: *каноник, келтириб чиқарувчи функция, валентлик, тўлиқ интеграл, унивалент.*

3.1 Гамильтон системаларида ўзгарувчиларни алмаштириш.

Каноник алмаштиришлар Гамильтон системаларига тегишли бўлиб, бу алмаштиришлардан асосий мақсад, берилган ихтиёрий Гамильтон системасини бошқа структура жиҳатидан соддароқ Гамильтон функцисига эга бўлган система билан алмаштиришдир. Умумий ҳолда вақтга боғлиқ бўлган қуйидаги

$$q_i^{/} = q_i^{/}(t, q_k, p_k),\quad p_i^{/} = p_i^{/}(t, q_{k,} p_k)\ (i, k = 1,2,\dots,n)$$
$$\frac{\partial(q^{/}{}_1, p^{/}{}_1,\dots,q^{/}{}_n . p^{/}{}_n)}{\partial(q_1, p_1,\dots,q_n, p_n)} \neq 0, \tag{1}$$

алмаштиришлар каноник дейилади, агар бу алмаштиришлар ихтиёрий Гамильтон

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(i = 1,\dots,n) \tag{2}$$

системасини яна Гамильтон системасига (умумий ҳолда бошқа H' Гамильтон функцияси билан) ўтказса.

Яъни қуйидаги кўринишни эгалласа:

$$\frac{dq^{/}{}_i}{dt} = \frac{\partial H^{/}}{\partial p^{/}{}_i}, \frac{dp^{/}{}_i}{dt} = -\frac{\partial H^{/}}{\partial q^{/}{}_i}\ (i = 1,\dots,n). \tag{3}$$

Каноник алмаштириш шартларини келтириб чиқариш учун кенгайтирилган $2n+1$ ўлчовли (q_i, p_i, t) ва (q_i', p_i', t) координат системаларида каноник алмаштиришлар натижасида, бири иккинчисига ўтувчи Гамильтон системаларининг ҳақиқий ҳаракатлар найлари бўйлаб, ихтиёрий ёпиқ $C, C'{}'$ чизиқлар бўйича олинган

$$I=\int\limits_{c}\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t\,,\;I'=\int\limits_{c'}\sum_{i=1}^{n}p_i'\delta q_i'-H'\delta t$$

интегралларни кўриб чиқамиз.

Биринчи интеграл Гамильтон функцияси $H(q_i,p_i,t)$ бўлган Гамильтон системаси учун инвариант бўлса, иккинчи интеграл каноник алмаштиришлардан ҳосил бўлган $H'(q_i',p_i',t)$ Гамильтон системаси учун инвариант бўлади. Агар иккинчи интеграл остидаги $\left(q_i',p_i{}^{/}\right)$ ўзгарувчиларни (1) тенгламага асосан $\left(q_i,p_i\right)$ лар билан алмаштирсак C ёпиқ контур C' ёпиқ контурга ўтади ва иккинчи интеграл бошланғич Гамильтон системаси учун янги инвариантга айланади. Лекин Ли Хуа-чжун теоремасига кўра бу икки интеграл орасида қуйидаги

$$\int\limits_{c'}(\sum_{i=1}^{n}p_i'\delta q_i'-H'\delta t)=c\int\limits_{c}(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t) \tag{4}$$

боғланиш ўринли бўлади (вақт каноник алмаштиришларда ўзгармасдан қолади) ёки

$$\int\limits_{c}((\sum_{i=1}^{n}p_i'\delta q_i'-H'\delta t)-c(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t))=0 \tag{5}$$

тенглама бажарилади.

Хақиқий ҳаракатлар трубкасида олинган ихтиёрий ёпиқ соҳа бўйича интеграл нолга тенг бўлиши учун интеграл остидаги ифода (q_i,p_i,t) ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган қандайдир $F(q_i,p_i,t)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиши керак.

У ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n}p_i^{/}\delta q_i^{/}-H^{/}\delta t=c(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t)-\delta F. \tag{6}$$

ва тенгликдаги ўзгармас $c\neq 0$ чунки, тенгликнинг чап томонидаги ифода тўлиқ дифференциал эмас, шунинг учун δF га тенг бўлмайди.

$F(q_i,p_i,t)$ функцияни **келтириб чиқарувчи функция**, c ўзгармасни каноник алмаштиришлар **валентлиги** деб аталади. $c=1$ бўлган ҳолда, алмаштиришлар ***унивалент каноник ўзгартиришлар*** дейилади. Юқоридаги аналитик амалларни ҳисобга олиб, қуйидаги теоремани келтиришимиз мумкин:

Гамильтон системасидаги (1) алмаштиришлар каноник бўлиши учун, (6) тенгламани қаноатлантирувчи келтириб чиқарувчи F функция ва $c \neq 0$ ўзгармаснинг мавжуд бўлиши зарур ва етарли.

3.2 Алмаштиришларни канониклик аломати (критерийси).

Юқорида келтирилган каноник алмаштириш шартида қатнашувчи ўзаро боғлиқ бўлмаган ва q_i, p_i ўзгарувчиларнинг функцияси бўлган

$$q_i' = \varphi_i(p_i, q_i, t), \;\; p_i' = \phi_i(q_i, p_i, t) \tag{7}$$

алмаштиришлар каноник бўлиши учун қандай шартларни қаноатлантириши кераклигини кўриб чиқамиз.

Фараз қиламиз (6) кўринишдаги алмаштиришлар каноник алмаштиришлардан иборат бўлсин. У ҳолда бу алмаштиришлар учун қуйидаги

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^/ \delta q_i^/ - H^/ \delta t = c(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i - H\delta t) - \delta F \tag{8}$$

айният ўринли бўлиши керак.

Энди вақтнинг ихтиёрий фиксирланган $t = t'$ қийматини оламиз. У ҳолда юқоридаги (8) айният

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^/ \delta q_i^/ = c(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q_i) - \delta F \tag{9}$$

кўринишга эга бўлади.

Бу тенглама валентлиги c бўлган ва фиксирланган вақтдаги

$$q_i^/ = \varphi_i(q_i, p_i, t^/), p_i^/ = \phi(q_i, p_i, i^/) \; (i = 1,...,n)$$

каноник алмаштиришларни аниқлайди.

Энди тескариси, яъни (9) тенглама билан аниқланувчи барча алмаштиришлар вақтнинг ихтиёрий фиксирланган қийматида бир хил валентлик алмаштиришлар бўлсин.

Бу ҳолда алмаштиришлар натижасида ҳосил бўлган Гамильтон функциясини қуйидагича

$$H^{/} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} p_i{}^{/} \frac{\partial q_i}{\partial t} \tag{10}$$

аниқлаб ва бу тенгламани вақтнинг вариациясига кўпайтириб (9) ва (10) тенгламаларни икки томонини қўшсак (8) ифодага эга бўламиз.

Шундай қилиб, вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлган

$$q_i^{/} = \varphi_i(q_i, p_i, t\ ), p_i^{/} = \phi(q_i, p_i, i), (i = 1,..., n)$$

алмаштиришлар каноник бўлиши учун, ихтиёрий фиксирланган вақтни қийматида

$$q_i^{/} = \varphi_i(q_i, p_i, t^{/}), p_i^{/} = \phi(q_i, p_i, i^{/}), (i = 1,..., n)$$

алмаштиришлар бир хил c валентлик каноник алмаштиришлар бўлиши зарур ва етарлидир.

Бизга қуйидаги алмаштиришлар берилган бўлсин:

$$q_i^{/} = \varphi_i(q_i, p_i), p_i^{/} = \phi(q_i, p_i{}^{/}), \frac{\partial(q^{/}{}_1,..., p^{/}{}_n)}{\partial(q_1,..., p_n)} \neq 0, (i = 1,..., n). \tag{11}$$

Бу ҳолда алмаштиришларни канониклигини аниқловчи айният қуйидагича аниқланади:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{/} \delta q_i^{/} = c(\sum_{i=1}^{n} p_i \delta q)_i - \delta F(q_i, p_i)\,. \tag{12}$$

Агар бу тенгламадаги $p_i', \delta q_i'$ ларни (p_i, q_i) ўзгарувчилар орқали ифодаласак (7) ёрдамида

$$\sum_{i-1}^{n} (\Phi_i \delta q_i + \Psi_i \delta p_i) = -\delta K(q_i, p_i) \tag{13}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Бу тенгликдаги (Ψ_i, Φ_i) функциялар учун

$$\Phi_i = \sum_{i-1}^{n} p_i{}^{/} \frac{\partial q_i^{/}}{\partial q_i} - cp_i, \Psi_i = \sum_{i=1}^{n} p_i^{/} \frac{\partial q_i^{/}}{\partial p_i}\ (i-1,\ldots,n)$$

ифодаларга эга бўламиз.

Алмаштиришлар канониклиги (12) тенгламанинг чап қисмида турган ифоданинг тўлиқ дифференциаллик шартидан аниқланади:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_k}=\frac{\partial \Phi_k}{\partial q_i},\frac{\partial \Psi_i}{\partial p_k}=\frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i},\frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k}=\frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i},(i,k=1,\dots,n)$$

Эркин каноник алмаштиришлар

Агар каноник алмаштиришлар учун қуйидаги қўшимча $\frac{\partial(q_1^/,...,q_n^/)}{\partial(p_i,...,p_i)}\neq 0$ шарт бажарилса, у ҳолда бу алмаштиришлар эркин каноник алмаштиришлар дейилади. Бу ҳолда янги ўзгарувчилар сифатида (q_i,q_i') ларни олиш мумкин. Хақиқатдан ҳам, қўшимча қуйилган шарт каноник алмаштиришлардаги биринчи n та тенгламадаги умумлашган импульслар p_i ларни қолган (q_i',q_i,t) ўзгарувчилар орқали ифодалаш имкониятини беради. Бу ҳолда келтириб чиқарувчи функцияни қуйидаги $F(t,q_i,p_i)=S(t,q_i,q_i^/)$, кўринишда олиш мумкин, яъни янги ўзгарувчилар функцияси деб қараш мумкин ва эркин каноник алмаштиришлар шарти

$$\sum_{i=1}^{n}p_i^/\delta q_i^/-H^/\delta t=c(\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-H\delta t)-\delta S(t,q_i,q_i^/) \tag{14}$$

кўринишга келади.

Вариациялар олдидаги коэффициентларни тенглаб

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=cp_i,\ \frac{\partial S}{\partial q_i^/}=-p_i^/\ H^/=cH+\frac{\partial S}{\partial t} \tag{15}$$

ифодаларни ҳосил қиламиз.

Бу тенгламалар системаси эркин каноник **алмаштириш**ларни аниқлайди. $C=1$ бўлган ҳолда алмаштиришлар эркин ***унивалент каноник алмаштиришлар*** дейилади. (14) тенгламалар системаси учун қуйидаги хусусий ҳол ўринли. Агарда $H'=cH$ га тенг бўлса, у ҳолда $\frac{\partial S}{\partial t}=0,$ яъни келтириб чиқарувчи функция S вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлмайди.

Эркин каноник алмаштиришлар шартидан, алмаштиришлар вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлмаган ҳолда Гамильтон функциясининг кўриниши кўп ҳам ўзгармаслиги келиб чиқади. Шунинг учун Гамильтон функциясини оддийроқ кўринишга келтириш учун алмаштиришларни вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлган ҳолда олинади[6]. [2](368-374),[1](140-152),[3](340-352)

3.3. Гамильтон-Якоби тенгламаси.

Эркин каноник алмаштиришлар натижаси сифатида Гамильтон–Якоби тенгламаси келиб чиқади. Бунинг учун шундай эркин каноник алмаштиришларни қидирамизки, бу алмаштиришлар натижасида берилган Гамильтон тенгламалари

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ (i=1,...,n) \tag{15}$$

Гамильтон фукцияси $H'=0$ булган Гамильтон ситемасига ўтсин, яъни

$$\frac{dq'_i}{dt}=\frac{\partial H'}{\partial p'_i},\frac{dp'_i}{dt}=-\frac{\partial H'}{\partial q'_i}\ (i=1,...,n). \tag{16}$$

У ҳолда $H'=0$ эканлигини ҳисобга олсак бу тенгламаларни интеграллаб қуйидаги

$$q'_i=\alpha_i,\ p'_i=\beta_i\ (i=1,...,n)$$

ечимларни ҳосил қиламиз ва бу тенгламалар системасини q_i, p_i ўзгарувчиларга нисбатан ечиб бошланғич система ҳаракатини аниқлаймиз.

Бундай алмаштиришларни топиш учун эркин каноник ўзгартиришлар шартларига мурожат қиламиз. Агар $H'=0$ эканлигини қисобга олсак, келтириб чиқарувчи функция учун

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(t,q_i.p_i)=0$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Лекин $\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i$ бўлгани учун, келтириб чиқарувчи функция $\frac{\partial S}{\partial t}+H(t,q_i.\frac{\partial S}{\partial q_i})=0$

тенгламани қаноатлантиради.

---

[6] Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013.C 368-374
Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X. C. 140-152.
Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006. C. 340-352

Бу хусусий ҳосилали тенглама **Гамильтон-Якоби тенгламаси** деб аталади. Бу тенгламадан ташқари, келтириб чиқарувчи функция учун қуйидаги $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}) \neq 0$ шарт бажарилиши керак.

Келтириб чиқарувчи функция топилиши билан

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i'} = -\beta_i', \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$$

тенгламалардан қидирилаётган эркин каноник алмаштиришларни топамиз.

Таъриф. Қуйидаги $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_i}) \neq 0$ шартни қаноатлантирувчи, Гамильтон-Якоби тенгламасининг ечими бўлган ва ихтиёрий n та ўзаро боғлиқ бўлмаган $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ўзгармасларни ўз ичига олган $S(t, q_i, \alpha_i)$ функция, Гамильтон-Якоби тенгламасининг тўлиқ интеграли дейилади.

Гамильтон-Якоби теоремаси. Агар $S(t, q_i, \alpha_i)$ функция Гамильтон-Якоби тенгламасининг тўлиқ интеграли бўлса, у ҳолда Гамильтон функцияси $H(t, q_i, p_i)$ бўлган системанинг ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i'} = -\beta_i', \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \cdot$$

Шундай қилиб, Гамильтон-Якоби тенгламасининг тўлиқ интеграли маълум бўлса, у ҳолда Гамильтон тенгламаларини, яъни оддий дифференциал тенгламалар системасини интеграллашга хожат қолмайди.

Агар система умумлашган консерватив системадан иборат бўлса, яъни $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ бажарилса, у ҳолда Гамильтон- Якоби тенгламаси

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = 0 \qquad (17)$$

кўринишда бўлади ва тўлиқ интегралини

$$S = -ht + W(q_1, ..., q_n . \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, h)$$

иккита йиғинди сифатида қараш мумкин.

Келтириб чиқарувчи функциянинг бу ифодасини (17) тенгламага қўйиб, W функцияни аниқлаш учун

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1},\frac{\partial W}{\partial q_2},\ldots,\frac{\partial W}{\partial q_n},\ q_1,q_2,\ldots,q_{n-1}\right)=h \tag{18}$$

тенгламани оламиз.

Гамильтон-Якоби теоремасига кўра h ва ўзаро боғлиқ бўлмаган $n-1$ та $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ доимийлар қатнашадиган қуйидаги $W(q_1,q_2,\ldots,q_n,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},h)$ тўлиқ интегралини топиш етарлидир.

Система ҳаракат қонуни эса

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\ldots,\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}}=\beta_{n-1},\ \frac{\partial V}{\partial h}=t\ +\gamma\ , \tag{19}$$

$$P_1=\frac{\partial W}{\partial q_1},\ P_2=\frac{\partial W}{\partial q_2},\ldots,\ P_n=\frac{\partial W}{\partial q_n} \tag{20}$$

тенгламалардан аниқланади. Ҳозиргина биз қараб чиққан ҳол, хусусан кучлар куч функциясига эга бўлганда ва боғланишлар вақтга ошкор боғлиқ бўлмаган ҳолга мос келади.

Гамильтон-Якоби тенгламасидаги Гамильтон функцияси вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлмаган ҳолда тўлиқ интегрални топишни соддалаштириш учун биз фойдаланган усул шунингдек, системада бир нечта ўзгарувчи циклик ўзгарувчи (координата) бўлган ҳол учун ҳам ўринлидир[7]. [2](430-434),[1](153-160),[3](413-417)

Назорат саволлари:

1. Ҳар қандай вақтга нисбатан чизиқли алмаштиришлар каноник бўладими?
2. Каноник алмаштиришларнинг моҳияти нимадан иборат?
3. Валентлиги нолга тенг бўлган алмаштиришлар каноник бўладими?
4. Келтириб чиқарувчи функция ҳар доим ҳам мавжудми?
5. Гамильтон-Якоби тенгламасининг умумий ечими доимо унинг умумий интеграли билан усма-уст тушадими?
6. Ҳар қандай Гамильтон системасида умумлашган координаталарни циклик координаталар қилиб танлаб олиш мумкинми?

---

[7] Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013.C 430-434
Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-Х. С. 153-160.
Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006. C. 413-417

Фойдаланилган адабиётлар:

1.Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. - С. 262. - ISBN 5-9221-0067-X.

2.Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013

3.Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006

4.Уиттекер Е. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 2001.

4-мавзу: АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР ВА ТЕОРЕМАЛАР. АВТОНОМ СИСТЕМАЛАР УЧУН А.М. ЛЯПУНОВ ФУНКЦИЯЛАРИ.

РЕЖА:

4.1.Механик системаларда турғунлик тушунчаси.
4.2.Ляпунов бўйича турғунлик ва асимптотик турғунлик.
4.3.Ляпунов функцияси ва хоссалари.
4.4.Ляпунов функциясини тузиш усуллари.

Таянч сўзлар: *устуворлик, асимптотик турғунлик, Ляпунов функцияси, ишораси аниқланган ва ишораси ўзгармас функциялар.*

4.1 Механик системаларда турғунлик тушунчаси.

Устуворлик тушунчаси механиканинг кўп йўналишларида ишлатилиб, ҳар доим бу тушунча қайси маънода кўрилаётгани эслатилиб ўтилади. Масалан, назарий механикада А.М. Ляпунов бўйича устиворлик, яъни бошланғич шартлардан оғиш ҳисобига хусусий ечимни оғиши, материаллар қаршилигида жисм формасини сақлаши, пластинка ва қобиқлар назариясида тебранма ҳаракат частотаси билан боғлиқ. А.М. Ляпунов бўйича турғунлик механик система хусусий ечимларига тегишли бўлиб, қуйидагича киритилади.

Фараз қиламиз, механик системанинг ҳаракат тенгламалари қуйидаги

$$\dot{y}_i = Y_i(t, y_1, \ldots y_n) \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

оддий дифференциал тенгламалар системасидан иборат бўлиб, $y_i = f_i(t),\ i = 1,\ldots n$ $t = t_{0.}\ y_i = f_i(t_0),\ i = 1,\ldots n$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи , (1) ҳаракат тенгламаларининг хусусий ечимидан иборат бўлсин.

Энди бошланғич шартларга

$$t = t_{0.}\ y_i = f_i(t_0) + \varepsilon_i,\ i = 1,\ldots n, \tag{2}$$

оғишлар берамиз. Бунда (2) бошланғич шартларга мос келувчи системанинг ҳаракати оғдирилган ҳаракат ва ε_i миқдорлар эса бошланғич оғишлар деб аталади. Оғдирилган ҳаракатга мос келувчи параметрларни $y_i(t)$ билан белгиласак, у ҳолда оғдирилмаган ҳаракатга мос келувчи $f_i(t)$ хусусий ечимларни ҳисобга олган ҳолда, маъносига кўра $x_i = y_i(t) - f_i(t),\ i = 1,...n$ ўзгарувчиларни оғишлар ёки вариациялар деб атаймиз. Кейинги аналитик амалларни бажариш учун, оғишларга мос келувчи n ўлчовли фазода ҳаракатланувчи $M(x_1, x_2,..., x_n)$ нуқтанинг траекториясидан фойдаланамиз. Кўриш қийин эмаски, оғдирилмаган ҳаракатга $x_i = 0$ координата боши мос келади. Кейинги ҳисоблашларда оғдирилмаган ҳаракатга нисбатан оғишларни баҳолашда қуйидаги $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_i^2 + ... + x_n^2$ миқдордан фойдаланамиз. Киритилган белгилашларга кўра, $t = t_{0.}\ x_{oi} = \varepsilon_i,\ i = 1,...n$ бошланғич оғишлардан иборат бўлади.

4.2 Ляпунов бўйича турғунлик ва асимптотик турғунлик.

А.М.Ляпунов бўйича турғунлик таърифи. 1. Агар ҳар қандай кичик мусбат $\varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ мусбат сон топиш мумкин бўлсаки, ҳар қандай $\sum_{i=1}^{n} x_{0i}^2 \le \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бошланғич оғишлар учун, вақтни ихтиёрий $t > t_0$ қийматларида $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \varepsilon$ шарт ўринли бўлса, оғдирилмаган ҳаракат турғун(устивор) деб аталади, акс ҳолда нотурғун дейилади. Ҳаракат геометриясига мурожат қиладиган бўлсак, $\sum_{i=1}^{n} x_{0i}^2 \le \delta$ сфера ичидан ҳаракатни бошлайдиган нуқта, хеч қачон $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \varepsilon$ сферадан чиқиб кета олмайди. Бошқача қилиб айтганда, оғдирилган ҳаракат оғдирилмаган ҳаракат атрофида ҳаракатланиб, ундан жуда кичик миқдорга фарқ қилади.

2. Агар оғдирилмаган ҳаракат турғун бўлиб, $\lim\limits_{e \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ шарт бажарилса, у ҳолда оғдирилмаган ҳаракат асимптотик турғун дейилади.

3. Агар оғдирилмаган ҳаракат ўзгарувчиларни маълум қисмига нисбатан турғун ва қолганларига нисбатан нотурғун бўлса, оғдирилмаган ҳаракат маълум ўзгарувчиларга нисбатан турғун дейилади. Шуни таъкидлаш керакки, Ляпунов бўйича турғунлик ўзгарувчиларни танлаб олишга боғлиқ.

Оғдирилган ҳаракат тенгламалари.

Оғдирилган ҳаракат тенгламаларини келтириб чиқариш учун, оғишларга мос келувчи $y_i = x_i(t) - f_i(t),\ i = 1,...n$ ўзгарувчиларни система ҳаракат тенгламаларига

$$\dot{y}_i + \dot{x}_i = Y_i(t, y_1 + x_1, ... y_n + x_n)\ \ i = 1,...,n\,,$$

қўямиз ва x_i ўзгарувчиларни кичик деб ҳисоблаб, Тейлор қаторига ёямиз. Бунга кўра

$$\dot{y}_i + \dot{x}_i = Y_i(t, f_1, ... f_n) + (\frac{\partial Y_i}{\partial x_1})_0 x_1 + ... + (\frac{\partial Y_i}{\partial x_n})_0 x_n + X_i^*\,,\ \ i = 1,...,n\,.$$

Бунда X_i^* - x_i ўзгарувчиларга нисбатан юқори тартибли ҳадлар. Агар $f_i(t)$ лар $\dot{y}_i = Y_i(t, y_1, ... y_n)\ \ i = 1,...,n$ тенгламалар системасининг ечимидан иборат эканлигини ҳисобга олсак, **оғдирилган ҳаракат тенгламалари** қуйидаги

$$\dot{x}_i = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n + X_i^*\,,\ \ i = 1,...,n \qquad (3)$$

кўринишни эгаллайди. Тенгламалар системасидан юқори тартибли ҳадларни ташлаб юборсак

$$\dot{x}_i = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n\,,\ \ i = 1,...,n$$

биринчи яқинлашишдаги оғдирилган ҳаракат тенгламалари келиб чиқади. Агар a_{ij} коэффициентлар ўзгармаслардан иборат бўлса, тенгламалар системаси автоном, акс ҳолда ноавтоном система деб аталади.

Ляпунов томонидан хусусий ҳаракатни устуворликка текширишни иккита усули таклиф қилган. Биринчи усул оғдирилган ҳаракат тенгламаларининг ечимларини аниқлаш орқали, иккинчи усул(тўғри усул) эса махсус хоссаларга эга бўлган функцияларни тузишга асосланади. Турғунликка текширишда иккинчи усул анчагина рационал ҳисобланиб, оғдирилган ҳаракат тенгламаларининг ечимларини топиш талаб қилинмайди ва бир қатор теоремаларга асосланади. Шуни таъкидлаш керакки, жуда кўп ҳолларда оғдирилган ҳаракат тенгламаларининг аналитик ечимларини топишнинг иложи йўқ ва шунинг учун иккинчи усулдан фойдаланиш самарали ҳисобланади.

4.3. Ляпунов функцияси ва хоссалари.

Иккинчи усулни ўрганиш учун $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \mu$ (4) соҳада маълум хоссаларга эга бўлган бир қийматли, узлуксиз $V(x) = V(x_1,..., x_n), V(0) = 0$ функцияни кўриб чиқамиз. Агар $V(x) = V(x_1,..., x_n)$ фунциянинг қиймати $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \mu$ соҳада нолдан ташқари фақатгина бир хил ишорали (мусбат ёки манфий) бўлса, функция ишораси ўзгармас функция деб аталади. Агар ишораси ўзгармас $V(x) = V(x_1,..., x_n)$ функция фақатгина координата бошида $x_i = 0$ да нолга тенг бўлса, бундай функция ишораси аниқланган (мусбат ёки манфий) функция деб аталади. Юқорида келтирилган хоссаларга эга бўлган ва ҳаракат турғунлигини аниқлашда ишлатиладиган функциялар, Ляпунов функциялари деб аталади. Энди бу функцияларнинг ҳоссаларини ўрганишга ўтамиз.

1. Ляпунов функциялари ҳамма x_i ўзгарувчиларга боғлиқ бўлиши керак.

2. $V(x) = c$ сирт $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \mu$ соҳада ёпиқ сиртдан иборат.

3. Агар $|c| > |c_1|$ бўлса, $V(x) = c_1$ сирт $V(x) = c$ сиртнинг ичида жойлашади.

Энди Ляпунов функциясидан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра вақт бўйича олинган ҳосиланинг механик маъносига тўхталамиз. Агар система автоном системадан иборат бўлса, $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1 + ... + \frac{dV}{dx_n}\dot{x}_n$ ва оғдирилган ҳаракат тенгламаларини ҳисобга оладиган бўлсак, $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1}X_1 + ... + \frac{dV}{dx_n}X_n = gradV * \vec{v}$. Бундан, агар ҳаракат давомида нуқта мусбат аниқланган функцияга мос келувчи $V(x) = c$ сиртни ташқарисидан ичига қараб ҳаракатланса $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1 + ... + \frac{dV}{dx_n}\dot{x}_n < 0$ ва акси, ичидан ташқарисига қараб ҳаракатланса $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1 + ... + \frac{dV}{dx_n}\dot{x}_n = \vec{v} * gradV > 0$ бўлади. Бу ҳоллардан ташқари, яна $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx_1}\dot{x}_1 + ... + \frac{dV}{dx_n}\dot{x}_n = \vec{v} * gradV = 0$ бўлиши мумкин. Бу ҳолда нуқта сирт устида ҳаракатланади[8]. [3] (159-162 бетлар)

Ҳаракатни турғунлиги хақидаги Ляпунов теоремалари.

Теорема 1. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, шундай ишораси аниқланган $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра вақт бўйича олинган ҳосила $V(x)$ функцияга нисбатан тескари ишорали ишораси ўзгармас функциядан иборат бўлса, оғдирилмаган ҳаракат турғун дейилади.

Теорема 2. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, шундай ишораси аниқланган $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра вақт бўйича олинган ҳосила $V(x)$ функцияга нисбатан тескари ишорали ишораси аниқланган функциядан иборат бўлса, оғдирилмаган ҳаракат асимптотик турғун дейилади[9]. [1] (197-200 бетлар)

Асимптотик турғунлик хақидаги Н.Н. Красовский теоремаси.

Юқорида келтирилган асимптотик турғунлик хақидаги Ляпунов теоремаси $V(x)$ функцияга етарлича оғир шарт қўяди. Бу шартни енгиллаштиришда $\dot{V}(x)$ функция ишораси ўзгармас бўлиши ҳам мумкин экан. Агар $\dot{V}(x)=0$га тенг бўладиган соҳани *К* билан белгилаймиз. Бунда *К* нуқталар тўплами,чизиқдан ёки сиртдан иборат бўлиши мумкин.

Теорема. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \mu$ соҳада шундай ишораси аниқланган $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра вақт бўйича олинган ҳосила учун қуйидаги

$$\dot{V} < 0,\ x \notin K,$$
$$\dot{V} = 0,\ x \in K$$

шарт бажарилса, (бунда К соҳада оғдирилган ҳаракатга тегишли тўлиқ траектория жойлашмаган) оғдирилмаган ҳаракат асимптотик турғун дейилади.

---

[8] Merkin, David R. Introduction to the Theory of Stability. Springer. 2010. С. 159-162.

[9] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. – С. 262. – ISBN 5-9221-0067-X. С. 197-200.

Ҳаракатни нотурғунлиги хақидаги Четаев теоремаси.

Теорема 1. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, шундай $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функция учун $x_i = 0$ нуқта атрофида шундай соҳа мовжуд бўлиб, бу соҳада $V(x) > 0$ ва бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра олинган вақт бўйича ҳосила эса $\dot{V} > 0$ бўлса, оғдирилмаган ҳаракат нотурғун дейилади.

Бу теорема Ляпунов томонидан исботланган қуйидаги теоремага нисбатан умумийроқ ҳисобланади.

Теорема 2. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра, шундай $V(x)$ фунция топиш мумкин бўлсаки, бу функция учун $x_i = 0$ нуқта атрофидаги соҳада $V(x) > 0$ ва бу функциядан оғдирилган ҳаракат тенгламаларига кўра олинган вақт бўйича ҳосила эса ишораси аниқланган бўлиб, $\dot{V} > 0$ шарт бажарилса, оғдирилмаган ҳаракат нотурғун дейилади[10]. [1] (189-206 бетлар)

4.4 Ляпунов функциясини тузиш усуллари.

1. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули. Агар оғдирилган ҳаракат тенгламалари учун Ляпунов функциясини тузиш қийин бўлса, чизиқли алмаштиришлар ёрдамида Ляпунов функцияси маълум бўлган тенгламалар системасига ўтилади. Алмаштиришлар чизиқли бўлгани учун, алмаштиришлар ёрдамида олинган оғдирилган ҳаракат тенгламаларининг устуворлиги ёки ноустуворлигидан бошланғич системанинг устуворлиги ёки ноустуворлиги келиб чиқади.

2. Номаълум коэффициентлар усули. Кўпгина ҳолларда Ляпунов функцияси квадратик форма $V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ кўринишида қидирилади,.чунки квадратик форма учун ишораси аниқланганлигини белгиловчи Сильвестр аломат мовжуд. Биринчи навбатда квадратик форманинг номаълум коэффициентлари Сильвестр аломатини қаноатлантирсин. Бунга кўра

[10] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. – С. 262. – ISBN 5-9221-0067-X. .С. 198-206

квадратик форма ишораси аниқланган бўлади. Форманинг коэффициентлари сони $n(n+1)/2$ бўлиб, улар Сильвестр аломатига кўра n та шартни қаноатлантириши лозим. Бундан эркин коэффициентлар сони $n(n-1)/2$ га тенг эканлиги келиб чиқади. Қолган эркин коэффициентларни Ляпунов теоремаларини қаноатлантирадиган қилиб танлаб олинса, оғдирилмаган ҳаракат устуворлигига тегишли еталилик шартлари келиб чиқади. Аммо бу усул ҳар доим ҳам иш бермайди, аммо айрим ҳолларда яхши натижалар олиш мумкин.

3. Кўпгина ҳолларда Ляпунов функциясини биринчи интеграллар комбинацияси ёрдамида тузилади. Фараз қиламиз, оғдирилган ҳаракат тенгламалари учун

$F(x_1, x_2, ..., x_n) = h$ биринчи интеграл бўлиб, $F(x_1, x_2, ..., x_n) - F(0)$ айирма аргументларга нисбатан мусбат аниқланган бўлсин. Кўриш қийин эмаски, Ляпунов функцияси сифатида $V = F(x_1, x_2, ..., x_n) - F(0)$ олинса, бу функция турғунлик хақидаги теоремани ҳамма шартларини қаноатлантиради. Айрим ҳолларда оғдирилган ҳаракат тенгламалари бир нечта

$$F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = h_1,$$

$$F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = h_2,$$

$$F_m(x_1, x_2, ..., x_n) = h_m,$$

биринчи интегралларга эга бўлади. Бу ҳолда Н.Г. Четаев томонидан Ляпунов функциясини қуйидаги

$$V = \lambda_1(F_1 - F_1(0)) + ... + \lambda_m(F_m - F_m(0)) + \mu_1(F_1^2 - F_1^2(0)) + ... + \mu_1(F_m^2 - F_m^2(0)),$$

кўринишда танлаб олиш таклиф қилинган. Бунда номаълум λ_k, μ_k коэффициентларни V функцияни ишораси аниқланганлик шартларидан танлаб олинади.

Шуни таъкидлаш керакки, хозиргача Ляпунов фунциясини тузишнинг умумий усули ва унинг мавжудлиги муаммолари очиқ қолмоқда. Охирги даврда чоп қилинган илмий мақолаларга мурожат қиладиган бўлсак, устуворлик муаммосини юқори тартибли оғдирилган ҳаракат тенгламаларида хал қилишда янги бир нечта Ляпунов функциясини тузиш, Ляпунов вектор функцияси ва чегаравий тенгламалар усуллари пайдо бўлди[11]. [4] (29-37 бетлар)

Назорат саволлари:

1. Ляпунов бўйича турғунлик вақтга нисбатан қандай оралиқда кўрилади?
2. Ляпунов бўйича турғунликда системага таъсир қилаётган кучлар ўзгарадими?
3. Ляпунов функциясини доимо қуриш мумкин-ми?
4. Асимптотик турғунлик ҳақидаги Ляпунов ва Красовский теоремалари орасидаги фарқ нимада?
5. Тоқ даражали кўпхад ишораси аниқланган функция бўла оладими?
6. Нима учун Ляпунов функциясини биринчи интегралларнинг комбинацияси сифатида танлаб олинади?

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. – С. 262. – ISBN 5-9221-0067-X.
2. Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013
3. Merkin, David R. Introduction to the Theory of Stability. Springer. 2010
4. Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006
5. Уиттекер Е. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 2001.

[11] Merkin, David R. Introduction to the Theory of Stability. Springer. 2010. C.29-37

5-мавзу. КОНСЕРВАТИВ СИСТЕМАЛАРНИНГ УСТУВОРЛИГИ. ЦИКЛИК КООРДИНАТАЛАР. ЦИКЛИК ИНТЕГРАЛЛАР. ЧИЗИҚЛИ СИСТЕМАЛАРНИНГ УСТУВОРЛИГИ. ЧИЗИҚЛИ АВТОНОМ СИСТЕМАЛАР УЧУН ЛЯПУНОВ ФУНКЦИЯЛАРИНИ ҚУРИШ.

РЕЖА:

5.1. Консерватив системаларнинг мувозанат ҳолатининг устуворлиги хақидаги Лагранж теоремаси.
5.2. Циклик координаталар ва циклик интеграллар.
5.3.Чизиқли системаларнинг устуворлиги.

Таянч сўзлар: *устуворлик, яккаланган мувозанат ҳолати, циклик координата, Раус функцияси, келтирилган потенциал*.

5.1.Консерватив системаларнинг мувозанат ҳолатининг устуворлиги хақидаги Лагранж теоремаси.

Назарий механика фанида механик системанинг мувозанат ҳолати атрофидаги кичик ҳаракатларини ўрганишда характеристик тенгламанинг ечимларини топишни кўриб чиққан эдик. Бунда ечимларнинг кўринишига қараб мувозанат ҳолати атрофидаги ҳаракат хар хил бўлар эди. Яна бир туғиладиган савол, бу мувозанат ҳолатининг устуворлиги муаммоси ҳисобланади. Фараз қиламиз, система умумлашган координаталарнинг маълум қийматларида берилган кучлар таъсирида мувозанатда бўлсин. Агар системани бошланғич шартлар ёрдамида мувозанат ҳолатидан оғдирадиган бўлсак, унинг ҳаракати мувозанат ҳолати атрофида қандай бўлади? Бунда иккита ҳол бўлиши мумкин. Биринчидан, система оғдиришлар ҳисобига система хар доим мувозанат ҳолати атрофида кичик ҳаракат қилади ва иккинчи ҳол, система координаталари вақт ўтиши билан мувозанат ҳолатидан узоқлашади, яъни мувозанат ҳолати ноустивор бўлади. Энди мувозанат ҳолатининг устуворлиги ёки ноустуворлигига тегишли таърифларга тўхталамиз. Фараз қиламиз, системанинг мувозанат ҳолатига умумлашган координаталарнинг $q_r = 0 (r = 1,2,...,n)$ қийматлари мос келсин ва $t = t_0$ онда система $q_{r0}, \dot{q}_{r0}$ бошланғич оғишлар олсин. Системанинг мувозанат ҳолати А.М. Ляпунов бўйича устивор дейилади, агар ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $|q_r| \le \delta, |\dot{q}_r| \le \delta$ ни қаноатлантирувчи бошланғич шарларда, ихтиёрий $t > t_0$ лар учун $|q_r| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, мувозанат ҳолати устивор дейилади, акс ҳолда мувозанат ҳолати ноутувор бўлади. $|q_r| = \varepsilon$ мувозанат ҳолати атрофида маълум D соха оламиз. Механик маъносига кўра, агар мувозанат ҳолати устивор бўлса, система кичик оғишлар ҳисобига олган ҳаракати ҳар доим D соҳанинг ичида қолади. Агар система консерватив системадан иборат бўлса, у ҳолда системанинг мувозанат ҳолатини устуворлиги потенциал энергияга боғлиқ бўлар экан.

Қуйида мувозанат ҳолатининг устуворлиги хақидаги теоремани Дирихли томонидан исботини келтирамиз.

Лагранж-Дирихли теоремаси. Консерватив системанинг яккаланган мувозанат ҳолати устувор бўлиши учун система потенциал энергияси мувозанат холатида минимумга эга бўлиши етарли. Исботи: Фараз қиламиз, $q_r = 0 (r = 1,2,...,n)$ системанинг мувозанат ҳолати бўлсин ва системанинг потенциал энергияси $\Pi(0,...,0) = 0$ га тенг(потенциал энергия ўзгармасга фарқ қилгани учун бкни доимо амалга ошириш мумкин). Потенциал энергия $q_r = 0 (r = 1,2,...,n)$ минимумга эга бўлгани учун, мувозанат ҳолати атрофида шундай $D(|q_r| < \varepsilon)$ соҳа топиш мумкинки, бу соҳада $\Pi > 0$. Фараз қиламиз, умумлашган координатилардан бири, масалан $q_r = \varepsilon$ ўзининг энг катта қийматига эришсин, қолганлари эса ε данг кичик ёки тенг бўлсин ва P_r потенциал энергиянинг қиймати бўлсин. Бу амални ҳар бир умумлашган координата учун бажарадиган бўлсак, потенциал энергиянинг қийматларига тегишли қуйидаги системага эга бўламиз:

$$
\begin{aligned}
&P_1 = \Pi(\varepsilon, q_2, ...q_n),\\
&P_2 = \Pi(q_1, \varepsilon, ..., q_n),\\
&.............................\\
&P_n = \Pi(q_1, q_2, ..., \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Агар P_r ичидан энг кичигини танлаб оламиз ва потенциал энергия

$D(|q_r|<\varepsilon)$ соҳада мусбат функциядан иборат бўлгани учун, $\Pi(q_1,q_2,...,q_n)\geq P$ тенгсизлик ўринли. Энди системани мувозанатига нисбатан $D(|q_r|<\varepsilon)$ соҳага тегишли q_{r0} ва бошланғич $v_{10},v_{20},...,v_{no}$ тезлик бериб ҳарактга келтирамиз. Бунда система консерватив ва стационар геометрик боғланишли бўлгани учун, энергия интеграли

$$\sum\frac{m_i\bar{v}_i^2}{2}+\Pi=\sum\frac{m_i\bar{v}_{i0}^2}{2}+\Pi_0\ ,$$

ёки $T+\Pi=T_0+\Pi_0$. Бундан $T=(T_0+\Pi_0)-\Pi$ ва кинетик энергия доимо нолдан катта бўлгани учун, $\Pi<(T_0+\Pi_0)$. $D(|q_r|<\varepsilon)$ соҳада потенциал энергия мусбат бўлгани учун $(T_0+\Pi_0)$миқдор доимо нолдан катта ва уни етарлича кичик қилиб танлаб олиш мумкин. Бошқача қилиб айтганда, шундай $\delta<\varepsilon>0$ топиш мумкинки,

$|q_{r0}|<\delta,\ |\dot{q}_{r0}|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи бошланғич шартлар учун $(T_0+\Pi_0)<P$ ўринли. Бунга кўра $\Pi<P$,яъни оғдирилган ҳаракатда ҳеч қайси координата ўзининг чегараси ε га тенг бўла олмайди. Шундай қилиб, теорема исботланди[12]. [1](193-195), [4](77-86)

Лагран-Дирихли теоремасига тескари теорема қуйидагича таърифланади: Агар системанинг мувозанат ҳолатида потенциал энергия максимумга эга бўлиб, унинг максимуми потенциал энергияни қаторга ёйиш натижасидаги нолга тенг бўлмаган энг кичик тартибли ҳади орқали аниқланган бўлса, у ҳолда системанинг мувозанат ҳолати ноустувор бўлади. Шуни таъкидлаш керакки, системанинг мувозанат ҳолати яккаланган бўлиши зарур.

---

[12]Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. – С. 262. – ISBN 5-9221-0067-X. С. 193-195
Merkin, David R. Introduction to the Theory of Stability. Springer. 2010. C.77-86

5.2. Циклик координаталар ва циклик интеграллар.

Механик системаларда шундай координаталар учрайдики, бу координаталар Лагранж функциясига ошкор равишда қатнашмайди. Қуйида бундай системаларнинг ҳаракат тенгламаларини тартибини пасайтириш усули устида тўхталиб ўтамиз.

Таъриф. $q_1, q_2, ..., q_l \ (l < n)$ координаталар циклик координаталар деб аталади, агар бу координаталар L Лагранж функциясига ошкор равишда қатнашмаса. Таърифга кўра $L = L(q_{l+1}, ..., q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t)$ ёки $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ ва Лагранж тенгламаларидан $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = c_k, (k = 1,2,..., l)$ циклик интеграллардеб аталадиган интегралларни оламиз. Бунда $c_1, c_2, ..., c_l$ интеграллаш доимийлари.

Раус циклик интеграллардан фойдаланиб, система ҳаракат тенгламаларининг тартибини пасайтириш усулини ишлаб чиққан.. Бунинг учун $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = c_k, (k = 1,2,..., l)$ циклик интеграллар ёрдамида циклик тезликларни позицион координаталар ва уларнинг тезликларга $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_{l+1}, q_{l+2}, ... q_n, \dot{q}_{l+1}, \dot{q}_{l+2}, ..., \dot{q}_n c_1, c_2, ... c_l, t)$ нисбатан ечиб оламиз ва қолган Лагранж тенгламаларига циклик тезликларни ўрнига қўйиб позицион координаталарга нисбатин тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.Мана шу иш Раус томонидан амалга оширилган ва тенгламалар системасининг тартиби пасайтирилган. Раус томонидан худди Лагранж функциясини ролини бажарадиган $R = L - \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k$ функция киритилган ва циклик тезликлар интеграллар ёрдамида позицион координаталар ва тезликлар орқали алмаштирилган. Бунга кўра Раус функцияси $R = R(q_{l+1}, q_{l+2}, ... q_n, \dot{q}_{l+1}, \dot{q}_{l+2}, ..., \dot{q}_n c_1, c_2, ... c_l, t))$ позицион координаталар, тезликлар ва интеграллаш доимийларининг функциясидан иборат бўлади. Раус функциясини иккала томонини вариациялаб

$$\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\partial R}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i+\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial R}{\partial c_k}\delta c_k=\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{i=l+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i+$$
$$+\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i-\sum_{i=1}^{l}\delta\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\dot q_i-\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i$$

ва бу тенгламанинг иккала томонидаги бир хил вариациялар олдидаги коэффициентларнинг тенглигидан, $\frac{\partial R}{\partial q_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}. \frac{\partial R}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$ $(i=l+1,...,n)$, $\dot q_k=-\frac{\partial R}{\partial c_k}$, $(k=1,2,...,l)$ муносабатлар келиб чиқади. Бунга кўра, Раус функциясидан олинган хусусий ҳосилалар Лагранж функциясидан олинган хусусий ҳосилаларга тенг бўлар экан. Олинган натижани ўрнига қўйиб,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0 \quad i=l+1,l+2,...,n,$$

$$\dot q_k=-\frac{\partial R}{\partial c_k},\ (k=1,2,...,l)$$

позицион координаталарга нисбатан ҳаракат тенгламаларини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, циклик интеграллар ёрдамида тенгламалар системасининг тартибини циклик координаталар сонига камайтирса бўлар экан. Агар системага қўйилган боғланишлар стационар ва актив кучлар потенциалга эга бўлса, системада худди энергия интеграли каби $R_2+\Pi-R_0=h$

биринчи интеграл мавжуд. Бунда R_2 худди кинетик энергия каби циклик бўлмаган (позицион) координаталарга нисбатан мусбат аниқланган квадратик форма. $W=\Pi-R_0$ ҳад келтирилган потенцал деб аталади.

Стационар ҳаракат таърифига кўра, бунда позицион координаталар $q_i=q_i^0$ ўзгармас ва циклик координаталарнинг тезликлари эса юқорида келтирилган $\dot q_k=\dot q_k(q^0{}_{l+1},q^0{}_{l+2},...q^0{}_n,0,0,...,0,\ c_1,c_2,...c_l)$ тенгламаларни қаноатлантиради. Механик маъносига кўра, стационар ҳаракат кўпгина ҳолларда системанинг нисбий мувозанат ҳолатига мос келади ва унинг турғунлиги масаласи Раус теоремаси оркали аниқланади.

Раус теоремаси. Агар системанинг стационар ҳаракатида $W=\Pi-R_0$ келтирилган потенциал минимумга эга бўлса, оғдирилмаган стационар ҳаракат позицион координаталарга ва циклик интегралларни қаноатлантирувчи циклик тезликларга нисбатан устувор бўлади. Теореманинг исботи Ляпуновни устуворлик ҳақидаги теоремасидан тўғридан-тўғри келиб чиқади, яъни Ляпунов функцияси сифатида $V = R_2 + W$ олинади.

5.4. Чизиқли системаларнинг устуворлиги.

Қуйида хусусий ҳоллардан бири бўлган, оғдирилган ҳаракат тенгламалари чизиқли тенгламалар системасидан иборат бўлган ҳолни кўриб чиқамиз. Бунда ҳисоблашларни соддалаштириш учун алгебрада кўриладиган матрицалар назариясидан фойдаланамиз. Фараз қиламиз, оғдирилган ҳаракат тенгламалари чизиқли автоном $\dot{x}_i = a_{j1}x_1 + ... + a_{jn}x_n$, $i = 1,...,n$,

ёки вектор кўринишда

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

системадан иборат бўлсин. Бунда $A = \|a_{ij}\|$ квадрат матрица. Чизиқли $\vec{z} = \Lambda\vec{x}$ хос бўлмаган алмаштириш ёрдамида янги $z_1,...,z_n$ ўзгарувчиларга ўтамиз. $\Lambda = \|\alpha_{ij}\|$ матрица хосмас матрицадан иборат бўлгани учун, унинг тескари матрицаси мовжуд бўлиб тескари $\vec{x} = \Lambda^{-1}\vec{z}$ чизиқли алмаштириш ўринли. Алмаштиришларни ўрнига қўйиб

$$\dot{\vec{z}} = B\vec{z},$$

вектор тенгламага эга бўламиз. Бунда $B = \Lambda A \Lambda^{-1}$. Шундай қилиб, чизиқли алмаштириш натижасида $\vec{x}$ узгарувчига нисбатан $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ вектор тенгламадан, $\vec{z}$ ўзгарувчига нисбатан $\dot{\vec{z}} = B\vec{z}$ вектор тенгламага келамиз. Алмаштиришлар чизиқли бўлгани учун хусусий ечимни $\vec{z}$ ўзгарувчиларга нисбатан устуворлик ёки ноустуворлигидан, $\vec{x}$ ўзгарувчиларга нисбатан устуворлик ёки ноустуворлик келиб чиқади.

Кейинга аналитик амалларни бажариш учун, чизиқли алгебрага тегишли теоремаларга тўхталамиз.

Теорема 1. Агар Λ матрица хосмас матрицадан иборат бўлса, у ҳолда $A - \lambda E$ ва $\Lambda A \Lambda^{-1} - \lambda E$ матрицаларнинг элементар бўлувчилари бир хил бўлади ва тескариси, агар $A - \lambda E$ ва $B - \lambda E$ матрицаларнинг элементар бўлувчилари бир хил бўлса, шундай Λ матрица топиладики $B = \Lambda A \Lambda^{-1}$ муносабат ўринли.

Теорема 2. Агар T ва Π матрицалар квадрат симметрик матрицалар бўлиб, бунда T мусбат аниқланган бўлса, у ҳолда

1. $\det(T\lambda + \Pi) = 0$ характеристик тенгламанинг ечимлари хақиқий бўлади.

2. Доимо шундай хосмас Λ матрица топиш мумкинки, $\Lambda' T \Lambda = E,\ \Lambda' \Pi \Lambda = C_0$. Бунда E-бирлик матрица, Λ'-транспанирланган матрица ва C_0-диагонал матрица бўлиб, унинг элементлари характеристик тенгламанинг ечимларидан иборат.

Юқорида келтирилган теоремаларга кўра, $\dot{\vec{z}} = B\vec{z}$ тенгламадаги B матрицанинг коэффициентларини, бошланғич A матрицанинг

$$B = \begin{Vmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_m \end{Vmatrix} \qquad (*)$$

Жордан формасини оламиз. Бунда $B_k = \begin{Vmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_4 \end{Vmatrix}$, ва ўзгартирилган тенгламалар системасига тегишли $\vec{z}$ вектор каноник вектор деб, унинг элементлари эса каноник ўзгарувчилар деб аталади. Шуни таъкидлаш кераккки, каноник ўзгарувчиларга ўтиш учун фақатгина $A - \lambda E$ матрицанинг элементар бўлувчиларини билиш етарли бўлади. Олинган натижага кўра, каноник ўзгарувчилардаги тенгламалар m та алоҳида тенгламалар тўпламидан иборат бўлади ва улардан бири қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1, \\ &\dot{z}_2 = z_1 + \lambda_1 z_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\dot{z}_{e_1} = z_{e_1 - 1} + \lambda_1 z_{e_1}. \end{aligned}$$

Бу тенламалар системаси оддий интегралланади.

$$z_1 = z_{01} e^{\lambda_1 t},$$
$$z_2 = (z_{02} + z_{01} t) e^{\lambda_1 t},$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{e_1} = (z_{0e_1} + z_{0e_2} t + \ldots + z_{01} \frac{t^{e_1 - 1}}{(e_1 - 1)!}) e^{\lambda_1 t}$$

Энди оғдирилган ҳаракат устуворлиги масаласига қайтамиз. Олинган ечимларга кўра қуйидаги **теоремалар** ўринли:

1. Агар характеристик тенглама ечимларининг хақиқий қисмлари манфий бўлса, оғдирилмаган ҳаракат асимптотик устувор бўлади.

2. Агар характеристик тенглама ечимларининг ичида биттагина бўлса ҳам хақиқий қисми мусбат бўлган ечими мавжуд бўлса, оғдирилмаган ҳаракат ноустувор бўлади.

3. Агар характеристик тенглама ечимларининг ичида хақиқий қисмлари нолга тенг бўлган ечимлари бўлиб, қолганлари эса манфий хақиқий қисмларга эга бўлса, у ҳолда:

а) Оғдирилмаган ҳаракат устувор бўлади, агар хақиқий қисмлари нолга тенг бўлган ечимларга оддий элементар бўлувчилар мос келса:

б) Оғдирилмаган ҳаракат ноустувор бўлади, агар хақиқий қисмлари нолга тенг бўлган ечимлар, оддий элементар бўлувчилар учун каррали бўлса[13]: [4](124-142).

Назорат саволлари:

1. Яккаланмаган мувозанат ҳолатини устуворлигини текширишда Лагранж теоремасини қўллаш мумкинми?
2. Нормал формага келтирилмаган юқори тартибли чизиқли оғдирилган ҳаракат тенгламасининг хусусий ечимини устуворликка текшириш учун бу системани нормал кўринишга келтириш шартми?
3. Автоном системалар учун келтирилган теоремалар чизиқли даврий коэффициентли системалар учун ўринлими?
4. Гироскопик куч деб нимага айтилади?

---

[13] Merkin, David R. Introduction to the Theory of Stability. Springer. 2010. C.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. – С. 262. – ISBN 5-9221-0067-Х.
2. Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013
3. Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006
4. Merkin, David R. Introduction to the Theory of Stability. Springer. 2010
5. Уиттекер Е. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 2001.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-амалий машғулот:
Раус ва Аппель тенгламалари.

Амалий машғулотдан асосий мақсад, тингловчиларни ишқаланишга эга бўлган аниқ системаларнинг ҳаракат тенгламаларини тузишда келиб чиқадиган асосий муаммоларни бу системаларга тегишли аниқ масалаларда кўрсатиб бериш. Кўриладиган масаланинг ҳаракат тенгламалари Раус ва Аппель тенгламалари кўринишида тузилади ва тенгламаларда қатнашадиган номаълум ишқаланиш кучлари умумий теоремалар ёрдамида топилади, яъни ишқаланишга эга бўлган системаларда ишқаланиш қонунини билиш ёки ишқаланиш кучларини система нуқталарининг мумкин бўлган кўчишларидаги элементар бажарган ишлари маълум бўлиши лозим.

2-амалий машғулот:
Каноник алмаштиришлар. Гамильтон -Якоби дифференциал тенгламаси.

Интеграл инвариантларга ва вақтга ошкор равишда боғлиқ бўлган каноник алмаштиришларга масалалар ечилади. Асосий мақсад тингловчиларни вақтга боғлиқ бўлган алмаштириш ёрдамида Гамильтон функцияси соддароқ бўлган система билан алмаштириш натижасида системанинг ҳаракатини ўрганишдан иборат. Бунда алмаштиришларни канониклик аломатига кўра келтириб чиқарувчи фунцияни, алмаштиришларни валентлигини ва янги Гамильтон функцияси аниқланади.

3-амалий машғулот:
Асосий тушунчалар ва теоремалар. Автоном системалар учун Ляпунов функциялари.

Амалий машғулотда қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатланаётган қаттиқ жисмни бош ўқлар атрофидаги прецессион ҳаракатини устуворлигини Ляпунов функцияси ва теоремаси ёрдамида ўрганилади. Бунда тингловчилар хусусий ечимни устуворликка текширишда Ляпунов теоремасига асосланган махсус функцияни биринчи интеграллар ёрдамида тузиш методикасини ўрганадилар. Ляпунов функциясига қўйиладиган шартлар ш Сельвестр аломатига кўра текширилади.

4-амалий машғулот:
Ляпунов функцияси ва уларни қуриш усуллари.

Амалда аниқ масалаларнинг хусусий ечимларини устуворликка текширишда Ляпунов функциясини хозирда маълум бўлган учта усулига таянилади (квадратик форма кўринишида, биринчи интегралларнинг комбинацияси кўринишида ва алмаштиришлар ёрдамида масалани Ляпунов функцияси маълум бўлган системага келтириш). Сферик маятник масаласида бу функцияни қуриш методикаси кўрилади. Бу эса маърузада ўрганилган назарияни амалдаги қўлланилиши бўлиб, тингловчиларда мавзуни чуқурроқ ўрганишига ёрдам беради.

5 – амалий машғулот:

Консерватив системаларнинг устуворлиги. Циклик интеграллар. Чизиқли системаларнинг устуворлиги.

Абсолют ва нисбий яккаланган мувозанат ҳолатининг устуворлигига тегишли аниқ масалалар тингловчиларни Лагранж теоремасини аниқ системаларга қўллаш кўникмасини ҳосил қилади ва кейинги босқичда .стационар ҳаракатнинг устуворлиги хақидаги Раус теоремасини қўлашда ёрдам беради.

V. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни.

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган холда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва меъёрий хужжатлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мустақил таълим мавзулари.

1. Аппель тенгламалари квазикоординаталардаги кўриниши
2. Гамильтон-Якоби тенламаси. Ўзгарувчилар ажраладиган ҳоллар Лиувилл, Моисеев ва Штеккел ҳоллари
3. Ноавтоном системалар учун Ляпунов функцияси.
4. Ноавтоном системалар учун Ляпунов теоремалари
5. Ноконсерватив системаларнинг мувозанат ҳолатини устуворлиги
6. Гироскопик боғланмаган системалар
7. Гамильтон системаларининг устуворлиги

VI.КЕЙСЛАР БАНКИ

Кичик кейс 1. “Турғунлик назариясига тегишли муаммоли масала”.

Муаммонинг қўйилиши: Механик системанинг мувозанат ҳолатидан оғдирилган ҳаракат тенгламаси $\ddot{x}+p(t)x=0$ кўринишга эга. Бунда $t\to\infty,\ p(t)\to 0$ ва функция силлиқ функциядан иборат. Оғдирилмаган ҳаракатни турғунликка текширинг?

Тингловчилардан олинган жавоблар қуйидагича:

1. Мувозанат ҳолатини устиворлигини $p(t)$ функциянинг вақт оралиғидаги ўрта қийматини олган ҳолда ўзгармас коэффициентли $\ddot{x}+(2+\frac{1}{T_0}\int\limits_0^{T_0} p(t)dt)x=0$ дифференциал тенгламанинг ечимлари ёрдамида устуворликка текшириш мумкин.
2. Мувозанат ҳолатини устиворлигини $p(t)$ функциянинг ихтиёрий фиксирланган қийматини олиб, оғлирилмаган ҳаракат турғунлиги тўғрисида фикр юритиш мумкин.

Нима учун бундай жавоблар келиб чиқди ва унинг сабаби. Вазиятдан чиқиш йўлини кўрсатинг.

Кичик-кейс 2. “Гамильтон принципига тегишли мулоҳаза”.

Муаммонинг қўйилиши: Ихтиёрий механик системанинг хақиқий ҳаракати фиксирланмаган вақт оралиғида кинематик мумкин бўлган ҳаракатлардан шу билан фарқ қиладики, фақатгина хақиқий ҳаракат учун Гамильтон таъсири стационар қийматга эга. Таърифнинг муаммоли жойлари нимада?

Тингловчилардан олинган жавоблар қуйидагича:

1. Гамильтон принципи фақатгина Лагранж системалари учунгина ўринли.
2. Ихтиёрий механик системалар учнн Гамильтон принципи ўринли эмас

Нима учун бундай жавоблар келиб чиқди ва унинг сабаби. Вазиятдан чиқиш йўлини кўрсатинг.

Кичик -кейс 3. “ Кинематик боғланишли системаларга тегишли муаммо”.

Механик системаларга тегишли сирпанмасдан ҳаракат ишқаланиш кучлари ҳисобига бажарилади. Бунда боғланиш реакция кучларининг бажарган иши ҳар доим нолдан нолга тенг бўлади. Тасдиқнинг хатоси борми деган савол туғилали.

Тигловчилар томонидан келтирилган жавоблар қуйидагилардан иборат бўлди:

1. Сирпанишдаги ишқаланиш мавжуд бўлган ҳолларда бажарилган иш нолдан фарқли бўлади.
2. Бажарилган иш нолга тенг бўлиши учун ишқаланиш кучи нолга тенг бўлиши лозим.

Нима учун бундай жавоблар пайдо бўлди. Бунинг асосий сабаби нимада.

VII. ГЛОССАРИЙ

Иборалар	Ўзбек тилидаги маъноси	Инглиз тилидаги маъноси
Моддий нуқта	ўлчамлари ва шаклининг аҳамияти бўлмаган, массаси бир нуқтада жойлашган деб тасаввур қилинадиган жисм	The importance of the shape and size of objects to be considered as a point mass
Абсолют қаттиқ жисм	ихтиёрий иккита нуқтаси орасидаги масофа доимо ўзгармасдан қоладиган система	The system will be the distance between any two points always
Боғланиш	жисмнинг ҳаракати ёки ҳолатини чекловчи сабаб;	restrict body movement or the status of the
Боғланиш реакция кучи	боғланишнинг жисмга кўрсатадиган таъсирини белгиловчи куч	object determining the influence of the power of connection
Ишқаланиш кучи	боғланишдаги жисмларнинг бири иккинчисига нисбатан силжиганда уларнинг бир-бирига тегиб турган сиртларида ҳосил бўладиган қаршилик кучи	links them to move objects from one contact with a surface resistance
Мумкин бўлган кўчиш	фиксирланган вақтда боғланишларни сақлаб қолган ҳолда нуқтага бериш мумкин бўлган элементар кўчишлар тўплами	Fixed point of time, while keeping the connection to a set of elementary migration
Циклик координата	Лагранж функциясида ошкор равишда қатнашмайдиган координата.	Disclosure of the function Lagranj participation are coordinate
Тезланиш энергияси	система нуқталари тезланиш-лари	the system points the squared acceleration are in their half of the lump sum.

	квадратини уларнинг массасига кўпайтмасининг ярми.	
Интеграл инвариант	Гамильтон системасига кўра вақт бўйича олинган ҳосила нолга тенг бўлган интеграл.	Hamilton system from the time of the derivative is zero integrated
Универсал инвариант интеграл	Гамильтон функцияси қатнашмайдиган хақиқий йўллардан иборат бўлган ёпик контур бўйича олинган интеграл.	Hamilton function is taken off the road, which is not taking part in a contour integral
Консерватив система	энергия интеграли ўринли бўлган система.	capacity of integrated energy system
Каноник алмашти-ришлар	ихтиёрий Гамильтон системасини бошқа Гамильтон функцияси билан шу системага ўтказадиган алмаштиришлар.	voluntary system and other functions carried out by the same system with the replacement of Hamilton Hamilton
Валентлик	универсал интеграл инва-риантларни бир-биридан фарқини ифодаловчи коэффициент.	universal integrated inva granted by a coefficient representing the difference between each.
Келтириб чиқарувчи функция	канониклик аломатини қаноатлантирувчи функция.	satisfactory to sign kanoniklik function
Эркин каноник алмаштиришлар	валентлиги бирга тенг бўлган ва маълум шартларни қаноат-лантирувчи алмаштиришлар.	Valentine is satisfied with the specific requirements and which introduce replacement.
Ляпунов функцияси	маълум шартларни қаноатлантирувчи функция.	the chord function
Оғдирилган ҳаракат	бошланғич шартларни ўзгариши хисобига келиб чиқадиган ҳаракат.	arising due to changes in the initial conditions
Биринчи интеграл	ҳаракат тенгламаларига	According to the equation of

	кўра вақт бўйича ҳосиласи нолга тенг бўладиган функция.	time trying to be a derivative of the zero function.
Квадратик форма	маълум шартларни қаноатлантирувчи иккинчи тартибли алгебраик кўпхад.	certain conditions satisfactory to the second
Лагранж функцияси	механик система кинетик ва потенциал энергияларининг фарқи	mechanical system of kinetic and potential energy difference
Циклик координата-лар	Лагранж функциясига ошкор қатнашмайдиган координаталар	Lagranj not taking part in revealing the function of the coordinates
Циклик интеграл	циклик координатага мос биринчи интеграл	cyclic coordinate the first integral
Хосмас матрица	аниқловчиси нолдан фарқли бўлган квадратик матрица.	descriptor zero squared matrix

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Адабиётлар:

1. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X.
2. Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013
3. Antonio Fasano, Stefano Marmi. Analytical Mechanics. Oxford University Press. 2006
4. Уиттекер Е. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 2001.
5. Merkin, David R. Introduction to the Theory of Stability. Springer. 2010

Интернет ресурслар:

1. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm
2. http://www.ruscommech.ru
3. http://www.knigapoisk.ru/book
4. www.natlib.uz
5. www.twirpx.com