ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“МЕХАНИКАНИНГ ДОЛЗАРБ МАСАЛАЛАРИ”

модули бўйича

Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тошкент 2017

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2017 йил 24 августдаги 603-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи:

ЎзМУ, ф-м.ф.д., профессор,
Н.А.Коршунова

ф-м.ф.н. доцент,

М.Н.Сидиков

Тақризчи:

Dilmurat Azimov. Ph.D.Sc Assistant Professor. Doctor of Technical Sciences. Department of Mechanical Engineering. University of Hawaii at Manoa. USA.

Ўқув -услубий мажмуа ЎзМУнинг ...... кенгашининг 2017 йил __________даги ___-сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

КИРИШ.

Дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли, 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сонли Фармонлари, шунингдек 2017 йил 20 апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ–2909-сонли қарорида белгиланган устивор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир.

Дастур мазмуни олий таълимнинг норматив-ҳуқуқий асослари ва қонунчилик нормалари, илғор таълим технологиялари ва педагогик маҳорат, таълим жараёнларида ахборот-коммуникация технологияларини қўллаш, амалий хорижий тил, тизимли таҳлил ва қарор қабул қилиш асослари, махсус фанлар негизида илмий ва амалий тадқиқотлар, технологик тараққиёт ва ўқув жараёнини ташкил этишнинг замонавий услублари бўйича сўнгги ютуқлар, педагогнинг касбий компетентлиги ва креативлиги, глобал Интернет тармоғи, мультимедиа тизимлари ва масофадан ўқитиш усулларини ўзлаштириш бўйича янги билим, кўникма ва малакаларини шакллантиришни назарда тутади.

Дастурда мобил қурилмалар учун операцион тизимлар, иловалар структураси, андроид тизими учун Java дастурлаш тили, андроид фойдаланувчи интерфейсини яратиш, иловаларда ҳодисалар ва жараёнлар, менюларни бошқариш, мобил иловаларда маълумотлар базаси билан ишлаш, GPS хизмати, тармоқли дастурлаш, илованинг сервер қисми билан ишлаш ва

JSON хизматидан фойдаланиш муаммолари баён этилган.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Механиканинг долзарб масалалари” модулининг мақсади:
педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси тингловчиларини механика соҳасидаги энг сўнгги ютуқлар, муаммолар ва уларни ҳал этиш йўлларини аниқлаш усуллари, шунингдек, натижаларни амалий аҳамиятлари ва ишлаб чиқариш объектларида қўллаш йўлларини ўрганиш ҳисобланади.

Модулнинг вазифаси мазкур дастур доирасида тингловчиларга назарий ва амалий механиканинг долзарб муаммоларини аниқлаш, таҳлил қилиш ва уларни ечиш усуллари бўйича назарий билим бериш ва муайян кўникмалар ҳосил қилиш ҳисобланади.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникма, малака ва компитентлигига қўйиладиган талаблар

“Механиканинг долзарб масалалари” модулининг ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида **тингловчи:**

курснинг асосий гипотезалари, моделлари, қонунлари, натижалари, муҳитларнинг механик хусусиятлари, уларда ҳосил бўладиган жараёнларни **билиши керак**.

махсус курсни ўзлаштириш жараёнида назарий ва амалий механика масалаларини моделлаштириш: муҳит ёки жисмларнинг ҳаракат тенгламалари, чегаравий ва бошланғич шартларни туза билишлари ва шу асосда қўйилган муайян механик масалани еча билиш **кўникмаларига эга бўлишлари керак.**

Тажрибавий натижалар асосида олинган, амалиётда кенг қўлланиб келинаётган формулаларни техник объектларда ҳисоблашга қўллаш, механика масалаларини ечишга сонли ҳисоблаш усулларни қўллаш **малакасига эга бўлиши керак**.

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“Механиканинг долзарб масалалари” курси маъруза ва амалий (семинар) машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган семинар машғулотларда техник воситалардан, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, коллоквиум ўтказиш ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Механиканинг долзарб масалалари” модули мазмуни ўқув режадаги “Таълимда ахборот-коммуникацион технологиялар” ўқув модули билан узвий боғланган ҳолда механиканинг долзарб муаммолари бўйича педагогларнинг касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар туташ муҳитлар, гидротехник иншоотлар, экспериментал механика, техника, қурилиш ва ишлаб чиқаришнинг бошқа соҳаларида учрайдиган муаммоларни тадқиқ қилиш йўлларини ўрганиш, уларни таҳлил қилиш ва амалда қўллашга касбий компетентликка эга бўладилар.

“Механиканинг долзарб масалалари”
Модул бўйича соатлар тақсимоти

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат					
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси				Мустақил таълим
			Жами	жумладан			
				Назарий	Амалий машғулот	Кўчма машғулот	
1.	Гравитацион майдонлардаги траек-торияларни оптималлаштириш. Космик парвозлар механикасининг вариацион масалалари.	4	4	2	2		-
2.	Механик система устуворлиги ва бошқарилиши, ҳаракатни барқарорлаштиришни тадқиқ этиш.	4	4	2	2		-
3.	Ноидеал шартли боғланишли бошқарилувчи механик системалар динамикаси.	6	6	2	2	2	
4.	Бошқарилувчи механик системалар. Ҳаракат тенгламалари.	4	2		2		2
5.	Деформацияланувчи қаттиқ жисм механикасининг долзарб масалалари. Умумлашган Гук қонуни. Термоэластик жисм модели.	6	4	2	2		2
6.	Мураккаб хоссали муҳитлар ва уларда тўлқин тарқалиши.	6	6	2	2	2	
	Жами	**30**	**26**	**10**	**12**	**4**	**4**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Гравитацион майдонлардаги траекторияларни оптималлаштириш. Космик парвозлар механикасининг вариацион масалалари

Марказий ва марказий бўлмаган гравитацион майдон таъсирида бўлган нуқтанинг актив қисмлардаги оптимал траекторияларининг аналитик ечимларини аниқлаш йўллари.

2-Мавзу: Механик система устуворлиги ва бошқарилиши, ҳаракатни барқарорлаштиришни тадқиқ этиш

Механика система устуворлиги ва бошқарилиши, ҳаракатнинг барқарорлаштиришни тадқиқ этиш. Регуляторнинг тузилиши. Осмон баллистикасининг баъзи масалалари.

3-Мавзу: Ноидеал шартли боғланишли бошқарилувчи механик системалар динамикаси

Шартли боғланишлар. Бошқарилувчи механик системалар. Ҳаракат тенгламалари. Ноидеал шартли боғланишларнинг реакция кучлари. Бошқарилувчи регулятор ва гармоник компас.

4-Мавзу: Деформацияланувчи қаттиқ жисм механикасининг долзарб масалалари. Умумлашган Гук қонуни. Термоэластик жисм модели.

Деформацияланувчи қаттиқ жисм механикасининг долзарб масалалари. Умумлашган Гук қонуни. Термоэластик жисм модели.

5-Мавзу: Мураккаб хоссали муҳитлар моделлари

Мураккаб хоссали муҳитлар моделлари. Мураккаб хоссали муҳитларда тўлқин тарқалиши.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1-Амалий машғулот

Гравитацион майдонлардаги траекторияларни оптималлаштириш

Амалий машғулотда экстремал траекторияларни топишга тегишли Гамильтон тенгламаларига кўра, аниқ масалалар кўрилади.

2-Амалий машғулот

Механик система устуворлиги ва бошқарилиши, ҳаракатни барқарорлаштиришни тадқиқ этиш

Амалда аниқ масалаларнинг хусусий ечимларини устуворликка текширишда Ляпунов функциясини хозирда маълум бўлган учта усулига таянилади (квадратик форма кўринишида, биринчи интегралларнинг комбинацияси кўринишида ва алмаштиришлар ёрдамида масалани Ляпунов функцияси маълум бўлган системага келтириш).

3-Амалий машғулот

Ноидеал шартли боғланишли бошқарилувчи механик системалар динамикаси

Амалий машғулотда шартли боғланишли системаларнинг ҳаракат тенгламаларини Аппель тенгламалари кўринишида келтириб чиқариш мўлжалланган.

4-Амалий машғулот

Бошқарилувчи механик системалар. Ҳаракат тенгламалари.

Амалий машғулотда шартли боғланишни гирокомпас ҳаракатида амалга ошириш масаласи кўрилади.

5 – Амалий машғулот

Умумлашган Гук қонуни. Термоэластик жисм модели

Эркин энергияга қўйиладиган айрим шартлар асосила бир ўлчовли масалада умумлашган Гук қонуни ва термоэластик модел келтириб чиқарилади.

6 – Амалий машғулот

Мураккаб хоссали муҳитларда тўлқин тарқалиши

Эластик-пластик муҳитда юкланиш тўлқинларининг тарқалишига оид масала кўрилади ва. кучланиш-деформация диаграммаси тузилиб, механик талқин қилинади.

КЎЧМА МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

Кўчма машғулотлар модул соҳаси бўйича етакчи олий таълим кафедралари ва илмий-тадқиқот муассасалари лабораториялари ҳамда ишлаб чиқариш корхоналари бўлимларида ташкил этилади. Мазкур машғулотлар соҳага оид долзарб мавзуларда тажриба-синов ва лаборатория машғулотлари ҳамда танишув амалиёти шаклларида олиб борилади. Шунингдек, таъкидланган муассасалар ва корхоналар етакчи мутахассислари томонидан республика ва хорижий илмий марказларда соҳа йўналишида амалга оширилаётган илғор илмий ва амалий тадқиқотлар бўйича таҳлилий шарҳлар берилиши масқадга мувофиқдир.

Кўчма машғулотлар учун қуйидаги мавзулар тавсия этилади:

1. Ноидеал шартли боғланишли бошқарилувчи механик системалар динамикаси.
2. Мураккаб хоссали муҳитлар ва уларда тўлқин тарқалиши.

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган холда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва меъёрий хужжатлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модулни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, педагогик технологиялар ва ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва интерфаол педагогик (Ақлий хужим, Венн диаграммаси, концептуал жадвал) усул ва технологиялардан фойдаланилади;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, график органайзерлардан, кейслардан фойдаланиш, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, блиц-сўровлардан ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

ЖОРИЙ НАЗОРАТ(АССИСМЕНТ)НИ

БАҲОЛАШ МЕЗОНИ

Жорий назорат(ассисмент)ни бахолаш Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш Тармоқ (минтақавий) марказида тасдиқланган шакллари ва мезонлари асосида амалга оширади.

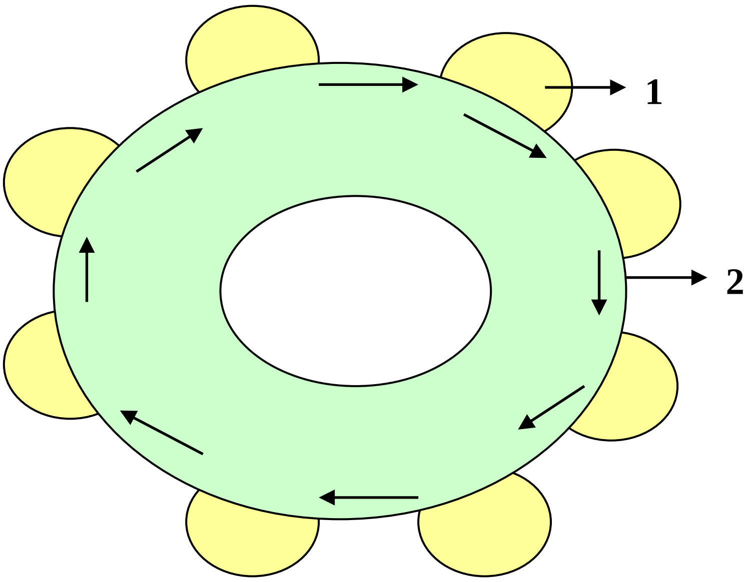
Ушбу модулнинг жорий назорат(ассисмент)га ажратирлан максимал балл-**0,8 балл.**

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ.

“Давра суҳбати” методи.

Айлана стол атрофида берилган муаммо ёки саволлар юзасидан таълим олувчилар томонидан ўз фикр-мулоҳазаларини билдириш орқали олиб бориладиган ўқитиш методидир.

“Давра суҳбати” методи қўлланилганда стол-стулларни доира шаклида жойлаштириш керак. Бу ҳар бир таълим олувчининг бир-бири билан “кўз алоқаси”ни ўрнатиб туришига ёрдам беради. Давра суҳбатининг оғзаки ва ёзма шакллари мавжуддир. Оғзаки давра суҳбатида таълим берувчи мавзуни бошлаб беради ва таълим олувчилардан ушбу савол бўйича ўз фикр-мулоҳазаларини билдиришларини сўрайди ва айлана бўйлаб ҳар бир таълим олувчи ўз фикр-мулоҳазаларини оғзаки баён этадилар. Сўзлаётган таълим олувчини барча диққат билан тинглайди, агар муҳокама қилиш лозим бўлса, барча фикр-мулоҳазалар тингланиб бўлингандан сўнг муҳокама қилинади. Бу эса таълим олувчиларнинг мустақил фикрлашига ва нутқ маданиятининг ривожланишига ёрдам беради.



Белгилар:
1-таълим олувчилар
2-айлана стол

“SWOT-таҳлил” методи.

Методнинг мақсади: мавжуд назарий билимлар ва амалий тажрибаларни таҳлил қилиш, таққослаш орқали муаммони ҳал этиш йўлларни топишга, билимларни мустаҳкамлаш, такрорлаш, баҳолашга, мустақил, танқидий фикрлашни, ностандарт тафаккурни шакллантиришга хизмат қилади.

S – (strength)	• кучли томонлари
W – (weakness)	• заиф, кучсиз томонлари
O – (opportunity)	• имкониятлари
T – (threat)	• тўсиқлар

S	Механиканинг долзарб масалаларига тегишли усуллардан фойдаланишнинг кучли томонлари	Бу усуллар кенг қамровли бўлиб механиканинг барча соҳаларини қамраб олади ва муҳитларга тегишли моделларнинг кўплиги билан ажралиб туради.
W	Механиканинг долзарб масалаларига тегишли усуллардан фойдаланишнинг кучсиз томонлари	Механик системаларнинг пластиклик соҳаларида аниқ ечимларни олиш катта муаммо туғдиради.
O	Механиканинг долзарб масалалари фанининг усулларидан фойдаланиш имкониятлари	Ҳар доим ҳам умумий ечимни аниқлаб бўлмасада, аналитик механиканинг усуллари ёрдамида хусусий ечимларни аниқлаш имконияти мавжуд.
T	Тўсиқлар (ташқи)	Моделларнинг торлиги ва муҳитларни танлаб олиш зарурати.

“Ассисмент” методи

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур метод орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташхис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби:

"Ассисмент" лардан маъруза машғулотларида талабаларнинг ёки қатнашчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, семинар, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассисментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

"Ассисмент" методига мисол.

Тест

- 1.Гамильтон принципида қандай ҳаракатлар бир-бири билан солиштирилади ?
- А. ихтиёрий
- В. Хақиқий ва кинематик мумкин бўлган ҳаракатлар
- С. Бир нуқтадан чиқувчи

Қиёсий таҳлил

- Гамильтон принципини қулланиш соҳасини таҳлил қилинг?

Тушунча таҳлили

- Гамильтон бўйича таъсир қисқармасини изоҳланг...

Амалий кўникма

- Каноник алмаштириш аломатини бажариш кетма-кетлтгини чизиқли алмаштиришда келтиринг

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-мавзу. ГРАВИТАЦИОН МАЙДОНЛАРДАГИ ТРАЕКТОРИЯЛАРНИ ОПТИМАЛЛАШТИРИШ. КОСМИК ПАРВОЗЛАР МЕХАНИКАСИНИНГ ВАРИАЦИОН МАСАЛАЛАРИ.

РЕЖА:

1.1.Вариацион масаланинг қўйилиши.
1.2.Интеграллаш муаммолари.
1.3.Хусусий ечимларни аниқлаш усуллари

Таянч иборалар: *массаси ўзгарувчи нуқта, минимал қиймати талаб қилинувчи функционал, актив соҳалар, базис-вектор, гамильтон системаси, тортиш кучининг қиймати ва йўналиши, массанинг вақт оралиғидаги сарфи.*

1.1. Вариацион масаланинг қўйилиши.

Қуйида ўзгарувчан массали нуқта – космик кеманинг (КА) фазодаги ҳаракатини, яъни фазонинг бир нуқтасидан бошқа нуқтасига ўтиш масаласини экстремал траекторияларини аниқлаш масаласини кўриб чиқамиз. Бундай масала хозирда космик парвозлар механикасининг долзарб масалаларидан ҳисобланади. Массаси ўзгарувчи моддий нуқта ҳаракат тенгламаси - Мешчерский тенгламасига кўра бу нуқта ҳаракат дифференциал тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\mathrm{M}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Phi} + M\vec{g}\,. \qquad (1.1.1)$$

Бунда M-космик кема (КА) массаси; $\vec{g}$-гравитацион тезланиш; $\vec{\Phi}$-реактив куч бўлиб, бундан кейин бу кучни тортувчи куч деб айтиб кетамиз. Умумий назарияга кўра

$$\vec{\Phi} = \vec{v}_r\,\frac{dM}{dt}\,.$$

Бунда $\vec{v}_r$ –ёниш натижасида отилиб чиқаётган зарраларнинг нисбий тезлиги: $\vec{v}_r = -c\vec{e}$; $\vec{e}$-тортувчи куч бўйлаб йўналган бирлик вектор. c ни ўзгармас деб хисоблаймиз (кимёвий ёқилғи сарфлайдиган космик кемаларда нисбий тезлик c доимий).

Масса ўзгаришининг моҳиятига кўра, $\dfrac{dM}{dt} = -m < 0$ (нуқта массаси камаяди) ва m-масса сарфи чегараланган, $0 \le m \le \tilde{m}$. У ҳолда қуйидаги дифференциал тенгламага келамиз:

$$\begin{cases} \dot{\upsilon} = \dfrac{cm}{M}\vec{e} + \vec{g}, \\ \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \\ \dot{M} = -m. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Бу ерда $\vec{r}$-нуқта радиус вектори , $\vec{v}$-унинг тезлиги .

Қуйида берилган дастлабки холатдан якуний ҳолатга ўтганда олдиндан берилган маълум функционални минималлаштирувчи тортувчи кучнинг йўналиши ва қийматини топишга қаратилган (m ва $\vec{e}$) вариацион масалани кўриб чиқамиз.

Минималлаштирилувчи функционал сифатида одатда характеристик тезлик

$$\Im = c\ln\frac{M_0}{M}.$$

олинади.

Бу масала механик маъносига кўра, масса сарфини минималлаштириш масаласи билан бир хил кучга эга .

$$\Im = \int_0^t \frac{cm}{M}dt = -\int_0^t \frac{c}{M}\frac{dM}{dt}dt = -c\int_0^t \frac{dM}{M}dt = c\ln\frac{M_0}{M}.$$

Масаланинг қўйилишига кўра, тортиш кучининг йўналиши ва масса сарфи бошқарувчи параметрлар ролини бажаради. Бу ҳолда тортиш кучини йўналишини белгиловчи базис-вектор $\left|\vec{\lambda}\right| = 1, \vec{e} = \vec{\lambda}$ киритилади[1] [1] ва оптималликнинг зарурий шартидан оптимал траектория 3 та қисмдан иборат бўлиши келиб чиқади:

- Нол тортиш кучи қисми (НТ),
- Оралиқ тортиш кучи қисми (ОТ),
- Максимал тортиш кучи қисми (МТ).

Стационарлик ва Вейерштрасс шартларини қўллаган ҳолада, бизнинг оптимал бошқарув масаласи ўн тўртинчи тартибли ёпиқ Гамильтон системасини НТ, ОТ ва МТ оралиқларда интеграллаш масаласига келади [1]. Бунда Гамильтон функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i \dot{x}_i .$$

Бу ерда λ_i-Лагранж кўпайтувчилари.

$$\mathrm{H} = \vec{\lambda}\left(\frac{cm}{M}\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} + \vec{g}\right) + \vec{\lambda}_r\vec{v} - \lambda_7 m. \tag{1.1.3}$$

Бу ердаги қўшимча функция – m бошқарув параметрини фазавий ўзгарувчилар орқали киритишимиз мумкин [1]. Бунда $\vec{\lambda}, \vec{\lambda}_r, \lambda_7$ лар $\vec{v}, \vec{r}, \mathrm{M}$ ўзгарувчиларга мос кўпайтувчилар. Масаланинг дифференциал тенгламалар системаси Гамильтон системаси кўринишида ёзилади ва ушбу кўринишга эга

---

[1] Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation Butterworth, Washington, D.C. 2003

бўлади:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i},\ \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1,7}), \tag{1.1.4}$$

Чегараланган масса сарфи билан ҳаракат қилаётган нуқта (КА массалар маркази) ҳаракатини оптимал траекториясини топиш масаласини гравитацион майдонда жойлашган ўзаро бир-бири билан Ньютон қонунунига кўра тортишишаётган уч жисм масаласи сифатида кўриб чиқамиз. Бу масаладаги жисмларнинг массаларини мос равишда M_1, M_2 ва M деб оламиз. Бунда M_2 массали жисм M_1 массали жисм атрофида радиуси a га тенг айлана бўйлаб ҳаракат қилади деб қабул қиламиз. Биз кўраётган масалада $M(t)$ ўзгарувчан массали космик кема (КА) массаси биз қараётган қолган икки осмон жисмларининг массасидан анча кичик чеб қабул қиламиз. Чегараланган уч жисм масаласига кўра, жисмлардан бирoнтасининг массаси бошқа $M_1 > M_2 >> M$ иккитасиникига қараганда анча кичик бўлади. Демак кўрилаётган масала доиравий чегараланган уч жисм масаласига келди. Шартли равишда M_1 ва M_2 ларни Ер ва Ой деб атаймиз Уларнинг массалари бир-бирига нисбатан ўлчовдош ва M массали жисмнинг тортиш марказларига таъсирини йўқ деб қараймиз.

Юқорида келтирилган соддалаштириларни ҳисобга олган ҳолда, КА нинг (КА массалар марказининг) ҳаракатини иккита тортиш майдони таъсида кўриб чиқамиз. Бунинг учун геоцентрик ва инерциал x, y, z координаталар системаларини киритамиз. Бунда координаталар бошини ер марказида, XY текислик Ой орбитаси текислигида ётади. Нуқта ҳаракатини цилиндрик координаталар системасида қараймиз.

$$\left|\vec{r}_1\right| = a. \tag{1.2.1}$$

a Ой орбитаси радиуси. Ой орбитаси бизга маълум бўлиб, уни Ер атрофидаги бурчак тезлигини n га тенг деб оламиз. Бу ҳолда нуқтанинг координаталари учун :

$$\begin{cases} x_1 = a\cos nt, \\ y_1 = a\sin nt, \\ z_1 = 0. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

муносабат ўринли. Ойнинг тезлиги $v_{кр} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ ($\mu = f(M_1 + M_2)$)га тенг эканлигини ҳисобга олсак,

$$n^2 = \frac{\mu}{a^3} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{a^3} \tag{1.2.3}$$

Бунда $\mu_1 = f M_1,\ \mu_2 = f M_2$ мос равишда Ой ва Ернинг гравитацион доимийлари. Биз цилиндрик координаталарда қараётганимиз учун цилиндрик координата системасида

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

бўлади. Бу ерда $\alpha = nt - \varphi$.

Бизга маълумки, доиравий чегараланган уч жисм масаласининг дифференциал тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{d^2\tilde{\vec{r}}}{dt^2} = \frac{cm}{M}\vec{e} - \frac{\mu_1}{\tilde{r}^2}\frac{\tilde{\vec{r}}}{\tilde{r}} - \frac{\mu_2}{\rho^2}\frac{\left(\tilde{\vec{r}} - \vec{r}_1\right)}{\rho} - \frac{\mu_2}{a^2}\frac{\vec{r}_1}{a}.$$

Вектор кўринишдаги тенгламани цилиндрик координата системасида ёзиш учун кинематик катталикларга мурожат қиламиз. Нуқтанинг тезлик ва тезланишларини цилиндрик координата системасидаги проекциялари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} v_1 = \dot{r}, \\ v_2 = r\dot{\varphi}, \\ v_3 = \dot{z}. \end{cases} \qquad (1.2.5)$$

Тезланиши эса

$$\begin{cases} W_1 = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \dot{v}_1 - \dfrac{\dot{v}_2^2}{r}, \\ W_2 = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \dot{v}_2 + \dfrac{v_1 v_2}{r}, \\ W_3 = \ddot{z} = \dot{v}_3. \end{cases} \qquad (1.2.6)$$

кўринишга эга.

КА ва Ой радиус векторларини цилиндрик координаталар системасига проекциялаcак

$$\tilde{\vec{r}}(r;0;z); \quad \vec{r}_1(a\cos\alpha;\, a\sin\alpha;\, 0). \qquad (1.2.7)$$

Энди ҳаракат тенгламаларини цилиндрик координаталарга проекциялаcак

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{cm}{M}e_1 - \mu_1\dfrac{r}{\tilde{r}^3} + \mu_2\left(\dfrac{a\cos\alpha - r}{\rho^3} - \dfrac{\cos\alpha}{a^2}\right), \\ W_2 = \dfrac{cm}{M}e_2 + \mu_2\dfrac{a\sin\alpha}{\rho^3} - \mu_2\dfrac{\sin\alpha}{a^2}, \\ W_3 = \dfrac{cm}{M}e_3 - \mu_1\dfrac{z}{\tilde{r}^3} - \mu_2\dfrac{z}{\rho^3}. \end{cases} \qquad (1.2.8)$$

(1.2.5), (1.2.6) ва (1.2.8) ни ҳисобга олиб қуйидагиларни хосил қиламиз :

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = \dfrac{cm}{M}\lambda_1 - \dfrac{\mu_1 r}{\tilde{r}^3} - \dfrac{\mu_2}{\rho^3}(r - a\cos\alpha) - \dfrac{\mu_2}{a^2}\cos\alpha + \dfrac{v_2^2}{r}, \\ \dot{v}_2 = \dfrac{cm}{M}\lambda_2 + \dfrac{\mu_2}{\rho^3}a\sin\alpha - \dfrac{\mu_2}{a^2}\sin\alpha - \dfrac{v_1 v_2}{r}, \\ \dot{v}_3 = \dfrac{cm}{M}\lambda_3 - \dfrac{\mu_1 z}{\tilde{r}^3} - \dfrac{\mu_2 z}{\rho^3}. \end{cases} \qquad (1.2.9)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = v_1, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{v_2}{r}, \\ \dot{z} = v_3. \end{cases} \qquad (1.2.10)$$

Бу ерда $\lambda_i = e_i \quad (i = \overline{1,3})$. Бизнинг масала ОТ ораликда қаралялти. Ушбу холатда базис – вектор e_i катталиги

$$e_i = \frac{\lambda_i}{\lambda} = \lambda_i, (i = 1,2,3), \ \lambda = \left|\vec{\lambda}\right| = 1. \qquad (1.2.11)$$

$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Ўзгарувчи массали КА да масса ўзгариши

$$\frac{dM}{dt} = -m < 0 \ . \qquad (1.2.12)$$

яъни

$$\dot{M} = -m. \qquad (1.2.13)$$

Демак биз (1.2.9), (1.2.10) ва (1.2.13) тенгламаларга эга вариацион масалага келамиз[2] [2,4]. Агар юқоридаги тенгамаларни ва

$$\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{7} \lambda_i \dot{x}_i \ . \qquad (1.2.14)$$

ни ҳисобга олсак

$$H = \lambda_1\left(\frac{cm}{M}\lambda_1 - \frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2}{\rho^3}(r - a\cos\alpha) - \frac{\mu_2}{a^2}\cos\alpha + \frac{v_2^2}{r}\right) +$$
$$+\lambda_2\left(\frac{cm}{M}\lambda_2 + \frac{\mu_2}{\rho^3}a\sin\alpha - \frac{\mu_2}{a^2}\sin\alpha - \frac{v_1 v_2}{r}\right) + \lambda_3\left(\frac{cm}{M}\lambda_3 - \frac{\mu_1 z}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2 z}{\rho^3}\right) + \qquad (1.2.15)$$
$$+\lambda_4 v_1 + \lambda_5 \frac{v_2}{r} + \lambda_6 v_6 - \lambda_7 m.$$

Бизга маълумки, Гамильтон системасида $\dot{x}_i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \lambda_i}, \ \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1,7})$ бўлади. Энди $\dot{\lambda}_i$ ларни топсак

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \frac{v_2}{r} - \lambda_4, \qquad (1.2.16)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{1}{r}(\lambda_2 v_1 - 2\lambda_1 v_2 - \lambda_5), \qquad (1.2.17)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_6, \qquad (1.2.18)$$

$$\dot{\lambda}_4 = \lambda_1\left(\frac{\mu_1}{\tilde{r}^3} + \frac{\mu_2}{\rho^3} + \frac{v_2^2}{r^2} - \frac{3\mu_1 r^2}{\tilde{r}^5} - \frac{3\mu_2}{\rho^5}(r - a\cos\alpha)^2\right) +$$
$$+\lambda_2\left(\frac{3\mu_2 a}{\rho^5}\sin\alpha(r - a\cos\alpha) - \frac{v_1 v_2}{r^2}\right) - \lambda_3\left(\frac{3\mu_1 r z}{\tilde{r}^5} + \frac{3\mu_2 z}{\rho^5}(r - a\cos\alpha)\right) + \lambda_5 \frac{v_2}{r^2}, \qquad (1.2.19)$$

$$\dot{\lambda}_5 = \lambda_1 \mu_2 \sin\alpha\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{\rho^3} + \frac{3ar}{\rho^5}(r - a\cos\alpha)\right) +$$
$$+\lambda_2 \mu_2\left(\frac{a}{\rho^3}\cos\alpha - \frac{\cos\alpha}{a^2} - \frac{3a^2 r}{\rho^5}\sin^2\alpha\right) + \lambda_3 \cdot 3\mu_2 \frac{zar}{\rho^5}\sin\alpha, \qquad (1.2.20)$$

---

[2] 1. Азизов А.Г.,Коршунова Н.А. Вариационные задачи механики космического полета.- Ташкент, 1990.
2.Azizov A.G.,Korshunova N.A. On an analytical solution of optimum trajectory problem in a gravitational field // Celestial Mech.- 1986.- V.38. № 4.

$$\dot{\lambda}_6 = -3\lambda_1 z\left(\frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^5} + \frac{\mu_2}{\rho^5}(r - a\cos\alpha)\right) + \lambda_2 \frac{3\mu_2 az}{\rho^5}\sin\alpha + \\ + \lambda_3\left(\frac{\mu_1}{\tilde{r}^3} + \frac{\mu_2}{\rho^3} - \frac{3\mu_1 z^2}{\tilde{r}^5} - \frac{3\mu_2 z^2}{\rho^5}\right), \qquad (1.2.21)$$

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{c\dot{m}}{M^2}. \qquad (1.2.22)$$

(1.2.9), (1.2.10), (1.2.13) ва (1.2.16) - (1.2.22) тенгламалар системаси автоном бўлмаган системага киради. Бу холда бизда фақат 2 та интеграл бор[3] [2].

$$\lambda_7 M = c;\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \qquad (1.2.23)$$

Шунинг учун хусусий ечимни топиш масаласига келамиз. Хусусий ечимни топиш усулларидан бири Докшевич методи бўлиб интеграл тузилиши тахлили натижасида ушбу система учун янги хусусий ечимларни олишимиз мумкин [1].

1.2. Интеграллаш муаммоси.

Кўп сонли изланишларга қарамай нуқтанинг оптимал траекторияларини аниқлаш ва ҳаракатини бошқариш масаласи ҳозиргача марказий ньютон майдони учун ҳам бошқа майдонлар учун ҳам муаммо бўлиб келмоқда. Ҳозирги кунда ўзгарувчи ва ўзгармас тортишиш кучи қисмларида аналитик ечимларни аниқлаш, актив ва пассив қисмларни синтез қилиш, орбиталараро учиб ўтиш траекторияларини қуриш масалалари ечилмаган. Вариацион масалани квадратураларга келтиришдаги қийинчиликларни кўриб чиқайлик.

Гравитацион майдонларда нуқтанинг оптимал ҳаракати дифференциал тенгламаларини анатилик интеграллаш масалаларига кўплаб илмий ишлар бағишланган. Бу турдаги масалаларни ечиш учун аналитик механика усулларини қўллашга ҳаракат қилинган, масалан, каноник алмаштиришлар назарияси ва Гамильтона-Якоби назарияси, Нётер теоремаси, Леман-Филе ва Леви-Чивита усуллари ва бошқалар. Гравитацион майдонда космик аппаратни оптимал ҳаракати масаласини ечишда келинадиган дифференциал тенгламалар системасининг биринчи интегралларини аниқлашга бағишланган ишлар мавжуд.

Базис-вектор ва ўтиш функциясини киритишга асосланган Лоуден усули [1] актиф қисмларда аналитик ечимларни аниқлаш муаммосини нол, оралиқ ва максимал тортишиш кучи қисмлари учун 14-тартибли гамильтон системаларига келтириш ва шу ёпиқ системани интеграллаш масаласига олиб келиш имконини берди[4] [1]. Бундай ёндошув вариацион масалани ечишда гамильтон системалари учун яхши қўлланиладиган анатитик механика аппаратидан, ҳамда назарий механиканинг классик масалалари тенгламаларини интеграллаш соҳасидаги фундаментал натижалардан

[3] Азизов А.Г.,Коршунова Н.А. Вариационные задачи механики космического полета.- Ташкент, 1990.

[4] Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation Butterworth, Washington, D.C. 2003

фойдаланиш имконини беради.

Гамильтон системаси учун қуйидаги интеграллар мавжуд[5] [2]. Стационар майдон учун барча қисмларда $\sum \lambda_i \dot{x}_i = h$ интеграл мавжуд, бу ерда h ўзгармас сон учта қисм учун ҳам бир хил. Бу интеграл бутун траектори бўйлаб гамильтонианни сақланишига мос келади ва ушбу кўринишга келтирилади:

$$\vec{\lambda}\vec{g} + \vec{\lambda}_r \vec{\upsilon} + \beta m = h,$$

бу ерда β – ўтиш функцияси $\beta = \frac{c}{M}\lambda - \lambda_7$.

НТ ва ПТ қисмлар учун қуйидаги интегрални олиш мумкин:

$$\lambda_7 M = a_4,$$

бу ерда a_4 ўзгармас. [2]. Характеристик тезликни минималлаш масаласида a_4 чиқиш тезлиги c га тенг

$$\lambda_7 M = c.$$

Бунинг учну янги ўзгарувчи сифатида харатеристик тезлик микдорини киритамиз

$$V = \int_0^t \frac{cm}{M} dt = c \ln \frac{M_0}{M}.$$

Ушбу $\frac{d(\lambda_7 M)}{dV}$ ифодани кўриб чиқамиз, у (1.5) га кўра қуйидагига тенг

$$\frac{d}{dt} m\left(\frac{c}{M}\lambda - \lambda_7\right) = \frac{M}{c}\left(\frac{c\lambda}{M} - \lambda_7\right).$$

НТ қисмларида λ_7 ва M ўзгармас, ПТ қисмларида эса қавслардаги ифода нолга тенг.

ПТ қисмларида базис-вектор микдорини доимийлигини ифодаловчи интеграл ўринли [2]

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = a_5,$$

Марказий майдон учун ушбу вектор интеграл ўринли

$$\vec{\upsilon} \times \vec{\lambda} + \vec{r} \times \vec{\lambda}_r = \vec{a},$$

ўққа симметрик майдонлар учун эса шу интегралнинг фақатгина битта ташкил этувчиси ўринли бўлади

$$\lambda_5 = a.$$

Бу интеграл циклик интеграли бўлади ва гамильтон системаси тартибини икки бирликка пасайтириш имконини беради.

Шундай қилиб ПТ қисмларида фақат тўртта умумий интеграл мавжуд.

[5] Азизов А.Г.,Коршунова Н.А. Вариационные задачи механики космического полета.- Ташкент, 1990.

1.3. Хусусий ечимни аниқлаш усули.

Кўрилаётган 14-тартибли (1.2.9),(1.2.10), (1.2.13) ва (1.2.16)-(1.2.22) Гамильтон системаси учун оралиқ тортиш кучи қисмида фақат иккита

$$\lambda_7 M = c;\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

интеграл мавжуд. Шундай экан хусусий интеграллар ва хусусий ечимларни топишга ҳаракат қиламиз. Хусусий интегрални топишда Докшевич усулидан фойдаланамиз. Хусусий интегрални

$$F(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5) = const. \tag{1.3.1}$$

кўринишда қидирамиз. (1.2.9),(1.2.10),(1.2.13) ва (1.2.16)-(1.2.22) вариацион масала дифференциал тенгламаларига қарасак, F функциядан вақт бўйича тўла хосила 0 га тенг. F функцияни қаноатлантирувчи 1 тартибли хусусий хосилали, чизиқли бир жинсли тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{dF}{dt} \equiv 0, \tag{1.3.2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1}\dot{v}_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2}\dot{v}_2 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\dot{\lambda}_1 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}\dot{\lambda}_2 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\dot{\lambda}_4 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_5}\dot{\lambda}_5 \equiv 0, \tag{1.3.3}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial v_1}\left(\frac{cm}{M}\lambda_1 - \frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2 b}{\rho^3} - \frac{\mu_2}{a^2}\cos\alpha + \frac{v_2^2}{r}\right) + \\
+\frac{\partial F}{\partial v_2}\left(\frac{cm}{M}\lambda_2 + \frac{\mu_2}{\rho^3}a\sin\alpha - \frac{\mu_2}{a^2}\sin\alpha - \frac{v_1 v_2}{r}\right) + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\left(\lambda_2\frac{v_2}{r} - \lambda_4\right) + \\
+\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}\cdot\frac{1}{r}(\lambda_2 v_1 - 2\lambda_1 v_2 - \lambda_5) + \frac{\partial F}{\partial \lambda_4}[\lambda_1\left(\frac{\mu_1}{\tilde{r}^3} + \frac{\mu_2}{\rho^3} + \frac{v_2^2}{r^2} - \frac{3\mu_1 r^2}{\tilde{r}^5} - \frac{3\mu_2 b^2}{\rho^5}\right) + \\
+\lambda_2\left(\frac{3\mu_2 ab}{\rho^5}\sin\alpha - \frac{v_1 v_2}{r^2}\right) - 3\lambda_3 z\left(\frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^5} + \frac{\mu_2 b}{\rho^5}\right) + \lambda_5\frac{v_2}{r^2}] + \\
+\frac{\partial F}{\partial \lambda_5}[\lambda_1\mu_2\sin\alpha\left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{\rho^3} + \frac{3arb}{\rho^5}\right) + \lambda_2\mu_2\left(\frac{a}{\rho^3}\cos\alpha - \frac{\cos\alpha}{a^2} - \frac{3a^2 r}{\rho^5}\sin^2\alpha\right) + \\
+\lambda_3\cdot 3\mu_2 z\frac{ar}{\rho^5}\sin\alpha] \equiv 0.
\end{gathered} \tag{1.3.4}$$

$b = r - a\cos\alpha$.

Бу ерда (1.3.1) интегралга кирмайдиган ўзгарувчиларни коэффицентлари 0 га тенг бўлиши керак. (1.3.4) дан кўринадики $v_3, \lambda_6, \lambda_7$ лар юқоридаги интегралда қатнашмайди. $r, \varphi, z, M, \lambda_3$ ларни ўз ичига олувчи $\frac{cm}{M}; \lambda_3; \frac{1}{\tilde{r}^3}; \frac{1}{\rho^3}; \frac{1}{\rho^5}; \frac{1}{r}$ ифодаларни коэффицентларини 0 га тенглаймиз.

$$\frac{\partial F}{\partial v_1}\lambda_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2}\lambda_2 = 0, \tag{1.3.5}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\left(\frac{\mu_1 z r}{\tilde{r}^5} + \frac{\mu_2 z b}{\rho^5}\right) + \frac{\partial F}{\partial \lambda_5}\frac{\mu_2 z ar}{\rho^5}\sin\alpha = 0, \tag{1.3.6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1}r - \frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\lambda_1 = 0, \tag{1.3.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1}b-\frac{\partial F}{\partial v_2}a\sin\alpha-\frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\lambda_1+\frac{\partial F}{\partial \lambda_5}\left(\lambda_1 a\sin\alpha-\lambda_2 a\cos\alpha\right)=0, \quad (1.3.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\left(\lambda_1 b^2-\lambda_2 ab\sin\alpha\right)-\frac{\partial F}{\partial \lambda_5}\left(\lambda_1 arb\sin\alpha-\lambda_2 a^2 r\sin^2\alpha\right)=0, \quad (1.3.9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1}v_2^2-\frac{\partial F}{\partial v_2}v_1v_2+\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\lambda_2 v_2+\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}\left(\lambda_2 v_1-2\lambda_1 v_2-\lambda_5\right)=0 \ . \quad (1.3.10)$$

Қолган хадларни ҳам 0 га тенглаймиз.

$$\frac{\partial F}{\partial v_1}\frac{\mu_2}{a^2}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial v_2}\frac{\mu_2}{a^2}\sin\alpha+\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\lambda_4-$$
$$-\frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\left(\lambda_1\frac{v_2^2}{r^2}-\lambda_1\frac{3\mu_1 r^2}{\tilde r^5}-\lambda_2\frac{v_1v_2}{r^2}+\lambda_5\frac{v_2}{r^2}\right)+\frac{\partial F}{\partial \lambda_5}\frac{\mu_2}{a^2}\left(\lambda_1\sin\alpha-\lambda_2\cos\alpha\right)=0. \quad (1.3.11)$$

(1.3.6) тенгламага этибор қаратсак, бунда иккита холат бўлиши мумкин:

1. $z=0$,
2. $z\neq 0;\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\left(\frac{\mu_1 r}{\tilde r^5}+\frac{\mu_2 b}{\rho^5}\right)+\frac{\partial F}{\partial \lambda_5}\frac{\mu_2 ar}{\rho^5}\sin\alpha=0$.

1-холатда КА ой орбитаси текислигида ҳаракат қилади. 2-холатда эса КА ой орбитаси текислигида ҳаракат қилмайди. Биз

$$z=0. \quad (1.3.12)$$

деб олиб КА ой орбитаси текислигида ҳаракат қилсин дейлик. Мос равишда

$$v_3=0,\ \lambda_3=0. \quad (1.3.13)$$

бўлади. Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$\begin{aligned}
A&=\lambda_2 v_1-2\lambda_1 v_2-\lambda_5,\\
B&=\lambda_1\frac{3\mu_1 r^2}{\tilde r^5}-\lambda_1\frac{v_2^2}{r^2}+\lambda_2\frac{v_1v_2}{r^2}-\lambda_5\frac{v_2}{r^2},\\
C&=\lambda_1 b-\lambda_2 a\sin\alpha,\\
D&=\lambda_1\sin\alpha-\lambda_2\cos\alpha.
\end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Энди Докшевич усулини қўллаш учун $X_i(F)$ операторларни киритамиз. У холда (1.3.5),(1.3.7)-(1.3.11) тенгламалар (1.3.14) ни хисобга олиб, қуйидаги кўринишга келади

$$\begin{aligned}
X_1&=\frac{\partial F}{\partial v_1}\lambda_1+\frac{\partial F}{\partial v_2}\lambda_2=0,\\
X_2&=\frac{\partial F}{\partial v_1}r-\frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\lambda_1=0,\\
X_3&=-\frac{\partial F}{\partial v_1}b+\frac{\partial F}{\partial v_2}a\sin\alpha+\frac{\partial F}{\partial \lambda_4}\lambda_1-\frac{\partial F}{\partial \lambda_5}aD=0,\\
X_4&=-\frac{\partial F}{\partial \lambda_4}Cb+\frac{\partial F}{\partial \lambda_5}Car\sin\alpha=0,\\
X_5&=\frac{\partial F}{\partial v_1}v_2^2-\frac{\partial F}{\partial v_2}v_1v_2+\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\lambda_2 v_2+\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}A=0,
\end{aligned} \quad (1.3.15)$$

$$X_6=\frac{\partial F}{\partial v_1}\frac{\mu_2}{a^2}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial v_2}\frac{\mu_2}{a^2}\sin\alpha+\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}\lambda_4+\frac{\partial F}{\partial \lambda_4}B-\frac{\partial F}{\partial \lambda_5}\frac{\mu_2}{a^2}D=0.$$

$X_i(F)$=0 операторлар сони (1.3.1) интегралдаги ўзгарувчилар сонига тенг бўлди. (1.3.15) система детерминанти 0 га тенг бўлиши керак.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ -b & a\sin\alpha & 0 & 0 & \lambda_1 & -aD \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Cb & Car\sin\alpha \\ v_2^2 & -v_1v_2 & \lambda_2v_2 & A & 0 & 0 \\ \frac{\mu_2}{a^2}\cos\alpha & \frac{\mu_2}{a^2}\sin\alpha & \lambda_4 & 0 & B & -\frac{\mu_2}{a^2}D \end{vmatrix}=0$$

Ушбу детерминантни соддалаштирамиз, $ra\neq 0$ эканлигини эътиборга олсак

$$\lambda_4AC\left(\lambda_1\lambda_2r\sin\alpha-\lambda_1^2a\sin^2\alpha-\lambda_2bD-\lambda_1\lambda_2b\sin\alpha\right)=0.$$

b, A, C, D ифодаларни ўз ўрнига қўйиб қуйидагига келамиз.

$$\begin{gathered}\lambda_4(2\lambda_1v_2-\lambda_2v_1+\lambda_5)(\lambda_1r-\lambda_1a\cos\alpha-\lambda_2a\sin\alpha)(\lambda_2\cos\alpha- \\ -\lambda_1\sin\alpha)(\lambda_1a\sin\alpha-\lambda_2a\cos\alpha+\lambda_2r)=0.\end{gathered} \tag{1.3.16}$$

Ҳар бир қавс ичидаги ифодани 0 га тенглаб, [8] да келтирилган ечимлардан бошқа хусусий ечимларни берувчи инвариант муносабатларни олишимиз мумкин[6].

[6] Зиядинова Э.Д., Коршунова Н.А. Методы определения аналитических решений для активных участков в поле двух неподвижных центров// Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды X Международной Четаевской конференции, том 1, Секция 1. Аналитическая механика.- Казань, 2012, С. 192-200

Назорат саволлари:

1. Нуқтани гравитацион майдондаги фазовий ҳаракати ҳақидаги вариацион масалада дифференциал тенгламалар системасининг тартиби нечага тенг?
2. Импульсли тортишиш ҳолида масса сарфи нимага тенг?
3. Нол тортишиш кучи майдонида ўтиш функцияси нимага тенг?
4. Оптимал траекториянинг актив қисмларида тортишиш кучи қандай йўналган?
5. Марказий ньютон майдонининг потенциали нимага тенг?
6. Энергия интеграли Гамильтон системаси тартибини нечтага пасайтиради?
7. Иккита циклик интеграллар Гамильтон системаси тартибини нечтага пасайтиради?
8. Оралиқ тортишиш кучи қисмида ўтиш функцияси нима тенг?
9. Қандай интеграллар инволюцияда бўлади?
10. Инвариант муносабатлар нима? Улар интеграллардан нима билан фарқ қилади?
11. Инволюцияда бўлган интеграллар система тартибини нечтага пасайтиради?

Адабиётлар:

1. Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation Butterworth, Washington, D.C. 2003
2. Natalya.A.Korshunova and Dilmurat.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics» (AIAA), USA, 2014. V.37, №5, pp. 1716-1719.
3. Коршунова Н.А., Зиядинова Э.Д. Применение метода Докшевича при оптимизации траекторий в поле двух неподвижных центров // Узбекский журнал «Проблемы механики» ».- 2012, № 3.- С.3-6.
4. Зиядинова Э.Д., Коршунова Н.А. Методы определения аналитических решений для активных участков в поле двух неподвижных центров// Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды X Международной Четаевской конференции, том 1, Секция 1. Аналитическая механика.- Казань, 2012, С. 192-200

2-мавзу: МЕХАНИКА СИСТЕМА УСТУВОРЛИГИ ВА БОШҚАРИЛИШИ, ҲАРАКАТНИНГ БАРҚАРОРЛАШТИРИШНИ ТАДҚИҚ ЭТИШ.

РЕЖА:

2.1.Биринчи яқинлашиш бўйича устуворлик ва бошқариш.

2.2. Оғдирилмаган ҳаракатни стабиллаш.

Таянч иборалар: *бошқарувчи функциялар, оғдирилган ҳаракат тенгламалари, Ляпунов бўйича устуворлик, асимптотик устуворлик, Гурвиц критерийси, бошқарувчанлик критерийси, ҳаракатни стабиллаш, чизиқли регулятор.*

2.1. Биринчи яқинлашиш бўйича устуворлик ва бошқариш.

Нуқтанинг бошланғич ҳолати фақатгина қандайдир хатолик билан амалга оширилиши мумкин, бу хатолик вақт ўтиши билан ортиши ёки камайиши мумкин. Шунинг учун вариацион масаланинг олинган ечимларини турғунликка текшириш зарур.

Нуқтанинг оғдирилмаган ҳаракат дифференциал тенгламаларини ушбу кўринишда ёзамиз:

$$\begin{cases} \dot{\upsilon}_1 = fe_1 - \left(\dfrac{\mu_1 r}{r_1^3} + \dfrac{\mu_2 r}{r_2^3}\right) + \dfrac{\upsilon_2^2}{r}; \\ \dot{\upsilon}_2 = fe_2 - \dfrac{\upsilon_1 \upsilon_2}{r}; \\ \dot{\upsilon}_3 = \pm f\sqrt{1 - e_1^2 - e_2^2} - \dfrac{\mu_1 z}{r_1^3} + \dfrac{\mu_2 (d - z)}{r_2^3}; \\ \dot{r} = \upsilon_1; \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\upsilon_2}{r}; \\ \dot{z} = \upsilon_3. \end{cases} \tag{1}$$

бу ерда $e_1 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}$, $e_2 = \dfrac{\lambda_2}{\lambda}$, $e_3 = \sqrt{1 - e_1^2 - e_2^2}$; $f = \dfrac{cm}{M}$ - реактив тезланиш.

Биринчи машғулотда олинган хусусий ҳолдаги ечимни турғунликка текширамиз.

$$\upsilon_1 = 0;$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_{20} = \sqrt{Dr^2 + \frac{A}{3F}\left(kD - \frac{\mu_2}{r_2^3}\right)};$$

$$\upsilon_3 = 0;$$

$$r = r_0;$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm \beta t, \text{ бу ерда } \quad \beta = \frac{\upsilon_{20}}{r_0};$$

$$z = z_0 = kd;$$

$$\lambda_1 = \lambda_{10} = \frac{\frac{\mu_1}{r_1^3} - \frac{\mu_2}{r_2^3} + A - D}{\sqrt{\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} - \frac{\mu_2}{r_2^3} + A - D\right)^2 + 9r^2 d^2 F^2}};$$

$$\lambda_2 = 0;$$

$$\lambda_3 = \sqrt{1 - \lambda_{10}^2} = \lambda_{30};$$

$$\lambda_4 = \lambda_{40}; \quad \lambda_5 = \lambda_{50} = -2\lambda_{10}\upsilon_{20}; \;\; \lambda_6 = 0; \;\; \lambda_7 = \frac{c}{M}.$$

Кўрилаётган хусусий ечимлар синфига мос келувчи оғдирилмаган ҳаракат сифатида қуйидаги тенгламаларни оламиз:

$$\begin{cases} \upsilon_1^* = 0; \\ \upsilon_2^* = \upsilon_{20}; \\ \upsilon_3^* = 0; \\ r^* = r_0; \\ \varphi^* = \varphi_0 + \beta t; \\ z^* = z_0. \end{cases} \tag{2}$$

Бошқаришлар сифатида ушбу функцияларни оламиз

$$\begin{cases} e_1^* = \lambda_{10}; \\ e_2^* = 0; \\ e_3^* = \sqrt{1 - \lambda_{10}^2}; \\ f^* = \dfrac{cm^*}{M^*} = -\dfrac{N^*}{\lambda_{10}} > 0. \end{cases} \tag{3}$$

бу ерда $f^* = f_0 = -\dfrac{N_0}{\lambda_{10}} = -\dfrac{d}{\lambda_{30}}\left(\dfrac{\mu_2}{r_2^3} - kD\right);\;\; m^* = -M^* \dfrac{N^*}{c\lambda_1^*}$.

Оғдирилган ҳаракат ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\begin{cases} \upsilon_1 = x_1; \\ \upsilon_2 = \upsilon_{20} + x_2; \\ \upsilon_3 = x_3; \\ r = r_0 + x_4; \\ \varphi = \varphi_0 + \beta t + x_5; \\ z = z_0 + x_6. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} e_1 = \lambda_{10} + u_1; \\ e_2 = u_2; \\ f = f_0 + u_3. \end{cases}$$

бу ерда $x_i\left(i = \overline{1,6}\right)$ – кичик қўзғалишлари, $u_i\left(i = \overline{1,3}\right)$, оғдирилган ҳаракатни сўндириш ва ҳақиқий ҳаракатни дастурий ҳаракатга яқинлаштириш учун қўйилган қўшимча бошқарувлар.

Оғдирилган ҳаракат тенгламасини тузамиз

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (f_0 + u_3)(\lambda_{10} + u_1) - \dfrac{\mu_1(r_0 + x_4)}{\left[(r_0 + x_4)^2 + (z_0 + x_6)^2\right]^{3/2}} - \dfrac{\mu_2(r_0 + x_4)}{\left[(d - z_0 - x_6)^2 + (r_0 + x_4)^2\right]^{3/2}} + \\ \quad + \dfrac{(\upsilon_{20} + x_2)^2}{r_0 + x_4}; \\ \dot{x}_2 = (f_0 + u_3)u_2 - \dfrac{x_1(\upsilon_{20} + x_2)}{r_0 + x_4}; \\ \dot{x}_3 = (f_0 + u_3)\sqrt{1 - (\lambda_{10} + u_1)^2 - u_2^2} - \dfrac{\mu_1(z_0 + x_6)}{\left[(r_0 + x_4)^2 + (z_0 + x_6)^2\right]^{3/2}} + \\ \quad + \dfrac{\mu_2(d - z_0 - x_6)}{\left[(d - z_0 - x_6)^2 + (r_0 + x_4)^2\right]^{3/2}}; \\ \dot{x}_4 = x_1; \\ \dot{x}_5 + \beta = \dfrac{\upsilon_{20} + x_2}{r_0 + x_4}; \\ \dot{x}_6 = x_3. \end{cases} \tag{6}$$

Стационар ҳаракатни амалга ошириш шартларини топамиз

$$\begin{cases} 0 = f^* e_1^* - \dfrac{\mu_1 r^*}{\left(r^{*2} + z^{*2}\right)^{3/2}} - \dfrac{\mu_2 r^*}{\left(r^{*2} + (d - z^*)^2\right)^{3/2}} + \dfrac{\upsilon_2^{*2}}{r^*}; \\ 0 = 0; \\ 0 = f^* e_3^* - \dfrac{\mu_1 z^*}{\left(r^{*2} + z^{*2}\right)^{3/2}} + \dfrac{\mu_2 (d - z^*)}{\left(r^{*2} + (d - z^*)^2\right)^{3/2}}; \\ 0 = 0; \\ \beta = \dfrac{\upsilon_2^*}{r^*}; \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Биринчи яқинлашиш бўйича тенгламаларни ажратиб оламиз. (6) тенгламаларнинг ўнг тарафларини қаторга ёямиз:

$$\dot{x}_i = F(0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)_0 x_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)_0 x_3 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_4}\right)_0 x_4 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_5}\right)_0 x_5 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_6}\right)_0 x_6 +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right)_0 u_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)_0 u_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_3}\right)_0 u_3 + \ldots$$

Биринчи яқинлашиш бўйича тенгламаларни оламиз:

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = \dfrac{2\upsilon_{20}}{r_0}x_2 + \left[3r_0^2\left(\dfrac{\mu_1}{r_{10}^5}+\dfrac{\mu_2}{r_{20}^5}\right) - D - \dfrac{\upsilon_{20}^2}{r_0^2}\right]x_4 + 3r_0 dFx_6 + f_0u_1 + \lambda_{10}u_3; \\
\dot{x}_2 = -\dfrac{\upsilon_{20}}{r_0}x_1 + f_0u_2; \\
\dot{x}_3 = 3dr_0Fx_4 + Ax_6 + \dfrac{f_0\lambda_{10}}{\sqrt{1-\lambda_{10}^2}}u_1 + u_3\sqrt{1-\lambda_{10}^2}; \\
\dot{x}_4 = x_1; \\
\dot{x}_5 = \dfrac{x_2}{r_0} - \dfrac{\upsilon_{20}}{r_0^2}x_4; \\
\dot{x}_6 = x_3.
\end{cases}
\tag{7}
$$

$$
\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + B\vec{u} + \vec{g}(x,u), \tag{8}
$$

бу ерда

$$
\vec{x} = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Vmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Vmatrix},
$$

$\vec{g}(x,u)$– x,u га нисбатан биринчидан юқори тартибли ҳадлар.

$u = 0$ бўлганда оғдирилмаган ҳаракатни Лапунов бўйича устуворликка текшириш масаласига эга бўламиз $\left(x_i = 0, i = \overline{1,6}\right)$:

$$
\dot{\vec{x}} = W\vec{x} + g(x).
$$

Биринчи яқинлашиш бўйича тузилган системанинг характеристик тенгламасини тузамиз

$$
|W - SE| = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix}
-S & 2\beta & 0 & R & 0 & 3dr_0F \\
-\beta & -S & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -S & 3dr_0F & 0 & A \\
1 & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{1}{r_0} & 0 & -\dfrac{\beta}{r_0} & -S & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -S
\end{vmatrix} = 0,
$$

$$
S^2\left(S^4 + S^2\left(2\beta^2 - R - A\right) + \left(RA - 9F^2d^2r_0^2 - 2\beta^2 A\right)\right) = 0 \tag{9}
$$

(9) тенглама иккита нол илдизга эга. Шундай экан, агар илдизлардан хеч бўлмаганда биттаси ҳақиқий мусбат қисмга эга бўлса, у ҳолда Ляпуновнинг биринчи яқинлашиш бўйича турғунлик ҳақидаги теоремасига кўра оғдирилмаган ҳаракат нотурғун бўлади. Бунинг учун характеристик тенгламадаги S^2 ни олдидаги ҳад манфий бўлиши етарли:

$$\cdot\left(3r^2\left(\frac{\mu_1}{r_1^5}+\frac{\mu_2}{r_2^5}\right)-\frac{\mu_1}{r_1^3}-\frac{\mu_2}{r_2^3}-3\beta^2\right)-9d^2r^2\left(\frac{\mu_1}{r_1^5}k-\frac{\mu_2}{r_2^5}(1-k)\right)^2<0 \tag{10}$$

(10) тенгсизликда бешта (μ_1,μ_2,d,k,r_0) ўзгармас қатнашганлиги сабабли, уни тадқиқ қилиш аналитик нуқтаи назардан мураккаб. Шунинг учун аниқ параметрлар берилиб, MAPLE11 математик пакети ёрдамида графиклар олинди. Ноустуворлик соҳаси график аниқланди.

μ_1,μ_2,d,k,r_0 ларни бериб, χ функцияни марказлар чизиғигача бўлган r_0 масофага боғлиқлиги графиги олинди. Тортишиш марказлари орасидаги масофа шартли равишда сайёраларни бир-бирига энг яқин бўлган ҳолатида олинади. Ординаталар ўқида χ функциянинг қийматлари, абсциссалар ўқида эса - r_0 нинг қийматлари берилган. Графикларда ҳар бир чизиқ $k=\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$ нинг аниқ қийматига мос келади ва ўзининг рангига эга: k=1/2 га қора, k=3/5 га кўк, k=2/3 га сариқ, k=3/4 га ҳаворанг, k=4/5 га яшил, k=5/6 га қизил ранг мос келади.

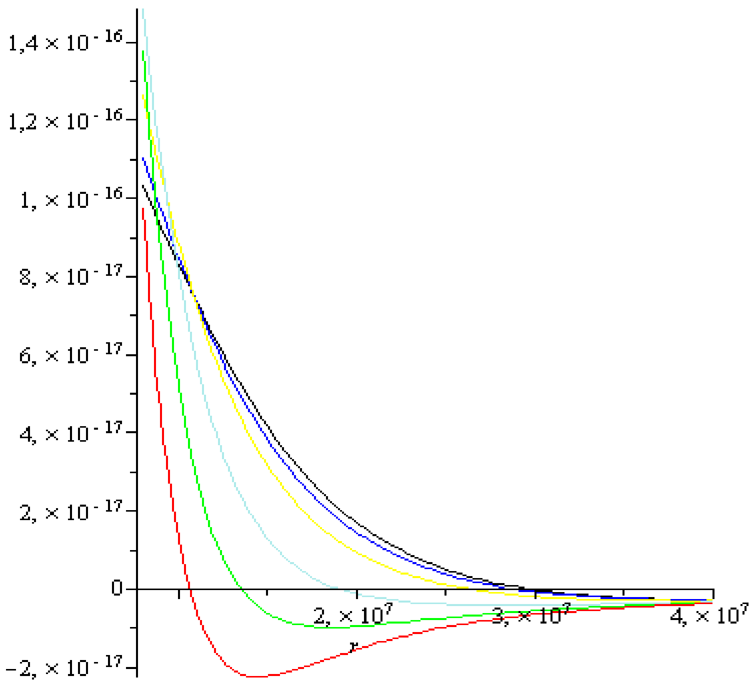
Мисол учун қуйидаги ҳолларни кўриб чиқамиз:

1) **Ер-Ой**

$\mu_1=\mu_з=398*10^3 км^3/c^2$;

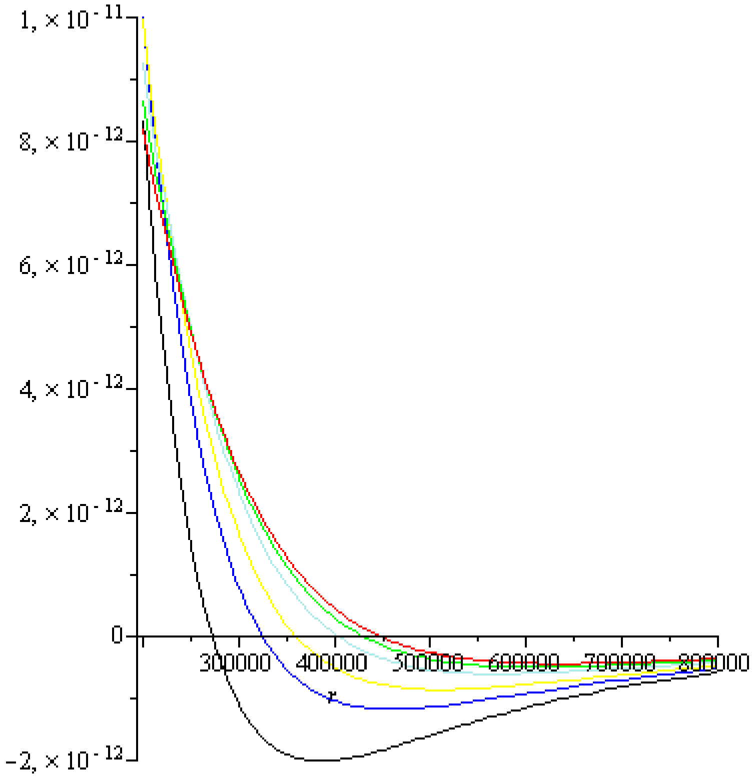
$\mu_2=\mu_л=4{,}9*10^3 км^3/c^2$;

$d=384400 км$.



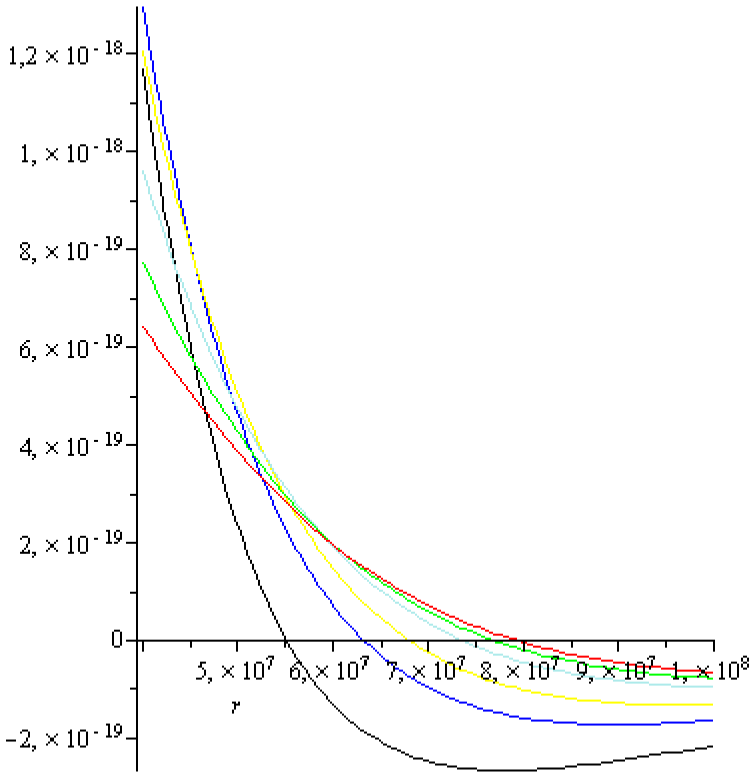
2) **Ер– Венера**

$\mu_1 = \mu_з = 398*10^3 км^3/с^2$;
$\mu_2 = \mu_в = 326*10^3 км^3/с^2$;
$d = 42*10^6 км$.



3) **Ер – Марс**

$\mu_1 = \mu_з = 398*10^3 км^3/с^2$;
$\mu_2 = \mu_м = 42.8*10^3 км^3/с^2$;
$d = 78*10^6 км$.



Графиклардан кўринадики, k ни камайишида, яъни марказдан кичик μ_2 параметр билан узоқлашганда, ноустуворлик бошланадиган марказлар чизиғигача бўлган масофа камаяди (ноустуворлик соҳаси камаяди). Бу масофанинг минимал қиймати ($k = \frac{1}{2}$ да) барча ҳолларда d нинг тахминан 70% ни ташкил қилади ва μ га боғлиқ эмас. Ноустуворлик соҳасида (9) тенгламанинг озод хади манфий қийматга эга ва характеристик тенглама хеч бўлмаганда битта мусбат ҳақиқий қисмга эга бўлган ечимга эга. Шундай экан, оғдирилмаган ҳаракат биринчи яқинлашиш бўйича нотурғун экан.

2.2. Оғдирилмаган ҳаракатни стабиллаш.

(2) оғдирилмаган ҳаракатни стабиллаш ҳақидаги масала юзага келади, яъни шундай $u(t,x)$ регуляторни танлаш керакки, уни (8) ифодага қўйилганда оғдирилмаган ҳаракат Ляпунов бўйича асимптотик турғун бўлсин. Авваламбор, (8) система бошқарилувчан бўлишини текшириш лозим. Биринчи яқинлашиш бўйича қуйидаги бошқарилувчанлик ва стабиллаш критерийси мавжуд:

1) $\frac{d\bar{x}}{dt} = W\bar{x} + B\bar{u}$ система тўлиқ бошқарилувчан бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар $V = \left\| B, WB, \ldots W^{n-1}B \right\|$ йўл билан аниқланган матрицанинг ранги n га тенг бўлса, бу ерда n - системанинг тартиби, бизнинг ҳолда $n = 6$.

2) Агар V матрицанинг ранги n га тенг бўлса, у ҳолда қуйидаги чизиқли регулятор мавжуд

$$\vec{u} = P\vec{x}.$$

V матрицанинг ранги 6 га тенг. Шундай экан (2) оғдирилмаган ҳаракат $\vec{u} = P\vec{x}$ чизиқли регулятор билан, (8) даги чизиқсиз $\vec{g}(x,u)$ ҳадларга боғлиқ бўлмаган ҳолда стабиллаштирилади. Стабиллаш ҳақидаги масала чизиқли яқинлашиш билан ечилади.

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (W + BP)\vec{x}$$

P доимий ҳақиқий матрица шундай бўлиши керакки,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (W + BP)\vec{x} + \vec{g}(x,u)$$

системанинг оғдирилмаган ҳаракати асимптотик устувор бўлиши лозим, яъни $W + BP$ матрицанинг барча хос қийматларининг ҳақиқий қисмлари манфий бўлиши керак. Бу шартни, масалан

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 & p_{24} & p_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

матрица қаноатлантиради, яъни $u_1 = 0$, $u_3 = 0$.

Биринчи яқинлашишнинг характеристик тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\left| W + BP - SE \right| = 0$$

ёки

$$\begin{vmatrix} -S & 2\beta & 0 & R & 0 & 3dr_0F \\ -\beta & -S+f_0p_{22} & 0 & f_0p_{24} & f_0p_{25} & 0 \\ 0 & 0 & -S & 3dr_0F & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 & -S & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r_0} & 0 & -\dfrac{\beta}{r_0} & -S & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -S \end{vmatrix} = 0 . \qquad (12)$$

Қуйидагига эга бўламиз

$$S^6 - S^5 f_0p_{22} + S^4\left(2\beta^2 - \frac{f_0p_{25}}{r_0} - R - A\right) + S^3\left(f_0p_{22}(A-R) + 2\beta f_0p_{24}\right) +$$
$$+ S^2\left(\frac{f_0p_{25}(2\beta^2 + R + A)}{r_0} - 9d^2r_0^2F^2 + R - 2\beta^2A\right) +$$
$$+ S\left(\left(9d^2r_0^2F^2 - A\right)f_0p_{22} + 2\beta f_0p_{24}\right) + \left(9d^2r_0F^2 - \frac{A(R-2\beta^2)}{r_0}\right)f_0p_{25} = 0$$

(12) характеристик тенглама ушбу кўринишга келтирилди

$$b_0S^6 + b_1S^5 + b_2S^4 + b_3S^3 + b_4S^2 + b_5S^1 + b_6S^0 = 0 \qquad (13)$$

P матрица имкон қадар содда кўринишда танланди. Агар, масалан $u_1 = 0$ дан ташқари $u_2 = 0$ ($u_3 \neq 0$ да) дейилса, у ҳолда (13) характеристик тенгламанинг озод ҳади нолга айланади ва шу тенгламанинг битта ечими нолга тенг бўлади.

$b_i, \left(i = \overline{0,6}\right)$ коэффициентлардан Гурвиц матрицасини қурамиз

$$\begin{Vmatrix} b_1 & b_3 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 & b_5 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_2 & b_4 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_2 & b_4 & b_6 \end{Vmatrix} . \qquad (14)$$

Назорат саволлари:

1. Оғдирилган ҳаракат тенгламалари қандай тузилади?
2. Ляпунов бўйича турғунликнинг моҳияти нимада?
3. Агар биринчи яқинлашиш бўйича система характеристик тенгламасининг хеч бўлмаганда битта мусбат ҳақиқий илдизи мавжуд бўлса, оғдирлмаган ҳаракат қандай бўлади?
4. Биринчи яқинлашиш бўйича бошқариш критерийси нимадан иборат?

Адабиётлар:

1. Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013
2. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X.

3- мавзу: НОИДЕАЛ ШАРТЛИ БОҒЛАНИШЛИ БОШҚАРИЛУВЧИ МЕХАНИК СИСТЕМАЛАР ДИНАМИКАСИ.

РЕЖА:

3.1.Шартли боғланишлар
3.2.Ноидеал шартли боғланишли ситема ҳаракат тенгламалари
3.3.Боғланишларга нисбатан бўшатилган система

Таянч иборалар:*ноидеал боғланишлар, шартли боғланишлар, вариация, стабиллаш*

3.1.Шартли боғланишлар.

Одатда механик система нуқталарига қўйилган боғланишлар пассив кучлар ёрдамида амалга оширилади ва бу боғланишлар трос, стержен, сирт, ҳар-хил шарнирлар кўринишида бўлади. Боғланишлар остидаги системаларни бошқариш масаласи эса кўпгина ҳолларда ташқи актив кучлар ёрдамида амалга оширилада. Аммо шундай системалар мавжудки, бу системаларда боғланишлар махсус йўллар билан амалга оширилади ёки бошқача қилиб айтганда, реакция кучлари ёрдамида системада маълум ҳаракатлар амалга оширилади. Адабиётларга эътибор берадиган бўлсак, бошқарилувчи системалар назариясида асосан экстремал траекторияларни аниқлаш мухим ўрин тутада. Қуйида классик механикага тегишли ноидеал боғланишли системалар назариясига асосланган ҳолда шартли боғланишларнинг реакция кучлари ёрдамида механик системаларда асимптотик турғун ҳаракатни амалга ошириш масаласини кўриб чиқамиз. Бунда бошқариш параметрлари сифатида реакция кучлари қатнашади. Бундай масала биринчи бўлиб француз механиги А.Беген томонидан Сперри гироскопларини ўрганишда кўриб чиқилган. Масала моҳиятига кўра, асоси ҳаракатланадиган гироскопик ускуна ўзининг ишлатилиш мақсадидан оғишини бартараф қилишдан иборат. Бу масалани ҳал қилишда А.Беген системага қушимча, яъни оғишларни нолга тенг бўлиш шартини қўйган ва бошқариш параметрлари сифатида реакция кучларини олган. Хозирда ишлаб чиқилган бошқарилувчи механик системалар назариясига эътибор берадиган бўлсак, шартли боғланишлар механик система учун инвариант муносабатлар сифатида қаралади, яъни вақтнинг бошланғич вақтида ўринли бўлган муносабат бутун ҳаракат давомида бажарилиши талаб қилинади. Биринчи навбатда ноидеал боғланишларга тегишли П.Пенлеве томонидан ишлаб чиқилган асосий натижалар устида тўхталамиз.

Маълумки, А. Беген томонидан ишлаб чиқилган назарияга кўра системага қўйилган биринчи тур боғланишлар орасида, иккинчи тур боғланиш реакция кучларининг бажарган ишлари нолга тенг бўладиган кўчишлар мавжуд, яъни иккинчи тур боғланишлар идеал боғланишлардан иборат. Бунга кўра, бундай системалар учун Даламбера – Лагранжа принципи барча мумкин бўлган кўчишлар учун ўринли эмас. Ўз ўзидан туғиладиган савол, бу ноидеал боғланишли системаларга тегишли натижалар шартли боғланишли системалар учун ҳам ўринлими. Агар бизга n моддий нуқтадан иборат S механик система берилган бўлса, системага қўйилган боғланишлар идеал дейилади, агар система нектаталарининг мумкин бўлган кўчишларидаги реакция кучларининг бажарган ишларини йиғиндиси нолга тенг бўлса. Агар виртуал кўчишлардаги бажарилган иш нолга тенг бўлмаси, $\bar{R}$ реакция кучини доимо иккита ташкил этувчига ажратса бўлади. Бунда $\bar{R}_1$ – реакция кучининг ташкил этувчиси бўлиб, ишқаланиш йўқ бўлган ҳалдагиси ва $\bar{R}-\bar{R}_1=\bar{\rho}$ ишқаланиш кучи. Системага таъсир қилаётган реакция кучларининг ташкил этувчилари қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

1. Система нуқталарининг ҳар қандай виртуал кўчишларида.

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} R_{\gamma}^{n}\,\delta x_{\gamma}=0$$

2. $\vec{\rho}\delta t$ векторлар системанинг мумкин бўлган кўчишлари тўпламида ётади ва

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} R^{\tau}{}_{\gamma}\delta\, x_{\gamma}=\tau\neq 0$$

Бошқача қилиб айтганда, боғланиш реакция кучн $\bar{R}$ни доимо иккита $\bar{\rho}$ ва $\bar{R}_1$ ташкил этувчилрга ажратиш мумкинки, бунда $\bar{\rho}$ ишқаланиш кучи ва $\bar{R}_1$ ташкил этувчи эса боғланиш кучидан иборат. [1](21-25)[7], [2](12-16)[8],[6][9]

3.2.Ноидеал шартли боғланишли ситема ҳаракат тенгламалари.

Қуйида шартли боғланишларни ноидеаллиги ва бўшатилиши ҳисобга олинган ҳолда динамик системаларнинг ҳаракатини кўриб чиқамиз. Аниқ масалада шартли боғланишга нисбатан стабиллаш муаммосини ҳал қиламиз.

Фараз қиламиз, бизга ҳолати $q_i\left(\, i=1,2,...,n\right)$ умумлашган координаталар билан аниқланадиган геометрик боғланишли механик система берилган бўлсин. Бунда система системага таъсир қилаётган умумлашган кучлар Q_i ва система ҳаракати қуйидаги бир-бирини инкор қилмайдиган

$$f_{\alpha}\left(q_j,t\right)=0\ \left(f_{\alpha}\in C_2;\ \alpha=1,2,...,a\right) \qquad (1)$$

геометрик ва

$$\varphi_{\beta}\left(q_i,\dot{q}_i,t\right)=0\ \left(\varphi_{\beta}\in C_1;\ \beta=1,2,...,b\right) \qquad (2)$$

умумий ҳолда чизиқсиз кинематик боғланишлар остида бўлсин.

Боғланишларга кўра, систeманинг мумкин бўлган кўчишлари қуйидаги муносабатларни қаноатлантиради:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_i}\delta q_i=0, \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i=0$$

---

[7] Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013

[8] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X.

[9] Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.

ва системанинг ҳолатини қуйидаги, ўзаро боғлиқ бўлмаган ўзгарувчилар орқали аниқлаш мумкин:

$$q_i = a_i(q_j, t),\ q_i^{\bullet} = b_i(q_j, p_s, t)\ (a_i \in C_2, b_i \in C_1) \quad (3)$$

Бунда $q_j(j=1,2,...,p)$- ўзаро боғлиқ бўлмаган Лагранж координаталари, $p_s(s=1,2,...,r)$ - ўзаро боғлиқ бўлмаган тезлик параметрлари. Кинематик боғланишли системалар назариясига кўра, δq_i координаталарнинг вариацияларини $\delta\pi_s$ эркин вариациялар орқали ифодалаш мумкин.

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial b_i}{\partial p_s} \delta\pi_s \qquad (4)$$

Фараз қиламиз, (1) боғланишлар ичида биринчи c, таса биринчи тур боғланишлардан иборат бўлсин. Агар биринчи тур боғланиш реакция кучларини $\vec{N}_i$ ва $\vec{\Phi}_i$ -билан шартли боғланишлар реакия кучларини белгиласак $\vec{R}_i = \vec{N}_i + \overline{\Phi}_i$. Бунга кўра, ноидеал боғланишли система учун

$$\sum_{i=1}^{n} N_i \delta q_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \Phi_i \delta q_i = \tau \neq 0.$$

ўринли ва шартли боғланишларнинг реакция кучларини шундай иккита Φ_i^n, Φ_i^n ташкил этувчига ажратиш мумкинки, бунда $\Phi_i^n \delta t$ векторлар системанинг мумкин бўлган кўчишлар тўпламида ётади. Ноидеал боғланишли системалар назариясига кўра бу ташкил этувчиларнинг компоненталари учун қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\Phi_i^n = \sum_{\alpha=c+1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=c+1}^{b} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\Phi_i^\tau = \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \frac{\partial b^*}{\partial p_\nu}$$

Бунда $\lambda_\alpha, \mu_\beta$-Лагранж кўпайтувчилари, u_ν-пропорционаллик коэффициент-лари.

Системанинг ҳаракат тенгламалари эса қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + N_t + \Phi_i.$$

Бунда T-система кинетик энергияси боғланишларни ҳисобга олинмаган ҳолда тузилган. [2](25-28)[10]

Реакция кучларининг структураси эса

$$N_i = \sum_{\alpha=1}^{c} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=1}^{d} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\Phi_i = \sum_{\alpha=c+1}^{a} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} + \sum_{\beta=c+1}^{b} \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\nu=1}^{m} u_\nu \frac{\partial b^*}{\partial p_\nu}.$$

[10] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X.

3.3.Боғланишларга нисбатан бўшатилган система.

Энди системага қўйилган биринчи ва иккинчи тур боғланишлар билан биргаликда шартли боғланишларга нисбатан қуйидаги

$$t_{c+\gamma}(q_i, t) = \eta_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, e) \tag{5}$$

$$\varphi_{d+\rho}(q_i, \dot{q}_i, t) = \zeta_\rho \quad (\rho = 1, 2, \ldots, f)$$

муносабатларни киритамиз. Бунда η_γ ва ζ_ρ - геометрик ва кинематик шартли боғланишлардан узлуксиз оғиш параметрларини билдиради. Бу оғишлар сифатида кўпгина ҳолларда шартли боғланишларнинг чап томонлари олинади. Бунга кўра системанинг кинематик мумкин бўлган ҳолатлари учун қуйидаги муносабатларга эга бўламиз:

$$q_i = A_i^*(q_\mu, \eta_\gamma, t) \quad (A_i^* \in C_1)$$

$$\dot{q}_i = B_i^*(q_\mu, \eta_\gamma, p_\nu, \zeta_\rho, \dot{\eta}_\gamma, t) \quad (B_i^* \in C_1)$$

Бу муносабатлар шундай танлаб олинадики $\eta_\gamma = \dot{\eta}_\gamma = \zeta_\rho = 0$ да бўшатилмаган система ҳолатини бериши керак.

(1) ва (2) геометрик ва кинематик боғланишларни ҳисобга олиш учун система ҳолатини аниқлайдиган муносабатларни умумлашган $q_{p+1}, q_{p+2}, \ldots, q_k$, координаталарга ва $p_{r+1}, p_{r+2}, \ldots, p_m$ тезлик параметрларига нисбатан ечиб оламиз. Бунга кўра, системанинг мумкин бўлган ҳолатлари қуйидагича аниқланади:

$$q_i = A_i(q_j, \eta_\gamma, t)$$

$$\dot{q}_i = B_i(q_j, \eta_\gamma, p_s, \zeta_\rho, \dot{\eta}_\gamma, t) \tag{6}$$

Системага тегишли умумлашган координаталарнинг вариациялари учун

$$\delta q_i = \sum_{s=1}^{r} \frac{\partial B_i}{\partial p_s} \delta \pi_s + \sum_{\rho=1}^{f} \frac{\partial B_i}{\partial \zeta_\rho} \delta \sigma_\rho + \sum_{\gamma=1}^{e} \frac{\partial B_i}{\partial \eta_\gamma} \delta \eta_\gamma$$

муносабат ўринли.

Бизга маълумки, шартли боғланишлардан озод қилинган система учун Даламбер – Лагранж принципи $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - \Phi_i \right) \delta q_i = 0$ ўринли.

Шуни таъкидлаш кераккки, ўзгарувчиларнинг вариациялари оддий боғланишларни тўлиқ қаноатлантиради

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{c+\gamma}}{\partial q_i} \delta q_i = \delta \eta_\gamma, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{d+\rho}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \delta \sigma_\rho$$

Лагранж кўпайтувчилари усулидан фойдаланиб принципни

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i - \Phi_i^\tau \right) \delta q_i = \sum_{\alpha=1}^{e} \lambda_{c+\alpha} \delta \eta_\alpha + \sum_{\beta=1}^{f} \mu_{d+\beta} \delta \sigma_\beta$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ёки система тезланишлар энергияси S орқали бўшатилган система ҳаракат тенгламаларини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:[2](68-72)[11]

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{p}_s} = Q_s^p + \Phi_s^p,\ Q_s^p = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial B_i}{\partial p_s},\ \Phi_s^p = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\tau \frac{\partial B_i}{\partial p_s}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}_\alpha} = Q_a^\eta + \Phi_a^\eta + \lambda_{c+\alpha},\ Q_a^\eta = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial B_i}{\partial \dot{\eta}_\alpha},\ \Phi_a^\eta = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\tau \frac{\partial B_i}{\partial \dot{\eta}_\alpha}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\zeta}_\beta} = Q_\beta^\zeta + \Phi_\beta^\zeta + \mu_{d+\beta},\ Q_\beta^\zeta = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial B_i}{\partial \zeta_\beta},\ \Phi_\beta^\zeta = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\tau \frac{\partial B_i}{\partial \zeta_\beta}$$

Бу тенгламалар системаси (3) оғишларга мос муносабатлар билан биргаликда ёпиқ $p_s, q_i, \eta_\alpha, \zeta_\beta$ ўзгарувчиларга нисбатан тенгламалар системасини ташкил қилади. Бу тенгламалар системасида $\lambda_{c+1}, \lambda_{c+2}, ..., \lambda_a$; $\mu_{d+1}, \mu_{d+2}, ..., \mu_b$; $u_1, u_2, ..., u_m$ бошқариш параметрлари ролини бажаради. Кўриш қийин эмаски, системани шартли боғланишлардан озод қилиш натижасида боғланишларга нисбатан оғдирилган тенглаиалар системасини ҳосил қилдик. Олинган тенгламалар системаси учун одатда стабиллаш ёки боғланишларга нисбатан оптимал стабиллаш масалалари кўрилади, яъни бошқариш параметрлари қўшимча шартлар аосида аниқланади.

Масала. Текисликда жойлашган Σ пластинка цилиндрик шарнир ёрдамида уланган Σ_1 диск ёрдамида ҳаракатланади. Бунда диск электродвигателга уланган бўлиб, злектродвигател моменти шундай таъсир кўрсатидики, диск маркази билан шарнир уланган нуқтадан ўтказилган радиус, шарнир билан пластинка масса марказини бирлаштирувчи тўғри чизиқ орасидаги бурчак ҳаракат давомида $\pi/2$ га тенг бўлади.

Системанинг ҳаракат ва шартли боғланишдан узлуксиз бўшатилган ҳаракат тенгламаларини тузинг.

Биринчи навбатда $\alpha - \beta - \pi/2 = 0$ шартли боғланиш аниқ бажарилган ҳолни кўриб чиқамиз. Шартли боғланишни бажарилган деб ҳисобласак, система кинетик энергияси

$$T = T(\Sigma) + T(\Sigma_1) = \frac{1}{2}\{M[R^2\dot{\alpha}^2 + \left(b^2 + k^2\right)\dot{\beta}^2 + 2bR\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha - \beta)] + I_1\dot{\alpha}^2\},$$

кўринишга эга бўлади. Умумлашган координатларга мос умумлашган кучлар учун

$$Q_\alpha = -RF\sin\alpha,\ \ Q_\beta = -aF\sin\beta,$$

$$\Phi_\alpha^n = -\Phi_\beta^n = \lambda,\ \Phi_\alpha^\tau = \Phi_\beta^\tau = u$$

ўринли.

Бунга кўра система ҳаракат тенгламалари қуйидаги кўринишга эга бўлади:,

---

[11] Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X.

$$M\left[\left(b^2+k^2\right)\ddot{\beta}-bk\dot{\beta}^2\right]+aF\sin\beta=0$$

$$\left[M\left(b^2+k^2+R^2\right)+I_1\right]\ddot{\beta}+F\left(a\sin\beta+R\cos\beta\right)=2u$$

Фараз қиламиз, шартли боғланиш аниқ бажарилмайди, яъни бошланғич шартлар боғланишлрн аниқ қаноатлантирмайди. Бу ҳолда умумий назарияга кўра

$$\alpha=x+\eta+\pi/2,\ \beta=x$$

оғишлар киритамиз.

$$\alpha-\beta-\pi/2=\eta$$

ва ўзаро боғлиқ бўлмаган χ ва η ўзгарувчиларга нисбатан динамиканинг умумий тенгламаси

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}-\frac{\partial T}{\partial\alpha}-Q_\alpha-\Phi_\alpha^\tau\right)\delta\alpha+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}-\frac{\partial T}{\partial\beta}-Q_\beta-\Phi_\beta^\tau\right)\delta\beta=\lambda\,\delta\eta$$

ва бу системага нолга тенг бўлган ечими асимптотик турғун бўлган системани қўшиб

$$\ddot{\eta}=V\left(\eta,\dot{\eta}\right),\ V(0{,}0)=0,\ \eta(0)=\eta^\circ,\ \dot{\eta}(0)=\dot{\eta}^\circ$$

$$\left[M\left(b^2+k^2+R^2-2bR\sin\gamma\right)+I_1\right]\ddot{\beta}+\left[MR\left(R-b\sin\gamma\right)+I_1\right]V\left(\eta,\dot{\eta}\right)-$$
$$-MbR\dot{\eta}\left(\dot{\eta}+2\dot{\beta}\right)\cos\eta+F\left[a\sin\beta+R\cos\left(\beta+\eta\right)\right]=2u$$

$$\left[MR\left(R-b\sin\eta\right)+I_1\right]\ddot{\beta}+\left(MR^2+I_1\right)V\left(\eta,\dot{\eta}\right)+MbR\dot{\beta}^2\cos\eta+RF\cos\left(\beta+\eta\right)=2u$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар системасида системанинг ҳаракатини ва системани шартли боғланишга нисбатан асимптотик турғунлигини таъминловчи бошқариш параметрини аниқлаш мумкин.[3][12],[7][13],[5][14]

---

[12] Иванов А.П. Основы теории систем с трением. М.: НИЦ «РХД», ИКИ, 2011.

[13] Азизов А.Г. О движении управляемых механических систем с сервосвязями (условными связями)// ПММ, т.54. 1990.

[14] Беген А. Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1967. 192 с.

Назорат саволлари:

1. Ноидеал боғланиш нима?
2. Шартли боғланиш нима?
3. Даламбер-Лагранж принципининг механик маъноси.
4. Системанинг ишқаланиш қонуни.
5. Боғланишларга нисбатан параметрик бўшатиш тушунчасининг механик маъноси.
6. Стабиллаш ва оптимал стабиллаш орасидаги фарқ нимадан иборат?

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013
2. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. - С. 262. - ISBN 5-9221-0067-X.
3. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. М.: НИЦ «РХД», ИКИ, 2011.
4. Журавлев В.Ф. 500 лет истории закона сухого трения// Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2014. № 2.

4- мавзу: УМУМЛАШГАН ГУК ҚОНУНИ. ТЕРМОЭЛАСТИК ЖИСМ МОДЕЛИ.

РЕЖА:

4.1. Эластиклик назариясининг тенгламалар системалари.

4.2. Умумлашган Гук қонуни.

Таянч иборалар: *эластиклик, энтропия, ички энергия, эркин энергия, деформация, кучланиш.*

4.1.Эластиклик назариясининг тенгламалар системалари.

Маълумки агар физик химик жараёнлар эътиборга олинмаса, қуйидаги тенгламалар эластиклик назариясининг тўла тенгламалар системасини ташкил этади.

1) узлуксизлик тенгламаси (Лагранж шаклида)

$$\rho\sqrt{\hat{g}} = \rho_0\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,, \qquad \hat{g} = \det\left|g_{ij}\right| \tag{4.1}$$

2) импульслар тенгламаси

$$\rho\frac{d\vartheta_i}{dt} = F^i + \nabla_j\sigma^{ij}\,, \ \left(i, j = 1,2,3\right) \tag{4.2}$$

3) иссиқлик оқиш тенгламаси

$$dU = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\rho}d\hat{\varepsilon}_{ij} + T\,ds \tag{4.3}$$

ёки

$$dF = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\rho}d\hat{\varepsilon}_{ij} - s\,dT\,,\ F = U - Ts \tag{4.3`}$$

Бу ерда ρ_0 ва ρ бошланғич ва актуал ҳолатдаги зичлик, $\overset{\circ}{g}_{ij}$ ва $\hat{g}_{ij}-$ метрик тензорнинг бошланғич ва актуал ҳолатдаги компоненталари, $\vartheta-$тезлик, $\hat{\sigma}_{ij}$ ва $\hat{\varepsilon}_{ij}$-кучланиш ва деформация тензорларининг актуал ҳолатдаги компоненталари, $T-$абсолют температура, $s-$энтропия, $U = U(s, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij})-$ ички энергия, $F = F(T, \overset{\circ}{g}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij})-$ эркин энергия.

$dF(dU)-$тўла дифференциал эканлигидан фойдаланиб, (4.3`) дан ушбу холат тенгламалари деб аталувчи тенгликларни олиш мумкин.

$$\hat{\sigma}_{ij} = \rho\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_T\,,\ s = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\hat{\varepsilon}_{ij}} \tag{4.4}$$

Умумлашган Гук қонуни. Чексиз кичик деформациялар қаралганда (4.4) да $\rho = \rho_0$ ва

$$\hat{\sigma}_{ij} = \rho_0\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_{ij}}\,,\ s = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Phi}{\partial T} \tag{4.5}$$

тенглик ўринли деб қабул қилинади, яъни бошланғич ҳисоб системаси ва

Лагранж системаси юқори тартибли кичик миқдорлар аниқлигида бир-бирига тенг деб олинади. Агар $\varepsilon_{ij} << 1$, $T = T_0 + \Delta T$, $\Delta T << T_0$ бўлса, бир-бирлик ҳажмнинг эркин энергияси учун ушбу

$$\Phi \approx \Phi_0 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 \varepsilon_{ij} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_0 (T - T_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}\right)_0 \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}\right)_0 \varepsilon_{ij}(T - T_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}\right)_0 (T - T_0)^2 \qquad (4.6)$$

ёйилма ўринли бўдади. Бошданғич ҳолатда $\varepsilon_{ij}=0$ бўлганда $\sigma_{ij} = 0$ ва $s = s_0$, $T = T_0$ деб олинса, (4.5) га кўра

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_0 = -\rho_0 s_0$$

бўлади.

Агар

$$A^{ijkl} = \left(\frac{\partial^{2\Phi}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}\right)_0, \quad B^{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}\right)_0, \quad \rho_0 \frac{c}{T_0} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}\right)_0 \qquad (4.7)$$

деб белгилаш киритилса, (4.6) ушбу

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} A^{ijkl} \varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + B^{ij}\varepsilon_{ij}(T - T_0) + \frac{\rho_0 c}{2T_0}(T - T_0)^2 - \rho_0 s_0 (T - T_0) \qquad (4.8)$$

кўринишни олади[15].

Эркин энергиянинг (4.8) ифодасида (4.7) га кўра

$$A^{ijkl} = A^{klij}, \; A^{jikl} = A^{ijkl}, \; A^{ijlk} = A^{ijkl}, \; B^{ij} = B^{ij}$$

тенгликлар ўринли бўлгани туфайли A^{ijkl} нинг сони 21 тадан, B^{ij} нинг сони эса 6 тадан кўп бўлолмайди.демак чизиқли термоэластиклик назариясида ихтиёрий анизотроп термоэластик жисм 28 та ўзгармаслар $\left(A^{ijkl}, B^{ij}, c\right)$ билан характерланади.

4.2.Умумлашган Гук қонуни.

Жисм изотроп муҳит бўлса, эркин энергия фақат деформация тензорининг инвариантларига боғлиқ бўлиши мумкин.

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda I_1{}^2(\varepsilon_{ij}) + \mu I_2(\varepsilon_{ij}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha I_1(\varepsilon_{ij})(T - T_0) - \frac{c}{2T_0}(T - T_0)^2 - \rho_0 s_0 (T - T_0) \quad (4.9)$$

бу ерда $I_1(\varepsilon_{ij})$ ва $I_2(\varepsilon_{ij})$ деформация тензорининг биринчи ва иккинчи инвариантлари, λ ва μ Ламе параметрлари деб аталувчи ўзгармас миқдорлар. Юқоридаги (4.5) ва ушбу (4.9) формулалардан изотроп муҳит учун умумлашган Гук қонуни келиб чиқади.

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon_{ij}) g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0) g_{ij} \qquad (4.10)$$

[15] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 2004 (электрон вариант), 328-329 б.

$$s=\frac{1}{\rho_0}(3\lambda+2\mu)\alpha I_1(\varepsilon_{ij})+\frac{c}{T_0}(T-T_0)+s_0 \qquad (4.11)$$

(4.10) формулани ε_{ij} га нисбатан ечиб, ушбу кўринишда ёзиш мумкин

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\sigma_{ij}-\sigma I_1(\sigma_{ij})g_{ij}\right]+\alpha(T-T_0)g_{ij} \qquad (4.12)$$

Бу ерда $I_1(\sigma_{ij})-$ кучланиш тензорининг биринчи инварианти, E - Юнг модули, $\nu-$Пуассон коэффициенти.

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \qquad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Агар кучланишлар $\sigma_{ij}=0$ бўлса, (4.12) дан

$$\varepsilon_{ij}=\alpha(T-T_0)g_{ij} \qquad (4.13)$$

яъни ε_{ij}-шар тензори бўлади. Бундан $\alpha-$қаралаётган муҳитнинг чизиқли иссиқлик кенгайиш коэффициенти эканлигини кўрамиз. Энди, (4.10) тенгликнинг ўнг томонини импульслар тенгламаси (4.2) даги σ_{ij} ўрнига қўйилса, чизиқли термоэластик назария доирасида биржинсли изотроп муҳит учун Ламе тенгламаси олинади[16].

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2}=\rho_0\vec{F}+(\lambda+\mu)graddiv\vec{w}+\mu\Delta\vec{w}-(3\lambda+2\mu)\alpha\, gradT \qquad (4.14)$$

Бу ерда $\vec{w}$-кўчиш вектори, $\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}=\vec{v}$ ва $\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ деб қабул қилинган. Муайян масала кўчиш вектори орқали қўйилган бўлса, (4.14) тенгламалар системаси ва иссиқлик оқими тенгламаси тўла тенгламалар системасини ташкил этади. Агар масала кучланишларда қўйилса, (4.2)-импульслар тенгламаси ва Бельтрами-Митчелл тенгламалари тўла тенгламалар системасини ташкил этади. Эслатма Бельтрами-Митчелл тенгламалари деформациянинг биргалик тенгламасидан Гук қонуни (4.10) ёрдамида олинади. Эластик жисмларнинг мувозанатига оид масалаларда Бельтрами-Митчелл тенгламалари тўла тенгламалар системасини ташкил этади.

Хусусий ҳол. Агар жараён адиабатик бўлса, яъни $dq^{(e)}=0,\ \ s=s_0=const$ бўлса, (4.11) дан T ва ε_{ij} орасидаги ушбу муносабатни оламиз.

$$T-T_0=-\frac{3\lambda+2\mu}{\rho_0 c}\alpha T_0 I_1(\varepsilon_{ij}) \qquad (4.15)$$

Бундан (4.10) Гук қонуни

$$\sigma_{ij}=\lambda_{ad}I_1(\varepsilon_{\alpha\beta})g_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}; \qquad \lambda_{ad}=\lambda+\frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha^2T_0}{\rho_0 c}$$

кўринишни олади ва демак изотермик жараён учун олинган Ламе тенгламаларида Ламе параметри λ ўрнига λ_{ad} олинса етарли бўдади. Бу ҳолда Ламе тенгламалари тўла тенгламалар системасини ташкил этади.

[16] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 2004 (электрон вариант) 328 б.

Назорат саволлари:

1. Бошланғич ҳисоб системаси ва Лагранж системаси юқори тартибли кичик миқдорлар аниқлигида нимага тенг деб олинади?
2. Қаралаётган муҳитнинг чизиқли иссиқлик кенгайиш коэффициенти нимага тенг?
3. Эластик жисмларнинг мувозанатига оид масалаларда қайси тенгламалар тўла тенгламалар системасини ташкил этади?
4. Бельтрами-Митчелл тенгламалари қайси тенгламадан олинади?
5. Жисм изотроп муҳит бўлса, эркин энергия нимага боғлиқ бўлади?
6. Чизиқли термоэластик назария доирасида бир жинсли изотроп муҳит учун қайси тенглама олинади?

Адабиётлар:

1. Ellis H. Dill. Continuum mechanics. Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity. Taylor & Francis Group. USA, 2007.
2. Cemal Eringen A. Mechanics of Continua. USA, 1967, English
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 2004 (электрон вариант).
4. Прикладная механика сплошных сред. Т.2. Под редак. В.В.Селиванова, МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. (электрон вариант).
5. МСС в задачах и упражнениях. Т.1, 2. Под редак. М.Э.Эглит, Моск. лицей, 1996.

5- мавзу: МУРАККАБ ХОССАЛИ МУҲИТЛАР ВА УЛАРДА ТЎЛҚИН ТАРҚАЛИШИ.

РЕЖА:

5.1.Юкланиш (оқувчанлик) сирти.

5.2.Идеал-пластик жисмнинг моделлари:

- *Тресканинг пластик шарти;*
- *Мизеснинг пластик шарти.*

5.3.Пластик оқиш назарияси (инкрементал назария);

5.4.Ёпишқоқ-эластик муҳитлар.

Таянч иборалар: *юкланиш сирти, пластиклик, эластик-пластик муҳитлар, ёпишқоқ-эластик жисмлар*

5.1. Юкланиш (оқувчанлик) сирти.

Эластиклик назарияси моделлари ва методлари кўп амалий масалаларни ҳал қилишга етарли эмас. Шу туфайли мураккаб хоссали муҳитларнинг моделларини қарашга тўғри келади.

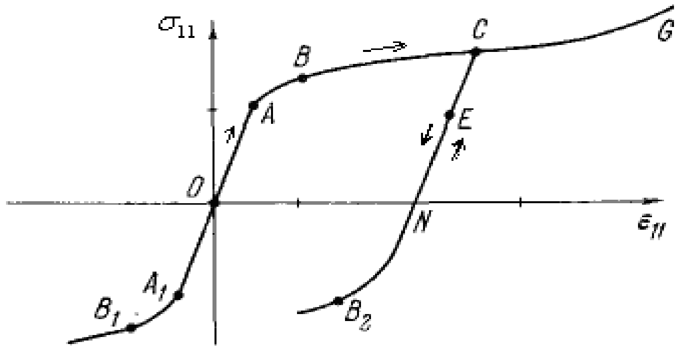
Туташ муҳитнинг икки ёки ундан кўп механик хоссалари эътиборга олинган моделлар туташ муҳитнинг мураккаб моделлари деб аталади. Масалан эластик-пластик, ёпишқоқ-эластик, ёпишқоқ-пластик, эластик-ёпишқоқ-пластик муҳитлар.

Мазкур мураккаб моделли муҳитларнинг айримлари ҳақида қисқача тўхталиб ўтамиз.

1. Эластик-пластик муҳит (ЭПМ) модели.

ЭПМ шундай қаттиқ жисмларга (асосан металлар ва қотишмалар) мос келадики, улар юкланиш жараёни давомида пластиклик шарти (эластиклик чегараси, оқувчанлик чегараси) деб аталувчи муайян шарт бажарилгунга қадар эластик деформация ва мазкур шартдан сўнг юкланиши давом эттирилса ушбу муҳитда нафақат эластиклик, балки пластиклик деформациялар ҳам содир бўлади.

Буни қуйидагича юмшоқ темирнинг бир ўқ бўйлаб чўзилиш ва сиқилиш диаграммаси намойиш этади.



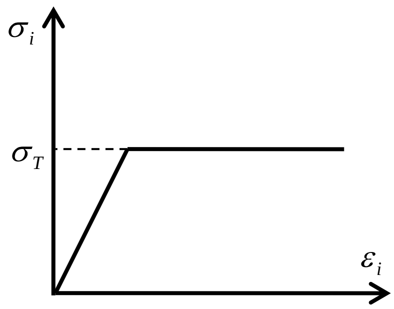
Расм 1.

Диаграмманинг A_1A қисми чизиқли эластик деформацияга мос келади ва $\sigma_{11}(A)$ пропорционаллик чегараси деб аталади. AB эса чизиқсиз эластик деформацияга мос келиб, $\sigma_{11}(B)$ - эластиклик ёки оқувчанлик чегараси деб аталади.

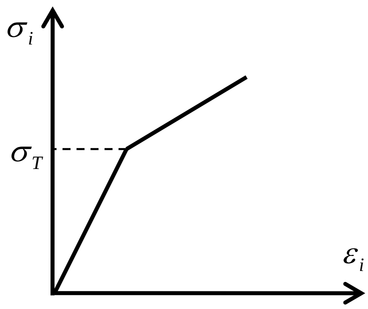
Изоҳ. Тўққиз ўлчовли кучланиш фазосида мазкур чегара юкланиш сирти деб аталади.

$\sigma_{11} > \sigma_{11}(B)$ бўлганда пластиклик эффектлари пайдо бўлади. Бирор $\sigma_{11}(C) \geq \sigma_{11}(B)$ бўлган C нуқтада юксизланиш амалга оширилса диаграмманинг CEN қисмида эластик деформация содир бўлиб, CEN кесма - A_1A га қарийиб параллел бўлади. Диаграмманинг $\sigma_{11}(C) > \sigma_{11}(B)$ қисми материалнинг мустаҳкамланиш қисми деб аталади. Тўла юксизланиш ($\sigma_{11}(N) = 0$) бажарилса ҳам материалда деформация тўла йўқолмай қолдиқ деформация (диаграмманинг ON қисми) қолади. Бу эффект пластикликнинг асосий хусусиятидир. Тўла юксизланишдан сўнг сиқилиш деформацияси бажарилса, эластиклик чегарасига B_2 нуқта мос келади. Ушбу сиқмлмш эластиклик чегараси $\sigma_{11}(B_2)$ умуман олганда $\sigma_{11}(B_1)$ тенг бўлмайди. Буни Баушингер эффекти деб аташади.

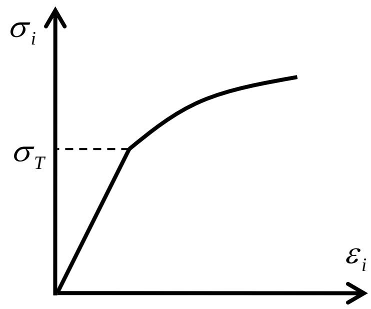
Кўпинча ЭПМ нинг идеаллаштирилган диаграммалари қаралади (Расм 2- Расм 6)



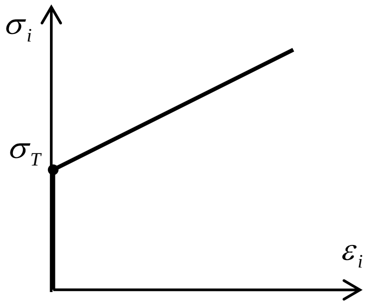
Расм 2



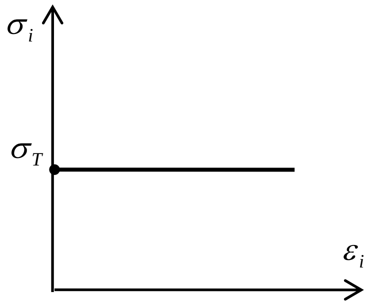
Расм 3



Расм 4



Расм 5



Расм 6

Расм 2 да идеал-пластик муҳит, расм 3 да чизиқли мустаҳкамланувчи ЭПМ, расм 5 ва расм 6 да чизиқсиз ва чизиқли мустаҳкамланувчи қаттиқ-пластик муҳитлар диаграммаси келтирилган

Ушбу диаграммаларда кучланиш интенсивлиги

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3J_2(\sigma) - J_1^2(\sigma)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \qquad (5.1)$$

муҳитнинг қаралаётган нуқтаси атрофидаги урунма кучланишларнинг, яъни муҳит зарраси шаклининг ўзгариши натижасида пайдо бўладиган кучланишларнинг умумий характеристикаси. $\sigma_i = \sigma_T$ - оқувчанлик чегараси (предел текучести)

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{3J_2(\varepsilon) - J_1^2(\varepsilon)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \qquad (5.2)$$

Бу ерда $J_1(\sigma), J_2(\sigma)$ ва $J_1(\varepsilon), J_2(\varepsilon)$ кучланиш ва деформация тензорларининг инвариантлари.

Пластикликнинг асосий хусусиятига кўра (қолдиқ деформация) 9 ўлчовли кучланишлар фазосида шундай D_P соҳани ажратиш мумкинки, агар σ^{ij} шу D_P соҳанинг ичида ётса, зарра ўзини эластик жисм каби тутади. Бунда D_P соҳанинг чегараси Σ_P эластиклик чегарасини берувчи нуқталар мажмуидан иборат бўлади. D_P соҳанинг чегараси Σ_Pни юкланиш сирти (мустаҳкамланувчи материаллар) ёки оқувчанлик сирти (идеал-пластик материаллар) деб аталади.

<u>Идеал-пластик муҳит</u>. Бир ўқ бўйлаб чўзилишда эластиклик (оқувчанлик) чегараси – чўзувчи кучланишнинг чегаравий қиймати идеал-пластик материал учун ўзгармас бўлиб (пластик деформация миқдорига боғлиқ эмас), ҳароратга T ва айрим физик-химик параметрларга (μ_k) боғлиқ бўлиши мумкин. Бироқ мустаҳкамланувчи материалларда эластиклик чегараси T ва μ_k лар ўзгармас бўлган ҳолда ҳам ўзгаради. Шуни эътиборга олиб умумий ҳолда идеал-пластик ва мустаҳкамланувчи муҳитларга қуйидагича таъриф берилади.

Агар T ва μ_k ўзгармаслар бўлганда:

а) барча деформация жараёнлари учун Σ_P фиксирланган муҳитлар идеал-пластик муҳит деб аталади (расм 7);

б) пластик деформациялар миқдори ўзгариши билан юкланиш сирти Σ_P

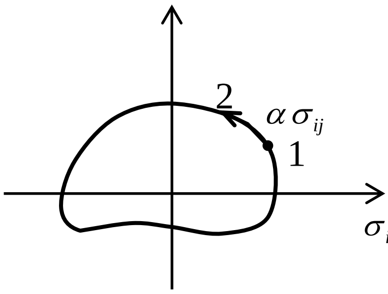
ҳам ўзгарадиган муҳитлар мустаҳкамланувчи муҳитлар деб аталади (расм 8)

Идеал-пластик материаллар учун юкланиш сирти тенгламасини

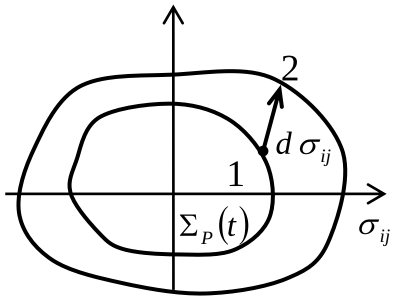
$$f\left(\sigma^{ij}, g_{ij}, T, \mu_k\right) = 0 \text{ ва } f\left(\sigma^{ij}, g_{ij}, T, \mu_i, \varepsilon_{ij}^{p}\right) = 0 \qquad (5.3)$$

кўринишда ёзилиши мумкин. f - юкланиш (оқувчанлик) функцияси деб аталади ва агар $\sigma^{ij} \in D_P$ бўлса $f < 0$ деб қабул қилинади.

Муайян пластик материаллар учун юкланиш функцияси берилган бўлиши керак. Бундан ташқари эластик деформация содир бўладиган соҳада ($\sigma^{ij} \in D_P$) эластиклик қонунлари, қолдиқ деформациянинг орттирмасини ҳамда термодинамик функцияларни аниқловчи қонунлар берилиши лозим бўлади.



Расм 7



Расм 8

5.2. Идеал-пластик жисмнинг моделлари.

Идеал-пластик жисм учун турли моделлар таклиф этилган. Мисол тариқасида шулардан иккитасини келтирамиз.

Тресканинг пластик шарти.

Ихтиёрий юзачадаги урунма кучланиш $\sigma_\tau < k$ бўлганда муҳит зарраси ўзини эластик жисм каби ва ҳеч бўлмаганда бирорта юзачада $\sigma_\tau = k$ бўлса пластик жисм каби тутади деб қабул қилинади. Бунда ўзгармас миқдор берилган бўлиб, турли материаллар учун турлича қиймат қабул қилиши мумкин ва T га боғлиқ бўлиши мумкин.

Шундай қилиб пластиклик хусусияти

$$\sigma_{\tau\max} < k \qquad (5.4)$$

шарт – Треска шарти бажарилган нуқталарда намоён бўлади деб қабул қилинади. Бундан ва максимал урунма кучланишлар

$$\sigma_{\tau 1} = \pm\frac{\sigma^2 - \sigma^3}{2},\ \sigma_{\tau 2} = \pm\frac{\sigma^3 - \sigma^1}{2},\ \sigma_{\tau 3} = \pm\frac{\sigma^1 - \sigma^2}{2};\ \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \qquad (5.5)$$

формулалар билан аниқланган туфайли, пластиклик хусусияти

$$\sigma^1 - \sigma^2 = \pm 2k,\ \sigma^2 - \sigma^3 = \pm 2k,\ \sigma^3 - \sigma^1 = \pm 2k \qquad (5.6)$$

Тенгликлардан ҳеч бўлмаса бирортаси бажарилса намоён бўлади.

Бош кучланишлар фазосида Тресканинг пластиклик шартига мос юкланиш сирти тенгламасини

$$f = \varphi\left(\sigma^i\right) - k = 0 \qquad (5.3')$$

кўринишда ёзиш мумкин. Мазкур фазода D_p олтиёқли призма бўлиб, унинг ёқлари ва қирралари $\sigma^1 = \sigma^2 = \sigma^3$ тўғри чизиққа параллел бўлади. Координата бошидан (5.6) текисликларгача бўлган масофа $\sqrt{2} \cdot k$ га тенг бўлади.

Призманинг $\sigma^1 = \sigma^2 = \sigma^3$ тўғри чизиққа ортогонал текислик билан кесими Тресканинг олтибурчаги деб аталади. Ушбу текислик билан кесилган призма қирраларигача бўлган масофа $2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k$ га тенг бўлади. Бундан Тресканинг олти бурчагига маркази координата бошида бўлган $\sqrt{2} \cdot k$ радиусли ички чизилган айлана ва $2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k$ радиусли ташқи чизилган айлана ўтказиш мумкин.

Мизеснинг пластик шарти.

Тресканинг пластиклик шарти бўйича жисмнинг пластиклик ҳолатига ўтиши ўртача бош кучланиш $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ га боғлиқ эмас. Ҳолбуки Лоде тажрибаларида (1938й) σ оқувчанлик шартига таъсир этиши аниқланган. Ундан ташқари $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ тенгсизликлар маълум бўлсин деб талаб этилади. Лекин кўпинча бош ўқларнинг йўналиши маълум бўлса ҳам ларнинг қайси бири энг катта ва энг кичик эканини билмаймиз. Шуларни эътиборга олиб Губер (1904й), Мизес (1913й) ва Генка (1921й) қуйидаги кўринишидаги пластиклик шартини таклиф этишди:

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = k' \qquad (5.7)$$

Яъни октаэдрик урунма кучланиш $\tau_{окт}$ бирор чегаравий қиймат k' га тенг бўлиши пластиклик шарти сифатида қабул қилинади. Кейинроқ В.В.Новожилов кристаллик материалларда пластик деформация бошланиши муайян текисликдаги ва муайян йўналишдаги урунма кучланиш миқдори билан аниқланишини кўрсатди.

Кўп тажрибаларга асосан силжишдаги оқувчанлик чегараси τ_T нинг оддий чўзилишдаги оқувчанлик чегараси σ_T га тенг нисбати

$$\frac{\tau_T}{\sigma_T} = 0{,}55 \div 0{,}60$$

Мизеснинг пластиклик шартига кўра соф силжишдаги ушбу нисбат $\frac{\tau_T}{\sigma_T} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57763$, яъни тажриба натижаларига мос келади. Ҳолбуки Тресканинг шарти бўйича мазкур нисбат 0,5 га тенг.

Мизеснинг пластиклик шартини кучланиш интенсивлиги (5.1) орқали ушбу

$$\sigma_i = \sigma_t\,, \qquad (5.8)$$

кўринишда киритилса, оқувчанлик чегараси (предел текучести) $k' = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_T$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Мизеснинг пластиклик шартини кучланиш тензори девиатори

$D_\sigma = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1(\sigma) g_{ij}$ орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

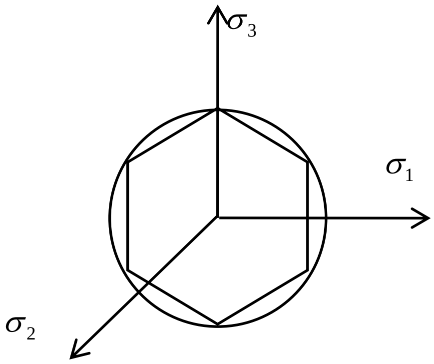
$$I_2(D_\sigma) = \frac{2}{3}\sigma_T{}^2 \tag{5.9}$$

Бундан Мизеснинг пластиклик шартини ихтиёрий координата системасида

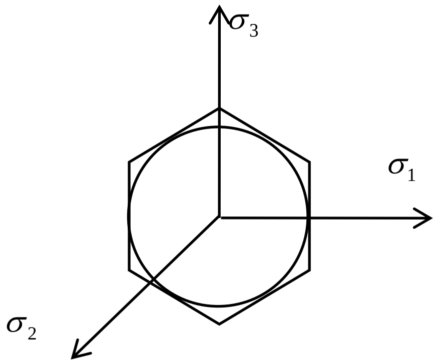
$$\left(\sigma^{ij} - \frac{1}{3} I_1(\sigma) g^{ij}\right)\left(\sigma^{ij} - \frac{1}{3} I_1(\sigma) g_{ij}\right) = \frac{2}{3}\sigma_T{}^2 \tag{5.10}$$

кўринишда ёзилиши келиб чиқади.

Бош кучланишлар фазосида ташкил этувчилари $\sigma^1 = \sigma^2 = \sigma^3$ тўғри чизиққа параллел бўлган доиравий цилиндрнинг сирти Мизеснинг пластиклик шарти билан аниқловчи юкланиш сирти бўлади. Ушбу сиртнинг нормал кесими радиуси $2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot k$ га тенг, Треска олтибурчагига ташқи чизилган айлана бўлади. Оддий чўзилиш ва соф силжишга ўтказилган тажрибалар бўйича Тресканинг олтибурчаги ва Мизес доирасининг ўзаро жойлашиши расм 9 ва расм 10 да келтирилган.



Расм 9



Расм 10

Конструкцион материалларда ўтказилган тажрибаларда, одатда, оқувчанлик чегараси Треска ва Мизеснинг юкланиш сиртлари орасида жойлашган бўлади[17].

Кичик деформациялар юз берганда (эластик деформациядан катта, лекин у билан солиштирса бўладиган даражада) ЭПМ деформацион назария билан яхши тафсифланади. Деформацион назария балкалар назариясида, валларнинг буралиши назариясида, қалин кувурлар ва қобиқларни тадқиқ қилишда қўлланилади. Лекин ушбу назария муҳитнинг хусусиятини эмас, балки ундаги айрим хусусий жараёнларни қайд этади (фиксирлайди). Деформацион назарияга кўра ЭПМ аниқловчи тенгламалари ушбу кўринишга эга:

[17] Ellis H. Dill. Continuum mechanics. Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity. Taylor & Francis Group. USA, 2007, pp 165-168.

$$\sigma_{ij} = 2G\left[\varepsilon_{ij} + \left(\frac{3K}{2G} - 1\right)\varepsilon\, g_{ij}\right] - 2G\,\omega\, D_{ij}(\varepsilon) \qquad (5.11)$$

Бу ерда $\omega(\varepsilon_{ij})$ - Ильюшиннинг пластиклик функцияси:

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{3G\varepsilon_i - \sigma_i}{3G\varepsilon_i}\,;\ \ \varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \qquad (5.11')$$

5.3. Пластик оқиш назарияси (инкрементал назария).

Конструкция элементларида динамик юкланиш жараёни кўпинча мураккаб бўлиб, юкланиш ва юксизланиш кўп марта қайтарилиши ва катта деформациялар бўлиши кузатилади. Бунда пластик оқиш назарияси экспериментлардан олинган натижаларга кўп ҳолларда мос келади. Ушбу назарияга асосан Прандть-Рейес тенгламалари ЭПМ моделини беради:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G}\left[\dot{\sigma}_{ij} + \left(\frac{2G}{3K} - 1\right)\dot{\sigma}\, g_{ij}\right] + \dot{\lambda}\, D_{ij}(\sigma), \qquad (5.12)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i^2}\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} \qquad (5.13)$$

Бу ерда параметрлар устидаги нуқта вақт бўйича ҳосилани билдиради; $d\varepsilon_{ij}^p$ - қолдиқ деформация орттирмаси.

Қаттиқ-пластик муҳит модели Сен-Венан-Мизеснинг пластик оқиш назариясига кўра ушбу

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{\dot{\varepsilon}_i}{\sigma_T} D_{ij}(\sigma) \qquad (5.14)$$

аниқловчи тенглама билан тавсифланади.

5.4. Ёпишқоқ-эластик муҳитлар.

Кучланиш ва деформация орасидаги боғланишда вақт қатнашган материаллар ёпишқоқ-эластик деб аталади. Полимерлар ва уларнинг композицияси, қотишмалар, бетонлар, тоғ жинслари, юқори ҳарорат таъсиридаги материаллар ва б. ёпишқоқ-эластик материалларга мисол бўлади.

Мазкур материаллар учун қуйидагилар характерли:

а) релаксация – деформация ўзгармаса ҳам кучланишнинг ўзгариши

б) судралувчанлик – кучланиш ўзгармаса ҳам деформациянинг ўзгариши.

Ёпишқоқ-эластик муҳитларнинг $\sigma - \varepsilon$ диаграммасига юкланиш режими (тезлиги) жиддий таъсир этади. Больцман ёпишқоқ-эластик муҳитлардаги деформация жараёнини тавсифлаш учун суперпозиция принципи асосида қурилган ёпишқоқ-эластиклик назариясини таклиф этган. Ушбу назарияга кўра релаксация ва судралувчанлик жараёнлари учун аниқловчи тенгламалар мос равишда

$$\frac{\sigma(t)}{E} = \varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(\tau) K_1(t-\tau)\,d\tau \qquad (5.15)$$

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E}+\frac{1}{E}\int_0^t K_2(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \qquad (5.16)$$

кўринишга эга. Бу ерда $K(t-\tau)$- таъсир функцияси, у $t-\tau$ ўсиши билан камаювчи функция бўлиб, $K(t-\tau)=0,\ t<\tau$.

Кўпгина соддароқ моделлар, хусусан Максвелл модели (расм 11)

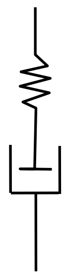
$$G\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}+\frac{\sigma}{\tau} \qquad (5.17)$$

ва Фойхт модели (расм 12)

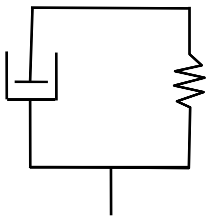
$$\sigma=G\varepsilon+\mu\dot{\varepsilon} \qquad (5.18)$$

ишлатилади[18].

Бу ерда σ-урунма кучланиш, ε- силжиш деформацияси, $\tau=\frac{\mu}{c}$- релаксация вақти.



Расм 11



Расм 12

Назорат саволлари:

1. Идеал-пластик жисм учун турли моделлар таклиф этилган. Уларни айтиб утинг.
2. Кучланиш ва деформация орасидаги боғланишда вақт қатнашган материаллар қандай аталади?
3. Тресканинг олтибурчаги бу - ...
4. Лоде тажрибаларда нимани аниқлаган?
5. Ильюшин пластиклик функцияси бу - ...
6. Юкланиш сирти (мустаҳкамланувчи материаллар) ёки оқувчанлик сирти (идеал-пластик материаллар) деб ...
7. Туташ муҳитнинг икки ёки ундан кўп механик хоссалари эътиборга олинган моделлар қандай аталади?
8. Қандай моделлар мураккаб моделлар деб аталади?
9. Тўққиз ўлчовли кучланиш фазосида чегара нима деб аталади?

[18] Ellis H. Dill. Continuum mechanics. Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity. Taylor & Francis Group. USA, 2007, pp 213-216.

Асосий адабиётлар:

1. Ellis H. Dill. Continuum mechanics. Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity. Taylor & Francis Group. USA, 2007.

2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 2004 (электрон вариант).

3. Прикладная механика сплошных сред. Т.2. Под редак. В.В.Селиванова, МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. (электрон вариант).

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-амалий машғулот:

Гравитацион майдонлардаги траекторияларни оптималлаштириш.

Амалий машғулотда экстремал траекторияларни топишга тегишли Гамильтон тенгламаларига кўра, аниқ масалалар кўрилади. Бунда классик усул, трансверсаллик шартлари ва экстремуми талаб қилинаётган функция ёрдамида ёпиқ тенгламалар системаси келтириб чиқарилиб, экстремал траекториялар аниқланади. Бу тингловчиларга илмий изланишларига тегишли масалаларда экстремал траекторияларни аниқлаш тажрибасини оширади.

2-амалий машғулот:

Механик система устуворлиги ва бошқарилиши, ҳаракатни барқарорлаштиришни тадқиқ этиш.

Амалда аниқ масалаларнинг хусусий ечимларини устуворликка текширишда Ляпунов функциясини хозирда маълум бўлган учта усулига таянилади (квадратик форма кўринишида, биринчи интегралларнинг комбинацияси кўринишида ва алмаштиришлар ёрдамида масалани Ляпунов функцияси маълум бўлган системага келтириш). Ноустувор масалани устувор қилиш системада чизиқли регулятор киритиш йўли билан амалга оширилади. Бу эса маърузада ўрганилган назарияни амалдаги қўлланилиши бўлиб, тингловчиларда мавзуни чуқуррок ўрганишига ёрдам беради.

3-амалий машғулот:

Ноидеал шартли боғланишли бошқарилувчи механик системалар динамикаси.

Амалий машғулотда шартли боғланишли системаларнинг ҳаракат тенгламаларини Аппель тенгламалари кўринишида келтириб чиқариш мўлжалланган. Бунда аниқ системанинг ҳаракат тенгламалари масаласида реакция кучлари таъсирида дастурий ҳаракатни амалга ошириш муаммоси кўриб чиқилади Бунда тингловчилар шартли боғланишларни хақиқийга келтириш аксиомасига кўра ҳаракат тенгламаларини ва бу шартли боғланишни амалга ошириш шартларини тахлил қилиш билан танишишади. Кейинги босқичда боғлаланишдан озод система ҳаракати ўрганилиб, тенгламалар системасининг фарқи кўриб чиқилади.

4-амалий машғулот:

Бошқарилувчи механик системалар. Ҳаракат тенгламалари.

Амалий машғулотда шартли боғланишни гирокомпас ҳаракатида амалга ошириш   масаласи кўрилади. Асоси ҳаракатланадиган гирокомпасни ҳаракат тенгламалари асосида, уни мақсадли фойдаланиш функциясига кўра ротор ўқини ҳар доим шимолни кўрсатишини амалга ошириш назарда тутилган. Ҳаракат тнгламаларига кўра, асимптотик турғун ҳаракатни амалга оширувчи моментлар икки хил йўл билан танланади.

5 – амалий машғулот:
Умумлашган Гук қонуни. Термоэластик жисм модели.

Эркин энергияга қўйиладиган айрим шартлар асосила бир ўлчовли масалада умумлашган Гук қонуни ва термоэластик модел келтириб чиқарилади. Бунда мухитга тегишли асосий механик хусусиятларини белгиловчи катталиклар кўриб чиқилади ва механик тахлил қилинади. Бунда тингловчилар ҳар бир моделни қўлланиш доираси тўғрисида кўникмага эга бўладилар.

6 – амалий машғулот:
Мураккаб хоссали муҳитларда тўлқин тарқалиши.

Эластик-пластик муҳитда юкланиш тўлқинларининг тарқалишига оид масала кўрилади ва. кучланиш-деформация диаграммаси тузилиб, механик талқин қилинади. Фойхт моделига бўйсунадиган мухитларда тўлкин тарқалишига оид ва тўлқинларининг сўнувчанлиги ва фазовий тезликнинг частотага боғлиқлиги каби мухитнинг асосий хусусиятлари анақ масалади кўрилади. Бундай масала тингловчиларни оддий эластик модел билан бошқа моделлар орасидаги фарқини тушунишларида ёрдам беради.

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

Кичик кейс 1. “Вариацион масаланинг қўйилишига тегишли муаммоли масала”.

Муаммонинг қўйилиши: Бошқарувчи параметр чегараланган ҳолдаги масалани чегараланган масала билан алмаштирилганда экстремал траекториялар бир хил бўладими?

Тингловчилардан олинган жавоблар қуйидагича:

1. Қўйилган масалаларнинг ечимларида фарқ бўлмайди.
2. Вейерштрасс шартлари бажарилганда траекториялар бир хил бўлиши мумкин.

Нима учун бундай жавоблар келиб чиқди ва унинг сабаби. Вазиятдан чиқиш йўлини кўрсатинг.

Кичик -кейс 2. “Шартли боғланишли системага тегишли мулоҳаза”.

Муаммонинг қўйилиши: Горизонтал текисликда жойлашган шарни ҳаракати ўрганилмоқда. Бунда вертикал ўқ атрофидаги айланма ҳаракатни икки хил йўл билан амалга ошириш мумкин. 1. Текисликни маълум бир қонун бўйича ҳаракатланиши ҳисобига. 2. Шарга қўйилган актив куч ҳисобига. Қайси бир усулда шартли боғланишни бажарилиши талаб қилинади?

Тингловчилардан олинган жавоблар қуйидагича:

1. Бундай ҳаракатни фақатгина иккинчи ҳолда амалга ошириш мумкин.
2. Иккала ҳолда ҳам амалга ошириш мумкин.

Кичик -кейс 3. “Устуворлик масаласи билан оптимал стабиллаш масалалари орасида боғлиқлик тўғрисида”.

Механик системалардаги хусусий ҳаракатни устуворлиги ва уни оптимал стабиллаш масалалари орасида қандай фарқ бор:

Тигловчилар томонидан келтирилган жавоблар қуйидагилардан иборат бўлди:

1. Бу масалалар мазмунан бир хил.
2. Устуворлик масаласи оптимал стабиллашни ўз ичига олади.

Нима учун бундай жавоблар пайдо бўлди. Бунинг асосий сабаби нимада.

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни.

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган холда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва меъёрий хужжатлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мустақил таълим мавзулари.

1. Марказий Ньютон майдонида вариацион масаланинг дифференциал тенгламаларини сферик координаталар системасида келтириб чиқариш.
2. Марказий Ньютон майдонида нол тортишиш қисмларида базис-векторнинг ҳолати.
3. Марказий Ньютон майдонида оралиқ тортишиш қисмларида базис-векторнинг ҳолати.
4. Орбитал учиб ўтишларда импульсли тортишишни қўллаш.
5. Ноидеал боғланишли системаларга тегишли адабиётларни ўрганиш ва аниқ масалаларни ечишда қўллаш.
6. Аниқ системаларда стабиллаш ва оптимал стабиллаш муаммолари.
7. Эластик-пластик муҳитда юкланиш тўлқинлари.

VII. ГЛОССАРИЙ

Ибоpалар	Ўзбек тилидаги маъноси	Инглиз тилидаги маъноси
Ҳақиқий аномалия	тортиш марказидан перигейга ўтказилган ўқ билан радиус вектор орасидаги бурчак.	the angle measured from the direction of the periapsis of the orbit to the radius vector of the moving point
Апогей	Ер ёки Ой атрофида ҳаракатланаётгаан сунъий йўлдош орбитасини тортиш марказигача бўлган энг яқин масофа	the most distant point from Earth orbit an artificial satellite of the Earth or the Moon
Апоцентр	Ер ёки Ой атрофида ҳаракатланаётгаан сунъий йўлдош орбитасини тортиш марказигача бўлган энг узоқ нуқтаси	the orbit of the point farthest from the center of gravity
Апсидаль нуқталар	перимарказ ва апомарказ нуқталар	pericentre and apocentre
Астрономик бирлик	Ердан Қуёшгача бўлган ўртача масофа	the average distance from Earth to the Sun.
Афелий	Қуёш атрофида ҳаракатланаётган жисм орбитасини Қуёшдан энг узоқлашган нуқтаси	the most distant point from the Sun orbit of a celestial body orbiting the Sun.
Базис вектор	тезлик векторига мос келувчи Лагранж кўпайтувчиси	Lagrange multiplier, dual speed point
Гравитацион параметр	жисм массасини гравитация доимийсига кўпайтмаси	product of attraction of body weight on the gravitational constant
Вектор гадографи	вектор учидаги нуқтанинг траекторияси.	trajectory, which describes the end of the vector

Иккинчи космик тезлик	планета учун параболик тезлик	local escape velocity on the surface of the planet
Барицентр	жисмлар системасининг масса маркази	center of mass of a system of bodies
Инерциал санок системаси	динамика қонунлари ўринли бўладиган санок системаси	reference system in which the validity of the basic laws of dynamics, and in relation to which a material point on which no forces act moves uniformly in a straight line
Гравитация доимийси	миқдор жиҳатдан бирлик массали ва бирлик масофада жойлашган жисмлар орасидаги тортиш кучи.	equal in magnitude to the force with which attract each other in terms of unit mass, located at unit distance from each other
Апсид чизиғи	орбитанинг фокаль ўқи	the focal axis of the orbit
Тугун чизиғи	Ерни экватор текислиги билан нуқта орбитаси кесишадиган чизиқ	orbital plane line of intersection point with the plane of Earth's equator
Леви-Чивита усули	Гамильтон системасининг хусусий ечимни топиш усули	determining the partial solutions of Hamiltonian systems method
Оғиш бурчаги	орбита текислиги билан Ерни экватор текислиги орасидаги бурчак	the angle between the orbital plane and the plane of Earth's equator
Ўзгармас Лаплас текислиги	марказий куч таъсирида ҳаракатлангаётган нуқта текислиги	the plane in which the point is moving under the influence of a central force
Перицентр	тортиш марказига энг яқин бўлган орбитанинг нуқтаси	point of the orbit closest to the center of gravity

Прецессия (прецессион ҳаракат)	хусусий айланиш ўқини прецессия ўқи атрофидаги айланма ҳаракати	the rotation axis of the rotation of the body around its own axis precession
Лоуден спирали	марказий куч таъсирида текисликдаги ўрта тортишга мос келувчи траектория	intermediate portions of the thrust in the plane case the central Newtonian field
Вейерштрасса шарти	функционални минумумга эга бўлишининг зарурий шарти	a necessary condition for a weak minimum of the functional
Марказий куч	таъсир чизиғи доимо марказдан ўтадиган куч	force whose line of action passes through the same fixed point, called the center of power
Марказий ньютон майдони	тортиш марказидан нуқтагача бўлган масофани квадратига тескари пропорционал бўлган куч	the gravitational field produced by the central force inversely proportional to the square of the distance from the point of moving to the center of power

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ:

1. Lawden D.F. Optimal Trajectories for Space Navigation Butterworth, Washington, D.C. 2003
2. Natalya.A.Korshunova and Dilmurat.M.Azimov. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // «Journal of Guidance, Control, and Dynamics» (AIAA), USA, 2014. V.37, №5, pp. 1716-1719.
3. Azizov A.G.,Korshunova N.A. On an analytical solution of optimum trajectory problem in a gravitational field // Celestial Mech.- 1986.- V.38. № 4.
4. Коршунова Н.А., Зиядинова Э.Д. Стабилизация движения точки на участках промежуточной тяги в поле двух неподвижных центров//Узбекский журнал «Проблемы механики».- 2011, № 1.- С.3-5.
5. Коршунова Н.А., Зиядинова Э.Д. Применение метода Докшевича при оптимизации траекторий в поле двух неподвижных центров // Узбекский журнал «Проблемы механики» ».- 2012, № 3.- С.3-6.
6. Зиядинова Э.Д., Коршунова Н.А. Методы определения аналитических решений для активных участков в поле двух неподвижных центров// Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды X Международной Четаевской конференции, том 1, Секция 1. Аналитическая механика.- Казань, 2012, С. 192-200
7. Herbert Goldstein. Classical Mechanics. Pearson New International Edition. USA, 2013
8. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. 3-е изд. М.: Физматлит, 2002. — С. 262. — ISBN 5-9221-0067-X.
9. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. М.: НИЦ «РХД», ИКИ, 2011.
10. Журавлев В.Ф. 500 лет истории закона сухого трения// Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Естественные науки". 2014. № 2.
11. Ellis H. Dill. Continuum mechanics. Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity. Taylor & Francis Group. USA, 2007.
12. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 2004 (электрон вариант).
13. Прикладная механика сплошных сред. Т.2. Под редак. В.В.Селиванова, МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. (электрон вариант).

Интернет ресурслар:

1. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/theoretical.htm/
2. http://www.ruscommech.ru/
3. http://www.knigapoisk.ru/book
4. www.natlib.uz
5. www.twirpx.com