ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“ГЕОМЕТРИЯНИНГ ЗАМОНАВИЙ МАСАЛАЛАРИ”

модули бўйича

Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тошкент – 2017

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2017 йил 24 августдаги 603-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: ЎзМУ, **профессор А.Я.Нарманов**

Тақризчи: Prosessor Zair Ibragimov
Departament of Mathematics
California State University
Fullerton, California, USA

Ўқув -услубий мажмуа ЎзМУнинг ...... кенгашининг 2016 йил __________даги ___-сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш.

Дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПФ-4732-сонли, 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сонли Фармонлари, шунингдек 2017 йил 20 апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ–2909-сонли қарорида белгиланган устивор вазифалар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир. “Геометриянинг замонавий масалалари” модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

Ушбу “Геометриянинг замонавий масалалари” курси мутахассислик фанларининг асосийларидан бири ҳисобланади. Бу курсда математика ўқитишнинг умумий усулларини ва янги информацион технологиялар ёрдамида олий математикани ўқитишнинг илғор усуллари ўрганилади.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

“Геометриянинг замонавий масалалари” модулининг мақсади: педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси тингловчиларини олий таълимда математика ва унинг бўлимлари бўйича билимларини такомиллаштириш, информацион технологияларни жорий этиш шунингдек, уларда олий таълимнинг олий математика ва уни ўқитиш бўйича кўникма ва малакаларини шакллантириш.

Модулнинг вазифалари:

- **Геометрия** бўйича тингловчиларда кўникма ва малакаларни шакллантириш;
- **Геометрия** бўйича информацион технологиялардан фойдаланиш малакалаини шакллантириш;
- Аналитик геометрия, дифференциал геометрия ва риман геометриясининг асосий бўлимлари билан таништиришдан иборатдир.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар

“Геометриянинг замонавий масалалари” курсини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида:

Тингловчи:

- геометрия ва унинг бўлимлари, уни ўқитиш бўйича янги технологияларни билиши;
- геометрия бўлимлари ва уларнинг ривожланиш истиқболлари ҳақида тасаввурга эга бўлиши;
- геометрия бўлимлари бўйича янги **назарий билимларга эга бўлиши**;

Тингловчи:

- касбий фаолият соҳаларида олий математика ва унинг бўлимлари, уни ўқитиш бўйича янги технологияларни амалиётда қўллаш каби **кўникма ва малакаларини эгаллаши лозим.**

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

“Геометриянинг замонавий масалалари” курси маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

“Геометриянинг замонавий масалалари” “Математик анализнинг махсус боблари”, “Алгебраик тизимлар ва оператор алгебралар назарияси” фанлари билан чамбарчас боғлиқдир.

Ушбу фанни ўқитиш жараёнида традицион шакллардан ташқари янги педагогик технологиялар ҳам ишлатилади. Бунда математик дастурлар Powerpoint, Maple, Mathcad ва мавжуд электрон дарсликлар, веб сайтлардан фойдаланилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни

Геометрия фани республика олий ўқув юртларида математика фанини юқори илмий ва методик савияда ўқитишни таъминлашда, математика ўқитувчиларининг юқори савиядаги педагог бўлишлари, келажакда илмий изланишлар олиб боришда учун асосий ўрин тутади.

Бу курсда геометрия бўлимлари, унинг асосий тушунчаларини ўқитиш методикаси билан таништириш кўзда тутилган.Бундан ташқари олий математикани ўиқтишда янги информацион технологиялардан фойдаланишни ўргатиш ҳам кўзда тутилган.

“Геометриянинг замонавий масалалари” Модул бўйича соатлар тақсимоти

№	Модул мавзулари	Тингловчининг ўқув юкламаси, соат				
		Ҳаммаси	Аудитория ўқув юкламаси			Мустақил таълим
			Жами	жумладан		
				Назарий	Амалий машғулот	
1.	Аналитик геометрия фани ва унинг предмети: иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртлар	4	4	2	2	
2.	Дифференциал геометрия фани ва унинг предмети.Чизиқлар назарияси	4	4	2	2	
3.	Сиртлар назарияси	6	6	2	4	
4.	Риман геометрияси элементлари. Чигер-Громол проблемаси	8	6	2	4	2
Жами:		**22**	**20**	**8**	**12**	**2**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Аналитик геометрия фани ва унинг предмети: иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртлар.

Ўзбекистонда геометрия фани истиқболлари. Замонавий геометрия муаммолари, унинг математика, назарий физика ва бошқа соҳалардаги татбиқлари.

Аналитик геометрия фани ва унинг предмети. Иккинчи тартибли чизиқлар. Иккинчи тартибли чизиқлар ва тўғри чизиқлар.

2-Мавзу: Дифференциал геометрия фани ва унинг предмети. Чизиқлар назарияси

Аналитик геометрия масалалари. Дифференциал геометрия масалалари. Чизиқлар назарияси. Френе формулалари. Сиртлар назарияси. Йўналиш бўйича эгриликлар. Бош эгриликлар ва бош йўналишлар. Эгрилик чизиқлари. Дифференциал геометрия масалалари. Эгри чизиқ тушунчаси ва чизиқнинг берилиш усуллари. Чизиқлар назариясининг асосий масалалари.

3-Мавзу: Сиртлар назарияси

Векторларни параллел кўчириш. Геодезик чизиқлар. Пуанкаре гипотезаси ва унинг Перельман томонидан ҳал қилиниши. Чигер-Громол проблемаси ва унинг ҳал қилиниши. Сиртлар назарияси. Йўналиш бўйича эгриликлар. Бош эгриликлар ва бош йўналишлар. Эгрилик чизиқлари. Векторларни параллел кўчириш. Геодезик чизиқлар.

4-Мавзу: Риман геометрияси элементлари. Чигер-Громол проблемаси

Риман геометрияси элементлари. Эгрилиги номанфий кўпхилликлар геометрияси. Чигер-Громол проблемаси ва унинг ҳал қилиниши. Замонавий геометрия бўйича ҳалқаро конференцияларда таклиф этилган муаммолар ва уларнинг ечимларининг таҳлили.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Амалий машғулот

Аналитик геометрия фани ва унинг предмети: иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртлар.

Иккинчи тартибли чизиқлар. Иккинчи тартибли чизиқларнинг классификацияси. Иккинчи тартибли чизиқ тенгламаларини соддалаштириш.

2-Амалий машғулот

Дифференциал геометрия фани ва унинг предмети. Чизиқлар назарияси

Иккинчи тартибли сиртлар. Иккинчи тартибли сиртларнинг классификацияси. Иккинчи тартибли сиртга доир турли масалаларни ечиш. Тенгламаларни соддалаштириш.

3-Амалий машғулот

Сиртлар назарияси

Дифференциалланувчи функциялар ёрдамида параметрланган эгри чизиқлар. Эгри чизиқ эгрилиги, буралиши. Ёй узунлигини ҳисоблаш.

4-Амалий машғулот

Риман геометрияси элементлари. Чигер-Громол проблемаси

Дифференциалланувчи функциялар ёрдамида параметрланган сиртлар. Сирт устида ётувчи чизиқлар. Бош эгриликлар ва бош йўналишларни ҳисоблаш. Эгрилик чизиқларини топиш. Сирт устида геодезик чизиқларни топиш.

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ

Тингловчи мустақил ишни модулни хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва меъёрий хужжатлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш;
- фанга оид статистик маълумотларни ўрганиш, уларни таҳлил қилиш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модулни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, педагогик технологиялар ва ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва интерфаол педагогик (Ақлий хужим, Венн диаграммаси, концептуал жадвал) усул ва технологиялардан фойдаланилади;

ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, график органайзерлардан, кейслардан фойдаланиш, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, блиц-сўровлардан ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

ЖОРИЙ НАЗОРАТ(АССИСМЕНТ)НИ БАҲОЛАШ МЕЗОНИ

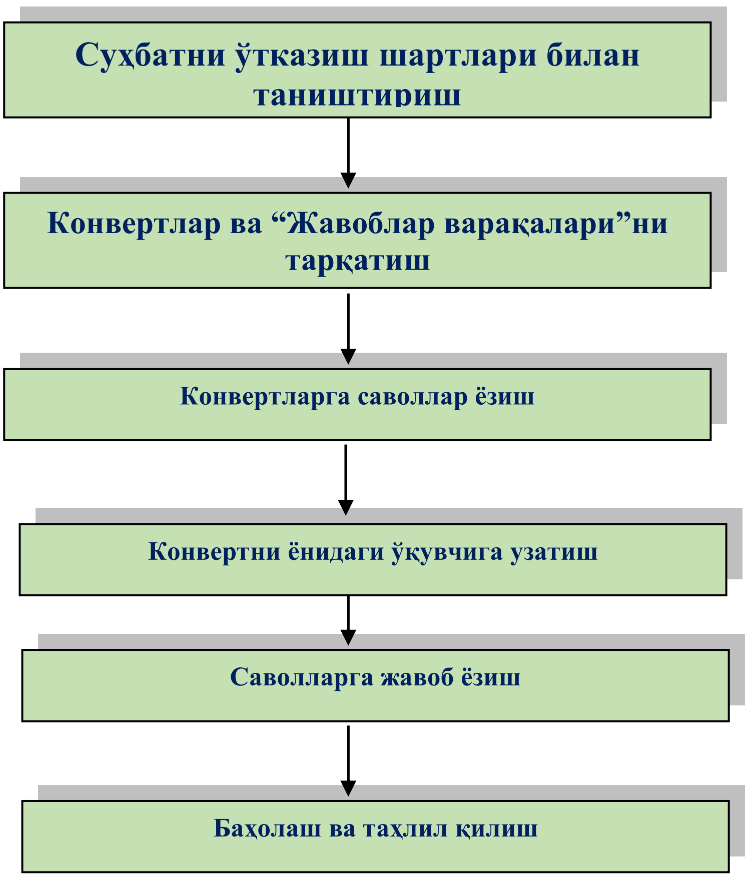
Жорий назорат(ассисмент)ни бахолаш Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва уларнинг малакасини ошириш Тармоқ (минтақавий) марказида тасдиқланган шакллари ва мезонлари асосида амалга оширади.

Ушбу модулнинг жорий назорат(ассисмент)га ажратирлан максимал балл-**0,6 балл.**

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

Давра столининг тузилмаси.

Ёзма давра суҳбатида стол-стуллар айлана шаклида жойлаштирилиб, ҳар бир таълим олувчига конверт қоғози берилади. Ҳар бир таълим олувчи конверт устига маълум бир мавзу бўйича ўз саволини беради ва “Жавоб варақаси”нинг бирига ўз жавобини ёзиб, конверт ичига солиб қўяди. Шундан сўнг конвертни соат йўналиши бўйича ёнидаги таълим олувчига узатади. Конвертни олган таълим олувчи ўз жавобини “Жавоблар варақаси”нинг бирига ёзиб, конверт ичига солиб қўяди ва ёнидаги таълим олувчига узатади. Барча конвертлар айлана бўйлаб ҳаракатланади. Якуний қисмда барча конвертлар йиғиб олиниб, таҳлил қилинади. Қуйида “Давра суҳбати” методининг тузилмаси келтирилган



“Давра суҳбати” методининг афзалликлари:

- ўтилган материалининг яхши эсда қолишига ёрдам беради;
- барча таълим олувчилар иштирок этадилар;
- ҳар бир таълим олувчи ўзининг баҳоланиши масъулиятини ҳис этади;

ўз фикрини эркин ифода этиш учун имконият яратилади **“Кейс-стади” методи**

«Кейс-стади» - инглизча сўз бўлиб, («case» – аниқ вазият, ҳодиса, «stadi» – ўрганмоқ, таҳлил қилмоқ) аниқ вазиятларни ўрганиш, таҳлил қилиш асосида ўқитишни амалга оширишга қаратилган метод ҳисобланади. Мазкур метод дастлаб 1921 йил Гарвард университетида амалий вазиятлардан иқтисодий бошқарув фанларини ўрганишда фойдаланиш тартибида қўлланилган. Кейсда очиқ ахборотлардан ёки аниқ воқеа-ҳодисадан вазият сифатида таҳлил учун фойдаланиш мумкин. Кейс ҳаракатлари ўз ичига қуйидагиларни қамраб олади: Ким (Who), Қачон (When), Қаерда (Where), Нима учун (Why), Қандай/ Қанақа (How), Нима-натижа (What).

“Кейс методи” ни амалга ошириш босқичлари.

Иш босқичлари	**Фаолият шакли ва мазмуни**
1-босқич: Кейс ва унинг ахборот таъминоти билан таништириш	✓ якка тартибдаги аудио-визуал иш; ✓ кейс билан танишиш(матнли, аудио ёки медиа шаклда); ✓ ахборотни умумлаштириш; ✓ ахборот таҳлили; ✓ муаммоларни аниқлаш
2-босқич: Кейсни аниқлаштириш ва ўқув топшириғни белгилаш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муаммоларни долзарблик иерархиясини аниқлаш; ✓ асосий муаммоли вазиятни белгилаш
3-босқич: Кейсдаги асосий муаммони таҳлил этиш орқали ўқув топшириғининг ечимини излаш, ҳал этиш йўлларини ишлаб чиқиш	✓ индивидуал ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил ечим йўлларини ишлаб чиқиш; ✓ ҳар бир ечимнинг имкониятлари ва тўсиқларни таҳлил қилиш; ✓ муқобил ечимларни танлаш
4-босқич: Кейс ечимини ечимини шакллантириш ва асослаш, тақдимот.	✓ якка ва гуруҳда ишлаш; ✓ муқобил вариантларни амалда қўллаш имкониятларини асослаш; ✓ ижодий-лойиҳа тақдимотини тайёрлаш;

	✓ якуний хулоса ва вазият ечимининг амалий аспектларини ёритиш

“Ассесмент” методи.

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур техника орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (тест, амалий кўникмалар, муаммоли вазиятлар машқи, қиёсий таҳлил, симптомларни аниқлаш) бўйича ташҳис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби:

“Ассесмент”лардан маъруза машғулотларида талабаларнинг ёки қатнашчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, семинар, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассесментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

III. НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-мавзу: АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ФАНИ ВА УНИНГ ПРЕДМЕТИ: ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР ВА СИРТЛАР.

РЕЖА:

1.1. Аналитик геометрия фани ва унинг предмети.

1.2. Иккинчи тартибли чизиқлар ва тўғри чизиқлар.

Таянч иборалар: *аналитик геометрия, иккинчи тартибли чизиқлар, иккинчи тартибли сиртлар*.

1.1.Аналитик геометрия фани ва унинг предмети.

Текислик ёки фазода координаталар системасини киритганимизда, геометрик фигурага тегишли нуқталар координаталарга эга бўлади. Агар фигурага тегишли нуқталарнинг координаталари бирор алгебраик тенгламани қаноатлантирса, у алгебраик тенглама билан аниқланувчи геометрик фигура дейилади. Масалан, маркази $A(a,b)$ нуқтада бўлган ва радиуси R га тенг айлана тенгламаси $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$ кўринишга эга бўлади.

Аналитик геометрия курсида ўрганиш методларининг асосини координаталар методи ташкил қилади [1-4]. Биз асосан фигураларни уларнинг тенгламалари ёрдамида ўрганамиз, яъни алгебраик тенгламаларини ўрганиш билан шугулланамиз. Бу эрда алгебраик методлар асосий ролни ўйнайди. Биз асосан биринчи ва иккинчи даражали тенгламалар билан иш кўрамиз. Аналитик геометрия курсида ўрганиладиган геометрик фигуралар синфи унчалик катта бўлмаса ҳам, биринчи ва иккинчи даражали тенгламалар билан аниқланувчи геометрик фигуралар фан ва техникада жуда катта рол ўйнайди [1].

Биринчи даражали алгебраик тенгламалар билан аниқланувчи геометрик фигуралар – тўғри чизиқ ва текисликдир. Ушбу асосий геометрик фигуралар билан сиз элементар геометрия курсидан танишсиз. Текисликда иккинчи даражали тенгламалар иккинчи тартибли чизиқларни, фазода эса иккинчи тартибли сиртларни аниқлайди. Юқоридаги мисолдан кўринадики, айлана иккинчи тартибли чизиқдир.

Фазода $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$ тенглама билан аниқланувчи нуқталар тўплами эса сферадан иборат бўлиб, у иккинчи тартибли сиртдир.

Аналитик геометрия курсида векторлар алгебраси ҳам ўрганилади. Вектор тушунчаси муҳим фундаментал тушунчалардан бўлиб, фақатгина аналитик геометрия курсида эмас, балки математиканинг бошқа бўлимларида ҳам муҳим рол ўйнайди.

Биз бу бобда текисликда декарт координаталар системасида

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \quad (1)$$

тенглама билан берилган иккинчи тартибли чизиқни текшириш билан шуғулланамиз. Бу ишни координаталар системасини ўзгартириш ва (1) тенгламани соддалаштириш ёрдамида амалга оширамиз. Биринчи навбатда параллел кўчиришда (1) тенглама коэффицентлари қандай ўзгаришини текширамиз. Бунинг учун

$$x'=x-x_0, \qquad y'=y-y_0 \quad (2)$$

формулалар ёрдамида алмаштиришларни бажарамиз. Бу ҳолда координата ўқларининг йўналишлари ўзгармайди, фақат координата боши $O'(x_0,y_0)$ нуқтага кўчади. Бу формулалардан x,y ларни топиб ва (1) га қўйиб

$$a'_{11}(x')^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}(y')^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0 \quad (3)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламада коэффицентлар учун

$$a'_{11}=a_{11}, \quad a'_{12}=a_{12}, \quad a'_{22}=a_{22}\ ,$$

$$a'_{13}=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}, \quad a'_{23}=a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}, \quad a'_{33}=F(x_0,\ y_0) \quad (4)$$

тенгликлар ўринли бўлиб, $F(x,\ y)$ билан (1) тенгламанинг чап томонидаги ифода белгиланган.

Юқоридаги (3) формулалардан кўриниб турибдики, паралллел кўчиришда иккинчи даражали ҳадлар олдидаги коэфициентлар ўзгармайди. Агар $O'(x_0,y_0)$ нуқтанинг координаталари

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}&=0\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}&=0, \end{aligned} \quad (5)$$

системани қаноатлантирса, (3) тенгламада биринчи даражали ҳадлар қатнашмайди.

Бундан ташқари, агар $O'(x_0,y_0)$ нуқтанинг координаталари (5)системани қаноатлантирса, $O'(x_0,y_0)$ нуқта иккинчи тартибли чизиқ учун симметрия маркази бўлади. Ҳақиқатан ҳам бу ҳолда координаталар марказини $O'(x_0,y_0)$ нуқтага кўчирсак, тенгламада биринчи даражали ҳадлар қатнашмайди. Шунинг учун янги координаталар системасида

$$F(x',\ y')=F(-x',-y')$$

тенглик ўринли бўлади. Демак, $O'(x_0,y_0)$ нуқта чизиқ учун симметрия марказидир. Ва аксинча, агар бирорта A нуқта чизиқ учун симметрия маркази бўлса унинг координаталари (5) системани қаноатлантиришини кўрсатамиз. Координата боши A нуқтага жойлаштириб, янги x,y координаталар системасини киритамиз. Агар $M(x,y)$ нуқта чизиққа тегишли бўлса,

$$F(x,\ y)=0$$

тенглик ўринли бўлади. Координата боши симметрия маркази бўлгани учун $F(-x,-\ y)=0$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Бу тенгликларни иккинчисини биринчисидан айириб

$$a_{12}x+a_{23}=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар a_{13}, a_{23} коэффицентларнинг камида биттаси нолдан фарқли бўлса, бу тенглама тўғри чизиқни аниқлайди, яъни иккинчи тартибли чизиқнинг ҳамма нуқталари бир тўғри чизиқда ётади. Агар иккинчи тартибли чизиқ бир тўғри чизиқда ётмаса, бу коеффисиентларнинг ҳар иккаласи ҳам нолга тенг бўлади. Бу эса A нуқтанинг координаталари (5) системани қаноатлантиришини кўрсатади. Бу фактларни ҳисобга олсак қуйидаги таърифнинг геометрик маъноси яхши тушинарли бўлади.

Таъриф-1. Текисликдаги $M_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг координаталари (5) системани қаноатлантирса, у (1) тенглама билан берилган икккинчи тартибли чизиқнинг маркази дейилади.

Табиийки, (5) система ягона ечимга эга бўлиши, чексиз кўп ечимга эга бўлиши ёки умуман ечимга эга бўлмаслиги мумкин. Агар

$$a_{11}a_{22}-a^2{}_{21}\neq 0$$

муносабат ўринли бўлса, (5) система ягона ечимга эга бўлади. Агар

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$$

муносабат ўринли бўлса система чексиз кўп ечимга,

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{a_{13}}{a_{23}}$$

муносабат бажарилса система ечимга эга эмас. Буларни эътиборга олиб, биз иккинчи тартибли чизиқларни учта синфга ажратамиз:

а) ягона марказга эга бўлган чизиқлар;

б) чексиз кўп марказга эга бўлган чизиқлар;

в) марказга эга бўлмаган чизиқлар;

Биз қуйидаги детерминантларни киритамиз

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}, \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

бу ерда $a_{21}=a_{12}$, $a_{31}=a_{13}$, $a_{32}=a_{23}$ белгилашлар киритилган. Ягона марказга эга чизиқлар учун $\delta\neq 0$, ягона марказга эга бўлмаган чизиқлар учун $\delta=0$. Чизиқлар чексиз кўп марказга эга бўлиши учун $\Delta=0$ тенглик бажарилши керак.

Учинчи тартибли детерминантни

$$\Delta=a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}+a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

кўринишда ёзиб олсак, охирги детерминант δ га тенгдир. Агар $\delta=0$ бўлса, бирорта k сони учун

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=k \ , \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

Муносабат бажарилади. Бу тенгликни ҳисобга олиб

$$\Delta=\left(a_{13}-ka_{23}\right)\begin{vmatrix}a_{12} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Агар $\Delta=0$ тенглик ҳам бажарилса

$$a_{13}-k\,a_{23}=0\,\text{ва}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=0$$

тенгликлардан камида биттаси ўринли бўлади. Бу тенгликларнинг биринчиси ўринли булса, $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=k$ муносабатдан $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}=k$ мунособат келиб чикади. Агар

$$\begin{vmatrix}a_{12} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=0$$

булса, $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=k$ ва $\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}$ тенгликлардан

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}=k$$

мунособат келиб чикади. Демак $\delta=0$ ва $\Delta=0$ тенгликларнинг бир вақтда бажарилиши

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{13}}{a_{23}}=k$$

шартга тенг кучлидир. Натижада биз қуйидаги тасдиқни ҳосил қиламиз:

Тасдиқ-1.Иккинчи тартибли чизиқ

а) $\delta\neq 0$ бўлса ягона марказга эга,

б) $\delta=0$ ва $\Delta=0$ бўлса чексиз кўп марказга эга ва марказлар тўплами битта тўгри чизикни ташкил этади;

в) $\delta=0$ ва $\Delta\neq 0$ бўлса марказга эга эмас.

Тасдиқ-2. Ягона марказга эга бўлган иккинчи тартибли чизиқ маркази унга тегишли бўлиши учун $\Delta=0$тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Иккинчи тартибли чизиқ маркази $M_0(x_0,y_0)$ нуқтада бўлиб, у чизиққа тегишли бўлса

$$\begin{aligned}a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}=0\\ a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}=0\end{aligned}\quad(6)$$

ва

$$a_{11}x_0{}^2+2a_{12}x_0\,y_0+a_{22}y_0{}^2+2\,a_{13}x_0+2\,a_{23}\,y_0+a_{33}=0\quad(7)$$

тенгликлар бажарилади. Юқоридаги (6) тенгликнинг биринчисини x_0 га, иккинчисини y_0 га кўпайтириб, (7) тенгликдан айирсак

$$a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак $(x_0,y_0,1)$ учлик

$$\begin{aligned}a_{11}x\;+a_{12}y\;+a_{13}z=0\\ a_{21}x\;+a_{22}y\;+a_{23}z=0\\ a_{31}\,x\;+a_{32}\,y+a_{33}z=0\end{aligned}\quad(8)$$

бир жинсли системанинг нотривиал ечимидир. Бу эса $\Delta=0$ шартга тенг кучлидир. Аксинча $\Delta = 0$ бўлса, (8) система нотривиал (x_0, y_0, z_0) ечимга эгадир. Бу учликда $z_0 \neq 0$, чунки $\delta \neq 0$. Биз $z_0 = 1$ деб ҳисоблай оламиз, чунки $\delta \neq 0$ бўлганлиги учун ҳар бир z_0 учун (x_0, y_0) жуфтлик мавжуд. Юқоридаги (8) системада $z_0 = 1$ бўлганда (x_0, y_0) жуфтлик марказ координаталари эканлиги келиб чиқади. Бундан ташқари (8) системадан фойдаланиб

$$a_{11}x_0^{\ 2} + 2a_{12}x_0\,y_0 + a_{22}y_0^{\ 2} + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}\,y_0 + a_{33} = 0$$

тенгликни олиш мумкин [1,3,6].

1.2. Иккинчи тартибли чизиқлар ва тўгри чизиқлар.

Бизга (1) тенглама билан аниқланган иккинчи тартибли чизиқ ва

$$\begin{array}{l} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{array} \quad (9)$$

параметрик тенгламалар ёрдамида ℓ тўгри чизиқ берилган бўлсин. Тўғри чизиқ ва иккичи тартибли чизиқнинг кесишиш нуқталарини топиш учун (9) ифодаларни (1) га қўямиз. Натижада қуйидаги

$$\begin{array}{l} \left(a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2\right)t^2 + \\ \quad + 2\left(a_{11}lx_0 + a_{12}\left(ly_0 + mx_0\right) + a_{22}my_0 + a_{13}l + a_{23}m\right)t + F\left(x_0, y_0\right) = 0 \end{array} \quad (10)$$

квадрат тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламада иккинчи даражали ҳад олдидаги ифода тўғри чизиқнинг йўналишига боғлиқ холос. Баъзи йўналишлар учун бу ифода нолга тенг бўлади ва юқоридаги тенглама чизиқли тенгламага айланади. Баъзи йўналишлар учун бу ифода нолга тенг эмас ва юқоридаги тенглама квадрат тенглама бўлади.

Таъриф-1.Берилган $\{\ell, m\}$ *йўналиш учун*

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0 \quad (11)$$

тенглик бажарилса,бу йўналиш асимпотик йўналиш,

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \neq 0 \quad (12)$$

муносабат бажарилса ноасимптотик йўналиш дейилади.

Тўғри чизиқнинг йўналиши ноасимптотик бўлса,юқоридаги тенглама квадрат тенглама бўлади. Демак бу тўғри чизиқ (1) чизиқ билан иккита ёки битта умумий нуқтага эга бўлиши мумкин. Ноасимптотик йўналишдаги тўғри чизиқ иккинчи тартибли чизиқ билан битта нуқтада кесишса, у уринма деб аталади.

Тўғри чизиқнинг йўналиши асимптотик бўлса, юқоридаги тенглама чизиқли тенглама бўлади. Демак бу ҳолда тўғри чизиқ (1) билан битта нуқтада кесишади, ёки тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталари (1) га тегишли бўлади. Агар иккинчи даражали ҳад коэффиценти нолга тенг бўлиб, озод ҳад нолдан фарқли бўлса, тўғри чизиқ иккинчи тартибли чизиқ билан кесишмайди. Асимптотик йўналишдаги тўғри чизиқ иккинчи тартибли чизиқ билан кесишмаса у иккинчи тартибли чизиқ учун асимптота дейилади.

Биз $a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$ тенгламада $\ell \neq 0$ бўлса, $k = \dfrac{m}{\ell}$ белгилаш киритиб, уни

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$$

кўринишда, агар $m \neq 0$ бўлса, $k = \dfrac{\ell}{m}$ белгилаш киритиб, уни

$$a_{11}k^2 + 2a_{12}k + a_{22} = 0$$

кўринишда ёзамиз. Иккала ҳолда ҳам дискриминант учун

$$D = 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} = -4\delta$$

тенглик ўринли. Демак $\delta > 0$ бўлса асимптотик йўналиш мавжуд эмас. Бу ҳолда (1) чизиқ эллиптик чизиқ дейилади, агар $\delta = 0$ бўлса, асиптотик йўналиш битта ва бу ҳолда (1) чизиқ параболик, $\delta < 0$ бўлса иккита асимптотик йўналиш мавжуд, чизиқ эса гиперболик чизиқ дейилади.

Юқоридаги (11) тенгламадаги биринчи даражали ҳад олдидаги коэффицент

$$\left(a_{11}\ell + a_{12}m\right)x + \left(a_{12}\ell + a_{22}m\right)y + a_{13}\ell + a_{22}m = 0 \quad (13)$$

кўринишга эга. Агар

$$\begin{matrix} a_{11}\ell + a_{12}m = 0 \\ a_{21}\ell + a_{22}m = 0 \end{matrix} \quad (14)$$

тенгликлар бир вақтда бажарилмаса, (13) тенглама тўғри чизиқни аниқлайди.

Берилган $\{\ell, m\}$ йўналиш учун (14) тенгликлар бажарилса, $\{\ell, m\}$ йўналиш махсус йўналиш дейилади. Иккинчи тартибли чизиқ учун $\delta \neq 0$ бўлса, (14) система фақат тривиал ечимга эга ва демак ягона марказга эга бўлган чизиқлар учун махсус йўналишлар йўқ.

Таъриф-2. Махсус бўлмаган $\{\ell, m\}$ йўналиш учун (13) тенглама аниқловчи тўғри чизиқ иккинчи тартибли чизиқнинг $\{\ell, m\}$ йўналишга қўшма диаметри деб аталади.

Диаметр тушунчасининг коррект аниқланганлигини кўрсатамиз. Аввало $\{\ell, m\}$ йўналиш асимптотик йўналиш бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

тенгликнинг чап томони учун

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = (a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m \quad (14)$$

тенглик ўринли. Демак

$$(a_{11}l + a_{12}m)l + (a_{12}l + a_{22}m)m = 0 \quad (15)$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенгликдан

$$\frac{\ell}{-\left(a_{12}\ell + a_{22}m\right)} = \frac{m}{a_{11}\ell + a_{12}m} \quad (16)$$

пропорционаллик муносабати келиб чиқади.

Диаметр учун $\{-(a_{12}l + a_{22}m), a_{11}l + a_{12}m\}$ вектор йўналтирувчи вектор бўлганлиги учун диаметр $\{\ell, m\}$ йўналишга параллел бўлади. Диаметрга тегишли нуқталар учун (11) тенгламадаги биринчи даражали ҳад олдидаги коэффициент нолга тенг бўлади. Демак бу ҳолда диаметр иккинчи тартибли чизиқ учун асимптота бўлади (кесишмайди) ёки диаметрга тегишли ҳамма нуқталар (1) чизиқда ётади.

Ноасимптотик $\{\ell, m\}$ йўналишга эга бўлган тўғри чизиқ (1) чизиқни иккита M_1 ва M_2 нуқталарда кесиб ўтса, M_1M_2 кесманинг ўртасини $M_0(x_0, y_0)$ билан белгилаб тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt$$

кўринишда ёзамиз. Параметрнинг M_1, M_2 нуқталарга мос келувчи қийматларини t_1, t_2 билан белгиласак, улар (10) тенгламанинг илдизлари бўлади ва Виет теоремасиги кўра $t_1 + t_2 = 0$ тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликдан $M_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг диаметрга тегишли эканлиги келиб чиқади. Демак ноасимптотик $\{\ell, m\}$ йўналишга параллел ватарларнинг ўрталаридан ўтувчи тўғри чизиқ шу йўналишга қўшма диаметр бўлади.

Ноасимптотик $\{\ell, m\}$ йўналишга эга бўлган ва қўшма диаметрга тегишли $M_0(x_0, y_0)$ ўтувчи тўғри чизиқ (1) чизиқни M_1 ва M_2 нуқталарда кесиб ўтса, бу нуқталарга мос келувчи параметрнинг қийматлари (10) тенгламанинг илдизлари бўлади. Тўғри чизиқнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтаси диаметрга тегишли бўлганлиги учун (10) тенгламада биринчи даражали ҳад олдидаги коэффисиент нолга тенг бўлади. Виет теоремасига кўра $t_1 + t_2 = 0$ бўлганлиги учун $M_0(x_0, y_0)$ нуқта M_1M_2 кесманинг ўртаси бўлади. Демак, диаметр тушунчаси коррект аниқланган.

Берилган $\{\ell, m\}$ йўналишга қўшма диаметр тенгламасини

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\ell + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})m = 0 \quad (17)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламадан кўрниб турибдики, ҳар қандай диаметр (1) чизиқ марказидан ўтади.

Қўшма йўналишлар ва бош йўналишлар.

Берилган $\{\ell, m\}$ йўналишга қўшма диаметр йўналиши $\{\ell', m'\}$ учун

$$l' : m' = -(a_{12}l + a_{22}m) : (a_{11}l + a_{12}m) \quad (18)$$

муносабат ўринли. Бу муносабатни

$$(a_{11}l + a_{12}m)l' + (a_{12}l + a_{22}m)m' = 0 \quad (19)$$

кўринишда ёки

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + ml') + a_{22}mm' = 0 \quad (20)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

Таъриф- 1. Иккита $\{\ell, m\}$ ва $\{\ell', m'\}$ йўналишлар учун (20) муносабат бажарилса, бу йўналишлар (1) чизиқга нисбатан қўшма йўналишлар дейилади.

Таъриф-2. Бирорта йўналиш ўзига перпендикуляр йўналишга қўшма бўлса, у бош йўналиш дейилади.

Бу таърифга кўра $\{\ell, m\}$ йўналиш бош йўналиш бўлиши учун у $\{-m, \ell\}$ йўналишга қўшма бўлиши керак. Албатта, агар $\{\ell, m\}$ йўналиш бош йўналиш бўлса, $\{-m, \ell\}$ йўналиш ҳам бош йўналиш бўлади. Берилган $\{\ell, m\}$ йўналишнинг бош йўналиш бўлиш шарти

$$a_{11}ll' + a_{12}\left(lm' + ml'\right) + a_{22}mm' = 0$$

тенгликда $\{\ell', m'\}$ векторни $\{-m, \ell\}$ билан алмаштириш натижасида ҳосил бўлади ва қуйидаги кўринишда бўлади:

$$a_{12}\,\ell^2 + \left(a_{22} - a_{11}\right)\ell\, m - a_{21}\, m^2 = 0 \quad (21)$$

Агар $\{\ell, m\}$ махсус йўналиш бўлса,

$$\frac{\ell}{m} = \frac{-a_{12}}{a_{11}} = \frac{-a_{22}}{a_{12}}$$

тенглик ўринли бўлади ва юқоридаги (21) шарт бажарилган. Биз биламизки, фақат $\delta = 0$ бўлган ҳоллардагина иккинчи тартибли чизиқ махсус йўналишга эга бўлиб, у иккинчи тартибли чизиқ учун асимптотик йўналиш бўлади. Демак, ягона марказга эга бўлмаган иккинчи тартибли чизиқлар учун асимптотик йўналиш бош йўналиш бўлади. Албатта махсус йўналишга перпендикуляр йўналиш ҳам бош йўналиш бўлади. Бошқа бош йўналишлар йўқ. Демак, ягона марказга эга бўлмаган иккинчи тартибли чизиқлар учун ўзаро перпендикуляр фақат иккита бош йўналиш мавжуддир.

Юқоридаги (21) тенгликда $a_{12} = 0$ ва $a_{11} = a_{22}$ муносабатлар бажарилса, бу тенглик ихтиёрий $\{\ell, m\}$ йўналиш учун бажарилади. Демак, бу ҳолда ихтиёрий йўналиш бош йўналиш бўлади. Агар $a_{12} \neq 0$ бўлса, (21) тенглик $k = \frac{\ell}{m}$ (ва $k = \frac{m}{\ell}$) ифода учун квадрат тенглама бўлади. Бу тенгламада дискриминант учун

$$D = \left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a^2_{12} > 0$$

муносабат ўринли бўлгани учун у иккита илдизга эга ва демак иккинчи тартибли чизиқ учун иккита ўзаро перпендикуляр бош йўналиш мавжуд.

Назорат саволлари:

1. Гипербола $\left(ax + by + c\right)\left(a_1x + b_1y + c_1\right) = 0$ тенглама билан берилган. Унинг асимптоталарини топинг.

2. Иккинчи тартибли чизиқ $\left(ax + by + c\right)^2 - \left(a_1x + b_1y + c_1\right)^2 = 0$ тенглама билан берилган бўлса, у иккита тўғри чизиқдан иборат эканлигини кўрсатинг.

3. Қуйидаги иккинчи тартибли чизиқларнинг марказини топинг.

a) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ b) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

v) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$ g) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

d) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$

4. Қуйидаги иккинчи тартибли чизиқларнинг кўринишини аниқланг.

a) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$

b) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$

v) $x^2-4xy+3y^2+2x-2y=0$

g) $y^2+5xy-14x^2=0$

d) $x^2-xy-y^2-x-y=0$.

5. Қуйидаги гиперболаларнинг асимптоталарини топинг.

a) $3x^2+2xy-y^2+8x+10y+14=0$

b) $3x^2+10xy+7y^2+4x+2y+1=0$

v) $10xy-2y^2+6x+4y-21=0$

g) $2x^2-3xy-x+3y+4=0$

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Нарманов А.Я. Аналитик геометрия. Т., "Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти", 2008 й.
2. Izu Vaisman. Analytical geometry.World scientific.2007.

2-мавзу: ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ ФАНИ ВА УНИНГ ПРЕДМЕТИ. ЧИЗИҚЛАР НАЗАРИЯСИ.

РЕЖА:

2.1. Дифференциал геометрия масалалари.
2.2. Эгри чизиқ уринмаси ва нормал текислиги.

Таянч иборалар:*элементар эгри чизиқ, параметрланган элементар эгри чизиқ, умумий эгри чизиқ, уринма, ёй узунлиги*.

2.1.Дифференциал геометрия масалалари.

Биз бу бўлимда дифференциал геометрия курсининг асосий объектларидан бири бўлган эгри чизиқ тушунчасини киритамиз, унинг берилиш усулларини ва асосий геометрик характеристикаларини ўрганамиз.

Таъриф. *Фазодаги (ёки текисликдаги) γ тўплам бирорта очиқ интервалнинг топологик (гомеоморф) акслантиришдаги образи бўлса, у* ***элементар эгри чизиқ*** *деб аталади.*

Бу таърифга кўра, бирорта $f:(a;b)\to R^3$ акслантириш учун, $f((a;b))=\gamma$ тенглик ўринли бўлиб, $f:(a;b)\to\gamma$ топологик акслантириш бўлса, γ **элементар эгри чизиқ** деб аталади.

Биз $f:(a;b)\to R^3$ акслантириш ёрдамида берилган элементар γ эгри чизиқни қарайлик. Очиқ $(a;b)$ интервалга тегишли ихтиёрий t нуқтага мос келувчи нуқтани $\gamma(t)$ билан белгиласак, f гомеоморфизмни $t\to\gamma(t)$ кўринишда ёза оламиз. Бу $\gamma(t)$ нуқтанинг координаталарини $x(t),\ y(t),\ z(t)$ функциялар билан белгиласак, f акслантириш

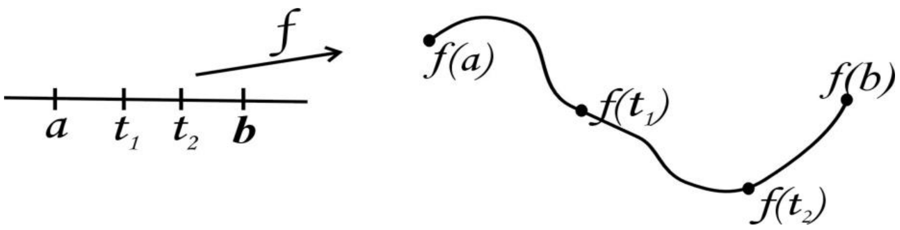
$$t\to(x(t),y(t),z(t))$$

кўринишда бўлади. Шунинг учун қуйидаги тенгликлар системаси γ чизиқнинг *параметрик тенгламалари* дейилади:

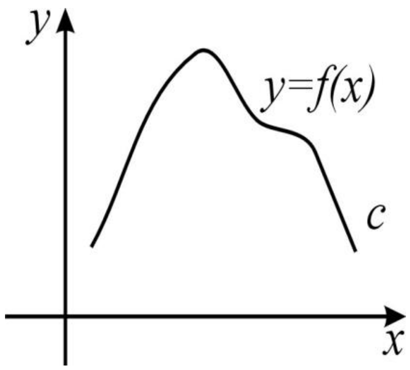
$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad a<t<b \quad (1) \\ z=z(t), \end{cases}$$

Табиийки, $f-$ узлуксиз акслантириш бўлганлиги учун, $x(t),\ y(t),\ z(t)$ координаталар t ўзгарувчининг узлуксиз функцияларидир. Агар γ элементар эгри чизиқ $y=f(x)$ функциянинг графиги бўлса, унинг параметрик тенгламалари $x=t,\ y=f(t)$ кўринишда бўлади. Элементар эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари топологик f акслантириш ёрдамида аниқланади. Шунинг учун, агар γ чизиқни бошқа гомеоморфизм ёрдамида аниқласак, унинг параметрик тенгламалари ўзгаради. Биринчи бобда кўрдикки, ҳар қандай икки очиқ интервал ўзаро гомеоморфдир.

Шунинг учун, $f:(a,b)\to R^3$ акслантириш ёрдамида аниқланган элементар γ эгри чизиқни ихтиёрий (c,d) интервалнинг бошқа гомеоморф акслантиришдаги образи деб қараш мумкин. Ҳақиқатдан, агар $g:(c,d)\to(a,b)$ гомеоморфизм бўлса, унда γ чизиқни $F:(c,d)\to R^3$ акслантириш ёрдамида бера оламиз. Бу ерда F акслантириш $F(\tau)=f(g(\tau))$ қоида билан аниқланади. Гомеоморфизмларнинг композицияси сифатида F ҳам гомеоморфизмдир. Демак, ҳар бир элементар эгри чизиқни чексиз кўп усуллар билан параметрлаш мумкин.



Чизма-1



Чизма-2

Дифференсиал геометрия курсида эгри чизиқ (1) кўринишдаги параметрик тенгламалар ёрдамида ўрганилади, яъни γ чизиқни аниқловчи f акслантириш танланиб, унинг параметрик тенгламалари ёзилади.

Бу ҳолда γ чизиқни **параметрланган элементар эгри чизиқ** деб атаймиз. Математик анализ асосий математик аппарат бўлганлиги учун $x(t),\ y(t),\ z(t)$ функцияларга қўшимча шартлар қўямиз.

Таъриф. *Берилган γ элементар эгри чизиқни дифференциалланувчи $x(t),\ y(t),\ z(t)$ функциялар ёрдамида параметрлаш мумкин бўлса, у силлиқ элементар эгри чизиқ деб аталади.*

Изоҳ: Зарур бўлган ҳолларда, биз юқори тартибли ҳосилаларнинг мавжуд ва узлуксиз бўлишини талаб қиламиз.

Мисоллар:

1. Ҳар қандай тўғри чизиқ элементар эгри чизиқдир. Ҳақиқатдан, агар l тўғри чизиқ

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \qquad -\infty < t < +\infty \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, $t \to (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ мослик $(-\infty;+\infty)$ интервал билан l тўғри чизиқ нуқталари ўртасида топологик акслантириш бўлади.

2. Очиқ интервалда аниқланган ҳар қандай узлуксиз функциянинг графиги элементар эгри чизиқдир. Ҳақиқатдан ҳам, агар $y = f(x)$ функция (a,b) да аниқланган ва узлуксиз бўлса, $x \to (x, f(x))$ мослик (a,b) интервал билан $y = f(x)$ функция графиги нуқталари ўртасида гомеоморф акслантиришни беради.

3. Биз биринчи курсда ўрганган иккинчи тартибли чизиқлардан фақат парабола элементар эгри чизиқ бўлади. Ҳақиқатан парабола очиқ интервалнинг топологик акслантиришдаги образидир, чунки параболани узлуксиз функциянинг графиги сифатида тасвирлаш мумкин.

Таъриф. *Боғланишли γ тўпламга тегишли ҳар қандай M нуқтанинг бирорта U_M атрофи мавжуд бўлиб, γ тўпламнинг U_M атрофдаги қисми элементар эгри чизиқ бўлса, γ содда эгри чизиқ деб аталади.*

Айлана элементар эгри чизиқ эмас, чунки у ҳеч қандай очиқ интервалга гомеоморф эмас. (нима учун? бу саволга жавобни ўқувчилар 1-бобдан топиши мумкин). Лекин у содда эгри чизиқдир. Буни кўрсатиш учун айлана ётувчи текисликда декарт координаталар системасини киритамиз ва умумийликни чегараламасдан координата боши айлана марказида деб ҳисоблаймиз. Шунда радиуси R га тенг айлананинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Агар $M(t_0)$ нуқта айлананинг $(R\cos t_0; R\sin t_0)$ нуқтаси бўлса, етарли кичик $\varepsilon > 0$ учун

$$t \to (R\cos t; R\sin t), \quad t \in (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$$

акслантириш $(t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$ интервални унинг образига гомеоморф акслантиради. Демак, ихтиёрий $M(t_0)$ нуқта учун унинг етарли кичик атрофида айлана элементар эгри чизиққа айланади.

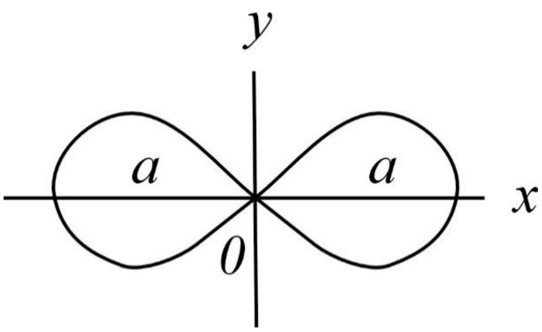
Содда эгри чизиқ структураси ҳақидаги қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

Теорема-1. *Ҳар қандай содда эгри чизиқ ёки элементар эгри чизиқдир, ёки айланага гомеоморфдир.*

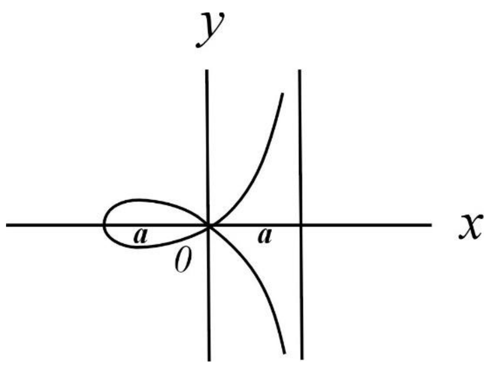
Энди чизиқлар оиласини яна кенгайтирамиз.

Бунинг учун умумий эгри чизиқ тушунчасини киритамиз. Бизга содда γ эгри чизиқ берилган бўлиб, M эса унга тегишли нуқта бўлсин. Агар U_M тўплам M нуқтанинг атрофи бўлса, $U_M \cap \gamma$ кесишмани M нуқтанинг γ ***чизиқдаги атрофи*** деб атаймиз. Натижада, γ топологик фазога айланади.

Агар $f : \gamma \to R^3$ акслантириш учун ихтиёрий $M \in \gamma$ нуқтанинг γ да U атрофи мавжуд бўлиб, $f|_U : U \to f(U)$ топологик акслантириш бўлса, f ***локал топологик акслантириш*** дейилади. Содда эгри чизиқнинг локал топологик акслантиришдаги образи ***умумий эгри чизиқ*** дейилади. Қуйидаги чизмаларда, содда эгри чизиқ бўлмайдиган умумий эгри чизиқлар кўрсатилган.



Чизма-3



Чизма-4

Бундан кейин, курс давомида биз эгри чизиқ деганда, элементар эгри чизиқни, содда эгри чизиқни ёки умумий эгри чизиқни тушунамиз. Умумий эгри чизиқларнинг таърифига кўра у ўзига тегишли ихтиёрий нуқтанинг етарли кичик атрофида элементар эгри чизиқнинг топологик акслантиришдаги образидир.

Шунинг учун, умумий эгри чизиқни ҳам ихтиёрий нуқтасининг атрофида (1) кўринишдаги параметрик тенгламалар ёрдамида бериш мумкин. Табиийки, агар бизга

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a < t < b$$

тенгликлар системаси берилган бўлса, бу система бирорта эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари системаси бўладими, деган савол туғилади. Бу саволга қисман қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема-2: *Силлиқ* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ *функциялар ҳосилалари ҳар бир* $t \in (a;b)$ *учун* $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$ *шартни қаноатлантирса,*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (a,b) \\ z = z(t). \end{cases}$$

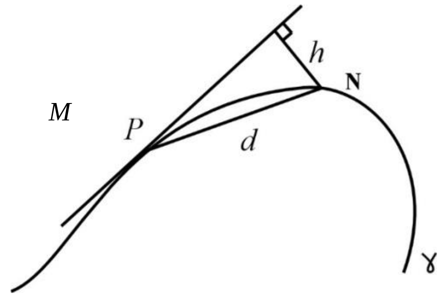
тенгламалар системаси умумий эгри чизиқни аниқлайди.

Бу умумий эгри чизиқ (a,b) *интервалнинг* $f: t \to (x(t), y(t), z(t))$ *акслантиришдаги образидир.*

2.2.Эгри чизиқ уринмаси ва нормал текислиги.

Елементар γ эгри чизиқнинг M нуқтасидан ўтувчи уринма тушунчасини киритиб, унинг тенгламасини келтириб чиқарайлик. Бунинг учун M нуқтадан l тўғри чизиқни ўтказайлик, N билан M га яқин бўлган γ чизиқнинг бирорта нуқтасини белгилайлик. Эгри чизиқдаги M ва N нуқталар орасидаги масофани d билан, N нуқтадан l– тўғри чизиққача бўлган масофани h билан белгилайлик. Агар, N нуқта M га яқинлаша борса, табиийки, d ва h масофалар нолга интилади. Лекин, $\frac{h}{d}$ ифоданинг нимага интилиши ҳақида ҳеч нарса дея олмаймиз.

<u>Таъриф.</u> *Эгри чизиқ γ нинг N нуқтаси M га интилганда $\frac{h}{d}$ ифода нолга интилса, $l-$ тўғри чизиқ, γ нинг M нуқтадаги уринмаси деб аталади.*

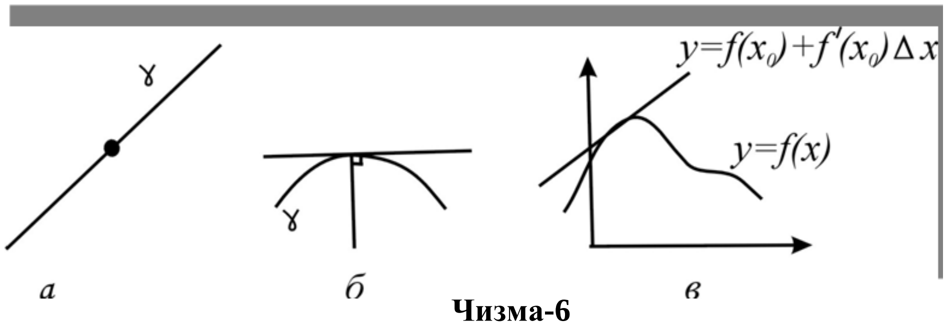


Чизма-5

Агар φ билан l ва MN тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни белгиласак, $\sin\varphi = \frac{h}{d}$ бўлади. Демак, агар $l-$ уринма бўлса, N нуқта M га интилганда, MN тўғри чизиқ $l-$тўғри чизиққа интилади. Аксинча N нуқта M га интилганда MN тўғри чизиқ бирорта $l-$тўғри чизиққа интилсин. Шунда, равшанки $l-$уринма бўлади.

Теорема-3. *Регуляр эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан ягона уринма ўтади. Агар γ эгри чизиқ, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама ёрдамида берилган бўлса, $M(t_0)$ нуқтадаги уринма $\vec{r}'(t_0)$ векторга параллелдир.*

Таъриф. *Регуляр γ эгри чизиқ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама билан аниқланса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ва $\vec{r}'(t_0)$ векторга параллел тўғри чизиқ γ нинг $M(t_0)$ нуқтасидан ўтувчи* ***уринмаси*** *деб аталади.*



Чизма-6

Аналитик геометрия курсидан биламизки, агар тўғри чизиқнинг битта нуқтаси ва йўналтирувчи вектори (яъни унга параллел вектор) берилган бўлса, унинг тенгламасини туза оламиз. Регуляр γ эгри чизиқ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама билан аниқланса унинг $M(t_0)$ нуқтасидан ўтувчи уринма тенгламаси

$$\vec{\rho}(t_0) = \vec{r}(t_0) + \lambda\vec{r}'(t_0), \ (\lambda\text{-параметр})$$

кўринишда бўлади.

Регуляр эгри чизиқ параметрик тенгламалар ёрдамида, яъни,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad , \quad a < t < b \\ z = z(t) \end{cases}$$

система ёрдамида аниқланган бўлса, $M\left(t_0\right)$ нуқтадан ўтувчи уринма тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{x\ \ (t_0)}=\frac{y-y_0}{y\ \ (t_0)}=\frac{z-z_0}{z\ \ (t_0)}$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $x_0=x\left(t_0\right),\quad y_0=y(t_0),\quad z_0=z(t_0)$.

Регуляр эгри чизиқ $y=y(x),\quad z=z(x)$ тенгламалар ёрдамида берилса, унинг уринма тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}$$

кўринишда бўлади.

Агар фазодаги эгри чизиқ

$$\begin{cases}\phi\left(x,y,z\right)=0\\ \psi\left(x,y,z\right)=0\end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида аниқланган ва $\begin{pmatrix}\phi_x & \phi_y & \phi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}$ матрицанинг ранги иккига тенг бўлса, $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ нуқтадан ўтувчи уринма тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\phi_y & \phi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\phi_z & \phi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\phi_x & \phi_y\\ \psi_x & \psi_x\end{vmatrix}}$$

кўринишда бўлади. Бу ерда хусусий ҳосилалар $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ нуқтада ҳисобланган. Ҳақиқатан, биринчи параграфдаги теоремага кўра, $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ нуқта атрофида γ эгри чизиқ

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида аниқланади.

Демак,

$$\phi\big(x(t),\quad y(t),\quad z(t)\big)\equiv 0,\quad \psi\left(x(t),\quad y(t),\quad z(t)\right)\equiv 0$$

тенгликларни дифференциаллаб,

$$\phi_x x'+\phi_y y'+\phi_z z'=0$$
$$\psi_x x'+\psi_y y'+\phi_z z'=0$$

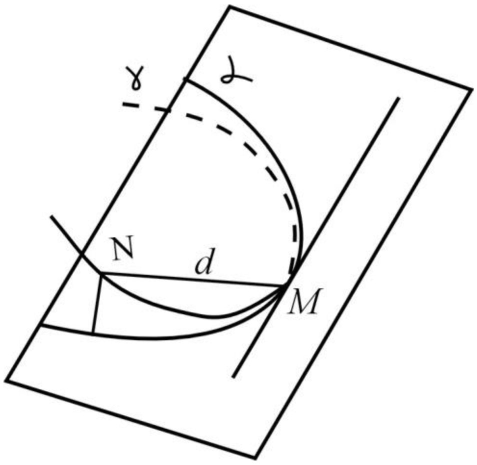
тенгликларни оламиз. Бундан эса

$$\frac{x'}{\begin{vmatrix}\phi_y & \phi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}}=\frac{y'}{\begin{vmatrix}\phi_z & \phi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}}=\frac{z'}{\begin{vmatrix}\phi_x & \phi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Ёпишма текислик ва унинг тенгламаси.

Эгри чизиқ учун ёпишма текислик тушунчасини киритиб, унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. Эгри чизиқ γ нинг M нуқтасидан ўтувчи бирорта α текислик ва чизиқдаги M га яқин N нуқта учун d билан M, N нуқталар орасидаги масофани, h билан эса N нуқтадан α текисликкача бўлган масофани белгилайлик.



Чизма-7

Таъриф. *Чизиқдаги N нуқта M нуқтага яқинлашганда $\frac{h}{d^2}$ нолга интилса, α текислик γ нинг M нуқтасидаги **ёпишма текислиги** деб аталади.*

Теорема-4. *Икки марта дифференциалланувчи регуляр γ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан ўтувчи ёпишма текислик мавжуд бўлиб, уринма ёпишма текисликда ётади. Агар эгри чизиқ $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама ёрдамида аниқланган бўлса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ёпишма текислик $\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$ векторларга параллел бўлади.*

Изоҳ: Ёпишма текислик $\vec{r}'(t_0)$ ва $\vec{r}''(t_0)$ векторларга параллел бўлганлиги учун, агар бу векторлар ўзаро параллел бўлса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ёпишма текисликлар чексиз кўп. Лекин $\vec{r}'(t_0)$, $\vec{r}''(t_0)$ векторлар параллел бўлмаса, $M(t_0)$ нуқтадан ўтувчи ёпишма текислик ягонадир.

Енди ёпишма текислик тенгламасини ёзайлик. Бунинг учун $\vec{r}'(t_0)$ ва $\vec{r}''(t_0)$ векторларнинг бошларини $M(t_0)$ нуқтага жойлаштириб, $P(x, y, z)$ билан ёпишма текислик нуқтасини белгиласак, $\vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)$, $\overline{MP}$ векторлар компланар векторлар оиласини ташкил қилади. Шунинг учун уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Иккинчи томондан, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлгандагина $P(x, y, z)$ нуқта ёпишма текисликка тегишли бўлади. Демак, $\vec{r}$ билан P нуқтанинг радиус векторини белгиласак, ёпишма текислик тенгламасини $(\vec{r} - \vec{r}(t_0))\vec{r}'(t_0)\vec{r}''(t_0) = 0$ кўринишда ёза оламиз.

Агар эгри чизиқ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ параметрик тенгламалар ёрдамида берилса, ёпишма текислик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

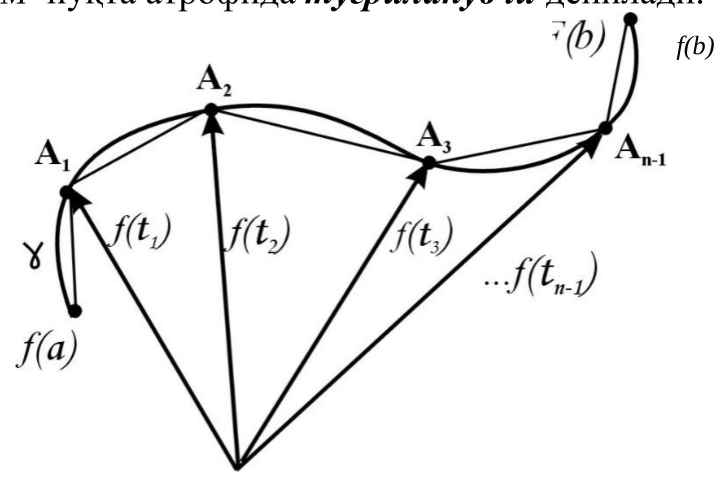
кўринишда бўлади.

Ёпишма текисликда ётувчи нормал ***бош нормал*** деб аталади, ёпишма текисликга перпендикуляр нормал эса ***бинормал*** деб аталади.

Эгри чизиқ ёйи узунлиги ва уни ҳисоблаш.

Фазода γ эгри чизиқ, M эса унга тегишли нуқта бўлсин. Биз биламизки, M нуқтанинг γ чизиқдаги етарли кичик атрофи элементар эгри чизиқдир. Шу элементар эгри чизиқ γ_M очиқ $(a;b)$ интервалнинг ϕ топологик акслантиришдаги образи бўлсин.

Агар $c,d \in (a,b)$ ва $c<d$ бўлса, γ_M нинг $c,d-$нуқталарга мос келувчи нуқталари билан чегараланган ёйи узунлиги тушунчасини киритамиз. Бунинг учун $[a,b]$ кесмани n та қисмга ажратувчи $t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}$ нуқталарни олиб, уларнинг γ_M чизиқдаги образларини $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ билан белгилайлик. Учлари $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ нуқталарда бўлган синиқ чизиқни γ_M чизиққа ички чизилган ***синиқ чизиқ*** деб атаймиз. Агар M ни ўз ичига олувчи бирорта ёй учун унга ички чизилган синиқ чизиқлар узунликлари юқоридан текис чегараланган бўлса, γ эгри чизиқ M нуқта атрофида ***тўғриланувчи*** дейилади.



Чизма-9

Теорема-5. *Регуляр эгри чизиқ ўзига тегишли ҳар қандай нуқта атрофида тўғриланувчидир.*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad a<t<b \\ z = z(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар ёрдамида берилса, $\overset{\cup}{M_1 M_2}$ ёй узунлиги

$$\int_c^d \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

формула бўйича ҳисобланади. Агар γ_M эгри чизиқ OXY текисликда $y = f(x)$ функтсиянинг графиги бўлса, $\overset{\cup}{M_1M_2}$ ёй узунлиги

$$\int_c^d \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx \text{ га тенгдир.}$$

Ёй узунлигини эгри чизиқни параметрлаш учун ҳам ишлатиш мумкин. Агар $t_0, t \in (a,b)$ бўлса, γ_M − нинг t_0 ва t га мос келувчи нуқталари билан чегараланган ёй узунлигини $s(t)$ билан белгилаб,

$$\sigma(t) = s(t), \quad t > t_0,$$
$$\sigma(t) = -s(t), \quad t < t_0,$$
$$\sigma(t) = 0, \quad t = t_0.$$

қоида бўйича $\sigma(t)$ функциясини аниқласак, бу функция монотон ўсувчи функция бўлади. Чунки унинг ҳосиласи $|\vec{r}'(t)|$ га тенг ва демак, ҳар доим нолдан катта. Агар $\sigma(t)$ га тескари функтсияни $t = t(\sigma)$ билан белгиласак ва $\vec{r} = \vec{r}(t)$ да t ўрнига қўйсак,

$$\vec{r} = \vec{r}(t(\sigma)) = \vec{\rho}(\sigma)$$

тенгликни оламиз.

Ҳосил бўлган тенглама γ_M нинг табиий параметр ёрдамида аниқланган тенгламаси, σ эса ***табиий параметр*** дейилади.

Табиий параметрнинг муҳимлиги шундан иборатки, уринма вектор узунлиги ҳар доим бирга тенгдир.

Эгри чизиқ эгрилиги ва уни ҳисоблаш.

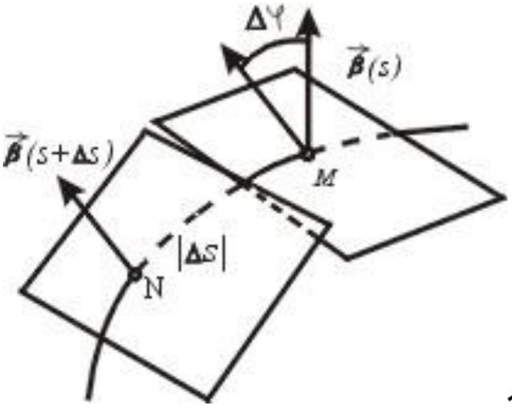
Бизга регуляр γ –эгри чизиқ ва M унга тегишли нуқта берилган бўлсин. Берилган M нуқтадаги эгрилик тушунчасини киритиб, уни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун γ – эгри чизиқда M га яқин бўлган N нуқтани олиб, бу нуқталардан ўтувчи уринмалар орасидаги бурчакни $\Delta\phi$ билан, $\overset{\cup}{MN}$ ёй узунлигини ΔS билан белгилайлик. Равшанки, N нуқта M га интилганда Δφ ва ΔS миқдорлар нолга интилади. Аммо $\frac{\Delta\phi}{\Delta S}$ ифода нимага интилишини олдиндан айта олмаймиз.

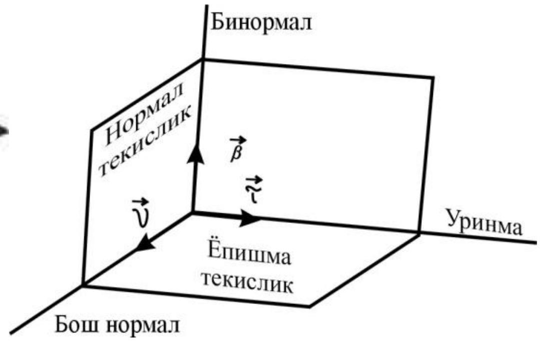
Таъриф. *Чизиқдаги N нуқта M га интилганда $\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ ифоданинг лимити мавжуд бўлса, у γ чизиқнинг M нуқтадаги э**грилиги** деб аталади.*

Теорема-6. *Икки марта дифференциалланувчи регуляр эгри чизиқ учун $k = \lim\limits_{M \to N} \frac{\Delta\phi}{\Delta S}$ мавжуд. Агар γ чизиқ $\vec{r} = \vec{r}(s)$ тенглама билан табиий параметр* *ёрдамида берилган бўлса,* $k=\left|\ddot{\vec{r}}(s_0)\right|$ *тенглик ўринлидир. Бу ерда* s_0 *табиий параметрнинг* M *га мос келувчи қийматдир.*

Эгри чизиқнинг буралиши ва уни ҳисоблаш.

Эгри чизиқнинг берилган M нуқтасидаги буралиши тушунчасини киритайлик. Бизга γ эгри чизиқ ва унга тегишли M нуқта берилган бўлсин. M нуқтага яқин ва γ га тегишли нуқтани N билан, $\Delta\varphi$ билан бу нуқталардан ўтувчи ёпишма текисликлар орасидаги бурчакни, Δs билан $\overset{\smile}{MN}$ ёй узунлигини белгилайлик.





Чизма-12 **Чизма-13**

Таъриф: N нуқта M нуқтага интилганда $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ ифоданинг лимити γ эгри чизиқнинг M нуқтадаги абсолют буралиши дейилади ва $|\sigma|$ билан белгиланади.

Теорема-7. Уч марта дифференциалланувчи регуляр γ эгри чизиқнинг, M нуқтада эгрилиги нолдан фарқли бўлса, $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ ифода тайин лимитга эга. Агар γ эгри чизиқ табиий параметр ёрдамида

$$\vec{r}=\vec{r}(s)$$

тенглама билан берилган бўлса, унинг абсолют буралиши,

$$|\sigma|=\frac{\left|\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}\,\dddot{\vec{r}}\right|}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|^2}$$

формула бўйича ҳисобланади.

Исбот. Фараз қилайлик, М нуқтадаги эгрилик нолдан фарқли бўлсин. Эгрилик узлуксиз функция бўлганлиги учун М га якин нуқталарда ҳам эгрилик нолдан фарқли бўлади

Шунинг учун, М нуқтага яқин нуқталарда $\dot{\vec{r}}$ ва $\ddot{\vec{r}}$ векторлар ўзаро ноколлинеар бўлади. Демак, ҳар бир нуқтадан ягона ёпишма текислик ўтади.

Агар $\vec{\beta}(s_\circ)$, $\vec{\beta}(s_\circ+\Delta s)$ – векторлар М ва N нуқтадаги ёпишма текисликка перпендикуляр бирлик векторлар (яъни бирлик бинормал векторлар) бўлса,

$$2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=\left|\vec{\beta}(s_0+\Delta s)-\vec{\beta}(s_0)\right|$$

тенглик ўринли бўлади.

Шунинг учун

$$\frac{\left|\vec{\beta}(s_\circ+\Delta s)-\vec{\beta}(s_\circ)\right|}{\Delta s}=\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta s}=\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$$

тенглик ўринли. Бу тенгликда $\Delta s\to 0$ лимитга ўтиб, $|\sigma|=\left|\dot{\vec{\beta}}\right|$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бинормал $\vec{\beta}$ вектор бирлик вектор бўлганлиги учун $\dot{\vec{\beta}}\perp\vec{\beta}$ бўлади. Агар $\vec{\tau}(s)=\dot{\vec{r}}(s)$ бўлса, $\vec{v}=\dfrac{\ddot{\vec{r}}}{k}$ – бирлик бошнормал вектор, $\bar{\tau}$ - бирлик уринма вектор бўлади. Шунинг учун $\vec{\beta}=[\vec{\tau},\vec{v}]$ бўлади. Демак, $\dot{\vec{\beta}}=\left[\dot{\vec{\tau}},\vec{v}\right]+\left[\vec{\tau},\dot{\vec{v}}\right]=\left[\vec{\tau},\dot{\vec{v}}\right]$,

чунки $\left[\dot{\vec{\tau}},\vec{v}\right]=\vec{0}$. Бу тенгликдан, $\dot{\vec{\beta}}\perp\vec{\tau}$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $\dot{\vec{\beta}}\ //\ \vec{v}$.

Шунинг учун, $|\sigma|=\left|\left(\dot{\vec{\beta}},\vec{v}\right)\right|$ тенгликни ёза оламиз. Бу тенгликка $v=\dfrac{\ddot{\vec{r}}}{k}$, $\vec{\beta}=\dfrac{\left[\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right]}{k}$

ифодаларни қўйиб, $|\sigma|=\dfrac{\left|\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\right|}{k^2}$ формулани ҳосил қиламиз. Энди буралишни аниқлайлик. $\dot{\vec{\beta}}$ вектор $\vec{v}$ векторга параллел бўлганлиги учун эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилсак (*s* ўса бошлаганда) ёпишма текислик уринма атрофида айлана бошлайди. Агар ёпишма текислик буралиши йўналиши $\vec{\beta}$ дан $\vec{v}$ га йўналган бўлса, (+) ишора билан акс ҳолда эса (-) ишора билан олиб, $\sigma=\pm|\sigma|$ формула бўйича буралишни киритамиз. $|\sigma|$ нинг ифодасини ҳисобга олиб

$$\sigma=\frac{\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}}}{k^2}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди ихтиёрий t параметр учун буралишни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун ёй узунлиги $S=S(t)$ параметр t нинг функцияси эканлигидан фойдаланамиз. Эгри чизиқ тенгламаси $\vec{r}=r(s)$ бўлса,

$$\dot{\vec{r}}=\vec{r}'\cdot\frac{dt}{ds},\quad \ddot{\vec{r}}=\vec{r}''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\vec{r}'\cdot\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\dddot{\vec{r}} = \vec{r}'''\left(\frac{dt}{ds}\right)^3 + 2\vec{r}''\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2r}{ds^2} + \vec{r}''\frac{d^2r}{ds^2}\frac{dt}{ds} + \vec{r}'\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^3r}{ds^3}$$

ифодаларни буралиш формуласига қўйсак

$$\sigma = \frac{\overrightarrow{r'}\,\overrightarrow{r''}\,\overrightarrow{r'''}}{\left[\overrightarrow{r'},\overrightarrow{r''}\right]^2}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Агар бирорта чизиқнинг буралиши ҳамма нуқталарда нолга тенг бўлса, у албатта ясси чизиқ бўлади, яъни бирорта текисликда ётади.

Юқорида кўрсатиб ўтганимиздек, агар регуляр γ чизиқ

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad a < t < b$$

тенглама билан берилиб, ҳар бир t учун $\vec{r}'(t)$ ва $\vec{r}''(t)$ векторлар коллинеар векторлар бўлмаса, γ чизиқнинг ҳар бир нуқтасига ортонормал системани ташкил қилувчи учта векторни мос қўйиш мумкин. Бу учлик бирлик уринма вектор, бирлик бош нормал вектор ва бирлик бинормал векторлардан иборат. Бу учликни Френе учлиги деб атаймиз. Ҳозир биз фазодаги ориентацияни сақловчи ҳаракат регуляр чизиқни регуляр чизиққа ўтказишини ва бунда Френе учлиги ҳам яна Френе учлигига ўтишини исботлаймиз.

Фазода регуляр γ эгри чизиқ

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t), \quad a < t < b$$

тенглама билан, унинг $F: R^3 \to R^3$ ҳаракатдаги образи $F(\gamma)$

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad a < t < b$$

тенглама билан берилган бўлсин. Агар

$$\vec{\rho}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

бўлиб, F ҳаракат

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

матрица ва

$$a = \{a_1, a_2, a_3\}$$

вектор ёрдамида берилган бўлса, $F(x, y, z)$ нуқтанинг координаталари

$$x_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1$$
$$y_1 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2$$
$$z_1 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3$$

кўринишда бўлади. Шунинг учун $\vec{r}(t)$ векторнинг координаталари

$$x_1(t), \quad y_1(t), \quad z_1(t)$$

функциялар бўлса,

$$(x_1(t),\quad y_1(t),\quad z_1(t)) = F(x(t),\quad y(t),\quad z(t))$$

тенгликдан

$$\vec{r}'(t) = A\vec{\rho}'(t)$$

формула келиб чиқади. Бу тенгликда $\vec{r}'(t)$ ва $\vec{p}'(t)$ векторлар устун кўринишда ёзилган. Бу ерда A ортогонал матрица бўлгани учун

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \left|A\vec{\rho}'(t)\right| = \left|\vec{\rho}'(t)\right|,$$

$$\left(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)\right) = \left(A\vec{\rho}'(t), A\vec{\rho}''(t)\right) = \left(\vec{\rho}'(t), \vec{\rho}''(t)\right),$$

$$\left\|\left[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)\right]\right\| = \left\|\left[A\vec{\rho}'(t), A\vec{\rho}''(t)\right]\right\| = \left\|\left[\vec{\rho}'(t), \vec{\rho}''(t)\right]\right\|$$

тенгликлар ўринли. Бу тенгликлардан охиргиси ўринли бўлиши учун $\det A > 0$ шартни ҳам яъни F ҳаракат ориентацияни сақлашини талаб қилдик. Бу тенгликлардан

$$\tau_1 = \frac{\vec{r}'}{\left|\vec{r}'\right|} = \frac{A\vec{\rho}'}{\left|A\vec{\rho}'\right|} = \frac{A\vec{\rho}'}{\left|\vec{\rho}'\right|} = A(\vec{\tau})$$

$$\vec{\nu}_1 = A(\vec{\nu}),\quad \vec{\beta}_1 = \left[A(\vec{\tau}), A(\vec{\nu})\right] = A(\vec{\beta})$$

формулалар ҳосил қиламиз. Бу формулалар γ чизиқнинг Френе учлиги F акслантиришда $F(\gamma)$ чизиқнинг Френе учлигига ўтишини исботлайди.

Бу формулалардан ориентацияни сақловчи ҳаракатда чизиқларнинг эгрилиги ва буралиши ҳам ўзгармай қолиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан, эгрилик ва буралиш формулаларидан фойдаланиб,

$$k_1 = \frac{\left\|\left[\vec{r}', \vec{r}''\right]\right\|}{\left(\vec{r}'^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}} = k = \frac{\left\|\left[\vec{\rho}', \vec{\rho}''\right]\right\|}{\left(\vec{\rho}'^{\,2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sigma_1 = -\frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}''\cdot\vec{r}'''}{k_1^2} = \sigma = -\frac{\vec{\rho}'\cdot\vec{\rho}''\cdot\vec{\rho}'''}{k^2}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Френе формулалари.

Эгри чизиқ γ табиий параметр ёрдамида

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

тенглама билан берилган бўлсин. Агар М нуқта γ нинг параметрнинг $s_\circ$ қийматига мос келувчи нуқта бўлса, бу нуқтадан чиқувчи ўзаро ортогонал учта вектор мавжудлигини кўрдик.

Булар, $\vec{\tau}(s_\circ)$ – бирлик уринма вектор, $\vec{\nu}(s_\circ)$ – бирлик бош нормал вектор,

$\vec{\beta}(s_\circ)$ – бирлик бинормал векторлардир. Эгри чизиқ γ нинг М нуқта атрофидаги қисмини текширишда M нуқтани координата боши сифатида, $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$ –векторларни координата ўқларининг йўналтирувчи векторлар сифатида олайлик. Бунинг учун, олдин $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$ векторларнинг ҳосилаларини $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$ векторлар орқали ифодалайлик. Биринчидан, $\dot{\vec{\tau}}=\ddot{\vec{r}}=k\vec{\nu}$ муносабатини биламиз. Олдинги параграфда $\dot{\bar{\beta}}=\sigma\bar{\nu}$ ни кўрсатган эдик. Буларни ва $\vec{\nu}=[\vec{\beta},\vec{\tau}]$ ни ҳисобга олиб $\dot{\vec{\nu}}=\left[\dot{\vec{\beta}},\vec{\tau}\right]+\left[\vec{\beta},\dot{\vec{\tau}}\right]$ дан $\vec{\nu}=-k\vec{\tau}-\sigma\vec{\beta}$ формулани ҳосил қиламиз. Демак,

$$\begin{cases}\dot{\vec{\tau}}=k\vec{\nu}\\ \dot{\vec{\nu}}=-k\vec{\tau}-\sigma\vec{\beta}\\ \dot{\vec{\beta}}=\sigma\vec{\nu}\end{cases}$$

формулаларни ҳосил қиламиз.

Энди $\vec{r}(s_\circ+\Delta s)$ вектор-функцияни Тейлор қаторига ёйайлик

$$\vec{r}(s_0+\Delta s)=\vec{r}(s_0)+\dot{\vec{r}}\,\Delta s+\ddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^2}{2}+\dddot{\vec{r}}(s_0)\frac{\Delta s^3}{6}+...$$

М нуқта координата боши бўлганлиги учун $\vec{r}(s_0)=\vec{0}$ бу қаторда $\dot{\vec{r}}=\vec{\tau},\ \ddot{\vec{r}}=k\vec{\nu},\ \dddot{\vec{r}}=k\vec{\nu}-k\sigma\vec{\beta}-k^2\vec{\tau}$ муносабатларни ҳисобга олиб,

$$\vec{r}(s_\circ+\Delta s)=\left(\Delta s-\frac{k^2\Delta s^2}{6}+\ldots\right)\vec{\tau}+\left(\frac{k\Delta s^2}{2}+\frac{\sigma\Delta s^2}{6}+\ldots\right)\vec{\nu}+\left(-\frac{k\sigma\Delta s^2}{6}+\ldots\right)\vec{\beta}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди x,y,z ўқлари мос равишда $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$ векторлар йўналишларига эга эканлигидан фойдаланиб

$$x=\Delta s-k\frac{\Delta s^2}{6}+\ldots$$
$$y=k\cdot\frac{\Delta s}{2}+k\frac{\Delta s^2}{6}+\ldots$$
$$z=-k\sigma\frac{\Delta s^2}{6}+\ldots$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламаларда фақат эгрилик ва буралиш қатнашмокда. Демак, чизиқни аниқлаш учун унинг ҳамма нуқталарида эгрилик ва буралишни билишимиз етарли.

Энди шу масалани муҳокама қилайлик. Бизга параметрланган регуляр γ эгри чизиқ берилган бўлса, унинг ихтиёрий нуқтасида учта $s(t), k(t), \sigma(t)$ функциялар аниқланган. Бу функциялар узлуксиз ва $k(t)>0, s(t)>0,$ муносабатлар ўринлидир. Агар параметр сифатида ёй узунлигини олсак, функциялар сони 2 та бўлади.

Теорема-8. Иккита регуляр эгри чизиқларнинг ёйлари γ_1 ва γ_2 мос равишда

$$\vec{r}=\vec{r}_1(t),\ \vec{r}=\vec{r}_2(t),\qquad a\le t\le b$$

тенгламалар ёрдамида берилиб,

$$\int_a^t\left|\vec{r}_1'(t)\right|dt=\int_a^t\left|\vec{r}_2'(t)\right|dt$$

тенглик ихтиёрий $t\in[a,b]$ учун ўринли бўлсин. Бундан ташқари ҳар бир $t\in[a,b]$ учун $k_1(t)=k_2(t),\quad \sigma_1(t)=\sigma_2(t)$ тенгликлар ўринли бўлса, ягона $F:R^3\to R^3$ ҳаракат мавжуд бўлиб,

$$F(\gamma_2)=\gamma_1$$

муносабат ўринли бўлади.

Исбот. Бу чизиқларнинг узунликлари тенг бўлгани учун

$$s_0=\int_a^b\left|\vec{r}_1'(t)\right|dt=\int_a^b\left|\vec{r}_2'(t)\right|dt$$

белгилаш киритиб, чизиқлар тенгламаларини табиий параметр ёрдамида ёзамиз. Шунда уларнинг тенгламалари

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}_1(s)$$

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}_2(s),\qquad 0\le s\le s_0$$

кўринишда бўлади. Энди ҳар бир чизиқда табиий параметрнинг $s=0$ қийматига мос келувчи нуқталарини мос равишда M_1 ва M_2 билан белгилаймиз. Бу нуқталардаги Френе учликлари мос равишда, $\vec{\tau}_1(0),\ \vec{\nu}_1(0),\ \vec{\beta}_1(0)$ ва $\vec{\tau}_2(0),\ \vec{\nu}_2(0),\ \vec{\beta}_2(0)$ векторлардан иборат бўлади. Бу учликлар фазода бир хил ориентацияларни аниқлагани учун шундай $F:R^3\to R^3$ ҳаракат мавжудки, у M_2 нуктани M_1 нуқтага, $\vec{\tau}_2(0),\ \vec{\nu}_2(0),\ \vec{\beta}_2(0)$ векторларни мос равишда $\vec{\tau}_1(0),\ \vec{\nu}_1(0),\ \vec{\beta}_1(0)$ векторларга ўтказади. Биз $F(\gamma_2)=\gamma_1$ тенгликни исботлаймиз. Бунинг учун $F(\gamma_2(s))$ нуқтанинг радиус-векторини $\vec{\rho}(s)$ билан белгилаб, $\vec{\rho}=\vec{\rho}(s),\ s\in[0,s_0]$ тенглама билан аниқланган регуляр эгри чизиқнинг Френе учлигини $\{\vec{\tau}(s),\ \vec{\nu}(s),\ \vec{\beta}(s)\}$ билан белгилаймиз. Шунда биз $\vec{\tau}(0)=\vec{\tau}_1(0),\ \vec{\nu}(0)=\vec{\nu}_1(0),\ \vec{\beta}(0)=\vec{\beta}_1(0)$ тенгликларга эга бўламиз. Ҳаракатда векторларнинг скаляр кўпайтмаси сақлангани учун

$$k(s)=k_2(s),\qquad \sigma(s)=\sigma_2(s)$$

тенгликлар ўринли бўлади. Демак, $k(s)=k_1(s),\quad \sigma(s)=\sigma_1(s)$ тенгликлар ҳам ўринлидир. Энди $\vec{\rho}(s)=\vec{\rho}_1(s)$ тенгликни исботлаш учун

$$h(s)=(\vec{\tau}_1(s),\vec{\tau}(s))+(\vec{\nu}_1(s),\vec{\nu}(s))+(\vec{\beta}_1(s),\vec{\beta}(s))$$

функцияни қараймиз. Бу функция учун $h(0)=3$ тенглик ўринли. Бу функцияни дифференциаллаймиз

$$h'(s) = (\dot{\vec{\tau}}_1(s), \vec{\tau}(s)) + (\vec{\tau}_1(s), \dot{\vec{\tau}}(s)) + (\dot{\vec{\nu}}_1(s), \vec{\nu}(s)) + (\vec{\nu}_1(s), \dot{\vec{\nu}}(s)) +$$
$$+ (\dot{\vec{\beta}}_1(s), \vec{\beta}(s)) + (\vec{\beta}_1(s), \dot{\vec{\beta}}(s))$$

ва Френе формулаларидан фойдаланиб,

$$h'(s) = k_1(\vec{\nu}_1(s), \vec{\tau}(s)) + k(\vec{\tau}_1(s), \vec{\nu}(s)) - k_1(\vec{\tau}_1(s), \vec{\nu}(s)) - \sigma_1(\vec{\beta}_1(s), \vec{\nu}(s)) -$$
$$- k(\vec{\nu}_1(s), \vec{\tau}(s)) - \sigma(\vec{\nu}_1(s), \vec{\beta}(s)) + \sigma_1(\vec{\nu}_1(s), \vec{\beta}(s) + \sigma(\vec{\beta}_1(s), \vec{\nu}(s)) =$$
$$= (k_1 - k)(\vec{\nu}_1(s), \vec{\tau}(s)) + (k - k_1)(\vec{\tau}_1(s), \vec{\nu}(s)) + (\sigma_1 - \sigma)(\vec{\nu}_1(s), \vec{\beta}(s)) -$$
$$- (\sigma_1 - \sigma)(\vec{\beta}_1(s), \vec{\nu}(s))$$

Назорат саволлари:

1. Иккинчи тартибли чизиқлардан қайси бири бизнинг курсимизда киритилган маънода чизиқ бўлишини текширайлик.

Сизга маълумки, иккинчи тартибли чизиқ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (2)$$

тенглама билан аниқланади. Агар

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

детерминант нолдан фарқли бўлса, (2) тенглама ягона марказга эга бўлган иккинчи тартибли чизиқни аниқлайди. Бундай чизиқлар ***марказий чизиқлар*** деб аталади.

Марказий чизиқлар эллипс, гипербола ва иккита кесишувчи тўғри чизиқлардан иборатдир. Булардан эллипс содда чизиқ бўлади. Гипербола эса иккита элементар чизиқдан иборат. Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар эса биз киритган маънода битта чизиқ бўлмайди. Агар $\delta = 0$ бўлса, иккинчи тартибли чизиқ ёки марказга эга бўлмайди, ёки чексиз кўп марказга эга бўлади. Демак бу ҳолда, (2) тенглама парабола, иккита параллел тўғри чизиқ ёки устма-уст тушувчи иккита тўғри чизиқлардан бирортасини аниқлайди.

Параболанинг каноник тенгламаси

$$y'^2 = 2px', \qquad p > 0$$

кўринишда бўлади. Демак, парабола $x' = \dfrac{y'^2}{2p}$ функсиянинг графиги ва элементар чизиқдир. Иккита параллел тўғри чизиқлар эса иккита элементар чизиқдан, устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар эса битта элементар чизиқдан иборат.

2. Параболанинг регуляр чизиқ эканлигини исботлайлик. Бунинг учун унинг тенгламасини

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0$$

каноник кўринишда ёзамиз. Агар $y = t$ тенглик билан параметр киритсак, парабола

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t. \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламаларга эга бўлади. Бу ерда $x'^2 + y'^2 = \dfrac{t^4}{4p^2} + 1 > 0$ бўлганлиги учун парабола чексиз кўп марта дифференсиалланувчи регуляр чизиқдир.

3. Бизга $y' = ky$ дифференсиал тенглама берилган бўлсин. Унинг ечими $y' = Ce^{kx}$ кўринишда бўлади. Ечимнинг графиги

$$\begin{cases} x = t, \\ y = Ce^{kt}. \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламаларга эга бўлган регуляр чизиқдир.

4. Текисликда

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган чизиқ регуляр эмас, чунки у $M(t=0)$ нуқта атрофида регуляр параметрлаш усулига эга эмас.

5. Текисликда

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган чизиқ умумий чизиқ бўлади, чунки $M_1(t=-1)$ ва $M_2(t=1)$ нуқталар текисликда устма-уст тушади. Бу умумий чизиқ

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланган элементар чизиқнинг

$$f(t) = (t^2 - 1, \quad t^3 - t)$$

формула билан аниқланган $f : \gamma \to R^2$ локал топологик акслантиришдаги образидир (4-чизма).

6. Бернулли лемнискатаси (3-чизма). Текисликда ҳар биридан берилган F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофаларнинг кўпайтмаси F_1 ва F_2 нуқталар орасидаги масофа ярмининг квадратига тенг бўлган нуқталар тўплами *Бернулли лемнискатаси* деб аталади. Бернулли лемнискатасининг умумий чизиқ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун текисликда OX ўқи сифатида $F_1 F_2$ тўғри чизиқни, OY ўқи сифатида $F_1 F_2$ кесма ўртасидан ўтувчи ва OX ўқига перпендикуляр тўђри чизиқни олиб, $|F_1F_2| = 2C$ белгилаш киритамиз. Шунда Бернулли лемнискатасига тегишли ихтиёрий $M(x, y)$ нуқта учун

$$\sqrt{(x+C)^2 + y^2}\sqrt{(x-C)^2 + y^2} = C^2$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни квадратга кўтариб соддалаштириш натижасида, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз.

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2C^2(y^2 - x^2) = 0.$$

Енди $x=\rho\cos\phi,\quad y=\rho\sin\phi$ формулалар ёрдамида қутб координаталар системасига ўтсак

$$\rho^2 = 2C^2\cos^2\phi$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Энди бу чизиқнинг умумий чизиқ эканлиги

$$\begin{cases} x=\cos\phi, \\ y=\sin\phi, \quad 0\le\phi\le 2\pi \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланган айлананинг

$$f: M(\phi)\to (C\sqrt{2\cos^2\phi},\phi)$$

формула ёрдамида аниқланган локал топологик акслантиришдаги образи Бернулли лемнискатаси билан устма-уст тушишидан келиб чиқади.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003

2. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001

3. Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014

4. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., изд. МГУ,2004

3-мавзу: СИРТЛАР НАЗАРИЯСИ.

РЕЖА:

3.1. Сиртлар назарияси. Йўналиш бўйича эгриликлар.
3.2. Сиртнинг ошкормас кўринишда берилиши.
3.3. Сирт устида ётувчи эгри чизиқлар.

Таянч иборалар: *элементар сирт, содда сирт,сиртнинг берилиш усуллари, уринма текислик.*

3.1.Сиртлар назарияси. Йўналиш бўйича эгриликлар.

Текисликдаги очиқ доирага гомеоморф тўпламни э***лементар соҳа*** деб атаймиз.

Таъриф-1. Фазодаги $\hat{O}$ ***тўплам элементар соҳанинг топологик акслантиришдаги образи бўлса, у элементар сирт деб аталади.***

Демак, $\hat{O}$ тўплам элементар сирт бўлса, $f : G \to \hat{O}$ - топологик акслантириш мавжуд бўлиши керак. Бу ерда $G \subset R^2$ елементар соҳа, $\hat{O}$ эса R^3 дан келтирилган топология ёрдамида топологик фазога айлантирилган. Агар $\hat{O}$ элементар сирт бўлса, (f, G) жуфтлик $\hat{O}$ *сиртни параметрлаш усули* дейилади.

Албатта G_1 бошқа элементар соҳа бўлса, G ва G_1 соҳалар ўзаро гомеоморф бўлади ва агар $g : G_1 \to G$ гомеоморфизм берилган бўлса, $f \cdot g : G_1 \to \hat{O}$ гомеоморфизм $\hat{O}$ сиртни параметрлашнинг бошқа усулидир.

Демак, элементар сирт учун чексиз кўп параметрлаш усуллари мавжуддир. Бирорта тўпламнинг элементар сирт эканлигини кўрсатиш учун, унинг учун бирорта параметрлаш усулини кўрсатиш керак.

Агар $\hat{O}$ сирт (f, G) параметрлаш усули билан берилиб, $(u, v) \in G$ учун *ф(у,в)* нуқтанинг координаталари $x(u; v), y(u; v), z(u; v)$ кўринишда белгилсак

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \qquad (1)$$

система $\hat{O}$ сиртнинг *параметрик тенгламалари системаси* дейилади.

Таъриф-2. Фазодаги боғланишли $\hat{O}$ ***тўплам ўзига тегишли ҳар бир нуқтанинг бирорта атрофида элементар сиртга айланса,*** $\hat{O}$ ***сода сирт дейилади.***

Иккинчи таърифга изоҳ берамиз. Демак, $\hat{O}$ сода сирт бўлши учун унга тегишли ҳар бир $p \in \hat{O}$ нукта учун шундай $U(p)$ атроф (R^3 фазода) мавжуд бўлиб, кесишма $U(p) \cap \hat{O}$ элементар сирт бўлиши керак.

Кейинчалик курс давомида сирт деганда элементар ёки сода сиртни тушунамиз.

Мисоллар.

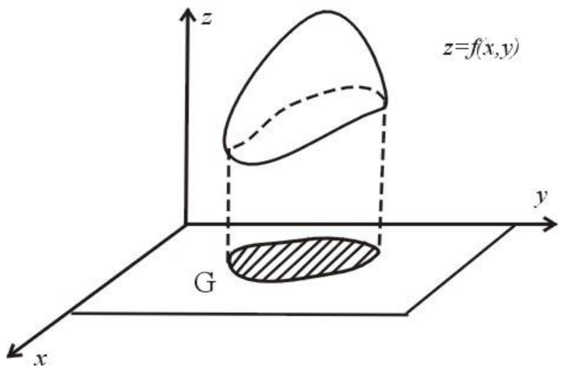
1) Ҳар қандай текислик элементар сиртдир, чунки текислик доирага гомеоморфдир.

Агар $M(x_0, y_0, z_0)$ текислик нуқтаси, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар текисликка параллел бўлса, уни

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}u + \vec{b}v, -\infty < u < +\infty, -\infty < v < \infty$$

кўринишида параметрлаш мумкин. Бу ерда $\vec{r}_0 = \{x_0, y_{0,} z_0\}$ вектор M нуқтанинг радиус векторидир.

2) элементар G соҳада аниқланган $z = f(x, y) -$ узлуксиз функциянинг графиги элементар сиртдир. Сабаби, $(x, y, f(x, y)) \to (x, y) -$акслантириш (проектсия) гомеоморфизмдир.



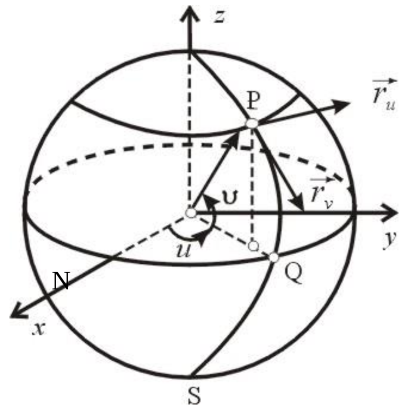
Чизма-1

3) Икки ўлчамли сфера S^2 элементар бўлмаган сода сиртдир. Радиуси R га тенг S^2 сферанинг марказига координаталар бошини жойлаштирсак, уни $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ тўплам сифатида қарашимиз мумкин.

Бу сферанинг сирт эканлигини исботлаш учун унга тегишли бирорта P нуқтани олайлик. Бу P нуқтадан фарқли S нуқтани жанубий қутб сифатида, унга диаметрик қарама-қарши бўлган N нуқтани шимолий қутб ҳисоблаб, z ўқини координата бошидан N нуқта орқали ўтказамиз, Oxy текислиги эса O нуқтадан ўтувчива ON га перпендикуляр текисликдир. Бу текислик ва сфера кесишишидан ҳосил бўлган айланани ***экватор*** деб атаймиз. Энди u Билан OQ нур ва Ox ўқи орасидаги бурчакни, v билан OP ва OQ нурлар орасидаги бурчакни белгилаймиз. Бу ерда Q нуқта NPS меридианнинг экватор Билан кесишиш нуқтасидир, $0 < u < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$. Шунда S^2 сферанинг NS меридиан чиқариб ташланган қисми $\phi : P \to (u, v)$ акслантириш ёрдамида $[0; 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

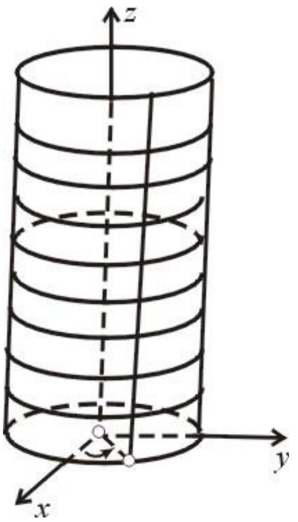
лементарсоҳагагомеоморфакслантири-

ладива $x = R\cos u \cos v,\ y = R\sin u \cos v,\ z = \sin v$тенгламаларёрдамидапараметрланади.



Чизма-2

4) Доиравий силиндрни $x = R\cos u,\ y = R\sin u,\ z = v$ тенгламалар системаси ёрдамида параметрлаш мумкин. Буерда $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$. Албаттасилиндрҳамэлементарсиртэмас (3 -чизма).



Чизма-3

Агарбиз $\vec{r}(u,v) = \{x(u;v); y(u;v); z(u;v)\}$ векторфункцияникиритсак (1) тенгламаларсистемасинибитта

$$\vec{r} = \vec{r}(u;v)\,,\ (u,v) \in G \qquad (2)$$

векторнитенгламаёрдамидаёзаоламиз. Бу тенглама $\hat{O}$ сиртнинг ***вектор кўринишдаги тенгламаси*** дейилади. Табиийки, $\hat{O}$ сирт элементар сирт бўлмаса, (1) ва (2) тенгламалар уни бирорта нуқта атрофида аниқлайди. Агар $\hat{O}$ элементар сирт бўлса, уни тўлиқ (1) ёки (2) тенгламалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

3.2. Сиртнинг ошкормас кўринишда берилиши.

Бизга $G \subset R^3$ очиқ тўплам ва G да аниқланган силлиқ $F(x;y;z)$ функсия берилган бўлсин.

Шунда $\hat{O} = \{(x;y;z) \in G : F(x;y;z) = 0\}$ тўплам F функсиянинг ***сатҳ тўплами*** ёки ***сирти*** дейилади. Агар $gradF \neq 0$ бўлса, $\hat{O}$ ҳақиқатдан ҳам содда сирт бўлади. Ҳақиқатдан, агар $p = (x_0; y_0; z_0) \in \hat{O}$ нуктада $F_z \neq 0$ бўлса, ошкормас функция ҳақидаги теоремага кўра, шундай $\delta > 0, \varepsilon > 0$ сонлари ва $G_0 = \{(x;y) : |x_0 - x| < \delta, |y - y_0| < \delta\}$ соҳада аниқланган $z = f(x;y)$ функция мавжуд бўлиб, $(x;y) \in G_0$ бўлганда $F(x;y,f(x;y)) = 0$ тенглик ва $z_0 = f(x_0;y_0)$, $|z_0 - f(x;y)| < \varepsilon$ муносабатлар бажарилиб,

$$\ddot{I} = \{(x;y;z) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta, |z_0 - z| < \varepsilon\}$$

Параллелипипеднинг $\hat{O}$ Билан кесишмаси $z = f(x;y)$ функциянинг графигидан иборатдир. Демак, $\hat{O}$ ўзига тегишли ҳар қандай нуқтанинг етарли кичик атрофида элементар сирт бўлади.

Бизнинг курсимизда асосий метод математик анализ бўлганлиги учун, биз сиртлардан қўшимча шартларни талаб қиламиз.

Таъриф. *Берилган $\hat{O}$ сирт учун унга тегишли ихтиёрий нуқта атрофида (f,G) параметрлаш усули мавжуд бўлиб, бунда $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ функциялар узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ матритцанинг ранги иккига тенг бўлса, $\hat{O}$ сирт* ***регуляр сирт*** *дейилади, параметрлаш усули эса регуляр параметрлаш дейилади.*

Сиртнинг регулярлик шартини $\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] = \vec{0}$ кўринишда ҳам ёзишимиз мумкин. Биз курсимизда асосан регуляр сиртларни ўрганамиз.

Энди сиртларнинг берилиш усуллари ҳақида қуйидаги теоремаларни исботлайлик.

Теорема-1. *Бизга G соҳада аниқланган силлиқ $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ функциялар берилиб, ҳар бир нуқтада $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ тенглик ўринли бўлса,*

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \; (u;v) \in G \\ z = z(u;v) \end{cases}$$

система регуляр сиртни аниқлайди.

Исбот. Теоремани исботлаш учун

$$\Phi = \{(x;y;z) : x = x(u;v), y = y(u;v), z = z(u;v), (u;v) \in G\}$$

тўпламнинг сода сирт эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун эса $\hat{O}$ тўпламга тегишли ихтиёрий $p_0 = (x(u_0;v_0), y(u_0;v_0), z(u_0;v_0))$ нуқтанинг етарли кичик атрофида $\hat{O}$ элементар сирт эканлигини кўрсатамиз. Бирорта $\varepsilon > 0$ ва

$G_{\varepsilon} = \left\{(u;v) \in G : (u_0 - u)^2 + (v_0 - v)^2 < \varepsilon\right\}$ очиқ доира учун $f:(u;v) \to (x(u;v), y(u;v), z(u;v))$ қоида Билан аниқланган $f: G_\varepsilon \to f(G_\varepsilon)$ акслантиришни қараймиз. Берилган $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ функциялар узлуксиз бўлганлиги учун f ҳам узлуксиз акслантиришдир. Агар f ўзаро бир қийматли бўлса, унинг тескариси f^{-1} мавжуд ва узлуксиз бўлади (f^{-1} узлуксизлиги ҳам $x(u;v), y(u;v)$ ва $z(u;v)$ функциялар узлуксизлиги ва теорема шартидан келиб чиқади), демак $\hat{O}$ нинг p_0 нуқтани ўз ичига олувчи $f(G_\varepsilon)$ қисми элементар сирт бўлади.

Шунинг учун бирорта $\varepsilon > 0$ учун f акслантиришнинг ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигини исботлаймиз.

Фаразқилайлик, $\varepsilon_i > 0, \varepsilon_i \to 0, \ i = 1,2,3,...$ ва G_{ε_i} доирага тегишли $(u_i^1; v_i^1)$ ва $(u_i^2; v_i^2)$ ҳар хил нуқталар учун $f(u_i^1; v_i^1) = f(u_i^2; v_i^2)$ тенглик ўринли бўлсин. Умумийликни чегараламасдан аниқлик учун $u_i^1 \le u_i^2$ ва $v_i^1 \le v_i^2$ деб фараз қилайлик. Шунда,

$$x(u_i^1; v_i^1) - x(u_i^2; v_i^2) = 0, \ y(u_i^1; v_i^1) - y(u_i^2; v_i^2) = 0, \ z(u_i^1; v_i^1) - z(u_i^2; v_i^2) = 0$$

тенгликлардан ва Лагранж теоремасидан

$$x_u(p_i^1, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + x_v(u_i^2, q_i^1)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$
$$y_u(p_i^2, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + y_v(u_i^2, q_i^2)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$
$$z_u(p_i^3, v_i^1)(u_i^2 - u_i^1) + z_v(u_i^2, q_i^3)(v_i^2 - v_i^1) = 0$$

тенгликларни оламиз. Бу ерда $p_i^1, \ p_i^2, \ p_i^3 \in \left[u_i^1, u_i^2\right], q_i^1, \ q_i^2, \ q_i^3 \in \left[v_i^1, v_i^2\right], u_i^2 - u_i^1$ ва $v_i^2 - v_i^1$ сонлари бир вақтда нолга айлана олмайди.

Шунингучунюқоридагитенгликлардан

$$\frac{x_u(p_i^1; v_i^1)}{x_v(u_i^2; q_i^1)} = \frac{y_u(p_i^2; v_i^1)}{y_v(u_i^2; q_i^2)} = \frac{z_u(p_i^3; v_i^1)}{z_v(u_i^2; q_i^3)}$$

Муносабатни оламиз. Бу муносабатда x_u, x_v, y_u, y_v ва z_u, z_v функциялар узлуксизлигидан фойдаланиб, $i \to \infty$ лимитга ўтсак,

$$\frac{x_u(u_0, v_0)}{x_v(u_0, v_0)} = \frac{y_u(u_0, v_0)}{y_v(u_0, v_0)} = \frac{z_u(u_0, v_0)}{z_v(u_0, v_0)}$$

Муносабатни оламиз.

Бу муносабат эса теорема шартига зид бўлган,

$$rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} < 2$$

Тенгсизликка тенг кучлидир. Демак, фаразимиз нотўғри, ва $\varepsilon > 0$ етарли кичик бўлганда $f: G_\varepsilon \to f(G_\varepsilon)$ акслантириш топологик акслантиришдир. Бундан эса, $\hat{O}$ тўпламнинг p_0 нуқтани ўз ичига олувчи $f(G_\varepsilon)$ қисми элементар сирт эканлиги келиб чиқади.

Теорема-2. *Регуляр $\hat{O}$ сирт унга тегишли $p(u_0, v_0)$ нуқта атрофида,*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар ёрдамида берилиб, p нуқтада $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ *детерминант нолдан фарқли бўлса, шундай силлиқ $f(x,y)$ функция мавжудки p нуқтанинг атрофида $\hat{O}$ сирт $z = f(x,y)$ функциянинг графигидан иборатдир.*

Изоҳ. Биз регуляр сиртларнинг параметрлаш усулини танлаганимизда ҳар доим $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ ҳосилалар мавжуд ва узлуксиз бўлишини талаб қиламиз.

Исбот. Теоремани исботлаш учун,

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(u_0,v_0) = x_0 \\ y(u_0,v_0) = y_0 \end{matrix}$$

системага математик анализ курсидаги тескари функциялар ҳақидаги теоремани қўллаймиз. Бу теоремага асосан шундай $\delta > 0$ сони ва

$$\Pi_\delta = \{(x,y) : |x_0 - x| < \delta, |y_0 - y| < \delta\}$$

Соҳада аниқланган шундай дифференциалланувчи $u = u(x;y),\ v = v(x;y)$ функциялар мавжудки, улар $x(\ u(x;y),\ v(x;y)\ ) \equiv x,\ y(\ u(x;y),\ v(x;y)) \equiv y$ тенгликларни қаноатлантиради ва $u(x_0;y_0) = u_0,\ v(x_0;y_0) = v_0,$ муносабатлар ўринли бўлади. Демак, p нуқта атрофида $\hat{O}$ сирт $z = z(\ u(x;y),\ v(x;y)) = f(x;y)$ функциянинг графигидан иборатдир.

3.3. Сирт устида ётувчи эгри чизиқлар.

Регуляр $\hat{O}$ сиртнинг $p \in \hat{O}$ нуқта атрофида регуляр (f,G) параметрлаш усули

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

тенглама ёрдамида берилган, сирт устида M нуқтадан ўтувчи γ эгри чизиқ берилган бўлиб, у

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(t),\ a < t < b. \ (2)$$

тенглама ёрдамида параметрланган ва $\gamma \subset f(G)$ бўлсин.

Аниқлик учун, M сирт нуқтаси сифатида $(u_0;v_0)$ координаталарга, эгри чизиқ нуқтаси сифатида t параметрнинг t_0 қийматига мос келсин. Табиийки, ҳар бир $t \in (a;b)$ учун шундай $(u(t),v(t)) \in G$ нуқта мавжуд бўлиб,

$$\vec{\rho}(t) = \vec{r}(u(t),v(t)) \ (3)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар γ силлиқэгричизиқбўлса, $u(t),v(t)$ функцияларҳамдифференсиалланувчифункцияларбўлади. Буниисботлашучун $\hat{O}$ сиртнингрегулярсиртэканлигиданфойдаланамиз. $\hat{O}$ регулярсиртбўлганлигиучун $rang \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ тенгликўринли.

Аниқликучун $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ бўлсиндебфаразқилиб, $\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$ системаниқараймиз.

Агар γ силлиқэгричизиқбўлса,
$\vec{\rho}(t)$ векторфункциянингкоординаталари $x(t), y(t), z(t)$ дифференсиалланувчифун ксиялар бўлади.
Бирорта $t^* \in (a;b)$ учун $x^* = x(t^*),\ y^* = y(t^*),\ z^* = z(t^*)$. ва $u^* = u(t^*),\ v^* = v(t^*)$ белгилашла ркиритиб,

$$\begin{cases} x = x(u;v) \\ y = y(u;v) \end{cases}$$

системани

$$\begin{cases} x(u^*, v^*) = x^* \\ y(u^*, v^*) = y^* \end{cases}$$

Назорат саволлари:

1. Йўналтирувчи чизиғи $\vec{p} = \vec{p}(u)$ тенглама билан берилган, ясовчилари $\vec{e}$ векторга параллел бўлган силиндрнинг параметрик тенгламалари тузилсин.
2. Фазода $x = ach\left(\frac{u}{a}\right),\quad y = 0,\quad z = u$ тенгламалар билан берилган чизиқнинг Oz ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиртнинг (катеноид) тенгламаларини ёзинг.
3. Гиперболик параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

каноник тенглама билан берилган бўлса, унинг шундай параметрик тенгламаларини ёзингки, координата чизиқлари ясовчилардан иборат бўлсин.

4. Сфера $x = a\cos u\cos v,\quad y = a\sin u\cos v,\quad z = a\sin v$ параметрик тенгламалари билан берилган бўлса, унинг биринчи квадратик формасини топинг.

Эллиптик параболоид $x = \sqrt{p}v\cos u,\quad y = \sqrt{q}v\sin u,\quad z = \frac{v^2}{2}$ тенгламалар билан берилган, унинг биринчи квадратик формасини топинг.

5. Биринчи квадратик формаси $I = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ кўринишда бўлган сиртда $u = \frac{1}{2}av^2,\quad u = -\frac{1}{2}av^2,\quad v = 1$ чизиқлар ҳосил қилган учбурчакнинг периметрини ва бурчакларини топинг.
6. Биринчи квадратик форма 6-масаладаги кўринишда бўлган сиртда $u = av, u = -av, v = 1$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.
7. Биринчи квадратик форма 6-масаладаги кўринишда бўлган сиртда $u + v = 0, u - v = 0$ чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

8. Бир паллали гиперболоид $x = achu\cos v,\ y = achu\sin v,\ z = cchu$ тенгламалар билан берилган бўлса, унинг иккинчи квадратик формасини топинг.

9. Доиравий цилиндр $x = R\cos v, y = R\sin v, z = u$ тенгламалар билан берилган бўлса, унинг иккинчи квадратик формасини топинг.

10. Сирт $F(x, y, z) = 0$ тенглама билан берилган. Унинг Гаусс эгрилигини топинг.

11. Сирт дифференсиалланувчи $z = f(x, y)$ функциянинг графигидан иборат бўлса, унинг Гаусс ва ўрта эгрилигини ҳисобланг.

12. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ тенглама билан берилган. Унинг $M(3,4,12)$ нуқтадан ўтувчи уринма текислиги ва нормал тенгламалари тузилсин.

13. Геликоид $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ тенгламалар билан берилган. Унинг ўрта эгрилигини топинг.

14. Сирт $xyz = 1$ тенглама билан берилган. Унинг $x + y + z - 3 = 0$ текисликка параллел уринма текисликларини топинг.

15. Геликоид учун геодезик чизиқларнинг тенгламаларини ёзинг

16. Сирт $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv$ тенгламалар билан берилган. Унинг $P(u = 1, v = 1)$ нуқтасидаги $v = u^2$ чизиқ йўналиши бўйича нормал эгрилигини топинг.

17. Сирт $z = 2x^2 + \frac{9}{2}y^2$ тенглама билан берилган. Унинг $M(0,0,0)$ нуқтасидаги Дюпен индикатрисаси тенгламасини тузинг.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003
2. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001
3. Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014
4. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., изд. МГУ,2004

4-мавзу: РИМАН ГЕОМЕТРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ. ЧИГЕР-ГРОМОЛ ПРОБЛЕМАСИ.

РЕЖА:

4.1. Риман геометрияси элементлари.

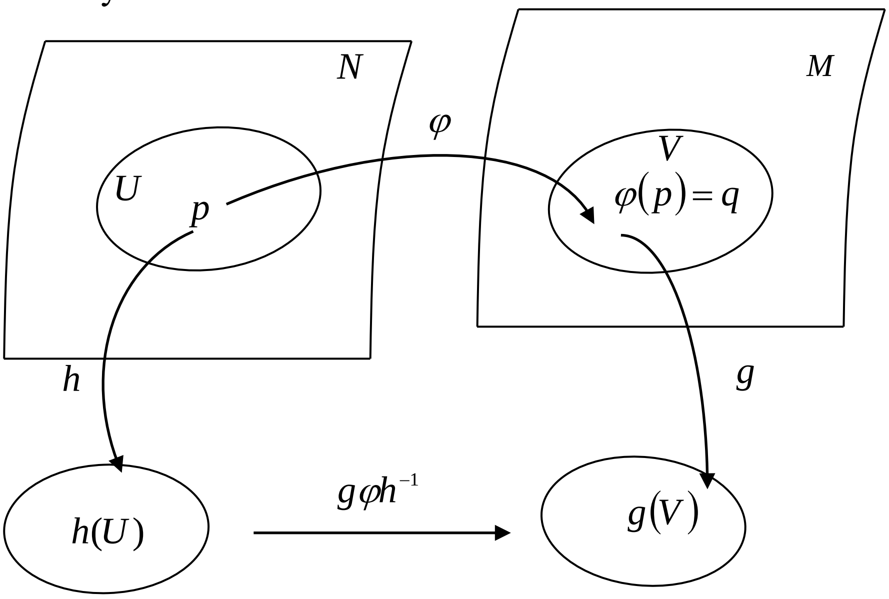
4.2. Эгрилиги номанфий кўпхилликлар геометрияси.

4.3. Замонавий геометрия бўйича халқаро конференцияларда таклиф этилган муаммолар ва уларнинг ечимларининг таҳлили.

Таянч иборалар: *кўпхиллик, риман кўпхиллиги, ботириш, жойлаш, риман метрикаси, вектор майдонлар*

4.1. Риман геометрияси элементлари.

Силлиқ k-ўлчамли N кўпхилликни силлиқ n-ўлчамли кўпхилликка узлуксиз акслантириш $\phi : N \longrightarrow M$ силлиқ дейилади, агар ихтиёрий $p \in N$ нуқтанинг атрофида N ва M даги бирор картада силлиқ функциялар билан берилса, яъни $g\varphi h^{-1}$ функция M да силлиқ функция бўлса (2-расм). Эслатиб ўтамиз, бунда N, M кўпхилликларнинг ўлчамлари k, n ихтиёрий бўлиши мумкин.



2-расм.

Икки силлиқ кўпхилликни ўзаро бир қийматли икки томонлама силлиқ акслантириш диффеоморфизм, бундай акслантириш ўрнатиш мумкин бўлган кўпхилликлар эса диффеоморф дейилади.

M да силлиқ йўл деб $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ силлиқ акслантиришга айтамиз. Локал координаталарда йўл нуқталарининг ҳар бир $x^i \circ \gamma$

координатаси силлиқ функция бўлади. $\gamma(a)$ ва $\gamma(b)$ нуқталар йўлнинг боши ва охири дейилади.

Теорема 3. $\varphi : N \longrightarrow M$ - силлиқ кўпхилликларни силлиқ аксланТириш ва $\forall q \in M$ φ акслантиришнинг регуляр нуқтаси бўлсин. У ҳолда p нуқтанинг тўла прообрази $B = \varphi^{-1}(q)_N$ да ўлчами $\dim B = \dim N - \dim M = k - n$ бўлган силлиқ қисм кўпхиллик бўлади.

Исбот. $B = \varphi^{-1}(q)$ қатламнинг кўпхиллик эканини исботлаш учун, ҳар бир $p \in B$ нуқтанинг атрофида ошкормас функция ҳақидаги теоремани қўллаш етарли. Натижада ҳар бир $p \in B$ нуқтанинг R^{k-n} евклид фазосидаги соҳага гомеоморф $p \in U$ атрофга эга бўлади. U атрофда локал координиталар сифатида N кўпхилликнинг p нуқтаси атрофидаги $(x_1,...,x_n)$ локал координаталардан бирор $(n-m)$ тасини олиш мумкин. Агар бу координаталар $\left(x_{i_1},...,x_{i_{n-m}}\right)$ бўлса, у ҳолда қолган (x_j) локал координаталар $\left(x_{i_1},...,x_{i_{n-m}}\right)$ орқали силлиқ функциялар билан ифодаланади. Бундан $B = \varphi^{-1}(q)$ нинг силлиқ кўпхиллик эканлиги келиб чиқади. $(y_1,...,y_n)_N$ кўпхилликнинг p нуқтаси атрофидаги бошқа координата системаси бўлсин. $\left(y_{j_1},...,y_{j_{n-m}}\right)$ система B да локал координаталар системасини ташкил этади. У ҳолда

$$y_{j_k} = y_{j_k}(x_1,...,x_n) = y_{j_k}\left(x_1\left(x_{i_1},...,x_{i_{n-m}}\right),...,x_n\left(x_{i_1},...,x_{i_{n-m}}\right)\right)$$

Силлиқ функция бўлади. Теорема исботланди.

Бу эса ошкормас функция ҳақидаги теоремадан келиб чиқади.

Акслантириш дифференциали.

φ : N → M — силлиқ N кўпхилликни силлиқ M кўпхилликка силлиқ акслантириш бўлсин. N даги ҳар бир γ йўлга M да $\varphi \circ \gamma$ йўл мос келади.

M да бирор $\varphi(p)$ нуқта атрофида берилган ҳар бир f функцияларга, N да бирор p нуқта атрофида берилган $f \circ \varphi$ функция мос келади.

Силлиқ φ акслантиришнинг p нуқтадаги дифференциали $d_p\varphi$ деб $d_p\varphi: T_pN \rightarrow T_{\varphi(p)}M$ акслантиришга айтилади, у ҳар бир $u \in T_pN$ векторга $d_p\varphi(u) \in T_{\varphi(p)}M$ векторни мос қўйади, M да ихтиёрий f силлиқ функцияга қуйидаги қоида бўйича таъсир этади:

$$(d_p\varphi(u))f = u(f \circ \varphi).$$

Агар u вектор γ йўлнинг $p = \gamma(t)$ нуқтада тезлик вектори бўлса, у ҳолда $d_p\varphi(u)$ вектор $\varphi \circ \gamma$ йўлнинг t да тезлик вектори бўлади (3-расм),

$d_p\varphi(\gamma'(t)) = (\varphi \circ \gamma)'(t).$

Юқоридаги формулалардан кўринадики, ихтиёрий u, $v \in T_pN$, $a \in R$ да $d\varphi(u+v) = d\varphi(u) + d\varphi(v)$, $d\varphi(au) = ad\varphi(u)$, яъни φ :N→M силлиқ акслантиришнинг дифференциали $d_p\varphi$ чизиқли акслантириш ва шунинг учун, хусусий ҳолларда силлиқ акслантириш бўлади,

$d_p\varphi$:$T_pN \to T_{\varphi(p)}M$

Табиий қоида бўйича аниқланган $d_p\varphi(p, u) = (\varphi(p), d_p\varphi(u))$ уринма қатламаларни акслантириш $d\varphi$:$TN \to TM$ ни қараймиз. Бу акслантириш умуман олганда чизиқли эмас, балки қатламда чизиқли.

Ботириш, жойлаштириш, субмерсия.

Агар ҳар бир $p \in N$ нуқтада $d_p\varphi$ чизиқли акслантириш ядроси фақат нолдан иборат бўлса, яъни $d_p\varphi T_pN$ фазони $T_{\varphi(p)}M$ нинг қисм фазосига чизиқли изоморф акслантирса, у ҳолда φ акслантириш N кўпхилликни M га (силлик) ботириш дейилади. Табиийки, бунда $k = dimN \leq dimM = n$ бўлишизарур.

N да p нуқтани ўз ичига олувчи (V, g) картанинг локал координаталари x^1 , ..., x^k ва M да $\varphi(p)$ нуқтани ўз ичига олувчи (U, h) картанинг y^1 , ..., y^n локал координаталарида φ акслантириш силлиқ функциялар билан берилади

$y^i = y^i(x^1, \ldots, x^k);\ i = 1, \ldots, n.$

φ акслантириш ботириш бўлиши учун $k \leq n$ бўлиб, ҳар бир $p \in N$ нуқтада Якоби матрицаси $\left(\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,k}$ нинг ранги к га тенг бўлиши, яъни максимал бўлиши зарур ва етарлидир.

Якоби матрицасининг ранги локал координаталарни қандай танлашга боғлиқ эмас ва φ акслантиришнинг p нуқтадаги дифференциали $d\varphi$ нинг ранги дейилади.

Агар φ : N → M акслантиришда N ўзининг образига диффеоморф бўлса, у ҳолда φ акслантириш (силлиқ) жойлаштириш дейилади. Бу ботиришнинг хусусий ҳолидир.

Ихтиёрий ботириш локал жойлаштириш бўлади.

Агар $k > n$ да Якоби матрицасининг ранги ҳар бир нуқтада максимал бўлса, яъни n га тенг бўлса, у ҳолда φ акслантириш субмерсия дейилади.

Мисоллар. 1. Силлиқ акслантириш $\pi : TM^{2n} \to M^n$ проекциялаш TM даги ҳар бир (p,u) (бунда $p \in M, u \in T_pM$) векторга унинг нуқтасини $\pi(p,u) = p$ мос қўяди. Бу акслантиришнинг ҳар бир нуқтада ранги максимал, яъни n га тенг бўлгани учун субмерсия бўлади.

2. $\varphi : R^2 \to R^1$ акслантириш қуйидаги қоида бўйича аниқланади: $\varphi(x, y) = x$, унинг ранги 1 га тенг субмерсия бўлади. Унинг $\varphi^{-1}(c) = 0$ қатламлари тўғри чизиқлар бўлади.

4.2. Эгрилиги номанфий кўпхилликлар геометрияси.

Кўпхилликларда вектор майдонлар.

M силлиқ кўпхилликнинг A қисм тўпламида X вектор майдон берилган дейилади, агар ҳар бир $x\in A$ нуқтага бирор $X_x\in T_xM$ вектор мос қўйилса.

X вектор майдонни $x\mapsto X_x$ акслантириш сифатида қараш учун барча X_xвекторлар ётувчи ягона тўпламни кўрсатиш лозим, чунки турли нуқталарга турли уринма фазолардан векторлар мос қўйилади. Бундай тўплам Уринма қатлама ТМ ҳисобланади. Шунинг учун вектор майдонни қуйидаги акслантириш каби аниқлаш қулайдир:

$X : A \to TM,$ бунда $A \subset M$

қўшимча хоссани қаноатлантирувчи : итхтиёрий $x\in A$ нуқта учун проекция $\pi(X_x)=x$, яъни $\pi\circ X = id_A$. Бундай акслантиришлар TM нинг кесимлари ҳам дейилади.

$G\subset M$соҳада берилган X вектор майдон силлиқ дейилади, агар уч тенгкучли тасдиқлардан бири бажарилса:

а)$X : A \to TM$акслантириш сифатида қаралаётган вектор майдон$A = G$силлиқ кўпхилликниTM силлиқ кўпхилликка акслантирса,силлиқ бўлади;

б) Mдаги G соҳада берилан ихтиёрий силлиқ функцияfучун$(Xf)(x) = X_xf$тенглик билан аниқланувчиXfфункция силлиқ бўлса;

в) ҳар бир$x\in G$ учун (U, h) карта топилсаки, ундаX_x векторнинг координатлари X_x^i ларx нуқтанингx^1 , ..., x^nкоординаталарига силлиқ боғлиқ бўлса.

$A\subset M$ тўпламда аниқланган Xвектор майдонсиллиқ дейилади, агар камида битта G⊃A очиқ тўпламда аниқланган силлиқ Yвектор майдон мавжуд бўлиб,Aтўпламда Xвектор майдон билан устма-уст тушади, $Y|_A = X$. БундайYмайдонXвектор майдоннинг кенгайтмаси дейилади.

Вектор майдонлар фазоси. Битта $A\subset M$ тўпламда берилган X, Y вектор майдонларни қуйидаги қоида бўйича қўшиш ва сонга кўпайтириш мумкин: $(aX+bY)_x = aX_x + bY_x$, бунда $a,b\in R$. Бу амалларга нисбатан А даги вектор майдонлар чизиқли фазо ташкил этади. Бундан ташқари, $A\subset M$ даги вектор майдонларни функцияга қуйидагича кўпайтириш мумкин:

$$fX)_x = f(x)\, X_x$$

M даги силлиқ вектор майдонлар чизиқли фазосини (R устида) χ билан белгилаймиз.

Ли қавси

V вектор фазо унда аниқланган [,] (Ли қавси деб номланувчи) бинар амал билан *Ли* алгебрасидейилади, агар ихтиёрий $u,v,w\in V$ ва $a,b\in R$ учун қуйиаги аксиомалар бажарилса:

1) кососимметриклик$[u, v] = -[v, u]$;

2) чизиқлилик$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$;

3) Якоби айнияти$[[u, v], w]+ [[v, w], u]+ [[w, u], v] = 0$.

Таъкидлаб ўтамизки, ассоциативлик талаб этилмайди.

Ли алгебрасига мисол қилиб R^3 евклид вектор фазосидаги оддий вектор кўпайтмани келтириш мумкин.

$G\subset M$ соҳанинг $x\in G$ нуқтасидаги ҳар икки силлиқ вектор майдонга силлиқ функцияларга фуйидаги қоида бўйича таъсир этувчи $[X, Y]_x$ функционал мос қўйилади

$$[X, Y]_x f=X_x(Yf)-Y_x(Xf)$$

Бу функционал ҳам вектор бўлади. Бу функционалнилокал координаталарда қарасак,

$$[X,Y]_x f = X_x(Y^i\partial_i f) - Y_x(X^i\partial_i f) =$$

$$= X_x^j(\partial_j Y^i)\partial_i f + X_x^j Y_x^i \partial_j\partial_i f - Y_x^j(\partial_j X^i)\partial_i f - Y_x^j X_x^i \partial_j\partial_i f =$$ Худди

$$= (X^j\partial_j Y^i - Y^j\partial_j X^i)_x \partial_i f,$$

шундай, M да (ёки соҳада) $X, Y\in \aleph$ ҳар икки вектор майдонларга $[X, Y]$янги вектор майдонни мос қўямиз. У X ва Y вектор майдонларнинг Ли қавси дейилади.

Агар X, Y вектор майдонлар C^k –силлиқ бўлса, у ҳолда уларнинг Ли қавси C^{k-1} – силлиқ вектор майдон бўлади.

Ли қавси хоссалари:

а. Ихтиёрий локал координаталар системасининг базис майдонлари учун

$$[\partial_i, \partial_j] = 0.$$

Ҳақиқатдан ҳам $X = \partial_j$вектор майдон $X^i=\delta^i_j$ локал координаталарга эга, бунда δ^i_j —Кронекер символи. Шунинг учун барча$\partial X^i/\partial x^k = 0$ ва $[\partial_i, \partial_j] = 0$. ■

б. Ихтиёрий $X, Y\in\aleph$ ва φ силлиқ функциялар учун

$$[X,\varphi Y]_x = \varphi(x)[X, Y]_x + (X_x\varphi)Y_x.$$

в. Агар N — M га жойлаштирилган қисм кўпхиллик ва X, Y — N да силлиқ вектор майдонлар, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, — уларнинг N қисм кўпхилликнинг M даги атрофида кенгайтмаси бўлса, у ҳолда $x\in N$ да

$[X, Y]_x = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_x$.

Риман кўпхиллиги.

Агар ҳар бир T_xM уринма фазода x нуқтага силлиқ боғлиқ $\langle\,,\rangle$ скаляр кўпайтма аниқланган бўлса, M кўпхилликда риман структураси берилган дейилади, яъни M даги ихтиёрий X, Y силлиқ вектор майдонлар учун $\langle X, Y\rangle$ M да силлиқ функция бўлади.

Боғланишли силлиқ M кўпхилликда риман структураси берилган бўлса, Mриман кўпхиллиги дейилади.

(U,h) локал координаталарда М даги ихтиёрий $x \in h(U)$ нуқта учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\langle X,Y\rangle_x = \langle X^i\partial_i, Y^j\partial_j\rangle_x = X_x^i Y_x^j\langle\partial_i,\partial_j\rangle_x = g_{ij}(x)X_x^i Y_x^j,$$

бунда ∂_i — xнуқтанинг (U, h) координаталарининг базис$g_{ij}(x)$билан эса $\langle\partial_i,\partial_j\rangle_x$ белгиланган. $g_{ij}(x)$қиймат M риман кўпхиллигининг x нуқтасининг(U, h)координаталарининг „метрик тензори" коеффициетлари дейилади.

$\langle X, Y\rangle$ функция M да ихтиёрий X, Y силлиқ вектор майдонлар учун силлиқ бўлиши учун барча g_{ij}функциялар силлиқ бўлиши зарур ва етарлидир, бу (x^1 , ..., x^n) локал кординаталардаги $\overline{g}_{ij} = g_{ij} \circ h$ функция билан тенг кучлидир.

Икки M_1, M_2 риман кўпхилликлари изометрик дейилади, агар улар ўртасида ихтиёрий $x\in M_1$нуқта ва ихтиёрий $u,v\in T_xM$ векторлар учун шундай диффеоморфизм ϕ:M₁→M₂ ўрнатиш мумкин бўлсин: $\langle u,v\rangle_{M_1} = \langle d\phi(u), d\phi(v)\rangle_{M_2}$

φ акслантиришнинг ўзи эса изометрия дейилади.

Агарϕ — изометрия,(U, h) — M_1 даги карта, (U, $\phi\circ h$) —эса M_2 даги карта бўлса, у ҳолда $\overline{g}_{ij}$функциянинг қийматлари x^1 , ..., x^n локал координаталарда бир хил бўлади.

Мисол.Риман кўпхиллигига энг содда мисол нуқтавий евклид фазосидир.

γ : $[a, b] \to M$М да бўлакли-силлиқ йўл бўлсин.

Ҳар бир $t \in [a, b]$учун $\gamma'(t)$ тезлик вектори аниқланган . γ' векторγ' $| = \sqrt{\langle\gamma',\gamma'\rangle}$узунликка эга. γ йўл узунлиги қуйидагича аниқланади:

$$s(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\, dt.$$

M — риман кўпхиллиги бўлсин. Таърифга кўра у боғланишли. Боғланишли силлиқ кўпхилликнинг ихтиёрий икки нуқтасини силлиқ йўл билан туташтириш мумкин. p, $q \in M$ нуқталар орасидаги масофа деб $\rho(p,q) = \inf s(\gamma)$ сонга айтилади, бунда p ва q ни туташтирувчи бўлакли-силлиқ γ йўлларнинг inf олинади.

Теорема 4. $\rho(p,q) = \inf s(\gamma)$ тенглик билан аниқланган ρ функция М да метрика бўлади, яъни

1) $\rho(p, q) > 0$,

2) $\rho(p, q) = \rho(q, p)$,

3) $\rho(p, l) + \rho(l, q) > \rho(p, q)$,

4) $\rho(p, p) = 0$,

5) *агар* $p \neq q$ *бўлса,* у ҳолда$\rho(p, q)>0$ *бўлади.*

ρ функцияга риман метрикаси дейилади.

N риман кўпхиллигини М риман кўпхиллигига ботириш ϕ:$N\to M$ изометрик дейилади, агар если ϕ ботириш индуцирлаган скаляр кўпайтма N даги билан устма-уст тушади, яъни ихтиёрий $x\in N$ нуқта ва $u,v\in T_xN$ учун $\langle d_x\phi(u), d_x\phi(V)\rangle_M = \langle u,v\rangle_N$ бажарилса.

4.3. Замонавий геометрия бўйича ҳалқаро конференцияларда таклиф этилган муаммолар ва уларнинг ечимларининг таҳлили

Ковариант дифференциаллаш.

M — силлиқ кўпхиллик ва $x \in M$ бўлсин. ∇ қоида ҳар бир $u \in T_x M$ вектор ва xнуқта атрофида берилган X силлиқ вектор майдонга бирор $\nabla_u X \in T_x M$ векторни мос қуйса, x нуқтада ковариант дифференциаллаш дейилади, агар ихтиёрий $u, v \in T_x M$, $a, b \in R$ лар, X, Y силлиқ вектор майдонлар ва f силлиқ функциялар учун x нуқта атрофида қуйидаги тенглик бажарилса:

$$\nabla_{au+bv} X = a\nabla_u X + a\nabla_v X,$$

$$\nabla_u (aX + bY) = a\nabla_u X + b\nabla_u Y,$$

$$\nabla_u (fX) = (uf) X_x + f(x)\nabla_u X$$

Бу ерда, одатдагидек, uf - f функциянинг u вектор йўналишидаги ҳосиласи, X_x —эса X майдоннинг x нуқтадаги қиймати. $\nabla_u X$ вектор X вектор майдоннинг uвектор йўналишидаги ковариант ҳосиласи дейилади.

$G \subset M$ соҳанинг барча нуқталарида берилган ковариант дифференциаллаш ∇ ҳар жуфт X, Y силлиқ вектор майдонларга G да янги $\nabla_X Y$ вектор майдонни мос қўяди. Таърифга кўра бу майдоннинг $x \in G$ нуқтадаги қиймати X_xвекторга боғлиқ ва X майдоннинг бошқа нуқталардаги қийматига боғлиқ эмас. Агар $\nabla_X Y$ майдон ихтиёрий силлиқ X и Y майдонлар учун силлиқ бўлса, у холда ковариант дифференциаллаш ∇ силлиқ дейилади. Силлиқ ковариант дифференциаллаш чизиқли боғлиқлик ҳам дейилади.

Л е м м а. Агар $u \in T_p M$ ва X, $\tilde{X}$ вектор майдонлар p нуқтанинг бирор атрофида устма-уст тушса, у ҳолда p нуқтада $\nabla_u X = \nabla_u \tilde{X}$.

Леви-Чивита боғланиши.

1. Т е о р е м а. Ихтиёрий *М риман кўпхиллигида симметрик риман богланиши мавжуд ва у ягонадир. У М даги Леви-Чивита боғланиши дейилади.*

2. Исбот. Ягоналиги. ∇ — шундай боғланиш бўлсин. Риччи айниятини X, Y, Z майдонларни циклик алмаштириб уч марта ёзамиз:

$$\begin{aligned} &X\langle Y,Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0,\\ &Y\langle Z,X\rangle - \langle \nabla_Y Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle = 0,\\ &Z\langle X,Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Дастлабки икки тенгликни қўшиб, учинчисини айирамиз.

$$X\langle Y,Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - \langle \nabla_Y Z, X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle - Z\langle X,Y\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \\ + \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0. \tag{4*}$$

Боғланиш симметрик эканидан:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y],\ \nabla_X Z - \nabla_Z X = [X,Z], \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y,Z].$$

(4*) тенгликнинг чап томонига $\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ ҳадни қўшиб, айирсак қуйидагига эга бўламиз:

$$2\langle\nabla_X Y,Z\rangle=\{X\langle Y,Z\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}+\{Y,\langle Z,X\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}-$$
$$-\{Z\langle X,Y\rangle-\langle Z,[X,Y]\rangle\}. \qquad (5)$$

буларни ҳисоблаб,Кошуль формуласи деб номланувчи (5) формулани ҳосил қиламиз: (5) нинг ўнг томони ∇ га боғлиқ эмас. Шунинг учун амалда иккита шундай ∇ и ∇' боғланиш мавжуд бўлади, ихтиёрий$x\in M$ нуктада қуйидаги тенглик бажарилади:

$$\langle\nabla_{X_x}Y,Z_X\rangle=\langle\nabla'_{X_x}Y,Z_x\rangle$$

ихтиёрий Z майдон учун бажарилишидан,яъни

$$\langle\nabla_{X_x}Y-\nabla'_{X_x}Y,Z_x\rangle=0$$

Натижада, $(\nabla_{X_x}Y)_x=(\nabla'_{X_x}Y)_x$. Бу тенглик иҳтиёрий xнуқтада ва иҳтиёрий X, Y майдонлар учун ўринли. Демак, $\nabla=\nabla'$.■

Ҳисоб-китобни осонлаштириш учун аввал исботланганлардан фойдаланамиз. M да иҳтиёрий симметрик $\tilde{\nabla}$ боғланиш киритамиз. (4) нинг ҳар бир тенглигининг чап томони талаб қилинган хоссаларни қаноатлантиради, 8.1.3 леммага кўра, (5) тенгликнинг ўнг ва чап томонлари айирмаси ҳам X,Y,Z вектор майдонларнинг x нуқтадаги қийматига боғлиқ. Лекин (5) нинг чап томони, яъни $2\langle\tilde{\nabla}_{X_x}Y,Z_x\rangle$, ва худди шундай ўнг томони ҳам Z майдоннинг x нуқтадан бошқа нуқтадаги қийматига боғлиқ эмас.

Энди аниққи, (5) нинг ўнг томони X, Y майдонларнинг фиксирланган қийматида x∈M нуқтада фақат $Z_x\in T_xM$ га боғлиқ бўлса, у ҳолда (5) ўнг томони T_xM да L чизиқли функционални аниқлайди.

Шунинг учун барча $Z_x\in T_xM$ учун $\langle w,Z_X\rangle=L(Z_x)$ бўладиган (X, Y майдонларга боғлиқ) $w\in T_xM$ мавжуд бўлади.

Таърифга кўра $\nabla_{X_x}Y=w/2$ деб олсак, Леви-Чивита боғланишини ҳосил қиламиз. Ҳақиқатдан ҳам, киритилган ∇ амал 7.2 даги (6) нинг дастлабки икки шартини қаноатлантиради. Қурилишига кўра ∇ иҳтиёрий X, Y, Z майдонлар учун (5) муносабатни қаноатлантиради. (5) ни X, Y, Z ва X, Z, Y учун қўлласак ва натижаларни қўшсак, ∇ амал Риччи (1) айниятини қаноатлантиришига амин бўламиз:

$$2\langle\nabla_X Y,Z\rangle+2\langle\nabla_X Z,Y\rangle=\{X\langle Y,Z\rangle-\langle Y,[X,Z]\rangle\}+\{Y\langle Z,X\rangle-\langle X,[Y,Z]\rangle\}-\{Z\langle X,Y\rangle-$$
$$-\langle Z,[X,Y]\rangle\}+\{X\langle Z,\mathrm{Y}\rangle-\langle Z,[X,\mathrm{Y}]\rangle\}+\{\mathrm{Z}\langle Y,X\rangle-\langle X,[\mathrm{Z},\mathrm{Y}]\rangle\}-\{\mathrm{Y}\langle X,\mathrm{Z}\rangle-\langle Y,[X,\mathrm{Z}]\rangle\}.$$
$$\Rightarrow\ 2\langle\nabla_X Y,Z\rangle+2\langle\nabla_X Z,Y\rangle=2X\langle Y,Z\rangle$$

(1) ни иҳтиёрий X, fY, Z майдонлар учун қўлласак,

$$X\langle fY,Z\rangle_x=\langle\nabla_{X_x}fY,Z_x\rangle+\langle f(x)Y_x,\nabla_{X_x}Z\rangle=f(x)\langle\nabla_{X_x}Y,Z_x\rangle+X(f)\langle Y_x,Z_x\rangle+$$
$$+\langle f(x)Y_x,\nabla_{X_x}Z\rangle$$
$$\Rightarrow\langle(Xf)\cdot Y,Z\rangle+f\cdot\langle\nabla_X Y,Z\rangle=\langle\nabla_X(fY),Z\rangle$$

га эга бўламиз.

Бундан, Z майдоннинг иҳтиёрийлигидан келиб чиқиб, қуйидагига эга бўламиз

$$\nabla_x(fY)=(Xf)\cdot Y+f\cdot\nabla_X Y,$$

бу эса 7.2 даги (6) нинг учинчи шарти бажарилини билдиради ва ∇ — боғланиш эканини исботлайди. (5) ни *X, Y,Z* ва*Y, X, Z* учликларга қўллаб, натижаларни айирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle - 2\langle\nabla_Y X, Z\rangle = \{X\langle Y,Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle\} + \{Y,\langle Z,X\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle\} - \{Z\langle X,Y\rangle -$$

$$-\langle Z,[X,Y]\rangle\} - \left(\{Y\langle X,Z\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle\} + \{X,\langle Z,Y\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle\} - \{Z\langle Y,X\rangle - \langle Z,[Y,X]\rangle\}\right)$$

$$\langle\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], Z\rangle = 0.$$

Бу $\langle\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]\rangle$ эканини кўрсатади, яъни киритилган богланиш симметриклигини кўрсатади. ■

(2) Риччи айнияти локал координаталарда қуйидаги тенгламалар системасига тенг кучли

$$\partial_i g_{jk} - \langle\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle - \langle\partial_j, \nabla_{\partial_i}\partial_k\rangle = 0; \quad i, j, k=1,\dots,n, \qquad (6)$$

ёки

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^s_{ij}\partial_s,\ \langle\partial_s, \partial_k\rangle = g_{sk}. \ (8)$$

эканини ҳисобга олсак қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\partial_i g_{jk} - \Gamma^s_{ij} g_{sk} - \Gamma^s_{ik} g_{sj} = 0 \ (7)$$

Ҳақиқатан, (6) нинг ҳар бир тенгламаси $\partial_i, \partial_j, \partial_k$ базис майдонларга қўлланган (2) Риччи айниятини беради, шунинг учун (6) тенгликлар (2) дан келиб чиқади. (2) ни (6) дан келтириб чиқариш учун, вспомним, 8.1.3 га кўра (2) нинг чап томонининг қиймати ҳар бир $x \in M$ нуқтада фақат *X, Y, Z* вектор майдонларнинг шу нуқтадаги қийматлари X_x, Y_x, Z_x га боғлиқ бўлади. Шунинг учун иҳтиёрий *X, Y, Z* майдонлар учун (2) нинг чап томонини мумкин бўлган барча базис майдонлар учлиги учун аналогик ифодаларнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ифодалаш мумкин. Лекин улар учун (6) га кўра бу ифодалар нолга тенг.

Локал координаталарда $\partial_i, \partial_j, \partial_k,$ базис майдонлар учун (5) тенглик қуйидаги кўринишни олади:

$$2\Gamma^s_{ij} g_{sk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \quad (9)$$

i, j фиксирланганда (9) тенгламалар системасидан *s = 1, ..., n*да Кристоффел символларини аниқ топиш мумкин

$$\Gamma^s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) g^{sk}, \quad (10)$$

бунда (g^{sk}) — матрица, (g_{sk}) га тескари матрица.

Лекин ҳар бир симметрик боғланиш бирор риман метрикаси учун Леви-Чивита боғланиши бўлавермайди.

Назорат саволлари:

1. Дифференциал 1-формалар. Функция дифференциали – дифференциал 1-форма.
2. Функция градиенти ва функция дифференциали.

3. Сиртларнинг биринчи ва иккинчи квадратик формалари – дифференциал формалар.
4. Риман кўпхилликлари таърифи ва мисоллар. Ковариант дифференциал ва Кристоффел символлари.
5. Симметрик боғланишлик. Риман ва Леви – Чивита боғланишлиги.
6. Акслантириш бўйлаб вектор майдон. Йўл бўйлаб ковариант дифференциаллаш. Параллел вектор майдонлар.
7. Параллел кўчириш ва геодезик чизиқлар. Геодезик чизиқларнинг мавжудлиги.
8. Экспоненциал ва геодезик акслантиришлар.
9. Экспоненциал акслантиришларнинг хосслари. Геодезик акслантиришларнинг хосслари.
10. Гаусс леммаси. Шарлар ва қисқа чизиқлар.
11. Хопф-Ринов теоремаси.
12. Ёпиқ геодезик чизиқлар. Берже лемаси.
13. Эгрилик тензори ва унинг алгебраик хоссалари.
14. Риман эгрилиги. Секцион эгрилик. Эгрилиги ўзгармас фазолар.
15. Риччи эгрилиги ва скаляр эгрилик. Локал изометриялар.
16. Риман субмерсиялари ва O'Нейл формулалари.
17. Қисм кўпхилликлар. Индуцирланган боғланишлик. Иккинчи асосий форма.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D.Gromoll, G.Walschap. Metric Foliations and Curvature. Progress in Mathematics Volume 268,2009,ISBN: 978-3-7643-8714-3 , 1-80 бетлар
2. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003
3. Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014
4. Материалы междунаородной конференции «Геометрия в Одессе-2014».Одеса,Украина.2014.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

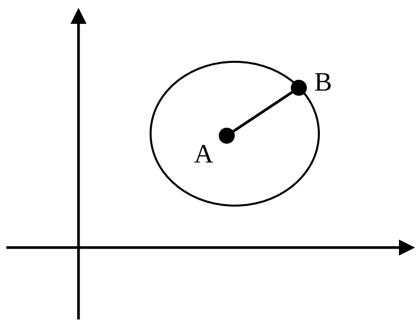
1-амалий машғулот: Иккинчи тартибли чизиқлар ва уларнинг классификацияси

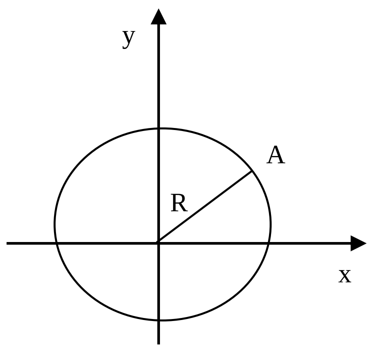
Икки номаълумли иккинчи даражали алгебраик тенгламалар эса иккинчи тартибли егри чизиқлардан иборат бўлиб, қуйидаги умумий кўринишга эга бўлади:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad (2)$$

Бундаги *A, B, C, D, E, F* лар ўзгармас сонлар бўлиб алгебраик тенгламаларнинг коэффицентларидир. (2) тенгламага тенг кучли бўлган барча тенгламалар иккинчи тартибли эгри чизиқни ифодалайди. Иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг содда кўринишларидан бири айланадир.

Таъриф: Текисликнинг ихтиёрий нуқтасидан бир хил масофада ётган нуқталарнинг геометрик ўрнига айлана дейилади.





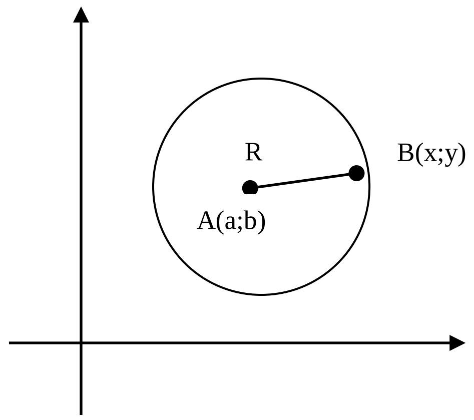
Агар айлананинг маркази координаталар бошида ҳамда радиуси $OA=R$ дан иборат бўлса, бундай айлананинг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x^2+y^2=R^2 \quad (3)$$

Бу тенглама координаталар бошидан айлананинг ихтиёрий A нуқтасигача бўлган OA масофанинг квадрати R^2 га тенг еканлигини ифодалайди.

Маркази A(a; b) нуқтада ётувчи ва радиуси R дан иборат бўлган айлананинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (4)$$



(4) дан кўринадики, $A(a;\ b)$ ва $B(x;\ y)$ нуқталар орасидаги AB масофанинг квадрати R^2 га тенг.

Агар (4) тенгламадаги қавсларни очиб шакл алмаштиришлар бажарсак, қуйидаги кўринишга эга бўламиз:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0 \quad (5)$$

Бундан кўринадики (5) айлана иккинчи тартибли егри чизиқдан иборат екан.

Иккинчи тартибли егри чиқларнинг турли кўринишдаги тенгламаларининг барчаси ҳам айлана бўлмаслиги мумкин. Уларнинг барчаси айлана бўлиши учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши лозим:

а) тенгламада xy кўринишдаги кўпайтмали ҳад бўлмаслиги керак;

б) x^2 ва y^2 ларнинг коэффицентлари ўзаро тенг бўлиши лозим;

в) A, B, C, D коэффицентлар

$$B^2+C^2-4AD>0 \quad (6)$$

шартни бажарса,

$$Ax^2+Bx+Ay^2+Cy+D=0 \quad (7)$$

кўринишдаги тенглама айлана тенгламаси бўлади.

(6) тенгсизлик бажарилганда (7) айлана тенгламасидан унинг маркази $(a,\ b)$ ни ва радиус R ни қуйидаги формулалар ёрдамида топиш мумкин:

$$a=-\frac{B}{2A},\quad b=-\frac{C}{2A},\quad R^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2} \quad (8)$$

1-мисол. Маркази $(3;\ -4)$ нуқтада ётган ҳамда радиуси 6 га тенг бўлган айлана тенгламасини тузинг.

Ечиш: Шартга кўра $a=3$, $b=-4$ ва $R=6$. Берилганларни (4) тенгламага қўямиз:

$$(x-3)^2+(y+4)^2=6^2,$$

бундан,

$$x^2-6x+9+y^2+8y+16=6^2,$$

$$x^2+y^2-6x+8y-11=0.$$

2-мисол. Радиуси 7 ва маркази (5; 4) нуқтада бўлган айлана тенгламасини топинг.

Ечиш: Масала шартига асосан a =5, b=4, R=7. (4) тенгламага асосан:

$$(x-5)^2+(y-4)^4=7^2,$$

$$x^2-10x+25+y^2-8y+16-49=0,$$

$$x^2+y^2-10x-8y-8=0.$$

Бу изланган тенглама.

Назорат саволлари:

1. Қуйидаги чизиқларнинг тури аниқлансин:

1) $x^2+2xy+y^2+y=0;$
2) $x^2+2xy+y^2+y+x=0;$
3) $(x+2y)^2-3y^2=1;$
4) $(2x-y)(x-y)-1=0.$

2. Иккинчи даражали кўпҳадни Лагранж усулидан фойдаланиб, квадратлар йиғиндисига келтиринг, ва иккинчи тартибли чизиқларнинг турини аниқланг.

1) $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0;$
2) $4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0;$
3) $2xy-4y^2+6x+6y+1=0.$

3. Координаталарни алмаштириш ёрдамида қуйидаги иккинчи тартибли чизиқлар турини ва жойлашишини аниқланг.

1) $x^2+2y^2+4x-4y=0;$

2) $4x^2-y^2-8x-6y-4=0;$

3) $4x^2+4x+2y-1=0;$

4) $6x^2+8y^2+3x-4y+1=0;$

5) $2x^2-3y^2-6x+9y-2=0;$

6) $2x^2+6x+3y+6=0;$

7) $4y^2+4x-2y+1=0;$

8) $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0;$

9) $xy+x+y=0.$

4. Қуйидаги тенгламалар билан берилган иккинчи тартибли чизиқларнинг тури, ўлчовлари ва жойлашиши аниқлансин:

$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0.$

$9x^2+24xy+16y^2-230x+110y-475=0.$

$5x^2+12xy-12x-22y-19=0.$

$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0.$

$4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2=0.$

$2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0;$

$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0;$

$5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0;$

$6xy-8y^2+12x-26y-11=0;$

$7x^2+16xy-23y^2-14x-16y-218=0;$

$7x^2-24xy-38x+24y+175=0;$

$9x^2+24xy+16y^2-40x-30y=0;$

$x^2+2xy+y^2-8x+4=0;$

$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0.$

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Нарманов А.Я. Аналитик геометрия. Т., “Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти”, 2008 й.
2. Izu Vaisman. Analytical geometry.World scientific.2007.
3. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometruyadan masalalar to’plami.T,Universitet, 2006.

2-амалий машғулот: Иккинчи тартибли сиртлар.

Сфера. Маркази $C(a,b,c)$ нуқтадаги, r радиусли сфера тенгламаси қуйидаги кўринишга эга:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

(1-чизма). Бу тенглама сферанинг нормал тенгламаси дейилади. Агар сфера маркази координаталар боши билан устма-уст тушса, нормал тенглама қуйидаги

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

кўринишга эга бўлади.

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+2Bx+2Cy+2Dz+E=0$$

тенглама

$$A\neq 0,\ B^2+C^2+D^2-AE>0$$

шартда маркази $\left(-\frac{B}{A},\ -\frac{C}{A},\ -\frac{D}{A}\right)$ нуқтадаги ва радиуси $r=\sqrt{\frac{B^2+C^2+D^2-AE}{A^2}}$ га тенг бўлган айланани аниқлайди.

M нуқтанинг радиуси r, маркази C нуқтада бўлган сферага нисбатан даражаси деб

$$y=d^2-r^2$$

сонга айтилади. Бу ерда $d = MC$ сон M нуқтадан C марказгача бўлган масофа.

Агар M нуқта сфера ташқарисида ётса, бу нуқтанинг сферага нисбатан даражаси мусбат сондир. Бу сон M нуқтадан сферага ўтказилган уринма узунлигининг квадратига тенг. Агар M нуқта сфера ичида ётса, бу нуқтанинг сферага нисбатан даражаси манфий сон бўлади ва абсолют қиймати бўйича $MP\cdot MQ$ кўпайтмага тенг. MP, MQ кесмалар M нуқтадан ўтувчи ихтиёрий ватар бўлакларининг узунликларига тенг.

Агар M нуқта сферада ётса, бу нуқтанинг сферага нисбатан даражаси нолга тенг. $M(x,y,z)$ нуқтанинг маркази $C(a,b,c)$ нуқтада ётувчи ва радиуси r га тенг сферага нисбатан даражаси

$$y=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2$$

формуладан аниқланади.

Концентрик бўлмаган иккита сфераларга нисбатан тенг даражали нуқталарнинг геометрик ўрни текисликдан иборат. Бу текислик иккита сферанинг радикал текислиги дейилади. Агар сфералар кесишса, радикал текислик уларнинг умумий айланаси орқали ўтади.

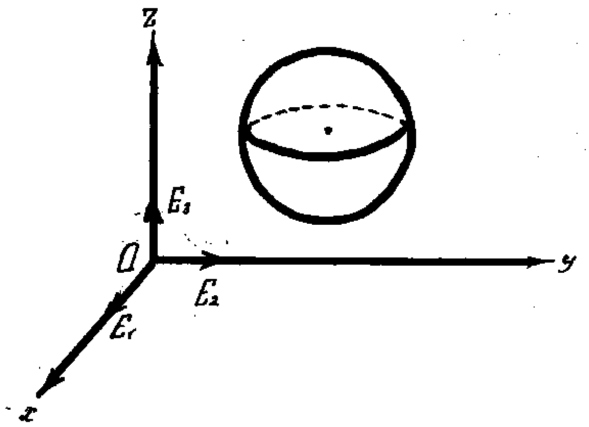
Иккита сфера тенгламаларини қарайлик:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2-r_1^2=0,$$

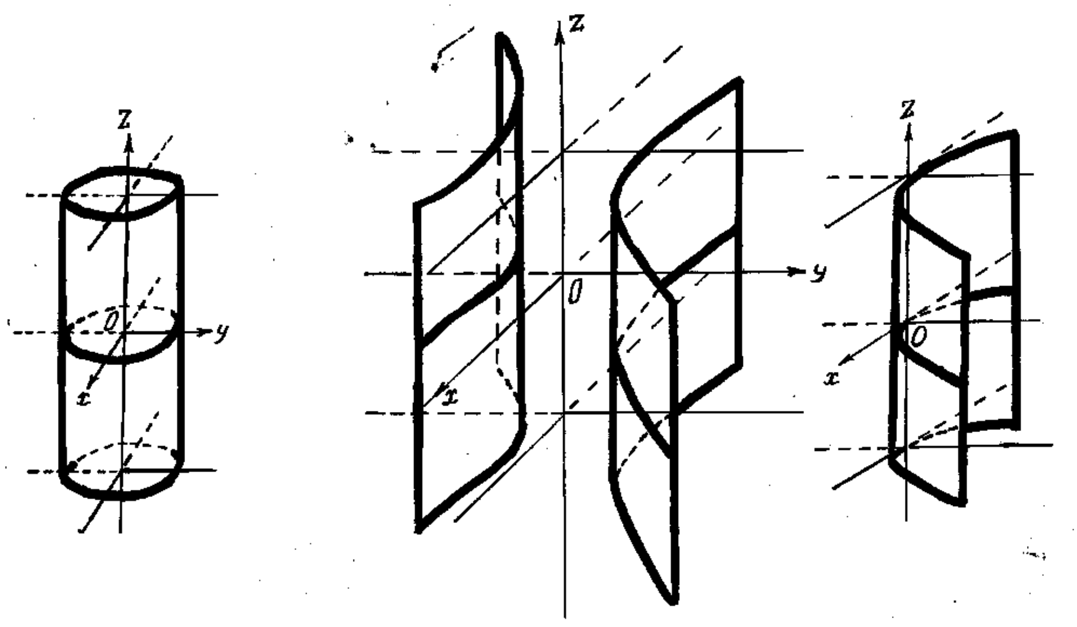
$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2-r_2^2=0$$

ва уларнинг чап томонларини u_1, u_2 деб белгилайлик.

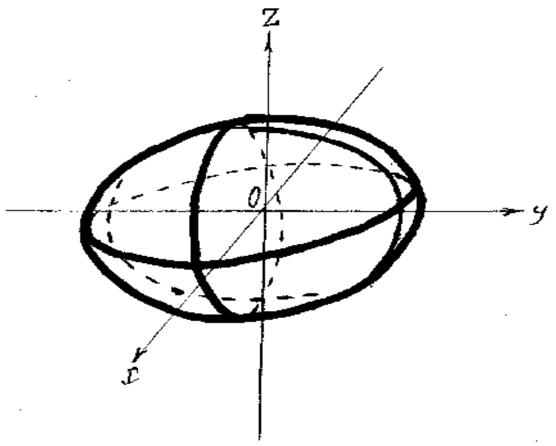
$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 = 0$ тенглама λ_1, λ_2 сонлар бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳолда сфера ёки текисликни аниқлайди. Агар сфералар кесишса, бу тенглама уларнинг умумий айланасидан ўтадиган сферани ёки текисликни ифода этади. $u_1=u_2$ тенглама радикал текисликни аниқлайди.



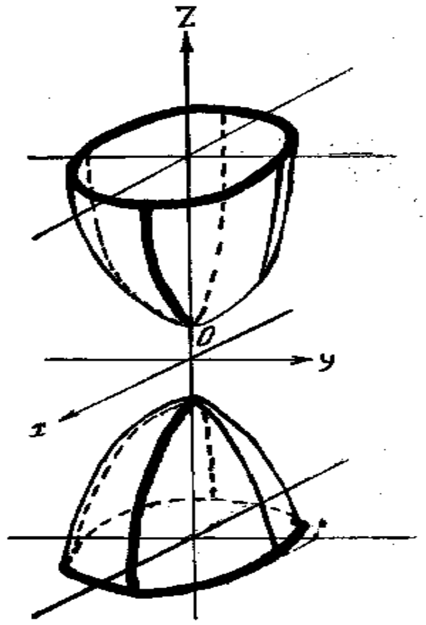
1–чизма



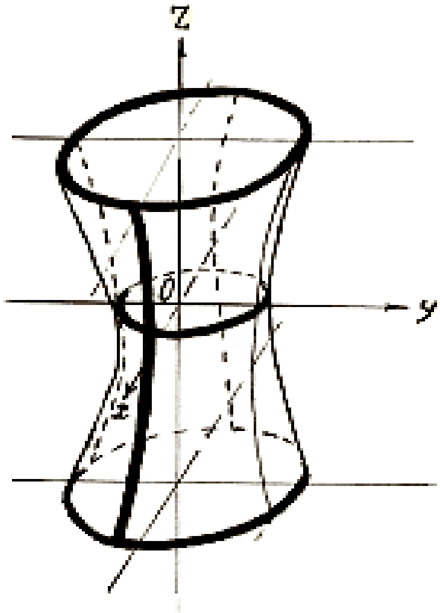
2–чизма



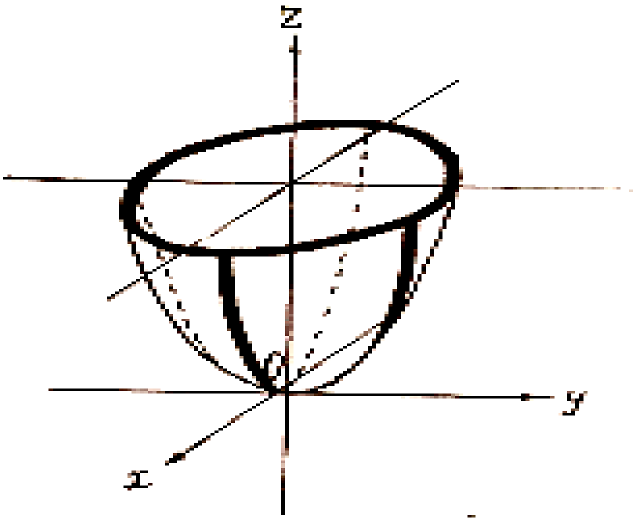
3-чизма



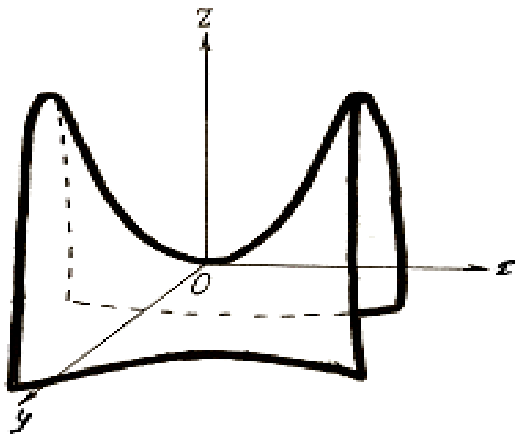
4-чизма



5-чизма



6-чизма



7-чизма

$\lambda u+\mu v=0$ тенгламада $u=0$ сфера тенгламаси ва $v=0$ текислик тенгламаси бўлса, $\lambda\neq 0$ шартда сферани, ёки $\lambda=0$, $\mu\neq 0$ шартда текисликни аниқлайди. Агар улар кесишса бу сфера $v=0$ текисликнинг сфера билан кесишиш чизиғи орқали ўтади.

Назорат саволлари:

1. Қуйидаги сфера марказининг координаталари ва радиуси аниқлансин.

1) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$,

2) $x^2+y^2+z^2+8x=0$,

3) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$,

4) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$.

2. Қуйидаги айлана марказининг координаталари ва радиуси аниқлансин.

$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z+24=0,\ 2x+2y+z+1=0$.

3. Қуйидаги айлананинг маркази аниқлансин.

$$x^2+y^2+z^2=R^2,\ Ax+By+Cz+D=0$$

4. $A(3;0;4)$, $B(3;5;0)$,$C(3;4;4)$,$D(5;4;6)$ нуқталарнинг $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49$ сферага нисбатан вазияти аниқлансин.

5. Қуйидаги текистликларнинг ушбу $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$ сферага нисбатан вазияти аниқлансин.

1) $2x+2y+z+2=0$,

2) $2x+2y+z+5=0$,

3) $2x+2y+z+11=0$.

6. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ сферанинг ушбу $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ тўғри чизиққа қўшма бўлган диаметриал текислигининг тенгламаси тузилсин.

7. Ушбу $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=25$ сферанинг $M(3,5,1)$ нуқтада тенг иккига бўлинадиган ватарларининг геометрик ўрни топилсин.

8. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ сферанинг $S(x_0\ y_0\ z_0)$ нуқтадан ўтувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни топилсин.

9. $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ сферанинг $(-R,0,0)$ нуқтадан ўтувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни топилсин.

10. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ сферанинг $M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ нуқтадан ўтувчи ватарлари ўрталарининг геометрик ўрни топилсин.

11. $S(x_0\ y_0\ z_0)$ нуқтадан $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферага ўтказилган уринма текисликка туширилган перпендикулярлар асосларинииг геометрик ўрни топилсин.

12. $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=49$ сферага $M\ (7,\ -1,\ 5)$ нуқтада ўтказилган уринма текислик тенгламаси тузилсин.

13. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ сферага $M_0\ (x_0\ y_0\ z_0)$ нуқтада ўтказилган уринма текислик тенгламаси тузилсин.

14. $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферага M_0 $(x_0\ \ y_0\ \ z_0)$ нуқтада ўтказилган уринма текислик тенгламаси тузилсин.

15. $x^2+y^2=9,\ z=0$ va $x^2+y^2=25,\ z=2$ айланалардан ўтувчи сфера тенгламаси тузилсин.

16. Координаталар бошидан ва $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=49,\ 2x+2y-z+4=0$ айланадан ўтадиган сфера тенгламаси тузилсин.

17. $(1,\ -2,\ 0)$ нуқтадан ва $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=49,\ 2x+2y-z+4=0$ айланадан ўтувчи сфера тенгламаси тузилсин.

18. Тўғри чизиқларнинг боғлами S_1 ва бу боғламдаги тўғри чизиқларга перпендикулар бўлган текисликлар боғлами S_2 берилган. S_1 боғламининг тўғри чизиқлари ва S_2 боғламнинг текисликлари кесишади. Кесиш нуқталарининг геометрик ўрни топилсин. S_1 боғлам текисликлари билан S_2 боғламнинг шу текисликларга перпендикулар бўлган тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталаридан ҳосил бўлган геометрик ўрни аввалги геометрик ўрнининг ўзидан иборатлиги исботлансин.

19. Қандай зарурий ва етарли шарт бажарилганда $Ax+By+Cz+D=0$ текислик $x^2+y^2+z^2=R^2$ сферага уринади? Бу шарт бажарилган деб уриниш нуқтасининг координаталари топилсин.

20. Ўқлари координата ўқлари билан устма-уст тушувчи, Oxz ва Oyz текисликларни мос равишда $y=0,\ \frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1,\ x=0\ \frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ чизиқлар бўйлаб кесиб ўтувчи эллипсоид тенгламаси тузилсин.

21. Ўқлари координата ўқларидан иборат, $z=0,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ эллипс ва $M(1,\ 2,\ \sqrt{23})$ нуқта орқали ўтувчи эллипсоид тенгламаси тузилсин.

22 Ўқлари координата ўқларидан иборат бўлган ва $x^2+y^2+z^2=9,\ z=x$ айланадан ҳамда $M(3,\ 1,1)$ нуқтадан ўтган эллипсоид тенгламаси тузилсин.

23. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{75}=1$ эллипсоиднинг $M(3,2,5)$ нуқтасидаги уринма текислиги тенгламаси тузилсин.

24. $Ax+By+Cz+D=0$ текисликнинг $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоидга уриниши учун зарурий ва етарли шарт топилсин.

25. $Ax+By+Cz+D=0$ текисликнинг $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид билан кесишиши учун қандай шартнинг бажарилиши зарур ва етарли?

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг марказидан унинг уринма текислигига тушурилган перпендикулярлар асосларининг геометрик ўрни топилсин.

27. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг $Ax+By+Cz+D=0$ текислик билан кесишиш чизиғининг маркази топилсин.

28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтада тенг иккига бўлинадиган ватарларининг геометрик ўрни топилсин.

29. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1$ эллипсоиднинг $\boldsymbol{a}(2,1,2)$ векторга параллел, ватарларини тенг иккига бўлувчи диаметрал текислигининг тенгламаси тузилсин.

30. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг $P(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан ўтувчи ватари ўрталарининг геометрик ўрни аниқлансин.

31. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид билан $x^2+y^2+z^2=R^2$ сфера уринма текисликларининг кесишишидан ҳосил қилинган эллипс марказларининг геометрик ўрни аниқлансин.

32. Ўқлари координата ўқларига параллел, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид билан $Ax+By+Cz+D=0$ текисликнинг кесишиш чизиғидан ўтувчи эллипсоид тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\lambda(Ax+By+Cz+D)$ кўринишда бўлиши исботлансин.

33. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ *-1-*λ *(Ax+By+Cz+D)=0* тенглама билан аниқланган эллипсоидлар марказларининг геометрик ўрни топилсин (λ– ихтиёрий қийматларни қабул қилади).

34. Иккита $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 (a>b)$ эллипсоид қандай чизиқ бўйлаб кесишади?

35. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ (a>b>c)$ эллипсоидни айланалар бўйича кесиб ўтадиган ҳамма текисликлар тенгламаси тузилсин.

36. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг марказидан барча нуқталарида унга ўтказилган уринма текисликларгача бўлган масофалар d га тенг бўладиган нуқталарнинг геометрик ўрни топилсин.

37. 36-масалани $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ эллипсоид учун ечинг.

38. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *(a>b>c)* эллипсоид доиравий кесимлари марказларидан тузилган нуқталарнинг геометрик ўрни топилсин.

3-амалий машғулот: Чизиқлар назарияси.

1-масала. Винт чизиғи

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \quad (a>0, \quad b>0). \\ z=bt. \end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида берилади. Винт чизиғи тенгламаларини табиий параметр ёрдамида ёзинг.

Ечиш. Бунинг учун аввало винт чизиғи учун ёй узунлигини ҳисоблаймиз ($M_1(0)$ ва $M_2(t)$ нуқталар билан чегараланган ёй узунлиги)

$$S=\int_0^t \sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,t.$$

бу ердан $t=\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ни топиб,

$$\begin{cases} x=a\cos\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y=a\sin\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}S \end{cases}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Текшириш учун

$$\begin{cases} \dot{x}=-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dot{y}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\dfrac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \dot{z}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

ҳосилаларни ҳисоблаб,

$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$ ни ҳосил қиламиз.

2-масала. Ярим айлана

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t. \quad (0\le t\le \pi) \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган бўлса, у табиий параметр билан берилганлигини кўрсатинг.

Ечиш. Ёй узунлигини ҳисоблаймиз

$$s=\int_0^t \sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=t$$

ва тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, $t=s$ параметр табиий параметрдир.

3-масала. Чизиқ

$$\begin{cases} x^3=3a^2y \\ 2xz=a^2 \quad (a\neq 0). \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган бўлса, бу чизиқнинг $y=\dfrac{a}{3}$ ва $y=9a$ текисликлар билан чегараланган ёйининг узунлигини топинг.

Ечиш. Аввало бу текисликлар билан берилган чизиқ бир мартадан кесишади. Биринчи $y=\dfrac{a}{3}$ текислик билан кесишиш нуқтаси $M_1(a,\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{2})$, иккинчи $y=9a$ текислик билан кесишиш нуқтаси $M_2(3a,9a,\frac{a}{6})$.

Энди чизиқнинг параметрик тенгламаларини

$$\begin{cases} x=t, \\ y=\frac{1}{3a^2}t^3 \\ z=\frac{a^2}{2t} \end{cases}$$

кўринишда ёзиб, ёй узунликларини ҳисоблаймиз.

$$S=\int_a^{3a}\sqrt{1^2+\frac{t^4}{a^4}+\frac{a^4}{4t^4}}dt=\int_a^{3a}\sqrt{\frac{4a^4t^4+4t^8+a^8}{4a^4t^4}}dt=\int_a^{3a}\frac{\sqrt{(a^4+2t^4)^2}}{2a^2t^2}dt=$$

$$=\int_a^{3a}\frac{a^4+2t^4}{2a^2t^2}dt=\frac{a^2}{2}\int_a^{3a}\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{a^2}\int_a^{3a}t^2dt=\frac{a^2}{2}\left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_a^{3a}+\frac{1}{a^2}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_a^{3a}=$$

$$=-\frac{a}{6}+\frac{a}{2}+9a-\frac{a}{3}=\frac{-a+3a-2a}{6}+9a=9a.$$

Назорат саволлари:

1. $x=t,\ y=t^2\ \ z=t^3$ чизиқнинг $t=1$ нуқтадаги бинормал тенгламасини тузинг

2. $x=t^3-2t,\ y=t^2-2$ тенглама билан берилган эгри чизиққа қайси нуқталар тегишли?

3. $x=t^3-2t,\ y=t^2-2$ тенглама билан берилган эгри чизиқ Oxy координаталар системасининг Ox ўқи билан қайси нуқталарда кесишади?

4. $x=t^3-2t,\ y=t^2-2$ тенглама билан берилган эгри чизиқ Oxy координаталар системасининг Oy ўқи билан қайси нуқталарда кесишади?

5. $x=t^2-t+1,\ y=t^2+t+1$ тенглама билан берилган чизиқнинг образини топинг?

6. $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ тенглама билан берилган эгри чизиқнинг $x_1=1$ ва $x_2=4$ нуқталари орасидаги ёйининг узунлигини топинг?

Фойдаланилган адабиётлар:

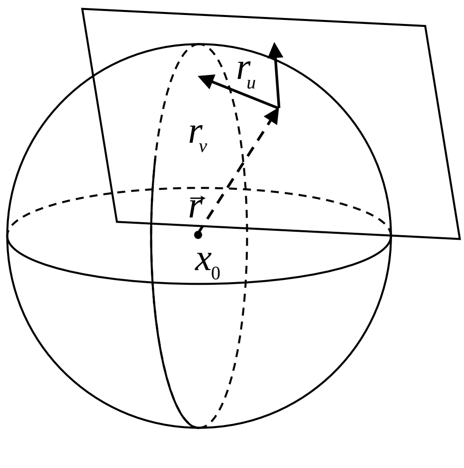
1. Izu Vaisman Analytical Geometry World Scientific 1997
2. Narmanov A. Ya. Analitik geometriya.T. OЪzbekiston Respublikasi faylasuflar milliy jamiyati nashriyoti, 2008 y.
3. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 1. М., Наука, 1983.
4. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar toЪplami T. Universitet, 2006.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М. Наука, 1981.
6. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под ред. Феденко А.С. М., 1979.

4-амалий машғулот: Сиртлар назарияси.

Мисол ва масалалар ечиш намуналари.

Масала. Бизга текисликдаги бирорта G соҳада аниқланган дифференциалланувчи $\vec{r}(u,v)$ вектор-функция берилган бўлсин. Берилган $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг узунлиги ўзгармас бўлиши учун, $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ тенгликларнинг бажарилиши зарур ва етарлилигини исботланг (1-расм).

Ечиш. Зарурлиги. Тасдиқни зарурлигини исботлаш учун $|\vec{r}|^2=(\vec{r},\vec{r})$ тенгликдан фойдаланамиз. Берилган вектор-функциянинг узунлиги ўзгармас бўлсин деб фараз қилайлик, яъни $|\vec{r}(u,v)|=const$ тенглик бажарилсин.



1-расм

У ҳолда

$$0=\frac{d}{du}\left|\vec{r}\right|^2=\frac{d}{du}(\vec{r},\vec{r})=2(\vec{r},\vec{r}_u)\,;\;0=\frac{d}{dv}\left|\vec{r}\right|^2=\frac{d}{dv}(\vec{r},\vec{r})=2(r,\vec{r}_v)$$

тенгликлардан ушбу $(\vec{r},\vec{r}_u)=(\vec{r},\vec{r}_v)=0$ тенгликлар келиб чиқади.

Етарлилиги. Энди $\vec{r}\perp\vec{r}_u$, $\vec{r}\perp\vec{r}_v$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда

$$\frac{d}{du}\left|\vec{r}\right|^2=2(r,\vec{r}_u)=0,\;\frac{d}{du}\left|\vec{r}\right|^2=2(r,\vec{r}_v)=0$$

тенгликлардан $\left|\vec{r}(u,v)\right|$ функциянинг ўзгармас эканлиги келиб чиқади. Масала тўлиқ ечилди.

Масала. Текисликдаги бирорта G соҳада аниқланган дифференциалланувчи $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг $\vec{r}_u$, r_v векторларнинг иккаласига ҳам коллинеар бўлиши унинг йўналиши ўзгармас эканлигига тенг кучли эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Агар $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг йўналиши ўзгармас бўлса, уни $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{e}$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $\lambda(u,v)-$скаляр функция бўлиб, $\vec{e}-$ўзгармас бирлик вектордир. Бу кўринишдан $\vec{r}_u=\lambda_u(u,v)\vec{e}$, $\vec{r}_v=\lambda_v(u,v)\vec{e}$ тенгликларни ҳосил қиламиз.

Демак, $\vec{r}(u,v)$ вектор $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторнинг иккаласига ҳам коллинеардир. Энди $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{r}_u$, $\vec{r}(u,v)=\lambda(u,v)\vec{r}_v$, тенгликлар ўринли деб фараз қилиб, $\vec{e}(u,v)=\dfrac{\vec{r}(u,v)}{\left|\vec{r}(u,v)\right|}$ векторнинг ўзгармас вектор эканлигини кўрсатайлик. Бунинг учун $\dfrac{d}{du}\vec{e}=\vec{0},\;\dfrac{d}{dv}\vec{e}=\vec{0}$ тенгликларни исботлаймиз. Бўлинманинг ҳосиласи формуласидан ушбу тенгликка,

$$\frac{d}{du}\vec{e}=\frac{\vec{r}_u\left|\vec{r}\right|-\vec{r}\,\dfrac{(\vec{r},\vec{r}_u)}{\left|\vec{r}\right|}}{\left|\vec{r}^2\right|}=\frac{\vec{r}_u\left|\vec{r}\right|^2-\vec{r}(\vec{r},\vec{r}_u)}{\left|\vec{r}\right|^3}=\frac{\lambda^2\left|\vec{r}_u\right|^2\vec{r}_u-\lambda^2\left|\vec{r}_u\right|^2\vec{r}_u}{\left|\vec{r}\right|^3}=\vec{0},$$

худди шунга ўхшаш

$$\frac{d}{dv}\vec{e}=\frac{\mu^2\left|\vec{r}_v\right|^2\vec{r}_v-\mu^2\left|\vec{r}_v\right|^2\vec{r}_v}{\left|\vec{r}\right|^3}=\vec{0}$$

тенгликни оламиз. Булардан эса олдинги масалага асосан $\vec{e}$ бирлик векторнинг ўзгармаслиги келиб чиқади.

Демак, $\vec{r}(u,v)=\left|\vec{r}(u,v)\right|\vec{e}$ бўлиб, $\vec{r}$ векторнинг йўналиши ўзгармасдир.

Масала. Бирорта G соҳада аниқланган дифференциалланувчи $\vec{r}(u,v)$

вектор-функциянинг хусусий ҳосилалари $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторлар нол вектор бўлиши $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг ўзгармас вектор бўлишига тенг кучли эканлигини кўрсатаинг.

Ечиш. Хусусий ҳосилалар учун

$$\vec{r}_u = \vec{0},\ \vec{r}_v = \vec{0}$$

тенгликлар ўринли бўлса, $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг координата функциялари учун

$$x_u = 0, \qquad x_v = 0$$

$$y_u = 0, \qquad y_v = 0$$

$$z_u = 0, \qquad z_v = 0$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Демак, $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ функциялар ўзгармас функциялардир. Бундан эса

$$\vec{r}(u,v) = \{x(u,v), y(u,v), z(u,v)\}$$

векторнинг ўзгармас эканлиги келиб чиқади.

Аксинча, $\vec{r}(u,v)$ вектор-функциянинг ўзгармас вектор эканлигидан $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ функциялар ўзгармас бўлиши келиб чиқади. Бундан эса

$$\vec{r}_u = \vec{0},\ \vec{r}_v = \vec{0}$$

тенгликлар ҳосил бўлади.

Назорат саволлари:

1. Берилган вектор функциялар учун $\lim\limits_{M \to M_0} \vec{r}_i(M) = \vec{a}_i \quad (i = 1,2,3)$, $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \lambda$ муносабатлар маълум бўлса, қуйидагиларни исботланг:

1. $\lim\limits_{M \to M_0} (\vec{r}_1(M) \pm \vec{r}_2(M)) = \vec{a}_1 \pm \vec{a}_2$; **2.** $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M)\vec{r}_1(M)) = \lambda \vec{a}_1$;

3. $\lim\limits_{M \to M_0} (\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M)) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$; **4.** $\lim\limits_{M \to M_0} [\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M)] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$;

5. $\lim\limits_{M \to M_0} (\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M), \vec{r}_3(M)) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

2. Вектор функциянинг узлуксизлиги унинг компоненталарининг узлуксизлигига тенг кучлилигини исботланг.

3. Берилган $\vec{r} = \vec{r}(M)$ вектор функциянинг узлуксизлигидан $|\vec{r}| = |\vec{r}(M)|$ функциянинг узлуксизлиги келиб чиқадими? Тескариси ўринлими?

Ушбу $\vec{r}_i(M)$ вектор функцияларнинг ва $f(M)$ функциянинг M_0 нуқтада узлуксизлигидан қуйидаги:

4. $\vec{r}_1(M) \pm \vec{r}_2(M)$;**9.** $(\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M))$;**10**. $f(M)\vec{r}_1(M)$;**11**. $[\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M)]$;

5. $(\vec{r}_1(M), \vec{r}_2(M), \vec{r}_3(M))$ функцияларнинг узлуксизлиги келиб чиқадими?

6. Вектор функциянинг силлиқлиги унинг ташкил этувчиларининг силлиқлигига тенг кучлилигини исботланг.

7. Вектор функция учун $\vec{r}^{(k)}(t) = \left(x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \ldots, x_n^{(k)}(t)\right)$ муносабат ўринлилигини исботланг.

Берилган $\vec{r}_i : I \to R^3$ вектор функция ва C^1 синфга тегишли $f : I \to R$ функция учун қуйидаги муносабатларни исботланг:

8. $\left(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2\right)' = \vec{r}_1{}' \pm \vec{r}_2{}'$;

9. $\left(f\,\vec{r}\right)' = f'\vec{r} + f\,\vec{r}'$;

10. $\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2\right)' = \left(\vec{r}_1{}', \vec{r}_2\right) + \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2{}'\right)$;

11. $\left[\vec{r}_1, \vec{r}_2\right]' = \left[\vec{r}_1{}', \vec{r}_2\right] + \left[\vec{r}_1, \vec{r}_2{}'\right]$;

12. $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)' = (\vec{r}_1{}', \vec{r}_2, \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2{}', \vec{r}_3) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3{}')$.

Қуйидаги бир ўзгарувчили вектор функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

13. $\vec{r}^{\,2}$;

14. $\vec{r}\,'^{2}$;

15. $[\vec{r}\,', \vec{r}\,'']$;

16. $(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')$;

17. $[[\vec{r}\,', \vec{r}\,''], \vec{r}\,''']$;

18. $\sqrt{\vec{r}^{\,2}}$.

19. Эллипснинг ихтиёрий M нуқтасига ўтказилган уринма шу нуқтадаги фокал радиуслар ташкил этган бурчак биссектрисаси бўлишини исботланг.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Izu Vaisman Analytical Geometry World Scientific 1997

2. Narmanov A. Ya. Analitik geometriya.T. OЪzbekiston Respublikasi faylasuflar milliy jamiyati nashriyoti, 2008 y.

3. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 1. М., Наука, 1983.

4. Baxvalov S.V., Modenov P.S., Parxomenko A.S. Analitik geometriyadan masalalar toЪplami T. Universitet, 2006.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М. Наука, 1981.

6. Сборник задач по дифференциальной геометрии. Под ред. Феденко А.С. М., 1979.

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

Иккинчи тартибли чизиқлардан қайси бири бизнинг курсимизда киритилган маънода чизиқ бўлишини текширайлик.

Сизга маълумки, иккинчи тартибли чизиқ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (2)$$

тенглама бидан аниқланади. Агар

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

детерминант нолдан фарқли бўлса, (2) тенглама ягона марказга эга бўлган иккинчи тартибли чизиқни аниқлайди. Бундай чизиқлар марказий чизиқлар деб аталади.

Марказий чизиқлар эллипс, гипербола ва иккита кесишувчи тўғри чизиқлардан иборатдир. Булардан эллипс содда чизиқ бўлади. Гипербола эса иккита элементар чизиқдан иборат. Иккита кесишувчи тўғри чизиқлар эса биз киритган маънода битта чизиқ бўлмайди.

Агар $\delta = 0$ бўлса, иккинчи тартибли чизиқ ёки марказга эга бўлмайди, ёки чексиз кўп марказга эга бўлади. Демак бу ҳолда, (2) тенглама парабола, иккита параллел тўғри чизиқ ёки устма-уст тушувчи иккита тўғри чизиқлардан бирортасини аниқлайди.

Параболанинг каноник тенгламаси

$$y'^2 = 2px', \qquad p > 0$$

кўринишда бўлади. Демак, парабола

$$x' = \frac{y'^2}{2p}$$

функциянинг графиги ва элементар чизиқдир. Иккита параллел тўғри чизиқлар эса иккита элементар чизиқдан, устма-уст тушувчи тўғри чизиқлар эса битта элементар чизиқдан иборат.

3. Параболанинг регуляр чизиқ эканлигини исботлайлик. Бунинг учун унинг тенгламасини

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0$$

каноник кўринишда ёзамиз. Агар y=t тенглик билан параметр киритсак, парабола

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t. \qquad -\infty < t < +\infty \end{cases}$$

параметрик тенгламаларга эга бўлади. Бу ерда

$$x'^2 + y'^2 = \frac{t^4}{4p^2} + 1 > 0$$

бўлганлиги учун парабола чексиз кўп марта дифференциалланувчи регуляр чизиқдир.

4. Бизга $y' = ky$ дифференциал тенглама берилган бўлсин. Унинг ечими $y' = Ce^{kx}$ кўринишда бўлади. Ечимнинг графиги

$$\begin{cases} x = t, \\ y = Ce^{kt}. \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

параметрик тенгламаларга эга бўлган регуляр чизиқдир.

5. Текисликда

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

параметрик тенгламалар билан берилган чизиқ регуляр эмас, чунки у $M(t=0)$ нуқта атрофида регуляр параметрлаш усулига эга эмас.

6. Текисликда

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

параметрик тенгламалар билан берилган чизиқ умумий чизиқ бўлади, чунки $M_1(t=-1)$ ва $M_2(t=1)$ нуқталар текисликда устма-уст тушади. Бу умумий чизиқ

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

тенгламалар билан аниқланган элементар чизиқнинг

$$f(t) = (t^2 - 1, \quad t^3 - t)$$

формула билан аниқланган $f : \gamma \to R^2$ локал топологик акслантиришдаги образидир (4-чизма).

6. Бернулли лемнискатаси (3-чизма). Текисликда ҳар биридан берилган F_1 ва F_2 нуқталаргача бўлган масофаларнинг кўпайтмаси F_1 ва F_2 нуқталар орасидаги масофа ярмининг квадратига тенг бўлган нуқталар тўплами Бернулли лемнискатаси деб аталади. Бернулли лемнискатасининг умумий чизиқ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун текисликда OX ўқи сифатида $F_1 F_2$ тўғри чизиқни, OY ўқи сифатида $F_1 F_2$ кесма ўртасидан ўтувчи ва OX ўқига перпендикуляр тўғри чизиқни олиб, $|F_1F_2| = 2C$ белгилаш киритамиз. Шунда Бернулли лемнискатасига тегишли ихтиёрий $M(x, y)$ нуқта учун

$$\sqrt{(x+C)^2+y^2}\sqrt{(x-C)^2+y^2}=C^2$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни квадратга кўтариб соддалаштириш натижасида, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз.

$$x^4+2x^2y^2+y^4-2C^2(y^2-x^2)=0.$$

Энди $x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$ формулалар ёрдамида қутб координаталар системасига ўтсак

$$\rho^2=2C^2\cos^2\varphi$$

тенглама ҳосил қиламиз. Энди бу чизиқнинг умумий чизиқ эканлиги

$$\begin{cases} x=\cos\varphi, \\ y=\sin\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$$

тенгламалар билан аниқланган айлананинг

$$f: M(\varphi)\to(C\sqrt{2\cos^2\varphi},\varphi)$$

формула ёрдамида аниқланган локал топологик акслантиришдаги образи Бернулли лемнискатаси билан устма-уст тушишидан келиб чиқади.

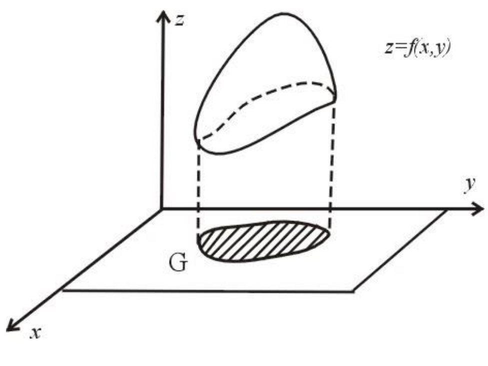
1) Ҳар қандай текислик элементар сиртдир, чунки текислик доирага гомеоморфдир.

Агар M(x_0,y_0,z_0) текислик нуқтаси, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар текисликка параллел бўлса, уни

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}\,u+\vec{b}\,v,\ -\infty<u<+\infty,\ -\infty<v<+\infty$$

кўринишида параметрлаш мумкин. Бу ерда $\vec{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$ - M нуқтанинг радиус векторидир.

2) Элементар G-соҳада аниқланган $z=f(x,y)-$узлуксиз функция графиги элементар сиртдир. Сабаби, $(x,y,f(x,y))\to(x,y)-$акслантириш (проекция) гомеоморфизмдир.



Чизма-1

3) Икки ўлчамли сфера S^2 элементар бўлмаган содда сиртдир. R радиусли сфера S^2 нинг марказига координаталар бошини жойлаштирсак, уни $S^2 = \left\{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2\right\}$ тўплам сифатида қарашимиз мумкин. S^2 нинг сирт эканлигини исботлаш учун унга тегишли бирорта P ни олайлик.

P дан фарқли S нуқтани жанубий қутб сифатида, унга диаметрик қарама-қарши бўлган N нуқтани шимолий қутб ҳисоблаб, z ўқини координата бошидан N нуқта орқали ўтказамиз, Oxy текислиги эса O нўқтадан ўтувчи ва ON га перпендикуляр текисликдир.

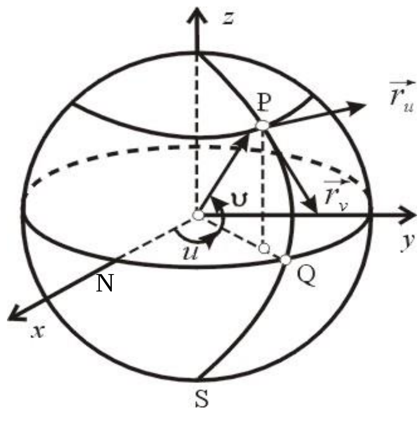
Бу текислик ва сфера кесишишидан ҳосил бўлган айланани экватор деб атаймиз. Энди u билан 0Q нур ва 0x ўқи орасидаги бурчакни, v билан 0P ва 0Q нурлар орасидаги бурчакни белгилаймиз.

Бу ерда Q - NPS меридианнинг экватор билан кесишиш нуқтасидир, $0 < u < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$.

Шунда S^2 нинг NS - меридиан чиқариб ташланган қисми $\varphi : P \to (u,v)$ акслантириш ёрдамида $\left]0;2\pi\right[\times \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ элементар соҳага гомеоморф акслантирилади ва

$$x = R\cos u\cos v,\ \ y = R\sin u\cos v,\ z = \sin v$$

тенгламалар ёрдамида параметрланади.



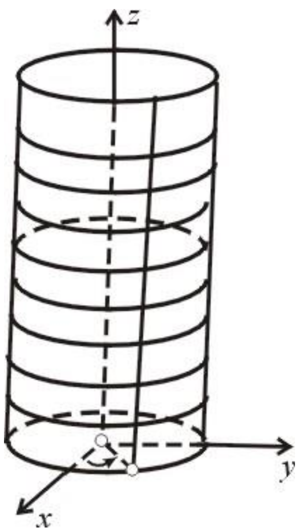
Чизма-2

4) Доиравий цилиндрнинг параметрик тенгламалари

$$x = R\cos u,\ y = R\sin u,\ z = v.$$

кўринишда бўлади. Бу ерда $-\infty<u<+\infty,\ -\infty<v<+\infty$.

Албатта цилиндр ҳам элементар сирт эмас.



Чизма-3

ЧИЗИҚЛАР НАЗАРИЯСИ

Эгри чизиқ ва унинг берилиш усуллари

Биз бу параграфда дифференциал геометрия курсининг асосий тушунчаларидан бўлган эгри чизиқ тушунчасини киритамиз ва уларнинг тенгламаларини баъзи бир хусусиятларини (чизмаларини чизиш учун керак бўладиган) топишга доир масалалар келтирамиз. Булардан ташқари, бу параграфда параметрик кўринишда ва қутб координаталар системасида берилган чизиқларни ясашга доир масалалар келтрилган.

Асосий тушунчалар

1.1.-таъриф. Фазодаги (ёки текисликдаги) γ тўплам бирорта очиқ интервалнинг топологик (гомеоморф) акслантиришдаги акси бўлса, яъни бирорта $f:(a;b)\to R^3$ акслантириш учун, $f((a;b))=\gamma$ тенглик ўринли бўлиб, $f:(a;b)\to\gamma$ топологик акслантириш бўлса, γ элементар эгри чизиқ деб аталади.

Бу таърифга кўра, очиқ $(a;b)$ интервалга тегишли ихтиёрий t нуқтага мос келувчи нуқтани $\gamma(t)$ билан белгиласак, бу нуқтанинг координаталарини $x(t),\ y(t),\ z(t)$ функциялар билан белгиласак, у ҳолда

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad a < t < b \\ z = z(t), \end{cases} \qquad (1)$$

тенгламалар γ чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади.

Дифференциал геометрия курсида эгри чизиқ параметрик тенгламалар ёрдамида ўрганилади, яъни γ чизиқни аниқловчи f акслантириш танланиб, унинг параметрик тенгламалари ёзилади, бу ҳолда γ чизиқни параметрланган элементар эгри чизиқ деб атаймиз.

1.2.-таъриф. Берилган γ элементар эгри чизиқни дифференциалланувчи $x(t),\ y(t),\ z(t)$ функциялар ёрдамида параметрлаш мумкин бўлса, у силлиқ элементар эгри чизиқ деб аталади.

Изоҳ: Зарур бўлган ҳолларда, биз юқори тартибли ҳосилаларнинг мавжуд ва узлуксиз бўлишини талаб қиламиз.

1.3.-таъриф. Боғланишли γ тўпламга тегишли ҳар қандай M нуқтанинг бирорта U_M атрофи мавжуд бўлиб, γ тўпламнинг U_M атрофдаги қисми элементар эгри чизиқ бўлса, γ содда эгри чизиқ деб аталади.

1 - тасдиқ. Ҳар қандай содда эгри чизиқ ёки элементар эгри чизиқдир, ёки айланага гомеоморфдир.

1.4.-таъриф. Бизга содда γ эгри чизиқ берилган бўлиб, M эса унга тегишли нуқта бўлсин. Агар U_M тўплам M нуқтанинг атрофи бўлса, $U_M \cap \gamma$ кесишмани M нуқтанинг γ чизиқдаги атрофи деб аталади.

1.5.-таъриф. Содда эгри чизиқнинг локал топологик акслантиришдаги образи умумий эгри чизиқ дейилади.

2 - тасдиқ. Силлиқ $x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$ функциялар ҳосилалари ҳар бир $t \in (a;b)$ учун $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$ шартни қаноатлантирса, (1) тенгламалар системаси умумий эгри чизиқни аниқлайди. Бу умумий эгри чизиқ (a,b) интервалнинг $f : t \to (x(t), y(t), z(t))$ акслантиришдаги аксидир.

3 - тасдиқ. Бизга дифференциалланувчи $\varphi(x, y)$ функция берилган бўлиб, координаталари $\varphi(x, y) = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини $M = |\{(x, y) : \varphi(x, y) = 0\}|$ деб белгилайлик. Агар $(x_0; y_0) \in M$ нуқтада $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 > 0$ муносабат бажарилса, (x_0, y_0) нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, M тўпламнинг бу атрофдаги қисми элементар эгри чизиқ бўлади.

4 - тасдиқ. Силлиқ элементар γ эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари (1) кўринишда бўлиб, $t_0 \in (a, b)$ учун $x'(t_0) \neq 0$ бўлса, (x_0, y_0, z_0) нуқтанинг кичик атрофида γ ни,

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x), \quad a < x < b \end{cases}$$

тенгламалар ёрдамида аниқлаш мумкин.

Бу ерда, $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$

5 - тасдиқ. $F(x, y, z)$ ва $G(x, y, z)$ уч ўзгарувчили силлиқ функциялар, M эса координаталари

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

системани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами бўлсин. Агар $(x_0, y_0, z_0) \in M$ нуқтада

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги иккига тенг бўлса, (x_0, y_0, z_0) нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, M нинг бу атрофдаги қисми силлиқ элементар эгри чизиқ бўлади.

1.6.-таъриф. Силлиқ γ эгри чизиқни унга тегишли ҳар қандай нуқтанинг бирорта атрофида ихтиёрий $t\in(a;b)$ учун $x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0$ шартни қаноатлантирувчи дифференциалланувчи $x(t),y(t),z(t)$ функциялар ёрдамида параметрлаш мумкин бўлса, у регуляр эгри чизиқ деб аталади.

Масалалар ечиш намуналари.

1-масала. Ўзгармас a узунликка эга бўлган AB кесма Oz ўқига перпендикулар бўлиб, унинг A учи шу ўқда ётади. Кесма, A учи айланиш бурчагига пропорсионал йўлни босиб борадиган ҳолда, Oz ўқи бўйича силжиб, шу ўқ атрофида айланади. Усбу ҳаракат натижасида кесманинг B уси чизган чизиғи ***винт чизиғи*** дейилади. Винт чизиғининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Шартга кўра, $AB=a$ ва $OA=\lambda\varphi$, бунда $\lambda=const$. Ҳаракатдаги кесма бошланғич пайтда Ox ўқида бўлади, деб фараз қилсак, винт чизиғидаги B нуқтанинг вазияти φ параметр билан тўла аниқланади. Ушбу чизиқ тенгламасини тузамиз:

$$\overrightarrow{OB}=\vec{r}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}.$$

Иккинчи тарафдан, $\overrightarrow{AB}=a(\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi)=a\vec{e}(\varphi)$ ва $\overrightarrow{OA}=\lambda\varphi\vec{k}$ муносабатларни ҳисобга олсак, винт чизиғи радиус – векторнинг ифодасини ҳосил қиламиз (бу ерда $\vec{e}(\varphi)$ бирлик вектор бўлиб, XOY текислигида ётади).

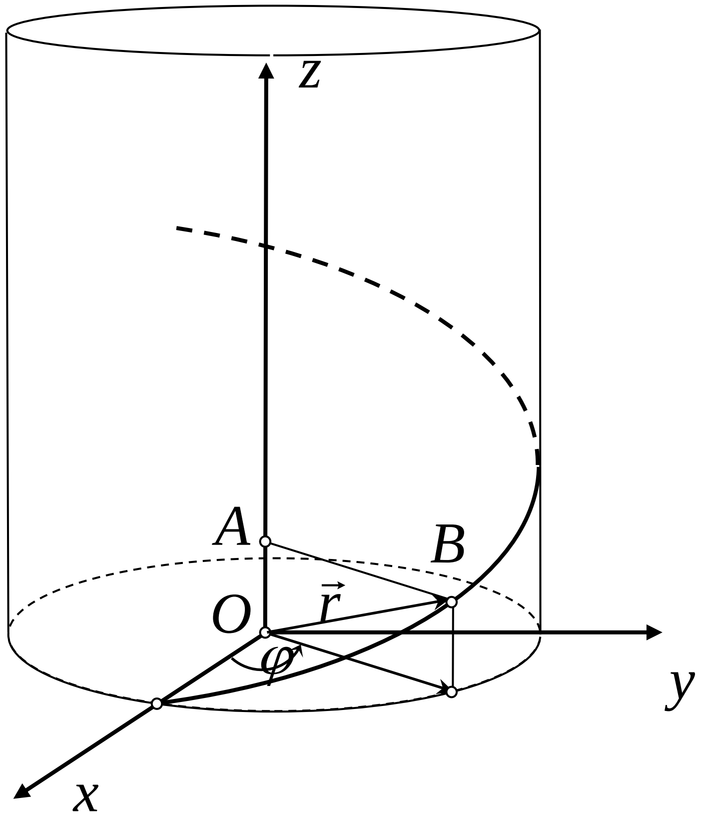
Демак, винт чизиғининг тенгламаси

$$\vec{r}(\varphi)=a\vec{e}(\varphi)+\lambda\varphi\vec{k}$$

ёки координат кўринишда

$$\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi \\ z=\lambda\varphi \end{cases}$$

бўлади.



1-расм

Винт чизиғининг ўзи ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган $x^2 + y^2 = a^2$ цилиндрда ётади, чунки AB кесманинг узунлиги ўзгармайди (1-расм).

СИРТЛАР НАЗАРИЯСИ

Дифференсиал геометрия фанида асосий бўлимлардан бири сиртлар назарияси ҳисобланади. Бу бобда сирт ва унинг берилиш усуллари, уринма текислик, квадратик формалар ва уларнинг турли тадбиқлари ўрганилади.

Сирт ва унинг берилиш усуллари

Ушбу параграфда сиртларнинг берилиш усуллари аниқланиб, уларнинг баъзи бир хоссаларига кўра, тенгламаларини тузишга доир мисол ва масалалар келтирилган.

Асосий тушунчалар

Текисликдаги очиқ доирага гомеоморф тўпламни элементар соҳа деб атаймиз.

1.1-Таъриф. Фазодаги F тўплам элементар соҳанинг топологик акслантиришдаги образи бўлса, уни элементар сирт деб атаймиз.

Элементар сирт учун чексиз кўп параметрлаш усуллари мавжуддир. Бирорта тўпламнинг элементар сирт эканлигини кўрсатиш учун унинг бирорта параметрлаш усулини кўрсатиш керак.

Агар F сирт (f,G) параметрлаш усули билан берилиб, $(u,v)\in G$ учун $f(x,y)$ нуқтанинг координаталари $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ кўринишда белгиласак

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (1)$$

система F сиртнинг параметрик тенгламалари системаси дейилади.

1.2-Таъриф. Фазодаги боғланишли F тўпламга тегишли ҳар бир нуқтанинг бирорта атрофида F элементар сиртга айланса, F содда сирт дейилади.

Агар биз $\vec{r}(u,v)=\{x(u;v); y(u;v); z(u;v)\}$ вектор функсияни киритсак, (1) тенгламалар системасини битта

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ \ (u,v)\in G \qquad (2)$$

вектор тенглама ёрдамида ёза оламиз. Бу тенглама F сиртнинг вектор кўринишдаги тенгламаси дейилади.

Бизга $G\subset R^3$ очиқ тўплам ва G да аниқланган силлиқ $F(x;y;z)$ функсия берилган бўлсин. У ҳолда $F=\{(x;y;z)\in G: f(x;y;z)=0\}$ тўплам f функсиянинг сатҳ тўплами ёки сирти дейилади. Агар $gradf\neq 0$ бўлса, F ҳақиқатдан ҳам содда сирт бўлади.

1.3-Таъриф. Берилган F сирт учун унга тегишли ихтиёрий нуқта атрофида (f,G) параметрлаш усули мавжуд бўлиб, бунда $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ функциялар узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва $\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ матритсанинг ранги иккига тенг бўлса, F сирт регуляр сирт дейилади, параметрлаш усули эса регуляр параметрлаш дейилади.

Сиртнинг регулярлик шартини $\left[\vec{r}_u, \vec{r}_v\right] \neq \bar{0}$ кўринишда ҳам ёзишимиз мумкин.

1-Тасдиқ. Бизга G соҳада аниқланган силлиқ $x(u;v), y(u;v), z(u;v)$ функсиялар берилиб, ҳар бир нуқтада $rang\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$ тенглик ўринли бўлса,

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \quad (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

система регуляр сиртни аниқлайди.

2-Тасдиқ. Регуляр F сирт унга тегишли $p(u_0, v_0)$ нуқта атрофида,

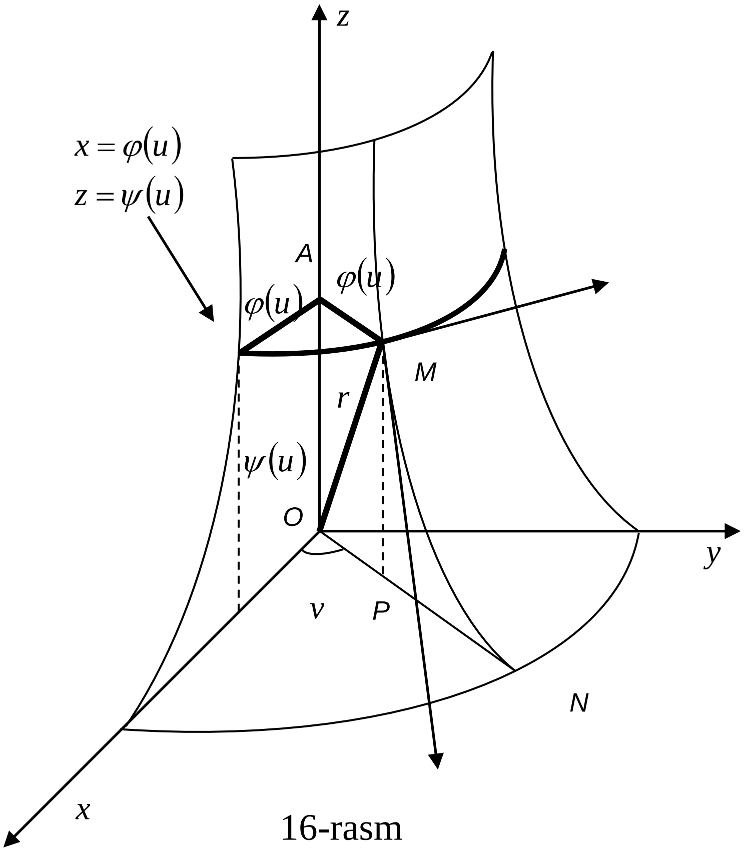
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in G \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар ёрдамида берилиб, p нуқтада $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$ детерминант нолдан фарқли бўлса, шундай силлиқ $f(x,y)$ функсия мавжудки p нуқтанинг атрофида F сирт $z = f(x,y)$ функсиянинг графигидан иборатдир.

Мисол ва масалалар ечиш намуналари.

1-масала. xOz текислигида Oz ўқини кесмайдиган $x = \varphi(u),\ z = \psi(u)$ чизиқ берилган. Бу чизиқни Oz ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Умумийликка зиён етказмасдан берилган $x=\varphi(u),\ z=\psi(u)$ чизиқ учун $\varphi(u)>0$ шарт ўринли деб фараз қиламиз. Эгри чизиқли координаталар



16-rasm

сифатида $\angle XOP=v$ бурчакни ва берилган чизиқнинг u параметрини оламиз (16-расм). Чизиқ устидаги ҳар бир $L(u)$ нуқта маркази Oz ўқида ётган ва радиуси $x=\varphi(u)$ га тенг бўлган айланани чизади: $MA=OP=\varphi(u)$.

Координат чизиқлари: $u=const-$параллеллар (айланалар), $v=const-$меридианлар бўлади. Сиртнинг вектор тенгламаси:

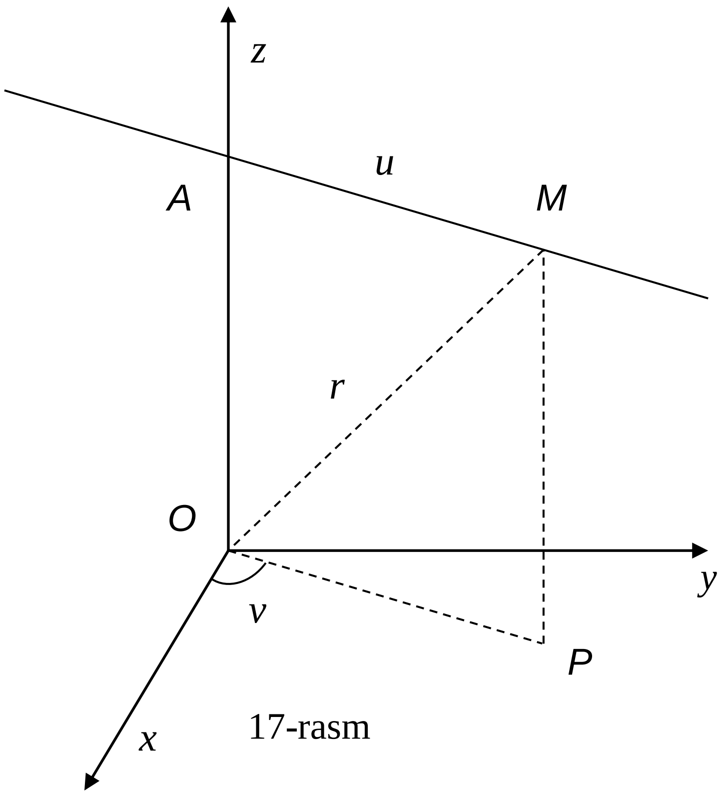
$$\vec{r}=\varphi(u)\cos v\vec{i}+\varphi(u)\sin v\vec{j}+\psi(u)\vec{k},$$

Координат кўринишдаги тенгламалари эса:

$$x=\varphi(u)\cos v,\ y=\varphi(u)\sin v,\ z=\psi(u).$$

Берилган чизиқ билан айланма сиртнинг учинчи координатаси бир хилдир, чунки чизиқ Oz ўқ атрофида айланмоқда.

2-масала. Oz ўққа перпендикулар AB тўғри чизиқнинг шу ўқ атрофида айланишидан ва шунингдек, айланиш бурчагига пропорсионал тезлик билан Oz бўйлаб силжишидан ҳосил бўлган сирт тўғри геликоид дейилади. Тўғри



17-rasm

геликоид тенгламасини тузинг.

ечиш. Координаталарни қуйидагча танлаймиз (17-расм):

$$MA = u, \ \angle XOP = v$$

Шартга кўра $OA = av$, бунда $a = const$. Координата чизиқлари: $u = const$ -винт чизиқлар, $v = const$ –ясовчилар (ҳаракатланувчи тоъгъри чизиқлар)дан иборат бўлади.

1-масаладан фойдалниб геликоиднинг вектор тенгламаси

$$\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + av\vec{k},$$

параметрик тенгламалари эса

$$x = u\cos v, \ y = u\sin v, \ z = av$$

кўринишда бўлишини ҳосил қиламиз.

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни.

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган холда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- ўқув, илмий адабиётлардан ва меъёрий хужжатлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- геометрия бўлимлари бўйича махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мустақил таълим мавзулари:

1. Текисликда иккинчи тартибли чизиқлар. Коник кесимлар.
2. Иккинчи тартибли чизиқларнинг умумий тенгламалари.
3. Асимптотик ва ноассимптотик йўналишлар.
4. Иккинчи тартибли чизиқлар умумий тенгламаларини соддалаштириш.
5. Иккинчи тартибли сиртлар.
6. Тўғри чизиқли сиртлар.
7. Эгри чизиқлар, эгри чизиқнинг берилиш усуллари.
8. Эгри чизиқнинг оддий ва махсус нуқталари.
9. Эгри чизиқли координаталар системаси.
10. Сиртларнинг берилиш усуллари. Сирт устида ётувчи эгри чизиқлар.
11. Сиртнинг уринма текислиги ва нормали. Уринма вектор, унинг координаталари.
12. Сиртнинг иккинчи квадратик формаси. Сиртнинг нормал эгрилиги.
13. Бош эгриликлар ва йўналишлар. Эйлер формуласи.
14. Сирт нуқталарининг классификацияси.

VII. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
аналитик геометрия	иккинчи тартибли чизиқлар ва сиртларни ўрганувчи фан	the subject which studies second order lines and second order surfaces
иккинчи тартибли чизиқнинг маркази	иккинчи тартибли чизиқнинг симметрия маркази	symmetry center of the second order line
иккинчи тартибли чизиқнинг диаметри	параллел ватарлар ўрталаридан ўтувчи тўғри чизиқ	The line which through centers of parallel hords
конус кесимлар	конусни текислик билан кесиш натижасида ҳосил бўлган иккинчи тартибли чизиқлар	Second order lines which are intersection of the cone and plane
дифференциал геометрия	дифференциалланувчи функциялар ёрдамида параметрланган чизиқлар ва сиртларни ўрганувчи фандир	the subject which studies curves and surfaces, parametrized by differentsiable functions
элементар эгри чизиқ	очиқ интервалнинг топологик (гомеоморф) акслантиришдаги образи	The image of open segment under topological (gomeomorf) mapping
содда эгри чизиқ	ўзига тегишли ҳар қандай нуқтанинг бирорта атрофида элементар эгри чизиқ бўладиган боғланишли тўплам	Connected set which is a elementary curve in some neighborhood of any point
Топология	геометрк объектларнинг топологик хоссаларини ўрганувчи фандир	the subject which studies topological properties of geometric objects
Геодезик чизиқ	сиртларда евклид геометриясидаги тўғри чизиқларнинг аналогидир	It is analog of strigth line of Euclidean geometry
Топологик хоссалар	геометрик фигураларнинг гомеоморф акслантиришда сақланувчи хоссаларидир	Properties of geometric figures which is preserved under homeomorf mappings
сиртнинг қалби (soul)	сиртнинг абсолют қаварик компакт қисм тўпламидир	absolute convex compact subset of a surface
сиртнинг йўналиш бўйича нормал эгрилиги	берилган йўналишга параллел ва сиртни тик кесувчи текислик билан кесиш ёрдамида ҳосил бўлган чизиқнинг эгрилиги	The curvature of a curve which is normal section
пуанкаре гипотезаси	компакт чегарасиз бир боғланишли уч ўлчамли сирт уч ўлчамли сферага	simply connected compact three-dimensional manifold without boundary is homeomorphic to the

	гомеоморфдир	three-dimensional sphere
Г.Я.Перелман	Пуанкаре гипотезасини ҳал қилган Санкт-Петербурглик математик	Mathematician from Saint Petersburg who solved Puankare hypothesis
Громол-Чигер гипотезаси	ҳар қандай номанфий эгриликли тўлиқ нокомпакт сирт ўз қалбининг нормал қатламасига диффеоморфдир	complete non-compact surface of negative curvature is diffeomorphic to the normal bundle of its soul

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Махсус адабиётлар.

1. Нарманов А.Я. Аналитик геометрия. Т., “Ўзбекистон файласуфлари миллий жамияти нашриёти”, 2008 й.

2. Izu Vaisman.Analytical geometry.World scientific.2007.

3. D. Gromoll, G. Walschap. Metric Foliations and Curvature. Progress in Mathematics Volume 268, 2009, ISBN: 978-3-7643-8714-3 , 1-80 бетлар

4. Нарманов А.Я. Дифференциал геометрия. Т. Университет, 2003

5. Нарманов А.Я., Шарипов А.С.,Аслонов Ж.Дифференциал геометрия ва топология фанидан дан машқ ва масалар тўплами. Т. Университет, 2014

6. Материалы междунаородной конференции «Геометрия в Одессе-2014». Одесса, Украина. 2014

7. Coxeter H.S. Introduction to Geometry.Sydney-Toronto,2001

8. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., изд. МГУ,2004

9. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Аналитик геометриядан масалалар тўплами. Т,Университет, 2006

10. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. - 2-е изд., исправл. - Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет». 2000 -212 с.

11. Тайманов И. А. Лекции по дифференциальной геометрии. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 176 стр. ISBN 5-93972-105-2

12. Мищенко А. С, Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.—М.: Издательство физико-математической литературы, 2004.—412 с—ISBN 5-94052-078-2.

13. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 31-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2003. — 336с. ил. — Учебник для вузов.