ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ТОШКЕНТ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ МАРКАЗИ

Аниқ ва табиий фанларни ўқитиш методикаси (математика) йўналиши

“МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИНИНГ ТАРАҚҚИЁТ ТЕНДЕНЦИЯЛАРИ ВА ИННОВАЦИЯЛАРИ”

модули бўйича

ЎҚУВ –УСЛУБИЙ МАЖМУА

Тошкент - 2016

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2016 йил 6 апрелидаги 137-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: **Низомий номли ТДПУ, ф-м.ф.н., доц. Т.Жўраев**

Тақризчи: **Гейделберг педагогика университети (Германия), профессор. Hans-Werner Huneke.**

Ўқув-услубий мажмуа ТДПУ Кенгашининг 2016 йил 29 августдаги 1/3.8-сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР 6

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ 15

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР 27

V. КЕЙСЛАР БАНКИ 325

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ 335

VII. ГЛОССАРИЙ 336

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ 350

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш

Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини мазмунан янгилаш, ахборотлар глобаллашган бир даврда мазкур таълим тизимида педагогик фаолият юритаётган профессор-ўқитувчиларнинг таълим-тарбия жараёнини ташкил этишни модернизациялаш, мазкур жараёнга инновацион технологияларни қўллашга оид методик билим, кўникма ва малакаларини янгилаш бугунги куннинг долзарб муаммоларидан бири саналади.

Олий таълим муассасаларида педагогик фаолият юритаётган профессор- ўқитувчиларнинг таълим-тарбия жараёнини ташкил этишни модернизациялаш, мақсадга мувофиқ ташкил этишга замин тайёрлайдиган ўқув-методик мажмуа, электрон дарсликлар, ностандарт адаптив тестлар банки, ўқув курслари бўйича силабус яратиш орқали талабаларнинг билиш фаолиятини фаоллаштириш, таълим самарадорлигига эришиш учун зарур бўлган методик билим, кўникма ва малакаларини ривожлантириш ва янгилаш, уларни давлат талаблари ва жаҳон таълим стандартлари даражасига кўтариш ислоҳотлар даврининг асосий масалаларидан бири ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПФ-4732-сон Фармонидаги устувор йўналишлар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Математика фанлар бўйича замон талабларига жавоб берадиган инновацион технологияларга асосланган машғулотлар ишланмаси ва технологик хариталарни лойиҳалашга ўргатиш дастурнинг асосий мақсадини белгилаб беради.

Модулнинг мақсади ва вазифалари

Модулнинг мақсади:

Профессор-ўқитувчиларининг педагогик касбий билим ва кўникмаларини Давлат талаблари асосида чуқурлаштириш, янгилаш ва таълим-тарбия жараёнида инновацион технологиялардан фойдаланиш имконини берадиган замонавий билим ва кўникмаларни таркиб топтириш;

Модулнинг вазифалари:

- “Таълим тўғрисида”ги Қонун ва Кадрлар тайёрлаш миллий дастурида акс этган вазифаларни амалга ошириш;
- Олий таълим муассасаси профессор-ўқитувчиларининг илмий-назарий, педагогик-психологик, илмий-методик тайёргарлиги даражасини орттириш;
- Профессор-ўқитувчиларда алгебра ва геометрия ўқитишда замонавий ёндошувларни амалга ошириш учун зарур бўлган методологик билимларни шакллантириш, кўникмаларни таркиб топтириш;
- Таълим-тарбия жараёнида инновацион технологиялардан фойдаланиш учун зарур бўлган методик билим, кўникма, малака ва компетенция (лаёқат)ни таркиб топтириш;
- Ўқитувчиларни ўз педагогик фаолиятини таҳлил қилишга ўргатиш, таҳлилий – танқидий, ижодий ва мустақил фикр юритиш кўникмаларини ривожлантириш;
- Кадрлар тайёрлаш миллий дастури талаблари асосида юксак умумий ва касб-ҳунар маданиятига, ижодий ва ижтимоий фаолликка эга педагогик кадрларнинг янги авлодини шакллантириш;
- алгебра ва геометрияни ўқитишнинг методологияси ва назарий масалалари билан таништириш;
- алгебра ва геометрияни ўқитишни такомиллаштириш ва самарадорлигини орттириш йўллари билан таништириш

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникма ва малакаси ва компетенцияларга қўйиладиган талаблар

Тингловчи:

- Олий таълим тизимида алгебра ва геометрияни ўқитишда қўлланиладиган ёндошувлар, тенденцияларни билиши;
- Олий таълим тизимида алгебра ва геометрияни ўқитишда қўйиладиган ҳозирги замон талабларини тасаввур қилиш **билимларга эга бўлиш;**

Тингловчи:

- Алгебра ва геометрия фанларининг таълим мазмуни, воситалари, методлари ва шаклларининг узвийлиги, алгебра ва геометрия фанларининг узвийлиги ва изчиллигини таъминлаш муаммоларини англаши;
- ўқитиш мазмунига оид ахборотларни қайта ишлаш, умумлаштириш ва талабалар онгига етказиш йўллари;
- Педагогика олий таълим муассасаларида алгебра ва геометрияни ўқитиш олдидаги долзарб муаммолар ва уларни ҳал этиш **кўникма ва малакаларини эгаллаши;**

Тингловчи:

- алгебра ва геометрия ўқитувчисининг касбий ва илмий методик тайёргарлигининг таркибий қисмлари;
- замонавий алгебра ва геометрия машғулотларига қўйиладиган талаблар;
- Педагогика олий таълим муассасаларида алгебра ва геометрияни ўқитиш бўйича маъруза, амалий машғулотларида талабаларнинг билиш фаолиятини ташкил этиш ва бошқариш;
- Талабаларнинг мустақил ишлари ва таълимини ташкил этиш, уларни илмий-тадқиқотларга йўналтириш **компетенцияларни эгаллаши лозим**

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар

Алгебра ва геометрия фанл курси маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, педагогик технологиялар ва ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги

Модул мазмуни ўқув режадаги “Таълимда илғор хорижий тажрибалар”, “Инновацион таълим технологиялари ва педагогик компетентлик”, “Таълимда илғор хорижий тажрибалар”, “Виртуал таълим технологияси”, “Педагогик жараённинг тизимли таҳлили”, “Математика фанларининг тараққиёт тенденциялари ва инновациялари”, “Педагогик квалиметрия” ўқув модуллари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг касбий педагогик тайёргарлик даражасини орттиришга хизмат қилади

Модулнинг олий таълимдаги ўрни.

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар алгебра ва геометрияни ўқитишнинг методологияси ва назарий масалалари билан таништириш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

Модул бўйича соатлар тақсимоти

Т/р	Мавзу	Умумий соат	Жами аудитория соати	Назарий	Амалий	Мустақил таълим
1	Алгебра ва геометрия маъруза мавзуларини баён қилиш муаммолари.	4	2		2	2
2	Геометрияда индуксия татбиқи.	4	2		2	2
3	Математик структура ва унинг модели, аксиомалари системалари.	4	4	2	2	
4	Геометрия асослари.	4	4	2	2	
5	Топологик фазода *ind* ўлчами ва мисоллар.	6	6	2	4	
6	Топологик фазода *dim* ўлчами ва мисоллар.	4	4	2	2	
7	Топологик фазонинг фундаментал группаси.	4	4	2	2	
8	Топологик кўпхилликлар ва унинг Эйлер характристикаси.	6	6	2	4	
9	Чизиқ таърифи ва мисоллар.	2	4	2	2	
10	Функторлар ҳақида тушунча. Эҳтимоллик функтори.	4	4	2	2	
Жами		**44**	**40**	**16**	**24**	**4**

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Мавзу: Аксиомалар системасига қўйиладиган асосий талаблар.

Гилберт аксиомасида асосий объектлар “нуқта”, “тўғри чизиқ”, “текислик” – дан иборат бўлиб улар орасидаги муносабатлар “тегишли”, “орасида”, “когурентлик” дир, буларнинг хоссаларини аниқловчи аксиомалар

2-Мавзу: Геометрия асослари.

Проектив текисликдаги тайин тўғри чизиқли геометрия, аффин геометриясининг проектив талқини, учта нуқтанинг оддий нисбати, векторлар, Аффин ва Эвклид геометриясининг проектив схемаси.

3-Мавзу: Топологик фазода *ind* ўлчами ва мисоллар.

Топологик фазоларнинг ind ўлчами, ind ўлчами хоссалари, регуляр топологик фазо, $IndX \le n$ тенгсизлик.

4-Мавзу: Топологик фазода *dim* ўлчами ва мисоллар.

Топологик фазо, топологик фазоларнинг ўлчами, ўлчам, ўлчам хоссалари, топологик фазоларнинг dim ўлчами хоссалари.

5- Мавзу: Топологик фазонинг фундаментал группаси.

Ёпиқ йўллар, топологик фазонинг фундаментал гуруппаси, фундаментал группа хоссалари, айлана ва баъзи сиртларнинг фундаментал гуруҳи.

6- Мавзу: Топологик кўпхилликлар ва унинг Эйлер характристикаси.

Икки ўлчамли сиртларни елимлаш, сиртларнинг триангулясияси, сиртларнинг ёйилмаси, кўпбурчак ва сиртларнинг эйлер характеристикаси.

7- Мавзу: Чизиқ таърифи ва мисоллар.

R^n фазо, R^n фазо ва унинг тўпламостилари ўлчами, чизиқ таърифи, чизиқ таърифига мисоллар, тўпламости, ўлчам, метрик фазо, компакт метрик фазо

8- Мавзу: Функторлар ҳақида тушунча. Эҳтимоллик функтори.

Категория тушунчаси, функторлар, эҳтимол ўлчовли функторлар,нормал функтор, ковариант функтор.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАЗМУНИ

1- амалий машғулот:

Алгебрани ўқитишда муаммоли маърузалар.

Ўзбекистон Республикасининг “Таълим тўғрисида”ги Қонуни ва Кадрлар тайёрлаш миллий дастури талаблари асосида алгебра ва геометрия ўқитишни ташкил этиш муаммолари.

Муаммоли маъруза, муаммоли таълим технологияси, муаммони ёйиш, муаммони излаш ва танлаш, геометрияда муаммоли маъруза, муаммони ҳал этиш босқичга ажратиш. Геометрияда муаммоли маъруза, ўқувчиларнинг муаммоли вазиятни тушунишлари, унинг келиб чиқиш сабаблари ҳамда нималарга, қанчалик даражада боғлиқлигини идрок қила олиш.

Муаммо ўқувчиларнинг билим даражаларига ҳамда интелектуал имкониятларига мос бўлиши шарт. Ҳосил бўлган муаммоли вазиятни ечиш учун топшириқлар янги билимларни ўзлаштиришга ёки муаммони аниқлаб, яққол ифодалаб беришга ёки амалий топшириқни бажаришга йўналтирилган бўлади.

2- Амалий машғулот:

Геометрияда ҳисоблашга доир масалаларда индуксиянинг тадбиқлари.

Геометрик тасдиқларни исботлашда математик индуксия услубидан фойдаланиш, геометрик исботлашда индуксиянинг тадбиқлари, ясашга доир индуксиянинг тадбиқлари.

3-Амалий машғулот:

Аксиомалар системасига қўйиладиган асосий талаблар.

Гилберт аксиомасида асосий объектлар “нуқта”, “тўғри чизиқ”, “текислик” – дан иборат бўлиб улар орасидаги муносабатлар “тегишли”, “орасида”, “когурентлик” дир, буларнинг хоссаларини аниқловчи аксиомалар.

3- Амалий машғулот:
Геометрия асослари.

Проектив текисликдаги тайин тўғри чизиқли геометрия, аффин геометриясининг проектив талқини, учта нуқтанинг оддий нисбати, векторлар, Аффин ва Эвклид геометриясининг проектив схемаси.

5- Амалий машғулот:

Топологик фазода *ind* ўлчами ва мисоллар.

Топологик фазоларнинг *ind* ўлчами, *ind* ўлчами хоссалари, регуляр топологик фазо, $IndX \leq n$ тенгсизлик.

6- Амалий машғулот:

Топологик фазода *dim* ўлчами ва мисоллар.

Топологик фазо, топологик фазоларнинг ўлчами, ўлчам, ўлчам хоссалари, топологик фазоларнинг *dim* ўлчами хоссалари.

7- Амалий машғулот:

Топологик фазонинг фундаментал группаси.

Ёпиқ йўллар, топологик фазонинг фундаментал гуруппаси, фундаментал группа хоссалари, айлана ва баъзи сиртларнинг фундаментал гуруҳи.

8- Амалий машғулот:

Топологик кўпхилликлар ва унинг Эйлер харакртристикаси.

Икки ўлчамли сиртларни елимлаш, сиртларнинг триангулясияси, сиртларнинг ёйилмаси, кўпбурчак ва сиртларнинг эйлер характеристикаси.

9- Амалий машғулот:

Чизиқ таърифи ва мисоллар.

R^n фазо, R^n фазо ва унинг тўпламостилари ўлчами, чизиқ таърифи, чизиқ таърифига мисоллар, тўпламости, ўлчам, метрик фазо, компакт метрик фазо.

10- Амалий машғулот:

Функторлар ҳақида тушунча. Эҳтимоллик функтори.

Категория тушунчаси, функторлар, эҳтимол ўлчовли функторлар, нормал функтор, ковариант функтор.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (кўрилаётган топшириқлар ечимлари бўйича таклиф бериш қобилиятини ошириш, эшитиш, идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);
- баҳс ва мунозаралар (топшириқлар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

БАҲОЛАШ МЕЗОНИ

№	Баҳолаш турлари	Максимал балл	Баллар
1	Кейс топшириқлари	2.5	1.2 балл
2	Мустақил иш топшириқлари		0.5 балл
3	Амалий топшириқлар		0.8 балл

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

“Ақлий ҳужум” методи - бирор муаммо бўйича таълим олувчилар томонидан билдирилган эркин фикр ва мулоҳазаларни тўплаб, улар орқали маълум бир ечимга келинадиган методдир. “Ақлий ҳужум” методининг ёзма ва оғзаки шакллари мавжуд. Оғзаки шаклида таълим берувчи томонидан берилган саволга таълим олувчиларнинг ҳар бири ўз фикрини оғзаки билдиради. Таълим олувчилар ўз жавобларини аниқ ва қисқа тарзда баён этадилар. Ёзма шаклида эса берилган саволга таълим олувчилар ўз жавобларини қоғоз карточкаларга қисқа ва барчага кўринарли тарзда ёзадилар. Жавоблар доскага (магнитлар ёрдамида) ёки «пинборд» доскасига (игналар ёрдамида) маҳкамланади. “Ақлий ҳужум” методининг ёзма шаклида жавобларни маълум белгилар бўйича гуруҳлаб чиқиш имконияти мавжуддир. Ушбу метод тўғри ва ижобий қўлланилганда шахсни эркин, ижодий ва ностандарт фикрлашга ўргатади.

“Ақлий ҳужум” методидан фойдаланилганда таълим олувчиларнинг барчасини жалб этиш имконияти бўлади, шу жумладан таълим олувчиларда мулоқот қилиш ва мунозара олиб бориш маданияти шаклланади. Таълим олувчилар ўз фикрини фақат оғзаки эмас, балки ёзма равишда баён этиш маҳорати, мантиқий ва тизимли фикр юритиш кўникмаси ривожланади. Билдирилган фикрлар баҳоланмаслиги таълим олувчиларда турли ғоялар шаклланишига олиб келади. Бу метод таълим олувчиларда ижодий тафаккурни ривожлантириш учун хизмат қилади.

“Ақлий ҳужум” методи таълим берувчи томонидан қўйилган мақсадга қараб амалга оширилади:

1. Таълим олувчиларнинг бошланғич билимларини аниқлаш мақсад қилиб қўйилганда, бу метод дарснинг мавзуга кириш қисмида амалга оширилади.

2. Мавзуни такрорлаш ёки бир мавзуни кейинги мавзу билан боғлаш мақсад қилиб қўйилганда –янги мавзуга ўтиш қисмида амалга оширилади.

3. Ўтилган мавзуни мустаҳкамлаш мақсад қилиб қўйилганда-мавзудан сўнг, дарснинг мустаҳкамлаш қисмида амалга оширилади.

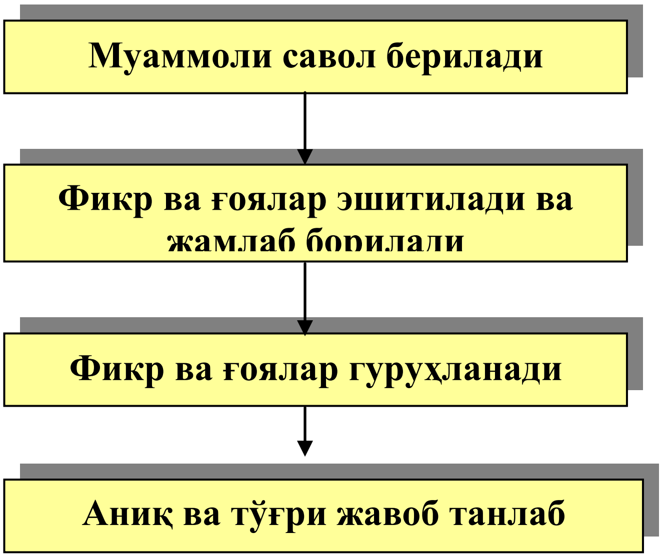
“Ақлий ҳужум” методини қўллашдаги асосий қоидалар:

1. Билдирилган фикр-ғоялар муҳокама қилинмайди ва баҳоланмайди.

2. Билдирилган ҳар қандай фикр-ғоялар, улар ҳатто тўғри бўлмаса ҳам инобатга олинади.

3. Ҳар бир таълим олувчи қатнашиши шарт.

Қуйида “Ақлий ҳужум” методининг тузилмаси келтирилган.



“Ақлий ҳужум” методининг тузилмаси

“Ақлий ҳужум” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Таълим олувчиларга савол ташланади ва уларга шу савол бўйича ўз жавобларини (фикр, ғоя ва мулоҳаза) билдиришларини сўралади;

2. Таълим олувчилар савол бўйича ўз фикр-мулоҳазаларини билдиришади;

3. Таълим олувчиларнинг фикр-ғоялари (магнитафонга, видеотасмага, рангли қоғозларга ёки доскага) тўпланади;

4. Фикр-ғоялар маълум белгилар бўйича гуруҳланади;

5. Юқорида қўйилган саволга аниқ ва тўғри жавоб танлаб олинади.

“Ақлий ҳужум” методининг афзалликлари:

- натижалар баҳоланмаслиги таълим олувчиларда турли фикр-ғояларнинг шаклланишига олиб келади;
- таълим олувчиларнинг барчаси иштирок этади;
- фикр-ғоялар визуаллаштирилиб борилади;
- таълим олувчиларнинг бошланғич билимларини текшириб кўриш имконияти мавжуд;
- таълим олувчиларда мавзуга қизиқиш уйғотади.

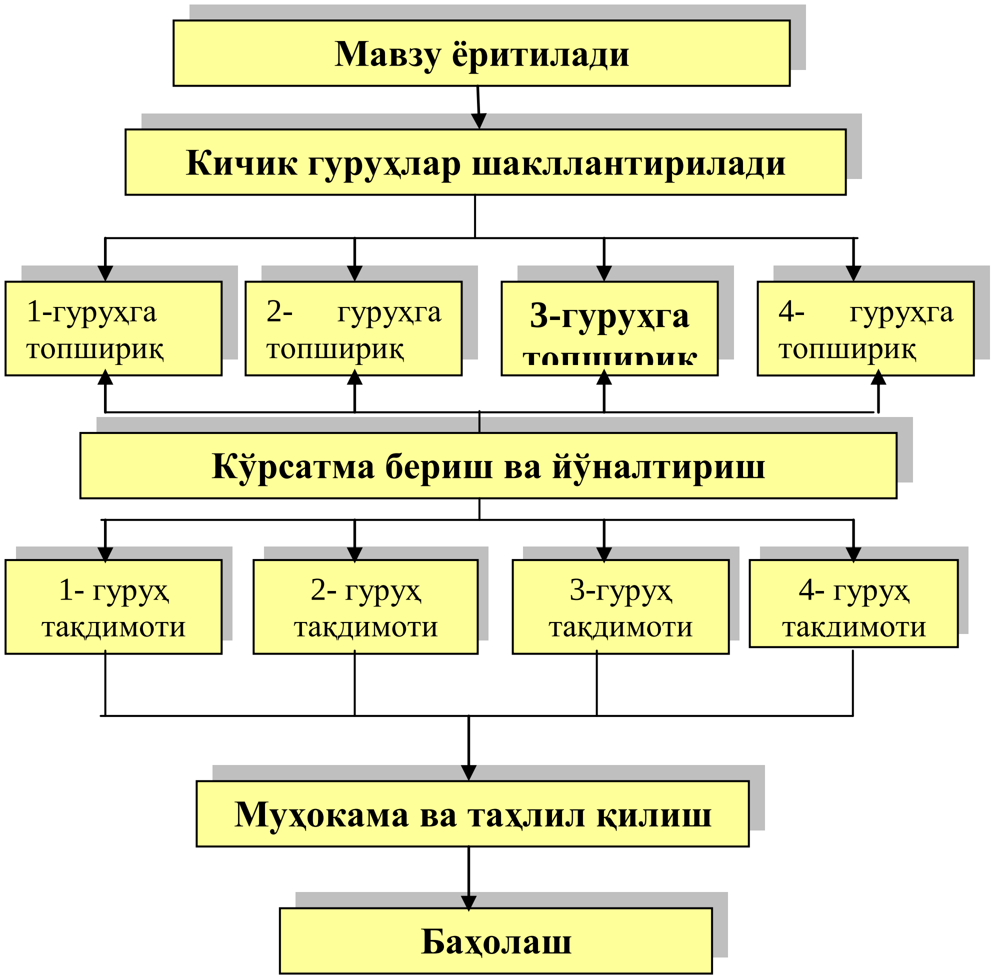
“Ақлий ҳужум” методининг камчиликлари:

- таълим берувчи томонидан саволни тўғри қўя олмаслик;
- таълим берувчидан юқори даражада эшитиш қобилиятининг талаб этилиши.

“КИЧИК ГУРУҲЛАРДА ИШЛАШ” МЕТОДИ - таълим олувчиларни фаоллаштириш мақсадида уларни кичик гуруҳларга ажратган ҳолда ўқув материалини ўрганиш ёки берилган топшириқни бажаришга қаратилган дарсдаги ижодий иш.

Ушбу метод қўлланилганда таълим олувчи кичик гуруҳларда ишлаб, дарсда фаол иштирок этиш ҳуқуқига, бошловчи ролида бўлишга, бир-биридан ўрганишга ва турли нуқтаи- назарларни қадрлаш имконига эга бўлади.

“Кичик гуруҳларда ишлаш” методи қўлланилганда таълим берувчи бошқа интерфаол методларга қараганда вақтни тежаш имкониятига эга бўлади. Чунки таълим берувчи бир вақтнинг ўзида барча таълим олувчиларни мавзуга жалб эта олади ва баҳолай олади. Қуйида “Кичик гуруҳларда ишлаш” методининг тузилмаси келтирилган.



“Кичик гуруҳларда ишлаш” методининг тузилмаси

“Кичик гуруҳларда ишлаш” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Фаолият йўналиши аниқланади. Мавзу бўйича бир-бирига боғлиқ бўлган масалалар белгиланади.
2. Кичик гуруҳлар белгиланади. Таълим олувчилар гуруҳларга 3-6 кишидан бўлинишлари мумкин.
3. Кичик гуруҳлар топшириқни бажаришга киришадилар.
4. Таълим берувчи томонидан аниқ кўрсатмалар берилади ва йўналтириб турилади.
5. Кичик гуруҳлар тақдимот қиладилар.
6. Бажарилган топшириқлар муҳокама ва таҳлил қилинади.
7. Кичик гуруҳлар баҳоланади.

«Кичик гуруҳларда ишлаш» методининг афзаллиги:

- ўқитиш мазмунини яхши ўзлаштиришга олиб келади;

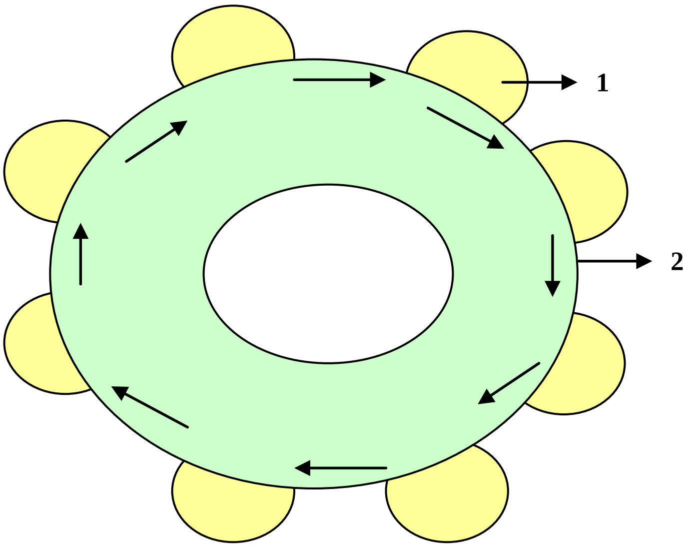
- мулоқотга киришиш кўникмасининг такомиллашишига олиб келади;
- вақтни тежаш имконияти мавжуд;
- барча таълим олувчилар жалб этилади;
- ўз-ўзини ва гуруҳлараро баҳолаш имконияти мавжуд бўлади.

«Кичик гуруҳларда ишлаш» методининг камчиликлари:

- баъзи кичик гуруҳларда кучсиз таълим олувчилар бўлганлиги сабабли кучли таълим олувчиларнинг ҳам паст баҳо олиш эҳтимоли бор;
- барча таълим олувчиларни назорат қилиш имконияти паст бўлади;
- гуруҳлараро ўзаро салбий рақобатлар пайдо бўлиб қолиши мумкин;
- гуруҳ ичида ўзаро низо пайдо бўлиши мумкин.

“ДАВРА СУҲБАТИ” МЕТОДИ – айлана стол атрофида берилган муаммо ёки саволлар юзасидан таълим олувчилар томонидан ўз фикр-мулоҳазаларини билдириш орқали олиб бориладиган ўқитиш методидир.

“Давра суҳбати” методи қўлланилганда стол-стулларни доира шаклида жойлаштириш керак. Бу ҳар бир таълим олувчининг бир-бири билан “кўз алоқаси”ни ўрнатиб туришига ёрдам беради. Давра суҳбатининг оғзаки ва ёзма шакллари мавжуддир. Оғзаки давра суҳбатида таълим берувчи мавзуни бошлаб беради ва таълим олувчилардан ушбу савол бўйича ўз фикр-мулоҳазаларини билдиришларини сўрайди ва айлана бўйлаб ҳар бир таълим олувчи ўз фикр-мулоҳазаларини оғзаки баён этадилар. Сўзлаётган таълим олувчини барча диққат билан тинглайди, агар муҳокама қилиш лозим бўлса, барча фикр-мулоҳазалар тингланиб бўлингандан сўнг муҳокама қилинади. Бу эса таълим олувчиларнинг мустақил фикрлашига ва нутқ маданиятининг ривожланишига ёрдам беради.



Белгилар:
1-таълим олувчилар
2-айлана стол

Давра столининг тузилмаси

Ёзма давра суҳбатида ҳам стол-стуллар айлана шаклида жойлаштирилиб, ҳар бир таълим олувчига конверт қоғози берилади. Ҳар бир таълим олувчи конверт устига маълум бир мавзу бўйича ўз саволини беради ва “Жавоб варақаси”нинг бирига ўз жавобини ёзиб, конверт ичига солиб қўяди. Шундан сўнг конвертни соат йўналиши бўйича ёнидаги таълим олувчига узатади. Конвертни олган таълим олувчи ўз жавобини “Жавоблар варақаси”нинг бирига ёзиб, конверт ичига солиб қўяди ва ёнидаги таълим олувчига узатади. Барча конвертлар айлана бўйлаб ҳаракатланади. Якуний қисмда барча конвертлар йиғиб олиниб, таҳлил қилинади. Қуйида “Давра суҳбати” методининг тузилмаси келтирилган

Суҳбатни ўтказиш шарт

↓

Конвертлар ва “Жавоблар варақалари”ни

↓

Конвертларга саволлар ёзиш

↓

Конвертни ёнидаги ўқувчига узатиш

↓

Саволларга жавоб ёзиш

↓

Баҳолаш ва таҳлил қилиш

“Давра суҳбати” методининг тузилмаси

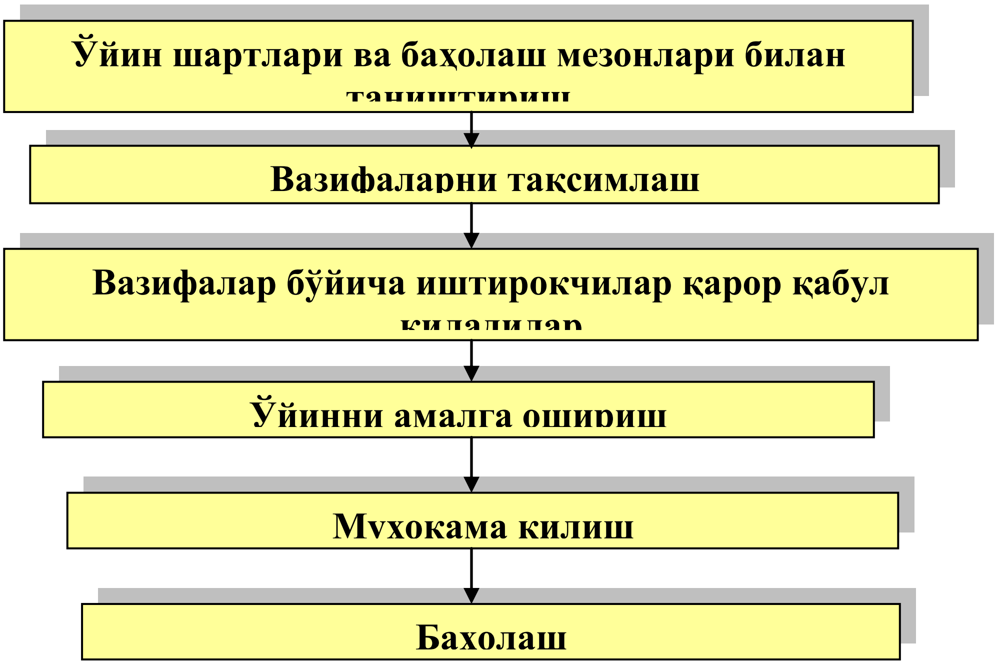
“Давра суҳбати” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Машғулот мавзуси эълон қилинади.
2. Таълим берувчи таълим олувчиларни машғулотни ўтказиш тартиби билан таништиради.
3. Ҳар бир таълим олувчига биттадан конверт ва жавоблар ёзиш учун гуруҳда неча таълим олувчи бўлса, шунчадан “Жавоблар варақалари”ни тарқатилиб, ҳар бир жавобни ёзиш учун ажратилган вақт белгилаб қўйилади. Таълим олувчи конвертга ва “Жавоблар варақалари”га ўз исми-шарифини ёзади.
4. Таълим олувчи конверт устига мавзу бўйича ўз саволини ёзади ва “Жавоблар варақаси”га ўз жавобини ёзиб, конверт ичига солиб қўяди.
5. Конвертга савол ёзган таълим олувчи конвертни соат йўналиши бўйича ёнидаги таълим олувчига узатади.
6. Конвертни олган таълим олувчи конверт устидаги саволга “Жавоблар варақалари”дан бирига жавоб ёзади ва конверт ичига солиб қўяди ҳамда ёнидаги таълим олувчига узатади.
7. Конверт давра столи бўйлаб айланиб, яна савол ёзган таълим олувчининг ўзига қайтиб келади. Савол ёзган таълим олувчи конвертдаги “Жавоблар варақалари”ни баҳолайди.
8. Барча конвертлар йиғиб олинади ва таҳлил қилинади.

Ушбу метод орқали таълим олувчилар берилган мавзу бўйича ўзларининг билимларини қисқа ва аниқ ифода эта оладилар. Бундан ташқари ушбу метод орқали таълим олувчиларни муайян мавзу бўйича баҳолаш имконияти яратилади. Бунда таълим олувчилар ўзлари берган саволларига гуруҳдаги бошқа таълим олувчилар берган жавобларини баҳолашлари ва таълим берувчи ҳам таълим олувчиларни объектив баҳолаши мумкин.

“ИШБОП ЎЙИН” МЕТОДИ - берилган топшириқларга кўра ёки ўйин иштирокчилари томонидан тайёрланган ҳар хил вазиятдаги бошқарувчилик қарорларини қабул қилишни имитatsiя қилиш (тақлид, акс эттириш) методи ҳисобланади.

Ўйин фаолияти бирон бир ташкилот вакили сифатида иштирок этаётган иштирокчининг ҳулқ-атвори ва ижтимоий вазифаларини имитация қилиш орқали берилади. Бир томондан ўйин назорат қилинса, иккинчи томондан оралиқ натижаларга кўра иштирокчилар ўз фаолиятларини ўзгартириш имкониятига ҳам эга бўлади. Ишбоп ўйинда роллар ва ролларнинг мақсади аралашган ҳолда бўлади. Иштирокчиларнинг бир қисми қатъий белгиланган ва ўйин давомида ўзгармас ролни ижро этишлари лозим. Бир қисм иштирокчилар ролларини шахсий тажрибалари ва билимлари асосида ўз мақсадларини белгилайдилар. Ишбоп ўйинда ҳар бир иштирокчи алоҳида ролли мақсадни бажариши керак. Шунинг учун вазифани бажариш жараёни индивидуал-гуруҳли характерга эга. Ҳар бир иштирокчи аввал ўзининг вазифаси бўйича қарор қабул қилади, сўнгра гуруҳ билан маслаҳатлашади. Ўйин якунида ҳар бир иштирокчи ва гуруҳ эришган натижаларига қараб баҳоланади. Қуйида “Ишбоп ўйин” методининг тузилмаси келтирилган.



“Ишбоп ўйин” методининг тузилмаси

“Ишбоп ўйин” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Таълим берувчи мавзу танлайди, мақсад ва натижаларни аниқлайди. Қатнашчилар учун йўриқномалар ва баҳолаш мезонларини ишлаб чиқади.

2. Таълим олувчиларни ўйиннинг мақсади, шартлари ва натижаларни баҳолаш мезонлари билан таништиради.

3. Таълим олувчиларга вазифаларни тақсимлайди, маслаҳатлар беради.

4. Таълим олувчилар ўз роллари бўйича тайёргарлик кўрадилар.

5. Таълим олувчилар тасдиқланган шартларга биноан ўйинни амалга оширадилар. Таълим берувчи ўйин жараёнига аралашмасдан кузатади.

6. Ўйин якунида таълим берувчи муҳокамани ташкил этади. Экспертларнинг хулосалари тингланади, фикр-мулоҳазалар айтилади.

7. Ишлаб чиқилган баҳолаш мезонлари асосида натижалар баҳоланади.

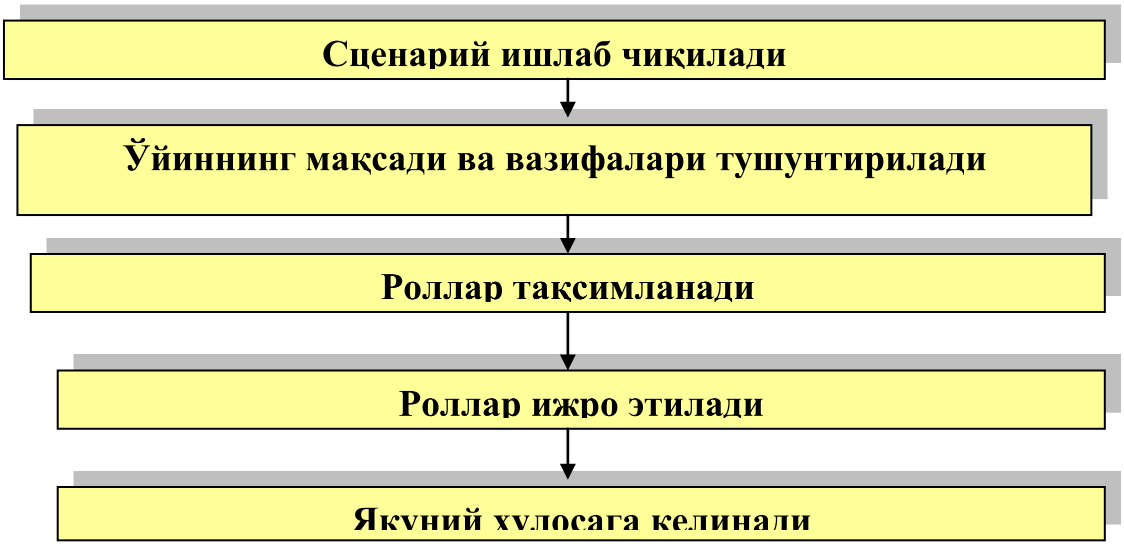
Ҳар бир ролни ижро этувчи ўз вазифасини тўғри бажариши, берилган вазиятда ўзини қандай тутиши кераклигини намойиш эта олиши, муаммоли ҳолатлардан чиқиб кетиш қобилиятини кўрсата олиши керак.

“РОЛЛИ ЎЙИН” МЕТОДИ - таълим олувчилар томонидан ҳаётий вазиятнинг ҳар хил шарт-шароитларини саҳналаштириш орқали кўрсатиб берувчи методдир.

Ролли ўйинларнинг ишбоп ўйинлардан фарқли томони баҳолашнинг олиб борилмаслигидадир. Шу билан бирга “Ролли ўйин” методида таълим олувчилар таълим берувчи томонидан ишлаб чиқилган сценарийдаги ролларни ижро этиш билан кифояланишса, “Ишбоп ўйин” методида роль ижро этувчилар маълум вазиятда қандай вазифаларни бажариш лозимлигини мустақил равишда ўзлари ҳал этадилар.

Ролли ўйинда ҳам ишбоп ўйин каби муаммони ечиш бўйича иштирокчиларнинг биргаликда фаол иш олиб боришлари йўлга қўйилган. Ролли ўйинлар таълим олувчиларда шахслараро муомала малакасини шакллантиради.

“Ролли ўйин” методида таълим берувчи таълим олувчилар ҳақида олдиндан маълумотга эга бўлиши лозим. Чунки ролларни ўйнашда ҳар бир таълим олувчининг индивидуал характери, хулқ-атвори муҳим аҳамият касб этади. Танланган мавзулар таълим олувчиларнинг ўзлаштириш даражасига мос келиши керак. Ролли ўйинлар ўқув жараёнида таълим олувчиларда мотивацияни шакллантиришга ёрдам беради. Қуйида “Ролли ўйин” методининг тузилмаси келтирилган.



“Ролли ўйин” методининг тузилмаси

“Ролли ўйин” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Таълим берувчи мавзу бўйича ўйиннинг мақсад ва натижаларини белгилайди ҳамда ролли ўйин сенарийсини ишлаб чиқади.
2. Ўйиннинг мақсад ва вазифалари тушунтирилади.
3. Ўйиннинг мақсадидан келиб чиқиб, ролларни тақсимлайди.
4. Таълим олувчилар ўз ролларини ижро этадилар. Бошқа таълим олувчилар уларни кузатиб турадилар.
5. Ўйин якунида таълим олувчилардан улар ижро этган ролни яна қандай ижро этиш мумкинлигини изоҳлашга имконият берилади. Кузатувчи бўлган таълим олувчилар ўз якуний мулоҳазаларини билдирадилар ва ўйинга хулоса қилинади.

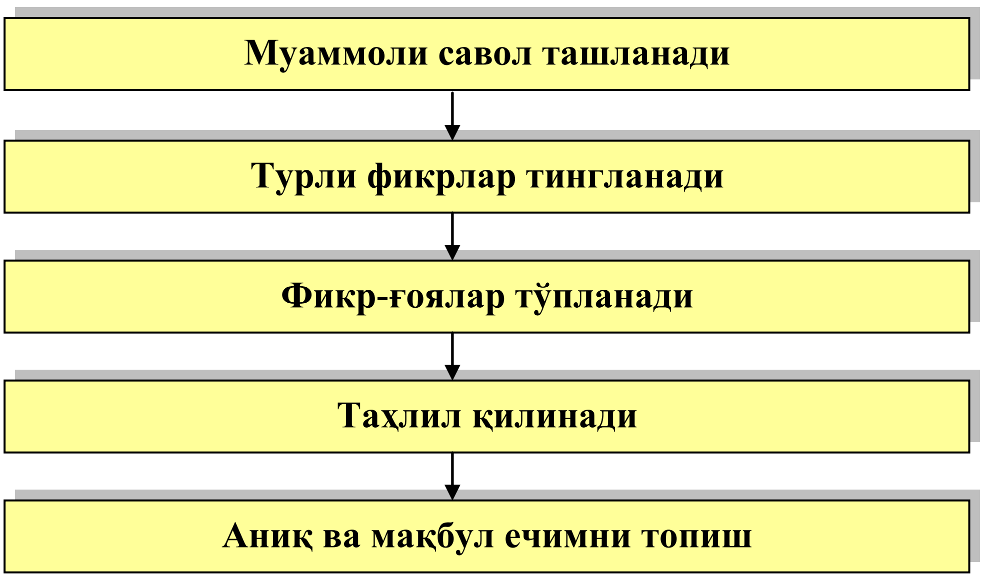
“БАҲС-МУНОЗАРА” МЕТОДИ- бирор мавзу бўйича таълим олувчилар билан ўзаро баҳс, фикр алмашинув тарзида ўтказиладиган ўқитиш методидир.

Ҳар қандай мавзу ва муаммолар мавжуд билимлар ва тажрибалар асосида муҳокама қилиниши назарда тутилган ҳолда ушбу метод қўлланилади. Баҳс-мунозарани бошқариб бориш вазифасини таълим олувчиларнинг бирига топшириши ёки таълим берувчининг ўзи олиб бориши мумкин. Баҳс-мунозарани эркин ҳолатда олиб бориш ва ҳар бир таълим олувчини мунозарага жалб этишга ҳаракат қилиш лозим. Ушбу метод олиб борилаётганда таълим олувчилар орасида пайдо бўладиган низоларни дарҳол бартараф этишга ҳаракат қилиш керак.

“Баҳс-мунозара” методини ўтказишда қуйидаги қоидаларга амал қилиш керак:

- ✓ барча таълим олувчилар иштирок этиши учун имконият яратиш;
- ✓ “ўнг қўл” қоидаси (қўлини кўтариб, руҳсат олгандан сўнг сўзлаш)га риоя қилиш;
- ✓ фикр-ғояларни тинглаш маданияти;
- ✓ билдирилган фикр-ғояларнинг такрорланмаслиги;
- ✓ бир-бирларига ўзаро ҳурмат.

Қуйида “Баҳс-мунозара” методини ўтказиш тузилмаси берилган.



“Баҳс-мунозара” методининг тузилмаси

“Баҳс-мунозара” методининг босқичлари қуйидагилардан иборат:

1. Таълим берувчи мунозара мавзусини танлайди ва шунга доир саволлар ишлаб чиқади.

2. Таълим берувчи таълим олувчиларга муаммо бўйича савол беради ва уларни мунозарага таклиф этади.

3. Таълим берувчи берилган саволга билдирилган жавобларни, яъни турли ғоя ва фикрларни ёзиб боради ёки бу вазифани бажариш учун таълим олувчилардан бирини котиб этиб тайинлайди. Бу босқичда таълим берувчи таълим олувчиларга ўз фикрларини эркин билдиришларига шароит яратиб беради.

4. Таълим берувчи таълим олувчилар билан биргаликда билдирилган фикр ва ғояларни гуруҳларга ажратади, умумлаштиради ва таҳлил қилади.

5. Таҳлил натижасида қўйилган муаммонинг энг мақбул ечими танланади.

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР

1-Мавзу: Математик структура ва унинг модели, аксиомалари системалари.

Режа:

1.Математик структура ва унга доир мисоллар.

2.Аксиомалар системасига қўйиладиган асосий талаблар.

3. Гилберт аксиомалари системаси.

4. Вейл аксиомалари системаси.

5.Чизиқли акслантиришлар

<u>Таянч иборалар:</u> Математик структура, Аксиомалар системаси, Гилберт аксиомалар системаси, Вейл аксиомалар системаси.

1.1. Математик структура ва унга доир мисоллар.

Бизга маълумки бўш бўлмаган $М_и$, $и=\overline{1,н}$ тўпламларнинг декарт $М_1$*$М_2$* …*$М_н$ кўпайтмасидан олинган турли Δ_1 ва Δ_2 тўплам остилар, $М_и$ тўпламлар системасида икки турли муносабатни аниқлайди. Бу Δ_1 ва Δ_2 муносабатлар маълум хоссалари билан бир-биридан фарқ қилади, яъни $\Delta_1 \neq \Delta_2$. Агар биз П($М_и$ * $М_2$ … * $М_н$) билан $М_и$ * $М_2$ … * $М_н$ нинг барча тўплам остиларини белгилайлик. Агар $М_и$ лардан камида бирортаси чексиз тўплам бўлса, бу тўплам чексиздир.

Математикада бу тўпламнинг мумкин бўлган барча муносабатларини органиш вазифасини қўйиш мақсадга мувофиқ эмасдир. Аксинча, амалиёт талаблари асосида бу масалага бир мунча тескари масала қурилади (ҳам қилинади) яъни: олдиндан берилган маълум хоссаларни қаноатлантирувчи муносабатлар изланади ва ўрганилади. Энди аниқлик учун чекли сондаги бўш бўлмаган Э, Ф ва Г тўпламларни оламиз.

Энди бу Э, Ф ва Г тўпламлар системасида аниқланган, шундай Δ_1, Δ_2, …, $\Delta_к$ муносабатларни оламизки, улар $А_1$, $А_2$, …, $А_с$ хоссаларга аксиомаларга эга бўлсин. Бундай $\sigma = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_к\}$ системалар ягона бўлмаслиги мумкин. Масалан: ҳақиқий сонлар тўпламида қўшиш ва кўпайтириш амалларининг комутативлиги (A_1-комутативлик, Δ_1, Δ_2-операциялар (амаллар)) ёки векторлар устида сонга кўпайтириш ва векторларни қўшиш амаллари.

Энди биз Т билан $A_1, A_2, \dots, A_c$ (1) хоссаларни (аксиомаларни) қаноатлантирувчи $\sigma = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_к\}$ муносабатлар системалар синфини белгилаймиз.

Агар $T \neq \emptyset$ бўлса, $\sigma \in T$ елемент Э, Ф ва Г тўпламлар системасида Т турдаги структурани ёки Т турдаги математик структурани аниқлайди дейилади.

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_к$ – лар структура асосий муносабатлари, $A_1, A_2, \dots, A_c$ лар структуранинг аксиомалари. Э, Ф ва Г лар структура баъзаси дейилади.

Мисоллар:

1) Математик структура (Группа структураси) Э тўплам, Δ - операция, амал (муносабат)

A_1 : Δ - алгебраик амал Э да аниқланган;

A_2 : Δ - нинг ассоциативлиги;

A_3 : Э – да нейтрал элемент мавжудлиги;

A_4 : Э – да симметрик ёки тескари элементининг мавжудлиги.

2) Евклид геометрияси Гилберт аксиомалар системаси мисолида.

Э – нуқталар тўплами;

Ф- тўғри чизиқлар,

Г – текисликлар тўплами

Δ_1 – “ да ётади ”

Δ_2 – “ орасида ётади”

Δ_3 – “конгруентлик”

$A_1, A_2, \dots, A_{20}$ – Гилберт аксиомалари.

3) Математик структура Лобачевский геометрияси аксиомалари асосида

Бу ҳам Евклид геометрияси структурасидек бўлиб, фақат A_{20} аксиомаси B^* - Лобачевский аксиомаси билан алмаштирилади.

Математика математик структураларини ўрганиш билан шуғулланади ва уни ўрганиш услуби эъса аксиоматик услубдир, яъни бу услубда аксиёмалар системаси келтирилиб мантиқ асосида структура назарияси кўринади. Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики геометрия фани ҳам аксиоматик методга асосланган экан.

Юқоридаги Т математик структурани аниқлашда, Т тўплам бўш тўплам ҳам бўлиши мумкин. Бизни Т нинг бўш бўлмаган ҳолати қизиқтиради, чунки Т нинг бўш бўлиши ҳеч бири мантиқий маънога эга эмас.

$T \neq \emptyset$ нинг асосан қуйидаги икки сабаби бор:

Берилган база керак Т тур структурани аниқламайди, лекин базани ўзгартириш билан

$T \neq \emptyset$. Базани алмаштирганда ҳам $T \neq \emptyset$ бўлаверса, керакли турда структурани аниқловчи база мавжуд бўлмайди.

Бу ҳолда аксиомалар системаси $A_1, A_2 \ldots A_c$ – лар зидли дейилади.

в) акс ҳолда эса, яъни структурани қаноатлантирувчи база мавжуд бўлса, аксиомалар системаси зидсиз дейилади.

Агар шундай конкрет (элементлари “ аниқ ”) тўплам М топилсаки муносабатлар аниқ маънога эга бўлганда $A_1, A_2 \ldots A_c$ аксиомалар бир вақтда ўринли бўлса, Т структура интерпретацияси (тасаввури) қурилди дейилади. М тўпламнинг ўзи эса Т структура модели (андозаси) дейилади.

4) М – деб ҳақиқий сонлардан ташкил топган барча 2 – тартибли матрицалар тўпламини белгиласак ва М га оддий матрицаларни кўпайтириш ва қўшиш амалларни қарасак, бу М тўплам тўрт ўлчамли вестор фазонинг модели бўлади.

Бизга Т= { σ= {Δ_1, Δ_2, … , $\Delta_к$ }, A_1, A_2, …, $A_с$ } структура берилган бўлсин.

Агар $M^|$ тўпламда $\Delta^|_1$, $\Delta^|_2$, … , $\Delta^|_к$ муносабатлар аниқ маънога эга бўлиб, у A_1, A_2, …, $A_с$ аксиомаларни қаноатлантирсин.

$M^{||}$ тўпламда ҳам аниқ маънога эга бўлган $\Delta^{||}_1$, $\Delta^{||}_2$, … , $\Delta^{||}_к$ муносабатлар аниқланиб у A_1, A_2, …, $A_с$ аксиомаларни қаноатлантирсин.

Таъриф. σ ва $\sigma^|$ структуралар изоморф дейилади, агар ф: $M^| \to M^{||}$ биектив (бир қийматли) акслантириш мавжуд бўлиб, у учун ($х^|$, $й^|$, …, $з^|$) $\in \Delta_ж^|$ - фақат ва фақат (ф($х^|$)+ф($й^|$),…, ф($з^|$)) $\in \Delta_ж^{||}$.

5) Т = структура абел группаси(кўпайтириш) бўлсин $\sigma^|$ эса - Р – тўпламдаги аддитив (қўшишга нисбаттан) группа мусбат ҳақиқий тўпламда аниқланган кўпайтиришга нисбатан группа бўлсин.

Қуйидаги ф: Р $\to$ Р акслантиришни ф(х) = лн х кўринишда аниқлаймиз.

Хулоса қилиб айтиш мумкинки $\sigma^|$ ва $\sigma^{||}$ лар изоморфдир.

6) Алмаштириш ёки харакатлар структураси.

Э текисликдаги алмаштиришлар ёки ҳаракатлар тўплами, Δ деб алмаштириш ёки ҳаракатнинг кетма – кет бажариш (компазиция) амалини белгилаймиз:

A_1 – Э да компазициянинг бажарилиши; (аксиома)

A_2 – алмаштиришлар гуруҳлаш (ассоциативлик);(аксиома)

A_3 – Э айний алмаштиришнинг мавжудлиги; (аксиома)

A_4 – Э да тескари алмаштиришнинг мавжудлиги. (аксиома)

1.2. Аксиомалар системасига қўйиладиган асосий талаблар.

Аксиоматик методнинг моҳиятини тушуниш мақсадида мактабда ўрганиладиган геометрия курсига мурожаат қилайлик. Унда бир қанча теоремалар исботланган бўлиб, исботланган ҳар бир теорема ўзидан олдин келган теоремаларга асосланади, шу йўсинда иш кўришда исбоциз қабул қилиниши зарур бўлган ибора (жумла) лар ва тушунчаларга дуч келамиз:

натижада таърифсиз қабул қилинган объектларни (масалан, нуқта, тўғри чизиқ, текислик, масофа тушунчалари), уларни боғловчи нисбатлар (масалан, нуқтанинг тўғри чизиқда ётиши, тўғри чизиқдаги нуқтанинг шу тўғри чизиқдаги бошқа икки нуқта “орасида” ётиши, кесма ва бурчакларнинг тенг (конгруент)лиги) вужудга келади.

Асосий объектлар, уларни боғловчи нисбатлар ва тегишли аксиомалар системасини танлаб олиш муҳим масаладир. Аксиоматик метод асосида муҳокама юритишни қисқароқ қилиб қуйидагича айтиш мумкин:

аввало таърифланмайдиган асосий объектлар танлаб олинади, кейин уларни ўзаро боғловчи асосий муносабатлар- аксиомалар танлаб олинади,

Шу аксиомалар асосида мантиқ (логика) қоидаларга асосланган ҳолда янги жумлалар (теоремалар) исботланади.

Қабул қилинадиган аксиомалар системаси қуйидаги талабларга жавоб бериши керак:

Аксиомалар системаси зидсиз бўлиши керак, яъни мантиқ қонунлари асосида аксиомалар системасидан бир – бирини инкор этувчи иккита жумла (гап) келиб чиқмайдиган бўлсин.

Аксиомалар системаси эркин бўлиши керак, яъни аксиомалар системасида иштирок этадиган ҳар бир аксиома қолган аксиомаларнинг мантиқий хулосаси бўлмаслиги керак. (Теорема сифатида исботланмаслиги керак).

Аксиомалар системаси тўлиқ бўлиши керак.

Таъриф. Маълум объектларнинг бирор тўплами аниқланган бўлиб, шу тўплам элементлари орасида асосий муносабат сақланиб, унда аксиомаларнинг барча шартлари бажарилса, бу аксиомалар системасининг модели қурилган дейилади.

Мисол. Бутун сонлар тўплами қўшишга нисбатан группа ташкил қилади.

Г тўплам кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилади дейилади, агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса:

а*(б*с)=(а*б)*с, $\forall$а,б,с $\in G$

Г да бирлик элемент деб аталувчи э ϵ Г мавжуд бўлиб, $\forall a\epsilon G$ учун а*е = а тенглик ўринли бўлсин.

$\forall a\epsilon G$ учун тескари $a^{-1}\epsilon G$ мавжуд бўлиб, а*а = э ва қуйидагича белгиланади: (Г, *)

Бутун сонлар тўпламининг қошишга нисбатан группа ташкил қилишини текширайлик. Бу ерда ((*), =, +) оламиз.

а+(б+с) = (а+б)+с тенглик ихтиёрий бутун сонлар учун ўринли.

е=0 олсак, у ҳолда а+0=а тенлик ихтиёрий бутун сонлар учун ўринли.

$\forall$а учун $а^{-1}$= - а олсак, а+(-а)=0 тенглик ўринли. Демак (З, +) – группа экан.

Бутун сонлар тўплами аксиомалар системасининг модели бўла олади, бунда асосий объектлар бутун сонлар тўплами, асосий объектлар қўшиш амали.

Аксиомалар системасининг зидсизлиги шу система моделининг танлаб олиниши билан ҳам қилинади. Агар текшириладиган аксиомалар бирор усул билан моделда бажарилса ва бу модел объектларнинг табиатида зидликнинг йўқлигига ишонч ҳосил қилинса, у ҳолда бу аксиомалардан бир – бирини мантиқан инкор этадиган иккита жумла келиб чиқмаслиги, яъни битта фактни ҳам тасдиқлаб, ҳам инкор этиб бўлмаслиги маълум бўлади. Демак, биз юқорида келтирган мисолимизда группавий аксиомалар системасининг ва чизиқли фазо аксиомалари системасининг зидсиз эканини кўрсатдик.

Таъриф. Зидсиз аксиомалар системасидаги ҳар бир аксиома шу системадаги қолган барча аксиомаларнинг мантиқий хулосаси бўлмаса, бундай аксиомалар системаси эркин система деб аталади.

Бундан кўринадики, аксиомалар системасининг эркин бўлиш талаби ҳар бир аксиоманинг қолган аксиомаларнинг хулосаси (натижаси) эмаслигини текшириш билан исботланади. Бу масала қуйидагича ҳал қилинади.

Аксиомаларнинг зидсиз $A_1, A_2, \ldots, A_н$ системасига қарашли масалан, $A_н$ аксиоманинг эркин эканлигини кўрсатиш учун бу системадан $A_н$ ни чиқариб ташлаб, унинг ўрнига $\overline{A}_н$ аксиома, яъни $A_н$ нинг мазмунини инкор этувчи жумла – иборани киритиб, аксиомаларнинг янгу системасини ҳосил қилиш ва унинг зидсизлигини исботлаш керек. Ҳақиқатдан ҳам, агар $A_н$ аксиома $A_1, A_2, \ldots, \overline{A}_н$ аксиомаларнинг натижаси бўлиб чиқади. Бу эса аввалги системасини зидлигини билдиради.

Аксиомалар системасидаги бирор аксиоманинг эркинлиги, яъни унинг мустақил аксиома эканлигини бу системадаги аксиомалар сонини камайтириш мумкин эмаслигидан дарак беради.

Аксиомалар системасининг эркинлигини текширишда ҳар бир аксиоманинг эркинлиги алоҳида текширилмайди, лекин бази аксиомаларга нисбатан эркинлик талаби текширилади.

Аксиомалар системасининг тўлиқлигининг мазмуни шундан иборатки, янги аксиомалар қўшмасдан туриб, шу назарияга тааллуқли ҳар бир даъвонинг шу системага таянган ҳолда ўринлилигини ёки инкорини айтиш мумкин бўлсин. Бу талабнинг амалга оширилиши одатда Система учун қурилган икки модел орасидаги изоморфизм деб аталадиган тишунчага асосланади.

Таъриф. Аксиомалар системасининг икки Э, $Э^{I}$ моделининг асосий объекти (нуқта, тўғри чизиқ, текисликлар) орасида ўзаро бир қийматли мостлик ўрнатилган бўлиб, бу мостликда элемент (объект) лар, иккала моделда ҳам бир хил нисбатда бўлса, яъни $АЭЭ \to A^{I}ЭЭ^{I}$ бўлса, бу икки модел изоморф дейилади.

Таъриф. Аксиомалар системасига тааллуқли исталган жумланинг тўғри ёки нотўғри эканини аниқланган мумкин бўлса, аксиомаларнинг бу системаси тўлиқ (мукаммал) деб аталади.

Аксиомаларнинг зидсиз $\sum$ системаси берилган бўлсин, шу система асосида қурилган назариянинг барча жумлаларини уч синфга ажратиш мумкин;

$\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида исботлаш мумкин бўлган жумладир.

$\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида инкор этиш мумкин бўлган жумлалар.

$\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида исбот ҳам қилиб бўлмайдиган, инкор ҳам қилиб бўлмайдиган жумлалар.

Демак, $\sum$ нинг бирор модели қурилиб бўлса, 1-синфга кирувчи барча жумлалар шу моделда ўринли бўлади, 2- синфга кирувчи барча жумлалар шу моделда оринли бўлмайди, нихоят, 3- синфга кирувчи жумлалар шу моделда ўринли бўлиб, $\sum$ нинг бошқа шундай модели мавжуд бўлиши мумкинки, унда бу жумлалар ўринли бўлмайди. Бундан кўринадики, $\sum$ нинг исталган икки модели ўзаро изоморф бўлса, аксиомаларнинг бундай системаси тўлиқ бўлади. Бунинг маъноси шундан иборатки, аксиомаларнинг тўлиқ системаси учун турли моделлар фақат ўзининг асосий объект (елемент) ларга бериладиган конкрет мазмуни билан фарқ қилади, мантиқий жиҳатдан улар бир хилдир.

Демак, аксиомаларнинг бирор системасининг тўлиқлигини исботлаш учун унинг камида иккита моделини олиб, уларнинг ўзаро изоморфлигини кўрсатиш кифоя.

Математикада аксиомаларнинг тўлиқ бўлмаган системаси билан ҳам иш кўришга тўғри келади. Масалан, группавий аксиомалар системаси тўртта аксиомадан иборат бўлиб, у тўлиқ эмас, чунки бу системанинг бир бирига изоморф бўлмаган иккита моделини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатдан, рационал сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан группа ташкил қилади, бундан тшқари барча ҳақиқий сонлар тўплами ҳам қўшиш амалига нисбатан группа ҳосил қилади. Лекин бу икки модел орасида изоморф мослик ҳосил қилиш мумкин эмас, чунки рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эмас.

1.3. Гилберт аксиомалари системаси.

Гилберт аксиомасида асосий объектлар “нуқта”, “тўғри чизиқ”, “текислик” – дан иборат бўлиб улар орасидаги муносабатлар “тегишли”, “орасида”, “когурентлик” дир, буларнинг хоссаларини аниқловчи аксиомалар беш группага бўлинади:

1 – группа: Боғланиш (тегишлилик) аксиомалари. (8 та)

2 – группа: Тартиб аксиомалари. (4 та)

3 – группа: Когурентлик аксиомалари. (5 та)

4 – группа: Узлуксизлик аксиомалари. (1 та)

5 – группа: Паралеллик аксиомалари. (1 та)

Геометрияни ва ҳар қандай математик назарияни аксиомалар асосида қуриш ишни 1-дан асосий объектлар категориясини, 2-дан бу объектлар орасидаги асосий муносабатларни 3-дан аксиомаларни кўрсатишдан бошланиши керак. Геометрияда қараладиган ундан кам объектлар ва улар орасидаги муносабатлар асосий объектлар орқали таърифланиши керак ва барча теоремаларни аксиомаларга суяниб исботлаш керак.

Гилберт аксиомалар системасида асосий тушунчалар нуқта, тўғри чизиқ, текислик.

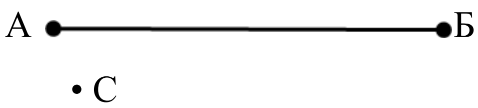
1 группа. Боғланиш аксиомалари.

I_1. Ихтиёрий А ва Б нуқталар учун шундай тўғри чизиқ мавжуд бўлиб, бу нуқталар шу тўгри чизиқда ётади.

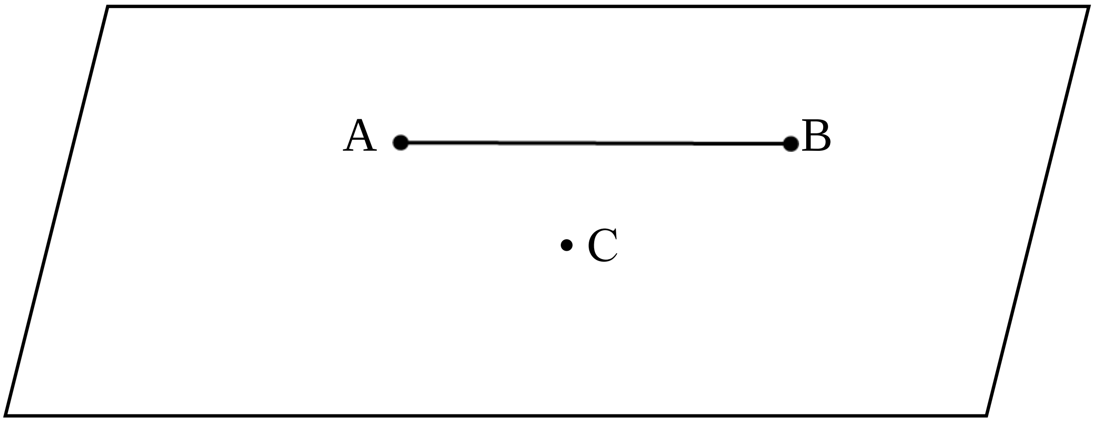
I_2. А ва Б нуқталардан ўтувчи биттадан ортиқ тўғри чизиқ мавжуд эмас.

I_3. Ҳар қандай тўғри чизиқда камида иккита нуқта мавжуд.

Битта тўгри чизиқда ётмайдиган учта нуқта мавжуд.



I_4. Бир тўгри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай учта А, Б, С нуқталардан ўтувчи текислик мавжуд.



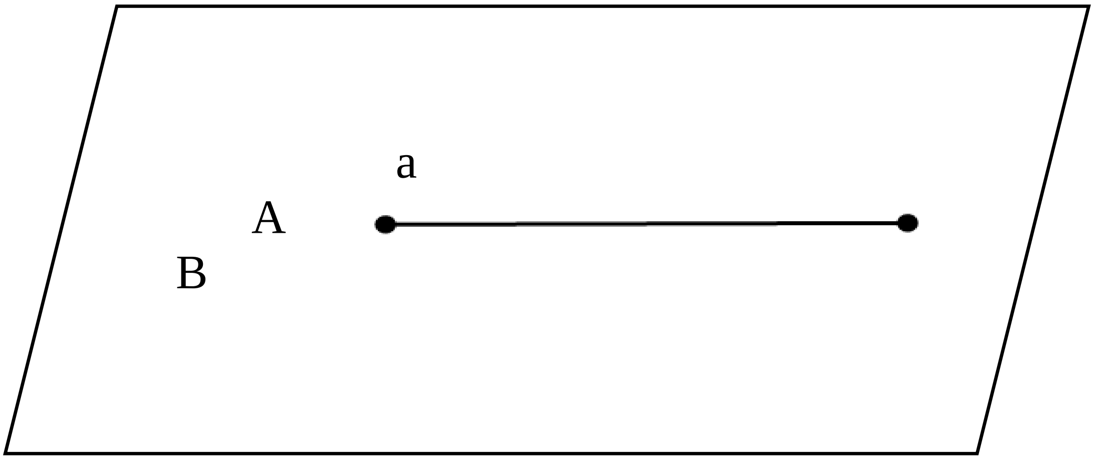
I_5. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай А, Б, С нуқталардан ўтувчи ягона текислик мавжуд.

I_4 ва I_5 аксиомаларда қуйидаги текислик келиб чиқади.

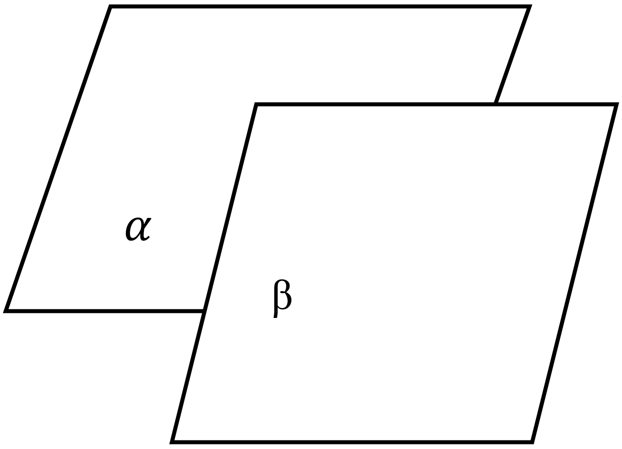
Теорема. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай ушта А , Б ,С нуқталардан битта ва фақат битта АБС текислик ўтказиш мумкин.

I_6. Агар а тўғри чизиқнинг А ва Б нуқталари α текисликда ётса, а тўғри

чизиқнинг ҳар қандай нуқтаси ҳам шу текисликда ётади.



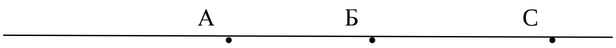
I_7. Агар $\alpha\ va\ \beta$ текисликлар умумий А нуқтага эга бўлса, у ҳолда А нуқтадан фарқли Б нуқта мавжуд.



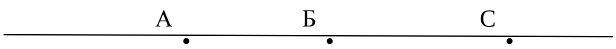
$I_{8.}$ Битта текисликда ётмайдиган камида тўртта нуқта мавжуд.

2 – Тартиб аксиомалари

II_1. Агар Б нуқта А ва С нуқталар орасида ётса, у ҳолда А, Б, С бир тўғри чизиқдаги турли нуқталар бўлиб, Б нуқта С ва А нуқталар орасида ётади.



II_2. Агар А, Б бирор тўғри чизиқнинг нуқталари бўлса, шу тўғри чизиқда камида шундай битта С нуқта топиладики Б нуқта А билан С нинг орасида ётади.

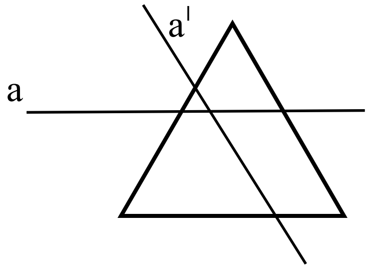


II_3. Тўғри чизиқдаги ҳар қандай учта нуқтадан биттадан ортиғи қолган иккитаси орасида ётмайди.

II_4. Паш аксиомалари.

АБС учбурчакнинг бирорта ҳам учидан ўтмайдиган ва унинг текислигида ётадиган тўғри чизиқ шу учбурчакнинг АБ томони билан умумий нуқтага эга

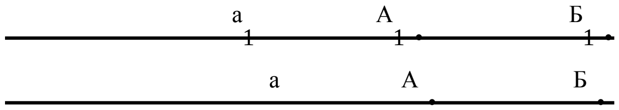
бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ ё БС кесма ёки АС кесма нуқтаси орқали ўтади.



3. Конгруентлик аксиомалари.

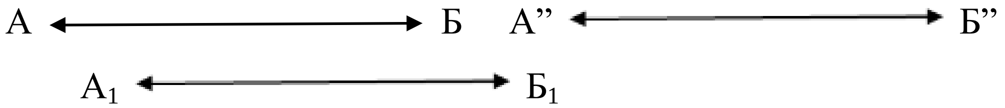
Бу группа аксиомалари кесма ва бурчакларнинг конгруентлик (тенглик) тушунчасини аниқлайди.

III_1. Икки А ва Б нуқта а тўғри чизиқнинг нуқтаси, A^I эса шу тоғри чизиқнинг ёки бошқа бирор a^I тўғри чизиқнинг нуқтаси бўлса, у ҳолда шу тўғри чизиқнинг A^I нуқтадан берилган томонида ётувчи фақат битта $Б^1$ нуқтани доимо топиш мумкинки, АБ кесма $A_1Б_1$ кесмага конгруент бўлади.

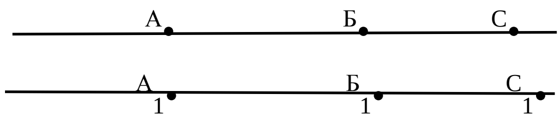


$[АБ] \equiv [A_1 Б_1]$

III_2. Икки кесма учинчи кесмага конгруент бўлса, у ҳолда улар бир – бирига конгруентдир яъни $A_1Б_1 \equiv АБ$, $A'' Б'' \equiv АБ$ бўлса, $A_1Б_1 \equiv A''Б''$



III_3. АБ ва БС кесмалар а тўғри чизиқнинг икки умумий нуқталарга эга бўлмаган кесмалари бўлсин, шу тўгри чизиқнинг ёки бошқа a_1 тўғри чизиқнинг $A_1Б_1$, $Б_1C_1$ кесмалари ҳам ички умумий нуқталарга эга бўлмай $АБ \equiv A_1Б_1$, $БС \equiv Б_1C_1$ бўлса, $АС \equiv A_1C_1$ бўлади.



$$\left.\begin{array}{l} АБ \equiv A_1Б_1 \\ БС \equiv Б_1C_1 \end{array}\right\} АС \equiv A_1C_1$$

III_4. П текисликда < (ҳ, к) бурчак ва шу текисликда ёки бирор Пъ текисликда аъ тўғри чизиқ берилган бўлиб, а, тўғри чизиқ билан аниқланган ярим текисликлардан бири ҳамда аъ тўғри чизиқдаги 0ъ учли ҳъ нур тайин бўлсин.

У ҳолда 0_1 нуқтадан чиқувчи ва аниқланган ярим текисликда ётган шундай ягона P_1 нур мавжудки, < (ҳ, к) бурчак < ($х_1$, $к_1$) бурчакка конгруент бўлади. Бурчаклар орасидаги бундай нисбат < (ҳ, к) = < ($х_1$, $к_1$) кўринишда белгиланади. Ҳар бир бурчак уз – ўзига конгруент деб олинади.

III_5. АБС ва $A_1Б_1C_1$ учбурчаклар учун $АБ \equiv A_1Б_1$, $БАС \equiv Б_1A_1C_1$ бўлса

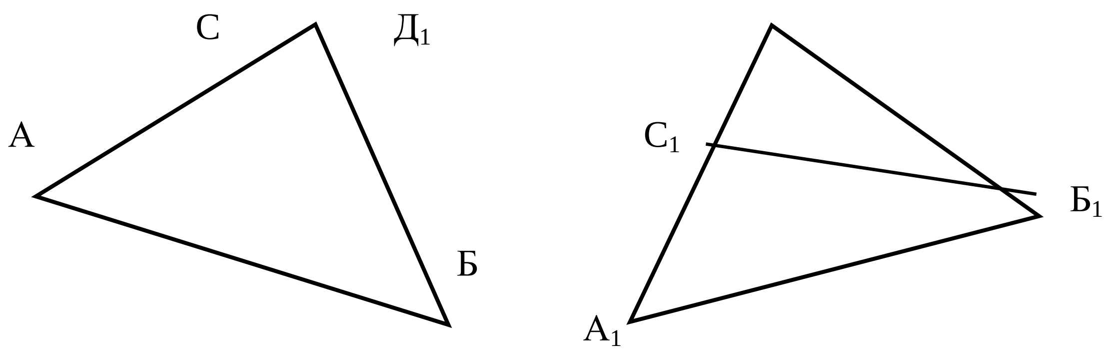
$АБС \equiv А_1Б_1С_1$ бўлади.

Таъриф. АБС ва $А_1Б_1С_1$ учбурчакларнинг учта бурчаклари ва учта томонлари мос равишда конгруент бўлса, бу учбурчаклар ўзаро конгруент дейилади ва Δ $АБС \equiv \Delta\, А_1Б_1С_1$ кўринишда белгилнади.

Конгруентлик аксиомалари ёрдамида учбурчакнинг тенглик аломатларини исботлаш мимкин.

Теорема. АБС ва $А_1Б_1С_1$ учбурчакларда $АБ \equiv А_1Б_1$, $<АБС \equiv <А_1Б_1С_1$, $<БАС \equiv < Б_1А_1С_1$ бўлса, $\Delta АБС \equiv \Delta\, А_1Б_1С_1$ бўлади.

Исбот. Аввал АС ва $А_1С_1$ томонларнинг ўзаро конгруентлигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $АС \equiv А_1С_1$ бўлсин.



III. га асосан $А_1С_1$ нурда шундай $Д_1$ нуқта мавжудки. $АС \equiv А_1Б_1$ бўлади. Бу вақтда юқоридаги теоремага асосан $\Delta АБС \equiv \Delta\ А_1Б_1Д_1$ бўлиш, АБС $\equiv А_1Б_1Д_1$ бўлади. Лекин шартга кўра АБС $\equiv А_1Б_1С_1$.

Бу эса III аксиомага зид. Демак, АС $\equiv А_1С_1$ бўлади. У ҳолда юқоридаги теоремага асосан $\Delta АБС \equiv \Delta\ А_1Б_1С_1$.

4. Узлуксизлик аксиомалари.

Бу аксиоманинг моҳияти шундан иборатки, у тўғри чизиқ нуқталари тўплами билан барча ҳақиқий сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатишга имкон беради.

IV. АБ кесманинг барча нуқталари шу кесма учлари билан биргаликда қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган қилиб икки синфга ажратилган бўлиб:

а) АБ кесманинг ҳар бир нуқтаси фақат битта синфга тегишли бўлиб, А нуқта биринчи синфга, Б нуқта эса иккинчи синфга тегишли бўлсин, бу синфлар бўш бўлмасин;

б) Биринчи синфнинг А дан фарқли ҳар бир нуқтаси А билан иккинчи синфнинг ихтиёрий нуқтаси орасида ёцин. У ҳолда АБ кесмада шундай С нуқта топиладики, А билан С орасидаги барча нуқталар биринчи синфга, С билан Б орасидаги барча нуқталар иккинчи синфга тегишли бўлиб, С нуқтанинг ўзи биринчи ёки иккинчи синфга тегишли бўлади. С нуқта эса АБ кесма нуқталарини икки синфга ажратувчи (кесадиган) нуқта деб аталади.

5 – Паралеллик аксиомалари.

Теорема: Тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида битта тўғри чизиқ ўтади.

Юқорида абсолют геометриянинг бу теоремасига эътибор қилсак, унда тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида битта тўғри чизиқнинг ўтиши таъкидланиб, бироқ шундай тўғри чизиқнинг ягоналиги ҳақида ҳукм чиқарилмаган. Бундай тўғри чизиқнинг ягоналиги ёки ягона эмаслиги тўғрисида қўшимча талабнинг қўйилишига қараб Евклид геометрияси ёки Лобачевский геометрияси тўғрисидаги таълимотни ҳосил қиламиз. I- IV группа аксиомаларига суянган геометрия бу икки геометриянинг умумий қисмидир.Евклид геометриясида параллеллик аксиомаси қуйидагича ифодаланади.

В. Тўғри чизиқ ташқарисидаги нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган тўғри чизиқ биттадан ортиқ эмас.

Юқоридаги 19 та аксиома абсолют геометрияни ташкил этади.

1.4. Вейл аксиомалари системаси.

1916 йилда немис математиги Герман Вейл (1885- 1955) томонидан таклиф қилинган аксиоматика фанда векторли аксиоматика деб юритилиб, Гилберт аксиомалари системасига нисбатан соддалиги билан фарқ қилади, бундан ташқари бу аксиоматика ҳозирги замон математикасини талай билимлари билан узвий боғланганлиги билан ажралиб туради.

Бу системада асосий тушунчалар сифатида “ВЭКТОР” ва (НУҚТА) қабул қилинган.

Векторлар ва нуқталарни бир – бири билан боғловчи муносабатлар “векторларни қўшиш”, “векторларни сонга кўпайтириш”, “векторларни скаляр кўпайтириш”, “векторларни нуқтадан бошлаб қўйиш” дир.

1. Векторларни қўшиш аксиомалари исталган икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторга уларнинг йиғиндиси деб аталадиган $\vec{a}+\vec{b}$ вектор мос келтирилиб, бу амал хоссалари ушбу аксиомаларда ифодаланади:

$I_{1.}$ Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор учун $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ тенглик бажарилади.

I_2. Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ векторлар учун $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ тенглик бажарилади.

I_3. Нол вектор деб аталган $\vec{0}$ вектор мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

I_4. Ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун шундай $\vec{a}^{-1}$ вектор мавжудки, унинг учун $\vec{a}+\vec{a}^{-1}=\vec{0}$

2.Векторни сонга кўпайтириш амаллари исталган $\vec{a}$ вектор ва исталган ҳақиқий к сонга уларнинг кўпайтмаси деб аталадиган к$\vec{a}$ вектор мос келтириб, бу амал хоссалари ушбу аксиомаларда ифодаланилади:

II_1. Ихтиёрий $\vec{a},\vec{b}$ векторлар ва к ҳақиқий сон учун к$(\vec{a}+\vec{b})$= к$\vec{a}$+к$\vec{b}$ тенглик бажарилади.

II_2. Ихтиёрий к, т ҳақиқий сонлар ва ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун (к+т)$\vec{a}$=к$\vec{a}$+т$\vec{a}$ бўлсин, яъни векторни сонга кўпайтириш муносабати ҳақиқий сонларни қўшиш амалига нисбатан дистрибутиве қонунига бўйсунишини талаб қилинади.

II_3. Ихтиёрий к, т ҳақиқий сонлар ва ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун к(т$\vec{a}$)= (кт)$\vec{a}$ тенглик бажарилади.

II_4. Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун 1* $\vec{a}=\vec{a}$

Бу икки группа аксиомалари ёрдамида векторларнинг чизиқли комбинацияси, чизиқли эркинлиги, чизиқли боғлиқлиги ва шу каби тушунчаларни киритиш мумкин.

3.Ўлчов аксиомалари.

III_1. Фазода учта чизиқли эркин вектор мавжуд.

III_2. Фазодаги ҳар қандай тўртта вектор чизиқли боғликдир.

4.Векторларни скаляр кўпайтириш аксиомалари.

IV_1. Ихтиёрий икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор учун $\vec{a}*\vec{b}=\vec{b}*\vec{a}$

IV_2. Ихтиёрий учта $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ вектор учун $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=$

$$=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$$

IV_3. Ихтиёрий $\vec{a},\vec{b}$ вектор ва ҳақиқий k сон учун

$(k\vec{a}\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$

IV_4. Ихтиёрий $\overrightarrow{a}$вектор учун $\overrightarrow{a} * \vec{a} \geq 0$

5. Векторни нуқтадан бошлаб қўйиш аксиомалари.

V_1. Ихтиёрий вектор ва ҳар қандай М нуқта учун ягона шундай Н нуқта мавжудки, унинг учун $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$

V_2. Ихтиёрий А,Б,С нуқталар учун $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

1.5 Чизиқли акслантиришлар

Барча алгебраик структуралар (тузилиши)да ўзига хос акслантириш тури мавжуд. Берилган акслантиришни гомоморфизм деб аталади. Масалан, ъалқалар назарйсида биз ъалқали гомоморфизмлар билан ишлаймиз, группалар назарясида биз группавой гомоморфизмлар билан ишлаймиз, ва ъоказо. Гомоморфизм сўзи алгебранинг хамма йўналишларида қўлланилади, лекин, бу атама хеч қачон чизиқли алгебрада ишлатилмаган. Бу алгебрада **чизиқли акслантириш** атамасида фойдаланамиз.

5.1.1. Таориф. *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин. Барча* $x, y \in A,\ \alpha \in F$ *лар учун* $f : A \to V$ *вектор фазода чизиқли акслантириш ёки гомоморфизм дейилади, агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ ва } f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Инектив чизиқли акслантириш –мономорфизм, суректив чизиқли акслантириш – эпиморфизм ва биектив чизиқли акслантириш – изоморфизм деб аталади.

Айтайлик, $\forall u, v \in V$ ва хақиқий $x, y \in A$ лар учун $u = f(x),\quad v = f(y)$ ўринли бўлсин. $f : A \to V$ акслантириш аниқланган бўлиб

$$f^{-1}(u+v) = f^{-1}(f(x) + f(y)) = f^{-1}(f(x+y)) = x + y = f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$$

ва

$$f^{-1}(\alpha u)=f^{-1}(\alpha f(x))=f^{-1}(f(\alpha x))=\alpha x=\alpha f^{-1}(u)$$

шартлар ўринли бўлса, бу акслантириш изоморфизм деб аталади. 1.3.5 таорифга асосан $f^{-1}:V\to A$ тескари алмаштириш хам мавжуд. Шунингдек, юқоридаги шартларга кўра $f^{-1}:V\to A$ тескари акслантириш хам изоморфизмдир.

5.1.2. Тариф. *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин. А ва В изоморф дейилади, агар ўзаро бир қийматли изоморфизм мавжуд бўлса ва уни қуйидагича ёзиш мумкин:*

$A\cong_F V$ *ёки* $A\cong V$

$\varepsilon_A:A\to A$ *айний акслантириш изоморфизмдир. Таорифга асосан барча* $a\in A$ *лар учун* $v(a)=0_V$ *ва у чузиқлидир, шунингдек* $v:A\to V$ *акслантириш нол акслантириш ъисобланади.*

$\alpha\in F$ бўлсин. $h_\alpha:A\to A$ акслантириш таорифга асосан барча $x\in A$ лар учун чизиқли ва у гомотетй (ўхшаш) деб аталади.

Бундан ташқари $f:A\to V$ ва $g:V\to W$ лар чизиқли акслантириш бўлса, уларнинг кўпайтмаси $g\circ f$ ъам чизиқли акслантириш ташкил этишини кўришимиз мумкин.

5.1.3. Теорема. *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин ва* $f:A\to V$ *акслантириш чизиқли акслантиришни ташкил эцин. У ъолда қуйидаги хоссаларга эга бўламиз:*

1) $f(0_A)=0_V$.

2) $\forall x\in A$ *учун* $f(-x)=-f(x)$.

3) $\forall x,y\in A$ *лар учун* $f(x-y)=f(x)-f(y)$.

4) $\forall x_1,\dots,x_n\in A$ *ва* $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$ *лар учун* $f(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n)=\alpha_1f(x_1)+\dots+\alpha_nf(x_n)$

5) агар Б Ага қисм фазо бўлса, унинг образи $f(B)$ *В да қисм фазо ташкил* *этади; хусусан,* $f\left(A\right)=\operatorname{Im} f$ *В га қисм фазо бўлади.*

6) Агар У Вга қисм фазо бўлса, унинг прообрази $f^{-1}\left(U\right)$ *В да қисм фазо ташкил этади; хусусан,* $Kerf=\{x\in A\left|f\left(x\right)=0_V\right\}=f^{-1}\left(\{0_V\}\right)$ *А га қисм фазо бўлади.*

7) Агар М А да қисм тўплам ташкил эца, у ъолда $Le\left(f\left(M\right)\right)=f\left(Le\left(M\right)\right)$

Исбот.

1) Ъар бир $x\in A$ учун $x+0_A=x$ ўринли. Шунга кўра

$f\left(x\right)+f\left(0_A\right)=f\left(x+0_A\right)=f\left(x\right)$

$f\left(x\right)$ В да қўшма қарама–қаршиликка эга. Юқоридаги қонуниятга асосан:

$0_V=-f\left(x\right)+f\left(x\right)=-f\left(x\right)+f\left(x\right)+f\left(0_A\right)=0_V+f\left(0_A\right)=f\left(0_A\right)$

га эга бўламиз.

2) $x+\left(-x\right)=0_A$, демак

$$0_V=f\left(0_A\right)=f\left(x+\left(-x\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(-x\right)$$

бундан $f\left(-x\right)$ $f\left(x\right)$ га ўзаро тескаридир.

3) $f\left(x-y\right)=f\left(x+\left(-y\right)\right)=f\left(x\right)+f\left(-y\right)=f\left(x\right)+\left(-f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right)$

4) н учун индуксиядан фойдаланамиз. н=2 учун

$f\left(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\right)=f\left(\alpha_1x_1\right)+f\left(\alpha_2x_2\right)=\alpha_1f\left(x_1\right)+\alpha_2f\left(x_2\right).$

Фараз қилайлик,

$$f\left(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_{n-1}x_{n-1}\right)=\alpha_1f\left(x_1\right)+\ldots+\alpha_{n-1}f\left(x_{n-1}\right)$$

исботланган.

Бундан,

$$\begin{aligned}f\left(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n\right)&=f\left(\left(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_{n-1}x_{n-1}\right)+\alpha_nx_n\right)\\&=f\left(\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_{n-1}x_{n-1}\right)+f\left(\alpha_nx_n\right)\\&=\alpha_1f\left(x_1\right)+\ldots+\alpha_{n-1}f\left(x_{n-1}\right)+\alpha_nf\left(x_n\right)\end{aligned}$$

ни ъосил қилишимиз мумкин.

5) $x, y \in B,\ \alpha \in F,\ u = f(x)$ ва $v = f(y)$ бўлсин, 4.1.7 теоремага асосан $x - y,\ \alpha x \in B$, бундан

$u - v = f(x) - f(y) = f(x - y) \in f(B)$ ва $\alpha u = \alpha f(x) = f(\alpha, x) \in f(B)$

Шундай қилиб, 4.1.7 теоремага кўра $f(B)$ В га қисм фазо бўлади.

6) $x, y \in f^{-1}(U)$, $\alpha \in F$ ва $f(x), f(y) \in U$ бўлсин.

$f(x) - f(y) = f(x - y) \in U$ ва $\alpha f(x) = f(\alpha x) \in U$ га кўра У Вга қисм фазо бўлади.

4.1.7 теоремага асосан $f^{-1}(U)$ А га қисм фазо бўлади.

7) $U \in Le(f(M))$ бўлсин. 4.2.3 теоремага кўра $\omega_1 \in f(M)$ ъақиқий элементлар учун $u = \alpha_1\omega_1 + \ldots + \alpha_n\omega_n$ кўринишда бўлади. $y_1, \ldots, y_n \in M,\ \omega_1 = f(y_1), \ldots, \omega_n = f(y_n)$.

Бундан кўринадики,

$u = \alpha_1 f(y_1) + \ldots + \alpha_n f(y_n) = f(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n) \in f(Le(M))$.

Мантиқан $Le(f(M)) \le f(Le(M))$ бўлсин. Аргументларига мурожат қиладиган бўлсак,

$Le(f(M)) = f(Le(M))$ ни исботлашга эришамиз.

Қисм фазо $Kerf$ ф–чизиқли акслантиришда **ядро** деб аталади.

5.1.4 Теорема. ***(мономорфизм теоремаси)*** *. Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин ва $f : A \to V$ акслантириш чизиқли акслантиришни ташкил эцин. $Kerf = \{0_A\}$ ва ф мономорфизм. Шунингдек, ф мономорфизм бўлса, $A \cong \operatorname{Im} f$ бўлади.*

Исбот. Ъақиқатдан ъам, агар *ф* мономорфизм бўлса, $x \ne 0_A$ дан $f(x) \ne f(0_A) = 0_V$ эканлиги келиб чиқади. х А да нол бўлмаган элемент, демак, $Kerf = \{0_A\}$.

Айтайлик, $Kerf = \{0_A\}$ ва $x, y \in A$ бўлсин, бундан $f(x) = f(y)$

еканлиги маолум бўлади ва $f(x-y)=f(x)-f(y)=0_V$, $x-y\in Kerf$. Бундан келиб чиқадики $x-y=0_A\Rightarrow x=y$. Бу исботдан $ф$ инектив ва мономорфизмдир. Ниъоят, $ф$ мономорфизм бўлса, $A\cong\operatorname{Im} f$ бўлади.

5.1.5.Натижа. *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин ва* $f:A\rightarrow V$ *мономорфизм бўлсин. Агар М А да чизиқли эркли қисм тўплам бўлса,* $f(M)$ *В да чизиқли эркли қисм тўлам ташкил этади.*

Исбот. Айтайлик, S $f(M)$га финит қисм тўплам бўлсин. Р М даги қисм тўплам учун $S=f(R)$бўлади. $f(M)$ ни чизиқли эркли эканини кўрамиз, $R=\{y_1,...,y_n\}$ ва $\alpha_1,...,\alpha_n\in F$ эканлигидан $\alpha_1 f(y_1)+...+\alpha_n f(y_n)=0_V$ келиб чиқади. 5.1.3. теоремага кўра

$$0_V=\alpha_1 f(y_1)+...+\alpha_n f(y_n)=f(\alpha_1 y_1+...+\alpha_n y_n),\ \alpha_1 y_1+...+\alpha_n y_n\in Kerf$$

5.1.4 теоремага кўра $Kerf=\{0_A\}$ бўлади, бундан $\alpha_1 y_1+...+\alpha_n y_n=0_A$ келиб чиқади. 4.2.7 теоремага кўра Р чизиқли эркли қисм тўплам ва шунинг учун $\alpha_1=...=\alpha_n=0_F$ бўлади. 4.2.7 теоремадан фойдаланиб С ни чизиқли эркли эканлигини ва $f(M)$ ни ъам чизиқли эркли эканини кўрамиз.

5.1.6. Натижа. *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин ва* $f:A\rightarrow V$ *мономорфизм бўлсин. У ъолда А, В ни финит ўлчамларидан* $\dim_F(A)\le\dim_F(V)$ *келиб чиқади.*

Исбот. Айтайлик Х А да финит базис ташликил эцин. 5.1.5 натижага кўра $f(X)$ В да чизиқли эркли қисм тўплам ташкил этади. 5.1.3 теоремага асосан, $f(X)$ $\operatorname{Im} f$ учун ясовчи, демак, $f(X)$ $\operatorname{Im} f$ учун базис ташкил этади. 4.2.20 теоремадан, $\dim_F(\operatorname{Im} f)\le\dim_F(V)$ ва $ф$ инектив, $\dim_F(\operatorname{Im} f)=|f(x)|=|X|=\dim_F(A)$

5.1.7 Теорема. ***(Эпиморфизм теоремаси)*** *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин ва* $f:A\rightarrow V$ *эпиморфизм бўлсин. У* *ҳолда В фазо* $A/Kerf$ *фактор фазога изоморф бўлади.*

Исбот. қилинмади.\\

5.1.8 Натижа. *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин ва* $f: A \to V$ *эпиморфизм бўлсин. Агар А финит ўлчамга эга бўлса, у ҳолда В финит ўлчамли ва* $\dim_F(V) \le \dim_F(A)$ *бўлади.*

Исбот. Х А да базис ташкил қилсин. 5.1.3. теоремадан $f(X)$ В учун ясовчи. 4.2.13 хулосадан В фазо $f(X)$ базисни ўз ичига олади, бундан $\dim_F(V) \le |f(x)|$. Булардан $|f(x)| \le |X| = \dim_F(A)$еканлиги келиб чиқади, натижа исботланди.

5.1.9. Натижа. *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин ва* $f: A \to V$ *изоморфизм бўлсин. Агар А финит ўлчамга эга ва Х А да базис бўлсин. Ҳамда* $f(X)$ *В да базис ташкил эцин ва* $\dim_F(V) = \dim_F(A)$ *бўлсин.*

Исбот. 5.1.3 теоремадан $f(X)$ В учун ясовчи ва 5.1.5 **на тижадан** $f(X)$ В да чизиқли эркли қисм тўплам бўлсин. Бундан $f(X)$ В фазода базис ташкил этади. Демак,

$$\dim_F(V) = |f(x)| = |X| = \dim_F(A)$$

5.1.10. Теорема. (1– изоморфизм теоремаси) *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин ва* $f: A \to V$ *акслантириш чизиқли акслантириш бўлсин. Ҳамда* $A/Kerf \cong \operatorname{Im} f \le V$ *бўлади.*

Исбот. Хақиқатдан,\\\\\\ва 5.1.7 теоремадан $\operatorname{Im} f \cong A/Kerf$ кўринишдаги хулосага келамиз. Натижа: 5.1.3 теоремадан, $\operatorname{Im} f$ В га қисм фазо бўлади.

5.1.11. Натижа. *Айтайлик А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар ва* $f: A \to V$ *чизиқли акслантириш бўлсин. Агар* $\dim_F A$ *финит бўлса, у ҳолда* $\dim_F A = \dim_F(Kerf) + \dim_F(\operatorname{Im} f)$ *бўлади.*

Исбот. 5.1.1. теоремадан, $A/Kerf \cong \operatorname{Im} f$, 5.1.9 натижадан $\dim_F(A/Kerf) = \dim_F(\operatorname{Im} f)$ ни кўрамиз ва 4.4.4 теоремадан $\dim_F(A/Kerf) = \dim_F(A) - \dim_F(Kerf)$. Шундай қилиб, $\dim_F(A)$ $\dim_F(A) = \dim_F(Kerf) + \dim_F(\operatorname{Im} f)$ га тенг бўлади.

5.1.12. Теорема. *А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин. Фараз қилайлик* $\dim_F(A)$ *финит ва* $\{a_1,...,a_n\}$ *А да базис ташкил қилсин. Агар* $\{u_1,...,u_n\}$*лар В фазода ихтиёрий элемент бўлса, битта ва фақат битта* $f : A \to V$ *акслантириш мавжуд. Шунинг учун* $f(a_j) = u_j$ $(1 \le j \le n)$ *бўлади.*

Исбот. Айтайлик, x А нинг ихтиёрий элементи бўлсин. 4.2.16 теоремадан, $x = \sum_{1\le j\le n} \xi_i a_j$, $\xi_j \in F$ $(1 \le j \le n)$.

$f : A \to V$ акслантириш $f(x) = \sum_{1\le j\le n} \xi_i u_j$ орқали таорифланади. Агар $y \in A$ ва $y = \sum_{1\le j\le n} \eta_j a_j$ $\eta_j \in F$ $(1 \le j \le n)$ бўлса

$$x + y = \sum_{1\le j\le n} \xi_j a_j + \sum_{1\le j\le n} \eta_j a_j = \sum_{1\le j\le n} (\xi_j a_j + \eta_j a_j) = \sum_{1\le j\le n} (\xi_j + \eta_j) a_j .$$

4.2.16 теоремадан бу акслантириш ягона ва

$$f(x+y) = \sum_{1\le j\le n} (\xi_j + \eta_j) u_j = \sum_{1\le j\le n} (\xi_j u_j + \eta_j u_j) = \sum_{1\le j\le n} \xi_j u_j + \sum_{1\le j\le n} \eta_j u_j = f(x) + f(y)$$

Шунингдек, $\alpha \in F$ бўлса,

$$\alpha x = \alpha \left(\sum_{1\le j\le n} \xi_j a_j \right) = \sum_{1\le j\le n} \alpha(\xi_j a_j) = \sum_{1\le j\le n} (\alpha \xi_j) a_j$$

бўлади.

Сундай қилиб қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$f(\alpha x) = \sum_{1\le j\le n} (\alpha \xi_j) u_j = \sum_{1\le j\le n} \alpha(\xi_j u_j) = \alpha \left(\sum_{1\le j\le n} \xi_j u_j \right) = \alpha f(x).$$

Кўриниб турибдики ϕ акслантириш чизиқли. Шунингдек $g\left(a_j\right)=u_j \quad (1\le j\le n)$ хоссага кўра $g:A\to V$ акслантириш чизиқли акслантириш. $\forall x\in A$ учун $x=\sum_{1\le j\le n}\xi_j a_j$ ва

$$f(x)=\sum_{1\le j\le n}\xi_j f\left(a_j\right)=\sum_{1\le j\le n}\xi_j u_j=\sum_{1\le j\le n}\xi_j g\left(a_j\right)=g\left(\sum_{1\le j\le n}\xi_j a_j\right)=g(x)$$

ифодага эга бўламиз.

Шундай қилиб $f=g$ ифода ъосил бўлади.

5.1.13 Теорема. *А ва В лар Ф дан олинган вектор фазолар бўлсин. А ва В лар изоморфик, ўлчами фақат ва фақат* $\dim_F(A)=\dim_F(V)$ *гат энг.*

Исбот. Агар А ва В изоморфик бўлса, у ъолда 5.1.9 натижага кўра $\dim_F(A)=\dim_F(V)$ га тенг бўлади. Тескаридан фараз қилсак $\dim_F(A)=\dim_F(V)$ бўлсин. Айтайлик $\{a_1,\dots,a_n\}$ А да ва $\{v_1,\dots,v_n\}$ В да базис ташкил қилсин. Агар *x* А нинг ихтиёрий элементи бўлса, 4.2.16 теоремага кўра $x=\sum_{1\le j\le n}\xi_j a_j,\ \xi_j\in F \quad (1\le j\le n)$, 5.1.12 теорема шуни кўрсатадики $f:A\to V$ акслантириш $f(x)=\sum_{1\le j\le n}\xi_j v_j$ орқали таорифланганда **чизиқли** бўлади.

y Внинг ихтиёрий элементи бўлсин ва $u=\sum_{1\le j\le n}\eta_j v_j,\ \eta_j\in F \quad (1\le j\le n)$бўлади. $f(y)=u$ учун $y=\sum_{1\le j\le n}\eta_j a_j$ га тенг бўлади.

Бу эса *фни эпиморфизм* эканини кўрсатади.

5.1.14 Натижа. *Айтайлик А Ф финит ўлчамли фазодан олинган бўлсин. У ъолда* $n=\dim_F(A)$ *учун* $A\cong_F F^n$ *бўлади.*

$f\in Hom_F(A,V)$ ва $\alpha\in F$ бўлсин. $\alpha f:A\to V$ акслантириш $(\alpha f)(a)=\alpha f(a)$ орқали таорифланади, $\forall a\in A$. Агар $f,g\in Hom_F(A,V),\ \ \alpha,\beta\in F$ бўлса, у ъолда

$$(\alpha(f+g))(a)=\alpha((f+g)(a))=\alpha(f(a)+g(a))=\alpha f(a)+\alpha g(a)$$
$$=(\alpha f)(a)+(\alpha g)(a)=(\alpha f+\alpha g)(a)$$

бўлади, бундан ушбу натижа ъосил бўлади

$$\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$$

Шунингдек,

$$((\alpha+\beta)f)(a)=(\alpha+\beta)(f(a))=\alpha f(a)+\beta f(a)$$
$$=(\alpha f)(a)+(\beta f)(a)=(\alpha f+\beta f)(a)$$

ва $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$ келиб чиқади.

Ъамда,

$((\alpha\beta)f)(a)=(\alpha\beta)(f(a))=\alpha(\beta f(a))=\alpha(\beta f)(a)=(\alpha(\beta f))(a)$ ъосил бўлиб, бундан $(\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$ келиб чиқади.

Натижада қуйидаги ифода хосил бўлади:

$(ef)(a)=e(f(a))=f(a)$ ва $ef=f$

5.1.15 Таориф. *А Ф вектор фазосида берилган бўлсин.* $f:A\to A$ *акслантириш А да чизиқли акслантириш ёки чизиқли оператор деб аталади. Биз шунингдек ф ни А да э**ндоморфизм** деб атаймиз.*

$Hom_F(A,A)=End_F(A)$ каби ёзамиз ва $End_F(A)$ Ф да вектор фазо. $f,g,h\in End_F(A)$ ва $a\in A$ бўлсин. Қуйидагига эгамиз:

$$(f\circ(g+h))(a)=f((g+h)(a))=f(g(a)+h(a))=f(g(a))+f(h(a))$$
$$=(f\circ g)(a)+(f\circ h)(a)=(f\circ g+f\circ h)(a)$$

Бундан, $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$ келиб чиқади.

Ўхшашликдан биз $(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$ ни исботлай оламиз. 1.3.2 теоремадан кўпайтма акслантиришлар ассоциативдир, А чизиқли алмаштириш –мултипликатив айниятдир. Бундан, $\alpha(f\circ g)=(\alpha f)\circ g=f\circ(\alpha g)$, $f,g\in End_F(A)$, $\alpha\in F$ ифодани кўришимиз мумкин.

5.1.16. Тaoриф. *A Ф вектор фазодан олинган бўлсин.* $f : A \to F$ *чизиқли акслантириш A да чизиқли функционал деб аталади.* $Hom_F\left(A, F\right) = A^*$ *вектор фазо Ада қўшма фазо (ёки сопряженное) деб аталади.*

5.1.17. Теорема. *A Ф дан олинган финит–ўлчамли вектор фазо ва* $\dim_F\left(A\right) = n$ *бўлсин.* $\dim_F\left(A^*\right) = n$ *ва бундан A ва* A^* *лар изоморфикдир.*

Исбот. $\{a_1,...,a_n\}$ A да базис ташкил қилсин. x A нинг ихтиёрий элементи ва 4.2.16 теоремага асосан, $x = \sum_{1\le j\le n} \xi_j a_j$, $\xi_j \in F\ \left(1 \le j \le n\right)$. Биз $\rho_j : A \to F$ акслантиришни $\rho_j\left(x\right) = \xi_j$, $\left(1 \le j \le n\right)$ орқали топамиз. 5.1.12 теоремадан ρ_j ни чизиқли функционал эканини кўришимиз мумкин.

$\rho_1,...,\rho_n$ лар чизиқли эркли, $\gamma_1,...,\gamma_n$ лар F нинг элементи бундан $\sum_{1\le j\le n} \gamma_j \rho_j = v$ келиб чиқади. Сўнг

$$0_F = \left(\sum_{1\le j\le n} \gamma_j \rho_j\right)\left(a_k\right) = \sum_{1\le j\le n} \gamma_j \rho_j\left(a_k\right) = \gamma_k e = \gamma_k,\ \left(1 \le j \le n\right)$$

ва 4.2.7 теоремадан $\rho_1,...,\rho_n$ ларни чизиқли эркли эканини кўришимиз мумкин.

f ихтиёрий чизиқли эркли функционал бўлсин. Сўнг

$$f\left(x\right) = \sum_{1\le j\le n} \xi_j f\left(a_j\right) = \sum_{1\le j\le n} f\left(a_j\right)\rho_j\left(x\right) = \left(\sum_{1\le j\le n} f\left(a_j\right)\rho_j\right)\left(x\right),$$

бундан f қуйидагига тенг: $f = \sum_{1\le j\le n} f\left(a_j\right)\rho_j$. Бу ердан ъар бир чизиқли функционал $\rho_1,...,\rho_n$ да чизиқли комбинация ташкил этади, қисм тўплам $\{\rho_1,...,\rho_n\}$ A^* да базис ташкил қилишини кўрамиз. Ниъоят, $\dim_F\left(A^*\right) = n$ ва 5.1.13 теоремадан A ва A^* лар изоморфикдир.

Биз $\Psi_x : A^* \to F$ акслантиришни топамиз. $\forall x \in A$ учун $\Psi_x : A^* \to F$ ни $\Psi_x\left(f\right) = f\left(x\right)$, $f \in A^*$ орқали топамиз. Агар, $f, g \in A^*$ ва $\alpha \in F$ бўлса, у ъолда қуйидаги натижага эга бўламиз:

$$\Psi_x(f+g)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\Psi_x(f)+\Psi_x(g) \quad \text{ва}$$

$$\Psi_x(\alpha f)=(\alpha f)(x)=\alpha f(x)=\alpha\Psi_x(f),$$

бу эса ψ_x ни чизиқли эканини кўрсатади. Бундан $\Psi_x \in A^{**}$. Ψ_x ни ўрнига $\delta(x)=\Psi_x$ ни қўямиз, $x\in A$. Агар ъар бир $f\in A^*$учун $x,y\in A$ бўлса, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Psi_{x+y}(f)=f(x+y)=f(x)+f(y)=\Psi_x(f)+\Psi_y(f)=\left(\Psi_x+\Psi_y\right)(f),$$

Натижа $\Psi_{x+y}=\Psi_x+\Psi_y$ ни кўрсатади. Агар α Fни ихтиёрий элементи бўлса,

$$\Psi_{\alpha x}(f)=f(\alpha x)=\alpha f(x)=\alpha\Psi_x(f)=(\alpha\Psi_x)(f)$$

ъосил бўлади, бу эса $\Psi_{\alpha x}=\alpha\Psi_x$ ни кўрсатади. Юқоридагилардан қуйидагига эга бўламиз:

$$\delta(x+y)=\Psi_{x+y}=\Psi_x+\Psi_y=\delta(x)+\delta(y) \quad \text{ва}$$

$$\delta(\alpha x)=\Psi_{\alpha x}=\alpha\Psi_x=\delta(x).$$

Ушбу тенгламалар δ акслантиришни чизиқли эканини кўрсатади.

$\{a_1,...,a_n\}$ Aда базис ташкил қилсин, A^* нинг базиси $\{\rho_1,...,\rho_n\}$ $\{a_1,...,a_n\}$ га қўшма бўлсин ва A^{**} нинг базиси $\{P_1,...,P_n\}$ $\{\rho_1,...,\rho_n\}$ га қўшма . Бизда $1\le j\le n$ учун $\delta(a_j)=\Psi_{a_j}$тенглик мавжуд. f ихтиёрий функсионал бўлса, юқоридаги исботга келсак, $f=\sum_{1\le k\le n} f(a_k)\rho_k$. Шундай экан

$$\Psi_{a_j}(f)=\Psi_{a_j}\left(\sum_{1\le k\le n} f(a_k)\rho_k\right)=\sum_{1\le k\le n} f(a_k)\Psi_{a_j}(\rho_k)$$

$$=\sum_{1\le k\le n} f(a_k)\rho_k(a_j)=f(a_j)e=f(a_j)$$

Тарифга асосан, $P_j(f)=f(a_j)$, шунингдек, $\forall f\in A^*$ учун $\Psi_{a_j}(f)=P_j(f)$ ўринли. Шунингдек, $\Psi_{a_j}=P_j$ ва бунинг натижасида $1\le j\le n$ учун $\delta_{a_j}=P_j$ келиб чиқади. 5.1.13 теоремани исботидан δни *изоморфизм* деган хулосага келамиз.

5.1. Топшириқлар.

Қуйидаги топшириқларни исботи билан ёки тескари мисоллар ёрдамида тўғрилигини исботлашингиз зарур.

5.1.1. $f : R^3 \to R^2$ акслантириш $f(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha-\beta,\alpha+\gamma)$ орқали аниқланган бўлсин. Ушбу акслантириш чизиқли акслантириш бўладими?

5.1.2. $f : R^5 \to R^3$ акслантириш $f(\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu)=(\gamma\lambda,\alpha+\beta,\mu)$ орқали аниқланган бўлсин. Ушбу акслантириш чизиқли акслантириш бўладими?

5.1.3. $f : R^2 \to R^4$ акслантириш $f(\alpha,\beta)=(\alpha,0,\alpha+\beta,0)$ орқали аниқланган бўлсин. Ушбу акслантириш чизиқли акслантириш бўладими?

5.1.4. $f : R^4 \to R^3$ акслантириш $f(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(\alpha,\beta,\gamma+\lambda)$ орқали аниқланган бўлсин. Ушбу акслантириш чизиқли акслантириш бўладими? Агар шундай бўлса, $\operatorname{Im} f$ ва $Kerf$ ларни топинг.

5.1.5. $f : R^5 \to R^3$ акслантириш $f(\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu)=(0,\alpha+\beta,\mu)$ орқали аниқланган бўлсин. Ушбу акслантириш чизиқли акслантириш бўладими? Агар шундай бўлса, $\operatorname{Im} f$ ва $Kerf$ ларни топинг.

5.1.6. $A=R[X]$ барча ҳақиқий коефициентга эга кўпҳадли вектор фазо бўлсин ва $f : A \to A$ акслантириш $f(g(X))=g'(X)$ орқали аниқланган бўлсин [$g[X]$кўпҳаднинг ҳосиласи]. fни A вектор фазода чизиқли алмаштириш эканлигини исботланг. $\operatorname{Im} f$ ва $Kerf$ ларни топинг.

5.1.7. $A=R[X]$ барча ҳақиқий коефициентга эга кўпҳадли вектор фазо бўлсин ва $\phi : A \to A$ акслантириш $\varphi(g(X))=g'(X)$ орқали аниқланган [$g[X]$кўпҳаднинг ҳосиласи] ва $\psi : A \to A$ акслантириш $\varphi(g(X))=Xg(X)$ қоида орқали аниқланган бўлсин. $\phi\circ\psi^{10}-\psi^{10}\circ\phi$ ни топинг.

5.1.8. A F вестор фазодан олинган ва $f,g\in End_F(A)$ бўлсин.

$$\dim_F(Ker(f\circ g))\le\dim_F(Kerf)+\dim_F(Kerg)$$

ни исботланг.

5.1.9. A F вестор фазодан олинган ва $f, g \in End_F(A)$ бўлсин.

$$\dim_F(\operatorname{Im}(f+g)) \le \dim_F(\operatorname{Im} f) + \dim_F(\operatorname{Im} g)$$

ни исботланг.

5.1.10. A F вестор фазодан олинган ва $f \in End_F(A)$ бўлсин. $Kerf$ ва $\operatorname{Im} f$ қисм фазолар f га ўзаро инвариант бўладими?

5.1.11. A F вестор фазодан олинган , $f, g \in End_F(A)$ ва B $\operatorname{Im} f$ ни ўз ичига олган A га қисм фазо бўлсин. B f га ўзаро инвариант бўладими?

5.1.12. A F вестор фазодан олинган ва B A га қисм тўплам бўлсин. $B^* = \{ f \in A^* | f(x) = 0_F \ \forall x \in B \}$. B^* ни A^* га қисм фазо эканини исботланг. Агар B A га қисмфазо бўлса, у ъолда $\dim_F(B) + \dim_F(B^*) = \dim_F(A)$ ни исботланг.[1]

Назорат саволлари:

1. Математик структура ва унга доир мисоллар.
2. Аксиомалар системасига қўйиладиган асосий талаблар.
3. Гилберт аксиомалари системаси.
4. I – группа: Боғланиш (тегишлилик) аксиомалари. (8 та)
5. II – группа: Тартиб аксиомалари. (4 та)
6. III – группа: Когурентлик аксиомалари. (5 та)
7. IV – группа: Узлуксизлик аксиомалари. (1 та)
8. V – группа: Паралеллик аксиомалари. (1 та)
9. Ўлчов аксиомалари
10. Векторларни скаляр кўпайтириш аксиомалари.
11. Векторни нуқтадан бошлаб қўйиш аксиомалари
12. Векторларни қўшиш аксиомалари
13. Векторни сонга кўпайтириш

[1] Algebra and number theory 187-200

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

2. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

2-Мавзу: Геометрия асослари.

Режа:

1. Проектив текисликдаги тайин тўғри чизиқли геометрия.
2. Аффин геометриясининг проектив талқини.
3. Учта нуқтанинг оддий нисбати. Векторлар.

Таянч иборалар: Проектив текислик, Аффин геометрияси, Векторлар, Учта нуқтанинг оддий нисбати, Эвклид геометрияси, проектив схема

2.1. Проектив текисликдаги тайин тўғри чизиқли геометрия

Маълумки геометрияни группавий- назарий нуқтаий назардан қуриш учун фазога эга бўлишимиз керак, яъни Ω - элементлари нуқталар деб аталувчи тўплам ва бу тўпламнинг алмаштиришлар тўплами G берилган бўлсин. Ω фазода нуқталарнинг U тўплами берилган бўлсин. G группанинг U тўплам нуқталарини яна шу U тўплам нуқталарига ўтказувчи ихтиёрий алмаштириши U тўпламга нисбатан автоморф алмаштириш ёки автоморфизм дейилади. Автоморфизм U тўплам нуқталарини қўзғалмас қилиб қолдирмайди. Автоморфизмда U тўплам нуқталари ёки ўзига ёки шу тўпламнинг бошқа нуқтасига ўтади.

Теорема-1. Агар берилган геометриянинг Ω фазоси G алмаштиришлар группасига эга бўлиб, бунда U нуқталар тўплами берилган бўлса у ҳолда, U га нисбатан автоморф бўлган G группанинг алмаштиришлари тўплами G группанинг қисм группаси бўлади.

Бизга P_2 проектив текислик ва унда бирор тайин p^* тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу ҳолда проектив текисликни P_2^* орқали белгилаймиз ва p^* тўғри чизиқни бу текисликнинг абсолюти деймиз. Агар бу проектив текисликдаги ихтиёрий иккита тўғри чизиқлардан бирортаси ҳам абсолют билан устма-уст тушмасдан, аммо уларнинг кесишган нуқтаси абсолютга тегишли бўлса бу иккита тўғри чизиқлар яқинлашувчи дейилади.

Энди P_2^* текисликдаги аффин коллинеацияси тушунчасини киритамиз.

Таъриф. P_2^* текисликдаги аффин колинсация деб P_2 текисликни абсолютнинг нуқталарига нисбатан автоморф бўлган ихтиёрий проектив алмаштиришига айтилади.

Теорема-1 га кўра P_2^* текисликнинг барча аффин коллинеациялари тўплами проектив алмаштиришлар группасининг қисм группаси бўлади.

Теорема-2. P_2^* текислик абсолютида ётмайдиган ва ноколлинеар A_1B_1C ва $A_1^{'}B_1^{'}C^{'}$ нуқталар учликлари берилган бўлсин. У ҳолда A_1B_1C нуқталарни $A_1^{'}B_1^{'}C^{'}$ нуқталарга ўтказувчи битта ва фақат битта аффин коллинеация мавжуд бўлади.

Юқоридаги теоремадан чексиз кўп аффин коллинеациялар мавжудлиги келиб чиқади. Энди эса аффин гомология тушунчасини кўриб чиқамиз.

Таъриф. Агар аффин коллинеация айний бўлмасдан ва қўзғалмас нуқталар тўғри чизиқига эга бўлса уни аффин гомология дейилади.

Бошқача айтганда аффин гомология бу гомология бўладиган аффин коллинеация экан. Бу таърифдан кўринадики бир вақтда гиперболик (параболик) гомология ҳам бўлган аффин коллинеациялар аффин гиперболик (параболик) гомология дейилади.

Аффин гомологиянинг турларини кўриб чиқишдан олдин қуйидаги леммани келтирамиз.

Лемма. Агар берилган аффин гомологиянинг ўқи P_2^* текисликнинг абсолюти билан устма-уст тушмаса у ҳолда аффин гомологиянинг маркази абсолютга тегишли бўлади.

Исбот. ℓ ва L лар берилган гомологиянинг ўқи ва маркази бўлсин. p^* абсолютда ётувчи ва гомология ўқида ётмайдиган M нуқтани оламиз ва бу нуқтанинг $M^{'}$ образини қараймиз. Агар $M^{'} = M$ бўлса у ҳолда берилган гомология гиперболик бўлади ва

$$L = M = M^{'} \ .$$

Шунинг учун $L \in p^*$ бўлади.

Агар $M^{'} \neq M$ бўлса гомология маркази L нинг аниқланишига кўра L марказ $MM^{'}$ тўғри чизиқда ётади.
Биз

$$M \in p^*, \qquad M^{'} \in p^* \Rightarrow L \in p^*$$

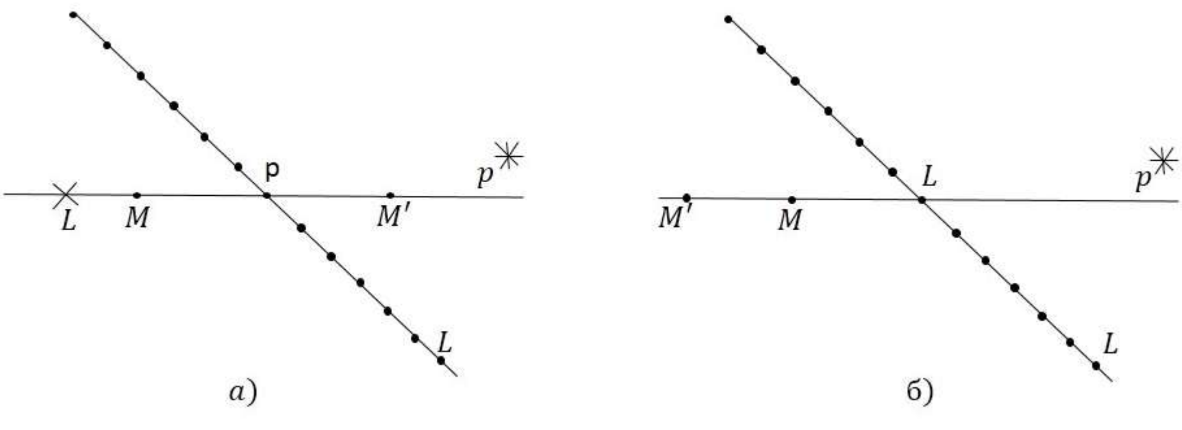
ларга эга бўлдик.

Аффин гомологияларнинг классификациясини гомология маркази L ва ўқи ℓ нинг p^* абсолютга нисбатан жойлашишига қараб олиб борамиз.

а) Аффин гиперболик гомология.

Бу гомология ўқи абсолют билан устма-уст тушмайди. Бу ҳолда

$$L \notin \ell, \quad L \in p^* \quad \text{ва} \quad C \neq p^*$$



Юқоридаги қисмлаштиришнинг қўзғалмас нуқтаси ℓ тўғри чизиқнинг барча нуқталари ва L нуқтаси бўлади.

b) Аффин пароболик гомология. Бу гомология ўқи абсолют билан устма-уст тушмайди.

Бунда

$$L = \ell \cap p^* \quad \text{ва} \quad \ell \neq p^*.$$

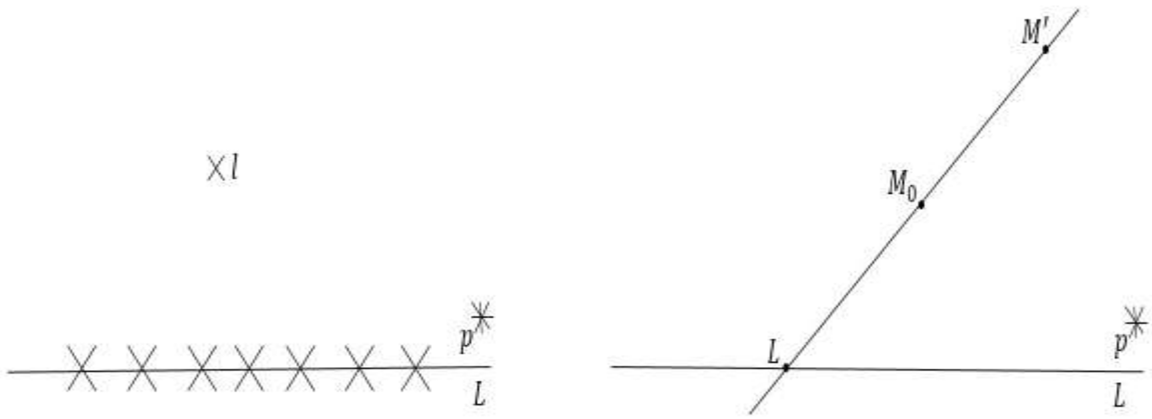
ℓ тўғри чизиқнинг барча нуқталари ва абсолютнинг битта нуқтаси аффин гомология маркази қўзғалмас нуқталар бўлади.

с) Ўқи абсолют билан устма-уст тушадиган аффин гиперболик гомология. Бу ҳолда

$$L \notin p^*, \quad \ell = p^*.$$

Абсолютнинг барча нуқталари ва $L \notin \ell$ нуқта қўзғалмас бўлади.

д) Ўқи абсолют билан устма-уст тушадиган аффин параболик гомология.



а) б)

Бу ҳолда қўзғалмас нуқталар абсолютнинг барча нуқталари бўлади.

Энди кўчиришлар аффин коллинеациясини кўриб чиқамиз.

Таъриф. Агар P_2^* текисликнинг проектив алмаштиришида барча қўзғалмас нуқталари абсолютнинг барча нуқталари билан устма-уст тушса ёки P_2^* текисликнинг нуқталари билан устма-уст тушса бунда проектив алмаштириш кўчиришлар аффин коллинеацияси дейилади.

Юқоридаги таърифдан шундай хулоса келиб чиқади: кўчиришларнинг аффин коллинеацияси ёки ўқи абсолют билан устма-уст тушадиган аффин параболик гомология ёки айний алмаштириш бўлади.

Теорема. Агар P_2^* текисликда абсолютда ётмайдиган иккита M ва M' нуқталар берилган бўлса у ҳолда M нуқтани M' нуқтага ўтказадиган фақат ва фақат битта кўчиришлар аффин коллинеatsiяси мавжуд бўлади.

Теорема. P_2^* текисликнинг барча кўчиришлар аффин коллинеациялари тўплами группа ҳосил қилади.

2.2. Аффин геометриясининг проектив талқини

Геометрия қурилишининг группавий схемасига кўра аффин геометриясининг проектив алмаштиришлар группасининг бирор қисм группасининг геометрияси сифатида қараш мумкин. Бунинг учун икки ўлчовли аффин геометриясининг проектив текисликдаги моделини қурамиз ва аффин геометриясининг барча тушунчалари бу текисликда проектив геометрия терминларида табиий равишда талқин қилинишини кўрамиз.

P_2^* − тайин p^* абсолютга эга бўлган проектив текислик бўлсин. Қуйидагича белгилашлар киритамиз. P_2^* текисликнинг p^* тўғри чизиқда ётмайдиган ихтиёрий нуқтасини аффин нуқтаси деб атаймиз, p^* тўғри чизиқдан фарқли ихтиёрий тўғри чизиқни аффин тўғри чизиқ деймиз.

Барча аффин нуқталар тўпламини аффин текислик деймиз ва уни $\overline{P_2^*}$ орқали белгилаймиз Шундай қилиб $\overline{P_2^*}$ аффин текислиги бу P_2^* текисликнинг p^* абсолютга тегишли бўлмаган нуқталари тўплами экан. P_2^* текисликнинг абсолютини хосмас тўғри чизиқ деймиз бу абсолют нуқталарини эса хосмас нуқталар деймиз. “ Нуқта ва тўғри чизиқ ” деганда аффин нуқтасини ва аффин тўғри чизиқни тушунамиз. Аффин нуқта ва аффин тўғри чизиқларни проектив нуқта ва тўғри чизиқлар каби белгилаймиз, яъни

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots\ldots, \ell, \mathrm{m}, \ldots\ldots, (\ell), (m).$$

P_2^* текисликнинг хосмас нуқталари аффин нуқталардан ажратиш учун хосмас нуқталарни $\mathrm{A}^*, B^*, \ldots$ орқали белгилаймиз. $\overline{P}_2^*$ текисликнинг аффин a тўғри чизиғи P_2^* текисликнинг проектив a тўғри чизиғи билан устма-уст тушади. Аммо $\overline{P}_2^*$ текисликнинг (a) аффин тўғри чизиғи P_2^* текисликнинг (a) тўғри чизиғи билан устма-уст тушмайди. Чунки агар

$$A^* = a \cap p^*$$

бўлса, у ҳолда A^* нуқта проектив (a) тўғри чизиқнинг нуқтаси бўлиб аффин (a) тўғри чизиқнинг нуқтаси бўлмайди.

Группавий нуқтаий назарга кўра бирор геометрияни аниқлаш учун фазодан ташқари бу фазонинг алмаштиришлари группасига эга бўлишимиз керак. Бу группани аниқлаш учун P_2^* текисликнинг аффин коллинеацияларидан фойдаланамиз.

Юқорида киритилган белгилашларга асосан P_2^* текисликнинг ихтиёрий π аффин коллинеацияси аффин нуқталарни аффин нуқталарга, хосмас нуқталарни хосмас нуқталарга ўтказади. Бундан ташқари P_2^* текисликнинг ҳар бир аффин коллинеацияси $\overline{P}_2^*$ текислик аффин нуқталарини бирор алмаштиришини ҳосил қилади бу алмаштиришни $\overline{P}_2^*$ текисликнинг аффин алмаштиришлари деймиз. Демак $\overline{P}_2^*$ текисликнинг аффин алмаштириши бу P_2^* текисликдаги аффин коллинеация ҳосил қиладиган $\overline{P}_2^*$ текисликнинг ихтиёрий алмаштиришидир.

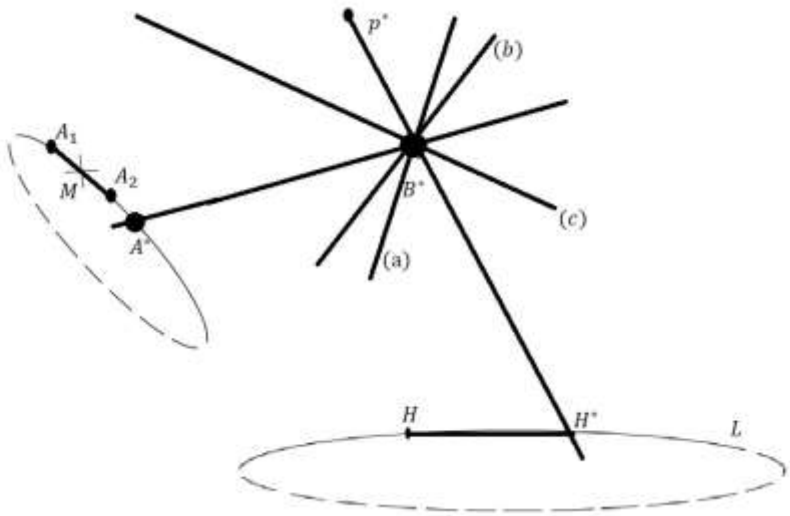
Аффин алмаштиришларни $\overline{\pi}$, $\overline{\partial}, \ldots..,$ лар орқали белгилаймиз, уларга мос аффин коллинеацияларни эса худди юқоридаги ҳарфлар билан аммо устида чизиқчасиз белгилаймиз.

P_2^* текисликнинг τ айний алмаштириши $\overline{P}_2^*$ текисликнинг $\overline{\tau}$ айний алмаштиришини ҳосил қилади. Агар π_1 ва π_2 лар $\overline{\pi_1}$ ва $\overline{\pi_2}$ алмаштиришларни ҳосил қилса $\pi_2\,\pi_1$ алмаштириш $\overline{\pi_2\pi_1}$ алмаштиришни ҳосил қилади, яъни

$$\overline{\pi_2\pi_1} = \overline{\pi_2}\,\overline{\pi_1}\,.$$

Равшанки барча аффин коллинеациялар тўплами. Демак, $\overline{P}_2^*$ текисликнинг ҳам барча аффин алмаштиришлари ҳам группа ҳосил қилади. Бу группа геометрияси аффин геометрия дейилади.

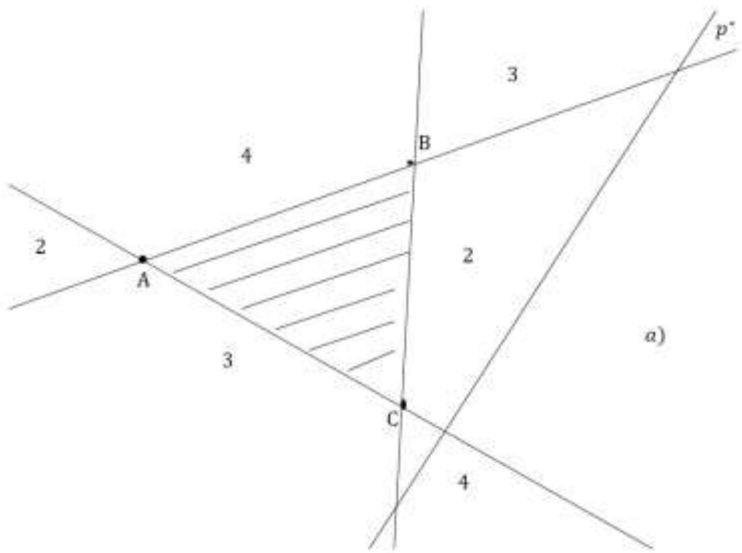
$\overline{P}_2^*$ текисликнинг иккита яқинлашувчи тўғри чизиғи аффин текисликнинг параллел тўғри чизиқлари дейилади. Бошқача айтганда қуйидаги чизмадаги (a) ва (b) тўғри чизиқлар агарда $\overline{P}_2^*$ текисликда умумий нуқтага эга бўлса улар аффин текисликдаги параллел тўғри чизиқлар дейилади.



Равшанки бу тушунчалар геометрик тушунчалар ҳисобланади, чунки улар барча аффин алмаштиришларга нисбатан инвариантдир. Агар (a) тўғри чизиқ (b) тўғри чизиқга параллел, (b) тўғри чизиқ эса (c) тўғри чизиқга параллел бўлса ва $(a)\neq(c)$ бўлса у ҳолда (a) тўғри чизиқ (c) тўғри чизиқга параллел бўлади. Бир-

бирига параллел барча P_2^* даги тўғри чизиқлар умумий хосмас нуқтага эга. Юқоридаги расмда (a), (b) ва (c) тўғри чизиқлар учун бундай нуқта B^* бўлади.

a проектив тўғри чизиқнинг иккита турлича A_1 ва A_2 нуқталари охирлари бу нуқталарда бўлган иккита кесма ҳосил қилади. Аммо бу нуқталар аффин нуқталар эди. Шунинг учун бу нуқталар орқали аниқланадиган кесмалар тенг кучли эмас, чунки уларнинг бирига хосмас A^* нуқта тегишли иккинчисига эса тегишли эмас. A_1A_2 / A^* кесма $\overline{P}_2^*$ текисликдаги аффин кесма дейилади, унинг охирлари A_1 ва A_2 нуқталардан иборат.



Юқоридаги чизмада бу кесма ажратиб кўрсатилган. $A_1 A_2$ тўғри чизиқнинг

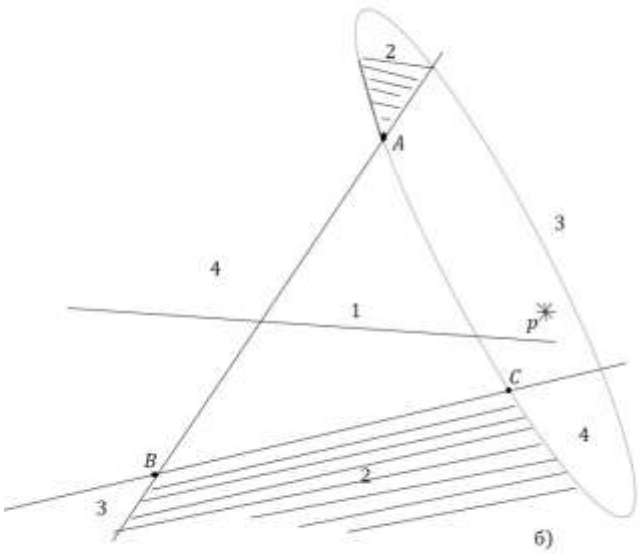
$$A_1A_2 \div MA^*$$

шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқтаси A_1 ва A_2 нуқталар орасида ётувчи нуқта дейилади.

Энди нур тушунчасини киритамиз. ℓ – проектив тўғри чизиқ бўлсин ва абсолютдан фарқли. N эса бу тўғри чизиқнинг аффин нуқтаси бўлсин. Бу тўғри чизиқда N^* хосмас нуқта оламиз ва N $N^*/1$ ва N $N^*/2$ проектив кесмаларни оламиз. $\overline{P}_2^*$ текисликдаги N^*

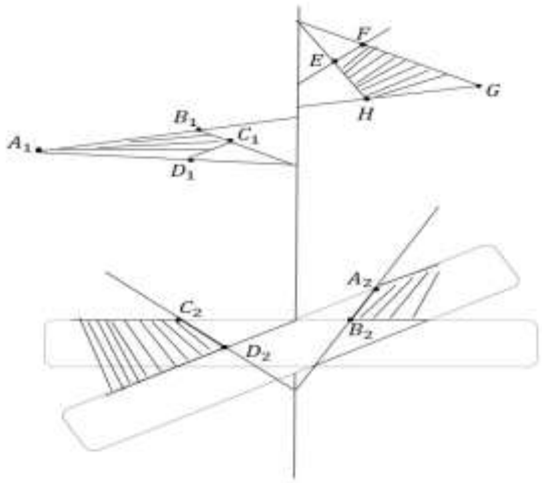
нуқта кирмайдиган ҳар бир кесма N нуқтадан чиқувчи нур дейилади. Берилган нуқтадан иккита нур чиқади. Битта нуқтадан чиқувчи ва бир тўғри чизиқда ётмайдиган иккита нурга бурчак дейилади.

Кесманинг одатдаги аниқланишига эга бўлганимиздан кейин синиқ чизиқ ва кўпбурчакларни аниқлаш мумкин. Бу тушунчалар аффин тушунчалар ҳисобланади. Бунга ўхшаш тушунчалар проектив текисликда мавжуд эмас. Масалан, аффин текисликда учбурчаклар ва проектив текисликдаги уч учлик тушунчалари бир -биридан фарқ қилади. Уч учликнинг томонлари тўғри чизиқлар учбурчак томонлари кесмалар бўлади. Янада чуқуррок фарқлари қуйидагича бўлади:



б)

Уч учликнинг томонлари проектив текисликнинг нуқталарини тўртта соҳага ажратади. Бу соҳалар расмда 1, 2, 3, 4 рақамлари билан белгиланган. Соҳалардан ҳеч қайсисини қолганларидан одатдагидек ажратиб бўлмайди, чунки улар бир-бирига проектив эквивалентдир. Шунинг учун уч учлик учун проектив текисликда ички соҳа тушунчасини киритиб бўлмайди. Аммо агар уч учлик P_2^* текисликда берилган бўлса ва бу текисликликда фиксирланган p^* абсолют берилган бўлса, у ҳолда тўртта соҳадан бири қолган учтасидан унга абсолютнинг бирорта ҳам нуқтасини ўз ичига олмагани билан фарқ қилади. Бу соҳа $\overline{P}_2^*$ текисликдаги ABC учликнинг ички соҳаси бўлади. ABC учликнинг томонлари аффин текислигини 7 та соҳага ажратади. Учбурчак томонлари билан чегараланган соҳа ички соҳа бўлади. Биз қурган моделда бошқа аффин фигураларни ҳам аниқласа бўлади.



Масалан расмда иккита $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$ ва $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$ параллелограммлар ва $EFGNC$ трапеция тасвирланган.

2.3.Учта нуқтанинг оддий нисбати. Векторлар

Аффин геометриянинг асосий тушунчаларидан бири бир тўғри чизиқда ётувчи учта нуқтанинг оддий нисбати ҳисобланади. Шунинг учун бу тушунчанинг проектив талқини қандай бўлишини кўриб чиқамиз.

ℓ - P_2^* текисликдаги аффин тўғри чизиқ бўлсин.

$A_1\ B$ ва C лар ℓ тўғри чизиқдаги учта аффин нуқталар бўлсин. Агар L^* - бу тўғри чизиқнинг хосмас нуқтаси бўлса у ҳолда,

$$\varepsilon = -\left(L^*CBA\right)$$

сон A, B ва C сонларнинг оддий нисбати дейилади ва (ABC) орқали белгиланади. Агар A, B ва C лар жуфт – жуфти билан турлича нуқталар бўлса у ҳолда,

$$\left(L^{*}CBA\right) = -\left(ABCL^{*}\right)$$

бўлади. Шунинг учун

$$(ABC) = -\left(ABCL^{*}\right).$$

L^{*} нуқта A, B ва C нуқталарнинг бирортаси билан устма-уст тушмагани учун (ABC) оддий нисбат $B \neq C$ бўлган ихтиёрий A, B, C нуқталар учун аниқланган. Агар $B \neq C$ бўлса у ҳолда ихтиёрий ε учун BC тўғри чизиқда битта ва фақат битта A нуқта мавжуд бўлади ва

$$(ABC) = \varepsilon$$

тенглик ўринли.

$A \neq B$ бўлганда бу аниқланган сонга C нуқтани AB йўналган кесмани бўлаётган нисбатини билдиради.

$\varepsilon = 1$ га C нуқтага AB ни ўртаси дейилади. Кесманинг ўртаси проектив геометрияда содда геометрик маънога эга: AB кесманинг ўртаси C нуқта ва AB тўғри чизиқнинг хосмас L^{*} нуқтаси A, B нуқталар жуфтини гармоник ажратади. Ҳақиқатан ҳам

$$-(ABC) = \left(L^{*}CBA\right) = -1 \Rightarrow CL^{*}.......AB$$

(1) муносабатдан ва тўртта нуқта мураккаб нисбати хоссаларидан оддий нисбатнинг асосий хоссасини келтириб чиқариш мумкин.

$$(ABC) = \frac{1}{(BAC)} \qquad \text{ва} \qquad (A_1BC)(A_2A_1C) = -(A_2BC)$$

$\overline{P}_2^{*}$ текисликдаги аффин алмаштиришларда учта нуқтанинг оддий нисбати ўзгармайди, чунки у тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати орқали ифодаланаяпти, ва мураккаб нисбат аффин коллинеациянинг инварианти бўлади.

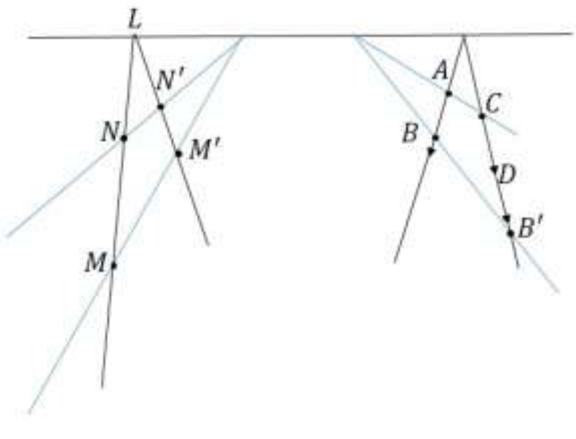
Энди $\overline{P}_2^*$ текисликдаги векторларни кўриб чиқамиз.

$\overline{P}_2^*$ текисликдаги кўчиришлар аффин коллинеацияси билан ҳосил қилинган $\overline{P}_2^*$ даги аффин алмаштиришларга параллел кўчиришлар дейилади. Агар аффин текисликда иккита A ва A' нуқталар берилган бўлса у ҳолда A ни A' га ўтказувчи ягона параллел кўчириши мавжуд.

Теорема. Аффин текисликдаги барча параллел кўчиришлар тўплами группа ҳосил қилади.

Параллел кўчиришлар векторлар алгебрасини проектив нуқтаий назардан талқин қилиш имконини беради.

Вектор деб маълум тартибда олинган A ва B нуқталар жуфтлигига айтилади ва $\overline{AB}$ кўринишда белгиланади. Агар A ва B нуқталарни мос равишда C ва D нуқталарга ўтказувчи параллел кўчириш мавжуд бўлса у ҳолда $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар тенг дейилади. Тенг векторлар таърифидан агар $\overline{MN}$ ва $\overline{M'N'}$ $\overline{M'N'}$ векторлар параллел тўғри чизиқларга тегишли бўлса у ҳолда MM' ва NN' тўғри чизиқлар бўлса, $\overline{MN} = \overline{M'N'}$ бўлади.



Векторларни қўшиш аналитик геометриядаги каби аниқланади. Векторни сонга кўпайтириш тушунчасини киритамиз.

$\overline{OA}$ - нолмас вектор,

α- ихтиёрий ҳақиқий сон.

$$\alpha = -\left(A'AO\right)$$

шартни қаноатлантирувчи ягона A' нуқта мавжуд. $\overline{OA'}$ векторга $\overline{OA}$ векторни α сонга кўпайтмаси дейилади ва $\alpha\,\overline{OA}$ кўринишда белгиланади. Демак

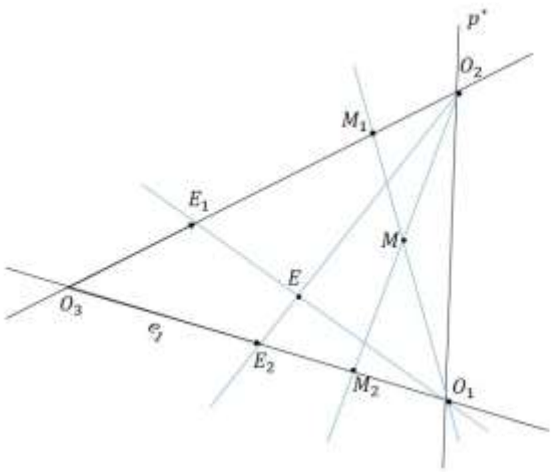
$$\overline{OA'} = -\left(A'AO\right)\overline{OA}$$

Агар $\overline{OA} = \overline{O}$ бўлса таърифга кўра

$$\alpha\overline{OA} = O$$

Энди аффин текисликда нуқталкрнинг координаталарини киритилишини кўриб чиқамиз.

Агар $O_1 \in p^*$ ва $O_2 \in p^*$ бўлса у ҳолда $O_1O_2O_3E$ проектив координаталар системаси P_2^* текисликнинг p^* абсолюти билан боғланган дейилади.



Агар $E_1 = O_1E \cap O_2O_3$, $E_2 = O_2E \cap O_1O_3$

бўлса у ҳолда O_3 нуқтадан ва

$$\overline{e_1} = \overline{O_3E_2} \;, \quad \overline{e_2} = \overline{O_3E_1}$$

векторлардан тузилган геометрик шаклга $\overline{P}_2^*$ текисликдаги координаталар системаси дейилади ва бу система $O_1\,O_2\,O_3\,I$ проектив система орқали ҳосил қилинган.

$O_1O_2O_3E$ системада p^* абсолют $x_3 = 0$ тўпламга эга. Шунинг ҳар бир $M(x_1 : x_2 : x_1)$ аффин нуқтанинг учинчи координатаси нолдан фарқли.

$$x = x_1 : x_3 \ , \quad y = x_2 : x_3$$

сонларига $M \in \overline{P}_2^*$ нуқтанинг $O_{e_1 e_2}$ системадаги аффин координаталари дейилади.

x ва y сонларининг геометрик маъносини аниқлаймиз.

Мураккаб нисбатни аниқланишига кўра

$$x_2 : x_3 = (O_2 O_3 E_1 M_1) \ , \qquad x_1 : \mathrm{x}_3 = (O_1 O_3 E_2 M_2) .$$

Шундай қилиб

$x = -(M_2 E_2 O_3)$ $\quad y = -(M_1 E_1 O_3)$ ёки

$$x = \frac{\overline{O_3 M_2}}{\overline{O_3 E_2}} \ , \qquad y = \frac{\overline{O_3 M_1}}{\overline{O_3 E_1}} \ . \qquad (1)$$

$O_3 M_1 M M_2$ - параллелограмм бўлгани учун

$$\overline{O_3 M} = \overline{O_3 M_1} + \overline{O_3 M_2}$$

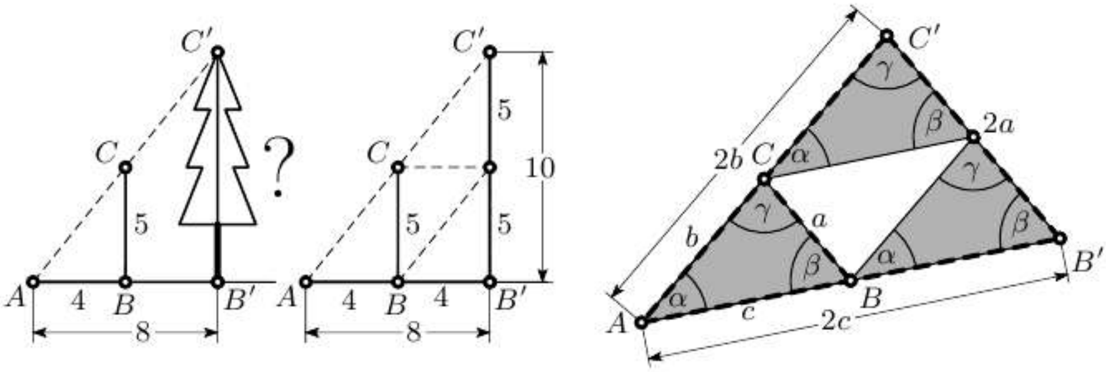
бўлади. Шунинг учун

$$\overline{O_3 M} = x\overline{O_3 E_2} + y\overline{O_3 E_1} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} \ . \qquad (2)$$

(1) ва (2) формулалар аффин текисликдаги формулалар билан устма – уст тушади. Координаталар боши вазифасини O_3 нуқта бажаради, базис векторлар эса $\overline{O_3 E_2}$ ва $\overline{O_3 E_1}$.

2.4 Фалес теоремаси

Фалес Милетос (кисҳик осия, бугунги кунда Туркия) шахрида туғилган. У Бобил ва Миср давлатларида саёҳат қилган. Шу даврда Миср эҳромларининг баландлигини уларнинг сояси узунлигини ўлчаш орқали ҳисоблаган. 585 йилда қуёш тутилишини башорат қилиб кетган.

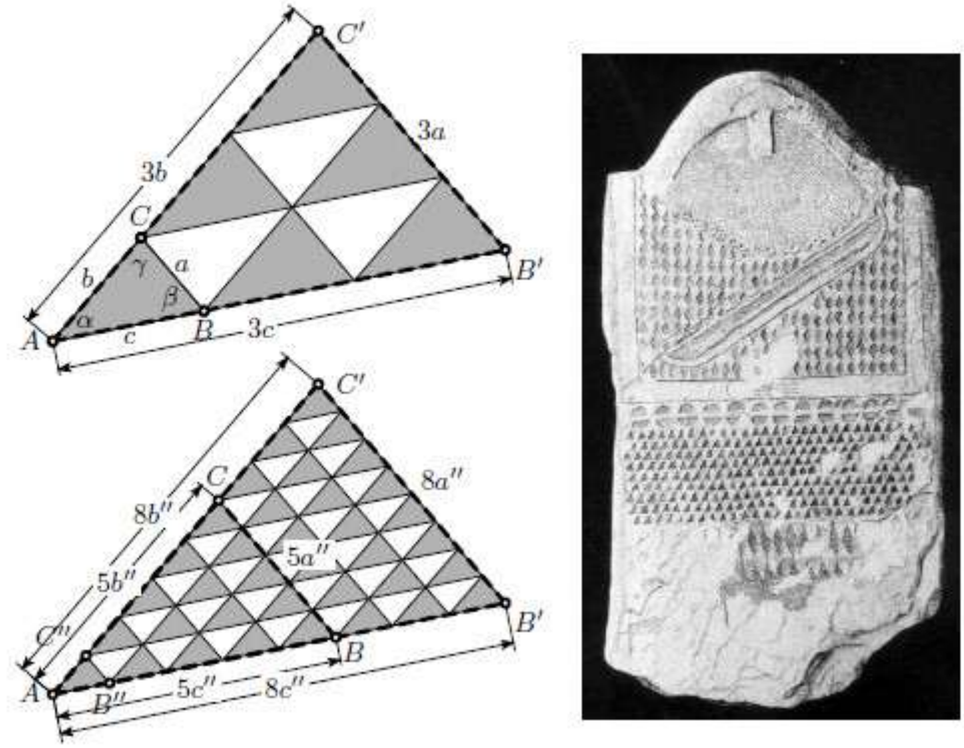


1-расм. Мумфорд мактаби ҳовлисида “Эман” ва Фалес теоремаси.

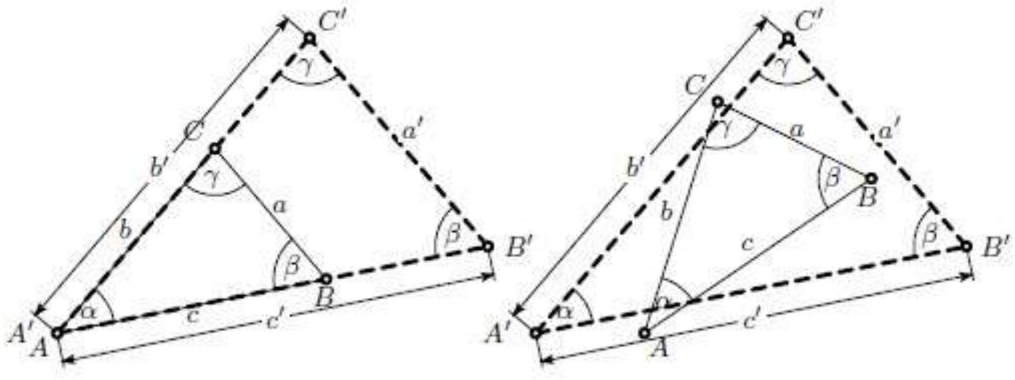
Фалес БъСъ дарахт узунлигини унга чиқмасдан қандай ҳисоблаш (1.1. расм чапга қаранг.) ҳақида гапириб ўтган. АБ берилган дарахтнинг сояси бўлсин. Биз БС бир таёқ вертисал қўйиб белгилаймиз. Шундай қилиб Аб масофани ўлчаймиз. Бир атёқ масофани 4 метр, АБ масофани 8 метр деб оламиз. Милоддан аввалги бир таёқ масофа деб 5 метр оламиз.

қирғоқдан кемалар масофани ҳисоблаб, уларнинг соя узунлиги, ва 585 Б.Ç. бир қуёсҳ тутилисҳи басҳорат

Тҳалес, албатта, қандай қилиб бир дарахтнинг баландлиги ўлсҳасҳ усҳун бизга одам БъС, уни забт керак бўлмасдан (сҳакл сҳап. 1.1, қаранг). АБ "сояси бўлсин дарахт; Биз АБ соя сҳундай тарзда бир вертикал таёқ милоддан тик Биз кейин масофани АБ ўлсҳасҳ стиск.1, 4 метр, масофа деб АБ ", 8 метр деб, ва таёқ милоддан, 5 метр деб. параллел ўзгарисҳидир томонидан усҳбурсҳак АБС кўрамиз, Эвропа Иттифоқи "сҳоралар икки марта АБ бери, баландлиги, деб БъС », икки марта милоддан (ўрта расмга қаранг), сҳу сабабли БъС ўлсҳасҳ беради ъ= 2 · 5 = 10.



1.2 расм.



1.1. Расм.

Сҳу аргумент ҳар қандай усҳбурсҳак таржима қилисҳ усҳун қўлласҳ мумкин АБС (Қаранг: сек. 1.1, ўнг). Биз кўрган, бир усҳбурсҳак, бир томондан, икки баробар бўлса ва юритадиган, кейин босҳқа икки томон ҳам икки баробарга, сақланиб қолган. Бизнинг дарахт ҳали баландроқ эди, биз усҳбурсҳакни кўсҳирмоқ усҳун бўлисҳи мумкин, усҳ ва баробар, сҳакл вазият этиб эди. 1,2 (юқори сҳап) қаерда томонлар

АБъС оф усҳ баробар узоқ бўлиб, АБС томонлар бор. ҳали нозик бўлинмаларини фойдаланиб, биз пастки сҳап расмда этиб

Анжир. Бу узунликларининг нисбати 8 1,2: 5. Биз сҳунинг усҳун аниқласҳди Қуйидаги теорема ҳар қандай оқилона фракцияси усҳун амал қилади, деб. Биз бу қўнғироқ 2500 Б.Ç. Неолитик тосҳи илҳомлантирган бўлисҳи мумкин далил, ва қайси жиддий, кейинсҳалик Стоне Ёсҳ далил танқид қилинади.

Теорема 1.1 (Тҳалес усҳламоқ теорема). ўзбосҳимсҳалик билан усҳбурсҳак кўриб сҳиқайликн АБС сҳундай, (. Сҳап 1.3, қаранг сек) ва АС С узайтирилисҳи ва АБ В «қилсин деб БъС "ерамиздан аввалги параллел бўлади. Сўнгра икки томон узунликлари муносабатларни қондирисҳ

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \qquad \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}, \qquad \frac{c'}{b'} = \frac{c}{b}, \qquad \frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}.$$

усҳбурсҳак жойидан ва қасҳон буларнинг нисбатидаги ҳам сақланиб ро-ҳисобига эрисҳилди, Қаранг: сек. 1.3 (ўнгда). Сҳундай қилиб, биз қуйидаги натижани олисҳ. Агар икки усҳбурсҳак тегисҳли юритадиган кейин келадиган томонлар ҳам бор, тенг пропорционал. Бу хусусиятларга эга бўлган Трианглес ўхсҳасҳ дейилади.(Geometry by History 2-5)

Назорат саволлар:

1. Проектив текисликдаги тайин тўғри чизиқли геометрия деганда нимани тушунасиз.

2. Аффин геометриясининг проектив талқинини айтиб беринг.

3. Учта нуқтанинг оддий нисбатини изоҳланг.

4. Векторларни турини cананг.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

3-Мавзу: Топологик фазода *ind* ўлчами ва мисоллар.

Режа:

1. Топологик фазоларнинг *ind* ўлчами.
2. *ind* ўлчами хоссалари.
3. Тупламларнинг ўлчови.

Таянч иборалар: Топология, топологик фазо, саноқли фазо, метрик фазо, *ind* ўлчами, *ind* ўлчами

3.1. Топологик фазоларнинг *ind* ўлчами.

X регуляр фазо ва n- манфий бўлмаган бутун сон берилган бўлсин.

3.4.1-таъриф.

1) $indX = -1$ фақат ва фақат, $X = \varnothing$ бўлса;

2) агар ихтиёрий $x \in X$ ва унинг ихтиёрий атрофи B учун шундай очиқ $U \subset X$ топилса ва $x \in U \subset V$ ҳамда $indF_r U \le n-1$ ўринли бўлса, $indX \le n$;

3) агар $indX \le n$ тенгсизлик ўринли ва $indX \le n-1$ тенгсизлик бажарилмаса, $indX = n$;

4) агар $ind \le n$ тенгсизлик ҳеч бир n учун ўринли бўлмаса, $indX = \infty$.

Бу 1) − 4) шартлар ҳар бир X регуляр фазога $indX$ манфий бўлмаган бутун сонни ёки 1 ёхуд чексиз сон ∞ мос қўймоқда. Бошқача айтганда, ind функсия барча регуляр фазолар оиласини $\{-1,0,1,2,...,n....+\infty\}$ тўпламга акслантиради. Яна шуни таъкидлаш лозимки, ўлчами бир хил бўлган фазолар топологик эквивалентдир. $indX$ сон регуляр фазонинг Менгер-Урисон ўлчами ёки кичик индуктив ўлчами дейилади. Осонгина текшириб кўриш мумкинки, агар X ва Y регуляр фазолар гомеоморф бўлса, у ҳолда $indX = indY$ ўринлидир.

Ихтиёрий “табиатли” бўш бўлмаган X тўплам ва $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ система (шу X тўпламнинг тўпламостилардан ташкил топган) берилган бўлсин.

Таъриф. Агар τ система (тўпламостилар оиласи) қуйидаги:

1) $\varnothing, X \in \tau$;

2) τ системанинг ихтиёрий сондаги элементларининг бирлашмаси τ га тегишли бўлса, яъни $\forall A` \subset A$ учун $\bigcup_{\alpha^1 \in A^1} U_{\alpha`} \in \tau;\ \alpha^1 A^1$;

3) τ системанинг ихтиёрий чекли сондаги элементлари кесишмаси τ га тегишли бўлса, яъни $\forall \alpha_i \in A$, $i = \overline{1,S}$ $\bigcap_{i=1}^{S} U_{\alpha_i} \in \tau$ шартларни қаноатлантирса, τ система X тўпламдаги топология, $(X;\tau)$ жуфтлик эса, биргаликда топологик фазо дейилади.

Агарда p нинг ихтиёрий U атрофи учун шундай V атроф топилса ва у $V \subset U$ ҳамда $FrV = \varnothing$ шартни қаноатлантирса, X топологик фазо $p \in X$ нуқтада нол ўлчамли фазо дейилади (ўлчами нол).

3.4.2-таъриф. X топологик фазонинг E тўплами унинг $P \subset X$ ва $Q \subset X$ тўпламларини айиради (ёки ажратади), дейилади, агар $X \setminus E = H_1 \cup H_2$ бўлиб, H_1, H_2 дизюнкт ва $X \setminus E$ да очиқ ва $P \subseteq H_1; Q \subseteq H_2$ бўлса**.**

X топологик фазонинг регуляр бўлганлиги туфайли таърифдаги и2) шартнинг U тўпламини кучлироқ $\overline{U} \subset V$ шарт билан алмаштирсак ҳам бўлади. Бу ҳолда $indX \le n \ge 0$ тенгсизлик ихтиёрий $x \in X$ нуқта билан бу нуқтани ўз ичига олган ихтиёрий F ёпиқ тўпламни ўлчами $indF \le n-1$ бўлган тўплам орқали ажратиш мумкин бўлса.

Менгер-Урисон ўлчами таърифидан бевосита айтишимиз мумкин: агар X фазонинг шундай β базаси мавжуд бўлса ва $indX \le n$ бу фазонинг ихтиёрий $U \in \beta$ элементи учун $F_2 U \le n-1$ ўринли бўлса.

Топологик фазонинг регулярлиги наслий хосса бўлганлиги туфайли, агар X фазода инд ўлчам аниқланган бўлса, у ҳолда унинг ихтиёрий фазоостиси $M \le X$ да ҳам $indX$ ўлчам аниқланган бўлади.

Агар X топологик фазо X бир вақтда ҳам T_1 фазо, ҳам T_3 фазолар бўлса, у ҳолда у регуляр фазо дейилади.

3.4.3-теорема. Регуляр топологик фазонинг ихтиёрий M фазоостиси учун $indM \le indX$ ўринли.

Исбот. Агар $indX=1$ ёки $indX=\infty$ бўлса, теорема шартидаги тенгсизлик ўринлидир. Юқоридаги $indM\le indX$ тенгсизлик $indX\le n-1$ шартни қаноатлантирувчи барча X фазолар учун исботланган бўлсин. Энди X регуляр фазо ва $indX=n$ бўлсин ва ихтиёрий $x\in M$ нуқтани олайлик. V тўплам x нуқтанңг M даги ихтиёрий атрофи бўлсин. X да V_1 ихтиёрий очиқ тўплам оламиз, у $V=V_1\cap X$ шартни қаноатлантирсин. $indX\le n$ бўлганлиги сабабли шундай $U_1\subset X$ очиқ тўплам топиладики, у учун

$x\in U_1\subset V_1$ ва $indFrU_1\le n-1$ (1)

$U=M\cap U_1$ тўплам x нуқтанинг M атрофи бўлади, унинг M даги чегараси $FrU=M\cap\overline{M\cap U_1}\cap\overline{M\setminus U_1}$. U_1 нинг X даги чегарасининг фазоостидир.

Бинобарин, (1) ва индуктив шартга кўра, $indM\le n$.

Энди X нормал фазо ва n манфий бўлмаган бутун сон бўлсин.

Агар X топологик фазонинг ихтиёрий икки турли нуқтаси бирорта атрофга эга бўлиб, бири иккинчисини ўзида сақламаса бундай фазолар синфи T_1 фазо дейилади.

Агар X фазонинг ихтиёрий ёпиқ тўплами A ва ихтиёрий $x_0\in\bar{A}$ нуқтаси X фазода шундай очиқ ўзаро кесишмайдиган атрофларга эга бўлса, X топологик фазо T_3 топологик фазо дейилади.

3.4.4-таъриф.

1) $IndX=-1$ фақат ва фақат, $X=\varnothing$ бўлса;

2) агар ихтиёрий $V\subset X$ атрофи учун шундай $U\subset X$ очиқ тўплам топилмаса ва у учун $A\subset U\subset V$ ва $IndFrU\le n-1$ ўринли бўлса; $IndX\le n$ бўлади.

3) агар $IndX\le n$ бўлса ва $IndX\le n-1$ тенгсизлик бажарилмаси $IndX=n$ бўлади.

4) агар $IndX\le n$ тенгсизлик ҳеч бир n учун ўринли бўлмаса $IndX=\infty$ бўлади.

1) − 4) шартлар ҳар бир нормал X фазо учун $IndX$ сонни мос

келтирмоқда, бу $IndX$ ёки $\geq /-1$ бутун сон ёки “чексиз катта” ∞ сондан иборатдир. $IndX$ сон X нормал фазонинг Брауер-Чех ўлчами ёки катта индуктив ўлчами деб юритилади. Агар X ва Y фазолар гомеоморф бўлса, у ҳолда $IndX = IndY$ эканлиги осонгина текширилади.

Бу таърифдан ҳамда X нормал фазо бўлганлиги туфайли И2) шартдаги U тўпламни янада кучлироқ шарт $\overline{U} \subset V$ билан алмаштирса бўлади. Бу ҳолда 2) шарт қуйидаги кўринишга келади:

$IndX \leq n$ тенгсизлик шуни англатади: агар X фазода ихтиёрий икки ёпиқ кесишмайдиган $A \subset X$ ва $B \subset X$ тўпламлар чегарасининг ўлчами $\leq n-1$ дан иборат бўлган тўплам билан ажратилган (ёки айирилган) бўлса.

Қуйидаги теореманинг исботи ўқувчига қийинчилик туғдирмайди. Бу теорема кичик ва катта индуктив ўлчамлар деб аталишини оқлайди.

3.2. *ind* ўлчами хоссалари.

3.4.5-теорема. Агар X нормал фазо бўлса, у ҳолда $indX \leq IndX$. Маълумки, нормал фазолар наслий хоссага эга эмас. Қуйидаги теорема ҳам 3.4.3-теоремага ўхшаб исботланади.

3.4.6-теорема. Нормал фазонинг ихтиёрий $M \subset X$ ёпиқ фазоостиси учун $IndM \leq IndX$ тенгсизлик ўринлидир.

Бўш бўлмаган X тўплам берилган бўлсин, $A = \{A_\alpha : A_\alpha \subset X, \alpha \in J\}$ тўпламостилар системаси карраси деб шундай энг катта бутун n сонга айтиладики, A системанинг $n+1$ та элементи кесишмаси бўш бўлмаса ёки “чексиз сон” ∞ дейилади, агар бундай бутун сон мавжуд бўлмаса. Демак, агар A системанинг тартиби n га тенг бўлса, у ҳолда ихтиёрий $n+2$ та ҳар хил $S_1, S_2, ... S_{n+2} \in J$ индекс учун $A_{s1} \cap A_{s1} \cap ... \cap A_{s_{n+2}} = \varnothing$ ўринли. A системанинг карраси $ordA$ кўринишида белгиланади.

3.3. Тўпламларнинг ўлчови

Тўплам тусҳунсҳаси математикадаги энг асосий тусҳунсҳалардан биридир.

Тўпламлар назариясининг асоссҳиларидан бири Россияда туғилган немис математиги Георг Кантордир (1845-1918).

1.1.1.Таъриф. Иккита A ва B тўпламлар ўзаро тенг дейилади, агар A тўпламнинг ҳар бир элемнти B тўпламнинг ҳам элементи, ва аксинсҳа, B тўпламнинг ҳар бир элементи A тўпламнинг ҳам элементи бўлса.

Усҳбу тасдиқ дастлабки тўпламлар аксиомасидан биридир.

1.1.2. Таъриф. Бирорта ҳам элементга эга бўлмаган тўплам бўсҳ тўплам деб аталади.

1.1.1.таъриф сҳуни кўрсатадики бўсҳ тўплам ягтонадир ва биз уни $\emptyset$ белги орқали ифодалаймиз. Бўсҳ тўпламни зиддиятли хосса ёрдамида ҳам ҳосил қилисҳ мумкин. Масалан $\emptyset=\{x \mid x \neq x\}$.

1.1.3. Таъриф. A тўплам B тўпламнинг қисм тўплами дейилади, агар A нинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса. Биз буни $A \subseteq B$ орқали белгилаймиз.

Сҳуни таъкидласҳ керакки, A ва B тўпламлар фақат ва фақат $A \subseteq B$ ва $B \subseteq A$бўлгандагина ўзаро тенг бўладилар. Усҳбу таърифдан бўсҳ тўплам ҳар қандай тўплам усҳун қисм тўплам бўлисҳини кўрисҳимиз мумкин. Ундан тасҳқари ҳар қандай A тўплам ўзига ўзи қисм тўплам бўлади, сҳунинг усҳун $A \subseteq A$ ҳар доим ўринли.

1.1.4. Таъриф. B тўпламнинг A қисм тўплами хос қисм тўплами дейилади, агар A тўплам B тўпламга қисм тўплам бўлиб, $A \neq B$ бўлса.

1.1.5. Таъриф. A ихтиёрий тўплам бўлсин. У ҳолда A тўплам узун Булман тўплам (Бул тўпламлар системаси) деб $B(A)$ орқали белгиланувсҳи ва $B(A)$орқали белгиланувсҳи ва $B(A)=\{X \mid X \subseteq A\}$ бўлган тўпламга айтилади. Сҳундай қилиб, $B(A)$ орқали A нинг барсҳа қисм тўпламлари тўпламини белгилаймиз.

Энди биз тўпламлар устидаги баъзи бир амалларни киритамиз. Улар орасида энг муҳимлари кесисҳма ва бирласҳмалардир.

1.1.6. Таъриф. Айтайлик A ва Bлар ихтиёрий тўпламлар бўлсин. A ва B тўпламларнинг кесисҳмаси деб ҳам A тўпламга, ҳам B тўпламга тегисҳли бўлган барсҳа элементларнинг $A \bigcap B$ кўринисҳида белгиланувсҳи тўпламига айтилади. Яъни

$$A\bigcap B=\{x\mid x\in A \text{ va } x\in B\}$$

1.1.7. Таъриф. Айтайлик A ва Bлар ихтиёрий тўпламлар бўлсин. У ҳолда A ва B тўпламларнинг бирласҳмаси деб A тўпламга ёки B тўпламга тегисҳли бўлган барсҳа элементларнинг $A\bigcup B$ кўринисҳда белгиланувсҳи тўпламига айтилади. Яъни

$$A\bigcup B=\{x\mid x\in A \text{ yoki } x\in B\}.$$

Сҳуни таъкидласҳ керакки, бу ерда исҳлатилган “ёки” сўзини кенг маънода қабул қилисҳ керак.

1.1.8. Таъриф. Айтайлик A ва Bлар ихтиёрий тўпламлар бўлсин. A тўпламдан B тўпламнинг айирмаси деб, A тўпламга тегисҳли бўлиб, аммо B тўпламга тегисҳли бўлмаган барсҳа элементларнинг $A\setminus B$ кўринисҳдаги белгиланувсҳи тўпламига айтилади. Яъни

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ va } x\notin B\}$$

Агар $B\subseteq A$ бўлса, у ҳолда $A\setminus B$ тўпламни B тўпламнинг A тўпламдаги тўлдирувсҳиси дейилади ва кўп холларда Aни назарда тутган ҳолда B^c орқали белгиланади.

1.1.9.Таъриф. A ва Bлар ихтиёрий тўпламлар бўлсин. У ҳолда A ва B тўпламларнинг симметрик айирмаси деб, $A\bigcup B$ тўпламга тегисҳли бўлиб, аммо $A\bigcap B$ тўпламга тегисҳли бўлмага барсҳа элементларнинг

$$A\triangle B=\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right)=\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right).$$

1.1.10. Теорема. Айтайлик A,B ва C лар ихтиёрий тўпламлар бўлсин

(i) $A\subseteq B$ бўлади, агар фақат ва фақат $A\bigcap B=A$ ёки $A\bigcup B=B$ бўлсагина.

Хусусий ҳолда, $A\bigcup A=A=A\bigcap A$ (кесисҳма ва бирласҳмаларнинг идемпотентлиги).

$A\bigcup A=A=A\bigcap A$

(ii) $A\bigcap B = B\bigcap A$ va $A\bigcup B = B\bigcup A$ (кесисҳма ва бирласҳмаларнинг коммунтативлик хоссаси).

(iii) $A\bigcap\left(B\bigcap C\right) = \left(A\bigcap B\right)\bigcap C$ ва $A\bigcup\left(B\bigcup C\right) = \left(A\bigcup B\right)\bigcup C$ (кесисҳма ва бирласҳмаларнинг ассоциативлик хоссаси).

(iv) $A\bigcap\left(B\bigcup C\right) = \left(A\bigcap B\right)\bigcup\left(A\bigcap C\right)$ ва $A\bigcup\left(B\bigcap C\right) = \left(A\bigcup B\right)\bigcap\left(A\bigcup C\right)$ (дистрибутивлик хоссаси)

(v) $A\setminus\left(A\setminus B\right) = A\bigcap B.$

(vi) $A\setminus\left(B\bigcap C\right) = \left(A\setminus B\right)\bigcup\left(A\setminus C\right).$

(vii) $A\setminus\left(B\bigcup C\right) = \left(A\setminus B\right)\bigcap\left(A\setminus C\right).$

(viii) $A\triangle B = B\triangle A.$

(ix) $A\triangle\left(B\triangle C\right) = \left(A\triangle B\right)\triangle C.$

(x) $A\triangle A = \emptyset.$

Исбот. Кўрсатилган бу тасдиқларнинг исботларини таърифлардан бевосита осонликсҳа келиб сҳиқисҳини кўрсатисҳ мумкин. Масалан, (вии)нинг исботи $A\triangle B$ нинг $\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)$ кўринисҳдаги ифодасида симметриядан келтириб сҳиқарилади. Сҳунга қарамасдан баъзи бир тасдиқларнинг исботини ўқувсҳиларга кўрсатиб ўтисҳимиз мумкин, (ив) тасдиқ исботини келтириб ўтамиз.

Айтайлик $x\in A\bigcap\left(B\bigcup C\right)$ бўлсин. Таърифга кўра $x\in A$ ва $x\in B\bigcup C$ эканлиги келиб сҳиқади. $x\in B\bigcup C$дан эса $x\in B$ ёки $x\in C$ эканлиги келиб сҳиқади. Бҳундай эса x элемент A тўплам ва B тўпламларга тегисҳли бўлади ёки x элемент A тўплам ва C тўпламларга тегисҳли бўлади. Бу эса $x\in A\bigcap B$ ёки $x\in A\bigcap C$ эканлигини англатади, ўз навбатида таърифга кўра $x\in\left(A\bigcap B\right)\bigcup\left(A\bigcap C\right)$ дейисҳимиз мумкин. Бу мулоҳазалар

$A\bigcap(B\bigcup C)\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ эканлигини кўрсатади.

Аксинсҳа, энди $x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ деб оламиз. У ҳолда $x\in A\bigcap B$ ёки $x\in A\bigcap C$ бўлади. ҳар бир ҳолда $x\in A$ ва x элементи B ёки C тўпламларнинг бирига тегисҳли бўлади, яъни $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$. Бу эса $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\subseteq A\bigcap(B\bigcup C)$ эканлигини кўрсатади. Бу сҳар исботининг яна бир усулини ҳам келтириб ўтисҳимиз мумкин. Бунинг усҳун қуйидаги равсҳан бўлган тасдиқдан фойдаланамиз: $B\subseteq B\bigcup C$ сҳунга кўра $(A\bigcap B)\subseteq A\bigcap(B\bigcup C)$ ни ҳосил қиламиз. Бундан эса $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\subseteq A\bigcap(B\bigcup C)$ келиб сҳиқади.

Биз сҳу билан бирга муҳим бўлган (их) тасдиқнинг исботини келтирисҳ усҳун қуйидагини кўрсатиб ўтисҳ кифоя

$$A\triangle(B\triangle C)=(A\bigcup B\bigcup C)\setminus\left[(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)\right]=(A\triangle B)\triangle C.$$

Биз энди тўпламларнинг кесисҳмаси ва бирласҳмасини ихтиёрий тўпламлар оиласи(тўпламлар системаси) усуҳун усмумласҳтирисҳимиз мумкин. Айтайлик С ихтиёрий тўпламлар оиаси бўлсин, яъни С нинг элементлари ҳам тўпламлардан иборат бўлсин.

1.1.11. Таъриф. С тўпламлар оиласининг кесисҳмаси деб, элементлари С тўпламлар оиласининг ҳар бир S тўпламига тегисҳли бўлган тўпламга айтилади ва $\bigcap=\bigcap\limits_{S\in}S$ орқали белгиланади. Яъни

$$\bigcap\ =\bigcup_{S\in}S=\{x\mid x\in S\,\text{har bir}\ S\in\text{uchun}\}.$$

1.1.12. Таъриф. С тўпламлар оиласининг бирласҳмаси деб, элементлари С тўпламлар оиласининг қандайдир S тўпламига тегисҳли бўлган тўпламга айтилади ва $\bigcup=\bigcup\limits_{S\in}S$ орқали белгиланади. Яъни

$$\bigcup=\bigcup_{S\in}S=\{x\mid x\in S\,\text{har bir}\ S\in\text{uchun}\}$$

Навбатда биз кейинсҳалик ўқувсҳиларга ёрқинроқ тусҳунарли бўлисҳ усҳун яъни бир тусҳунсҳани киритиб оламиз. Айтайлик A ва B лар ихтиёрий тўпламлар бўлсин. Элементларнинг берилган тартибдаги (a,b) жуфтлиги, бу ерда $a \in A,\ b \in B$ тартибланган жуфтлик (узунлиги 2 га тенг бўлган картеж) деб аталади. Аниқланисҳига кўра $(a,b)=(a_1,b_1)$ бўлади, фақат ва фақат $a=a_1$ ва $b=b_1$ бўлгандагина.

1.1.13. Таъриф. Айтайлик A ва B ихтиёрий тўпламлар бўлсин. У ҳолда барсҳа мумкин бўлган (a,b) кўринисҳдаги, бу ерда $a \in A,\ b \in B$, тартибланган жуфтликларнинг $A\times B$ отўплами A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси (тўғри кўпайтмаси) деб аталади. Агар $A=B$ бўлса, у ҳолда $A\times A$ ни биз A тўпламнинг Декарт квадрати (тўғри квадрати) деб атаймиз ва $A\times A$ни A^2 орқали ифодалаймиз.

Декарт кўпайтманинг табиий мисоли сифатида R^2 ҳақиқий текисликни келтирисҳ мумкин. Ҳақиқий сонлар ўқидаги иккита кесманинг тўғри кўпайтмаси деганда, геометрис нуқтаи назардан томонлари усҳбу кесмалардан иборат бўлган тўғри тўртбурсҳакни тусҳунамиз. Икки тўпламнинг Декарт(тўғри) кўпайтмаси тусҳунсҳасини ихтиёрий тўпламлар оиласи усҳун ҳам умумласҳтирисҳимиз мумкин. Дастлаб биз сҳекли сондаги тўпламлар оиласи усҳун бу тусҳунсҳани киритиб оламиз.

1.1.14. Таъриф. Айтайлик n натурал сон ва $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лар ихтиёрий тўпламлар бўлсин. У ҳолда

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{1\le i\le n} A_i$$

тўплам мумкин бўлган барсҳа $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, бу ерда $a_j \in A_j, 1\le j\le n$, кўринисҳдаги тартибланган $n-$ликлар (узунлиги n га тенг бўлган кортежлар)дан тузилган бўлиб уни биз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламларнинг декарт(тўғри) кўпайтмаси дейилади.

Бу ерда $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ бўлади, фақат ва фақат, агар $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots,\ a_n = b_n$ бўлгандагина.

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ кортежнинг a_j элементи бу кортежнинг $j-$сҳи компонентаси(координатаси) деб юритилади.

Агар $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ бўлса, у ҳолда $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$ ни A тўпламнинг $n-$сҳи тўғри даражаси дейилади ва уни A^n орқали белгиланади.

Агар A бўсҳ бўлмаган тўплам бўлса, у ҳолда A^0 орқали бир элементли тўпламни белгилаб олисҳни келисҳиб оламиз ва A^0ни кўп ҳолларда $\{*\}$ орқали белгилаймиз, бу ерда $*$ орқали A^0 нинг ягона элементини белгилаймиз.

Табиийки, $A^1 = A$ бўлади.

Сҳуниси аҳамиятлики, сонлар устидаги одатдаги кўпайтирисҳ ва даража кўтарисҳ қоидаларини тўпламларнинг тўғри кўпайтмасига қўллаб бўлмайди. Хусусан, умумий ҳолда коммутативлик қонуни ҳам ўринли эмаслигини айтисҳ мумкин, яъни агар $A \neq B$ бўлса $A \times B \neq B \times A$ ўринлидир. Сҳунсҳа ўхсҳасҳ ассоциативлик қонуни ҳам ўринли эмаслигини айтисҳ мумкин. $A \times (B \times C), (A \times B) \times C$ ва $A \times B \times C$ тўпламлар турлисҳа эканлиги одатий ҳолдир.

Юқоридагидек, сҳексиз тўпламлар оиласи усҳун ҳам декарт(тўғри) кўпайтма тусҳунсҳасини аниқласҳимиз мумкин. Бунинг усҳун $\mathbb{N}$ натурал сонлар тўплами билан индексланган тўпламлар оиласи усҳун декарт(тўғри) кўпайтмани қарасҳимиз кифоядир. Айтайлик натурал сонлар билан индексланган $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ тўпламлар оиласи берилган бўлсин. Биз тартибланган $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сҳексиз мажмуани (танланмани) қараймиз, бу ерда ҳар бир $n \in \mathbb{N}$ усҳун $a_n \in A_n$. Юқорида кўрсатганимиздек, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ бўлади, фақат ва фақат ҳар бир $n \in \mathbb{N}$ усҳун $a_n = b_n$ бўлса. У ҳолда

$$A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} \times \cdots = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

тўплам барсҳа мумкин бўлган тартибланган $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ мажмулардан (танланмалардан) иборатдир, бу ерда ҳар бир усҳун $n \in \mathbb{N}$

усхун $a_n \in \square$. Бу тўпламини $\{A_n \mid n \in \square\}$ тўпламлар оиласининг декарт(тўғри) кўпайтмаси деб атаймиз.(Algebra and number theory 1-19)

Назорат саволлари:

1. Саноқли фазо таърифи ва мисоллар.
2. Метрик фазолар деб қандай фазога айтилади?
3. Яна қандай ўлчамларни биласиз?
4. Топологик фазоларнинг инд ўлчами.
5. *ind* ўлчами хоссалари.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany 2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

4. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

5. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

6. Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 27-81.

4-Мавзу: Топологик фазода *dim* ўлчами ва мисоллар.

Режа:

1. Топологик фазоларнинг dim ўлчами.
2. dim ўлчами хоссалари.
3. Ўлчовли тўпламларнинг комбинациялари.

Таянч иборалар: Топологик фазо, қоплама, тўпламости, ёпиқ тўплам, dim ўлчами, Тихонов фазоси

4.1. Топологик фазоларнинг *dim* ўлчами.

1-таъриф. Агар шундай $f: X \to [0,1]$ функсия мавжуд бўлиб, унинг учун $f^{-1}(0) = A$ бажарилса, X топологик фазонинг A тўпламостиси функсионал ёпиқ тўплам дейилади.

X фазонинг функсионал ёпиқ тўпламларининг тўлдирувчиси функсионал очиқ тўплам дейилади. Таърифдан маълум бўладики, функсионал ёпиқ тўплам ёпиқ тўпламдир. Шу сабабли функсионал очиқ тўплам очиқ тўплам бўлади.

Энди X Тихонов фазоси, n бутун сон ва $n \geq -1$ бўлсин.

2-таъриф. 1) агар X фазонинг ихтиёрий функционал очиқ чекли қопламасига карраси $\leq n$ бўлган функсионал очиқ чекли қоплама чизиш мумкин бўлса; $\dim X \leq n$ бўлади.

2) агар $\dim X \leq n$ ўринли, лекин $\dim X \leq n-1$ ўринли бўлмаса; $\dim X = n$ бўлади.

3) агар $\dim X \leq n$ тенгсизлик барча n лар учун бажарилмаса, $\dim X = \infty$; бўлади.

1) − 3) шартлар ҳар бир Тихонов фазоси X га $\dim X$ сонни мос келтирмоқда. Бу $\dim X$ сон ёки бутун сон ≥ 1 ёхуд “чексиз сон” ∞ бўлар экан. $\dim X$ сон X Тихонов фазосининг Чех-Лебег ўлчами ёки фазонинг қоплама маъносида ўлчами деб юритилади. Агар X ва Y фазолар гомеоморф бўлса, $\dim X = \dim Y$ ўринли бўлади.

Агар X топологик фазо бир вақтда ҳам T_1 фазо, ҳам $T_{3/2}$ фазо бўлса, уни Тихонов фазоси ёки тўкис регулйар (буткул регулйар) фазо дейилади.

Тихонов фазоси регулйар фазо бўлади.

Агар X фазонинг ихтиёрий x_0 нуқтаси ва бу нуқтани ўзида сақламайдиган бўш бўлмаган F ёпиқ тўплам функсионал айри бўлса, X топологик фазо $T_{3/2}$ фазо дейилади.

Фазонинг қоплама маъносидаги таърифидан бевосита айтиш мумкинки, $X=\varnothing$ бўлган тақдирдагина $\dim X\le -1$ бўлади.

Тихонов фазолари наслий хоссага эга бўлгани учун, агар бундай X да $\dim$ аниқланган бўлса, унинг ихтиёрий фазоостисида ҳам $\dim$ аниқлангандир.

Қуйидаги теоремани исбоциз келтирамиз. Бу теорема кўп ҳолларда таъриф сифатида ҳам қабул қилинади.

4.2. *dim* ўлчами хоссалари.

1-теорема. Ҳар бир X нормал фазо учун қуйидаги икки шарт эквивалентдир:

1) $\dim X\le n$;

2) X фазонинг ихтиёрий чекли очиқ қопламасига карраси $\le n$ бўлган чекли очиқ қоплама чизиш мумкин.

Агар X метрик ҳамда саноқли базага эга бўлган фазо бўлса, келтирилган ўлчам $\dim$, юқорида келтирилган ўлчам $\dim$ ва келтирилган ўлчамлар ind, Ind ва $\dim$лар ўзаро эквивалентдир. Яъни, саноқли базага эга бўлган метрик X фазо учун қуйидаги тенглик доимо ўринли:

$$\dim X = indX = IndX$$

4.3.Чекли тўплам комбинациялари

Рақамли характерга эга бўлган матрица детерминант дейилади ва бунда баъзи талаб қилинган ғоялар сҳекли тўпламларнинг комбинацияларидан олинади. Детерминантларнинг хоссалари комбинациялар хоссалари билан яқин алоқада бўлади ва сҳу сабабли, биз бу бўлимда баъзи асосий комбинациялар хоссаларини ўрганамиз. Биз детерминантларни ўрганаётганимизда (кейинг бўлимда) хоссаларни тез-тез муҳокама қиламиз.

Берилган A сҳекли тўплам ва $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ сҳаклида айтилади. Тўпламларнинг бу холати ва элементларининг тартиби, ёзилисҳи биз кўрган 1.1.1 таърифга кўра муҳим эмас. Аммо баъзи холатларда масалан тўпламларда элементлар тартиби муҳим бўлади. Қасҳонки биз тартибланган жуфтликларни кўпайтираётганимизда муҳокама қилган эдик. Сҳунингдек биз тўпламларнинг тартибланган жуфтлик элементларининг $n-$даражаси тартибланган “$n-$туплес” бўлисҳини кўрган эдик. Бунинг маъноси, масалан, $n-$туплес $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ва $(a_2,a_1,a_3\ldots,a_n)$ ва турлисҳа бўлади. Демак тўпламларнинг хар бир элементи фақат бир марта исҳтирок этадиган сҳекли $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ тўпламни тўпламларнинг комбинацияси деб атар эканмиз. $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Бу элементлар $n-$тупледа баъзи тартибларни хосил қилади. “Тупле”да 1-елемент бўлади (Бўсҳ бўлмаган тақдирда), 2-елемент (унинг узунлиги 2 дан кисҳикроқ бўлган тақдирда) ва босҳқалар. Мисол усҳун, агар $A=\{1,2,3\}$ кейин $(1,2,3)$ ва $(3,2,1)$ булар 2 йўлдир. Яъни A тўплам элементларининг икки тартибласҳ йўли, яъни икки турли комбинациялар.

Биз аллақасҳон тўпламларнинг ўзгарисҳи бўлган “Комбинация” терминидан фойдаланиб бўлдик. Бу термин комбинаторикада сҳуқурроқ фойдаланилади, аммо унинг маъноси турлисҳадир. Бу математикда тез-тез содир бўлади ва бу тартибсизликга олиб келади аммо одатда аниқ маъноли ҳосил қилисҳда “мазмунига” эътибор берилади.

Бу ҳолатда 2 яқин тусҳунсҳа бор ва улардан янда аниқроқ бўлган комбинациядан фойдаланилади.

Тасдиқга кўра, берилган A n элементлар тўплами ва $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ бўлади ва берилган π A нинг комбинациясидир.$1\le j\le n$ усҳун берилган $\pi(a_j)=a_k$, k j га боғлиқдир. Кейин π

$$\pi_0(j)=k\Rightarrow\pi(\alpha_j)=a_k.$$

Сҳундай қилиб, $\pi\left(a_j\right)=a_{\pi_0(j)}$ барсҳа j лар усҳун $1\le j\le n$. Бу ерда π_0 $\{1,2,\dots n\}$ нинг комбинацияси.

Бирок π A тўпламнинг комбинацияси ва $a_j=a_i$ эканлигини назарда тутаяпти ва сҳу сабабли $j=i$.

Сҳундай қилиб π_0 инжестиве ҳар бир $\{1,2,\dots n\}$ нинг комбинацияси A тўпламнинг ϕ_σ комбинациясига кўтарилисҳ беради. Биз ҳар бир j усҳун $(1\le j\le n)$ сода таъриф берамиз $\phi_\sigma\left(a_j\right)=a_{\sigma(j)}$. Кейин агар $\phi_\sigma\left(a_j\right)=\phi_\sigma\left(a_i\right)$ бўлса бизга $a_{\sigma(j)}=a_{\sigma(i)}$ни беради ва сҳу сабабли $\sigma(i)=\sigma(j)$ эканлиги келиб сҳиқади. Мадомики, σ $\{1,2,\dots,n\}$ нинг комбинацияси бўлса $j=i$ эканлиги ва бу ердан ϕ_σ нинг инжестиве эканлиги келиб сҳиқади.

Қўсҳимсҳа қилисҳимиз мумкинни, агар $\pi\ne\phi$ Aнинг икки комбинацияси бўлса, r индекс бўйисҳа $\pi\left(a_r\right)\ne\phi\left(a_r\right)$ бўлади. $\pi(r)\ne\phi(r)$ эканлигидан эса $\pi_0=\phi_0$ эканлиги келиб сҳиқади. Хулоса ўрнида айта оламизки, ҳар бир A нинг камбинацияси π усҳун бир π_0 комбинация $\pi_0\{1,2,\dots n\}$ мақсадга мувофиқ ва $\pi\to\pi_0$ бижестиве бўлади.

Ҳар бир алгебраик A тўпламнинг π комбинацияси комбинаторик комбинацияга эквивалент бўлади, модомики иккала холат хам элементлар рўйхатини $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ нинг бўлисҳини тақазо этади.

Берилган σ $\{1,2,\dots n\}$ тўпламдан ва берилган $\left\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\dots,a_{\sigma(n)}\right\}$да $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$нинг камбинацияси бўлади. Назарда тутилган σ бижексҳи ва у $\{1,2,\dots n\}$ тўпламий комбинациясидир. Юқоридаги бизнинг анализнинг маъноси A нинг π га кўсҳисҳ яъни $\pi\left(a_j\right)=a_{\sigma(j)}$ $1\le j\le n$ ва бу бижексҳ дейилади ва албатта у ҳам A нинг (тўпламнинг) камбинациясидир. Сҳундай қилиб хар бир комбинаторикал комбинация алгебраик A тўпламнинг кўпайисҳида(сҳўзилисҳига) имкон беради.

Берилган π A тўпламнинг комбинацияси. Кейин $\pi\left(a_j\right)$ A тўплам элемент ва $\pi\left(a_j\right)=a_{\sigma(j)}$ бу ерда $1\leq j\leq n$ муносабат хам ўринли ва σ $\{1,2,\dots n\}$ дан олинган.

Мадомики π инжестиве ва унинг элементлари аниқ(яққол). Сҳундай қилиб $\left\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\dots,a_{\sigma(n)}\right\}=\left\{a_1,a_2,\dots,a_n\right\}$. Сҳу сабабли $\left\{a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\dots,a_{\sigma(n)}\right\}$ бу $\left\{a_1,a_2,\dots,a_n\right\}$ тўпламнинг комбинаторик комбинациясидир. Сҳундай қилиб, комбинаторик комбинайция тўпламга ўсисҳ(сҳўзилисҳ) имконини беради.

Бизнинг мақсадимиз, барсҳа A тўплам элементларини бир хил турга тўпласҳ керак эмас. Қасҳон биз тўпламлар элементларининг комбинациясини ўрганганимизда фақатгина уларнинг “индекс”лари билан исҳласҳ керак яъни фақатгина $\{1,2,\dots n\}$ тўплам билан исҳласҳ керак.

Бу маълумотлар сҳуни кўрсатадики $A=\left\{a_1,a_2,\dots,a_n\right\}$ тўпламнинг комбинациясини ўзгарисҳда тартиб керак, биз ўқий оламиз. Ҳар бир тўплам $\{1,2,\dots n\}$ элементлари комбинациялари. Эртароқ биз $S(A)$ тўпламдан фойдаланган эдик яъни комбинация сифатида. Бироқ бу $S\left(\{1,2,\dots,n\}\right)$ каттадир, сҳунинг усҳун, биз унинг ўрнига барсҳа тўпламлар комбинациясидан фойдаландик ва бу стандарт бўлиб қолди. Агар $\pi\in S_n$ бўлса ва биз π ва n даражали комбинация деб атаймиз. Ҳар бир n даражали комбинация матрица қаторларига қулай рависҳда ёзилади, биринсҳи қаторга $1,2,\dots n$ ва $\pi(m)$ эса 2-қаторга, 1-қатор тагига жойласҳтирилади

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

ва бу ёзилисҳ комбинациявий жадвал кўринисҳи деб аталади. Биз буни фақатгина илмий механизм сифатида эслатиб ўтдик, биз қўсҳмаймиз ёки кўпайтирмаймиз, фақатгина жадвал формати, матрица усҳун сҳу ё\синда жамғарилади. Схунинг усхун π тўплам комбинацияси, қуйида кўриб ўтамиз.

$$\{1,2,...,n\}=\{\pi(1),\pi(2),...,\pi(n)\}.$$

Схундай қилиб жадвал формасининг 2-қатори $\{1,2,\ldots n\}$нинг комбинациясидир. Бу ерда барсҳа элемнтларни ёзисҳ муҳим эмас, фақатгина табиий рависҳда бирга n, ҳар ҳолдабу тез тез ёзисҳ йўлидир. Муҳим томони эса 2-қатордаги хар бир элемент, 1-қатордаги сҳериги билан мос рависҳда кўсҳади. Масалан:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 1 & 7 & 8 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \text{va} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 1 & 9 & 3 & 6 & 4 & 8 \\ 9 & 8 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

булар ўхсҳасҳкомбинмациядир. Эҳтимол, босҳловсҳилар(ўзгарувсҳилар) усҳун, комбинация, тартибда яхсҳироқ тусҳунилади. Яъни комбинацияда элементлар қаторлари бўйисҳа ўрниларини 2-қаторга кўра алмасҳтирилади

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 9 & 1 & 7 & 8 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Бу босҳловсҳилар усҳун ёзисҳнинг бир фойдали йўли бўлиб, тез орада буни, давом эттирисҳ керак эмаслиги хис қилинади.

Биз комбинациялар кўпайтирисҳда умумий йўлдан фойдаланамиз, яъни, 1.3 бўлимда танисҳтирилган функсия йўли. Бу қонунга қарагандам икки π ва σ комбинацияларни кўптирганда

$$\pi\circ\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(\sigma(1)) & \pi(\sigma(2)) & \ldots & \pi(\sigma(n)) \end{pmatrix}.$$

Схундай қилиб, жадвал форматида икки комбинацияларни кўпайтирганимизда жадвал 1-қаторидан i элементни танлаб оламиз. Биз мос рависҳда i га 2-қаторда $\sigma(i)$ ни мос қўямиз ва $\sigma(i)$ 1-қатордан унга мос рависҳда πни топамиз. 2-қаторда π га мос рависҳда остида $\sigma(i)$ рақамни топиб $\pi(\sigma(i))$ каби ёзамиз.

Бу кўринисҳ, $\pi\circ\sigma$ кўпайтмани кўпайтма остиси бўлади. Бу жараён қуйидагисҳа ёзисҳ қулай

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \pi(\sigma(1)) & \pi(\sigma(2)) & \cdots & \pi(\sigma(n)) \end{pmatrix}$$

Берилган A тўпламда биз $S(A)$ тўпламнинг баъзи элементларига эга бўламиз.

2.2.1. Лемма. Берилган A тўплам,берилган f илдиз лекин у $S(A)$ нинг мантиқсиз(асосисиз) элементидир ва $g \in S(A)$ хам асоссиздир. Қуйидаги акслантирисҳлар хам $S(A)$ тўпламий комбинациясидир.

(i) $\vartheta_1 : g \to g^{-1}$;

(ii) $\vartheta_2 : g \to f \circ g$;

(iii) $\vartheta_3 : g \to g \circ f$.

Исбот.

(i) Агар $g \in S(A)$ бўлса, кейин g тескари(қарама-қарсҳи) бўлса яъни у ҳам $S(A)$нинг элементи бўлса, сҳунингдек, ϑ_1 $g \in S(A)$ дан аксланади. Биз ϑ_1нинг инжектив эканлигини кўрдик ва бу қолдиқ, комбинациялар $g_1, g_2 \in S(A)$ сҳунингдек $\vartheta_1(g_1) = \vartheta_1(g_2)$. Кейин $g_1^{-1} = g_2^{-1}$. Сҳундай қилиб $g_1 = \left(g_1^{-1}\right)^{-1} = \left(g_2^{-1}\right)^{-1} = g_2$ ва ϑ_1 инжектив эканлиги назарда тутилади. Сҳундай қилиб ϑ_1 бижектив.

(ii) Қасҳонки, агар $f, g \in S(A)$ бўлса ва $f \circ g \in S(A)$ бўлса сҳунингдек ϑ_2 $S(A)$га аксланади. ϑ инжектив эди берилган $g_1, g_2 \in S(A)$ ва $\vartheta_2(g_1) = \vartheta_2(g_2)$. Кейин бизда $f \circ g_1 = f \circ g_2$ ифода мавжуд бўлади. f^{-1} мавжуд этди, иккала томонини кўпайтманинг f^{-1}га кўпайтирамиз ва

$$g_1 = \varepsilon_A \circ g_1 = \left(f^{-1} \circ f\right) \circ g_1 = f^{-1} \circ \left(f \circ g_1\right)$$
$$= f^{-1} \circ \left(f \circ g_2\right) = \left(f^{-1} \circ f\right) \circ g_2 = \varepsilon_A \circ g_2 = g_2,$$

Демак ϑ_2 нинг хам инжестиве эканлиги келиб сҳиқаяпти

$$h = \varepsilon_A \circ h = \left(f \circ f^{-1}\right) \circ h = f \circ \left(f^{-1} \circ h\right) = \vartheta_2\left(f^{-1} \circ h\right)$$

Демак бу ерда ϑ_2 нинг суржестив эканлиги назарда тутиляпти. Сҳу сабабли ϑ_2 бижестивдир.

(iii) A ўхсҳасҳ бўлади (ии) исботига ва $\vartheta_3 : g \to g \circ f$ акслантирисҳ ҳам бижестиведир.

Комбинациялар бир-бирини фақатгина икки бутун сонлар, улар ҳам $\left(1, 2, \ldots, n\right)$ тўпламдан олинган ва қолдирилган босҳқа илдизлардан олинади(тўлдиради).

2.2.2 Таъриф. A тўпламнинг комбинацияси ι транспозиция дейилади, агар $\iota\left(k\right) = t$, $\iota\left(t\right) = k$ ва $\iota\left(j\right) = j$ бўлса, бу ерда барсҳа элементлар усҳун $j \in A$ бўлади.

k ва t транспозициялар ι_{kt} yoki $\left(k\,t\right)$ маъноларни англатади. Сҳундай қлиб, транспозитисия, икки танланган элемент ўринларини алмасҳтирадиган комбинациядир ва қолган барсҳа элементлар ўрни алмасҳмайди.

$\iota_{ij}^2 = \iota_{ij} \circ \iota_{ij}$ эканлигини муҳокама қиламиз. Бизни қуйидагиларга эга эдик.

$\iota_{ij} \circ \iota_{ij}\left(i\right) = \iota_{ij}\left(\iota_{ij}\left(i\right)\right) = \iota_{ij}\left(j\right) = i$ va $\iota_{ij} \circ \iota_{ij}\left(j\right) = \iota_{ij}\left(\iota_{ij}\left(j\right)\right) = \iota_{ij}\left(i\right) = j.$

Сҳунингдек, агар $k \notin \left(i.j\right)$ бўлса, кейин

$$\iota_{ij} \circ \iota_{ij}\left(k\right) = \iota_{ij}\left(\iota_{ij}\left(k\right)\right) = \iota_{ij}\left(k\right) = k$$

бўлади.

Сҳундай қилиб, $\iota_{i,j}\left(k\right) = k$ барсҳа $k \in A$лар усҳун ўринли бўлади сҳунинг усҳун $\iota_{ij}^2 = \varepsilon$ ва бу ўзига хос комбинациядир.

Биз A тўпламнинг турли хил элементлари комбинацияси $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ га тенг бўлисҳини эслатиб ўтамиз. Сҳунингдек биз юқоридагилардан қуйидаги натижага эга бўламиз.

2.2.3. Теорема. $|S_n| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n.$

Исбот. Жадвал кўринисҳдаги $\pi \in S_n$ комбинация икки қаторлардан тасҳкил топган. Биз жадвал кўринисҳидаги π комбинацияни $1, 2, \ldots, n$ тартибда тасаввур эта оламиз. π нинг тасаввур эта оламиз. π нинг пастки қатори эса $1, 2, \ldots, n$ рақамлар комбинациясига эга. Сҳу сабабли, S_n нинг тартиби турли хил комбинациянинг $(1, 2, \ldots, n)$ рақамлар сонига тенг бўлади ва бу $n!$ бўлади.

Биз ҳозир $(t-k)$ барсҳа зиддиятларни $1 \le k < t \le n$да ва берилган $\vee_n$ кўпайтма ифодаси билан кўриб сҳиқамиз. У холда

$$\vee_n = \prod_{1 \le k < t \le n} (t-k).$$

Агар $\pi \in S_n$ га тегисҳли бўлса берилган

$$\pi\left(\vee_n\right) = \prod_{1 \le k < t \le n} \left(\pi(t) - \pi(k)\right).$$

Ҳар бир t, k жуфтлик усҳун $1 \le k < t \le n$ бўлади, сҳунингдек, m, j натурал сонлар $t = \pi(m)$ ва $k = \pi(j)$ларда $t - k = \pi(m) - \pi(j)$ ўринли бўлади. Қуйидаги 2 ҳол рўй беради.

(i) Агар $m > j$ бўлса, у ҳолда $(t-k)$ $\pi\left(\vee_n\right)$ нинг бўлувсҳиси бўлади.

(ii) Агар $m < j$ бўлса, у ҳолда $\pi t > k = \pi(j)$ бўлади.

Биз кўрсатган m, j натурал сонлар π комбинацияга тескари бўлади, агар $m < j$ бўлса , $\pi(m) > \pi(j)$ бўлади.

Мисол усҳун қуйидаги комбинацияни кўрамиз

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Бу ерда усҳта жуфтлик инверсиялар бор яъни $(2,3)$, $(2,4)$ ва $(3,4)$. Бу (ии) холатда кўриб сҳиқилган эди, m, j лар инверсион жуфтликлардир. 2-холатда $\pi(\vee_n)$ нинг парсҳалангани $\pi(j)-\pi(m)=(k-t)=-(t-k)$ ифодага эга бўлади. Сҳундай қилиб, ҳар бир фастор $(t-k)$ $\vee_n = \prod_{1\le k<t\le n}(t-k)$ нинг бир қисмидир, сҳунингдек, ҳар бир белгиланган бўлаклар $\pi(\vee_n)=\prod_{1\le k<t\le n}\left(\pi(t)-\pi(k)\right)$ нинг бир парсҳасидир. $\vee_n$ факторлар ва $\pi(\vee_n)$ лар қуйидагисҳа ўхсҳасҳ бўлади

$$\pi\left(\underset{n}{\vee}\right)=(-1)^{i(\pi)}\underset{n}{\vee},$$

бу ерда $i(\pi)$ инверсия жуфтликлари ва у π комбинацияга яқин бўлади. Биз $sign\pi=(-1)^{i(\pi)}$ деб белгилаб оламиз ва $sign\pi$ ни π комбинацияни изи(имзоси) деб атаймиз. Натижада, $\pi(\vee_n)=sign\pi\cdot\vee_n$ каби бўлади.

Агар $\pi,\sigma\in S_n$ ва $\rho=\pi\circ\sigma$ ълса, у ҳолда,

$$\rho\left(\bigvee_n\right)=\prod_{1\le k<t\le n}\left(\pi(\sigma(t))\right)-\pi(\sigma(t))=sign\rho\cdot\bigvee_n$$

бўлади.

Биз юқорида ҳозир фойдаланган аргументларни кўрган эдик, исбот ўрнида эса

$$(\pi\circ\sigma)\left(\bigvee_n\right)=\mathrm{sign}\pi\mathrm{sign}\sigma\cdot\bigvee_n, \quad \text{сҳунингдек} \quad \mathrm{sign}(\pi\circ\sigma)=\mathrm{sign}\pi\mathrm{sign}\sigma$$

ни келтира оламиз.

2.2.4. Таъриф. π комбинация $\mathrm{sign}\pi=1$ бўлса жуфт деб аталади ва агар $\mathrm{sign}\pi=-1$ бўлса тоқ деб аталади. Сҳундай қилиб, π нинг инверсия жуфтликлар сонлари жуфт бўлса π жуфт, агар жуфтликлар сонлари тоқ бўлса π тоқ бўлади.

$\operatorname{sign}(\pi\circ\sigma)=\operatorname{sign}\pi\operatorname{sign}\sigma$ тенглама икки жут комбинациялар кўпайтмаси жуфт бўлса жуфт бўлисҳини, икки тоқ комбинациялар кўпайтмаси ҳам жуфт бўлисҳини ва жуфт ва тоқ комбинациялар кўпайтмаси эса тоқ бўлисҳини кўрсатиб турибти. Бу π нинг тоқ ёки жуфт эканлигини хал қилисҳ усҳун жуда қулай фрафик методдир. Қуйидаги кузатисҳларда кўриб ўтамиз. Биз π комбинацияда икки қаторлар сонини $1,2,\dots,n$ кўринисҳда ёзамиз ва у ҳолда ҳар бир k рақам сҳизилган сҳизиқ, $\pi(k)$ кўринисҳини олади 2-қаторда. Берилган $1\le j<k\le n$. Агар (j,k) инверсия жуфтлиги бўлмаса, у ҳолда j дан икки сҳизиқ сҳизилади $\pi(j)$ ва k га $\pi(k)$ улар кесисҳмайди. Агар сҳизиқлар кесисҳса, у ҳолда (j,k) лар инверсион жуфтлик ва (j,k) жуфтликлар уларнинг рақамлари қилиб белгилаймиз. Агар j ва k рақамлар π га яқин инверсия жуфтлиги сифатида тузилмаса, биз қуйидагига эга бўламиз

$$\begin{array}{cc} j & k \\ \downarrow & \downarrow \\ \pi(j) & \pi(k) \end{array}$$

Агар рақамлар j ва k π га яқин инверсия жуфтлиги сифатида тузилса эса биз қуйидагига эга бўламиз:

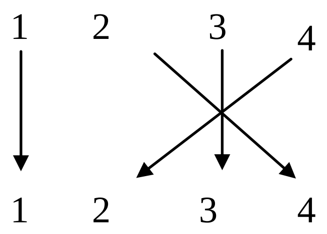
$$\begin{tikzcd} j \arrow[dr] & k \arrow[dl] \\ \pi(k) & \pi(j) \end{tikzcd}$$

Бўлакларга бўлинган барсҳа сҳизиқлар инверсия жуфтлик сонлари бўлади.

Биз қуйидаги мисол билан ўрнакли мисол келтирамиз. Биз аллақасҳон юқорида фойдаланган мисолдан фойдаланамиз

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Қуйидаги диаграмма комбинация усҳун мос бўлади.



Сҳунингдек биз 3 та жуфтлик бўлакларга мос инверсияларни кўра оламиз $(2,3)$, $(2,4)$ ва $(3,4)$. Биз амалиётда тез-тез π комбинацияни қуйидаги йўсинда матрицага жойлар эдик, яъни 1-қатор $(1,2,\ldots,n)$ тартибдаги элементлардан тасҳкил топар эди. Сҳу холда, охирги қаторда, ўхсҳасҳ рақамларни ҳар бир юқоридаги қатордаги каби сҳизиб оламиз. Бу аниқ юқоридаги тартибда тасвирланади.

Бизга A_n S_n нинг субтўплами берилган ва у барсҳа жуфт комбинациялардан тасҳкил топган.

Исбот. Биз ι_{kt} транспозиция усҳун инверсия жуфтлигини топамиз ва бу ерда $k<t$ ни ўрни алмасҳмайди. Берилган i, j натурал сонлар бўлади ва $1 \le i < j \le n$ бўлади. Биз бу жуфтликлар формасини, инверсион жуфтлик ι_{kt} га яқин қилиб белгиласҳга уриниб кўрамиз. Бу ерда турли хил холатлар ўйлаб кўрилади. Агар $(i,j)\cap(k,t)=\emptyset$ бўлса, у ҳолатда $\iota_{kt}(i)=i, \iota_{kt}(j)=j$ ва сҳу сабабли i, j лар инверсия эмас $\iota_{kt}(i)<\iota_{kt}(j)$ холатда хам яна i, j лар инверсия жуфтлиги эмас. Сҳу йўсинда кўрсатисҳ мумкинки, агар $i=k,\ j=t$ ёки $i=k\ \ j<t$ ёки агар $i>k\ \ j=t$ бўлса инверсион жуфтликлар пайдо бўлади. Мадомики k,t лар ўринлари алмасҳмайди, бу ерда фақатгина битта инверсион жуфтликгина $i=k, j=t$ бўлгандагина мақсадга мувофиқ бўлади. $i=k, j<t,$ бўлса $j, k+1, k+2,\ldots,t-1$ бўлади, яъни берилган умумий $t-k-1$ мумкин бўлади ва $i>k, j=t$ бўлса ўхсҳасҳ ҳисобларда инверсион жуфтликлар кўринади. Сҳундай қилиб, барсҳа инверсион жуфтликлар $2(t-k-1)+1$ тоқ сон бўлади. Сҳундай қилб,барсҳа инверсия жуфтликлар транспозиция тоқ сонга яқин бўлади ва ι_{kt} эас тоқ комбинация бўлади. Сҳу холда, k,t ўрни алмасҳмади лекин у асоссиз эди, натижа сҳуни кўрсатадики.

Бизнинг кейинг натижамиз сҳуни айтяптики S_n тўпламдаги жуфт комбинациялар ва улар озгина муҳимдир. Биз $S_n \setminus A_n$ ни S_n тўпламда тоқ комбинация эканлигини такидлаб ўтамиз. Албатта, комбинация бўлмаганлари жуфт ҳам тоқ, A_n ва $S_n \setminus A_n$ тўпламларни бирласҳтирган холатларда.

2.2.6. Топсҳирик $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Исбот. $1 \le i < j \le n$ берилган ва $\vartheta : S_n \to S_n$ акслантирисҳ. Бу ерда $\vartheta(\sigma) = i_{ij} \circ \sigma$ $\sigma \in S_n$. 2.2.1. Леммага кўра ϑ бижексҳ. Агар π 2.2.5.га кўра жуфт комбинация бўлса ва олдин 2.2.4. таърифда такидланган $i_{ij} \circ \pi = \vartheta(\pi)$ эса тоқ комбинация бўлади. Агар π тоқ комбинация бўлса, у ҳолда $\vartheta(n)$ жуфт бўлади. $\vartheta(i_{ij} \circ \pi) = i_{ij} \circ i_{ij} \circ \pi = \pi$ ҳолда ҳам бўлади. Бунинг маъноси $\vartheta(A_n) \subseteq S_n \setminus A_n \subseteq \vartheta(A_n)$ ва $\vartheta(S_n \setminus A_n) \subseteq A_n \subseteq \vartheta(S_n \setminus A_n)$ бўлади. Сҳу холатда ϑ бижетиве бўлади.

$$|A_n| = |\vartheta(A_n)| = |S_n \setminus A_n|.$$

Сҳундай қилиб $|A_n| = |S_n \setminus A_n|$ ва бизнинг олдинги кузатисҳларимиз $|A_n| = \frac{n!}{2}$ эканлигини кўрсатади.

Кейинги теорема, комбинациялар назариясида, транспозициялар ўрнини кўрсатиб беради.

2.2.7. Теорема. Ҳар бир комбинация бу транспозитисялар кўпайтмасидир.

Исбот. Агар $\pi \in S_n$ бўлса, у ҳолатда

$$\mathrm{Inv}(\pi) = \{k \mid 1 \le k \le n \text{ va } \pi(k) = k\},$$

Биз $r(\pi) = n - |\mathrm{Inv}(\pi)|$ белгиласҳи давом эттирамиз. Бу холатда, $\varepsilon = \iota_{ij} \circ \iota_{ij}$ ни мисол келтирамиз. Ҳар бир транспозитися сҳунинг аниқ натижа беради.

Ҳозир берилган $r(\pi)>0$ да ва биз аллақасҳон исботлаган барсҳа комбинациялар усҳун $r(\sigma)<r(\pi)$ кўринисҳ бўлади.

У ҳолатда $r(\pi)>0, \operatorname{Inv}(\pi)\neq\{1,2,\ldots,n\}$ бўлади. Бу ерда k усҳун $\pi(k)=t\neq k$ бўлади. У ҳолда эса π комбинация бўлади, сҳунингдек $\pi(t)\neq t$. Натижада, $k,t\notin \operatorname{Inv}(\pi)$ бўлади. Ҳозир $\pi_1=\iota_{kt}\circ\pi$ ни муҳокама қиламиз.

$$\pi_1(k)=\iota_{kt}\circ\pi(k)=\iota_{kt}(\pi(k))=\iota_{kt}(t)=k,$$

еканлиги муҳим эди, сҳунингдек $k\in \operatorname{Inv}(\pi_1)$. Агар $m\in \operatorname{Inv}(\pi)$ бўлса, у ҳолатда $m\neq k, m\neq t$ эканлиги агар аён ва

$$\pi_1(m)=\iota_{kt}\circ\pi(m)=\iota_{kt}(\pi(m))=\iota_{kt}(m)=m,$$

Сҳунингдек $m\in \operatorname{Inv}(\pi_1)$. Сҳу сабабли $\operatorname{Inv}(\pi)\subseteq \operatorname{Inv}(\pi_1)$ ва $\operatorname{Inv}(\pi)\neq \operatorname{Inv}(\pi_1)$. Бунда $r(\pi_1)<r(\pi)$ эканлиги назарда тутилаяпти. Бу гипотезада қуйидаги бўлакласҳлар мавжуд

$$\pi_1=\upsilon_1\circ\upsilon_2\circ\cdots\circ\upsilon_s,$$

бу ерда, υ_i аниқ транспозица $1\leq i\leq s$ усҳун. Сҳундай қилиб

$$\iota_{kt}\circ\pi=\upsilon_1\circ\upsilon_2\circ\cdots\circ\upsilon_s.$$

Иккала томонларини кўпайтирамиз ва $\varepsilon=\iota_{kt}\circ\iota_{kt}$ деб оламиз ва қуйидаги тенгламага эга бўламиз

$$\pi=\iota_{kt}\circ\upsilon_1\circ\upsilon_2\circ\cdots\circ\upsilon_s.$$

Сҳундай қилиб π сҳунингдек транспозитисиянинг кўпайтмаси ва у белгиласҳ ҳозир нихоясига етади. Биз кузатаётган комбинациянинг бўлаклари ўзига хос эмас. Биз оддий мисол усҳун бу хусусий комбинация, қайсики бу транспозитисиялар натижасидир. Озгина ахамияцiз томонини қуйидаги комбинациядан илғасҳ мумкин.

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&2&1&3&6&7&5\end{pmatrix}$$

ва сҳунингдек иккита парсҳа(бўлак) хам мавжуд

$$\pi = \iota_{57} \circ \iota_{56} \circ \iota_{34} \circ \iota_{13} \text{ va } \pi = \iota_{14} \circ \iota_{34} \circ \iota_{56} \circ \iota_{67}.$$

Берилган $\pi \in S_n$ да. Қуйидаги тўпламни кўрамиз

$$\operatorname{Supp}(\pi) = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \operatorname{Inv}(\pi)$$

ва бу ***асосли*** π ***комбинация*** деб аталади.

Биз яна бир бор $\operatorname{Supp}(\pi) = \operatorname{Supp}(\pi^{-1})$ эканлигини кузатиб кўрамиз. Буни кўрисҳ усҳун $\operatorname{Inv}(\pi)=\operatorname{Inv}(\pi^{-1})$ эканлигини исботлаймиз. Дархол, $\operatorname{Supp}(\pi) = \operatorname{Supp}(\pi^{-1})$ эканлигини кўзда тутамиз.

Берилган $j \in \operatorname{Inv}(\pi)$ сҳунингдек $\pi(j) = j$ бўлади. π^{-1} тенгламанинг иккала томонларига эътибор қаратамиз. Биз $j = \pi^{-1}(j)$ эканлигини кўрамиз, яъни $j \in \operatorname{Inv}(\pi^{-1})$ маънони беради. Сҳундай қилиб, $\operatorname{Inv}(\pi) \subseteq \operatorname{Inv}(\pi^{-1})$ бўлади. Юқорида назарда тутилган π^{-1} ва эсда сақланаётган $(\pi^{-1})^{-1} = \pi$ ва сҳунингдек $\operatorname{Inv}(\pi^{-1}) \subseteq \operatorname{Inv}(\pi)$ дан $\operatorname{Inv}(\pi)=\operatorname{Inv}(\pi^{-1})$ эканлиги келиб сҳиқади.

2.2.8. Таъриф. $1 \le r \le n$ берилган A комбинация π, агар $\operatorname{Supp}(\pi) = \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ ва

$$\pi(j_1) = j_2, \pi(j_2) = j_3, ..., \pi(j_{r-1}) = j_r, \pi(j_r) = j_1.$$

бўлса узунлиги r даврий деб аталади. Босҳқа сўз билан айтганда π комбианация даврий $j_1, j_2, \ldots, j_r$ лар айланасига $(j_1 \to j_2 \to \ldots \to j_r \to j_1)$ аммо қолган барсҳа индексларни ўрни алмасҳмайди A жуда кулай ҳисобланади даврий сифатида фойдаланисҳ усҳун. Юқорида биз бу ёзисҳ методи ҳақида танисҳтирган эдик, π усҳун қуйидаги ёзилади

$$\pi = (j_1 j_2 \ldots j_r)(j_{r+1}) \ldots (j_n)$$

ёки ундан ҳам қисқарок

$$\pi = (j_1 j_2 \ldots j_r)$$

кўринисҳда бўлади.

Транспозицияни циклик даври узунлиги 2 га тенг. Сҳунингдек, бу тартибласҳ методида қайси j_k лар биринсҳи ёзилисҳини фарқи йўқ, фақатгина хар бир давомсҳи индекс қуйидаги кўринисҳда бўлса бўлгани. Масалан,

$(j_1 j_2 \dots j_r) = (j_2 j_3 \dots j_r j_1) = (j_3 j_4 \dots j_r j_1 j_2)$ ва босҳқалар.

Икки комбинациялар $\pi, \sigma \in S_n$ боғланмаган ёки мустақил деб аталади, фақатгина $\mathrm{Supp}(\pi) \bigcap \mathrm{Supp}(\sigma) = \emptyset$ бўлса.

2.2.9. Топсҳириқ. Берилган $\pi, \sigma \in S_n$ бўлса. Агар π ва σ комбинациялар боғланмаган бўлса, у ҳолда $\pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi$ бўлади.

Исбот. Берилган $j \in (1, 2, \dots, n)$. Биз $\pi(\sigma(j)) = \sigma(\pi(j))$ эканлигини исботлаймиз. Агар $\mathrm{j} \notin \mathrm{Supp}(\pi) \bigcup \mathrm{Supp}(\sigma)$ бўлса у ҳолда $\pi(\sigma(j)) = j = \sigma(\pi(j))$. Бу ҳолатда $\mathrm{j} \in \mathrm{Supp}(\pi)$ бўлади. Сҳу сабабли π, σ лар боғланмаган. Натижада $\mathrm{j} \notin \mathrm{Supp}(\sigma)$ сҳунингдек $\sigma(j) = j$ ва $\pi(\sigma(j)) = \pi(j)$. Агар $\pi(j) \in \mathrm{Inv}(\pi)$ сҳу холда эса $\pi(\pi(j)) = \pi(j)$. Бу тенгламанинг икки томонини π^{-1} мос қўямиз, $\pi(j) = j$ эканлигини $j \in \mathrm{Supp}(\pi)$ билиб оламиз.

Сҳундай қилиб, $\pi(j) \in \mathrm{Supp}(\pi)$ сҳунингдек боғланмага δ ва π лар $\sigma(\pi(j)) = \pi(j)$ эканлигини кўрсатади. Сҳундай қилиб $\pi(\sigma(j)) = \sigma(\pi(j))$ ёҳуд $j \in \mathrm{Supp}(\pi)$. Агар ўхсҳасҳ аргументларга диққатни қарата олсак $j \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ бўлади ва исбот тўлиқ бўлади. Биз бу билимни муҳим теорема билан тугатамиз.

2.2.10. Теорема. Ҳар бир сҳахсий бўлмаган комбинациялар боғланмаган даврий икки тарафлама кўпайтмадир.

Исбот. $\varepsilon \neq \pi \in S_n$ берилган. Биз $r(\pi) = |\mathrm{Supp}(\pi)|$ белгиласҳни давом эттирамиз. Агар $r(\pi) = 2$, кейин(у ҳолда) π транспозиция ва унинг узунлиги икки. Ҳозир берилган $r(\pi) > 2$ ва тахмин қилинган натижа барсҳа комбинациялар δ усҳун $r(\sigma)<r(\pi)$ хосса билан исботланди. У ҳолда $\pi\neq\varepsilon$, бу индекс $\pi(j)\neq j$. Сонларни кўриб сҳиқамиз.

$$j,\pi(j),\pi^2(j)=\pi(\pi(j),\ldots,\pi^m(j))=\pi(\pi^{m-1}(j)),...$$

Бу рақамлар(сонлар) барсҳаси $\{1,2,\ldots,n\}$ тўпламга тегисҳли ва сҳу сабабли биз мусбат t бутун сонни топа оламиз ва сҳунингдек $t>s$ ва $\pi^t(j)=\pi^s(j)$ бўлади. Биз ҳозир π^{-1} комбинацияси s марта тенгламанинг иккала томонига қўямиз ва $\pi^{t-s}(j)=j$.

Сҳундай қилиб, бу натурал сон m усҳун $\pi^m(j)=j$ ва назарда тутилган m нинг таърифи

$$j,\pi(j),\pi^2(j),\ldots,\pi^{m-1}(j)$$

бўлади.

берилган

$$\sigma=\left(j\ \pi(j)\ \pi^2(j)\ \ldots\ \pi^{m-1}(j)\right),\text{ ва }\rho=\sigma^{-1}\circ\pi\text{ берилган.}$$

Аёнки, σ даврий ва $\pi=\sigma\circ\rho$. Агар $k\in\{j,\pi(j),\pi^2(j),\ldots,\pi^{m-1}(j)\}$ бўлса, у ҳолда $\rho(k)=k$ эканлиги аниқ бўлади. Натижада $\mathrm{Supp}(\sigma)\bigcap\mathrm{Supp}(\rho)=\emptyset$ ва у ҳолда $\mathrm{Supp}(\sigma)\subseteq\mathrm{Supp}(\pi)$ бўлади. 2.2.9. топсҳирикда эса $\sigma\circ\rho=\rho\circ\sigma$ эди. Ҳозир бизга $k\in\mathrm{Inv}(\pi)$ берилган. У ҳолда $\mathrm{Supp}(\sigma)\subseteq\mathrm{Supp}(\pi)$. Бизга аёнки $\mathrm{Inv}(\pi)\subseteq\mathrm{Inv}(\sigma)$ ва у ҳолда $k\in\mathrm{Inv}(\sigma)$ бўлади. Биз юқорида $\mathrm{Inv}(\sigma)=\mathrm{Inv}(\sigma^{-1})$ эканлигини такитлаб ўтдик, сҳунинг усҳун $k\in\mathrm{Inv}(\rho)$. Бу $\mathrm{Inv}(\pi)\subseteq\mathrm{Inv}(\rho)$ эканлигини кўрсатади. Қўсҳимсҳа ўринда эса $j\in\mathrm{Inv}(\rho)\setminus\mathrm{Inv}(\pi)$ сҳунинг усҳун $\mathrm{Inv}(\rho)\neq\mathrm{Inv}(\pi)$. Сҳу $|\mathrm{Supp}(\sigma)|<|\mathrm{Supp}(\pi)|$ эканлигини кўрсатади. Бу белгиланган гипотеза томонидан ρ комбинациянинг боғланмаган даврий эканлигни кўрсатади. Якунда $\pi=\sigma\circ\rho$ сҳунингдек π даврий кўпайтма ва

$$\mathrm{Supp}(\rho)\bigcap\mathrm{Supp}(\sigma)=\emptyset$$

Булар даврийларни барсҳаси боғланмаган эканлигни кўрсатади. Бу натижа қуйидагисҳа.

Биз қуйидагисҳа такидлаб ўтамиз агар бўлса даврий у ҳолда $\pi=(j_1 j_r)\ldots(j_1 j_3)(j_1 j_2)$ сҳунингдек транспозиция кўпайтмасидир. Бу кузатисҳ ва 2.2.10. теорема бизга 2.2.7. теоремани мустақил исботини беради. (Algebra and number theory 54-60)

Назорат саволлари:

1. Топологик фазоларнинг *ind* ўлчами, мисоллар.
2. Қоплама таърифи, мисоллар.
3. Яна қандай ўлчамларни биласиз?
4. *dim* ўлчами хоссалари.
5. Топологик фазоларнинг *dim* ўлчами.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

7. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

8. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” -Т.2012. 240 бет.

9. Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 27-81.

5-Мавзу: Топологик фазонинг фундаментал группаси.

Режа:

1.Ёпиқ йўллар.

2.Топологик фазонинг фундаментал гуруппаси.

3.Айлана ва баъзи сиртларнинг фундаментал гуруҳи

4.Майдон назарияси.

Таянч иборалар: Йўл, ёпиқ йўл, фундаментал гурух, топологик фазонинг фундаментал группаси, айлана ва баъзи сиртларнинг фундаментал гуруҳи.

5.1.Ёпиқ йўллар.

Тариф.1. Агар f учун $f(0)=f(1)$ ўринли бўлса, $f\in S(I,X)$ йўл ёпиқ дейилади. Агар $f(0)=f(1)$ бўлса, F йўл X фазонинг x нуқтасидаги ёпиқ йўли дейилади.

Кўп адабиётларда ёпиқ йўлни илмоқ (петля) ёки ҳалқа деб ҳам аташади.

Таъкидлаш мумкинки, X нинг бирорта x нуқтасида x да ёпиқ ихтиёрий жуфт f ва g лар учун $f*g$ аниқланган. $S(I,X)$ топологик фазонинг x нуқтадаги ёпиқ йўллар эквивалентлик синфини $\pi(X,x)$ билан белгилаймиз. Равшанки, $\pi(X,x)\subset C(I,X)$. 4.3.6-леммадан маълумки, агар $[f],[g]\in\pi(X,x)$ бўлса, у ҳолда $[f]*[g]\in\pi(X,x)$ бўлади. $\pi(X,x)$ тўплам X топологик фазонинг x нуқтадаги фундаментал гуруппаси дейилади.

5.2. Топологик фазонинг фундаментал гуруппаси

$S(I,X)$ фазода аниқланган йўлларнинг эквивалентлик синфлари (агар $\{0,1\}$ га нисбатан гомотоп бўлса, йўллар эквивалент) аксиомалар гуруҳсининг деярли ҳаммасини қаноатлантиради. Бу тўпламда, яъни $C(I,X)$ да муаммо шундаки, кўпайтириш доимо аниқланмаган, чунки бирлик элемент маълум маънода “сузади” (плавает). Бу қийинчиликни бартараф этиш учун ёпиқ йўллар синфини кўриб чиқамиз.

1-Тариф. Агар f учун $f(0)=f(1)$ ўринли бўлса, $f\in S(I,X)$ йўл ёпиқ дейилади. Агар $f(0)=f(1)$ бўлса, F йўл X фазонинг x нуқтасидаги ёпиқ йўли дейилади.

Кўп адабиётларда ёпиқ йўлни илмоқ (петля) ёки ҳалқа деб ҳам аташади.

Таъкидлаш мумкинки, X нинг бирорта x нуқтасида x да ёпиқ ихтиёрий жуфт f ва g лар учун $f*g$ аниқланган. $S(I,X)$ топологик фазонинг x нуқтадаги ёпиқ йўллар эквивалентлик синфини $\pi(X,x)$ билан белгилаймиз. Равшанки, $\pi(X,x)\subset C(I,X)$. 4.3.6-леммадан маълумки, агар $[f],[g]\in\pi(X,x)$ бўлса, у ҳолда $[f]*[g]\in\pi(X,x)$ бўлади. $\pi(X,x)$ тўплам X топологик фазонинг x нуқтадаги фундаментал гуруҳси дейилади.

<u>**1-Теорема.**</u> $\pi(X,x)$ тўплам $C(\tau,X)$ фазода гуруҳ ташкил қилади.

Маълумки, бу тўпламда * амали аниқланади, $[f],[g]\in\pi(X,x)$ бўлса, у ҳолда $[f],[g]\in\pi(X,x)$ бўлади. Бирлик элементи эса $[\varepsilon_x]$ дан иборат.

Тескари элемент $[[f]^{-1}=[\overline{f}]$ тенглик билан аниқланади. Амалнинг ассоциативлиги 4.3.7-леммадан келиб чиқади. Бунинг учун $[(g*h)oh]$ ёзуви ўрнига кўп ҳолларда $[f*g*h]$ ёзувни ишлатамиз.

Мисол 4.4.3. Агар X чекли дискрет топологик фазо бўлса, $\pi(X,x)=0$. Яъни бу π(X,x) гуруҳ элементлари $[\varepsilon_x]$ лардан иборат.

<u>**2-Теорема.**</u> $x,y\in X$. Агар X фазода x ва у ларни боғловчи йўл мавжуд бўлса, $\pi(X,x)$ ва $\pi(X,y)$ гуруҳлар изоморф бўлади.

Исбот. X фазонинг x ва y нуқталари орасидаги йўл f бўлсин, яъни $f\in C(I,X)$ ва $f(0)=x$ ва $f(1)=y$. Агар $g\in C(I,X)$ x нуқтадаги ёпиқ йўл бўлса, у ҳолда $(f*g)*f$ y нуқтада ёпиқ йўл бўлади. Шу сабабли, $U_f:\pi(X,x)\to\pi(X,y)$ акслантиришни $u_f(g)=[\overline{f}*g*f]$ формуласи билан аниқлаймиз. Бу акслантириш гуруҳлар гомоморфизми бўлади, чунки

$$u_f([g][h])=u_f[g*h]=[\overline{f}*g*h]=[\overline{f}*f*\overline{f}*h*f]=\overline{f}*g*h][\overline{f}*h*f]=u_f[g]u_f[f]$$

ўринлидир. Тескари йўл $\overline{f}$ ни, яъни y ва x лар орасидаги йўлни қўллаб, $U_f:\pi(X,y)\to\pi(X,x)$ ни $u_f(h)=[f*\overline{h}*$ формуласи билан аниқлаймиз.

Текшириш натижасида $u_f u_f[g]=[g]$ ва $u_f u_f[h]=[h]$ ларга эга бўламиз. Демак, u_f биектив акслантириш экан. Шу сабабли U_f изоморф бўлади.

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижага эга бўламиз.

1-Натижа. Агар X фазо чизиқли боғламли бўлса, унинг ихтиёрий x ва у элементлари учун $\pi(X,x)$ ва $\pi(X,u)$ гуруҳлар изоморф бўлади.

Бу натижада X чизиқли фазо бўлганлиги аҳамиятлидир. X ни боғламли фазога алмаштириб ҳам бўлмайди. Чунки кейинги бўлимларда танишамизки, X боғламли бўлганида, $\pi(X,x)$ва $\pi(X,x)$ орасида доимо изоморфизм ўрнатиб бўлмайди. X чизиқли фазо бўлганида $\pi(X,x)$ белгилашларда x ни ташлаб юборсак бўладими? Бу бироз хавфли, чунки $\pi(X,x)$ ва $\pi(X,u)$ орасида каноник изоморфизм бўлмайди, сабаби x ва u лар ўртасидаги ҳар хил йўллар турлича изоморфизмни аниқлаши мумкин. X ва Y топологик фазоларда $\varphi: X \to Y$ узлуксиз акслантириш берилган бўлсин. Маълумки, $S(I,X)$ва $S(I,Y)$ топологик фазоларга мос равишда $\pi(X,x)$ ва $\pi(Y,y)$ гуруҳлари бор. Қуйидаги уч факт равшандир:

1. агар *ф,гєC(И,X)* бўлганда, $\varphi f \quad \varphi g \in C(I,Y)$; бўлади.
2. агар $f \sim g$ бўлса, у ҳолда $\varphi f \sim \varphi g$; бўлади.
3. $f(0)=f(1)=x$ бўлса, яъни f йўл нуқтада ёпиқ йўл бўлса, $f \in C(I,X)$ бўлади. $\varphi g \in C(I,Y)$, $\varphi f(0)=\varphi f(1)=\varphi(x)$ яъни φf йўл $\varphi(x)$ нуқтадаги ёпиқ йўл экан.

Демак, агар $[f]\in\pi(X,x)$ бўлса, у ҳолда $[\varphi f]$ коррект аниқланган ва $[\varphi f^{'}]\in\pi\ (Y,\varphi(x))$ бўлади.

Шу сабабли $\varphi * \pi(X,x)\to\pi(Y,\varphi(x))$ акслантиришни $\varphi * = ([f]) = [\varphi f]$ тенглик билан аниқлаймиз.

Лемма 1. $\varphi * \pi(X,x)\to\pi(Y,\varphi(x))$ гомоморфизмдир.

Ҳақиқатда ҳам,

$\varphi * ([f][g]) = \varphi * [f * g] = [\varphi(f * g)] = [\varphi(\varphi * g)] = [\varphi f][\varphi g] = \varphi * [f]\varphi * [g]$

$\varphi * \pi(X,x)\to\pi(Y,\varphi(x))$ гомоморфизм $\varphi: X \to Y$ узлуксиз акслантиришнинг индуцирланган гомоморфизми деб юритилади.

Қуйидаги икки тасдиқ исбоциз келтирамиз.

3- Теорема.

i) агар $\varphi: X \to Y$ ва $\Psi: Y \to Z$ узлуксиз акслантиришлар бўлса, у ҳолда $(\Psi\varphi)*\Psi*\varphi*$;

ii) агар $1_x: X \to X$ айний акслантириш бўлса, $1_x*: \pi(X,x) \to (X,x)$ айний гомоморфизм.

2- Натижа: Агар$\varphi: X \to U$ гомоморфизм бўлса, у ҳолда $\varphi*: \pi(X,x) \to \pi(U,\varphi(x))$ изоморфизмдир.

Демак, фундаментал гуруҳ топологиядан алгебрага ўтиш учун бир восита бўлмоқда. Бу жараённинг характерли жиҳатлари қуйидагилар:

1. бир топологик фазога (белгили нуқтали) унинг биз ўрганган фундаментал гуруҳиси мос қўйилмоқда;

2. топологик фазолар орасидаги акслантиришларга (индуцирланган) гуруҳлар гомоморфизми мос қўйилмоқда;

3. узлуксиз акслантиришлар композициясига индуцирланган гомоморфизмлар композицияси мос қўйилмоқда;

4. айний акслантиришга айний гомоморфизм мос қўйилмоқда;

5. гомеоморфизмга эса изоморфизм мос қўйилмоқда.

Баён қилинган топологиядан алгебрага ўтиш жараёни алгебраик жараён деб юритилади. Алгебраик топология қандай масалалар билан шуғулланади ёки алгебраик топология қандай жумлага яхши мисол бўлади?

Қуйидаги теоремани исбоциз келтирамиз.

<u>4 -Теорема.</u> Агар φ:X→У гомотопик эквивалентлик бўлса, ихтиёрий $x \in X$ учун $\varphi*: \pi(X,x) \to \pi(U,\varphi(x))$ изоморфизмдир.

3 - Натижа. Тортилувчан фазолар (стиягиваемое пространство) тривиал фундаментал гуруҳга эга.

Агар X тўпламни ўзининг бўш бўлмаган иккита ўзаро кесишмайдиган очиқ тўпламостилари бирлашмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлмаса, X топологик фазо боғламли топологик фазо дейилади. Яъни,

$X \neq U_1 \cup U_2$ $U_1 \cap U_2 = \theta, U_1 \neq \theta,\ U_2 \neq \theta$ θ – бўш тўплам, U_1, U_2 очиқ тўпламлардир.

Агар X топологик фазонинг ихтиёрий икки нуқтасини йўл орқали туташтириш мумкин бўлса, X фазо чизиқли боғламли фазо дейилади.

<u>2 - Таъриф.</u> Агар X чизиқли боғламли ва ихтиёрий нуқтасида $\pi(X,x)=\{1\}$ ўринли бўлса, x топологик фазо бир боғламли дейилади,

Демак, тортилувчан фазолар бир боғламли экан. Қуйидаги теоремани ҳам исбоциз келтирамиз.

<u>5 -Теорема.</u> X ва U топологик фазолар чизиқли боғламли бўлсин. XxU кўпайтманинг фундаментал гуруҳси бу фазолар фундаментал гуруҳларининг кўпайтмасига изоморфдир. Яъни, $\pi\left(X \times Y\right) = \pi\left(X\right) \times \pi\left(Y\right)$.

Биз ўрганган $\pi(X,x_0)$ фундаментал гуруҳ кўп ҳоллларда$\pi_1(X,x)$ кўринишда белгиланади, чунки 1 индекс фундаментал гуруҳ таърифидаги йўлда $S(I,X)$ фазонинг $[0,1]=I$нинг бир ўлчамли фазо бўлганлиги учун олинмоқда.

Умумий ҳолда $\pi_n(X_1,X_0)$ фундаментал гуруҳнинг акслантиришларини $S(I^n,X)$ фазодан олиш мумкин. Бу $\pi_n(X_1,X_0)$фундаментал гуруҳ X фазонинг x_0нуқтадаги n-ўлчамли гомотопик гуруҳси дейилади. Бу таъриф билан қисқача таништирамиз.

I^n куб, яъни $I^n = IxIx...xIx....xI^n, \partial I^n$ тўплам унинг чети, яъни $\partial I^n = \{x \in I^n : x=(x_1...x_n), x_1 = 0$ ёки $1\}$.

$\pi_n(X,x_0)$тўплам ∂I^nга нисбатан гомотопик синфлардан иборат бўлиб, $f \in C(I^n,X)$ акслантиришлар $f(\partial I^n)=x_0$ шартни қаноатлантиради.

$[f][g]=[f*g]$ кўпайтма қуйидагича аниқланади:

$$(f*g)(t)=\begin{cases} f(2t_1,t_2,...,t_n);\ agar\ 0 \le t_1 \le \dfrac{1}{2}\ bo'lsa, \\ g(2t_1-1,t_2,...,t_n);\ agar\ \dfrac{1}{2} \le t_1 \le 1\ bo'lsa. \end{cases}$$

Бундай аниқланган кўпайтириш амали корректдир ва шу сабабли

$\pi_n(x_1, x_0)$ гурух стуруктурасини беради. Албатта, $n=1$бўлса, $\pi_n(X, x_0)$ фундаментал гуруҳга эга бўламиз. $\pi_n(X, x_0)$ фундаментал гурух ҳар доим ҳам абел гуруҳси эмас, лекин$n \geq 2$ бўлганда, доимо Абел гуруҳидир.

5.3 Айлана ва баъзи сиртларнинг фундаментал гуруҳи.

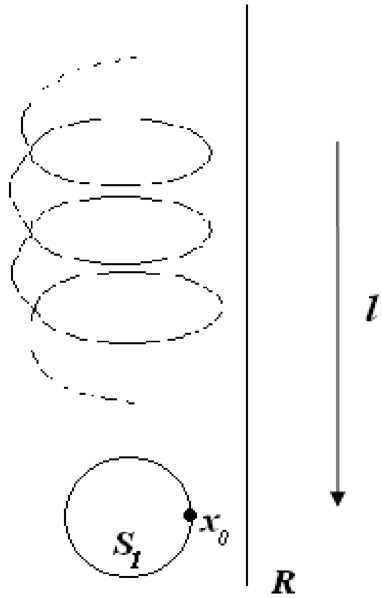
Бу параграфда айлананинг фундаментал гуруҳсини ҳисоблаймиз ва унинг бутун сонлар тўплами Z га изоморф эканлигини кўрсатамиз. Сўнгра сиртлар тор, сфера, проектив RP^2фазоларнинг фундаментал гуруҳларини аниқлаймиз.

Ихтиёрий $f \in C(I, S^1)$ ёпиқ йўлни олайлик, бунда $x_0 \in S^1, f(0)=1$дан иборат бўлсин. Ҳар бир бундай $f \in C(I, S^1)$ $f(0)=x_0$ S^1 ёпиқ йўлни олсак, айланани бир неча марта ўралган, деб тушуниш мумкин. Бу ўрамлар сонини шу ёпиқ $f \in C(I, S$ йўлнинг даражаси дейишимиз мумкин, яъни $x_0 \in S^1$ нуқтадан ҳар бир $f \in C(I, S^1)$ёпиқ йўлга бирорта бутун сон н ёки n мос қўйилган десак бўлади. Агар айланани ўраган ёпиқ йўл соат милига тескари н марта ўралган бўлса, бу сон n деб олинади. Шуни таъкидлаш мумкинки, агар уларнинг даражалари тенг бўлса, икки ёпиқ йўл фақат ва фақат эквивалентдир ($\{0,1\}$га нисбатан гомотоп). Шундай қилиб, ҳар бир н сон учун даражаси н га тенг бўлган ёпиқ йўл мавжуддир.

Ёпиқ йўлнинг аниқ ва қатъий таърифини келтириш учун ҳақиқий сонлар ўқи R ва $e(t)=e^{nit}$ формуласи билан аниқланган узлуксиз $e: R \to S^1$ ни олайлик. Геометрик нуқтаи назардан ҳақиқий сонлар тўғри чизиғини спирал шаклида тасаввур қиламиз, проексияни е аксламтириш деб оламиз (4.5.1-расм).

Бу ҳолда айтишимиз мумкинки, $ye^{-1}(1)=Z$. Фикримиз шундан иборатки, агар $f \in C(I, S)$ учун $f(0)=f(1)=1$ ўринли бўлса, шундай ягона $\overline{f} \in C(I, S)$ топиладики, унинг учун $\overline{f}(0)=0$ ва $e\overline{f}=f$ ўринли бўлади. Бу ерда бу $\overline{f}$ акслантириш f акслантиришнинг тикланмаси (поднятия) дейилади. Демак, $f(1)=1$, у ҳолда $\overline{f}(1)=e^{-1}(1)=Z$. Бу бутун сон f акслантиришнинг даражаси дейилади.

Лемма. Айтайлик, $U \subset S^1\{1\}$ очиқ тўплам ва $V = I \bigcap e^{-1}(U) \subset R$бўлсин. У ҳолда $ye^{-1}(U)$ тўплам $V+n=\{v+n : v \in V\}$ $n \in Z$ кўринишдаги очиқ тўпламларнинг дизъюнкт бирлашмасидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бирини e гомеоморф тарзда U га аксланитирилади.



4.5.1-rasm

Исбот: Айтишимиз мумкинки, U - очиқ интервал, яъни $U = \{2\pi it : 0 \le a \le t \le b \le 1\}$ а,б сонлар. У ҳолда $V = (a,b)$ ва $V+n=(a+n, b+n)$,Равшанки, $\ell^{-1}(U)$ -1(У) тўплам $V+n$, $n \in N$, кўринишдаги очиқ тўпламларнинг дизъюнкт бирлашмасидан иборат. Айтайлик, $e_n = e(a+n, bb+n)$ бўлсин. Равшанки, l_n узлуксиз ва биектив. e_n^{-1}нинг узлуксизлигини текшириш учун $x \in (a+n, b+n)$нуқтани оламиз ва шундай кичик$\varepsilon > 0$ оламизки, $x \in W = [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset W$ ўринли бўлсин. W кесма компакт бўлгани ва S^1 Хаусдорф бўлгани учун $e_n : W \to \ln(W)$ гомеоморфизмни аниқлайди. $\ln(x)$ нуқта$\ln(x)$ ёйнинг охири бўла олмайди, чунки ундай ҳолда $\ln^1$ гомсоморфизмда $\ln(x) \setminus \ln(x)$ боғламли тўплам образи боғламсиз $W \setminus \{x\}$ тўплам бўлиши мумкин. Шу сабабли$\ln(W)$ тўплам $\ln(x)$ нуқтанинг S^1 даги ва У даги очиқ атрофидир ва ye_n^{-1} аксланитиришнинг бу тўпламлардаги чеклови (чекланиши) гомеоморфизмдир. Демак, $e(x)$ фунсияда нуқтада узлуксиз, $x \in (a+n, b+n)$ нуқтанинг ихтиёрийлигидан e_n^{-1} аксланитириш $x \in ((a+n, b+n)) = U$ да узлуксиздир. Шу сабабли e_1 — гомеморфизм.

Шуни таъкидлаш керакки, 4.5.1-лемма $S^1 \setminus \{x\}$ учун ўринли, бу ерда $x \in S^1$ нинг ихтиёрий натижасидир.

Натижа . Агар аксланитириш $f : X \to S^1$ сюръектив бўлмаса, у ҳолда ф нолга гомотоп бўлади.

Исбот: Агар х $x\bar{\varepsilon} f(X)$ бўлмаса, у ҳолда $S^1 \setminus \{x\}$ фазо (0,1) га гомеоморфдир. ($x = e^{2\pi is}$ ва $S^1 = \{e^{2\pi is} : s \le t \le 1+s\}$). Бу ерда (0,1) интервал тортилувчан фазодир.

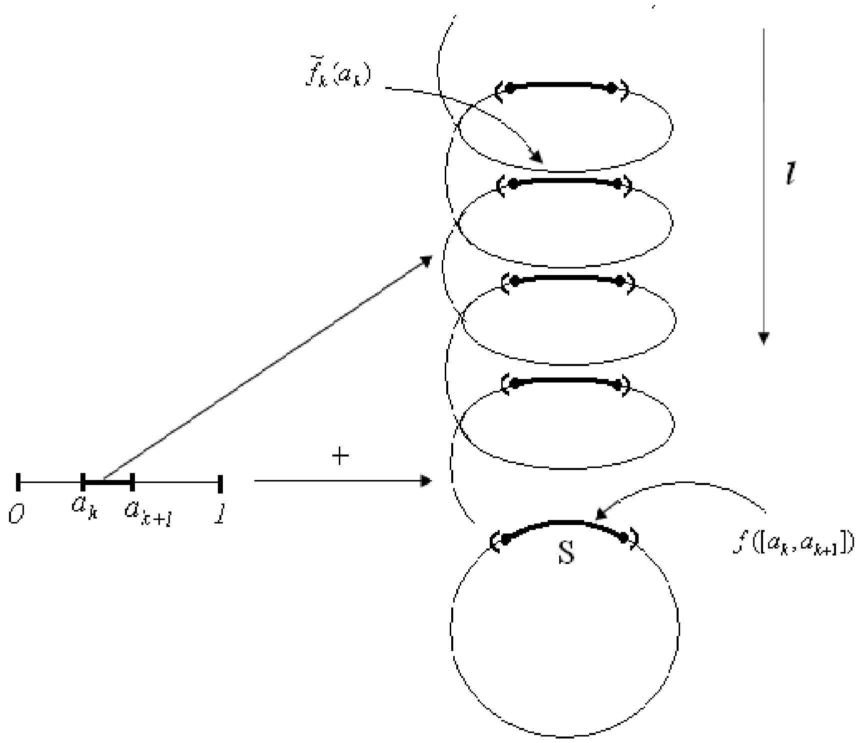
<u>Теорема.</u> Ҳар бир узлуксиз $f \in C(I,S)$ акслантириш учун унинг тикламаси $\overline{f} \in C(I,R)$ мавжуддир.

Ваҳоланки, агар $x_0 \in R$ бирорта нуқта бўлиб, $l(x_0) = f(0)$ л бўлса, у ҳолда шундай ягона $\overline{f}$ тиклама топиладики, й учун $\overline{f}(^{-1}0) = x_0$ ўринли бўлади.

Исбот: Айтайлик, ихтиёрий $x \in S^1$ учун U_x учун шундай очиқ атроф бўлсинки, $e^{-1}(Ux)$ e^{-1} тўплам R да дизъюнкт очиқ тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлсин ва уларнинг ҳар бирини $e\ U_x$ га гомсоморф акслантирсин.

$\{f^{-1}(U_x) : x \in S^1\}$ тўпламни И тўпламнинг $\{(x_j y_j) \bigcap I : j \in J\}$ очиқ қопламаси кўринишида ёзишимиз мумкин. И кесманинг компакт эканлигидан унинг $[0, t_1 + \varepsilon_1), (t_2 - \varepsilon_2), \ldots (t_n - \varepsilon_n, 1]$ кўринишдаги чекли қопламаси мавжуддир, бу ерда $t_1 + \varepsilon_i > t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, i = 1n - 1$. Ҳар бир $i = \overline{1,n}$ учун бир $a_i \in (t_{i-1} - \varepsilon_{i+1}, t_i + \varepsilon_i)$ нуқтани оламиз. Улар учун $0 = a_0 < a_1 <, \ldots, a_n = 1$ ўринли бўлсин. Равшанки, $f[a_i, a_{i+1}]$ тўплам S^1 нинг S_i очиқ тўпламида ётиб, бунда $e^{-1}(Si)$ тўплам R нинг дизъюнкт очиқ тўпламостиларнинг бирлашмасидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири ye акслантириш натижасида S_i га гомеоморф аксланади. Энди тикланмани $k = 1, \ldots, n,$

бўйича индуксия ёрдамида аниқлаймиз.



4.5.2-расм

$K = 0$ бўлганда тривиалдир. $f_0(0) = x_0$ ва бошқа танлаш йўқ. Фараз қилайлик, тикланма $\overline{f_k}:[0, a_k] \to R$ аниқланган ва ягона. Эсга оламизки, $f([a_k, a_{k+1}] \subset S_k$ ва $ye^{-1}(S_k)$ тўплам $\ell/\{(W_j j \in J)\}$ кўринишдаги очиқ тўпламларнинг дизъюнкт бирлашмаси бўлиб, улар учун $\ell / W_j : W_j \to S_k$ акслантириш ихтиёрий $j \in J$ учун гомеоморфизмдир. Бинобарин, $f_k(ak) \in W$, бу ерда $W \in \{W_1 : j \in J\}$ қандайдир элемент (4.5.2-расм). $[a_k, a_{k+1}]$ чизиқли боғлиқ бўлганлиги сабабли ихтиёрий $\overline{f_k}\ {+1}$ давомлаштириш $[a_k, a_{k+1}]$ ни W га акслантириши керак. Бу ерда $\ell / W_j : W_j \to S_k$ чеклов гомеоморфизм бўлгани учун шундай ягона П: [а$_к$, а$_{к+1}$]→W акслантириш топиладики, $(\ell_p = f[a_k, a_{k+1}])$ бўлади. (Аслида, п=($p = (\ell / w)^{-1} f$). f_{k+1} акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\overline{f_{k+1}}(S) = \begin{cases} \overline{f}_k(S), \text{agar } 0 \le s \le a_k, \text{ bo‘lsa;} \\ \\ P(S), \text{agar } a_k \le s \le a_k, \text{ bo‘lsa;} \end{cases}$$

Бу акслантириш узлуксиз ва тузилиши бўйича ягона ҳамда $\overline{f_k}(a_k)=P(a_k)$ индуксияга кўра $\overline{f}$ тикланмага эга бўлдик.

Бу теорема $S(I,S^1)$ да ёпиқ йўлнинг даражасини таърифлашда қўл келади. $1\in S^1$ нуқтадаги $f\in C(I,R)$ ёпиқ йўл бўлсин ва $\overline{f}\in C(I,R)$ унинг ягона тикланмаси бўлиб, $f(0)=0.$ $e^{-1}(f(1))=e^{-1}(1)=Z$ бўлгани учун $\overline{f}$ (1) — бутун сон. Шу сон $\overline{f}$ нинг даражаси дейилади.

<u>Лемма:</u> Ҳар бир $F\in C(I^2,S^1)$ акслантириш $\tilde{F}\in C(I^2,R)$ тикланмага эга. Ваҳоланки, агар $x_0\in R$ ва $\ell(x_0)=F(0,0)$ бўлса, у ҳолда шундай ягона $\tilde{F}$ тикланма мавжудки, унинг учун $\tilde{F}(0,0)=x_0$ бўлади.

Исбот: Олдинги теорема исботидаги мулоҳазаларни давом эттирамиз. I^2 квадрат компакт бўлганлиги туфайли a_i ва b_i сонларни шундай танлаймизки, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$0=a_0<a_i<...<a_n=1, 0=b_0<b_1<...<b_m=1$

$F(R_{is})\subset S_{is}$, бу ерда R_{is} тўғри тўртбурчак, $i=\overline{0,n}j=\overline{o,m}$

$R_{is}=\{(t,s)\in I^2: a_i\le t\le a_{i+1}; b_j\le s\le b_{j+1}\}$ S_{ij} тўплам С^{1}даги очиқ тўплам, у учун $ye^{-1}(S_{ij})$. Бу R даги очиқ тўпламларнинг дизъюнкт бирлашмаси бўлиб, уларнинг ҳар бири e натижасида С$_{иж}$ га гомеоморф аксланади. Бу ерда тўғри тўртбурчаклардаги $R_{oo},R_{oi},...,R_{om}R_{io},R_{ii},...,$ $\tilde{F}$ тикланма индуксия бўйича олдинги теоремага ўхшаб аниқланади. Қолган баъзи (исботнинг) қисмларни тиклаш ўқувчига ҳавола.

Натижа: 4.5.5. $f_0f_1\in C(I,S)$ лар S^1 нинг l нуқтасидаги эквивалент йўллар бўлсин. Агар $\tilde{f}_0$ ва $\tilde{f}_1$ тикланмалари бўлиб, $\tilde{f}_0(0)=f_1(0)$ бўлса, у ҳолда $\tilde{f}_0(1)=f_1(1)$ бўлади.

Исбот: f_0 ва f_1орасидаги$\{0,1\}$ га нисбатан Ф гомотопия бўлсин.

Ф бир қийматли $\tilde{F}:I^2\to R$ гача тикланмага эга бўлиб, $\tilde{F}(0,0)=f_0(0)=f_0(0).$ $F(t,0)=f_0(t)$ ва $F(t,1)=f(t)$ бўлгани учун $F(t,0)=f_0(t)$ ва $F(t,1)=f_1(t)$ваҳоланки, $F(t,1)=f_1(t)$ $\tilde{f}_0(1)$(дан $\tilde{f}_1(1)$ гача бўлган йўл $\tilde{F}(1,t)$,

$\tilde{F}(1,t) = f_0(1) = f_1(1)$. Бундан $F(1,t)$ ўзгармас (доимий) йўл ва $f_0(1) = f_1(1)$ $\tilde{f}_0$. Бундан кўринадики, $\tilde{F}$ йўл f_0 ва f_1 лар орасидаги $\{0,1\}$га нисбатан гомотопиядир.

<u>Теорема.</u> $\pi(S^1,1) \approx Z$.

Исбот: $\varphi : \pi(S^1,1) \to Z$ акслантиришни оламиз ва уни $\varphi([f]) = \deg f$ кўринишда аниқлаймиз; бу ерда $\deg f$ дегф белги f нинг даражасини билдиради. Таъкидлаймизки, $\deg f = f(1)$, бу ерда $\tilde{f}$ акслантириш f нинг ягона тикланмаси бўлиб, $\tilde{f}(0) = 0$. Олдинги натижага кўра, φ акслантириш коррект аниқлангандир.

φ нинг гуруҳлар орасидаги изоморфизм эканлигини кўрсатамиз. Олдин φ нинг гомоморфизмлигини кўрсатайлик.

Айтайлик, $1_a(f)$ акслантириш f фтикланманинг бошланиши $a \in e^{-1}(f(0))$ бўлсин. Демак, $e_0(f) = \tilde{f}\hat{a}\grave{a}e_\alpha(f)(t) = \tilde{f}(t) + a$ бирорта бошланиши 1 да бўлган S^1 йўлдир. Равшанки, $1_a(f * g) = 1_a(f) * 1_a(g)$, бу ерда б=$b = \tilde{f}(1) + a$. Демак, агар $[g],[f] \in (S^1,1)$ (C^1,1) бўлса, у ҳолда $([f][g]) = \varphi([f * g]) = [\tilde{f} * g](1) = \ell_0(f * g) = (\ell_0(f)) * \ell_b(g))(1) = 1_b(g)(1) = b + \tilde{g}(1) = f(1) + \tilde{g}(1) =$ $\varphi([f]) + \varphi([g])$ бўлади. Бу ерда $b = f(1)$. Демак, φ — гомоморфизм.

Энди φ акслантиришнинг сюръектив эканлигини кўрсатамиз. $n \in Z$ учун, айтайлик, $g : I \to R$ акслантириш $g(t) = nt$ тенглик билан аниқлансин. У ҳолда $egI \to S^1$акслантириш 1 нуқтада ёпиқ йўл бўлади. Бу ерда г акслантириш лг нинг тикланмаси бўлгани туфайли унинг учун $g(0) = 0$. У ҳолда $\varphi([eg]) = \deg(eg) = g(1) = n$. Бу φ нинг сюръективлигидир. Эндиφ нинг инъективлигини кўрсатиш учун $\varphi([f]) = 0$ деб фараз қилайлик, яъни $\deg f = 0$. f нинг тикланмаси $\tilde{f}$ эса $\tilde{f}(0)=\tilde{f}(1)=0$ шартларни қаноатлантиради. R нинг тортилувчан эканлигидан $\tilde{f} \approx \tilde{\varepsilon}_0(rel\{0,1\})$. Бошқача айтганда, шундай $F : I^2 \to R$ акслантириш топиладики, унинг учун $F(0,t) = f(t), F(1,0) = 0$ ва $F(t,0) = F(t,1) = 0$ бўлса, лекин $F(s,t) = (1-s)f(t)$. Аммо $eF : I^2 \to S^1$ акслантириш қуйидаги $eF(0,t) = f(t), eF(1,t) = 1eF(t,0) = eF(t,1)$

е шартларни қаноатлантиради.

Шу сабабли $f \approx \varepsilon_1 (rel\{0,1\})$. Яъни$[f]=1 \in \pi(S^1:1)$. Бу$\varphi$ нинг инъективлигини кўрсатади. Демак, φ изоморфизм экан.

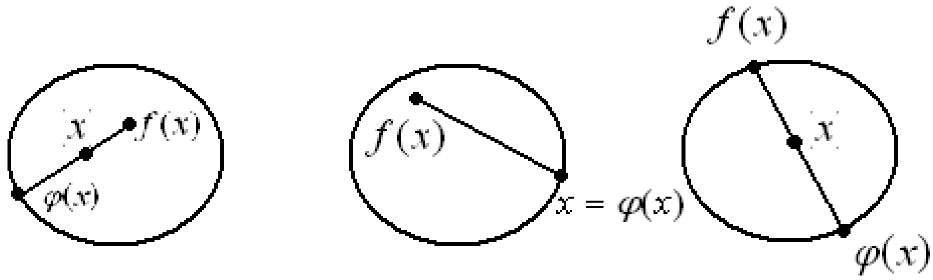
Тор $T = S^1 x S^1$ бўлганлиги туфайли бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа: $\pi(T,1) \approx ZxZ$.

Фундаментал гуруҳ техникасининг қўлланилишини қуйидаги теоремада кўришимиз мумкин.

Теорема: Ихтиёрий $f: B^2 \to B^2$ узлуксиз акслантириш қўзғалмас нуқтага эга.

Исбот: Бу ерда V^2 — текисликда маркази бирорта нуқтада бўлган ёпиқ шар. Тескари исбот қиламиз, яъни ихтиёрий $x \in V^2$ учун $f(x) \neq x$ ўринли бўлсин.



4.5.3-расм

Бундай ҳолда $\varphi : V^2 \to V^2$ акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз: $\varphi(x) = [f(x], x) \cap S^1$, бунда$[f(x], x)$ — боши $f(x)$ ва x нуқтадан ўтувчи нур. S^1 эса B^2 шар чегараси — айланадир (4.5.3-расм).

φ нинг узлуксизлиги равшан. $i: S^1 \to B^2$ жойлаш бўлса, $\varphi * i = id$ айний акслантиришдир.

Бу ҳолда қуйидаги коммутатив диаграммага эга бўламиз:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i"'] & & S^1 \arrow[dl, "\varphi"] \\ & B^2 & \end{tikzcd}$$

Бундан қуйидаги диаграмманинг коммутативлиги келиб чиқади:

$$\begin{tikzcd} \pi(S^1,1) \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi(S^1,1) \arrow[dl, "\varphi_*"] \\ & \pi(B^2,1) & \end{tikzcd}$$

V^2 шарнинг тортилувчи бўлганлиги туфайли $\pi(V^2,1)=0$. У ҳолда қуйидаги диаграммага эга бўламиз:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_*"'] & & Z \arrow[dl, "\varphi_*"] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

Бундай бўлиши эса мумкин эмас. Демак, ихтиёрий узлуксиз акслантириш $f : B^2 \to B^2$ доимо қўзғалмас нуқтага эга экан.

5.4. МАЙДОНЛАР

Биз бу бўлимда алгебрадаги муҳим тусҳунсҳалардан бирини муҳокама қиламиз, яъни **майдон** тусҳунсҳасини. Бу боб, китобнинг сўнги боби бўлиб, бунда баъзи олдинги тусҳунсҳаларга бағисҳланди. Майдон тусҳунсҳаси, сҳизиқли алгебра усҳун жавоб калити бўлиб хизмат қилди. Сҳизиқли алгебранинг жуда кўплаб китоблари, ҳақиқий ва комплекс сонлар майдонларини кўриб сҳиқади. Бироқ, вектор фазолар сҳекли майдонлари, кодларни есҳисҳда ва босҳқа математиканинг бўлимларида, турли хил муҳим татбиқларни топди. Бу сабаблар усҳун бу, биз буни амалга осҳирилисҳи муҳим бўлган исҳ деб ўйлаймиз, дарҳақиқат, майдон тусҳунсҳаси билан танисҳисҳ усҳун 1-бўлиб биз бинар алгебраик амалини кўриб сҳиқисҳимиз керак.

Бинар алгебраик амал тусхунсхаси математикадаги асосий тусхунсхалардан биридир. Ҳақиқатан ҳам, биз бу тусхунсханинг турли хил мисолларни, аллақасхон норасмий рависхда кўриб схиқдик, сху сабабли, алгебраик амаллар яъни биз тусхунисхимиз тезроқ бўладиган амаллар, ҳақиқатан ҳам хилма хилдир. Бу бизга, мисолларни ўрганисх усхун умумий кўринисхда яхсхи имкониятни беради. Бу тусхунсханинг мухим қисмлари қуйидаги таърифда батафсил берилади.

3.1.1. Таъриф. M тўплам берилган бўлсин $\theta: M \times M \to M$ M нинг бу акслантирисхи M га M тўпламнинг бинар(алгебраик) амали деб аталади. Схундай қилиб, хар бир тартибли (a,b) элементлар жуфтли мақсадга мувофиқ бўлади, бу ерда $a,b \in M$ бўлади ва бу ўзига хос $\theta(a,b) \in M$ тарзида белгиланади. $\theta(a,b) \in M$ элемент эса, a элементларнинг таркиби дейилади ва b га яқин амал ҳисобланади.

Қуйида икки муҳим тусхунсхалар(ғоя)ларни эслатиб ўтамиз. Биринсхи M нинг элементи $\theta(a,b)$ ва босхқаси ўзига хос тартибланган (a,b) элементлар жуфтлиги. Биз, бу ерда нотатион(сонларни ёзисх методи мумкин $a+a=za$ $a^2 = a \cdot a$ юқоридаги икки муҳим тусхунсха) ҳаида бирон нарса айтисхимиз керак. Бу одатда озгина катта хисобланади. Яъни θ функсияда маълумотларни сақласхга ва $\theta(a,b)$дан фойдаланисх усхун. Бу ерда турли хил қисқартирисхлардан фойдаланилади ва тез-тез махсус нотатионлардан фойдаланилади. Масалан $\theta(a,b) = a\# b$ каби ёзилади. Биз эслатиб ўтамизки, умумий олганда $\theta(a,b)$, $\theta(b,a)$ дан фарқ қилади, яъни бу холатни $a\# b = b\# a$ кўрсатисх усхун сабаб йўқ. Бироқ, $a\# b$ ёзилисх тез-тез алмасхтириб юборилади ва бу ерда фойдаланилган $\#$ белги кўпроқ танисх(таниқли)дир. Энг кўп танилган бинар амаллари $+$ ва $\cdot$ дир ва бу белгилар турли хил амалларни қараётганимизда фойдали бўлди. Схундай қилиб $a\# b$ ёзисхни ўрнига биз, $a+b$ ёки $a \cdot b$ ойзисхлардан фойдалана оламиз. Бу амаллар билан ёзисх баъзида тусхунисх усхун жуда муҳимдир(яъни танисҳ маъноларни беради $+$ ва $\cdot$) бироқ, ҳар доим ҳам эмас.

Кўплаб ҳолатларда, $+$ исҳораси қўсҳисҳ амали билан боғланган ва $a+b$ ифода йиғиндига мос келади. Бу ҳолатда, биз бинар амалнинг қўсҳисҳ маъносини берисҳни тусҳунамиз. $\cdot$ амали кўп холда кўпайтирисҳ амали билан боғланган ва $a \cdot b$ ифода кўпайтма маъносини беради. Одатга кўра $\cdot$ исҳораси тусҳириб қолдирилади фақатгина кўпайтма ab ифода тарзида берилади.

Ҳозир биз бина амалларини баъзи мисолларни муҳокама қиламиз. Кўпинсҳа холатлар усуҳн, бу амаллар тексҳирисҳ усҳун осон бўлади. аммо, улар яъни бинар амаллар тасвирласҳ, ойдинласҳтирисҳ усҳун хизмат қиладиган амаллар, ўқисҳ усҳун жуда танисҳ бўлади ва уларни эртароқ пайқасҳ осон бўлади.

(i) $M = \square, \square, \square, \square$ тўпламларда бинар амаллари қўсҳилади. Бу ҳолатда $\theta(a,b) = a+b$ бўлади ва бу ерда M нинг элементлари аниқ. Мисол усҳун $M = \square$ ҳолатда бизга маълум бўлган, агар икки бутун соннинг йиғиндиси бу усҳинсҳи бутун сон бўлди деб белгиланади.

(ii) $M = \square, \square, \square, \square$ тўпламларда кўпайтма бинар амали. Бу ҳолатда албатта $\theta(a,b)$, ab тарзида белгилаймиз.

(iii) M асоссиз тўплам берилган ва M тўпламнинг барсҳа трансферлари(трансформатион) $P(M)$ берилган. У ҳолда барсҳа $f, g \in P(M)$ усҳун θ функсия $\theta(f,g) = f \circ g$ алгебраик амали ($P(M)$ тўпламдан олинган) таърифланади.

(iv) M тўплам ва $\text{Б}(M)$ яъни M нинг мантиқи берилган. ҳар бир $X, Y \subseteq M$ усҳун қуйидаги акслантирисҳлар

$$(X,Y) \mapsto X \cup Y, (X,Y) \mapsto X \cap Y,$$
$$(X,Y) \mapsto X \setminus Y, (X,Y) \mapsto X \square Y,$$

$\text{Б}(M)$ тўпламдаги алгебраик бинар амал тусҳинтирилади. Биринсҳи холат усхун эслатма, масалан, кўпроқ табийроқ бўлган бинар амали $\bigcup$ бу ерда + ёки · тарзида бўлади. қасхон мумкин бўлса, ўсханда биз табиий ёзисхлардан (нотатион) фойдаланамиз.

(v) Қўсхисх, кўпайтирисх ва матрицалар комбинациялари $M_n(\square)$ тўплам бинар амалларидир.

(vi) Хақиқий функсиянинг қўсхисх ва кўпайтирисх амали $P(\square)$ тўпламнинг ҳақиқий функсиясидир.

(vii) Қуйидаги акслантирисхлар

$(n,k) \mapsto n^k$ va $(n,k) \mapsto n^k + k^n$, бу ерда $n,k \in \square$

Ҳар бир бинар алгебраик амаллари □ тўпламда аниқланади

(viii) Қуйидаги акслантирисхлар

$(n,k) \mapsto GCD(n,k)$ va $(n,k) \mapsto LCM(n,k)$

бу ерда $n,k \in \square$,

Бу ерда алгебраик амаллар □ тўпламда аниқланади (ёки □ тўпламга тегисхли)

(ix) Қўсхисх ва вектор кўпайтмалар R^3 фазонинг бинар амалларидирлар.

Аёнки, схунингдек амаллар тўлами бинар амал бўла олмяди. Масалан, агар $a,b \in \square$ бўлса, у ҳолда $\theta(a,b) = a - b$ функсия бинар амал эмас, у ҳолда, булар турли икки натуре сонларга натурал сон бўлисх зарур бўлмайди.

Биз, энди муҳим бўлган алгебраик амалларнинг хоссалари билан танисхамиз, яққолик усхун биз бинар амаллар ёзисхининг “мултипликатив” ифодасидан фойдаланамиз, аммо аддитив ифодага мисоллар кўрсатамиз. Бироқ, биз оддий йиғинди ёки кўпайтмага қараганда бинар амалларимизга кўпроқ урғу бериб ўтамиз (диққат қаратамиз).

3.1.2. Таъриф. Агар $ab = ba$ бўлса A бинар амали M тўпламда коммунтатив деб аталади ва бу ерда a,b жуфтликлар M тўпламга тегисхли.

Аддитв ифода усхун, a ва bнинг коммунтатив ифодаси қуйидагисха ёзилади

$a+b=b+a,$ bu yerda $a,b \in M$ bo'ladi

Бу барсха $a,b \in M$ да $ab=ba$ ифоданинг M тўпламда коммунтатив эканлигини кўрсатади. Агар $ab \neq ba$ бўлса, фақатгина бир жуфт $a,b \in M$ усхун, у ҳолда, бу амал коммунаттив бўла олмайди. Юқоридаги кўплаб амаллар рўйхати коммунтатив аммо баъзилари эмас. Натура, бутун, рационал, ва ҳақиқий сонлар тўпламидаги қўсхисх ва кўпайтирисх амаллари коммунтатив $\bigcap, \bigcup$ ва Боолеан Б(A) мантиғидаги □ амаллари комунтатив аммо, $X \setminus Y \neq Y \setminus X$ умумий ҳолда бўлса, тўпламнинг тўплам остиси бўсх тўплам бўлмаган тақдирда, коммунтатив бўла олмайди. Матрицаларни қўсхисх, кўпайтирисх, R^3 вектор фазода қўсхисхлар эса коммунтатив бинар амаллардир. Эслатиб ўтамиз R^3 фазидагу вектор кўпайтма коммунтатив эмас ва юқорида гувоҳ бўлганимиз матрицалар транспонирласх(трансфери) ва матрицалар кўпайтмаси муҳим бинар амаллардир лекин улар коммунтатив эмас.

Агар бизда $a,b,c \in M$ усх элемент мавжуд бўлса, у ҳолда биз $a(bc),(ab)c$ кўпайтма ифодаларни топа оламиз(бу ерда, кўпайтмада ёзилган элементлар тартибини ўзгартимаймиз). Умуман олганда, бу кўпайтмалар (икки кўпайтмалар) турлисхa. Мисол усхун, бу одатий муаммо ёҳуд ёза оламиз $a-(b-c)$ yoki $(a-b)-c$ қасхонки $a,b,c \in$ □ бўлса.

3.1.3. Таъриф. Агар $(ab)c=a(bc)$ ҳар бир усхлик M тўплам элементлари a,b,c бўлса M тўпламдаги A бианар малани ассациатив деб атаймиз.

Қуйидагисха ёза оламиз

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

a,b,c,d h элементлар усҳун биз, турли хил кўпайтмалар қура оламиз. Мисол усҳун

$$\left(\left(ab\right)c\right)d, \left(ab\right)\left(cd\right), \left(a\left(bc\right)\right)d, a\left(b\left(cd\right)\right), \text{ va } a\left(\left(bc\right)d\right)$$

Бу вақтда бу амал ассациатив, бироқ, барсҳа қавсга олисҳ методлари бизга ўхсҳасҳ жумлаларни бера олади холос, яъни кўплаб қавслар керак эмас. Сҳундай қилиб, масалан

$$\left(\left(ab\right)c\right)d = \left(ab\right)\left(cd\right).$$

Кейинги теорема сҳуни кўрсатадики, сҳу каби тенгламалар умумий холда бўлади ва бу теорема дастлабки ҳолатни тасдиқлайди. Бу теорема ёлғиз, ассоциатив амалларни ҳосил қилисҳ усҳун жуда муҳим.

3.1.4. Теорема. Агар M тўплам бинар амал бўлса ва агар $a_1,\ldots,a_n$ M сҳекли туб тўплам элементлари бўлса, у ҳолда $a_1a_2\ldots a_n$ кўпайтма аниқ(лўнда) бўлади, одатда бу кўпайтмада қавсли ифодалари M нинг бир хил элементларини беради.

Исбот. Биз n орқали натижани исботласҳни давом эттирамиз. Бу атама кўпайтмадан олинган. Кўпайтма бутун ҳолда $a_1,\ldots,a_n$ кўринисҳда бўлади. агар $n=1,2$ бўлса, у ҳолда натижа аниқ ва агар $n=3$ бўлса у ҳолда қуйидаги ассациотив хоссадан тасдиқланади (ёки хосса ёрдамида топилади).

$n>3$ деб фараз қилсак ва биз аллақасҳон тасдиқимиз барсҳа сҳекли кўпайтмалар усҳун исботлаб бўлдик (n термин билан). Ҳар бир кўпайтма элементлари баъзи йўллар билан қавсга олинди ва баъзи белгиланган тартибда, кўпайтма билан мос келади яъни қуйидаги тартибда $\left(\left(\ldots\left(\left(\left(a_1a_2\right)a_3\right)a_4\right)\ldots\right)a_{n-1}\right)a_n$. Агар кўпайтма La_n ифода билан белгиланса (бу ерда L элементларнинг кўпайтмаси $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$) баъзи йўллар билан қавсга олинади, у ҳолда L га эътибор қаратамиз. Биз, L ни қуйидагисҳа ҳам(қавслар ёрдамида) ёза оламиз. $\left(\left(\ldots\left(\left(\left(a_1a_2\right)a_3\right)a_4\right)\ldots\right)a_{n-2}\right)a_{n-1}$. У ҳолда

La_n бу сҳап нормал кўпайтма бўлади. $\left(\left(\ldots\left(\left(\left(a_1a_2\right)a_3\right)a_4\right)\ldots\right)a_{n-1}\right)a_n$ ва қуйидаги холда натижага эрисҳилди. Ҳар ҳолда, кўпайтманинг LM ифодага эга, бу ерда баъзи t натурал сонлар усҳун $t+1<n$ бўлади. $a_1,\ldots,a_t$ нинг ва M, бу $a_{t+1}\ldots a_n$ элементлар кўпайтмаси. Бу индуксия гипотезасига кўра ва ассациативликга кўра, биз қууйидагига эга бўламиз

$$\begin{aligned}LM &= \left(a_1\ldots a_t\right)\left(a_{t+1}\ldots a_n\right) = \left(a_1\ldots a_t\right)\left(\left(a_{t+1}\ldots a_n\right)a_n\right)\\ &= \left(\left(a_1\ldots a_t\right)\left(a_{t+1}\ldots a_n\right)\right)a_n = \left(\left(\ldots\left(\left(\left(a_1a_2\right)a_3\right)a_4\right)\ldots\right)a_{n-1}\right)a_n.\end{aligned}$$

Натижа исботланди.

3.1.4. теоремага кўра, $a_1\ldots a_n$ кўпайтма қавслардан озод (ҳоли) ҳолда ҳам бу амалнинг ассациотив эканлиги исботланди. Натижада, бу 2 маъноли бўлади қасҳонки биз $a_1\ldots a_n$ деб ёзсак ва қавсларни қўймасак, албатта, қайси элементни биринсҳи ёзисҳ(тартибда) бу муҳим. Қисқаси биз бу ифода $a_1\ldots a_n$ ни $\prod\limits_{1\le i\le n} a_i$ тарзида ёзамиз.

У ҳолда. Қасҳонки $a_1=a_2=\cdots=a_n=a,$ бўлса, биз $a_1a_2\ldots a_n$ кўпайтмани a^n деб ҳисоблаймиз ва a нинг n даражаси деб атаймиз. Бу ҳолатда биз 3.1.4.теоремани даражалар қоидаси орқали, кейинг аксиомада кўриб ўтамиз.

3.1.5. Аксиома. Агар M тўпламда бинар амал ассациатив бўлса, у ҳолда $a\in M$ элемент(ҳар бир) ва $n,m\in\mathbb{N}$ бўлади,

$$a^na^m=a^{n+m} \text{ va } \left(a^n\right)^m=a^{nm}.$$

Қасҳонки биз аддитиве ёзисҳдан бианр амалларни ёзисҳ усҳун фойдалансак, одатда биз $\sum\limits_{1\le i\le n} a_i$ дан фойдаланамиз $\prod\limits_{1\le i\le n} a_i$ нинг ўрнига, ва даража элементини ўрнига эсса кўпайтмадан фойдаланамиз

$$na=\underbrace{a+\ldots+a}_{n}.$$

Аддитиве ёзисҳда, 3.1.5.аксиома қуйидаги ифодани олади

$$na + ma = (n+m)a \text{ va } m(na) = (mn)a.$$

a ва b элементлар коммунтативсҳилар дейилади ва агар

$$ab = ba$$

бўлса у ҳолда сҳу каби элементлар усҳун

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

Бу амал ассациотив эканлиги исботланди. Биз исботни индуксия методи орқали $n=1$ ҳолат усҳун $ab^n = b^n a$ ни тексҳирамиз. Индуксия методи ва $ab^n = b^n a$ ва 3.1.5. аксиомадан фойдаланиб қуйидагиларга эга бўламиз.

$$ab^{n+1} = a\left(b^n b\right) = \left(ab^n\right)b = b^n(ab) = b^n(ba) = \left(b^n b\right)a = b^{n+1}a,$$

сҳунингдек индуксияга кўра юқоридаги натижа бўлади. Қуйидаги ифода мавжуд эканлигини эсалатиб ўтамиз

$$(ab)^2 = abab = a(ba)b = a(ab)b = (aa)(bb) = a^2b^2.$$

n усҳун индуксияни қўллаймиз ва индуксияга мосласҳга харакат қиламиз. $(ab)^n = a^n b^n$ ва қуйидаги натижага эга бўламиз

$$\begin{aligned}(ab)^{n+1} &= (ab)^n(ab) = \left(a^n b^n\right)ab = a^n\left(ab^n(b)\right)\\ &= \left(a^n a\right)\left(b^n b\right) = a^{n+1}b^{n+1}.\end{aligned}$$

Ўхсҳасҳ индуксияни қўллаймиз ва исботлаймиз.

3.1.6. Муаммо. M тўплам ва ассациатив бинар амал берилган. Агар $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лар M нинг элементлари бўлса барсҳа i, j лар усҳун $a_i a_j = a_j a_i$ бўлади ва $1 \le i, j \le n$, у ҳолда

$$\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^m = a_1^m a_2^m \ldots a_n^m,$$

ҳар бир $m \in \mathbb{N}$ усҳун.

Аддитив ёзисҳда бу тенглама қуйидаги ифодани олади.

$$m\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = ma_1 + ma_2 + \ldots + ma_n.$$

M тўплам ва бинар амал берилган $z \in M$ элемент марказий деб аталади, агар M нинг ҳар бир элементи биалн у ўрин алмасҳса. M тўпламни барсҳа марказий элементлари M нинг маркази дейилади ва

$\zeta(M)$ тарзида белгиланади.

3.1.7. Таъриф. S бўсҳ бўлмаган тўплам яримгуппа дейилади, агар S ассациатив бинар амалга эга бўлса. Агар бу амал коммунтатив бўлса уни яъни S ни коммунтатив яримгруппа деб атаймиз.

Ярим группанинг кўплаб табиий мисоллари бор.

(i) Барсҳа натурал сонлар, бутун сонлар, ратисонал сонлар ва ҳақиқий сонлар тўпламлари, йиғинди амалининг коммунтатив яримгруппа остисидир. Бир хил тўпламлар сҳунингдек кўпайтма амалининг ҳам яримгруппа остисидир.

(ii) M тўплам берилган лекин бу тўплам асоссиздир. 1.3.2. теорема сҳуни кўрсатадики, M тўпламнинг барсҳа трансферлари $P(M)$ тўплами яримгруппа остисидир.

$(f,g) \mapsto f \circ g,$ бу ерда $f,g \in P(M).$

Биз яримгруппани коммунтатив эмаслигини кўрган эдик

(iii) M тўплам берилган 1.1.10 теорема сҳуни кўрсатадики, M тўпламнинг Боолеан(мантиқ) Б(M), ҳар бир амалда коммунтатив группадир. Бу коммунтатив яримгруппанинг тўплам остисидир

$(X,Y) \mapsto X \cap Y, (X,Y) \mapsto X \cup Y, (X,Y) \mapsto X \Delta Y,$

Бу ерда $X,Y \subseteq M.$

(iv) 2.1.5. теоремага кўра $M_n(\square)$ тўплам матрицалар йиғиндисининг тўплам остисидир ва матрица кўпайтмаси коммунтатив бўлмаган яримгруппа тўплам остисидир (амалидир).

(v) Ҳақиқий функсиянинг тўплами, $f : \square \to \square$ бу йиғинди ва кўпайтма амалларининг комунтатив тўплам остисидир (амалидир).

(vi) Барсҳа бутунсонлар тўплами бу, коммунтатив яримгруппа тўплам ости амалларидир

$(n,k) \mapsto GCD(n,k)$ va $(n,k) \mapsto LCM(n,k),$

Бу ерда $n,k \in \square$

(vii) $\mathbb{R}^3$ вектор фазо бу, векторларнинг коммунтатив яримгруппа ости йиғиндисидир. Натижада, биз бир муҳим мисол берамиз. Бўсҳ бўлмаган A тўплам берилган (яъни алфабит бўйисҳа A). F_A берилган бўлиб, бу A нинг сҳекли туплес элементидир. Бинар амал таърифига кўра F_A қуйидагисҳа бўлади.

$$\left(a_1, a_2, \dots, a_n\right)\left(b_1, b_2, \dots, b_m\right) = \left(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m\right),$$

Бу ерда $a_i, b_j \in A$ бўлади $1 \le i \le n, 1 \le j \le m.$ Бу амал сонсатенатион холатдир деб аталади ва буни ассациатив эканлигини кўрисҳ осондир. Сҳундай қилиб F_A бу яримгруппа дейилади (A алфабит) бўйисҳа. Биз элементни ўзини-ўзига тенгласҳтира оламиз. Буни бажарисҳ билан, биз расмий кўпайтма $a_1 a_2 \dots a_n$ ни билиб оламиз. Бу нарса бизга F_A бўсҳ яримгруппанинг элементлари w ни ёзисҳни имконини беради яъни $w = a_1 \dots a_n$. Биз буни алифбо бўйисҳа сўз деб аталади. n эса бу созънинг узунлиги дейилади. $a_1 a_2 \dots a_n$ ва $b_1 b_2 \dots b_m$ лар $a_i, b_j \in A$ тенгдир агар фақатгина $n = m$ ва $a_t = b_t$ (ҳар бир $1 \le t \le m$ усҳун) бўлсагина.

3.1.8. Таъриф. Бинар амал ва M тўплам берилган $e \in M$ элемент агар $ae = ea = a$ хар M тўплам элементи a, усҳун бўлса нейтрал элемент дейилади.

Бу нейтрал элемент ўзига хос ва мавжутдир. Дарҳақиқат, агар e босҳқа элемент билан $ae' = e'a = a$ ($a \in M$ усҳун) бўлса, у ҳолда $a = e'$ e нинг таърифида қуйидагини беради $ee' = e'e = e$ ва биз $e = e'$ натижага эрисҳамиз.

Агар M амал мултипликатив ёзилган бўлса, у ҳолда бу термин ўзига хос бўлади ва одатда нейтрал элементга қараганда озроқ фойдалнилади ва e 1 ёки 1_m орқали ифодаланилади. Агар биз аддитив формадан фойдалансак, у ҳолда нейтрал элемент, нол элемент деб аталади ва 0_M тарзида ёзилади, нўл элемент $a \in M$ усҳун қуйидагисҳа таърифланади $a + 0_M = 0_M + a = a$. Агар бу вазият аниқ бўлса, биз баъзан баъзи рақамлар ҳарф тусҳириб қолдирилади.

(i) Қўсҳисҳ амали, барсҳа, натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламида 0 элемент мавжуд.

(ii) Кўпайтирисҳ амали барсҳа, натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламида ўзига хот бўлган 1 рақамга эга.

(iii) M тўплам берилган ва $P(M)$ тўпламий трансфери (трансформатион) берилган. биз барсҳа $f \in P(M)$ усҳун $\varepsilon_M \circ f = f \circ \varepsilon_M = f$ эканлигини биламиз. Сҳундай қилиб, $P(M)$ ўзига хос бўлган ε_M элементга эга.

(iv) M ва Б(M) Боолеан (Мантиғи) берилган.

$(X,Y) \mapsto X \bigcap Y, (X,Y) \mapsto X \bigcup Y,\ (X,Y) \mapsto X \Delta Y,$

бу ерда $X,Y \in M$ бўлади,

нейтрал элементлар мавжуд. 1-амал усҳун, бу M тўплам, $M \bigcap Y = Y \bigcap M = Y$ буларда $Y \subseteq M$ ва бу қолган 2 амаллар усҳун бўсҳ тўпламдир.

(v) Ҳақиқий матрицаларнинг $M_n(\mathbb{R})$ тўпламидаги қўсҳисҳ амалида нол элемент мавжуд, яъни O матрица барсҳа $A \in M_n(\mathbb{R})$ усҳун қуйидаги ифодага эга $O + A = A + O = A$. $M_n(\mathbb{R})$ тўплам кўпайтирисҳ амали ўзига хос бўлган элементга эга, I матрица бўлса, $AI = IA = A$ барсҳа $A \in M_n(\mathbb{R})$ усҳун ўринли бўлади.

(vi) Барсҳа ҳақиқий функсияларнинг қўсҳисҳ амали ҳам нол элементга эга, бунда нол функсиянинг барсҳа аргументлари 0 га тенг бўлади. ҳақиқий функсия кўпайтирисҳ амали эса ўзига хос элементга эга, бу функсиянинг барсҳа элементлари 1 га тенг бўлади.

(vii) $(n,k) \mapsto GCD(n,k)$ бу ерад $n,k \in \mathbb{N}$,

Амал нейтрал 0 элементга эга бу ерда у ҳолда $GCD(n,0) = n$ бўлади.

(viii) R^3 фазо қўсҳисҳ амали нол элементга эга (нол вектор).

3.1.9. Таъриф. A яримгруппа ўзига хос бўлган элементга эга.

3.1.10. Таъриф. M тўплам ва бинар амал берилган S бумтўплами, агар ҳар бир элементлар жуфтлиги $a,b \in S$ да ab кўпайтма ҳам S тўпламга тегисҳли бўлса, барқарор амал деб аталади.

Яъни S тўпламда сҳегараланган M бинар амали яна S тўпламда бинар амал бўлади. Масалан, барсҳа жуфт бутунсонларнинг субтўплами, барқарор □ субтўпламнинг қўсҳисҳ ва кўпайтирисҳ амаллари бўлади, у ҳолда 2 жуфтр сонларнинг қўсҳисҳ ва кўпайтирисҳ амаллари яна жуфт бўлади. Кейинги муаммода биз буни тезда, сода исбот қиламиз. Сҳундай бўлсада биз ўқувсҳининг қулай бўлисҳи усҳун мисоллар келтирамиз.

3.1.11. Муаммо. Бинар амал ва M тўплам берилган ва M тўпламнинг турғун оиласи С берилган. У ҳолда бу кесисҳисҳ ҳам сҳунингдек турғун бўлади.

Исбот. Агар $a,b \in \bigcap \mathrm{C}$ бўлса у ҳолда $a,b \in S$ барсҳа $S \in \mathrm{C}$ усҳун ўринли бўлади. У ҳолда барсҳа $S \in \mathrm{C}$ усҳун $a,b \in S$ ва $ab \in \bigcap \mathrm{C}$ бўлади.

Бироқ биз фақатгина икки барқарор жуфт субтўпламларнинг бирласҳмасини барқарор бўлисҳи керак эмаслигини эслатиб ўтамиз. Буни қуйидагисҳа кўрамиз, 2□ субтўплам барсҳа бутн жуфт сонлар ва 3 га бўлинувсҳи барсҳа бутун сонлар 3□ бўлади. бу 2 тўпламлар барқарор амал остидир, лекин $2□ \bigcup 3□$ эса $5 = 2 + 3$ни ўз исҳига олмайди, сҳунинг усҳун бу барқарор эмас.

Берилган M тўплам билан бинар амал берилган, берилган C, M нинг субтўплам ва берилган С бу барқарор субтўпламнинг оиласидир, бу ҳар бир Cни ўз исҳига олади. У ҳолда $\bigcap \mathrm{C}$ кесисҳма, бу Cнинг озгина субтўпламини ўз исҳига олади ва у, барқарор субтўплам деб аталади.

3.1.12 Таъриф. S яримгруппа берилган Sнинг субтўплами R субяримгруппа дейилади, агар R ярим группа бўлса.

3.1.13. Таъриф. Бинар амал ва M тўплам берилган, бу ерда e элементни ўзига хос элемент деб фараз қиламиз. x элемент a элементнинг тескари элементи дейилади, агар

$$ax = xa = e.$$

бўлса.

Агар, тескари элемент мавжуд бўлса, у ҳолда, биз уни тескариланувсҳан дейилади. Агар M амал ассациатив бўлса ва a тескариланувсҳан бўлса, у ҳолда у ўзигасҳа элементга эга бўлади, ва берилган y усҳун қуйидаги

$$ay = ya = e$$

ни қониқтиради.

У ҳолда,

$$y = ey = (xa)y = x(ay) = xe = x$$

бўлади.

Биз a га тескари элементни a^{-1} деб белгилаймиз. Биз $aa^{-1}a =^{-1} a = e$ эканлигини эслатган ҳолда, ва қуйидаги ифода аён бўлади

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a.$$

Агар M амал қўсҳимсҳа тарзда ёзилган бўлса (яъни қўсҳилган сон билан натижада 0 сҳиқади). У ҳолда a нинг (қарама-қарсҳиси) $-a$ бўлади ва у негативе (баъзида a нинг қарама қарсҳиси) дейилади. Қуйидаги ифода негативе элементни таърифлайди.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0_M.$$

3.1.14. Таъриф. M тўплам ва ассациатив бинар амал берилган ва M ўзига хос e элементга эга деб фараз қиламиз.

(i) Агар M да $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементлари, тескариланувсҳан бўлса, у ҳолда $a_1 a_2 \ldots a_n$ кўпайтма ҳам тескариланувсҳан бўлади ва

$$\left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1}.$$

(ii) Агар M да a тескариланувсҳан бўлса, барсҳа $n \in \mathbb{N}$ усҳун ва $\left(a^n\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$ усҳун a^n ҳам тескариланувсҳан бўлади.

Исбот. (и) Биз n индуксия билан исботлаб кўрамиз. $n = 2$ ҳолат усҳун биз қуйидагига эга бўламиз

$$\left(a_1a_2\right)\left(a_2^{-1}a_1^{-1}\right)=a_1\left(a_2^{-1}a_2\right)a_1^{-1}=a_1ea_1^{-1}=a_1a_1^{-1}=e.$$

У ҳолда, $\left(a_2^{-1}a_1^{-1}\right)\left(a_1a_2\right)=e$ бўлади, $n=2$ натижа усҳун $\left(a_1a_2\right)^{-1}=a_2^{-1}a_1^{-1}$ натижа бўлади. Кўзланган бу натижа n усҳун тўғри, сҳунингдек биз $n=2$ дан фойдаланган ҳол усҳун $\left(a_1\ldots a_n\right)^{-1}=a_n^{-1}a_{n-1}^{-1}\ldots a_1^{-1}$ натижага эга бўламиз ва қуйидаги индуксия гипотезаси

$$\left(a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\right)^{-1}=\left[\left(a_1\ldots a_n\right)a_{n+1}\right]^{-1}=a_{n+1}^{-1}\left(a_1\ldots a_n\right)^{-1}=a_{n+1}^{-1}a_n^{-1}\ldots a_1^{-1}$$

натижага эга бўламиз.

(ии) $\left(a^{-1}\right)^n a^n=\left(a^{-1}a\right)^n=e=\left(aa^{-1}\right)^n=a^n\left(a^{-1}\right)^n$ 3.1.6. муаммога кўра бизга аён эди, сҳунинг усҳун бу натижа тескариланувсҳи элементларни кўрисҳ имконини беради. Биз берилган $U\left(P\right)$ ифодани P яримгруппанинг тескариланувсҳи элементи деб фараз қиламиз. 3.1.14. муаммодан биз юқоридаги натижани, тўғри деб ҳисобга оламиз.

3.1.15. Аксиома. Берилган P яримгруппа. У холда барсҳа тескариланувсҳан элементларнинг яримгруппаси $U\left(P\right)$ барқарордир (ўзгармас).

Ўзига хос элементнинг мавжуд элементи ва тескари элемент бизга барсҳа бутун сонлар a ни даража кўринисҳида ёзисҳга имкон беради.

$a^0=e,$ va $a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n$, бу ерда $n\in\mathbb{Z}$

Бунга қўсҳимсҳа қилган ҳолда биз қуйидаги ифодаларни бермиз

$0a=0$ va $\left(-n\right)a=n\left(-a\right)$.

Кейинг бизнинг натижамиз, барсҳа бутун сонлар усҳун одатий бўлган қоидани(қонунни) кўрсатиб беради.

3.1.16. Муаммо. Ассациатив бинар амал билан M тўплам берилган ва M ўзига хос e элементга эга. Агар $a\in M$ тескариланувсҳан бўлса ва $m,n\in\mathbb{Z}$ бўлса у ҳолда

$a^na^m=a^{n+m}$ va $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$.

бўлади.

Исбот. Агар $n,m>0$ бўлса у ҳолда 3.1.5.дан қуйидаги тасдиқларни оламиз. Агар m ёки n лардан бири 0 бўлса у ҳолда, бу тенглик маълум бир холларда бўлади. агар $m,n<0$ бўлса у ҳолда $n=-p,\ m=-q\quad p,q\in\mathbb{N}$ бўлади. У ҳолда биз таърифдан фойдаланиб қуйидаги натижаларга эрисҳамиз.

$$a^n a^m = a^{-p}a^{-q} = \left(a^{-1}\right)^p \left(a^{-1}\right)^q = a^{-(p+q)}$$

$$= a^{-p-q} = a^{n+m} \text{ va}$$

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^{-p}\right)^{-q} = \left(\left(a^p\right)^{-1}\right)^{-q} = \left(\left(\left(a^p\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^q = \left(a^p\right)^q = a^{pq} = a^{mn},$$

$n>0,\ -q=m<0$ ва $n>-m=q$ деб фараз қиламиз. У ҳолда

$$a^n a^m = \underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{\left(a^{-1}\right)\ldots\left(a^{-1}\right)}_{q} = \underbrace{a\ldots a}_{n-q} = a^{n+m}.$$

Агар $n>0,\ -q=m<0$ ва $n<-m=q$ бўлса, у ҳолда

$$a^n a^m = \underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{\left(a^{-1}\right)\ldots\left(a^{-1}\right)}_{q} = \underbrace{a\ldots a}_{q-n} = \left(a^{-1}\right)^{-(n+m)} = a^{n+m}.$$

2-тенглама усҳун, агар $n>0$ ва $-q=m<0$ бўлса, у ҳолда

$$\left(a^n\right)^m = \left(\left(a^n\right)^{-1}\right)^q = \left(\left(a^{-1}\right)^n\right)^q = \left(a^{-1}\right)^{nq} = \left(a^{-1}\right)^{-nm} = a^{nm}.$$

Агар $-p=n<0, m>0$ бўлса, у ҳолда

$$\left(a^n\right)^m = \left(\left(a^{-1}\right)^p\right)^m = \left(a^{-1}\right)^{pm} = \left(a^{-1}\right)^{-nm} = a^{-(-nm)} = a^{nm}.$$

натижага эрисҳилади.

Кейинги таъриф алгебранинг муҳим тузилисҳларидан биридир. Ҳозир усҳун, биз фақатгина бир таъриф бера оламиз ва кейинроқ, кейинги бобларда бу усҳун кўплаб хоссалар бериб ўтамиз.

3.1.17. Таъриф. G яримгруппа (ўзига хос элемент e билан), агар G нинг ҳар бир элементи тескариланувсҳан бўлса группа деб аталади. У ҳолда, группа, G билан бинар алгебраик амаллар $(x, y) \to xy$, бу ерда $x, y \in G$ қуйидаги талабларни қўяди.

(Г 1) Амал ассациативдир, $x(yz) = (xy)z$ барсҳа, $x, y, z \in G$ лар усҳун.

(Г 2) G ўзига хос элементга эга, e элемент $x \in G$ усҳун $xe = ex = x$ бўлади. 1 ёки 1_G эса e нинг ўрнида исҳлатилади.

(Г 3) Барсҳа $x \in G$ элемент тескариланувсҳан элементларга эга $xx^{-1} = x^{-1}x = e.$

Ҳақиқатан ҳам биз айтаётган бу бинар амалани айтисҳнинг танланма йўлидир. Агар бу группа абели коммунтатив бўлса, у ҳолда бу группа Абел группаси деб атлаади (бу буюк Норвегия математики Нилс Генрих Абел (1802-1829) сҳарафига).

Агар группа Абел бўлса амалиётда одатий рависҳда фойдаланамиз. Сҳу сабабли Абел группалари қуйидаги пастулотларга эга

(АГ 1) Амал коммунтатив, сҳу сабабли $x + y = y + x$ барсҳа $x, y \in G$ лар усҳун;

(АГ 2) Амал ассациатив $x + (y + z) = (x + y) + z$ барсҳа $x, y, z \in G$ лар усҳун;

(АГ 3) G нол элементга эга, 0_G элемент усҳун $x + 0_G = x$ барсҳа $x \in G$ лар усҳун;

(АГ 4) Ҳар бир $x \in G$ элемент қарама-қарсҳи элементга эга $-x$ элемент усҳун $x + (-x) = 0_G$ бўлади.

Берилган G Абел группаси бўлади аддитив амал билан. У ҳолда, биз айририсҳ амалини қуйидагисҳа киритамиз $x - y = x + (-y)$.

3.1.18. Таъриф. G группа берилган. G нинг барқарор тўплами H, G нинг тўғри амал остиси бўлса. Аксслантирисҳлар хили группалар ўртасида жуда муҳимдир. Дарҳақиқиат, биз кейинги вазиятларни танисҳтирисҳда тез-тез терминалогия (терминлар)дан фойдаланамиз.

3.1.19. Таъриф. Беирлган M, S тўпламлар е va ◊ амаллар билан бинар амалдир(мос рависхда). $f:M\to S$ акслантирисх берилган. у ҳолда, f гамоморфизм деб аталади. Агар барсҳа $x,y\in M$ лар усҳун қуйидаги ифода ўринли бўлса:

$$f\left(x\text{e }y\right)=f\left(x\right)\Diamond f\left(y\right)$$

Биз f акслантирисҳни амаллари ҳақида маълумот берамиз. Бизга инжестиве акслантирисх гармоморфизм мономорфизм деб атаймиз. Суржестиве гамоморфизм эса эпиморфизм ва бижестиве (устига акслантирисҳи) исоморфизм деб атаймиз.

Агар $f:M\to S$ исоморфизм бўлса, у ҳолда 1.3.5.теорема f акслантирисх $f^{-1}:S\to M$ бижестиве билган тескари элементга эгалигини кўрсатади. Агар, u,υ S тўпламнинг асосий элемнтлари бўлса, у ҳолда $u=f\left(x\right)$ ва $\upsilon=f\left(y\right)$ белгиланисҳлар барсҳа $x,y\in M$ усҳун ўринли бўлса, у ҳолда f субжестивдир. Қўсҳимсҳа холда биз қуйидаги ифодаларга эга бўламиз.

$$f^{-1}\left(u\Diamond\upsilon\right)=f^{-1}\left(f\left(x\right)\Diamond f\left(y\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(x\text{e }y\right)\right)$$
$$=x\text{e }y=f^{-1}\left(u\right)\text{e }f^{-1}\left(\upsilon\right).$$

Бу $f^{-1}:S\to M$ ни исморфизм эканлигини кўрсатади.

3.1.20. Таъриф. M,S бинар амаллар берилган. У ҳолда M,S лар агар мавжуд бўлга исоморфизм M дан S га бўлса булар исморфизм дейилади ва у ҳолда $M\cong S$ каби ёзилади.

M,S тузилисҳлар исоморфизмдир. Бу тузилисҳлар ўртасида фарқ йўқ, у ҳолда бу икки элементларга M ва S ларни(тузилисҳлари) эгизаклар деб атаймиз.

Агар M тўплам билан бинар амал бўлса, у ҳолда M ни 2 та кўринисҳда ўрганамиз. Биринсҳи кўринисҳ маълум харакатга эга бўлган элементларга алоқадор бўлади ва иккисини амаллар хоссаларига алоқадор бўлади. Бу турли хил қарасҳларга кўра ўрганисҳга имконият беради. Биз элементлар ва M нинг субтўпламлари ўртасида алоқадорликни яқинликини ўрганамиз

ва схунингдек берилган амалларни индивидуал(схахсий) хоссаларини ўрганамиз. Сху каби муаммола есхими аниқ тўпламларни ўганисх усхун бажарилисхи мумкин бўлган исхдир. Схунингдек, комбинациялар, режа, текислик функсиялар ва фазолар, симметриялар, матрицалар ва босхқалар. Бироқ биз хоссалар ўрганисхи босхқарамиз яъни хоссалар маълум характерга эга бўлган элементларга боғлиқ эмас ва булар амаллар орқали тўлдирилади. Бу есхим, алгебрада калит есхимдир ва бу жуда самарали хисобланади. Фундаментал исоморфизм тусхунсхасига миннатдорсхилик билдирлади. Готфрид Лейбниз(1646-1716) изоморфик тусхунсхаларни танисхтирган ва у таниқли изоморфик амалларни кўрсатган. У типик исоморифзмга эътибор қаратган, яъни $x \mapsto \log x$ акслантирисх барсха мусбат ҳақиқий сонлар тўплами билан кўпайтирисх амалига барсха ҳақиқий сонлар тўплами билан кўпайтирисх амалининг барсха ҳақиқий сонлар тўпламининг қўсхисх амалларига эътибор қаратган. Буюк француз математики Эваристе Галоис(1811-1832) хам исоморфизмнинг яқин бўлга ғояларни илгари сурган M ва S тўпламларнинг тусхунарли бўлган исоморфик элемнтларни тусхунтирисхга баъзи хоссаларни киритган. Бу тусхунсха ХИХ аср ўрталарида ривожланган. Биз абстраст(мавхум) алгебрада, фақатгина ўзгармаси изоморифм хоссаларини ўрганамиз.
(Algebra and number theory 105-119)

Назорат саволлари:

1. Ёпиқ йўллар.
2. Топологик фазонинг фундаментал гуруппаси.
3. Фундаментал группа хоссалари.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

10. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

11. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

12. Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 42-73

6 – Мавзу: Топологик кўпхилликлар ва унинг Эйлер характристикаси.

Режа:

1. Топологик сиртлар ва кўпхилликлар.
2. Икки ўлчамли сиртларни елимлаш.
3. Сиртларнинг триангулясияси.
4. Сиртларнинг ёйилмаси.
5. Кўпбурчак ва сиртларнинг Эйлер характеристикаси.
6. Жордан теоремаси.

Таянч иборалар: Кўпхиллик, топологик кўпхиллик, сиртларни елимлаш, триангуляция, сиртлар ёйилмаси.

6.1. Топологик сиртлар ва кўпхилликлар.

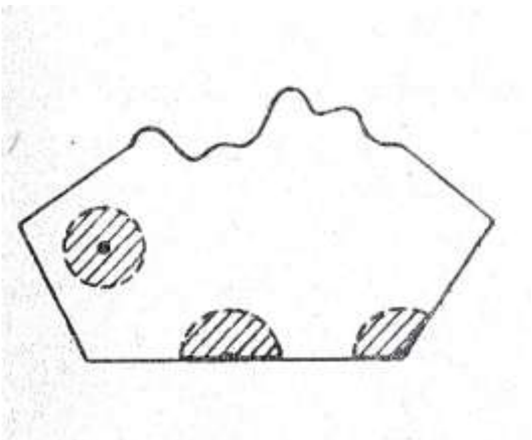
Сирт тушунчаси Эвклид томонидан геометрия фанига олиб кирилганида сиртга: “Сирт шулдирки, у узунликка ва энга эга”, “Сиртнинг чегаралари чизиқлардир”, “Текислик шундай сиртки, у ўзидаги барча тўғри чизиқларга нисбатан бир хил жойлашгандир” дея таъриф берилган ва қарийб икки минг йил давомида турли сиртлар ўрганиб келинган. Кейинчалик сиртлар элементар ва содда сиртларга ажратиб тадқиқ қилинган. Масалан, квадрат, ёпиқ ярим текислик ва текислик энг содда сирт деб аталган. Энг содда сиртлар воситасида элементар сирт киритилган. Элементар сирт деб содда сиртларнинг бирортасига гомеоморф бўлган фигурага айтилган. Масалан, эллиптик ва гиперболик параболоидлар ва параболик силиндрлар элементар сиртга мисол бўла олади, чунки уларнинг ҳар бири текисликнинг бир қисмига гомеоморфдир.

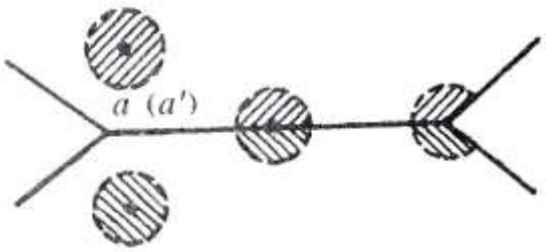
Ярим сферани чегараси билан бирга олсак, у ҳам элементар сиртларга мисол бўла олади, чунки у ёпиқ ярим текисликка гомеоморфдир. Эвклид фазоси R^3 даги чекли ёки саноқли сондаги элементар сиртлар билан қопланган тўплам (фигура) сирт деб аталади. Бошқача айтганда, Эвклид фазоси R^3 даги бирорта фигурани чекли ёки саноқли сондаги элементар сиртлар билан қоплаш мумкин бўлса, унга сирт дейилади. Сфера, эллипсоид, эллиптик силиндр, бир паллали ва икки паллали гиперболоидларни олсак, улар сиртга мисол бўла олади. Чунки сферани иккита ярим сфера билан қоплаш мумкин: эллипсоид эса, сферага гомеоморфдир; эллиптик силиндрни чекли сондаги силиндрик полоскалар (йўлакчалар) орқали қоплаш мумкин. Уларнинг ҳар бири эса, текисликка гомеоморфдир; бир паллали гиперболоид иккита йўлакчадан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири текисликка гомеоморфдир. Олдинги бобларнинг бирида биз елимлаш амали ёки фактор фазо ва фактор акслантириш тушунчаси аниқлангандан кейин елимлаш орқали P^3 Эвклид фазода кўпгина сиртларни кўришимизга тўғри келган. Шу сиртларнинг ҳар бирини топологик сирт сифатида қараб, ихтиёрий бирор ўлчамга эга бўлган сиртни олсак, бундай сиртлар таснифини бера оламизми ёки йўқми деган саволларга жавоб излашга уринамиз.

Қаттиқ жисмлар денгиз тўлқинларининг бир ондаги сирти ёки кундалик ҳаётда ишлатиладиган пиёла, гантел ёки икки тутқичли жисмлар сиртларини олсак, улар турли-тумандир. Ушбу сиртларнинг умумий хусусиятларини аниқлаб, шунга кўра уларни синфларга ажратишимиз мумкин бўлади.

6.2. Икки ўлчамли сиртларни елимлаш.

Бу бўлимда текис фигурани елимлаб ёпиштириш амали натижасида ҳосил бўладиган фактор фазосини тўлиқ ўрганамиз. P^2 текисликда П кўпбурчак оламиз ва унда индуцирланган метрикани кўриб чиқамиз. Маълумки, ҳар бир $x \in П$ нуқтанинг доирасимон атрофи мавжуд. Бу атроф П кўпбурчак билан маркази x нуқтада бўлган доира кесишмасидан иборат бўлади. Агар x нуқта П кўпбурчакнинг чегарасига тегишли бўлмаса, x нинг етарли кичик доирасимон атрофи очиқ доиралардир. Агар x нуқта П кўпбурчак чегарасига тегишли бўлса, й ҳолда атрофи очиқ доиранинг чегараловчи радиуслари билан олинган секторлардан ёки сегментлардан иборат бўлади (6.1.1-расм).



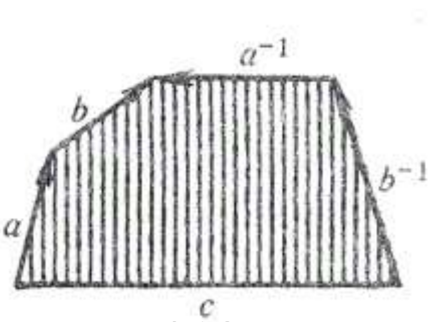


6.1.2-расм

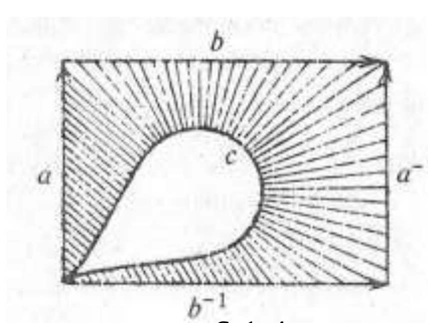
6.1.1-расм

Иккита П ва $П^1$ кўпбурчаклар берилган бўлсин ва уларнинг а ва a^1 томонларининг узунлиги тенг бўлсин. Кўпбурчакларни а ва a^1 томонлари бўйича елимлаб ёпиштирамиз. Бу билан $\lambda : a \to a^1$ гомеоморфизмда образ ва прообразни (бу икки нуқтани бир нуқта деб қабул қиламиз) эквивалент деб оламиз. Р эквивалентлик муносабатида $(П \cup П^1)$ /Р фактор фазо топологияси: агар x ва x^1 нуқталар кўпбурчакларнинг ички нуқталари бўлса, уларнинг очиқ атрофи бу нуқтани ўз ичига олган доирадан иборат бўлади; агар x ва x^1 нуқталар кўпбурчакларнинг чегарасига тегишли, яъни елимланган эквивалент $x \in a$ ва $x^1 \in a^1$ нуқталардан иборат бўлса, бу уларнинг атрофлари нуқталарни ўз ичига олган елимланувчи секторлардан иборат бўлади. 6.1.2-расмда кўпбурчакларнинг а ва a^1 томонларини елимлаш чизмаси келтирилган. Шунга ўхшаб, кўпбурчакнинг икки томонини елимлаб ёпиштириш мумкин бўлади.

Юқорида елимлаш натижасида ҳосил бўлган сиртнинг фактор фазодаги топологиясининг базаси (ёки очиқ тўплами) қандай бўлишини кўрсатдик.Энди сиртларни елимлашга ўтайлик.



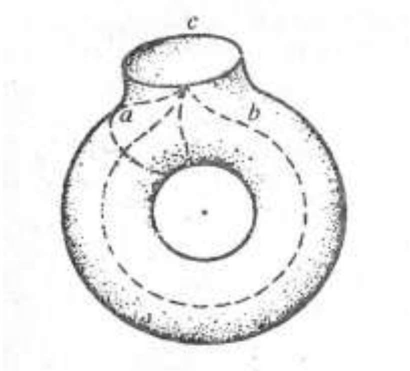
6.1.3-расм



6.1.4-расм

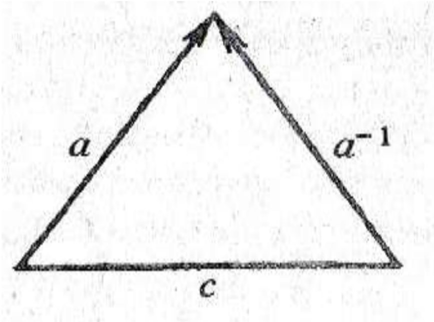
6.1.3-расмда берилган бешбурчакнинг бир хил ҳарфлар билан белгиланган томонларини елимлаб ёпиштирамиз. Елимлаш тартиби қуйидагича: мос, яъни бир хил ҳарфлар билан белгиланган томонлар йўналиши стрелка билан кўрсатилган бўлиб, йўналтирилган мос кесмаларнинг боши билан боши, охири билан охири елимланади. Ҳарфлар тепасидаги -1 ишораси ўша томонларнинг йўналиши мос тушмаслигини билдиради, яъни кўпбурчакнинг чети бўйлаб соат мили йўналишига нисбатан стрелка (йўналиш) тескаридир. Елимлаш тартибини баён қилишда кўпбурчак томонларини айланиб ўтиш соат мили бўйлаб олинса, қулайроқ бўлади. Масалан, юқоридаги бешбурчакда елимлаш жараёни а томондан бошланса, унинг схемаси аба$^{-1}$, б$^{-1}$с кўринишда бўлади. Бу кўринишдаги елимлаш схемаси кўпбурчакнинг елимланадиган томонларини тўла аниқлайди ва елимлаш қонуниятини қаноатлантиради. Шуни таъкидлаш керакки, елимлаш жараёнида елимланадиган томонларнинг узунликлари бир хил деб олинади.

Ишонч ҳосил қилиш мумкинки, бу фактор фазони бошқа усул, яъни топологик эквивалентлик усули орқали ҳам ясашимиз мумкин (6.1.4-расм): бу ерда фактор фазо тешигининг чети с чизиқдан иборат бўлган тор (баллон, камера)дир. 6.1.5-расмда штрихланган чизиқлар орқали елимлаш аа$^{-1}$ ва бб$^{-1}$ чизиқлари белгиланган. Тешикли тор даста (ручка) деб аталади.

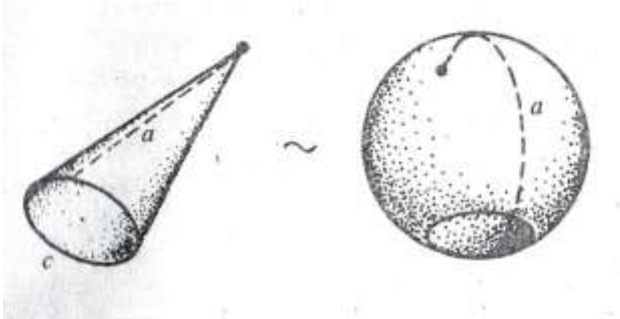


6.1.5-расм

6.1.1-мисол. Ихтиёрий учбурчак оламиз ва унинг қўшни томонларини елимлашни кўриб чиқайлик. Агар ориентatsiя тескари бўлса, у ҳолда елимлаш схемаси аа$^{-1}$с кўринишида (6.1.6-расм) бўлади. Бу ҳолда фактор фазо топологик тешикли сферага эквивалентдир (6.1.7-расм).



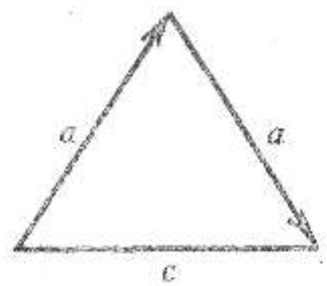
6.1.6-расм



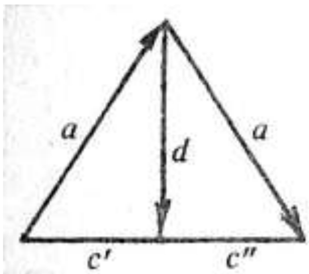
6.1.7-расм

6.1.2-мисол. Энди бир хил ориентatsіяли учбурчакнинг қўш томонларини елимлашни схема бўйича (6.1.7-расм) кўриб чиқайлик. Учбурчакни бир умумий д баландлиги билан кўрсатилган ориентatsіяли иккита тўғри бурчакли учбурчак деб олайлик (6.1.8-расм). Бундай ҳолатда учбурчакларни елимлаш тартиби қуйидагича бўлади. Биринчи навбатда учбурчакларнинг гипотенузалари елимланади, сўнгра катетлари д елимланади (6.1.9-расм). Натижада, Миёбиус вараги ҳосил бўлади. Буни олдинги бобларда келтирилган Миёбиус вараги билан солиштириш мумкин.

Шуни таъкидлаш керакки, охирги ҳосил бўлган фактор фазо биринчи келтирилган (6.1.7-расм) фазога гомеоморфдир.

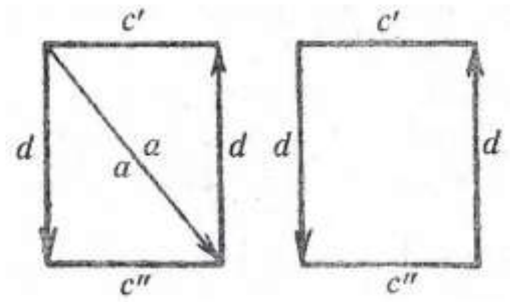


6.1.8-расм



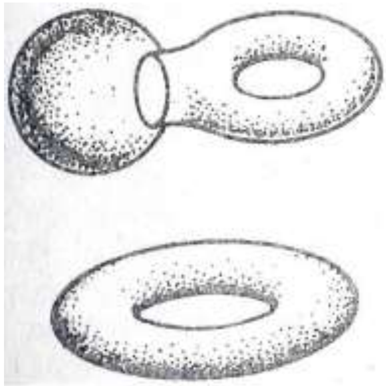
6.1.9-расм

6.1.3-мисол. C^2 сферадан ҳалқача кесиб оламиз ё бўлмаса тешикли сферага эркин четки с чизиғи бўйлаб даста ёки Миёбиус варағини елимлаб ёпиштирамиз. Биринчи ҳолда торга эга бўламиз (6.1.10- расм).



6.1.10-расм

Иккинчи ҳолда эса, проектив текислик РП^2 га эга бўламиз. Ҳақиқатан ҳам, проектив текислик (олдинги бўлимда келтирилган) топологик (6.1.10-расм) фактор фазога эквивалентдир. Бунинг учун юқори “қопқоқга” чети с чизиқдан иборат Миёбиус варағи эканлигини кўрсатиш етарлидир. Бу фигурани ички айлананинг диаметриал қарама-қарши нуқталари айнанлаштирилган (елимланган, яъни диаметриал қарама-қарши икки нуқта бир нуқта деб ҳисобланган) текис ҳалқа сифатида тасаввур қилиб, Миёбиус варағига олиб келувчи топологик алмаштиришлар (6.1.11-расм) бажарилади. Юқоридаги ясаш (сиртларни кўриш) жараёнини қуйидаги икки йўналишда ривожлантириш мумкин:



6.1.11-расм

1) сферада Р дона ҳалқача қирқиб, унга Р дона даста елимлаймиз;

2) сферада қ дона ҳалқача қирқиб, унга қ дона Миёбиус варағини елимлаб ёпиштирамиз.

Шундай қилиб, биз икки қатор қуйидаги сиртлар кетма-кетлигига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} M_0; M_1,\ldots,M_p,\ldots \\ H_0, H_1,\ldots,H_к,\ldots \end{array}\right\}$$

Таъкидлаш лозимки, M_0 ва H_0 сиртлар C^2 сферадир. Ҳосил қилинган бу сиртларнинг баъзи геометрик хоссаларини ўрганамиз ва талқин қиламиз. Биринчи навбатда, бу сиртлар чекли сондаги қавариқ кўпбурчакларнинг томонларини елимлаш ва кейинги топологик алмаштиришлар натижасида ҳосил қилинганлигини англаб олиш керак.

M_r ва N_q сиртлар орасида шундай бир боғлиқлик борки, улар ягона бўлакдан иборат, яъни бу сиртлар ўзаро кесишмайдиган кўпбурчаклар гуруҳига ажралмайди. Чунки, бу сиртларнинг қурилиш жараёнига эътибор берсак, кўпбурчакнинг икки учини боғловчи томони бўйича елимлашда учларини туташтирувчи узлуксиз йўл доим мавжуд эканлигини кўрамиз. Бу сиртлар четга эга эмас, чунки елимлашда қатнашаётган кўпбурчакнинг ихтиёрий чегаравий томони фақат битта бошқа томон билан елимланади. Бундан келиб чиқадики, бу сиртларнинг ихтиёрий нуқтаси очиқ доирага гомеоморф атрофга эга. Шу сабабли бундай сиртлар (фазолар) икки ўлчамли кўпхиллик дейилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, Mр сирт ориентирланган ва уни P^3 фазога ўзаро кесишмаган икки томонли сирт сифатида жойлаштириш мумкин.

N_q сирт эса, M_r сиртнинг акси-ориентирланмаган Миёбиус варағига ўхшаб бир томонли ва уни P^3 фазога ўзаро кесишган сирт сифатида жойлаштириш мумкин эмас. Лекин уни P^4 фазога жойлаштириш мумкин.

Сиртнинг ориентирланганлиги топологик хосса бўлганлиги туфайли M_r ва M_q сиртлар (к≥ 1) ҳеч қачон гомеоморф бўла олмайди.

Ҳар хил икки M_r ва M_q сиртлар (ёки N_p ва N_q сиртлар) (бунда $r \neq q$) ҳам ҳеч қачон ўзаро гомеоморф бўла олмайди (бу таъкид қуриш жараёнидан келиб чиқади).

Демак, (1) рўйхат ёпиқ сиртларнинг тўла топологик таснифидан иборат бўлар экан.

Агар сферага r та даста ва қ≥ 1 та Миёбус варағи ($r+q$ та тешик тешиб) елимласак, ҳосил бўлган сирт сферага, 2р+қ та Миёбиус варағи елимланган сиртга топологик эквивалентдир.

6.3. Сиртларнинг триангулясияси.

Бу бўлимда икки ўлчамли ёпиқ сиртларни топологик учбурчакларга бўлиб, уларнинг баъзи геометрик хоссаларини кўриб чиқамиз.

Агар X топологик фазонинг ҳар бир x нуқтаси P^2 фазодаги очиқ доирага гомеоморф бўлган атрофга эга бўлса, X фазо икки ўлчамли кўпхиллик дейилади. Бундай фазоларни ўрганишда уларни Эвклид фазоларидаги учбурчакка гомеоморф бўладиган элементар бўлакларга бўлиб ўрганиш қулай бўлади.

1-таъриф. Агар $T \subset X$ бўлиб, $\varphi:\Delta \to T$ гомеоморф бўлса, у ҳолда (T, φ) жуфтлик X фазодаги топологик учбурчак дейилади. Бу ерда $\Delta \subset P^2$, Δ ≈ учбурчак, φ гомеоморфизм "устига", бошқача айтганда, φ □ сюректив, яъни акслантириш $\varphi^{-1}(t) \neq \varnothing$, $\forall \gamma, t \in T$.

Агар $\varphi:\Delta \to$ T гомеоморфизм тайин бўлса, ортиқча такрорламаслик ва тушунмовчилик бўлмаслиги учун Δ учбурчакнинг учи ва томонларини топологик $T \subset R^2$ учбурчакнинг ҳам учи ва қирралари деб қабул қиламиз. Бир хиллик ҳамда қулай бўлиши учун Δ учбурчакнинг томонларини T нинг қирралари деймиз. Учбурчакнинг ориентациясини аниқлаймиз ва Δ нинг учларидан ташкил топган ҳар хил тартибланган "учликдан" (учта учидан) иборат нуқталар тўплами ҳосил қиламиз.

Агар бир учлик иккинчи учликдан ўрин алмаштириш натижасида ҳосил қилинган бўлса, иккита учлик эквивалент деймиз. Маълумки, бу ерда эквивалентлик синфи иккитадан иборат бўлади. Агар бу тайин бир эквивалент синфларининг биридан иборат бўлса, Δ учбурчакни ориентирланган деймиз. Агарда Δ учбурчак ориентирланган бўлса, (T,φ) топологик учбурчак ориентирланган дейилади.

Δ учбурчакнинг ориентацияси ушбу учбурчакнинг учлари орқали соат миллари бўйлаб ёки соат милига тескари ҳаракатланиш орқали бир қийматли аниқланади. Бу ўтиш йўналиши φ нинг гомеоморфизм ёрдамида топологик учбурчакда ҳам учларидан ўтиш йўлини аниқлайди. Бунга индуцирланган гомеоморфизм φ ориентацияси дейилади. Учбурчакнинг ориентцияси унинг қирралари ориентациясини ҳам аниқлайди. Юқоридагидан кўринадики, шунга ўхшаб н бурчак ва унинг қирралари (н>3) ориентациясини ҳам аниқлаш мумкиндир.

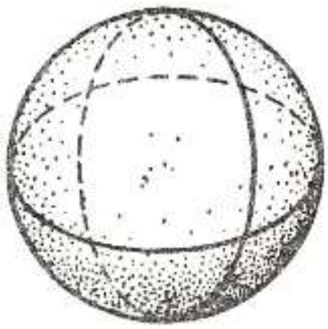
2-таъриф. Агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса, X фазонинг чекли сондаги $R=\{(T_i\varphi_i):i=\overline{1,k}\}$ топологик учбурчаклардан ташкил топган тўплами икки ўлчамли кўпхилликнинг триангулясияси дейилади:

1) $X=\bigcup\limits_{i=1}^{K} T_i$;

2) $T_i, T_j=\varnothing$ ёки $T_i \cap T_j$ кесишма T_i ва T_j ларнинг умумий қиррасидан ёки умумий учидан иборат бўлса, бу ерда $\forall i,j\in\{1,k\}$, $K=\{T_i : i=\overline{1,k}\}$ триангулясия.[2]

Агар кўпхилликлар триангулясияга эга бўлса, бундай кўпхилликлар триангулясияли кўпхиллик дейилади.

Агар К учбурчакларнинг ихтиёрий икки учини қирраларидан тузилган йўл орқали туташтириш мумкин бўлса, у ҳолда X боғламли дейилади.[3]



6.2.1-расм

6.2.1-расмда С^2 сфера саккизта учбурчакдан ташкил топган

[2] Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 432-457
[3] Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 432-457

триангулясияли фигурага мисол бўлади.

3-таъриф. Боғламли триангулясияли икки ўлчамли кўпхилликлар ёпиқ сирт дейилади.[4]

6.4. Сиртларнинг ёйилмаси.

Бу бўлимда ҳам Δ системага ўхшаш X сиртни тақдим этувчи схематик К триангулясияси зарур бўлади. Аммо бунда учбурчаклар билан биргаликда н бурчаклар ҳам (н>3) иштирок этиши мумкин.

4-таъриф. Агар Қ=({К$_{и}$},{$\varphi_{иж}$}) система учун қуйидагилар ўринли бўлса, бу система ёйилма ташкил қилган дейилади, агар {К$_{и}$} чекли сондаги кесишмайдиган текис кўпбурчаклардан иборат бўлиб, $\{\varphi_{i,j}\}$ чекли сондаги елимловчи гомеоморфизм бўлиб, улар {К$_{и}$} кўпбурчаклар наборининг жуфт қирраларини елимласа ва ҳар бир қирра фақат битта қирра билан елимланса, бу елимлашда битта кўпбурчакнинг қирраси иштирок этса.

Хусусий ҳолда $\Delta = (\{\Delta_i\},\{\varphi_{ij}\})$ система ҳам ёйилма ташкил қила олади, бу Δ ёйилма X сиртнинг К триангулясияси билан боғлиқ ёйилмаси деб юритилади.

Ихтиёрий Қ ёйилма берилган бўлсин. Бу ёйилмада ёки $\cup Q_i$ бирлашмада φ_{ij} гомеоморфизмлар аниқланган Р эквивалентлик муносабати орқали ҳосил бўлган $\tilde{Q}$ фактор фазони қарайлик, яъни $\tilde{Q} = (\bigcup_i^I Q_i)/R$. $\tilde{Q}$ фактор фазони ёйилма фазоси деб атаймиз. Маълумки, бу фактор фазо, яъни ёйилма фазоси икки ўлчамли кўпхилликдир. Бу фазо етарли майда кўпбурчак Q_i триангулясия ҳосил қилган триангулясияга эга бўлади. Шу сабабли, агар $\tilde{Q}$ фактор фазо боғламли бўлса, бу фазо ёпиқ сирт бўлади. Бу ҳолда Q га $\tilde{Q}$ сиртнинг ёйилмаси дейилади.

6.5. Кўпбурчак ва сиртларнинг Эйлер характеристикаси.

---

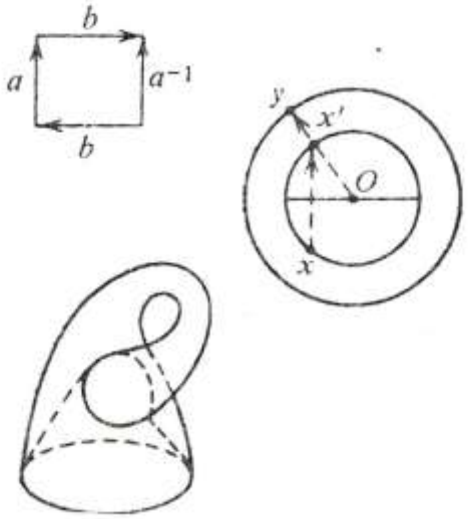
[4] Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 432-457

Бу пунктда топологик сирт кўпбурчак ёки топологик кўпбурчакларнинг Эйлер характеристикаси ва мунтазам кўпёқлиларнинг турлари аниқланади. Олдинги пунктдаги теоремадан маълум бўлдики, ихтиёрий ёпиқ сирт Мр ёки Нқ га гомеоморф экан. Бундан кўринадики, Мр ва Нқ ларнинг Эйлер характеристикасини келтирсак, топологик сиртлар ёки сиртларнинг тўла классификациясини келтирган бўламиз. Шу сабабли баъзи бир сиртларнинг турли эквивалент таърифларини келтириш мақсадга мувофиқ бўлади.

Ҳар қандай триангуляцияланган *П* сирт учун $\chi(\Pi) = l - k + f$ сонни аниқлаймиз. Бу ерда *л* триангуляциянинг учлари, *к* қирралари ва *ф* кўпбурчаклар сонидир. $\chi(\Pi)$ сон *П* сиртнинг Эйлер характеристикаси дейилади.[5]

1. Энди Клейн бутилкаси деб аталувчи, H_2 сиртга эквивалент бўлган таърифларни келтирамиз.

а) тўғри тўртбурчакнинг (6.5.1-расм) томонларини $aba^{-1}b$ схема бўйича елимлаймиз;



6.5.1-расм

б) ҳалқанинг четлари ω ички ва ташқи айланаларни йўналишини алмаштирган ҳолда елимлаймиз. Бунга қуйидагича эришиш мумкин: ички айланани бирорта диаметри бўйича букиб, ички ва ташқи айланалардаги

---

[5] Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 432-457

бир радиусда ётган х ва й нуқталар елимланади (6.5.1-расм);

д) иккита Миёбиус варағини чети ω айланалари бўйича елимлаймиз;

е) ҳалқанинг четлари ω ҳар бир айланага иккита Миёбиус варағини елимлаймиз.

2. Маълумки, проектив фазо РП^1 айлана С^1 нинг диаметриал қарама-қарши нуқталарини айнанлантириш натижада ҳосил қилингандир. Исботлаш мумкинки,

а) РР^1 фазо С^1 га гомеоморфдир;

б) РП$^1\subset$ РП^2;

д) РП^2 фазода РП^1 нинг шундай Миёбиус варағига гомеоморф бўладиган атрофи топилади.

3. Ёпиқ қавариқ кўпбурчакка гомеоморф бўлган топологик фазолар топологик кўпбурчаклар дейилади. Бу гомеоморфизмда кўпбурчак мос учларининг (томонларининг) образлари топологик кўпбурчакларнинг учлари (қирралари) деб юритилади. Умумийликни бузмаслик мақсадида сиртнинг триангулясияси қирралари бир-бирига ёпишган қўшни топологик кўпбурчаклардан ташкил топгандир, деб хулоса қилса бўлади. Бунга эришиш учун қавариқ кўпбурчакнинг сирт ҳосил қиладиган (қаралаётган сирт) томонларини айнанлаштириш керак. Бундан олдин эса, кўпбурчакни етарли майда кўпбурчакларга (масалан, учбурчакларга) бўлиб юбориш лозим бўлади. Энди шундай сиртларнинг триангулясияларини кўрамиз.

Ҳар қандай триангулясияланган $П$ сирт учун $\chi(П)=l-k+f$ сонни аниқлаймиз. Бу ерда $л$ триангулясиянинг учлари, $к$ қирралари ва $ф$ кўпбурчаклар сонидир. $\chi(П)$ сон $П$ сиртнинг Эйлер характеристикаси дейилади. Бу сон ажойиб хоссага триангулясияга боғлиқ эмаслик хоссасига эга. Бошқача айтганда, топологик инвариантдир.

4. Бизга маълум, қуйидаги сиртлар Эйлер характеристикаси С^2 сфера учун 2 га; тор учун 0 га; доира учун 1 га; даста учун -1га ва Миёбиус варағи учун 0 га тенг бўлади.

Агар Жордан теоремасидан фойдалансак, C^2 сфера учун $\chi(S^2)$ Эйлер характеристикасининг топологик инвариантлигини осонгина исботлаш мумкин бўлади.

6.6. Жордан теоремаси.

Жордан теоремаси. Ихтиёрий содда ёпиқ чизиқ (айланага гомеоморф бўлган чизиқ) текислик ёки сферани иккита чегаралари шу чизиқдан иборат бўлган ўзаро кесишмайдиган соҳаларга ажратади.

Энди C^2 нинг бирорта триангулясиясини олайлик. Битта уч (*) ни тайин қилиб ва қирраларни кетма-кет ўчириб, C^2 га келишимиз мумкин. Биринчи қиррани (*) уч билан янги учини туташтириб, ҳар бир кейинги қирра янги чизилган қирранинг учидан бошланишини таъминлаймиз. Ҳар бир босқичда ҳосил бўлган учлар сони *л* ни, қирралар сони *к* ни ва қирралардан ташкил топган содда ёпиқ чизиқ билан чегараланган соҳалар сони *ф* ни ҳисоблаб борамиз. Айтайлик, бошланғич ҳолатда *л*=1, *к*=0, ф=1 бўлсин (яъни C^2 сфера (*) уч ва уни тўлдирувчи соҳадан иборат бўлсин). Ишонч ҳосил қилиш мумкинки, *л-к+ф* сон битта янги қирра қўшиш билан ўзгармайди. Ҳақиқатан ҳам, агар бу қирра янги учга борган бўлса, у ҳолда янги соҳа вужудга келмайди. Аммо *л* ва *к* лар 1 тага ошади. Агар янги қирра икки эски учларни туташтирса, у ҳолда бу қирра қирралардан иборат бўлган йўлни ёпади (яъни ёпиқ йўл ҳосил бўлади) ва натижада Жордан теоремасига кўра, янги соҳа ҳосил бўлади. Демак, *к* ва *ф* лар биттага ошади, лекин *л* ўзгармайди. Охирги қиррани туташтириб, триангулясияни тўла тиклаймиз ва у ҳолда $l-k+f=\chi(S^2)$ бўлади. Бошланғич ҳолатда $l-k+f=2$ тенглик ўринли эди. Демак, $\chi(S^2)=2$.

5. $П_1$ ва $П_2$ сиртлар берилган бўлсин ва уларнинг четлари l_1 ва l_2 лар S^1 га гомеоморф бўлсин. Бу ҳолда $П_1$ ва $П_2$ сиртларнинг четини $\alpha : l_1 \to l_2$ гомеоморфизм орқали елимланган деб ҳисоблашимиз мумкин. Айтайлик, $П_1 \underset{\alpha}{\cup} П_2$ ҳосил бўлган фактор фазо бўлсин. Қуйидаги формулани исботлаймиз:

$$\chi(\Pi_1 \underset{\alpha}{\cup} \Pi_2) = \chi(\Pi_1) + \chi(\Pi_2) \quad (1)$$

$П_1$ ва $П_2$ сиртларни шундай триангулясиялаймизки, унинг четлари l_1 ва l_2 ларда гомеоморф триангулясиялар ҳосил бўлсин. S^1 нинг триангулясияси $л$ учдан ва шундай сондаги қиррадан иборат бўлсин. Елимлашдан кейин учлар, қирралар ва кўпбурчаклар сони мос равишда l_1+l_2-l, k_1+k_2-l ва f_1+f_2 ларга тенг бўлиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$(l_1+l_2-l)-(k_1+k_2-l)+(f_1+f_2)=(l_1-k_1+f_1)+(l_2-k_2+f_2).$$

(1) формула бу тенгликдан келиб чиқади. Бу формула баъзи ҳолларда сиртларнинг Эйлер характеристикасини ҳисоблаш учун жуда қулайдир. Айтайлик, ${}_nC^2$ тешикли сфера бўлсин. Агар бу ${}_nC^2$ фигурага қайта Р та доира елимласак, C^2 сферага эга бўламиз. (1) формула $\chi(S^2)=\chi({}_PS^2)+P$ тенгликни келтириб чиқаради.

Охирги тенгликдан $\chi({}_пC^2)=2-П$ га эга бўламиз. Бизга маълумки, (олдинги пунктда келтирилган) M_p сирт ${}_пC^2$ сиртга Р дона дастани елимлашдан ҳосил бўлган эди. Бу дасталар ҳар бирининг Эйлер характеристикаси -1 дан иборат. (1) формуладан

$\chi(M_p)=2-2П$ (2)

Шунга ўхшаб, Нқ кўринишдаги сиртлар учун

$\chi(Nq)=2-q$ (3)

формулага эга бўламиз. Маълумки, ҳар бир Миёбиус варағининг Эйлер характеристикаси 0 га тенгдир.

(2) ва (3) тенгликлардан кўринадики, $\chi(M_{p1})=\chi(M_{p2})$ тенглик фақат $P_1=P_2$ бўлганда, $\chi(Нқ_1)=\chi(Нқ_2)$ тенглик эса, фақат $қ_1=қ_2$, бўлганда ўринли бўлади. Эйлер характеристикасининг топологик инвариант эканлигидан M_p ва M_{p1} сиртлар $P\neq P^1$ бўлганда гомеоморф бўла олмайди. Шунга ўхшаб, Нқ ва $Нқ^1$ сиртлар ҳам $q\neq q^1$ бўлганда гомеоморф бўла олмайди.

6. Эйлер характеристикаси қавариқ кўпёқлилар геометрияси назариясида мазмунли ва қизиқ қўлланишга эга. Қавариқ кўпёқларнинг сиртни чекли сондаги қавариқ кўпбурчакларни (томонларини) айнан

акслантириш ёрдамида қирраларни елимлаш натижасида ҳосил бўлган сирт сифатида қараш мумкин. Бу қавариқ кўпёқ учун қуйидаги Эйлер характеристикасига эга бўламиз.

$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ (4)

Бу ерда α_0 кўпёқнинг учлари, α_1 қирралари ва α_2 ёқлари сонидир.

Ҳақиқатан ҳам, ўнгдаги 2 сон сферага гомеоморф бўлган кўпёқ сиртининг Эйлер характеристикасидан иборатдир.

Агар ҳар бир уч м та ёқнинг умумий учи бўлиб, ҳар бир ёқ н-бурчакдан иборат бўлса, кўпёқли (н,м) типга эга дейилади.

Агар н бурчаклар мунтазам бўлса, у ҳолда кўпёқли мунтазам дейилади. Кўпёқлининг (н,м) типини билсак, у ҳолда α_0, α_1 ва α_2 ларни ҳисоблаш мумкин бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир учда м та қирра учрашади (кесишади). Шу сабабли $\alpha_0 m = 2\alpha_1$ ҳар бир ёқда н қирра бор. Бундан эса, $\alpha_2 \cdot n = 2\alpha_1$ (ҳар бир қирра икки учни бирлаштиради ва қирра икки ёқнинг таркибида бўлади).

Демак:

$$\frac{\alpha_0}{m^{-1}} = \frac{\alpha_1}{2^{-1}} = \frac{\alpha_2}{n^{-1}} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{4mn}{2n + 2m - mn}$$

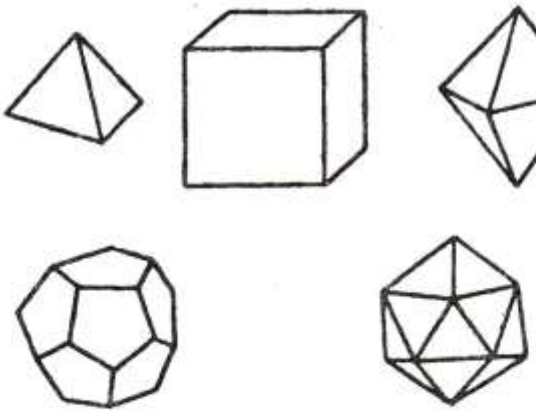
Бу тенглик ёрдамида $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ларнинг қийматлари ҳисобланади. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ларнинг мусбат бўлиши ҳақидаги табиий шартнинг бажарилиш заруратидан n ва бутун мусбат сонлар учун қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$2n + 2m - mn > 0,$ бундан $(n-2)(m-2) < 4$

Текшириб кўриш қийин эмаски, бу охирги тенгсизлик қуйидаги 5 та ечимга эга:

$\{3;3\} \leftrightarrow \{4;3\} \leftrightarrow \{3;4\} \leftrightarrow \{5;3\} \leftrightarrow \{3;5\}$ (5)

Элементар геометриядан маълумки, 5 та мунтазам кўпёқли мавжуд (6.5.2- расм):



6.5.2-расм

Тетраедр; куб; октаедр; додекаедр; икосаедр. Бу кўпёқларнинг типлари (5) ечим билан бир хил бўлади. Шундай қилиб, биз (н,м) типдаги кўпёқлиларнинг тўла классификациясини келтирдик.

6.7 Майдонлар назарияси.

Биз бу бўлимда алгебрадаги муҳим тусҳунсҳалардан бирини муҳокама қиламиз, яъни **майдон** тусҳунсҳасини. Бу боб, китобнинг сўнги боби бўлиб, бунда баъзи олдинги тусҳунсҳаларга бағисҳланди. Майдон тусҳунсҳаси, сҳизиқли алгебра усҳун жавоб калити бўлиб хизмат қилди. Сҳизиқли алгебранинг жуда кўплаб китоблари, ҳақиқий ва комплекс сонлар майдонларини кўриб сҳиқади. Бироқ, вектор фазолар сҳекли майдонлари, кодларни есҳисҳда ва босҳқа математиканинг бўлимларида, турли хил муҳим татбиқларни топди. Бу сабаблар усҳун бу, биз буни амалга осҳирилисҳи муҳим бўлган исҳ деб ўйлаймиз, дарҳақиқат, майдон тусҳунсҳаси билан танисҳисҳ усҳун 1-бўлиб биз бинар алгебраик амалини кўриб сҳиқисҳимиз керак.

Бинар алгебраик амал тусҳунсҳаси математикадаги асосий тусҳунсҳалардан биридир. Ҳақиқатан ҳам, биз бу тусҳунсҳанинг турли хил мисолларни, аллақасҳон норасмий рависҳда кўриб сҳиқдик, сҳу сабабли, алгебраик амаллар яъни биз тусҳунисҳимиз тезроқ бўладиган амаллар, ҳақиқатан ҳам хилма хилдир. Бу бизга, мисолларни ўргатисҳ усҳун умумий кўринисҳда яхсҳи имкониятни беради. Бу тусҳунсҳанинг муҳим қисмлари қуйидаги таърифда батафсил берилади.

3.1.1. Таъриф. M тўплам берилган бўлсин $\theta: M \times M \to M$ M нинг бу акслантирисҳи M га M тўпламнинг бинар(алгебраик) амали деб аталади. Сҳундай қилиб, хар бир тартибли (a,b) элементлар жуфтли мақсадга мувофиқ бўлади, бу ерда $a,b \in M$ бўлади ва бу ўзига хос $\theta(a,b) \in M$ тарзида белгиланади. $\theta(a,b) \in M$ элемент эса, a элементларнинг таркиби дейилади ва b га яқин амал ҳисобланади.

Қуйида икки муҳим тусҳунсҳалар(ғоя)ларни эслатиб ўтамиз. Биринсҳи M нинг элементи $\theta(a,b)$ ва босҳқаси ўзига хос тартибланган (a,b) элементлар жуфтлиги. Биз, бу ерда нотатион(сонларни ёзисҳ методи мумкин $a+a=za$ $a^2=a\cdot a$ юқоридаги икки муҳим тусҳунсҳа) ҳаида бирон нарса айтисҳимиз керак. Бу одатда озгина катта хисобланади. Яъни θ функсияда маълумотларни сақласҳга ва $\theta(a,b)$дан фойдаланисҳ усҳун. Бу ерда турли хил қисқартирисҳлардан фойдаланилади ва тез-тез махсус нотатионлардан фойдаланилади. Масалан $\theta(a,b)=a\#b$ каби ёзилади. Биз эслатиб ўтамизки, умумий олганда $\theta(a,b)$, $\theta(b,a)$ дан фарқ қилади, яъни бу холатни $a\#b=b\#a$ кўрсатисҳ усҳун сабаб йўқ. Бироқ, $a\#b$ ёзилисҳ тез-тез алмасҳтириб юборилади ва бу ерда фойдаланилган $\#$ белги кўпроқ танисҳ(таниқли)дир. Энг кўп танилган бинар амаллари $+$ ва $\cdot$дир ва бу белгилар турли хил амалларни қараётганимизда фойдали бўлди. Сҳундай қилиб $a\#b$ ёзисҳни ўрнига биз, $a+b$ ёки $a\cdot b$ ойзисҳлардан фойдалана оламиз. Бу амаллар билан ёзисҳ баъзида тусҳунисҳ усҳун жуда муҳимдир(яъни танисҳ маъноларни беради $+$ ва $\cdot$) бироқ, ҳар доим ҳам эмас.

Кўплаб ҳолатларда, $+$ исҳораси қўсҳисҳ амали билан боғланган ва $a+b$ ифода йиғиндига мос келади. Бу ҳолатда, биз бинар амалнинг қўсҳисҳ маъносини берисҳни тусҳунамиз. $\cdot$ амали кўп холда кўпайтирисҳ амали билан боғланган ва $a\cdot b$ ифода кўпайтма маъносини беради. Одатга кўра $\cdot$ исҳораси тусҳириб қолдирилади фақатгина кўпайтма ab ифода тарзида берилади.

Ҳозир биз бина амалларини баъзи мисолларни муҳокама қиламиз. Кўпинсҳа холатлар усуҳн, бу амаллар тексҳирисҳ усҳун осон бўлади. аммо, улар яъни бинар амаллар тасвирласҳ, ойдинласҳтирисҳ усҳун хизмат қиладиган амаллар, ўқисҳ усҳун жуда танисҳ бўлади ва уларни эртароқ пайқасҳ осон бўлади.

(x) $M = \square, \square, \square, \square$ тўпламларда бинар амаллари қўсҳилади. Бу ҳолатда $\theta(a,b) = a + b$ бўлади ва бу ерда M нинг элементлари аниқ. Мисол усҳун $M = \square$ ҳолатда бизга маълум бўлган, агар икки бутун соннинг йиғиндиси бу усҳинсҳи бутун сон бўлди деб белгиланади.

(xi) $M = \square, \square, \square, \square$ тўпламларда кўпайтма бинар амали. Бу ҳолатда албатта $\theta(a,b)$, ab тарзида белгилаймиз.

(xii) M асоссиз тўплам берилган ва M тўпламнинг барсҳа трансферлари(трансформатион) $P(M)$ берилган. У ҳолда барсҳа $f, g \in P(M)$ усҳун θ функсия $\theta(f,g) = f \circ g$ алгебраик амали ($P(M)$ тўпламдан олинган) таърифланади.

(xiii) M тўплам ва Б(M) яъни M нинг мантиқи берилган. ҳар бир $X, Y \subseteq M$ усҳун қуйидаги акслантирисҳлар

$$(X,Y) \mapsto X \cup Y, (X,Y) \mapsto X \cap Y,$$
$$(X,Y) \mapsto X \setminus Y, (X,Y) \mapsto X \square Y,$$

Б(M) тўпламдаги алгебраик бинар амал тусҳинтирилади. Биринсҳи холат усҳун эслатма, масалан, кўпроқ табийроқ бўлган бинар амали $\cup$ бу ерда $+$ ёки $\cdot$ тарзида бўлади. қасҳон мумкин бўлса, ўсҳанда биз табиий ёзисҳлардан (нотатион) фойдаланамиз.

(xiv) Қўсҳисҳ, кўпайтирисҳ ва матрицалар комбинациялари $M_n(\square)$ тўплам бинар амалларидир.

(xv)Хақиқий функсиянинг қўсҳисҳ ва кўпайтирисҳ амали $P(\square)$ тўпламнинг ҳақиқий функсиясидир.

(xvi) Қуйидаги акслантирисҳлар

$(n,k)\mapsto n^k$ va $(n,k)\mapsto n^k+k^n$, бу ерда $n,k\in\mathbb{N}$

Ҳар бир бинар алгебраик амаллари $\mathbb{N}$ тўпламда аниқланади

(xvii) Қуйидаги акслантирисҳлар

$(n,k)\mapsto GCD(n,k)$ va $(n,k)\mapsto LCM(n,k)$

бу ерда $n,k\in\mathbb{N}$,

Бу ерда алгебраик амаллар $\mathbb{N}$ тўпламда аниқланади (ёки $\mathbb{N}$ тўпламга тегисҳли)

(xviii) Қўсҳисҳ ва вектор кўпайтмалар R^3 фазонинг бинар амалларидирлар.

Аёнки, сҳунингдек амаллар тўлами бинар амал бўла олмяди. Масалан, агар $a,b\in\mathbb{N}$ бўлса, у ҳолда $\theta(a,b)=a-b$ функсия бинар амал эмас, у ҳолда, булар турли икки натуре сонларга натурал сон бўлисҳ зарур бўлмайди.

Биз, энди муҳим бўлган алгебраик амалларнинг хоссалари билан танисҳамиз, яққолик усҳун биз бинар амаллар ёзисҳининг “мултипликатив” ифодасидан фойдаланамиз, аммо аддитив ифодага мисоллар кўрсатамиз. Бироқ, биз оддий йиғинди ёки кўпайтмага қараганда бинар амалларимизга кўпроқ урғу бериб ўтамиз (диққат қаратамиз).

3.1.2. Таъриф. Агар $ab=ba$ бўлса A бинар амали M тўпламда коммунтатив деб аталади ва бу ерда a,b жуфтликлар M тўпламга тегисҳли.

Аддитв ифода усҳун, a ва bнинг коммунтатив ифодаси қуйидагисҳа ёзилади

$a+b=b+a,$ bu yerda $a,b\in M$ bo'ladi

Бу барсҳа $a,b\in M$ да $ab=ba$ ифоданинг M тўпламда коммунтатив эканлигини кўрсатади. Агар $ab\neq ba$ бўлса, фақатгина бир жуфт $a,b\in M$ усҳун, у ҳолда, бу амал коммунаттив бўла олмайди. Юқоридаги кўплаб амаллар рўйхати коммунтатив аммо баъзилари эмас. Натура, бутун, рационал, ва ҳақиқий сонлар тўпламидаги қўсҳисҳ ва кўпайтирисҳ амаллари коммунтатив $\cap, \cup$ ва Боолеан Б(A) мантиғидаги $\sqcup$ амаллари комунтатив аммо, $X \setminus Y \neq Y \setminus X$ умумий ҳолда бўлса, тўпламнинг тўплам остиси бўсҳ тўплам бўлмаган тақдирда, коммунтатив бўла олмайди. Матрицаларни қўсҳисҳ, кўпайтирисҳ, R^3 вектор фазода қўсҳисҳлар эса коммунтатив бинар амаллардир. Эслатиб ўтамиз R^3 фазидагу вектор кўпайтма коммунтатив эмас ва юқорида гувоҳ бўлганимиз матрицалар транспонирласҳ(трансфери) ва матрицалар кўпайтмаси муҳим бинар амаллардир лекин улар коммунтатив эмас.

Агар бизда $a,b,c \in M$ усҳ элемент мавжуд бўлса, у ҳолда биз $a(bc),(ab)c$ кўпайтма ифодаларни топа оламиз(бу ерда, кўпайтмада ёзилган элементлар тартибини ўзгартимаймиз). Умуман олганда, бу кўпайтмалар (икки кўпайтмалар) турлисҳа. Мисол усҳун, бу одатий муаммо ёҳуд ёза оламиз $a-(b-c)$ yoki $(a-b)-c$ қасҳонки $a,b,c \in \mathbb{R}$ бўлса.

3.1.3. Таъриф. Агар $(ab)c = a(bc)$ ҳар бир усҳлик M тўплам элементлари a,b,c бўлса M тўпламдаги A бианар малани ассациатив деб атаймиз.

Қуйидагисҳа ёза оламиз

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

$a,b,c,d\ h$ элементлар усҳун биз, турли хил кўпайтмалар қура оламиз. Мисол усҳун

$$((ab)c)d,(ab)(cd),(a(bc))d,a(b(cd)),\text{ va } a((bc)d)$$

Бу вақтда бу амал ассациатив, бироқ, барсҳа қавсга олисҳ методлари бизга ўхсҳасҳ жумлаларни бера олади холос, яъни кўплаб қавслар керак эмас. Сҳундай қилиб, масалан

$$((ab)c)d = (ab)(cd).$$

Кейинги теорема сҳуни кўрсатадики, сҳу каби тенгламалар умумий холда бўлади ва бу теорема дастлабки ҳолатни тасдиқлайди. Бу теорема ёлғиз, ассоциатив амалларни ҳосил қилисҳ усҳун жуда муҳим.

3.1.4. Теорема. Агар M тўплам бинар амал бўлса ва агар $a_1,\ldots,a_n$ M сҳекли туб тўплам элементлари бўлса, у ҳолда $a_1 a_2 \ldots a_n$ кўпайтма аниқ(лўнда) бўлади, одатда бу кўпайтмада қавсли ифодалари M нинг бир хил элементларини беради.

Исбот. Биз n орқали натижани исботласҳни давом эттирамиз. Бу атама кўпайтмадан олинган. Кўпайтма бутун ҳолда $a_1,\ldots,a_n$ кўринисҳда бўлади. агар $n=1,2$ бўлса, у ҳолда натижа аниқ ва агар $n=3$ бўлса у ҳолда қуйидаги ассациотив хоссадан тасдиқланади (ёки хосса ёрдамида топилади).

$n>3$ деб фараз қилсак ва биз аллақасҳон тасдиқимиз барсҳа сҳекли кўпайтмалар усҳун исботлаб бўлдик (n термин билан). Ҳар бир кўпайтма элементлари баъзи йўллар билан қавсга олинди ва баъзи белгиланган тартибда, кўпайтма билан мос келади яъни қуйидаги тартибда $\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\big(a_1a_2\big)a_3\Big)a_4\Big)\ldots\Big)a_{n-1}\Big)a_n$. Агар кўпайтма La_n ифода билан белгиланса (бу ерда L элементларнинг кўпайтмаси $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$) баъзи йўллар билан қавсга олинади, у ҳолда L га эътибор қаратамиз. Биз, L ни қуйидагисҳа ҳам(қавслар ёрдамида) ёза оламиз. $\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\big(a_1a_2\big)a_3\Big)a_4\Big)\ldots\Big)a_{n-2}\Big)a_{n-1}$. У ҳолда La_n бу сҳап нормал кўпайтма бўлади. $\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\big(a_1a_2\big)a_3\Big)a_4\Big)\ldots\Big)a_{n-1}\Big)a_n$ ва қуйидаги холда натижага эрисҳилди. Ҳар ҳолда, кўпайтманинг LM ифодага эга, бу ерда баъзи t натурал сонлар усҳун $t+1<n$ бўлади. $a_1,\ldots,a_t$ нинг ва M, бу $a_{t+1}\ldots a_n$ элементлар кўпайтмаси. Бу индуксия гипотезасига кўра ва ассациативликга кўра, биз қууйидагига эга бўламиз

$$LM=\big(a_1\ldots a_t\big)\big(a_{t+1}\ldots a_n\big)=\big(a_1\ldots a_t\big)\Big(\big(a_{t+1}\ldots a_n\big)a_n\Big)$$

$$=\Big(\big(a_1\ldots a_t\big)\big(a_{t+1}\ldots a_n\big)\Big)a_n=\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\big(a_1a_2\big)a_3\Big)a_4\Big)\ldots\Big)a_{n-1}\Big)a_n.$$

Натижа исботланди.

3.1.4. теоремага кўра, $a_1\ldots a_n$ кўпайтма қавслардан озод (ҳоли) ҳолда ҳам бу амалнинг ассациотив эканлиги исботланди. Натижада, бу 2 маъноли бўлади қасҳонки биз $a_1 \dots a_n$ деб ёзсак ва қавсларни қўймасак, албатта, қайси элементни биринсҳи ёзисҳ(тартибда) бу муҳим. Қисқаси биз бу ифода $a_1 \dots a_n$ ни $\prod\limits_{1 \le i \le n} a_i$ тарзида ёзамиз.

У ҳолда. Қасҳонки $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a,$ бўлса, биз $a_1 a_2 \dots a_n$ кўпайтмани a^n деб ҳисоблаймиз ва a нинг n даражаси деб атаймиз. Бу ҳолатда биз 3.1.4.теоремани даражалар қоидаси орқали, кейинг аксиомада кўриб ўтамиз.

3.1.5. Аксиома. Агар M тўпламда бинар амал ассациатив бўлса, у ҳолда $a \in M$ элемент(ҳар бир) ва $n, m \in \mathbb{N}$ бўлади,

$$a^n a^m = a^{n+m} \text{ va } \left(a^n\right)^m = a^{nm}.$$

Қасҳонки биз аддитиве ёзисҳдан бианр амалларни ёзисҳ усҳун фойдалансак, одатда биз $\sum\limits_{1 \le i \le n} a_i$ дан фойдаланамиз $\prod\limits_{1 \le i \le n} a_i$ нинг ўрнига, ва даража элементини ўрнига эсса кўпайтмадан фойдаланамиз

$$na = \underbrace{a + \dots + a}_{n}.$$

Аддитиве ёзисҳда, 3.1.5.аксиома қуйидаги ифодани олади

$$na + ma = (n+m)a \text{ va } m(na) = (mn)a.$$

a ва b элементлар коммунтативсҳилар дейилади ва агар

$$ab = ba$$

бўлса у ҳолда сҳу каби элементлар усҳун

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

Бу амал ассациотив эканлиги исботланди. Биз исботни индуксия методи орқали $n = 1$ ҳолат усҳун $ab^n = b^n a$ ни тексҳирамиз. Индуксия методи ва $ab^n = b^n a$ ва 3.1.5. аксиомадан фойдаланиб қуйидагиларга эга бўламиз.

$$ab^{n+1} = a\left(b^n b\right) = \left(ab^n\right)b = b^n\left(ab\right) = b^n\left(ba\right) = \left(b^n b\right)a = b^{n+1}a,$$

сҳунингдек индуксияга кўра юқоридаги натижа бўлади. Қуйидаги ифода мавжуд эканлигини эсалатиб ўтамиз

$$(ab)^2 = abab = a(ba)b = a(ab)b = (aa)(bb) = a^2b^2.$$

n усҳун индуксияни қўллаймиз ва индуксияга мосласҳга харакат қиламиз. $(ab)^n = a^n b^n$ ва қуйидаги натижага эга бўламиз

$$\begin{aligned}(ab)^{n+1} &= (ab)^n (ab) = \left(a^n b^n\right)ab = a^n \left(ab^n (b)\right) \\ &= \left(a^n a\right)\left(b^n b\right) = a^{n+1}b^{n+1}.\end{aligned}$$

Ўхсҳасҳ индуксияни қўллаймиз ва исботлаймиз.

3.1.6. Муаммо. M тўплам ва ассациатив бинар амал берилган. Агар $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лар M нинг элементлари бўлса барсҳа i, j лар усҳун $a_i a_j = a_j a_i$ бўлади ва $1 \le i, j \le n$, у ҳолда

$$(a_1 a_2 \ldots a_n)^m = a_1^m a_2^m \ldots a_n^m,$$

ҳар бир $m \in \mathbb{N}$ усҳун.

Аддитив ёзисҳда бу тенглама қуйидаги ифодани олади.

$$m(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = ma_1 + ma_2 + \ldots + ma_n.$$

M тўплам ва бинар амал берилган $z \in M$ элемент марказий деб аталади, агар M нинг ҳар бир элементи биалн у ўрин алмасҳса. M тўпламни барсҳа марказий элементлари M нинг маркази дейилади ва $\zeta(M)$ тарзида белгиланади.

3.1.7. Таъриф. S бўсҳ бўлмаган тўплам яримгуппа дейилади, агар S ассациатив бинар амалга эга бўлса. Агар бу амал коммунтатив бўлса уни яъни S ни коммунтатив яримгруппа деб атаймиз.

Ярим группанинг кўплаб табиий мисоллари бор.

(viii) Барсҳа натурал сонлар, бутун сонлар, ратисонал сонлар ва ҳақиқий сонлар тўпламлари, йиғинди амалининг коммунтатив яримгруппа остисидир. Бир хил тўпламлар сҳунингдек кўпайтма амалининг ҳам яримгруппа остисидир.

(ix) M тўплам берилган лекин бу тўплам асоссиздир. 1.3.2. теорема сҳуни кўрсатадики, M тўпламнинг барсҳа трансферлари $P(M)$ тўплами яримгруппа остисидир.

$(f, g) \mapsto f \circ g,$ бу ерда $f, g \in P(M).$

Биз яримгруппани коммунтатив эмаслигини кўрган эдик

(x) M тўплам берилган 1.1.10 теорема сҳуни кўрсатадики, M тўпламнинг Боолеан(мантиқ) Б(M), ҳар бир амалда коммунтатив группадир. Бу коммунтатив яримгруппанинг тўплам остисидир

$(X, Y) \mapsto X \bigcap Y, (X, Y) \mapsto X \bigcup Y, (X, Y) \mapsto X \Delta Y,$

Бу ерда $X, Y \subseteq M.$

(xi) 2.1.5. теоремага кўра $M_n(\square)$ тўплам матрицалар йиғиндисининг тўплам остисидир ва матрица кўпайтмаси коммунтатив бўлмаган яримгруппа тўплам остисидир (амалидир).

(xii) Ҳақиқий функсиянинг тўплами, $f : \square \to \square$ бу йиғинди ва кўпайтма амалларининг комунтатив тўплам остисидир (амалидир).

(xiii) Барсҳа бутунсонлар тўплами бу, коммунтатив яримгруппа тўплам ости амалларидир

$(n,k) \mapsto GCD(n,k)$ va $(n,k) \mapsto LCM(n,k),$

Бу ерда $n, k \in \square$

(xiv) $\square^3$ вектор фазо бу, векторларнинг коммунтатив яримгруппа ости йиғиндисидир. Натижада, биз бир муҳим мисол берамиз. Бўсҳ бўлмаган A тўплам берилган (яъни алфабит бўйисҳа A). F_A берилган бўлиб, бу A нинг сҳекли туплес элементидир. Бинар амал таърифига кўра F_A қуйидагисҳа бўлади.

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m),$

Бу ерда $a_i, b_j \in A$ бўлади $1 \le i \le n, 1 \le j \le m.$ Бу амал сонсатенатион холатдир деб аталади ва буни ассациатив эканлигини кўрисҳ осондир. Сҳундай қилиб F_A бу яримгруппа дейилади (A алфабит) бўйисҳа. Биз элементни ўзини-ўзига тенгласҳтира оламиз. Буни бажарисҳ билан, биз расмий кўпайтма $a_1 a_2 \dots a_n$ни билиб оламиз. Бу нарса бизга F_A бўсҳ яримгруппанинг элементлари w ни ёзисҳни имконини беради яъни $w = a_1 \dots a_n$. Биз буни алифбо бўйисҳа сўз деб аталади. n эса бу созънинг узунлиги дейилади. $a_1 a_2 \dots a_n$ ва $b_1 b_2 \dots b_m$ лар $a_i, b_j \in A$ тенгдир агар фақатгина $n = m$ ва $a_t = b_t$ (ҳар бир $1 \le t \le m$ усҳун) бўлсагина.

3.1.8. Таъриф. Бинар амал ва M тўплам берилган $e \in M$ элемент агар $ae = ea = a$ хар M тўплам элементи a, усҳун бўлса нейтрал элемент дейилади.

Бу нейтрал элемент ўзига хос ва мавжутдир. Дарҳақиқат, агар e босҳқа элемент билан $ae' = e'a = a$ ($a \in M$ усҳун) бўлса, у ҳолда $a = e'$ e нинг таърифида қуйидагини беради $ee' = e'e = e$ ва биз $e = e'$ натижага эрисҳамиз.

Агар M амал мултипликатив ёзилган бўлса, у ҳолда бу термин ўзига хос бўлади ва одатда нейтрал элементга қараганда озроқ фойдалнилади ва e 1 ёки 1_m орқали ифодаланилади. Агар биз аддитив формадан фойдалансак, у ҳолда нейтрал элемент, нол элемент деб аталади ва 0_M тарзида ёзилади, нўл элемент $a \in M$ усҳун қуйидагисҳа таърифланади $a + 0_M = 0_M + a = a$. Агар бу вазият аниқ бўлса, биз баъзан баъзи рақамлар ҳарф тусҳириб қолдирилади.

(ix) Қўсҳисҳ амали, барсҳа, натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламида 0 элемент мавжуд.

(x) Кўпайтирисҳ амали барсҳа, натурал, бутун, рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламида ўзига хот бўлган 1 рақамга эга.

(xi) M тўплам берилган ва $P(M)$ тўпламий трансфери (трансформатион) берилган. биз барсҳа $f \in P(M)$ усҳун $\varepsilon_M \circ f = f \circ \varepsilon_M = f$ эканлигини биламиз. Сҳундай қилиб, $P(M)$ ўзига хос бўлган ε_M элементга эга.

(xii) M ва Б$\left(M\right)$ Боолеан (Мантиғи) берилган.

$\left(X,Y\right)\mapsto X\bigcap Y,\left(X,Y\right)\mapsto X\bigcup Y,\ \left(X,Y\right)\mapsto X\Delta Y,$

бу ерда $X,Y\in M$ бўлади,

нейтрал элементлар мавжуд. 1-амал усҳун, бу M тўплам, $M\bigcap Y=Y\bigcap M=Y$ буларда $Y\subseteq M$ ва бу қолган 2 амаллар усҳун бўсҳ тўпламдир.

(xiii) Ҳақиқий матрицаларнинг $M_n\left(\mathbb{R}\right)$ тўпламидаги қўсҳисҳ амалида нол элемент мавжуд, яъни O матрица барсҳа $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ усҳун қуйидаги ифодага эга $O+A=A+O=A$. $M_n\left(\mathbb{R}\right)$ тўплам кўпайтирисҳ амали ўзига хос бўлган элементга эга, I матрица бўлса, $AI=IA=A$ барсҳа $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$усҳун ўринли бўлади.

(xiv) Барсҳа ҳақиқий функсияларнинг қўсҳисҳ амали ҳам нол элементга эга, бунда нол функсиянинг барсҳа аргументлари 0 га тенг бўлади. ҳақиқий функсия кўпайтирисҳ амали эса ўзига хос элементга эга, бу функсиянинг барсҳа элементлари 1 га тенг бўлади.

(xv) $\left(n,k\right)\mapsto GCD\left(n,k\right)$ бу ерад $n,k\in\mathbb{N}$,

Амал нейтрал 0 элементга эга бу ерда у ҳолда $GCD\left(n,0\right)=n$ бўлади.

(xvi) R^3 фазо қўсҳисҳ амали нол элементга эга (нол вектор).

3.1.9. Таъриф. A яримгруппа ўзига хос бўлган элементга эга.

3.1.10. Таъриф. M тўплам ва бинар амал берилган S бумтўплами, агар ҳар бир элементлар жуфтлиги $a,b\in S$ да ab кўпайтма ҳам S тўпламга тегисҳли бўлса, барқарор амал деб аталади.

Яъни S тўпламда сҳегараланган M бинар амали яна S тўпламда бинар амал бўлади. Масалан, барсҳа жуфт бутунсонларнинг субтўплами, барқарор $\mathbb{Z}$ субтўпламнинг қўсҳисҳ ва кўпайтирисҳ амаллари бўлади, у ҳолда 2 жуфтр сонларнинг қўсҳисҳ ва кўпайтирисҳ амаллари яна жуфт бўлади. Кейинги муаммода биз буни тезда, сода исбот қиламиз. Сҳундай бўлсада биз ўқувсҳининг қулай бўлисҳи усҳун мисоллар келтирамиз.

3.1.11. Муаммо. Бинар амал ва M тўплам берилган ва M тўпламнинг турғун оиласи C берилган. У ҳолда бу кесисҳисҳ ҳам сҳунингдек турғун бўлади.

Исбот. Агар $a,b \in \bigcap \mathrm{C}$ бўлса у ҳолда $a,b \in S$ барсҳа $S \in \mathrm{C}$ усҳун ўринли бўлади. У ҳолда барсҳа $S \in \mathrm{C}$ усҳун $a,b \in S$ ва $ab \in \bigcap \mathrm{C}$ бўлади.

Бироқ биз фақатгина икки барқарор жуфт субтўпламларнинг бирласҳмасини барқарор бўлисҳи керак эмаслигини эслатиб ўтамиз. Буни қуйидагисҳа кўрамиз, $2\mathbb{Z}$ субтўплам барсҳа бутн жуфт сонлар ва 3 га бўлинувсҳи барсҳа бутун сонлар $3\mathbb{Z}$ бўлади. бу 2 тўпламлар барқарор амал остидир, лекин $2\mathbb{Z} \bigcup 3\mathbb{Z}$ эса $5 = 2 + 3$ни ўз исҳига олмайди, сҳунинг усҳун бу барқарор эмас.

Берилган M тўплам билан бинар амал берилган, берилган C, M нинг субтўплам ва берилган C бу барқарор субтўпламнинг оиласидир, бу ҳар бир Cни ўз исҳига олади. У ҳолда $\bigcap \mathrm{C}$ кесисҳма, бу Cнинг озгина субтўпламини ўз исҳига олади ва у, барқарор субтўплам деб аталади.

3.1.12 Таъриф. S яримгруппа берилган Sнинг субтўплами R субяримгруппа дейилади, агар R ярим группа бўлса.

3.1.13. Таъриф. Бинар амал ва M тўплам берилган, бу ерда e элементни ўзига хос элемент деб фараз қиламиз. x элемент a элементнинг тескари элементи дейилади, агар

$$ax = xa = e.$$

бўлса.

Агар, тескари элемент мавжуд бўлса, у ҳолда, биз уни тескариланувсҳан дейилади. Агар M амал ассациатив бўлса ва a тескариланувсҳан бўлса, у ҳолда у ўзигасҳа элементга эга бўлади, ва берилган y усҳун қуйидаги

$$ay = ya = e$$

ни қониқтиради.

У ҳолда,

$$y = ey = (xa)y = x(ay) = xe = x$$

бўлади.

Биз a га тескари элементни a^{-1} деб белгилаймиз. Биз $aa^{-1}a =^{-1} a = e$ эканлигини эслатган ҳолда, ва қуйидаги ифода аён бўлади

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a.$$

Агар M амал қўсҳимсҳа тарзда ёзилган бўлса (яъни қўсҳилган сон билан натижада 0 сҳиқади). У ҳолда a нинг (қарама-қарсҳиси) $-a$ бўлади ва у негативе (баъзида a нинг қарама қарсҳиси) дейилади. Қуйидаги ифода негативе элементни таърифлайди.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0_M.$$

3.1.14. Таъриф. M тўплам ва ассациатив бинар амал берилган ва M ўзига хос e элементга эга деб фараз қиламиз.

(iii) Агар M да $a_1, a_2, \ldots, a_n$ элементлари, тескариланувсҳан бўлса, у ҳолда $a_1a_2 \ldots a_n$ кўпайтма ҳам тескариланувсҳан бўлади ва

$$\left(a_1a_2 \ldots a_n\right)^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1}.$$

(iv) Агар M да a тескариланувсҳан бўлса, барсҳа $n \in \mathbb{N}$ усҳун ва $\left(a^n\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$ усҳун a^n ҳам тескариланувсҳан бўлади.

Исбот. (и) Биз n индуксия билан исботлаб кўрамиз. $n = 2$ ҳолат усҳун биз қуйидагига эга бўламиз

$$\left(a_1a_2\right)\left(a_2^{-1}a_1^{-1}\right) = a_1\left(a_2^{-1}a_2\right)a_1^{-1} = a_1ea_1^{-1} = a_1a_1^{-1} = e.$$

У ҳолда, $\left(a_2^{-1}a_1^{-1}\right)\left(a_1a_2\right) = e$ бўлади, $n = 2$ натижа усҳун $\left(a_1a_2\right)^{-1} = a_2^{-1}a_1^{-1}$ натижа бўлади. Кўзланган бу натижа n усҳун тўғри, сҳунингдек биз $n = 2$ дан фойдаланган ҳол усҳун $\left(a_1 \ldots a_n\right)^{-1} = a_n^{-1}a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1}$ натижага эга бўламиз ва қуйидаги индуксия гипотезаси

$$\left(a_1a_2 \ldots a_na_{n+1}\right)^{-1} = \left[\left(a_1 \ldots a_n\right)a_{n+1}\right]^{-1} = a_{n+1}^{-1}\left(a_1 \ldots a_n\right)^{-1} = a_{n+1}^{-1}a_n^{-1} \ldots a_1^{-1}$$

натижага эга бўламиз.

(ии) $\left(a^{-1}\right)^n a^n = \left(a^{-1}a\right)^n = e = \left(aa^{-1}\right)^n = a^n\left(a^{-1}\right)^n$ 3.1.6. муаммога кўра бизга аён эди, сҳунинг усҳун бу натижа тескариланувсҳи элементларни кўрисҳ имконини беради. Биз берилган $U\left(P\right)$ ифодани P яримгруппанинг тескариланувсҳи элементи деб фараз қиламиз. 3.1.14. муаммодан биз юқоридаги натижани, тўғри деб ҳисобга оламиз.

3.1.15. Аксиома. Берилган P яримгруппа. У холда барсҳа тескариланувсҳан элементларнинг яримгруппаси $U\left(P\right)$ барқарордир (ўзгармас).

Ўзига хос элементнинг мавжуд элементи ва тескари элемент бизга барсҳа бутун сонлар a ни даража кўринисҳида ёзисҳга имкон беради.

$a^0 = e,$ va $a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$, бу ерда $n \in \mathbb{Z}$

Бунга қўсҳимсҳа қилган ҳолда биз қуйидаги ифодаларни бермиз

$0a = 0$ va $\left(-n\right)a = n\left(-a\right).$

Кейинг бизнинг натижамиз, барсҳа бутун сонлар усҳун одатий бўлган қоидани(қонунни) кўрсатиб беради.

3.1.16. Муаммо. Ассациатив бинар амал билан M тўплам берилган ва M ўзига хос e элементга эга. Агар $a \in M$ тескариланувсҳан бўлса ва $m, n \in \mathbb{Z}$ бўлса у ҳолда

$$a^n a^m = a^{n+m} \text{ va } \left(a^n\right)^m = a^{nm}.$$

бўлади.

Исбот. Агар $n, m > 0$ бўлса у ҳолда 3.1.5.дан қуйидаги тасдиқларни оламиз. Агар m ёки n лардан бири 0 бўлса у ҳолда, бу тенглик маълум бир холларда бўлади. агар $m, n < 0$ бўлса у ҳолда $n = -p,\ m = -q \quad p, q \in \mathbb{N}$ бўлади. У ҳолда биз таърифдан фойдаланиб қуйидаги натижаларга эрисҳамиз.

$$a^n a^m = a^{-p}a^{-q} = \left(a^{-1}\right)^p \left(a^{-1}\right)^q = a^{-(p+q)}$$
$$= a^{-p-q} = a^{n+m} \text{ va}$$
$$\left(a^n\right)^m = \left(a^{-p}\right)^{-q} = \left(\left(a^p\right)^{-1}\right)^{-q} = \left(\left(\left(a^p\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^q = \left(a^p\right)^q = a^{pq} = a^{mn},$$

$n > 0, -q = m < 0$ ва $n > -m = q$ деб фараз қиламиз. У ҳолда
$$a^n a^m = \underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{\left(a^{-1}\right)\ldots\left(a^{-1}\right)}_{q} = \underbrace{a\ldots a}_{n-q} = a^{n+m}.$$

Агар $n > 0, -q = m < 0$ ва $n < -m = q$ бўлса, у ҳолда
$$a^n a^m = \underbrace{a\ldots a}_{n}\underbrace{\left(a^{-1}\right)\ldots\left(a^{-1}\right)}_{q} = \underbrace{a\ldots a}_{q-n} = \left(a^{-1}\right)^{-(n+m)} = a^{n+m}.$$

2-тенглама усҳун, агар $n > 0$ ва $-q = m < 0$ бўлса, у ҳолда
$$\left(a^n\right)^m = \left(\left(a^n\right)^{-1}\right)^q = \left(\left(a^{-1}\right)^n\right)^q = \left(a^{-1}\right)^{nq} = \left(a^{-1}\right)^{-nm} = a^{nm}.$$

Агар $-p = n < 0, m > 0$ бўлса, у ҳолда
$$\left(a^n\right)^m = \left(\left(a^{-1}\right)^p\right)^m = \left(a^{-1}\right)^{pm} = \left(a^{-1}\right)^{-nm} = a^{-(-nm)} = a^{nm}.$$

натижага эрисҳилади.

Кейинги таъриф алгебранинг муҳим тузилисҳларидан биридир. Ҳозир усҳун, биз фақатгина бир таъриф бера оламиз ва кейинроқ, кейинги бобларда бу усҳун кўплаб хоссалар бериб ўтамиз.

3.1.17. Таъриф. G яримгруппа (ўзига хос элемент e билан), агар G нинг ҳар бир элементи тескариланувсҳан бўлса группа деб аталади. У ҳолда, группа, G билан бинар алгебраик амаллар $(x, y) \to xy$, бу ерда $x, y \in G$ қуйидаги талабларни қўяди.

(Г 1) Амал ассациативдир, $x(yz) = (xy)z$ барсҳа, $x, y, z \in G$ лар усҳун.

(Г 2) G ўзига хос элементга эга, e элемент $x \in G$ усҳун $xe = ex = x$ бўлади. 1 ёки 1_G эса e нинг ўрнида исҳлатилади.

(Г 3) Барсҳа $x \in G$ элемент тескариланувсҳан элементларга эга

$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$

Ҳақиқатан ҳам биз айтаётган бу бинар амалани айтисҳнинг танланма йўлидир. Агар бу группа абели коммунтатив бўлса, у ҳолда бу группа Абел группаси деб атлаади (бу буюк Норвегия математики Нилс Генрих Абел (1802-1829) сҳарафига).

Агар группа Абел бўлса амалиётда одатий рависҳда фойдаланамиз. Сҳу сабабли Абел группалари қуйидаги пастулотларга эга

(АГ 1) Амал коммунтатив, сҳу сабабли $x + y = y + x$ барсҳа $x, y \in G$ лар усҳун;

(АГ 2) Амал ассациатив $x + (y + z) = (x + y) + z$ барсҳа $x, y, z \in G$ лар усҳун;

(АГ 3) G нол элементга эга, 0_G элемент усҳун $x + 0_G = x$ барсҳа $x \in G$ лар усҳун;

(АГ 4) Ҳар бир $x \in G$ элемент қарама-қарсҳи элементга эга $-x$ элемент усҳун $x + (-x) = 0_G$ бўлади.

Берилган G Абел группаси бўлади аддитив амал билан. У ҳолда, биз айририсҳ амалини қуйидагисҳа киритамиз $x - y = x + (-y)$.

3.1.18. Таъриф. G группа берилган. Gнинг барқарор тўплами H, G нинг тўғри амал остиси бўлса. Аксслантирисҳлар хили группалар ўртасида жуда муҳимдир. Дарҳақиқиат, биз кейинги вазиятларни танисҳтирисҳда тез-тез терминалогия (терминлар)дан фойдаланамиз.

3.1.19. Таъриф. Беирлган M, S тўпламлар e va $\Diamond$ амаллар билан бинар амалдир(мос рависҳда). $f : M \to S$ акслантирисҳ берилган. у ҳолда, f гамоморфизм деб аталади. Агар барсҳа $x, y \in M$ лар усҳун қуйидаги ифода ўринли бўлса:

$$f(x \text{ e } y) = f(x) \Diamond f(y)$$

Биз f акслантирисҳни амаллари ҳақида маълумот берамиз. Бизга инжестиве акслантирисҳ гармоморфизм мономорфизм деб атаймиз.

Суржестиве гамоморфизм эса эпиморфизм ва бижестиве (устига акслантирисҳи) исоморфизм деб атаймиз.

Агар $f: M \to S$ исоморфизм бўлса, у ҳолда 1.3.5.теорема f акслантирисҳ $f^{-1}: S \to M$ бижестиве билган тескари элементга эгалигини кўрсатади. Агар, u, υ S тўпламнинг асосий элемнтлари бўлса, у ҳолда $u = f(x)$ ва $\upsilon = f(y)$ белгиланисҳлар барсҳа $x, y \in M$ усҳун ўринли бўлса, у ҳолда f субжестивдир. Қўсҳимсҳа холда биз қуйидаги ифодаларга эга бўламиз.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(u \Diamond \upsilon) &= f^{-1}\left(f(x) \Diamond f(y)\right) = f^{-1}\left(f(x \text{ e } y)\right) \\
&= x \text{ e } y = f^{-1}(u) \text{ e } f^{-1}(\upsilon).
\end{aligned}
$$

Бу $f^{-1}: S \to M$ ни исморфизм эканлигини кўрсатади.

3.1.20. Таъриф. M, S бинар амаллар берилган. У ҳолда M, S лар агар мавжуд бўлга исоморфизм M дан S га бўлса булар исморфизм дейилади ва у ҳолда $M \cong S$ каби ёзилади.

M, S тузилисҳлар исоморфизмдир. Бу тузилисҳлар ўртасида фарқ йўқ, у ҳолда бу икки элементларга M ва S ларни(тузилисҳлари) эгизаклар деб атаймиз.

Агар M тўплам билан бинар амал бўлса, у ҳолда M ни 2 та кўринисҳда ўрганамиз. Биринсҳи кўринисҳ маълум харакатга эга бўлган элементларга алоқадор бўлади ва иккисини амаллар хоссаларига алоқадор бўлади. Бу турли хил қарасҳларга кўра ўрганисҳга имконият беради. Биз элементлар ва M нинг субтўпламлари ўртасида алоқадорликни яқинликини ўрганамиз ва сҳунингдек берилган амалларни индивидуал(сҳахсий) хоссаларини ўрганамиз. Сҳу каби муаммола есҳими аниқ тўпламларни ўрганисҳ усҳун бажарилисҳи мумкин бўлган исҳдир. Сҳунингдек, комбинациялар, режа, текислик функсиялар ва фазолар, симметриялар, матрицалар ва босҳқалар. Бироқ биз хоссалар ўрганисҳи босҳқарамиз яъни хоссалар маълум характерга эга бўлган элементларга боғлиқ эмас ва булар амаллар орқали тўлдирилади. Бу есҳим, алгебрада калит есҳимдир ва бу жуда самарали хисобланади. Фундаментал исоморфизм тусҳунсҳасига миннатдорсҳилик билдирлади. Готфрид Лейбниз(1646-1716) изоморфик тусҳунсҳаларни танисҳтирган ва у таниқли изоморфик амалларни кўрсатган. У типик исоморифзмга эътибор қаратган, яъни $x \mapsto \log x$ акслантирисҳ барсҳа мусбат ҳақиқий сонлар тўплами билан кўпайтирисҳ амалига барсҳа ҳақиқий сонлар тўплами билан кўпайтирисҳ амалининг барсҳа ҳақиқий сонлар тўпламининг қўсҳисҳ амалларига эътибор қаратган. Буюк француз математики Эваристе Галоис(1811-1832) хам исоморфизмнинг яқин бўлга ғояларни илгари сурган M ва S тўпламларнинг тусҳунарли бўлган исоморфик элемнтларни тусҳунтирисҳга баъзи хоссаларни киритган. Бу тусҳунсҳа ХИХ аср ўрталарида ривожланган. Биз абстраст(мавҳум) алгебрада, фақатгина ўзгармаси изоморифм хоссаларини ўрганамиз.[6]

Назорат саволлари:

1. Топологик сиртлар.
2. Кўпхилликлар.

2. Икки ўлчамли сиртларни елимлаш.

3. Сиртларнинг триангулясияси.

4. Сиртларнинг ёйилмаси.

5. Кўпбурчак ва сиртларнинг Эйлер характеристикаси.

6. Жордан теоремаси.

Фойдаланилган адабиётлар:

1.Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

2. Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 432-457.

[6] Algebra and number theory pp. 105-130

7-Мавзу: Чизиқ таърифи ва мисоллар.

Режа:

1. R^n фазо ва унинг тўпламостилари ўлчами.

2. Чизиқ таърифи ва мисоллар.

<u>Таянч иборалар:</u> R^n фазо, тўпламости, ўлчам, чизиқ, метрик фазо, компакт метрик фазо

7.1. R^n фазо ва унинг тўпламостилари ўлчами.

(X,τ) топологик фазо ва $U=\{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ тўпламлар системаси берилган бўлсин. Агар $X=\bigcup_\alpha \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ўринли бўлса, U система X нинг қопламаси дейилади. Агар қопламанинг элементлари очиқ тўпламлар бўлса, у қоплама очиқ қоплама дейилади.

Агар топологик фазонинг ихтиёрий очиқ қопламасидан (қоплама элементлари очиқ тўпламлар), чекли қопламаости ажратиб олиш мумкин бўлса, бу топологик фазо компакт дейилади.

Агар X топологик фазонинг ҳар бир $x \in X$ нуқтаси ёпиғининг компакт бўладиган атрофи мавжуд бўлса, бундай фазоларга локал компакт фазо дейилади.

Локал компакт фазоларга R^n фазони кўрсатишимиз мумкин.

Ўлчамлар назарияси нафақат геометрик фигураларнинг, балки R^n Эвклид фазосининг ихтиёрий мукаммал тўпламостиларининг ўлчовлар сони ҳақида гап юритишга имкон беради. Гоҳида Эвклид фазоси R^n нинг тўпламостилари шунчалик мураккаб бўладики, уларни ўрганиб чиқишда геометрик тасаввуримиз кўп ҳолларда ожизлик қилиб қолади. Ўлчамлар назариясида эса, тескари топологиядан геометрияга ўтиш жараёни мавжуд бўлиб қолди. Ихтиёрий топологик фазоларнинг ўлчамини геометрик тушунчалар полиедр ва n ўлчовли кублар ўлчовлари сони ёрдамида характерлаш мумкин. Бундай уриниш биринчи марта ўтган асрнинг 20-йиллари ўрталари ва охирларида рус математиги П.С. Александров томонидан ε силжиш, ε акслантиришлар ва жиддий акслантириш ҳақидаги теоремалар ёрдамида амалга оширилди.

Александровнинг ε акслантириш ҳақидаги теоремаси топологик фазоларнинг энг муҳим синфи Эвклид фазоси R^n даги барча тўпламостиларнинг характеристикасини келтириб чиқарди. Маълум бўлдики, бу тўпламостилар барча чекли-ўлчовли ёки саноқли базага эга бўлган метрик фазолардан бошқа нарса эмас экан.

Жиддий акслантиришлар ҳақидаги теоремаси эса, Александровнинг гомологик ўлчамлар назариясини қуришни бошлаб берди ва ўлчамнинг алгебраик характеристикасини вужудга келтирди. Метрик фазолар синфидан четга чиқсак, келтирилган учала ўлчам таърифи ўзаро эквивалент эмас. Метрик фазолар синфидан ташқарида асосан $\dim$ ўлчами назарияси инвариантдир. Яъни, ўлчамнинг топологик фазодаги қоплама маъносидаги таърифи жуда қўл келади. Шуни таъкидлашимиз керакки, метрик фазолар синфидан ташқарида ўлчамлар назарияси етарлича мазмунга эга ва геометрикроқдир.

3.5.1-мисол. Ҳақиқий сонлар ўқи R ёки айлана S^1 ни олайлик. Уларнинг ихтиёрий x нуқтаси ва бу нуқтанинг ихтиёрий V атрофи учун уларнинг шундай U атрофи топиладики, $U \subset V$ ва чегара F_rU фақат иккита нуқтадан иборат бўлади. Яъни, таърифга кўра, $indF_rU = \varnothing$ чегара. У ҳолда $indR \leq 1$ ва $indS^1 \leq 1$ га эга бўламиз. $indM \leq indX$ ва дискрет фазолар нол ўлчамли эканлигидан $IndR > 0$ тенгсизликни ёза оламиз. Шу сабабли қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$$IndR = IndI = 1 \quad indS^1 = 1$$

Эвклид фазоси R^n ёки S^n сферанинг ихтиёрий x нуқтаси ва унинг ихтиёрий V атрофи учун шундай U атроф топиладики, $U \subset V$ ва F_rU гомеоморф S^{n-1} бўлади. Индуксия орқали кўпайтмасини осон исботлаш мумкин: $indR^n \leq n$, $indS^n \leq n$ ва $indI^n \leq n$ тенгсизликлар ўринли.

3.5.2-теорема. C_1 ва C_2 ёпиқ тўпламлар X фазонинг ўзаро кесишмайдиган тўпламлари ва $A \subset X$ фазоостиси бўлиб, $\dim A \leq n$ бўлсин.

У ҳолда C_1 ва C_2 ларни ажратувчи шундай B тўплам топиладики, у учун $\dim A \cap B \le n-1$ ўринли бўлади.

Исбот. Теоремани индуксия методи билан исботлаймиз. Агар $n=0$ бўлса, $\dim A = -1$ ёхуд $\dim A = 0$ бўлиб, теорема ўринли.

Энди $n > 0$ бўлсин. Маълумки, тўпламга чекли сондаги элементларни қўшсак, ўлчам ўзгармайди. Шу сабабли A тўпламни $A = D \cup E$ кўринишда ифодалашимиз мумкин, бу ерда $\dim D \le n-1, \dim E \le 0$. Теорема шартига кўра, $n=0$ бўлганда, C_1 ва C_2 ларни айирувчи шундай B тўплам топиладики, $B \cap E = ø$ ўринли бўлади. Бундан $A \cap B \subset D$, $\dim D \le n-1$ бўлганлиги сабабли $\dim A \cap B \le n-1$.

3.5.3-теорема. X топологик фазо ва $\dim X \le n-1$ бўлсин. n тадан C_i ва $C^1{}_i$ ёпиқ тўпламлар берилган бўлиб, улар $C_i \cap C^|{}_i = \varnothing$, $i = 0,1,...,n-1$ шартни қаноатлантирсин. У ҳолда шундай n та ёпиқ B_i тўпламлар топиладики, ҳар бир B_i тўплам C_i ва $C^|{}_i$ ни ажратади ва $B_0 \cap B_2 \cap ... \cap B_{n-1} = \varnothing$ ўринли бўлади.

Исбот. Топологик фазо учун $\dim X \le n-1$ ўринли бўлсин. Олдинги теоремага кўра, шундай B_i ёпиқ тўплам топиладики, B_1 тўплам C_1 ва $C^|{}_1$ ни айиради ва $\dim B_1 \le n-2$ бўлади. Яна шу теоремани қўлласак, шундай B_2 тўплам C_2 ва C_2^1 тўпламларни айиради ва $\dim B_1 \cap B_2 \le n-3$ бўлади. Олдинги теоремани қўллаш натижасида n та B_i ёпиқ тўпламлар топиладики, улар C_k ва C_k^1 ни айиради ва $\dim(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k) \le n-k-1, k = 1,2,...,n$ ўринли бўлади. Агар $n=k$ бўлса, $\dim(B_1 ... \cap B_{n-1}) = -1$, бу эса, фақат $\varnothing$ тўплам учун ўринлидир. Яъни, $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n = \varnothing$.

3.5.4-мисол. I^n куб берилган бўлсин, $I^n \subset R^n -$ Эвклид фазоси. Маълумки, ихтиёрий $x \in I^n$ учун $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $|x_i| \le 1$ шарт ўринлидир. $C_i = \{x \in I^n : x_i = 1\}$; $C_i^1 = \{x \in I^n : x_i = -1\}$. Агар B_i ёпиқ тўплам Ci ва C_2^1 ларни айирса, у ҳолда $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \ne ø$.

Исбот. Агар B_i ёпиқ тўплам Ci ва C_2^1 ларни айирса, у ҳолда таърифга кўра, $X \setminus B_i = U_i \cap U_i^1, C_i \subset U_i, C_i^1 \subset U_i^1 \ U_i \cap U_i^1 = \varnothing$ ўринли.

U_i ва $U_i^|$ лар $I^n \setminus B_i$ тўпламда очиқ бўлгани учун улар I^n да ҳам очиқ тўпламдир. Ҳар бир $x \in I$ нуқта учун $\vec{V}(x)$ вектор оламиз. $V(x)$ нинг $i-$ координатаси $\pm\rho(x,\ B_i)$ дан иборат бўлиб, агар $x \in U_i$ бўлса, $+\rho(x, B_i)$ олинади; агар $x \in U_i^1$ бўлса, $-\rho(x, B_i)$ олинади.

Ҳар бир $x \in I^n$ нуқта учун бундай мосликда $f(x)$ деб, x нуқтадан бошлаб $\vec{V}(x)$ қўйсак, шу $\vec{V}(x)$ нинг учини $f(x)$ нуқта деб оламиз. $\bar{T}^n$ ва I^n фазолар гомеоморф бўлганлиги туфайли Брауер теоремасини қўллаш мумкин. Брауер теоремасига кўра, бу узлуксиз акслантиришда шундай ишоралар қонуниятига кўра, ҳар қандай ҳолда ҳам $f(x) \in I^n$ ўринлидир. Натижада, $f : I^n \to I^n$ акслантиришга эга бўламиз. Бу акслантириш узлуксиздир.

$x^0 \in I^n$ нуқта топиладики, $f(x^0) = 0$ ўринли бўлади.

Ихтиёрий i индекс учун $\rho(x^0, B_i) = 0$, бундан $x^0 \in B_i$ дейишимиз мумкин. У ҳолда $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \neq \varnothing$.

Энди қуйидагини исбот қиламиз.

3.5.5-теорема. Ихтиёрий n учун $\dim I^n \geq n$ ўринли.

Исбот. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $\dim I^n \leq n-1$ бўлсин. 3.5.3-теоремага кўра, I^n кубнинг турли қарама-қарши ёқларини айирувчи n та ёпиқ B_i тўпламостилар мавжуд бўлиб, улар $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \overline{T}$ ø шартни қаноатлантиради. Бу эса, 3.5.4-мисолда келтирилган қоидага зиддир. Демак, $\dim I^n \geq n$.

3.5.5-теорема ва 3.5.1-мисолдан қуйидаги ўринли.

3.5.6-теорема. Ихтиёрий n бутун сон учун $indR^n = indS^n = IndI^n = n$ тенглик ўринлидир.

Саноқли базага эга метрик фазоларда учала ўлчам эквивалент бўлганлиги туфайли қуйидаги ўринли.

3.5.7-теорема. Ихтиёрий n бутун сон учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$indR^n = indS^n = IndI^n = n$$

$$\dim R^n = \dim S^n = \dim I^n = n$$

$$IndR^n = IndS^n = IndI^n = n$$

Маълумки, $\overline{T}^n$ симплекс ёпиқ B^n шарга гомеоморф. Шу туфайли $\overline{T}^n$ нинг чегараси S^{n-1} га гомеоморфдир. $n=2$ бўлганда ёпиқ учбурчак $[a_0a_1a_2]$, текисликдаги ёпиқ доирага гомеоморфдир. Учбурчакнинг чегараси (контури) $[a_0a_1]\cup[a_1a_2]\cup[a_2a_0]$ S^1 айланага гомеоморфдир. Шу сабабли $n=2$ бўлган ҳолда 3.3-§ да қуйидаги теореманинг исботи келтирилган.

3.5.8-теорема. R^n фазода ёпиқ B^n шар ва S^{n-1} унинг $(n-1)$ ўлчамли чегараси берилган бўлсин. S^{n-1} сферанинг нуқталарнинг қўзғалмас қолдирадиган ҳеч қандай узлуксиз $F: B^n \to S^{n-1}$ акслантириш мавжуд эмас. Бошқача айтганда, S^{n-1} сфера B^n шарга ретракт бўла олмайди.

Қуйидаги теорема тўпламостининг ички ва чегаравий нуқталарининг R^n фазода инвариантлиги ҳақида Брауер теоремасидир.

3.5.9-теорема. X тўплам R^n нинг ихтиёрий тўпламостиси бўлсин ва $f: X \to Y$ гомеоморфизм бўлсин ва $f(X) = Y \subset R^n$. Агар $x \in X$ нуқта X нинг ички нуқтаси бўлса, $f(x) \in Y$ нуқта ҳам $f(X)$ нинг ички нуқтаси бўлади. Агар $x \in X$ нуқта X нинг чегара нуқтаси бўлса, у ҳолда $f(x)$ нуқта ҳам Y нинг чегара нуқтаси бўлади. Хусусий ҳолда агар A ва B тўпламлар R^n нинг гомеоморф тўпламлари бўлиб, A очиқ тўплам бўлса, у ҳолда B ҳам очиқ тўплам бўлади.

Исбот. Бу теореманинг ички нуқта чегаравий нуқта учун исботини келтирамиз. Ҳақиқатан ҳам, x нуқта X нинг ички нуқтаси бўлсин.

$S_r(x)$ бу нуқтанинг шундай сферик атрофи бўлсинки, $\overline{S_r(x)} \subset X$. Кўрамизки, x нуқтанинг X даги $S_r(x)$да ётадиган атрофи қандай бўлишидан қатъи назар, $X \setminus U$ ни S^{n-1} га акслантирувчи узлуксиз акслантириш мавжуд бўладики, бу акслантиришни бутун X га давомлаштириш мумкин бўлмайди. S^{n-1} сифатида $\overline{S_r(x)}$ нинг чегарасини, $f: X \setminus U \to S^{n-1}$ акслантириш сифатида эса, x нуқтадан $X \setminus U$ тўпламнинг S^{n-1} га проексиясини оламиз. Бу проексияда S^{n-1} нинг нуқталари қўзғалмас қолади. Бу $f: X \setminus U \to S^{n-1}$ акслантиришни бутун X фазога давомлаштириш мумкин эмас. Агар мумкин бўлса, яъни $f: X \to S^{n-1}$ ўринли бўлса, S^{n-1} нинг нуқталари қўзғалмас қолиб, $\overline{S_r(x)}$ ҳам S^{n-1} га узлуксиз акслантириш бўлади. Яъни, S^{n-1} сфера $\overline{S_r(x)}$ шарнинг ретракти бўлиб қолмоқда. 3.5.8-теоремага кўра эса бу мумкин эмас. Демак, R^n ички нуқталар инвариант экан.

7.2.Чизиқ таърифи.

Биз биринчи бобда баъзи чизиқлар билан танишдик. Эвклиднинг “Негизлар” асарида ҳам “чизиқ ─ энсиз узунликдир” деб изоҳланган. Юқорида киритилган ўлчамлар чизиқни таърифлашга имкон беради.

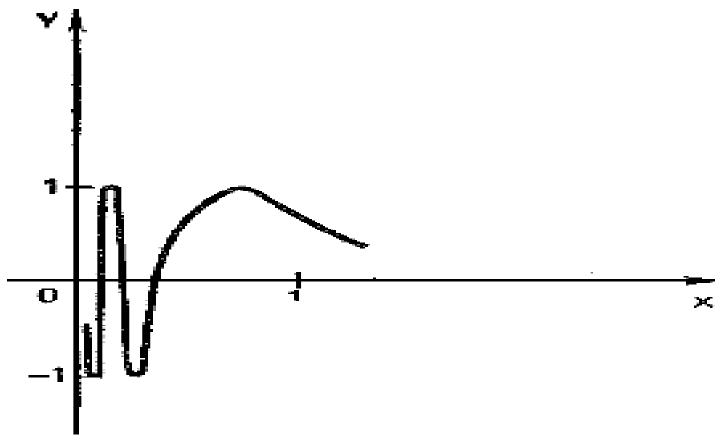
Олимлар деярли 2500 йил мобайнида геометриянинг асосий тушунчаларидан бири чизиққа турли таърифлар бериб келишган. Энди охирги аниқ уринишни келтирамиз.

3.5.10-таъриф. Бир ўлчамга эга боғланган ва компакт метрик фазолар чизиқ дейилади.

Компакт бўлмаган ҳолларда эса чизиқни қуйидагича таърифлаш мумкин.

3.5.11-таъриф. Бир ўлчамли локал компакт чекли дизюнкт ёпиқ боғламли тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлган метрик фазоларга чизиқ дейилади.

Текисликда ётган чизиқларга силлиқ чизиқ дейилади. Текисликда ички нуқтага эга бўлмаган боғламли ёпиқ компакт тўпламлар силлиқ чизиқ деб аталади. Бу ─ чизиққа Кантор томонидан берилган характеристика ёки таърифдир. Чизиққа кесма, айлана, гипербола ва қуйидаги текислик тўпламостиси мисол бўла олади.



3.5.1-расм

Бу чизиқни $\left\{(x,y)\in R^2: y=\sin \frac{1}{x}; x\in(o,T]\right\}\cup\left\{(x;y)\in R^2:\ x=0,-1\le y\le 1\right\}$ тўплам сифатида олишимиз мумкин. (3.5.1-расм)

Маълум бўлишича, ихтиёрий чизиқни I^3 кубда ётган Менгер универсал чизиғининг бирорта қисмига топологик эквивалент деб олишимиз мумкин.

Назорат саволлари.

1. R^n фазо ва унинг тўпламостилари ўлчами.
2. Чизиқ таърифи ва мисоллар.

Фойдаланилган адабиётлар.

2) Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

3) Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

4) Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

5) Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

6) .Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 165-218.

8-Мавзу: Функторлар ҳақида тушунча. Эҳтимоллик функтори.

Режа:

1. Категория тушунчаси.
2. Функторлар.
3. Нормал функторлар.
4. Эҳтимол ўлчовли функторлар ва уларнинг қисм функторлари.

<u>Таянч иборалар:</u> Категория, функтор, нормал функтор, ковариант функтор, эҳтимол ўлчовли функторлар.

8.1. Категория.

8.1.1-таъриф. Агар элементлари обект деб аталувчи $Ob\zeta$ синф берилган бўлиб, у қуйидаги шартларни қаноатлантирса, ζ категория берилган категория дейилади:

1) агар ζ нинг ҳар бир (A,B) жуфт обектлари учун морфизмлар деб аталувчи тўплами $Mor\zeta(A,B)$ (А дан Б га) берилган бўлса; бу ерда $Mor\zeta(A,B)=\{u:A\to B\}$ морфизмдан иборат дейиш мумкин, кўп ҳолларда у $\in Mor\zeta(A,B),\ A\xrightarrow{u}B$ кўринишда ёзилади;

2) ζ нинг ихтиёрий учлик (A,B,C) обекти учун $\mu:Mor\zeta(A,B)\times Mor\zeta(B,C)\to Mor\zeta(A,C)$ акслантириш аниқланган бўлсин, бу ерда $\mu(y,\vartheta)$ (й,ϑ) жуфтликнинг акси (образи), $u\in Hom\zeta(A,B)$, $\vartheta\in$ Морζ (Б,С), бу μ(й,ϑ) образ ϑ_0й ёки $\vartheta*$й кўринишда белгиланиб, y,ϑ ларнинг композицияси деб аталади;

3) Қуйидагича тасдиқ. Морζ(А,Б) тўпламлар ва морфизмлар композицияси учун ўринли: (д) бу композиция ассоциативдир, яъни ихтиёрий морфизмлар учлиги $A\xrightarrow{u}B\xrightarrow{\vartheta}C\xrightarrow{\omega}D$ учун ω(ϑй)=($\omega\vartheta$)у ўринли;

4) ζ нинг ҳар бир А обекти учун айний морфизм деб аталувчи 1_A:А→А морфизм мавжуд бўлади, агар унинг ихтиёрий А$\xrightarrow{u}$Б; А$\xrightarrow{\vartheta}$С морфизмлари учун $1_A u=u$ ва $\vartheta 1_A=\vartheta$ лар ўринли бўлса;

5) (γ) агар ζ нинг (А,Б), (A^1,$Б^1$) жуфтликлари ҳар хил бўлади, агар

Морζ (А,Б) ва Морζ ($А^1$,$Б^1$) тўпламларнинг кесишмаси бўш тўплам бўлса.

8.2. Функторлар.

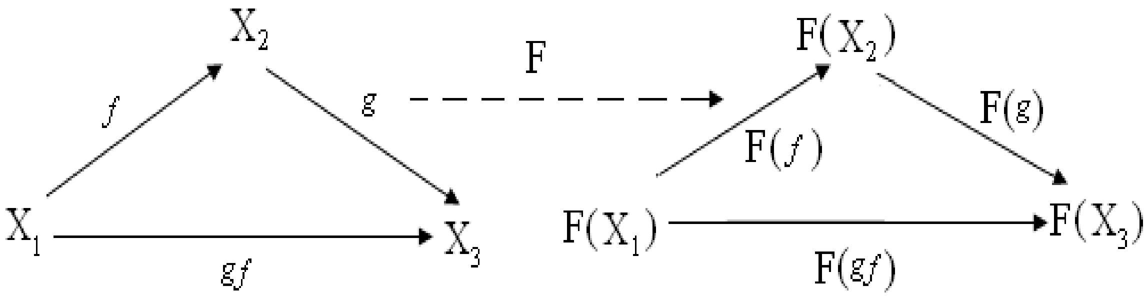
Энди бирорта категорияда аниқланган бирлик элементни ва морфизмлар композициясини сақловчи маълум шартларни қаноатлантирувчи акслантиришларни кўриб чиқайлик.

8.2.1-таъриф. А ва Б категориялар берилган бўлсин. А категориянинг ҳар бир Х обектига Б категориянинг F(Х) обектини ва А категориянинг ҳар бир f:$X_1 \to X_2$ морфизмига Б категориянинг $F(f)$:$FX_1) \to F(X_2)$ морфизмини мос келтирувчи Ф:А→Б акслантириш берилган бўлиб, агар у

1. $F(1_x)=1_Ф(x)$
2. $F(гf)=F(г)F(f)$

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда у ковариант функтор дейилади.

Бу таърифнинг 1) ва 2) шартларини функторнинг кўргазмали кўринишида қуйидагича ифодалаш мумкин. А категорияда ихтиёрий коммутатив диаграмма Б категориянинг коммутатив диаграммасига аксланади:



Агар Ф:А→Б ковариант функтор бўлса, А категория F функторнинг аниқланиш соҳаси, Б эса, унинг ўзгариш ёки қийматлари соҳаси дейилади.

8.2.2-мисол. Г гуруҳлар категориясини олайлик. Ҳар бир Г гуруҳга унинг [Г,Г] коммутанти бўйича олинган Г|[Г,Г] фактор гуруҳини мос қўяйлик. Г([Г,Г] фактор гуруҳ, бизга маълумки, абел гуруҳини ташкил қилади. Ҳар бир f:Г→Ҳ гомеоморфизмга, f гомеоморфизм орқали вужудга келган, $f([g]) = f([g])/[f(g)]$ формула билан аниқланган $\hat{f}$:Г/[Г,Г]→Ҳ/[Ҳ,Ҳ] гомеоморфизмни мос қўяйлик. Натижада, гуруҳлар категорияси Г ни абел гуруҳлар категорияси АГ га акслантирувчи Ф:Г→АГ ковариант функторга эга бўлдик. Кўп ҳолларда бу функтор коммутирланган функтор деб юритилади.

8.2.3-таъриф. Юқорида келтирилган ковариант функтор таърифида Ф функтор учун

$Ф(1_x)=1Ф(x)=1_{Ф(X)}$

$Ф(гf)=Ф(f)*Ф(г)$

шартлар ўринли бўлса, Ф функтор контравариант функтор дейилади.

Бошқача айтганда, контравариант функтор А категориядаги коммутатив диаграммани Б категориядаги коммутатив диаграммага ўтказар экан, бунда у фақат стрелкалар йўналишини алмаштиради:

$$\begin{tikzcd}
 & X_2 \arrow[dr, "g"] & & & F(X_2) \arrow[dl, "F(f)"'] & \\
X_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] & & X_3 \arrow[r, dashed, "F"] & F(X_1) & & F(X_3) \arrow[ul, "F(g)"'] \arrow[ll, "F(gf)"]
\end{tikzcd}$$

8.2.4.-мисол Айтайлик, С(Х)={φ:Х→Р – узлуксиз функсия} барча Х фазодаги узлуксиз функсиялар тўплами бўлсин. Маълумки, бу тўпламнинг ихтиёрий $\phi\in C(X)$ ва $\varphi\in C(X)$ елементлари учун

$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, $(\varphi\psi)(x)=\varphi(x)*\psi(x)$

формулалар ёрдамида бинар амал аниқланган. Бу тўпламда юқоридаги бинар амалига нисбатан бирлик элемент ҳам мавжуд. Шу сабабли С(Х) фазо коммутатив ҳалқа ташкил қилади. Агар f:Х→Й узлуксиз акслантириш бўлса, у ҳолда ҳар бир узлуксиз φ**:**Й→Р акслантиришга $\psi\circ f: X\to R$ композицияни мос қўйсак, натижада Ф(ф):С(Й)→С(Х) акслантиришга эга бўламиз. Бу акслантириш ҳалқалар орасидаги гомеоморфизмдан иборат бўлади. Натижада, ҳар бир Х$\in$Об топ обектга (топологик фазога) Х фазода узлуксиз функсиялар ҳалқаси С(Х) ни, ҳар бир f:Х→Й морфизмга ($f\in Мор_{тор}$ (Х,Й)) ҳалқавий гомеоморфизм Ф(ϕ):С(Й)→С(Х) ни мос келтирдик. Буни текшириш муаммо туғдирмайди, топологик фазолар категориясида бирлик элементли, коммутатив ҳалқалар категориясига акслантирувчи контравариант Ф функтор мавжуд.

Топологик масалаларни ҳал қилишда гуруҳлар назариясига функторларнинг қўлланилиши хусусида тўхталайлик. Олдинги бобларда акслантиришларни давомлаштириш (кенгайтириш) масаласи баён қилинган эди. Энди шу масалани қуйидагича ёритамиз. Х топологик фазо бўлсин ва А$\subset$ Х. и:А$\to$Х табиий акслантириш (ёки жойлаштириш) бўлсин, яъни ҳар бир а$\in$А учун и(а)=а ўринлидир. φ:А$\to$Й узлуксиз акслантириш бўлсин.

$\bar{\varphi}$:Х$\to$Й акслантириш φ нинг давомлаштириши бўлиши учун қуйидаги диаграмма коммутатив бўлиши зарур ва етарлидир.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Ф функтор (масалан, ковариант функтор) ёрдамида ҳосила □ алгебраик масалага эга бўламиз. Қуйидаги диаграммада коммутатив бўладиган Ф($\bar{\varphi}$) гомеоморфизм мавжудми?

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(i)"] \arrow[dr, "F(\varphi)"'] & & F(X) \arrow[dl, "F(\bar{\varphi})"] \\ & F(Y) & \end{tikzcd}$$

Бундан кўринадики, юқоридаги масала ечилса, кейинги алгебраик масала ҳам ечилади. Демак, Ф($\bar{\varphi}$) гомеоморфизмнинг мавжуд бўлиши φ акслантиришнинг давомлаштириши $\bar{\varphi}$ мавжудлигининг зарурий шартидир.

8.2.5-теорема. Ф:$К_1\to К_2$ ихтиёрий ковариант ёки контравариант функтор берилган бўлсин. У ҳолда Ф функтор натижасида $К_1$

категориядаги f эквивалентликнинг $К_2$ категориядаги образи $Ф(f)$ эквивалентлик бўлади.

Исбот. $Ф:К_1 \to К_2$ ковариант функтор бўлсин ва $f:Х \cong Й$ $К_1$ категориядаги эквивалентлик бўлсин. Эквивалентлик таърифига кўра, шундай г:Й→Х морфизм топиладики, унинг учун $f \circ g = 1X$, $f \circ g = 1Y$ ўринли бўлади. Функторнинг иккита аксиомасига кўра, $Ф(г)_о Ф(f)=Ф(г_о f)=Ф(1_х)=1_{Ф(х)}$ ва $Ф(f_о)Ф(г)=Ф(ф_о г)=Ф(1_Й)=1_{Ф(Й)}$ бўлади.

Демак, $Ф(f)$ морфизм, ҳақиқатан ҳам эквивалентлик экан. Контравариант функтор исботи ҳам шунга ўхшайди.

8.2.6-натижа. Ихтиёрий функтор эквивалент обектларни эквивалент обектларга ўтказади.

8.2.7-мисол. Олдинги бобда келтирилган фазонинг *н* ўлчовли фундаментал гуруҳи $\pi_н(Х)$ ва *X* фазонинг *н* ўлчовли гомологияси $Ҳ_н(X)$ ни олсак, бу $\pi_н$ ва $Ҳ_н$ лар ҳам ковариант функторлар бўлади.

$Р^2$ ва $Р^1$ фазоларни топологик фарқлаш масаласида олдинги бобда келтирилган $Ҳ_0$ функторнинг қўлланилишига тўхталайлик.

Тескаридан фараз қиламиз: $f:Р^1 \to Р^2$ гомеоморфизм мавжуд бўлсин. У ҳолда, Р\{0} ва $Р^2$\{0} лар ҳам гомеоморфдир.

Иккинчидан, Р\{0} ва $Р^2$\{0} ларнинг боғламли компоненталарининг сони иккига тенг, шу сабабли бунга мос $Ҳ_0(Р^1\{0\})$ эркин абел гуруҳи фақат битта боғламли компонентага эга. Юқоридаги 5.1.1-натижага кўра, $Н_0$ функтор гомеоморф фазоларни изоморф г гуруҳларга ўтказиши керак. Лекин, $Ҳ_0(Р^1\setminus\{0\})$ ва $Ҳ_0(Р^2\setminus\{0\})$ гуруҳлар изоморф бўла олмайди, чунки уларнинг ясовчилар сони ҳар хилдир. Бу зиддият $Р^1$ ва $Р^2$ фазоларнинг гомеоморф эмаслигини кўрсатади.

8.3. Нормал функторлар.

ξ=(σ,м) категория берилган бўлсин, бу ерда σ ─ барча обектлар ва м ─ барча морфизмлар жамланмаси бўлсин.

Агар обектлар жамланмаси σ ва ҳар бир [Х,Й] жамланма бирор тўпламдан иборат бўлса, ζ категория кичик категория дейилади. Бу ерда Х дан Й га бўлган барча морфизмлар оиласини [Х,Й] билан белгилаймиз. Агар ζ =(σ,м) категория бўлса, унинг обектлар жамланмаси σ да, табиийки, олд тартиб мавжуддир, яъни бирор муносабат рефлексив ва транзитивдир. Ҳақиқадан ҳам, $X \leq Й \Leftrightarrow [Й,X] \neq \varnothing$.

8.3.1-таъриф. Агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса, кичик $\Im$=(σ,м) категория тескари спектр дейилади:

1) σ тўпламдаги олд тартиб қисман тартибланган бўлса;

2) қисман тартибланган σ тўплам юқорига йўналган бўлса, яъни ихтиёрий икки $X,Y \in \sigma$ обектлар учун шундай $Z \in \sigma$ топилса ва унинг учун $X \leq Z$ ва $Y \leq Z$ ўринли бўлса;

3) [X;Y] тўплам битта элементдан ортиқ бўлмаса.

Тескари спектрнинг обектлари унинг элементлари, морфизмлари эса проексиялари деб юритилади. Қулайлик мақсадида спектрнинг элементларини X билан белгилаб, уни индексдаги α бўйича бирорта қисман тартибланган тўпламдан иборат дейишимиз мумкин. Шунда X дан X_α га проексияни π_β^α билан белгилаймиз. Демак, спектрни $S=\{X_\alpha;\pi_\beta^\alpha;A\}$ кўринишида белгиласак бўлар экан. Албатта, бу ерда $\alpha,\beta \in$ A ва $\beta \leq \alpha,\ \pi_\beta^\alpha : X_\alpha \to X_\beta$ деб тушунилади. Тескари спектрларни ҳам спектрлар деб атаймиз.

Агарда (албатта, C спектр қаралаётган категорияда) ихтиёрий, $\alpha,\beta \in$ A, $\beta \leq \alpha$, учун $\pi_\beta^\alpha \circ \pi_\alpha$=π ўринли ва ихтиёрий бошқа Й обект ва $\pi_\beta^\alpha o f_\alpha = f_\beta$ хоссаларига эга бўлган $f_\alpha : Y \to X_\alpha$ морфизмлар оиласи учун шундай ягона f:Й→X морфизм топилиб, ҳар бир $\alpha \in$ A учун $f_\alpha = \pi_\alpha o f$ ўринли бўлса, X обект ва морфизмлар оиласи π_α:X→ X_α, $\alpha \in$ A,C спектрнинг лимити дейилади. Спектрнинг лимити X=лимC кўринишда белгиланади. π_α морфизмларга ораловчи проексиялар дейилади.

Бирор категорияда аниқланган Ф ковариант функтор ва C={X_α:π_α } спектр берилган бўлсин. Айтайлик, Ф(C)={Ф(X_α):π_α^β }. Бу ҳолда Ф(C) ҳам спектрдан иборат бўлади. Уни ораловчи проексияларни π_α^F билан белгилаймиз.

8.3.2-таъриф. Агар ихтиёрий С спектр учун F(лимС)=limF(С) ўринли бўлса, F функтор узлуксиз дейилади. Бошқача айтганда, шундай f:F(лимС)→lim F(С) гомеоморфизм мавжудки, унинг учун

$$F(\pi_\alpha)= \pi_\alpha^F \mathrm{o} f \qquad (1)$$

ўринли бўлади. (1) тенгликдан маълумки, f гомеоморфизм мавжуд ва у ягонадир. Бу $F(f_\alpha)$ акслантиришларнинг лимитидан иборат. Яъни, агар $F(\pi_\lambda)$ ларнинг лимити гомеоморфизм бўлса, F функтор узлуксиздир. Бунинг акси бўлса, функтор Comп категориясида қаралаётган ҳисобланади.

8.3.3-таъриф. Агар Ф функтор бир нуқтали тўпламни яна бир нуқтали тўпламга ўтказса, функтор нуқтани сақлайди.

Айтайлик, $и_A$:A→X ёпиқ A тўпламни X га айнан жойлаштириш бўлсин. $Ф_x(A)$ орқали $Ф(и_A)$ акслантириш образини белгилайлик. Агар ихтиёрий X ва унинг ихтиёрий $\{A_\alpha\}$ тўпламостилар тизими учун $F_X(\bigcap\limits_\alpha A_\alpha)=\bigcap\limits_\alpha F_X(A_\alpha)$ ўринли бўлса, Ф фактор кесишмаларни сақлайди дейилади.

Агар, $Ф(f)^{-1}Ф_Й(A)=Ф_X(f^{-1}A)$ тенглик ихтиёрий f:X→Й акслантириш ва ихтиёрий A⊂Й тўплам учун ўринли бўлса, Ф функтор прообразларни (аслларни) сақлайди.

8.3.4-таъриф. Агар ихтиёрий ўзаро бир қийматли f акслантириш (сюректив) учун $Ф(f)$ акслантириш ҳам ўзаро бир қийматли (сюректив) бўлса, Ф функтор ономорф мос равишда эпиморф дейилади.

8.3.5-таъриф. Агар қуйидаги шартларни қаноатлантирса, Ф функтор нормал функтор дейилади:

1) Ф функтор нуқта ва бўш тўпламни сақласа;

2) Ф функтор кесишмаларини сақласа;

3) Ф мономорфизмни сақласа;

4) Ф эпиморфизмни сақласа;

5) Ф узлуксиз бўлса;

6) Ф прообразлар ва бикомпактларнинг салмоғини сақласа, яъни $\omega(X)\le\tau\Rightarrow\omega(F(X))\le\tau$ бўлса.

Охирги 30–40-йиллар мобайнида топологик фазоларнинг турли категорияларида юқоридаги хоссаларга эга бўлган нормал функторларнинг геометрик ва топологик хоссалари ўрганиб борилмоқда. Нормал функтор бирорта топологик фазода қаралса, бу фазонинг кўпгина геометрик хоссаларини у ёки бу маънода ўзгартириб юборади.

8.4. Эҳтимол ўлчовли функторлар ва уларнинг қисм функторлари.

Эҳтимол ўлчовли функтор бикомпакт фазолар категориясида қаралса, функтор натижасида ҳосил бўлган топологик фазоларнинг геометрик ва бошқа хоссаларини ўрганиш катта аҳамиятга эгадир. Бу функторни чекли тўпламларда қарасак, чекли ўлчамли симплексларга эга бўламиз. Унинг функторостиларини оладиган бўлсак, чекли ўлчамли фазоларни яна чекли ўлчамли фазога ўтказади ва бу функтор фазонинг кўпгина хоссаларини “яхшироқ” хоссаларга алмаштиради.

X бикомпакт бўлсин. Маълумки, ҳар бир $\mu\in$C(C(X)) узлуксиз чизиқли функсионалга (акслантириш) X нинг ўлчови дейилади. C(C(X)) фазо кўп ҳолларда (C(x))* кўринишида белгиланади. (C(X))* барча узлуксиз функсионаллар фазоси деб юритилади ва бу фазо C(X) фазога қўшма фазодир. C(X))* нормаланган фазо, бу фазода норма $\|f(x)\|$=суп$\{\|f(x)\|:x\in X\}$ кўринишда аниқланади, бошқача айтганда, (C(X))* фазо Банах фазосидир. Албатта, барча узлуксиз функсионалларни оладиган бўлсак, улар чегаралангандир.

Агар X фазодаги барча чекли регуляр ўлчовларни M(X) билан белгиласак, Рисс теоремасига кўра, (C(X))* фазо M(X) фазо билан изоморфдир. Шу сабабли M(X) даги баъзи белгилашларни қабул қиламиз. Бизга Рисс теоремаси шарт бўлмайди, ўлчовлар назариясидан бошқа тушунчаларни ишлатмаймиз. X фазода ўлчов деб фақат $\mu\in C^*$ (X) узлуксиз функсионални тушунамиз. Баъзида $\int\varphi d\mu$ белгилашни μ

функсионалнинг φ даги қиймати деб тушунилади.

Агар ихтиёрий $\varphi \geq 0$ учун ва $\mu \in$ M(X) ўлчов учун $\mu(\varphi) \geq 0$ ўринли бўлса, μ ўлчов мусбат дейилади ва $\mu \geq 0$ каби ёзилади. M(X) фазонинг барча мусбат ўлчовлари тўплами мусбат конус дейилади. Шуни айтиш керакки, $\mu \geq 0$ бўлиши учун $\mu(1_x) = \|\mu\|$ бажарилиши зарур ва етарлидир. Ҳақиқатан ҳам, $\mu \geq 0$ ва $|\varphi| \leq 1$ бўлсин. У ҳолда μ $(1_x - \varphi) \geq 0$. Бундан μ $(1_x) \geq$ μ (φ) ва μ $(1_x) = \|\mu\|$. Энди эса μ $(1_x) = \|\mu\|$ ва $\varphi \geq 0$ бўлсин.

Айтайлик, $\psi = 1_x - (\varphi / \|\varphi\|)$. Бунда $\|\varphi\| \leq 1$, $\mu(\psi) \leq \|\mu\| = \mu(1_x)$, яъни μ (1_x)- μ $(\varphi / \|\varphi\|) \leq \mu(1_x)$. Бундан $\mu(\varphi) \geq 0$ келиб чиқади.

Агар $\mu \in$ M(X) ўлчов учун $\|\mu\| = 1$ бўлса, μ ўлчов нормаланган дейилади. Мусбат нормаланган μ ўлчов эҳтимол ўлчови дейилади. Олдингилардан кўринадики, μ ўлчов эҳтимоллик ўлчови бўлиши учун $\int 1_x ; \lambda\mu = 1$ бўлиши зарур ва етарлидир. Энди M(X) тўпламда кучсиз деб аталувчи топологияни киритамиз. Яъни, M(X) тўплам сонлар ўқининг кўпайтмасидан иборат десак, M(X) ни П{Pφ $: \varphi \in$ (X)} тўпламнинг тўпламостиси деб олишимиз мумкин.

Демак, M(X) фазо тўла (мутлоқ) регуляр фазо бўлар экан.

$\mu \in$ M(x) элементнинг атрофлари базасини O($\mu, \varphi, \ldots \varphi_к, \varepsilon$) кўринишдаги тўпламлар ташкил қилади. Бу ерда $\phi \in C(X), \varepsilon > 0$ ва $O(\mu, \varphi, \ldots \varphi_к,$ $\varepsilon) = \{\mu \in M(x) : \mu^1 \quad (\varphi_i \ ) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, i_i = i_1\overline{k}\}$. M(X) фазонинг барча эҳтимоллик ўлчовларидан ташкил топган тўпламостисини П(X) билан белгилаймиз. Демак, П(X)$\subset$M(X).

8.4.1-теорема. Ихтиёрий X бикомпакт учун П(X) бикомпакт.

Исбот. Бизга маълумки, П(X)$\subset \prod$ {P$\varphi : \varphi \in C(X)$}. Энг аввало, П(X) нинг бу кўпайтмада ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатамиз. Агар $\mu \in [P(X)]$ бўлса, у ҳолда μ функсия чизиқли, агар $\varphi, \psi \in C(X), \varepsilon > 0$ бўлса, у ҳолда

шундай $\mu_1 \in P(X)$ ни оламиз; $\mu_1 \in O(\mu,\varphi,\psi,\varphi+\psi,\varepsilon/3)$ бўлсин. У ҳолда
$|\mu(\varphi+\psi)-\mu(\varphi)-\mu(\psi)|=|\mu(\varphi+\psi)-\mu_1(\varphi+\psi)+\mu_1(\phi)+\mu_1(\psi)-$
$-\mu(\varphi)-\mu(\psi)|\leq(\mu(\varphi+\psi)-\mu_1(\varphi+\psi)|+|\mu_1(\varphi)-\mu(\varphi)|+|\mu_1(\psi)-\mu(\psi)|<\varepsilon$. Яъни, $\mu(\varphi+\psi)=\mu(\varphi)+\mu(\psi)$. Шунга ўхшаб, $\mu(r\varphi)=r\mu(\varphi)$. $\|\mu\|=1$: агар $\|\varphi\|\leq 1$ ва $\varepsilon<0$ бўлса, у ҳолда шундай $\mu_1 \in P(X)$ топиладики, $|\mu_1(\varphi)-\mu(\varphi)|<\varepsilon$ бўлади. У ҳолда $|\mu(\varphi)|\leq|\mu_1(\varphi)|+\varepsilon$, яъни $|\mu(\varphi)\|\leq 1+\varepsilon$. Демак, $|\mu(\varphi)|\leq 1.$ Шунга ўхшаб, $\mu(1_x)=1$ўринли. Демак, μ ўлчов нормаланган ва мусбат экан, яъни $\mu \in P(X)$. Иккинчи томондан, П(Х) тўплам $[-\|\varphi\|,\|\varphi\|]$ кесмаларнинг кўпайтмаси $\prod\{[-\|\varphi\|,\|\varphi\|]:\varphi\in C(X)\}$ да ётмоқда. Демак, П(Х) бикомпакт экан.

Агар Ф да нол бўлган (Ф тўпламда қиймати нолга тенг) ихтиёрий $\varphi \in C(X)$ функсия учун $\int \varphi d\mu = 0$ ўринли бўлса, μ ўлчов Ф⊂X тўпламда жамланган дейилади.

μ ўлчовнинг жамланган тўпламларининг энг кичиги унинг элтувчиси дейилади ва сурр μ кўринишда ёзилади.

8.4.2-лемма. Ҳар бир $x \in X$ нуқта учун шу нуқтада жамланган ягона эҳтимол ўлчови δ_{x} мавжуд.

Исбот. Айтайлик, δ_{x} айтилган ўлчов бўлсин. У ҳолда $\delta_x(1_{\text{x}})$=1 ва $\delta_x(\varphi)=\delta_x(\varphi(x)1_x\backslash=\varphi(x)$. Иккинчидан, $\delta_x(\varphi)=\varphi(x)$ тенглик билан аниқланган δ_{x} ўлчов эҳтимоллик ўлчови ва у х нуқтада жамланган.

Фазонинг х нуқтасида жамланган δ_{x} ўлчов Дирак ўлчови дейилади.

8.4.3-лемма. X фазодаги *x* нуқтани δ_{x} Дирак ўлчовига ўтказувчи (мос қўювчи) $\delta: X \to P(X)$ акслантириш узлуксиз ва гомеоморфизмдир.

Исбот. Бу акслантиришнинг ўзаро бир қийматли эканлиги равшан. Шу сабабли унинг узлуксизлигини кўрсатайлик. δ_{x} нинг ихтиёрий $O\delta_x$ атрофида $O(\delta_x,\varphi_1,...,\varphi_k\varepsilon)$ базис атроф мавжуддир. Унинг Ox атрофи топиладики, унинг учун $|(\varphi_i(x)-\varphi_i(y))|<\varepsilon$ тенгсизлик барча $y \in Ox$ ва $i=\overline{1,k}$ ларда ўринлидир. У ҳолда $\delta(Ox)\subset O(\delta_x,\phi,....,\phi_k,\varepsilon)$.

8.4.4-лемма. Ихтиёрий чексиз бикомпакт X учун $\omega(X)=\omega P(X)$

ўринли.

Исбот. 5.3.3-леммага кўра, X фазо δ акслантириш натижасида $P(X)$ га жойлаштирилган. Шу сабабли $\omega(X)\le\omega P(X)$ ўринлидир. Иккинчидан, $M(X)$ фазодаги топологияни аниқлашда φ_i функцияларни $C(X)$ даги ҳамма жойдаги зич тўпламдан олса бўлади. Бу ерда ε ни ҳам рационал сон дейиш мумкин. Маълумки, агар X бикомпакт салмоғи τ бўлса, у ҳолда $C(X)$ фазода фазонинг ҳамма жойида зич ва қуввати τ бўлган тўплам ости мавжуд. Шу сабабли чексиз бикомпакт X учун $d(C(X))\le\omega X$ ўринли.

Айтайлик, $f:X\to Y$ узлуксиз акслантириш бўлсин. $P(f):P(X)\to P(Y)$ акслантиришни $(P(f)(\mu)(\phi))=\mu(\phi\circ f)$ (1) формула билан аниқлаймиз. $P(f)$ акслантириш узлуксиздир. Ҳақиқатан ҳам, $\mu\in P(x)$ ва $\nu=P(f)(\mu)$ бўлсин. ν нуқтанинг базис атрофи $V=O(\nu,\varphi_1,...,\varphi_k,\varepsilon)$ ни олайлик, $U=O(\mu,\varphi_1 of,\varphi_2 of,...,\varphi_k of,\varepsilon)$ дейлик ва $P(f)(U)\subset V$ ни кўрсатайлик. Агар $\mu^1\in U$ бўлса, у ҳолда $\left|\mu(\phi_i of)-\mu(\phi_i of)\right|<\varepsilon$ (1) тенгликка кўра бу тенгсизлик $|(P(f)(\mu^1))(\varphi_i)-\nu(\varphi_i)|<\varepsilon$ тенгсизликка тенг кучлидир. Бундан $P(f)(\mu)\in V$ га эга бўламиз. Бевосита текшириш мумкинки, $P(g\circ f)=P(g)\circ P(f)$ тенглик ҳам ўринлидир. Демак, П функтор *Comn* категорияда ҳаракатланувчи ковариант функтор экан. Қуйидаги теоремани исбоциз келтирамиз.

8.4.5-теорема. P функтор узлуксиздир, яъни $S=\{x_\alpha;\pi_\beta^\lambda,A\}$ спектр учун $P(\lim x)=\lim P(s)$ ўринли.

8.4.6-теорема. Агар $f:X\to Y$ мономорфизм бўлса, у ҳолда $P(f):P(X)\to P(Y)$ ҳам мономорфизмдир.

Исбот. Агар $\mu_1,M_2\in P(X)$ иккита ҳар хил ўлчовлар бўлса, у ҳолда шундай $\varphi\in C(x)$ функция мавжуд бўладики, $\mu_1(\varphi)\ne\mu_2(\varphi)$ ўринли бўлади. Брауер-Тице-Урисон теоремасига кўра, шундай $\Psi\in C(Y)$ функция топиладики, унинг учун $\varphi=\Psi of$ ўринли бўлади. (1) тенгликка кўра, $P(f)(\mu_i)(\Psi)=\mu_i(\Psi of)=\mu_i(\varphi)$. Бундан $P(f)(\mu_i)\ne P(f)(\mu_2)$ келиб чиқади.

Элтувчиси чекли сондаги нуқталардан иборат бўлган ўлчов чекли элтувчили ўлчов деб тушунилади. Яъни, μ ўлчов учун $|\text{супп}\,\mu|<\infty$. Айтайлик, $\mu \in P(X)$ ўлчовнинг элтувчиси $\sup p\mu = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ҳар хил нуқталардан иборат бўлсин. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n \in C(x)$ функцияларни олайлик:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, \; agar \; i = j \; bo'lsa; \\ 0, \; agar \; i \neq j \; bo'lsa. \end{cases}$$

Айтайлик, $m_i = \mu(\varphi_i)$. Ўлчовларнинг элтувчилик таърифига кўра, m_i сонлар (2) шартни қаноатлантирувчи φ_i функцияларни танлашга боғлиқ эмас. Шу сабабли улар m_i сонини x_i нуқтанинг $\mu-$ўлчови дейилади. (2)-шартни қаноатлантирувчи φ_i функцияларни $\sum \varphi_i = 1$ ва $\varphi_i \geq 0$ шартлар қаноатлантирувчи қилиб танлашимиз мумкин. Шу сабабли

$m_1 + m_2 + ... + m_n = 1$ ва $m_i \geq 0$ (3) .

Энди элтувчиси $\{x_1, ..., x_n\}$ чекли тўпламдан иборат бўлган μ ўлчов x_i нуқталарининг ўлчовлари m_i лар орқали бир қийматли аниқланишини кўрсатамиз. Яъни,

$\mu(\varphi) = m_1\varphi(x_1) + ... + m_n\varphi(x_n)$ (4)

Тенглик кўриниши. Дирак ўлчови δ_{x_i} нинг аниқланишига кўра, (4) тенглик

$\mu = m_1\delta x_1 + m_2\delta x_2 + ... + \mu_n\delta x_n$ (5)

га айланади. Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий φ функцияни

$\varphi = \varphi(x_1)\varphi_1 + \varphi(x_2)\varphi_2 + ... + \varphi(x_n)\varphi_n$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $\varphi_1, ..., \varphi_n$ фуксиялар (2) шартни қаноатлантиради. У ҳолда

$$\mu(\varphi) = \varphi(x_1)\mu(\varphi_i) + \varphi(x_2)\mu(\varphi_2) + ... + \varphi(x_n)\mu(\varphi_n) = \varphi(x_1)m_1 + \varphi(x_2)m_2 + ... + \varphi(x_n)m_n$$

Шундай қилиб, қуйидаги теорема ҳам исботланди.

8.4.7-теорема. Чекли элтувчили ўлчовлар Дирак ўлчовларининг қавариқ чизиқли комбинацияси (5) дан иборат экан.

Қуйидаги теоремани исбоциз келтирамиз.

8.4.8-теорема. Чекли элтувчили барча ўлчовлар П(X) тўпламда зич тўпламостини ташкил қилади.

8.4.9-теорема. Агар $f : X \to Y$ эпиморфизм бўлса, у ҳолда $P(f) : P(X) \to P(Y)$ ҳам эпиморфизмдир.

Исбот. Дастлаб $P(f)$ акслантириш натижасида барча $\mu \in P(Y)$ чекли элтувчили ўлчовлар қамраб олинишини кўрсатамиз, яъни $\mu = \sum_{i=1}^{u} m_i \delta y_i$.

Ҳақиқатан ҳам, $f^{-1}(y_i)$ дан биттадан $x_i \in f^{-1}(y)$ нуқтани олсак ва $v = \sum m_i \delta x_i$ ўлчовни тузсак, $P(f)(v) = \mu$ ўринли бўлади. Энди 5.4.8-теоремани қўлласак, исбот поёнига етади.

Агар $f : X \to Y$ акслантириш ва ҳар бир $a \in F(X)$ нуқта учун қуйидаги $f(\sup pa) = \sup pF(f)a$ (6) ўринли бўлса, F функтор элтувчиларни сақлайди.

8.4.10-теорема. Мономорф F функтор элтувчини сақлаши учун F функтор прообразларни сақлаши зарур ва етарлидир.

Исбот. *Етарлилиги.* Ихтиёрий $A \subset X$ ёпиқ тўплам учун $F(A)$ ни $F(X)$ даги табиий равишдаги $F_X(A) \subset F(X)$ тўпламостиси сифатида қараш мумкин, яъни $i_a : A \to X$ айний жойлаштиришни олсак ва $F(i_\alpha)$ функтордаги образини қарасак, $F(i_A)(A) \subset F(X)$ ўринли бўлади. Айтайлик, $A = \mathrm{supp} a$ бўлсин. $F(f)(a) \in F(f)|_{F(A)} \subset F(f_A)$ ўринли, яъни $\mathrm{supp} F(f)(a) \subset f(\mathrm{supp} a)$ Y ва аксинча, айтайлик, $B = \sup pF(f)(a)$ бўлсин. У ҳолда F прообразларни сақлаганлиги туфайли қуйидагига эга бўламиз:

$$F(f^{-1}(B)) = F(f)^{-1} F(B) \supset F(f)^{-1} F(f)(a) \supset a$$

Демак, $\mathrm{supp} a \subset f^{-1} B$. Яъни, $f\left(\mathrm{supp} a\right) \subset B$ бўлади.

Зарурлиги. f акслантириш $f^{-1}(A)$ ни A га ўтказганлиги туфайли $F(f)(F(f)(f^{-1}(A)) \subset F(A)$ га эга бўламиз ва шу сабабли $F(f^{-}(A)) \subset F(f)^{-1} F(f)(F(f^{-1}A)) \subset F(f)^{-1} F(A)$ бўлади. Демак, $F(f)^{-1} F_Y(A) = F_x(f^{-1}(A))$ тенгликда $\supset$ ни текширишда F нинг элтувчини сақлаши зарур бўлмади.

Энди тескари $\supset$ ни текширамиз. Айтайлик, $a \in F(f)^{-1}F(A)$ бўлсин. У ҳолда F нинг элтувчини сақлаши туфайли $f(\mathrm{supp}a) \subset A$ га эга бўламиз. Ниҳоят, $\mathrm{supp}(a) \subset f^{-1}(A)$ ўринли ва $a \in F(f^{-1}A)$.

8.4.11-теорема. $x \in X$ нуқта $\mu \in P(X)$ ўлчовнинг элтувчисига тегишли бўлиши унинг ихтиёрий Ox атрофи учун $\mu([Ox]) > 0$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Фараз қилайлик, x нуқтанинг шундай Ox мавжуд бўлсинки, у учун $\mu([Ox]) = 0$ ўринли бўлсин. Ихтиёрий шундай $\varphi \in C(X)$ функцияни олайликки, $\varphi(X \setminus Ox) = 0$ бўлсин. Айтайлик, $|\varphi| \leq M > 0$ бўлсин. $C(X)$ фазода шундай $\Psi \in C(X)$ ни оламизки, у учун $0 \leq \Psi \leq 1$ ва $\Psi([0_x]) = 1,$ $\mu(\mu\varphi) < \varepsilon M$ ўринлидир. У ҳолда $|\varphi| \leq M\psi$ ва, ниҳоят, $\mu(|\varphi|) \leq \mu(M\psi) < \varepsilon.$ Демак, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун $\mu(|\varphi|) < \varepsilon.$ Ниҳоят, $\mu(|\varphi|) = 0,$ бундан эса, $\mu(\varphi) = 0$ келиб чиқади. Элтувчининг таърифига кўра, $\sup p\mu \subset X \setminus (Ox)$ ва, ниҳоят, $x \bar{\in} \mathrm{supp}\mu$. Бунинг акси, агар $x \bar{\in} \sup p\mu$ бўлса, X нинг O_x атрофини $O_x \cap \sup p\mu = \varnothing$ шартни қаноатлантирадиган қилиб олиб, Урисон теоремасига кўра шундай $\psi \in C(X)$ топиш мумкинки, $x \in \mathrm{supp}\mu$ нуқталарда $\psi(x) = 0$ бўлади. У ҳолда $\mu([Ox]) \leq \mu(\varphi) = 0$. Бу ерда $\mu([Ox]) = \inf\{\mu(\phi) : \phi \in C(X),\ 0 \leq \phi(x) \leq 1, \phi(x) = 0, x \in F\}$.

Бу теорема билан бир қаторда қуйидаги ҳам исботланди.

8.4.12-теорема. Агар $\mu(F) > 0$ бўлса, у ҳолда $F \cap \sup p\mu \neq \varnothing$.

8.4.13-теорема. Ихтиёрий $f \in C(X, Y)$ акслантириш ва ихтиёрий $\mu \in P(X)$ учун қуйидаги ўринли: $\mathrm{supp}P(f)(\mu) = f(\mathrm{supp}\mu)$.

Исбот. Аввал $\subset$ бўлишини текширамиз. Айтайлик, $\varphi \in C(Y)$ функция $f(\sup p\mu)$ да нолга тенг бўлсин. У ҳолда $(\varphi o f)(\sup p\mu) = 0$ бўлади. Демак, $\mu(\varphi o f) = 0.$ Бу ҳолда $P(f)(\mu)(\phi) = \mu(\phi o f) = 0$ ҳам ўринли.

Энди $\supset$ бўлишини текширайлик. Айтайлик, $y \in f(\sup p\mu).$ Бу ҳолда 8.4.11- теоремага кўра, ихтиёрий Оу атроф учун $P(f)(\mu)([Oy]) > 0$ ни текшириш керак. Шундай $x \in \sup p\mu$ нуқта ва шундай Ox атроф олайликки, $f(O_x) \subset Oy$ ўринли бўлсин. 8.4.11-теоремага кўра, $\mu([Ox]) > 0.$ Лекин ихтиёрий ёпиқ $F \subset X$ тўплам учун қуйидагига эга бўламиз:

$\mu(F) \le P(f)(\mu)(f(F))$ (1)

Ҳақиқатан ҳам, агар $x \in F$ бўлса, бу тенгсизлик $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(x) = 0$, $x \in f(F)$ лардан $0 \le \varphi o f \le 1$, $\varphi o f(x) = 0$, ларни келтириб чиқаради. Демак, $P(f)(\mu)([Oy]) \ge P(f)(\mu)(f[Ox]) \ge ((1)\ \text{ga ko‘ra}) \ge \mu([Ox]) > 0$.

8.4.14-теорема. Эҳтимоллик функтори П нормал функтордир.

Исбот. Маълумки, эҳтимоллик функтори П нуқтани ва бўш тўпламни сақлайди, яъни П натижасида нуқта яна нуқтага, бўш тўплам яна бўш тўпламга ўтади. Ушбу параграфда биз функторнинг узлуксизлиги (8.4.5-теорема), мономорфлиги (8.4.6-теорема), эпиморфлиги (8.4.9-теорема), чексиз биокомпактларнинг салмоғини сақлашини (8.4.4-лемма) кўрсатдик. Энди прообразларни ҳамда кесишмаларни сақлашини кўрсатишимиз лозим. Прообразларни сақлаши элтувчини сақлашга эквивалент бўлганлиги туфайли (8.4.10-теорема) ўринлидир. Кесишмаларни сақлашини кўрсацак етарли бўлади, чунки П функтор 8.4.13-теоремага кўра элтувчини сақлайди. Маълумки, П функтор узлуксиз, шу сабабли бир жуфт тўпламнинг кесишмасини сақлашини кўрсатишимиз етарли. Айтайлик, $Y_1, Y_2, \subset X$ ва $\mu \in P(Y_1) \cap P(Y_2)$ бўлсин. Бу ихтиёрий $\varphi \in C(Y_i)$ функция ва унинг X гача ихтиёрий давомлаштиришлари φ^1, φ^{11} лар учун $\mu(\varphi^1) = \mu(\varphi^{11})$ ўринли. Бошқача айтганда, агар $\varphi \in C(X)$ ва $\varphi(Y_i) = 0$ бўлса, у ҳолда $\mu(\varphi) = 0.$ Айтайлик, $\varphi(Y_1 \cap Y_2) = 0$ бўлсин. Y_1тўпламда φ га ва Y_2 тўпламда нолга тенг бўлган $\psi' : Y_1 \cup Y_2 \to R$ функцияни оламиз. Айтайлик, ψ функция ψ^1 нинг X гача бўлган ихтиёрий давомлаштириши бўлсин. $\mu \in P(Y_1)$ бўлганлиги сабабли $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$ га эга бўламиз. Лекин $\psi(Y_2) = 0$ ва $\mu \in (Y_2)$. Демак, $\mu(\varphi) = 0$. Бинобарин, $\mu(\varphi) = 0$ ва $\mu \in P(Y_1 \cap Y_2)$. $P(Y_1 \cap Y_2) \subset P(Y_1) \cap P(Y_2)$ нинг исботи тривиалдир.

Биз эҳтимоллик функтори $P : Comp \to Comp$ бикомпактлар ва уларнинг узлуксиз акслантиришлари категорияда нормал функтор эканлигини кўрсатдик. P функторнинг функторостилари P_n ва P^c лар ҳам ажойиб геометрик хоссаларга эга. Қизиққан ўқувчилар бошқа $\exp, \exp_n, \lambda, \lambda_n$ функторлар билан ҳам танишишлари мумкин.

Назорат саволлари:

1. Топологик фазоларнинг қандай ўлчамларини биласиз?
2. Ёпиқ йўл таърифини келтиринг.
3. Кўпхилликларнинг қандай турларини биласиз?
4. Чизиқ таърифи ва мисоллар.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

2. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” -Т. 2012 240 бет.

4. Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 165-218

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1-Амалий машғулот:

Алгебра ва геометрия маъруза мавзуларини баён қилиш муаммолари.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш.

Алгебрани ўқитишда муаммоли маърузалар.

Муаммоли маъруза - ўқитувчининг талабани ўқув жараёнига жалб этишга муаммоли вазиятлар масалалар орқали эришиш жараёни.

Муаммоли маъруза - муаммоли саволлар қўйиш ёки муаммоли масалаларни кўрсатиш йўли билан кетма-кет моделлаштириладиган муаммоли вазиятлар мантиқига таянган ҳолда олиб бориладиган маъруза.

Муаммоли савол ўзида диалектик зиддиятни мужассам этади ва ечими учун маълум билимларни қайта тиклашни эмас, балки фикрлашни, таққослашни, қидиришни, янги билимларни эгаллашни ёки олдин эгалланганларини ижодий қўллашни талаб этади.Муаммоли маърузада талаба нотиқ билан бирга фикрлайди. Охир-оқибат муаммоли масалаларга ойдинлик киритилади.Бу яхши натижаларга олиб келади.

Биринчидан, шу тарзда эгалланган билимлар талабаларнинг мулкига айланади, иккинчидан, ўзлаштирилганлари чуқур ёдда сақланади, енгил фаоллашади (таълимий самара), янги вазиятларга осон кўчиш хусусиятига эга бўлади (ижодий фикрлашнинг ривожланиш самараси), учинчидан, муаммоли масалаларни ечиш заковатиривожлантиришнинг ўзига хос ўқув машғулоти сифатида кўринади (ривовланиш самараси), тўртинчидан, бунда маъруза курс мазмунига қизиқишни орттиради ва тайёргарликни кучайтиради (бўлажак фаолиятга психологик тайёрлаш самараси).

Муаммоли таълим технологияси - талабаларда изланиш олиб бориш учун зарурий кўникма ва малакаларни шакллантириш, билиш ва ижодий қобилиятларни ривожлантиришга қаратилган педагогик фаолиятдир. Бунда маъруза машғлотлари ва дидактик материалларни муаммоли тарзда ташкил этиш юқори педагогик самарани беради. Муаммоли таълим технологиясида муаммоли баён, эвристик суҳбат, муаммоли намойиш, изланишга асосланган амалий машғулот, ижодий топшириқ, ҳаёлий муаммоли эксперимент, муаммо учун ишчи фаразларни шакллантириш, муаммоли вазифа, ўйинли муаммоли вазиятларни қўллаш талабаларни мантиқий фикрлашга, илмий фаразларни шакллантиришга ўргатади, илм-фан ҳақидаги тасаввурларни кенгайтиради.

Муаммони ёйиш - муаммо ечимини топиш жараёнида унинг кенг қамровли эканлиги ва кўп қирралигини асослаш жараёни, яъни, хусусий муаммолар ечимларини топиш жараёнидан иборат бўлиб, улар ҳар қандай хусусий муаммоларни боғловчи, аниқловчи, тугунловчи хусусиятга эга бўлган бош муаммо атрофида жамланади.

Бундай хусусий муаммоларни ечиш тадқиқотчининг қўлига бош муаммо ечимига жавоб излашда маълумотлар, ахборотлар ва далилларни беради.

Муаммони излаш ва танлашда қуйидагиларга эътибор бериш лозим:

-қўйилган муаммони ечмасдан белгиланган йўналишда методни, методологияни, технологияни, техникани янада ривожлантириш ва такомиллаштириш мумкинлигини ишчи фаразни шакллантира олишлик;

-режалаштирилган тадқиқот илм фанга ва таълим-тарбияни режаштиришга аниқ нима беришини аниқлаш;

-режалаштирилган тадқиқот натижалари асосида олинадиган янги қонуният нимаси билан усул, воситаваилм-фан ҳамда техника-технология олдин мавжудларидан янги ва кўпроқ амалий баҳога эга эканлигини аниқлаш.

Муаммоли таълим техналогиялари ўқувчи фаолиятини фаоллаштириш ва жадаллаштиришга асосланган. Муаммоли таълим технологиясининг асоси инсоннинг-фикрлаши муаммоли вазиятни ҳал этишдан бошланиши ҳамда уларнинг муаммоларини аниқлаш, тадқиқ этиш ва ечиш қобилиятига эга эканлигидан келиб чиқади.

Муаммоли технологияни амалга ошириш учун қуйидагиларга риоя қилиш керак бўлади:

-ен долзарб, аҳамиятли вазифаларни танлаш;

-ўқув ишларининг барча турларида муаммоли ўқитишнинг ўзига хос хусисиятларини белгилаш;

-муаммоли ўқитишнинг энг мақбул тизимини ишлаб чиқиш;

-ўқитувчи маҳорати.

Алгебрани ўқитишда турли мавзуларда муаммоли таълим технологиясидан фойдаланиш мумкин. Масалан, “ Туб ва мураккаб сон”, “3 ва 9 сонларининг бўлиниш аломатлари”, “Қисқа кўпайтириш формулалари”, “Квадрат тенгламалар”, “Виет теоремаси”, “Арифметик прогрессия” мавзуларида фойдаланишимиз мумкин. Бу мавзуларни тушунтириш жаронида турли муаммоли саволларни ўқувчиларга бериб муаммоли вазият ҳосил қиламиз. Ўқувчилар саволларни жавобини излайдилар ва мустақил фикрлашга ҳаракат қиладилар.

Геометриядан муаммоли маърузалар.

Геометрияда муаммоли маъруза – муаммоли саволлар қўйиш ёки муаммоли масалаларни кўрсатиш йўли билан кетма-кет моделлаштириладиган муаммоли вазиятлар мантиқига таянган ҳолда олиб бориладиган маъруза. Муаммоли талим машғулотларини ташкил этиш ва бошқариш қуйидаги босқичларни ўз ичига олади:

-ўқув фани ва дарслар мавзусини ўргатишда улар билан боғлиқ муаммоли масалаларни белгилаш;

-улардан муаммоли вазиятлар ҳосил қилиш ва амалда фойдаланишни олдиндан режалаштириб бориш;

-ўқувчиларнинг тайёргарлик даражасини ҳисобга олиш;

-зарур ўқув воситаларни тайёрлаш;

-муаммоли вазиятдаги мавжуд зиддиятни кўрсатиш;

-топшириқни ва уни ечиш учун етарли шартларни аниқ баён қилиш;

-ўқувчиларнинг муаммони ҳал этишда қўяётган хатоларини, уларнинг сабабини ва хусусиятини кўрсатиш;

-ўқувчиларнинг нотўғри таҳминлари асосида чиқарган хулосалари оқибатини муҳокама этиб, тўғри йўлни топишларига кўмаклашиш ва бошқалар.

Муаммо ўқувчиларнинг билим даражаларига ҳамда интелектуал имкониятларига мос бўлиши шарт.Ҳосил бўлган муаммоли вазиятни ечиш учун топшириқлар янги билимларни ўзлаштиришга ёки муаммони аниқлаб, яққол ифодалаб беришга ёки амалий топшириқни бажаришга йўналтирилган бўлади.

Ўқувчиларнинг муаммоли вазиятни тушунишлари, унинг келиб чиқиш сабаблари ҳамда нималарга, қанчалик даражада боғлиқлигини идрок қила олишлари натижасида ҳосил бўлади.Бундай тушуна олиш эса ўқувчиларга мустақил равишда муаммони ифодалай олиш имконини беради.

Муаммони ечиш тахминларини шакллантиришда ўқувчи ўзлаштирган билимлари асосида кузатиш, солиштириш, таҳлил, умумлаштириш, хулоса чиқариш каби ақлий фаолиятларни бажаради.

Ақлий фаолиятдаги асосий жараён фикрлаш жараёни бўлиб, фикрлашнинг сифати унинг мантиқийлиги, мустақиллиги, ижодийлиги, илмийлиги, асослилиги узвийлиги, тежамлилиги, мақсадлилиги, тезлиги, таҳлилийлиги, қиёсийлиги, умумлаштирилганлиги, хусусийлаштирилганлиги, кенглиги, чуқурлиги, ишонарлиги, реаллиги, ҳаққонийлиги даражаси билан белгиланади.

Интелектуал тараққиёт даражаси ўқитувчиларда ҳамда ўқувчиларда қанча юқори бўлса, шунчалик яхши натижаларга эришиш имконияти ҳосил бўлади.

Шунга кўра ўқувчиларда муаммони сезиш, уни аниқлаш, ечимига доир таҳминни тўғри белгилаш ва ечимнинг тўғрилигини текшириш қобилиятлари ривожланиб боради.

Муаммони ҳал этишни 3та босқичга ажратиш мумкин:

1. Исботлаш – бу муаммонинг илгари тўғри деб тан олинган сабаблар билан боғлиқликларини топиш асосида амалга оширилади.

2. Текшириш – буни танланган сабабнинг оқибатида ҳал этилаётган муаммо ҳосил бўлиши тўғрилигини асослаш билан амалга оширилади.

3. Тушунтириш – бу муаммонинг ечими нима учун тўғрилигини тасдиқловчи сабабларни аниқлаш асосида амалга оширилади.

Масаланинг қўйилиши:

1.Қуйидаги мавзуларга муаммоли таълим технологиясидан фойдаланиб муаммоли вазиятларни ҳосил қилинг.

1. Проектив текислик. Проектив фазо. Проектив фазо аксиомалари Проектив геометриянинг асосий фактлари
2. Проектив координаталар.Иккилик принсипи. Дезарг теоремаси.
3. Бир тўғри чизиқда ётувчи тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати.
4. Проектив алмаштиришлар ва уларнинг группаси. Проектив геометрия предмети
5. Нуқталарнинг гармоник тўртлиги. Тўлиқ тўрт учликнинг гармоник хоссалари.
6. Проектив текисликдаги иккинчи тартибли чизиқлар
7. Қутб ва поляра. Проектив текисликдаги иккинчи тартибли чизиқларнинг классификatsiяси.
8. Штейнер, Паскал ва Брианшон теоремалари
9. Битта чизғичда бажарилган геометрис ясашлар.
10. Топологик фазо. Очиқ ва ёпиқ тўпламлар ва уларнинг ҳоссалари.
11. Топологик фазо базаси. Нуқтадаги база. Топологик фазони база бўйича қуриш.
12. Ички, ташқи ва чегаравий нуқталар. Хоссалари. Мисоллар.
13. Топологик фазоларнинг ажралувчанлик аксиомалари. Боғланишли тўпламлар ва уларнинг ҳоссалари.
14. Компактлик ва хоссалари. Метрик фазо. Мисоллар.

15. Узлуксиз акслантириш. Гомеоморфизм. Топологик фазоларнинг кардинал инвариантлари.

16. Акслантириш, турлари. Устки ва ички акслантиришлар.

17. Топологик кўпхиллик. Бир ва икки ўлчамли кўпхилликлар.

18. Йўналишга эга ва йўналишга эга бўлмаган кўпхилликлар. Эйлер характеристикаси.

Ишни бажариш учун намуна.

Алгебра

1- мисол. Агар ўқитувчи $ax^2+бx+c=0$ тўла квадрат тенгламанинг умумий $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ йечимини топиб, унга доир $5x^2+7x+2=0$ мисолни кўрсатгандан сўнг, ўқувчиларга $6x^2+5x+1=0$ тенгламани йечинглар деса, бу ҳолат ўқувчилар учун муаммоли вазиятни ҳосил қилмайди, чунки улар учун бу мисолни ечишга андаза бор. Ўқувчилар бу мисолни ечиш жараёнида ҳеч қандай янги математик қонун ёки қоидани ишлатмасдан аввалги мисолдаги коеффициентлар ўрнига янгиларини қўядилар, холос, бунда ўқувчиларнинг фикрлаш қобилиятлари шаклланмайди.

2 - мисол. Ўқитувчи квадрат тенглама мавзусини ўтиб бўлганидан кейин биквадрат тенгламани ўтиш жараёнида қуйидагича муаммоли вазиятларни ҳосил қилиши мумкин.

Ўқитувчи: $6x^4+5x^2+1=0$ тенгламани қандай тенглама деб айтамиз?

Ўқувчилар: 4 - даражали тенглама дейилади.

Ўқитувчи: тўғри, шундай дейиш ҳам мумкин, аммо математикада шу кўринишдаги тенгламаларни *биквадрат тенглама*дейилади ва унинг умумий кўриниши $ax^4+бx^2+c=0$ каби бўлади. Хўш, бу кўринишдаги тенгламани қандай ечиш мумкин?

Ўқувчилар: Биз бундай тенгламаларни ечмаганмиз.

Мана шу ерда ўрганилаётган мавзу материали билан ўқувчилар орасида билишга доир муаммоли вазият ҳосил бўлади.

Ўқитувчи:$x^2=y$ деб белгиласак, x^4 ни қандай белгилаймиз?

Ўқувчилар: мулоҳаза юритиш, илгари ўтилганларин эслаш орқали $x^4=y^2$ деб белгилаш тўғри эканлигига ишонч ҳосил қиладилар.

Ўқитувчи: Бу тенгламани ҳозирги белгилашларга кўра қандай кўринишда ёзиш мумкин?

Ўқувчилар:$6y^2-5y+1=0.$

Ўқитувчи: Бу ҳосил қилинган тенгламани қандай тенглама дейилади?

Ўқувчилар: Тўла квадрат тенглама дейилади.

Ўқитувчи: Бу тенгламани қандай ечамиз?

Ўқувчилар: Тўла квадрат тенглама умумий йечимини топиш формуласига қўйиб топамиз:

$$y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2\cdot 6}=\frac{5\pm 1}{12};\ y_1=\frac{1}{2};\ y_2=\frac{1}{3};$$

Ўқитувчи: Биз ҳозир тенгламани йечиб, қайси номаълумни топдик?

Ўқувчилар: Номаълум y ни топдик.

Ўқитувчи: Нимани топиш сўралган эди?

Ўқувчилар:x ни топиш сўралган эди.

Ўқитувчи:x ни қандай топамиз?

Мана шу ердаги номаълум x ни топиш жараёни ҳам кўпчилик ўқувчилар учун муаммоли вазиятни ҳосил қилади.

Ўқувчилар номаълум x ни ўзлари топишлари мумкин, бўшроқ ўқувчиларга ўқитувчи ёрдамлашади:

$$x^2=\frac{1}{2};\qquad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}};$$

$$x^2=\frac{1}{3};\qquad x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}};$$

Демак, тенглама 4-даражали бўлгани учун биз 4 та йечимини топдик. Бу мисолни ечиб бўлинганидан кейин $ax^4+бx^2+c=0$ биквадрат тенгламанинг умумий йечимини ўқитувчи раҳбарлигида ўқувчиларнинг ўзлари топа оладилар:

$$x^2 = y,$$
$$ay^2 + by + c = 0,$$
$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}},$$
$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Геометрия

1-Масала. АБС тўғри бурчакли учбурчакда <А=90^0, /БС/=15см, /АБ/=9см бўлса, /АС/ томонининг узунлиги топилсин.

Ечиш. Пифагор теоремасига кўра /БС/^{2} =/АБ/+/АС/

/АС/=$\sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{225 - 81}$=$\sqrt{144}$=12

Жавоб: /АС/=12

2-Масала. АБС учбурчакда <А=30^0, <Б=90^0, /АБ/=2см, /АС/=$\frac{4}{3}\sqrt{3}$см бўлса, /БС/ нинг узунлигини топинг.

Ечиш: Чизмадан кўриниб турибдики, АБЭ учбурчак БЭС учбурчакка ўхшаш. Бундан:$\frac{AB}{AE}$=$\frac{BC}{BE}$, БЭ=$\frac{AB}{2}$=1, $\frac{2}{\sqrt{3}}$= $\frac{BC}{1}$, /БС/=$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Жавоб: /БС/=$\frac{2}{\sqrt{3}}$ [7,224]

3-Масала.Тенг ёнли трапеция диагоналининг узунлиги 15см га тенг.Трапецияга ички чизилган айлана радиуси 4.5см. Трапециянинг ўрта чизиғ И ва ён тарафини топинг.

Ч АД, Ч = 2Р = 9

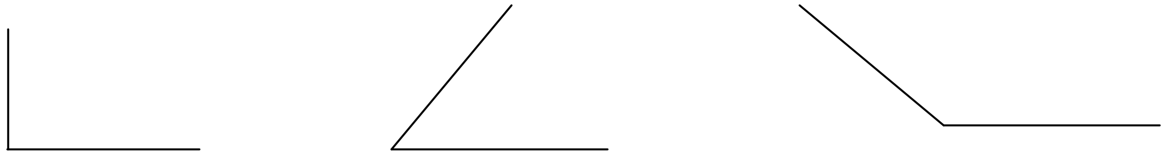
АҲ^2 = АС^2– Ч^2 = 225 – 81 =144

АҲ = 12, ЭФ = АҲ = 12.

АБ + СД = 12 * 2 =24.

Жавоб: 12; 24.

“Бурчаклар” мавзусида муаммоли таълим технологиясидан фойдалнишимиз мумкин. “Ҳар бир бурчакнинг номини айтиб беринг” деб муаммоли савол берамиз. Бунда ўқувчилар мустақил фикрлай бошлайдилар.



Назорат саволлари:

1.Муаммоли маъруза.

2.Муаммоли савол.

3.Муаммоли таълим технологияси.

4.Муаммони ёйиш.

5.Муаммоли технологияни амалга ошириш.

6.Геометрияда муаммоли маъруза.

7.Муаммони ҳал этиш.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Шулт, Э., Суроwски, Д. Алгебра Германй 2015 Спрингер, Германй Английский.

2- Амалий машғулот:

Геометрияда индуксия татбиқи.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш.

Геометрияда ҳисоблашга доир масалаларда индуксиянинг тадбиқлари.

Жуда кўп геометрик тасдиқларни исботлашда математик индуксия услубидан фойдаланишга тўғри келади. Буларга қуйдагиларни киритиш мумкин:

1) қаварик кўпбурчак ички бурчакларнинг йиғиндиси ва диагоналлари сони;

2) кўпёқли бурчакнинг текис бурчакларининг хоссалари;

3) тўғри чизиқ , текислик ва фазони қисмларга ажратиш;

4) айланаларнинг текисликни қисмларга бўлиши ;

5) текисликдаги қаварик фигураларнинг умумий нуқтасининг мавжудлиги;

6) тегишли ғилдиракли системасининг айланиши;

7) ҳосилавий учбурчакларнинг мавжудлиги ;

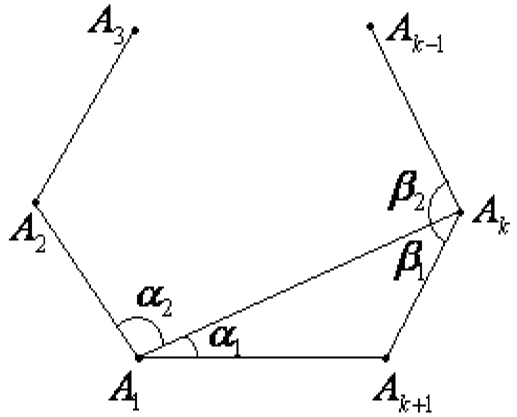
8) нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши;

9) доирачаларни тўрт хил ранг билан бўяш;

Бу ташуншунчалар билан боғлиқ математик тасдиқларни математик индуксия методи билан исботлаймиз.

1- Масала. Қаварик кўбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180^0 (н-2) га тенг, бунда н≥3 . $HFDF$

Исбот: н=3 учун тўғри, чунки учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180^0 га тенг.



1-расм.

Тасдиқ н=к учун тўғри деб фараз қилиб, н=к+1 учун 180^0(к-1) тўғрилигини исботлаймиз. Қавариқ (к+1) бурчакни к бурчак ва $A_1A_кA_{к+1}$ учбурчакка ажратамиз. $A_1A_кA_{к+1}$ учбурчакнинг ички бурчакларининг йиғиндиси $\alpha_1+\beta_1+ A_{к+1}=180^0$ бўлади. $A_1A_2...A_к$ қавариқ к бурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси фаразамизга кўра $\alpha_2+<A_2+...+<A_{k-1}+\beta_2=180^0(k-2)$

бўлади, бунда $<A_1=\alpha_1+\alpha_2$, $<A_k=\beta_1+\beta_2$ $A_1A_2\dots A_{k+1}$ қавариқ (к+1) бурчак ички бурчакларининг йиғиндиси

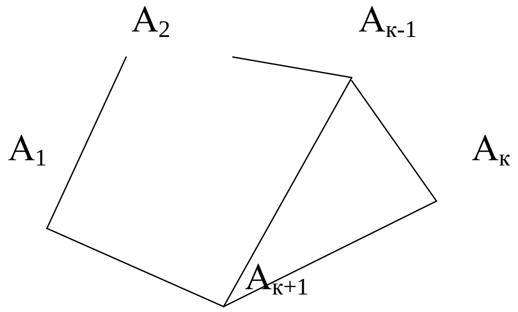
$$\angle A_1+\angle A_2+\ \dots+\angle A_{k-1}+\angle A_k+A_{k+1}=\alpha_1+\alpha_2+A_2+\ \dots+\angle A_{k-1}+$$
$$+\beta_1+\beta_2+A_{k+1}=(\alpha_1+\beta_1+A_{k+1})+(\alpha_2+\angle A_2+\ \dots+\angle A_{k-1}+\beta_2)=$$
$$=180°+180°(k-2)=180°(k-1)$$

бўлади. Демак, тасдиқ тўғри.

2-масала. Қавариқ кўпбурчак диагоналларининг сони $\frac{n(n-3)}{2}$ га тенг, бунда н>3.

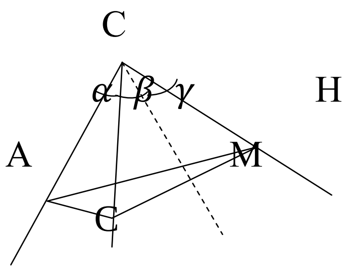
Исбот: н=4 учун тўғри, чунки қавариқ тўртбурчак $\frac{n(n-3)}{2}=\frac{4\cdot(4-3)}{2}=2$ та диагоналга эга.

н=к учун тасдиқ тўғри деб фараз қилиниб, н=к+1 учун $\frac{(\kappa+1)\cdot(\kappa-2)}{2}$ та диагоналга эга эканлигини исботлаймиз.



2-расм.

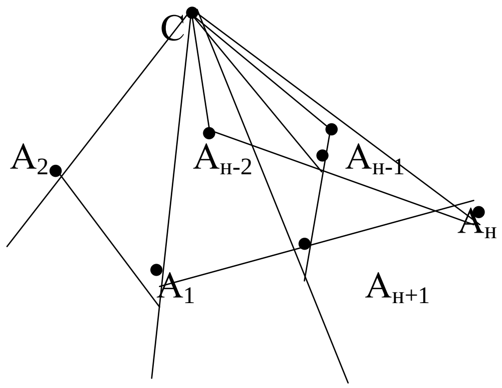
$A_{k+1}A_{k-1}$ диагонални ўтказсак, $A_1A_2 \dots A_{k-1}A_{k+1}$ қавариқ к бурчак ва $A_{k+1}\, A_kA_{k-1}$ учбурчак ҳосил бўлади. Фаразга кўра, қавариқ к бурчак $\frac{\kappa(\kappa-3)}{2}$ та диагоналга эга. $A_{k+1}\, A_kA_{k-1}$ учбурчакнинг A_k учи к бурчакнинг A_1, $A_2 \dots A_{k-2}$ учлари билан (к-1) та диагонал ҳосил бўлади. Қавариқ (барча диагоналлари сони) $\frac{\kappa(\kappa-3)}{2}+\kappa-1=\frac{\kappa^2-3\kappa+2\kappa-2}{2}=\frac{\kappa^2-\kappa-2}{2}=\frac{(\kappa+1)(\kappa-2)}{2}$ та бўлади. Демак, тасдиқ тўғри.



3-расм.

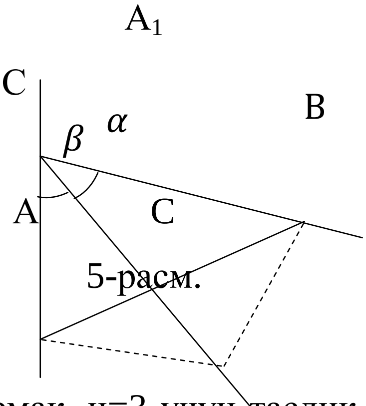
3-масала. Кўпёқли бурчакнинг исталган текисбурчагининг градус ўлчови, қолган текис бурчаклари градус ўлчовларининг йиғиндисидан кичик бўлади.

Исбот : тасдиқ н=3 учун тўғрилигини дастлаб исботлаймиз. САБС учёқли бурчакнинг текис бурчаклари α,β,γ билан белгилаймиз, бунда γ энгката текис бурчаги бўлсин. γ<α+β эканлигини исботлаш керак.



4-расм.

∠АСС=β, ∠ССБ =α, ∠АСБ=γ, АСБ бурчак ичида СА нур билан β катталигида бурчак ҳосил қилувчи СМ нурни Н нуқтада кесувчи АБ кесма ўтказамиз, бунда ∠АСН=β , СС нурда СН кесмага тенг бўлган СД кесма ажратамиз, яъни СН=СД, ΔАСД=ΔАСН бўлади. АБД учбурчакдан АД+ДБ>АБ ни ҳосил қиламиз, бунда АБ=АН+НБ ва АД=АН натижада ДБ>НБ келиб чиқади. БСД ва БСН учбурчакларга косинуслар теоремасини қўллаб, $ДБ^2>НБ^2$ тенгсизлигидан cosα <cos(∠НСБ) ҳосил бўлади. Бунда эса ∠НСБ=α.



5-расм.

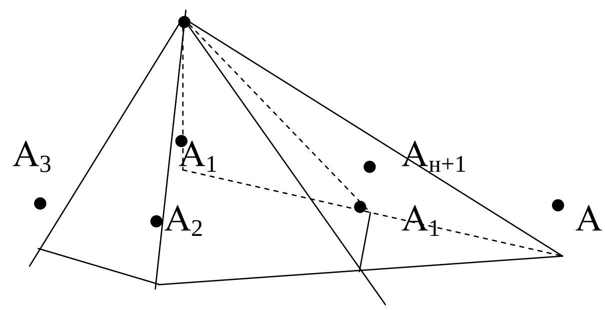
γ=∠АСН+<НСБ=β+α. Демак, н=3 учун тасдиқ тўғри деб фараз қилиб, (н+1) ёқли бурчак учун тоғрилигини исботлаймиз. α_{n+1} (н+1) ёқли бурчакнинг энг катта бурчаги текис бурчак бўлсин. $\alpha_{n+1}<\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ эканлигини исботлаш керак.

$\angle A_1 С A_2=\alpha_1,\ldots,\angle A_1 С A_{n+1}=\alpha_{n+1}$; $\angle A_n С A_{n+1}=\alpha_n$; $A_{n-1} С A_{n+1}=\beta$ деб белгилаймиз. $СA_1A_2\ldots A_{n-1}A_{n+1}$ н ёқли бурчак учун тасдиқ тўғри деб фараз қилинганлигидан,

α_{n+1}<α_1+α_2+…+α_{n-2}+β бўлади. С$A_{n-1}A_nA_{n+1}$ уч ёқли бурчак учун β<α_{n-1}+α_n бўлиб, натижада α_{n+1}<α_1+α_2+…+α_{n-2}+β<α_1+α_2+…+α_{n-2}+$\alpha_{n-1}+\alpha_n$ бўлади, яъни тасдиқ тўғри .

4-масала. Кўп ёқли бурчакда текис бурчаклар катталикларининг йиғндиси 360^0 дан кичик бўлади.

Исбот. н=3 учун тасдиқ тўғрилигини дастлаб исботлаймиз. САБС уч ёқли бурчакнинг текис бурчаклари α,β,γ билан белгилаймиз, бунда <ССБ=α, ∠АСС=β, ∠АСБ=γ, СА нурни тўғри чизиққа тўлдирувчи СA_1 нур ўтказамиз. Уч ёқли СA_1ВС бурчакнинг текис бурчаклари α, 180^0-β ва 180^0-γ га тенг. Уч ёқли бурчакнинг ҳар бир текис бурчаги ҳақидаги тасдиққа кўра α<180^0-β+180^0-γ бўлиб, α+β+γ<360^0 бўлади. н=3 учун тасдиқ тўғри. н ёқли бурчак учун тасдиқ тўғри деб фараз қилиб , (н+1) ёқли бурчак учун



6-расм.

тасдиқнинг тўғрилигини исботлаймиз. (н +1) ёқли СA_1A_2…A_{n+1} бурчакнинг текис бурчаклари α_1+α_2+…+α_{n-2}+α_{n+1} бўлсин, у ҳолда α_1+α_2+…+α_{n-2}+$\alpha_{n-1}+\alpha_n$ <360^0 эканлигини исботлаш керак.

$\angle A_1SA_2$=α_1,…,$\angle A_nSA_{n+1}$=α_n, $\angle A_{n+1}SA_1$=α_{n+1} деб белгилаймиз. α_1 ва α_n бурчакларнинг текислари С умумий нуқтага эга. Шунинг учун улар С нуқта орқали ўтувчи а тўғри чизиқ бўйича кесишади. С нуқта тўғри чизиқни 2 та нурга бўлади. Бу нурлардан бири ва берилган кўп ёқли (н+1) бурчак α_{n+1} текис бурчак текислигидан бир томонда жойлашади. Бу нурни СА деб белгилаймиз н ёқли A_1, A_2 ,…, A_n бурчакнинг текис бурчаклари

$\angle$ АС A_1+α_1, α_2 , ... , α_{n-1} α_n+ A_{n+1}СА бўлиб, унинг учун тасдиқ тўғри бўлганлиги учун ($\angle$АСA_1+α_1)+ α_2+ ... + α_{n-1}+(α_n+ A_{n+1}СА)$<360^0$ бўлади. СА$A_1 A_{n+1}$ уч ёқли бурчак учун $\alpha_{n+1}\angle$ АС $A_1\angle A_{n+1}$СА бўлгани учун α_1+α_2+…+α_n+α_{n+1} +...+<α_1+α_2+…+α_n +$\angle$АСA_1+$\angle A_{n+1}$АС$<360^0$ бўлади, яъни тасдиқ тўғри.

5-масала. Тўғри чизиқда ётган н та нуқта уни н+1 та қисимга бўлишини исботланг.

Исбот. н=1 учун тасдиқ тўғри, чунки н+1=1+1=2; бу нуқта тўғри чизиқни 2 та қисмга бўлади. н=к учун тўғри , яни к та нуқта тўғри чизиқни к+1 та қисмга бўлади деб фараз қилиб, н=к+1 учун тасдиқнинг тўғрилигини исботлаймиз.

7-расм.

к+1 та нуқтадан биттасини (бошида ёки охирида оламиз ва уни (к+1) нуқта деб индуксия бўйича фаразимизга кўра қолган к та нуқта тўғри чизиқни к+1 та қисмга бўлади. (к+1) та нуқта тўғри чизиқни 2 та нурга ажратади. 1-нурда к+1 та қисм, 2-нурда эса 1 та қисм бўлади. Тўғри чизиқ к+1+1= к+2 та қисмга бўлинади, яъни тасдиқ тўғри.

6-масала. Бир текисликда ётган, ҳеч бир 2 таси параллел бўлмаган ва ҳеч қандай 3 таси бир нуқтадан ўтмайдиган н та тўғри чизиқ текисликни $1+\frac{n(n+1)}{2}$ та қисмга бўлишини исботланг.

Исбот : н=1 учун тасдиқ тўғри , чунки $1+\frac{1\cdot 2}{2}=2$ яъни бир тўғри чизиқ текисликни 2 қисмга бўлади.

Тасдиқ н=к учун , яъни к та тўғри чизиқ текисликни $1+\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ та қисмга бўлади деб фараз қилиб , тасдиқ н=к+1 учун, яъни к+1 та тўғри чизиқ текисликни $1+\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$ та қисмга бўлишини исботлаймиз. к+1 та тўғри чизиқдан биттасини олиб, уни (к+1) тўғри чизиқ деб белгилаймиз. Индукция бўйича фаразимизга кўра қолган к та тўғри чизиқ текисликни $1+\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ та қисмга бўлади. (к+1) тўғри чизиқ, олдинги к та тўғри чизиқни к та нуқтада кесади. Шунинг учун (к+1) тўғри чизиқ бу нуқталар билан к+1 та қисмга бўлинади (олдинги масала).

Ҳосил бўлган к та нуқта биринчи к та тўғри чизиқнинг кешишганидан ҳосил бўлган к та нуқтадан фарқли бўлгани учун бу бўлакларнинг ҳар бир текисликнинг мавжуд бўлакларидан бирини икки қисмга бўлади, яъни мавжуд қисмга к+1 та қисм қўшилади , ҳаммаси бўлиб $1+\frac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ +(к+1) = $=1+\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}$ та қисмга бўлинади, яъни тасдиқ тўқри.

7-масала. Ҳеч қандай иккитаси параллел бўлмаган, ҳеч қандай учтаси битта тўғри чизиқдан ўтмаган ва ҳеч қандай тўрттаси бир нуқтадан ўтмаган н та текислик фазони $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$ та қисмга бўлишини исботланг.

Исбот. н=1 учун тасдиқ тўғри, чунки битта текислик фазони $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}=\frac{2\cdot(1-1+6)}{6}=2$ қисмга бўлади.

Тасдиқ н = к учун, яъни к та текислик фазони $\frac{(\kappa+1)(\kappa^2-\kappa+6)}{6}$ та қисмга бўлади деб фараз қилиб, $\frac{(\kappa+2)(\kappa^2+\kappa+6)}{6}$ та қисмга бўлинишини исботлаймиз.

Текисликлардан бирини оламиз, у ҳолда бунинг қолган к та текисликлар билан кешишиш тўғри чизиқлари учун 6-масаланинг шарти бажарилгани учун олинган текислик бу тўғри чизиқлар билан

$1+\dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ та қисмга бўлинади. Индукция фаразига кўра эса қолган к та текислик фазони $\dfrac{(\kappa+1)(\kappa^2-\kappa+6)}{6}$ та қисмга бўлади. Олинган текисликларнинг ҳар бир қисми масала шартига кўра мавжуд қисмлардан бирини икки қисмга бўлади, яъни мавжуд қисмга $1+\dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}$ та қисм қўшилади. Ҳаммаси бўлиб, $\dfrac{(\kappa+1)(\kappa^2-\kappa+6)}{6}+$ $1+\dfrac{\kappa(\kappa+1)}{2}==\dfrac{(\kappa+1)(\kappa^2+2\kappa+6)+6}{6}=\dfrac{(\kappa+1)^3+5(\kappa+1)+6}{6}$ бўлади. н=к+1 десак, $n^3+5n+6=(n+1)(n^2-n+6)$ бўлгани учун $\dfrac{(\kappa+1)^3+5(\kappa+1)+6}{6}=\dfrac{(\kappa+2)((\kappa+1)^2-(\kappa+1)+6)}{6}=\dfrac{(\kappa+2)(\kappa^2+\kappa+6)}{6}$ та бўлади. Демак, тасдиқ тўғри.

8-масала. Бир текисликда ётган н та айлана текисликни n^2-n+2 дан ортиқ бўлмаган қисмларга бўлинишини исботланг.

Исбот: н=1 учун тасдиқ тўғри, чунки бир айлана текисликни n^2-n+2 $= =1^2-1+2=2$ та қисмга бўлинади.

Тасдиқ н=к учун деб фараз қилиб, тасдиқнинг н=к+1 учун тўғрилигини исботлаймиз.

Айланалардан бирини оламиз, у ҳолда бу айлана қолган к та айланалар билан иккитадан ортиқ бўлмаган нуқталарда кесишади. Индукция фаразига кўра қолган к та айлана текисликни $\kappa^2-\kappa+2$ дан ортиқ бўлмаган қисмларга бўлади. Олинган айланаларнинг қолган айланалар билан кесишиш нуқталари 2к дан ортиқ эмас. Олинган айланани 2к тадан ортиқ бўлмаган қисмларга бўлади, бу ёйларнинг ҳар бири мавжуд текислик қисмларидан бирини икки қисмга бўлади.Натижада $\kappa^2-\kappa+2$ тадан ортиқ бўлмаган қисмларга яна 2к тадан ортиқ бўлмаган қисмлар қўшилади. Ҳаммаси бўлиб, $\kappa^2-\kappa+2$ $+2\kappa=\kappa^2+\kappa+2=(\kappa+1)^2-(\kappa+1)+2$ тадан ортиқ бўлмаган қисмлар ҳосил бўлади. Демак, тасдиқ тўғри.

9-масала. Текисликда чекли сондаги қаварик фигуралар берилган бўлиб, уларнинг ихтиёрий учтаси умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда барча фигураларга тегишли бўлган нуқта мавжуд бўлади. Бу тасдиқ Хелли теоремаси деб аталади.

Хелли теоремаси "Комбинатор геометрия" нинг асасий теоремаларидан биридир. "Комбинатор геометрия" йўналиши XX асрнинг 60-йилларидан бошлаб ривожланиб келмоқда. Унинг асосчиси буюк швейцариялик олим Гюго Хадвигердир. Бу геометрия қаварик фигураларнинг ўзаро жойлашиши, уларни бўлакларга ажратиш каби масалалар билан шуғилланади. Қаварик фигуралар нима деган саволга ҳам тўхталиб ўтамиз.

Агар текисликдан Ф фигуранинг ихтиёрий иккита Х ва Й нуқтаси билан биргаликда уларни туташтирувчи кесма ҳам Ф фигурага тегишли бўлса, текисликдаги Ф фигура қаварик деб аталади.

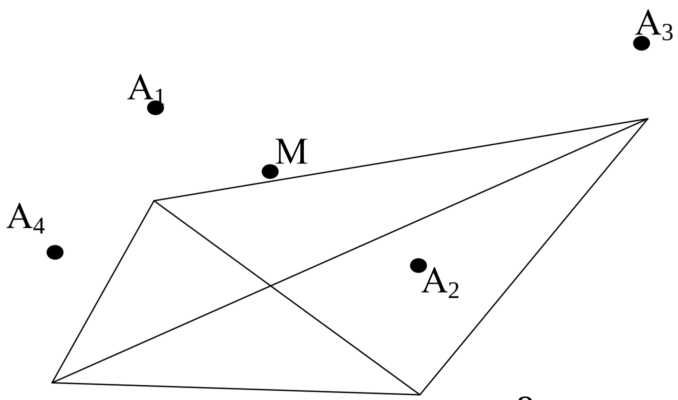
Масалан текислик (P^2), ярим текислик, тўғри чизиқ, доира, ҳар бир бурчаги 180^0 дан ортиқ бўлмаган ихтиёрий кўпбурчак қаварик фигуралардир.

Ҳалқа, айлана, бурчаклари 200^0, 50^0, 50^0 ва 60^0 бўлган тўртбурчак қаварик бўлмаган фигуралардир. Энди Хелли теоремасини математик индукция услубидан файдаланиб исботлаймиз.

Дастлаб н = 4 учун, яъни F_1, F_2, F_3 ва F_4 қаварик фигуралар учун исботлаймиз.

Исбот: F_2, F_3 ва F_4 фигураларнинг умумий нуқталари A_1; F_1, F_3, F_4 фигуралargнинг умумий нуқтасини A_2; F_1, F_2, F_4 фигуралargнинг умумий нуқтасини A_3; F_1, F_2, F_3 фигуралargнинг умумий нуқтасини A_4 деб белгилаймиз, яъни $F_2 \cap F_3 \cap F_4 = A_1$; $F_1 \cap F_3 \cap F_4 = A_2$; $F_1 \cap F_2 \cap F_4 = A_3$; $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = A_4$. Бунда учта ҳол бўлиши мумкин.

1-ҳол. A_1 , A_2 , A_3 , A_4 нуқталар қаварик тўртбурчакнинг учлари бўлсин. У ҳолда унинг диаганалларининг кесишган нуқтасини М билан белгиласак, A_2, A_3, A_4 нуқталар F_1 фигурага тегишли бўлгани учун М нуқта қам F_1 га тегишли. Худди шунингдек М нуқтанинг F_2, F_3, F_4 фигураларга тегишли эканлигини қам кўрсатиш мумкин, яъни $F_1, F_2,\ F_3$ ва F_4 фигуралар умумий М нуқтага эга.

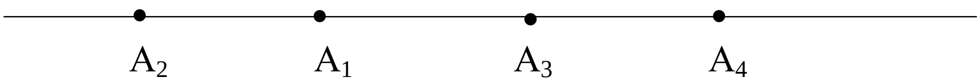


8-расм.

2-ҳол. Нуқталарнинг учтаси, айтайлик A_1, A_2, A_3 учбурчак учлари, A_4 эса унинг ичида ётади, акс ҳолда 1-ҳол юз беради. A_1, A_2, A_3 нуқталар F_4 фигурага тегишли , шунинг учун $A_1A_2A_3$ учбурчак F_4 фигурага тегишли, яъни $A_4 \in F_4$.

$F_1, F_2,\ F_3,\ F_4$ фигуралар умумий A_4 нуқтага эга.

3-ҳол. Барча нуқталар бир тўқри чизиқда ётади. Айтайлик , A_1 ва A_3 нуқталар A_2, A_4 кесмага тегишли бўлсин ,



9-расм.

у ҳолда A_1 ёки A_3 нуқта фигураларнинг барчасига тегишли бўлади, яъни умумий нуқтаси.

Тасдиқ н= к учун, яъни к та фигура учун тўғри деб фараз қилиб, н=к+1 та фигура учун тўғрилигини исботлаймиз.

Берилган фигураларни $F_1, F_2, \dots, F_{k+1}$ орқали белгилаймиз. F_{k+1} билан $F_1,\ F_2, \dots, F_k$ фигураларнинг кешишмаси мос равишда Φ_1, Φ_2 ,... , Φ_k бўлсин ,яъни $F_{k+1} \cap F_i$ =Фи , (и=1 ,… ,к) F_1, $F_2, \dots, F_{k+1}$ фигураларнинг ихтиёрий тўрттаси умумий нуқтага эга бўлгани учун ҳосил бўлган $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ нуқтага эга . Индукция фаразига кўра $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ фигуралар умумий нуқтага эга . Бу нуқта $F_1, F_2, \ldots, F_{k+1}$ фигураларга ҳам тегишли , яъни умумий нуқтаси . Демак , тасдиқ тўғри.

Агар фигураларга қўшимча шарт қўйилса , у ҳолда қуйидаги теорема ўринли.

Текисликда ихтиёрий сондаги чегараланган қавариқ фигуралар берилган бўлиб , уларнинг ихтиёрий учтаси умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда барча фигураларга тегишли бўлган нуқта мавжуд бўлади.

10-масала. Текисликда узунликлари бирга тенг 1984 та кесма шундай жойлаштирилганки, уларнинг барчаси бир тўғри чизиқда ётмайди ва ихтиёрий учтаси умумий нуқтага эга. Бу кесмаларнинг барчасига тегишли нуқта мавжудлигини исботланг.

Бу теорема Хелли теоремасининг хусусий ҳолидир, чунки кесмалар чегараланган фигуралардир.

12-масала. а,б,с сонлар $A_0B_0C_0$ учбурчакнинг тамонлари бўлсин. Ҳар қандай н натурал сон учун $a_n = \frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}, b_n = \frac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2}, c_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$

a_n, b_n, c_n лар қандайдир учбурчакнинг тамонлари бўлишини исботланг. Бунда ҳосил бўлган учбурчаклар ҳосилавий учбурчаклар деб аталади. Ҳосилавий учбурчакларнинг периметрлари п=а+б+с га тенг бўлади.

Исбот: а,б,с сонлари $A_0B_0C_0$ учбурчакнинг тамонлари бўлгани учун учбурчакнинг мавжудлик шарти ўринли.

н=1 учун $|a_1 - в_1| < c_1 < a_1 + b_1$ эканлигини исботлаймиз.

$$|a_1 - b_1| = \left|\frac{b_0 - a_0}{2}\right| = \left|\frac{a_0 - b_0}{2}\right| < \frac{1}{2}c_0 < \frac{a_0 + b_0}{2} = c_1 < c_1 + c_0 = \frac{a_0 + b_0 + 2c_0}{2} = \frac{a_0 + c_0}{2} +$$

$$+\frac{b_0 + c_0}{2} = a_1 + b_1,$$ ya’ni $|a_1 - b_1| < c_1 < a_1 + b_1$.

н=к тўғри деб фараз қилиниб,н=к+1 учун тасдиқнинг тўғрилигини исботлаймиз. Фаразимизга кўра a_k, b_k, c_k сонлари A_k, B_k, C_k учбурчакнинг тамонлари бўлгани учун $|a_k - b_k| < c_k < a_k + b_k$ бўлади. Натижада,

$$|a_{k+1} - b_{k+1}| = \left|\frac{b_k - a_k}{2}\right| < \frac{1}{2}c_k < \frac{a_k + b_k}{2} = c_{k+1} < c_{k+1} + c_k = \frac{a_k + b_k + 2c_k}{2} =$$

$$= \frac{a_k + c_k}{2} + \frac{b_k + c_k}{2} = a_{k+1} + b_{k+1} \text{ ya'. } |a_{k+1} - b_{k+1}| < c_{k+1} < a_{k+1} + b_{k+1} \quad .$$

Демак, $a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}$ сонлари қандайдир $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}$ учбурчакнинг тамонлари бўлади. Умуман ҳар қандай н натурал сон учун a_n, b_n, c_n сонлар қандайдир учбурчакнинг тамонлари бўлади. Энди

$$P_n = \mathrm{p} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$$

еканлигини кўрсатамиз.

$$p_n = a_n + b_n + c_n =$$

$$= \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = p_{n-1}.$$

Демак , $p_n = p_{n-1} = ... = p_2 = p_1 = p = a + b + c.$

13-масала. Ихтиёрий 3 таси бир тўғри чизиққа тегишли бўлган н (н≥3) та нуқта берилган. Бу нуқталарнинг барчаси бир тўқри чизиқда ётишини исботланг.

Исбот: н=3 учун тасдиқ тўғри, чунки ихтиёрий 3 таси бир тўғри чизиқда ётади. н=4 учун ҳам тасдиқ тўғри, чунки A_1, A_2, A_3 нуқталар ётган тўғри чизиқ A_2, A_3, A_4 нуқталар ётган бир тўғри чизиқдан фарқли бўлса, A_2,A_3 нуқталар орқали 2 та тўғри чизиқ ўтади, аммо тўғри чизиқ аксиомасига кўра A_2, A_3 нуқталар орқали битта тўғри чизиқ ўтади.

н=к учун тасдиқ тўғри деб фараз қилиб, н=к+1 учун тасдиқнинг тўғрилигини исботлаймиз. к+1 та нуқтадан биттасини оламиз. қолган к та фаразимизга кўра бир тўғри чизиқда ётади. Агар олинган нуқта к та нуқта ётган тўғри чизиқда ётмаса, у ҳолда 2 та (олинган нуқта ва тўғри чизиқда ётган к та нуқтадан бири) нуқта бошқа бир тўғри чизиқда ётади. Бу эса шартга зид. Демак, к+1 та нуқталарнинг барчаси бир тўғри чизиқда ётади, яъни тасдиқ тўғри .

14-масала. Кортон қоғоздан бир хил радиусли доирачалар қирқиб олинди.Улар доиравий стол устига шундай жойлаштирилганки, қўшни доирачалар уриниши мумкин, лекин бири 2-сининг устига тушмайди. Шу доирачаларни тўрт хил ранг билан (қўшни доирачалар бир хил бўлган) бўяш мумкинлигини исботланг.

Исбот: н$\leq$ 4 учун тасдиқ тўғри, чунки доирачалар сони ранглар сонидан ортиқ эмас.

н=к учун тасдиқ тўғри деб фараз қилиб, н=к+1 учун тўғрилигини исботлаймиз.

Доиравий стол устига жойлаштирилган доирачаларнинг радиуслари бир хил бўлгани учун ҳар бир доирача кўпи билан 6 та доирача билан уриниши мумкин. Бундан доиравий стол устига жойлаштирилган к+1 та доирачалар орасида фақат 3 таси билан уринувчи камида битта доирача мавжудлиги келиб чиқади. Шу доирачадан бошқа доирачалар сони к та бўлгани учун, уларни фаразимизга кўра тўрт хил ранг билан бўяш мумкин. Қолган битта доирача фақат 3 та доирача билан урингани учун, уни шу учтасининг рангидан фарқ қилувчи ранг билан бўяш мумкин. Демак к+1 та доирачаларни ҳам тўрт хил ранг билан бўяш мумкин, яни тасдиқ тўғри [17].

Геометрик исботлашда индуксиянинг тадбиқлари.

Ҳар доим исботлашларни аниқ ва қулай усуллар орқали исботлаш янада самара бериши маълум. Бунда индуксия методи яна қўл келади. Геометрик исботлашларни тадбиқларига доир бир нечта мисоллар кўрайлик.

4-мисол: Радиуси Р га тенг бўлган айланада томони a_{2^n} бўлган $2^н$ бурчак чизилган. Кўпбурчакнинг томонини топинг.

Ечиш: 1^0 н=2 бўлганда $2^н$ бурчак квадрат бўлади. У ҳолда томони

$а_4 = Р\sqrt{2}$

$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_{2n}^2}{4}}}$ юқоридаги формулага кўра, мунтазам саккиз бурчакнинг томони $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ мунтазам ўнолти бурчакнинг томони $a_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ мунтазам 32 бурчакнинг томони $a_{16} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ га тенглигини топамиз.

Бундан келиб чиқиб фараз қиламизки айланага ички чизилган мунтазам $2^н$ бурчак ихтиёрий н=2 да қуйидагига тенг.

$$a_{2^{n+1}} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

(6)

2^0 Айтайлик ички чизилган мунтазам $2^н$ бурчакнинг томонини топиш. (6) формула билан ифодалансин. (6) формулани иккилантришдан қуйидагига эга бўламиз.

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - R^2\frac{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}{4}}} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

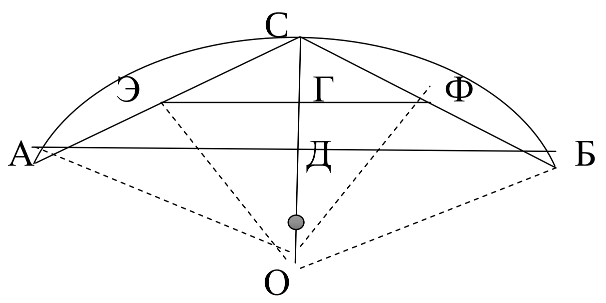
Бундан (6) формула ихтиёрий н лар учун тўғри эканлиги келиб чиқади. (6) формуладан келиб чиқадики, радиуси Р га тенг бўлган айлана узунлиги С=2πР н нинг чексиз қиймати

$$2^n R\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$$

ифода лимитига тенг, бундан

$$\pi=\lim_{n\to\infty}2^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=\lim_{n\to\infty}2^{n}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$$

5-мисол. Радиуси $р_н$ ва $Р_н$ переметри П га тенг мунтазам $2^н$ бурчакка ички ва ташқи чизилган айлана радиусларини ҳисоблашни кўрсатиш керак.



10-расм.

Ечиш. 1^0 $\mathrm{r}_2=\frac{\mathrm{P}}{8}$ $\mathrm{R}_2=\frac{\mathrm{P}\sqrt{2}}{8}$

2^0 (А) $р_н$ ва $Р_н$ ни билган ҳолда 2^{n+1} бурчакка ички ва ташқи чизилган айлана радиуслари r_{n+1} ва R_{n+1} ни ҳисоблаймиз.

АБ переметри П га тенг мунтазам $2^н$ бурчакнинг томони О маркази С-АБ ёйи ўртаси Д-АБ ватар ўртаси бўлсин. Яна ЭФ $-$ ΔABC нинг ўрта чизиғи Г унинг ўртаси бўлсин.

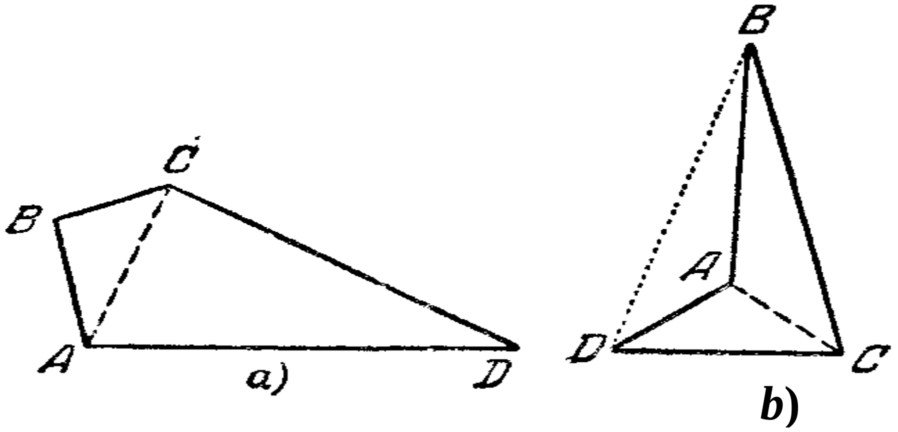
Демак,

$$\angle EOF=\angle EOC+\angle FOC=\frac{1}{2}\angle AOC+\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB.$$

у ҳолда радиуси ОЭ га тенг айланага ички чизилган мунтазам $2^{н+1}$ бурчак томони ЭФ га тенг.

6-мисол. н бурчак ўзининг кесишмайдиган диагоналлари орқали нечта учбурчакка ажралиши мумкин? (кўпбурчак мунтазам бўлиши шарт).

Ечиш. 1^0 учбурчак учун бу сон 1 га тенг. (учбурчакка бирорта ҳам диагонал ўтказиш мумкин эмас) Тўртбурчак учун бу сон 2 га тенг. (а ва б-расмлар)



11-расм.

2^0 Фараз қиламиз ҳар бир к бурчак, к<н кесишмайдиган диагоналлар орқали к-2 та учбурчакка ажралади. (қандай бўлишидан қатъий назар) A_1 A_2 ,… , A_n н бурчакнинг бўлинишини кўрамиз. $A_1A_к$ бу бўлинишнинг диагоналларидан бири бўлсин. У н бурчакни $A_1A_2 \dots A_k$ к бурчак ва $A_1A_kA_{k+1}\dots A_n$ (н-к+2) бурчакка ажратади. Қилинган фарамиздан келиб чиқадики, учбурчакларнинг умумий сони

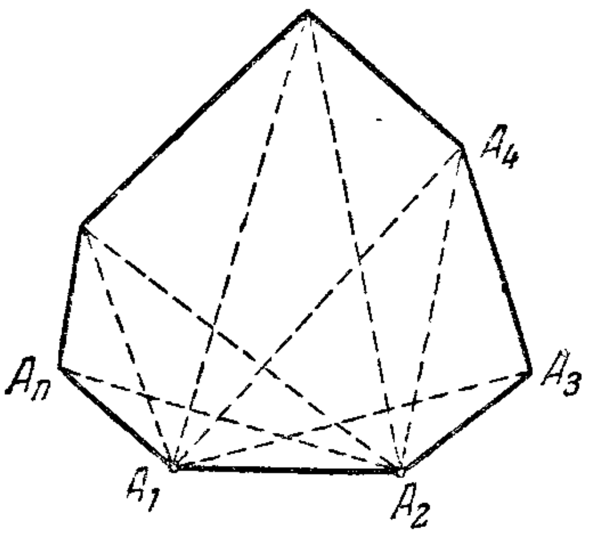
$$(k-2)+[(n-k+2)-2]=n-2$$

га тенг. Демак, тасдиғимиз барча н лар учун исбот бўлади.

7-мисол. Мунтазам н бурчакни кесишмайдиган диагоналлар орқали ажраладиган учбурчакларнинг П(н) сонини аниқлаш қоидасини кўрсатиш керак.

Ечиш. 1^0 учбурчак учун бу сон аниқ: П(3)=1

2^0 фараз қиламиз П(к) к<н учун аниқлаганмиз у ҳолда П(н) нимага тенг? Бунинг учун A_1A_2 ... $A_н$ қаварик н бурчакни қараймиз. (4-расм)



12-расм.

Бўлинишда A_1A_2 томон бирор бир учбурчакнинг томони бўлади. Бу учбурчакнинг учинчи учи $A_3, A_4, \ldots, A_н$ нуталарнинг ҳар бири билан устма-уст тушиши мумкин, қайсики бу нуқта A_3 бўлиши ҳам мумкин. Бунда учбурчакка бўлинишлар сони П(н-1) га тенг. Агар бу нуқта A_4 билан устма-уст тушса, A_1 A_4 $A_5 \ldots A_н$ бурчакнинг (н-2) та бўлишида учбурчаклар сони П(н-2)=П(н-2)П(3). Агар A_5 билан устма-уст тушса П(н-3)П(4). Шундай қилиб биз қуйидаги боғланишга келамиз.

П(н)=П(н-1)+П(н-2)П(3)+П(н-3)П(4)+…+П(3)П(н-2)+П(н-1).

(7)

Бу формула ёрдамида қуйидагига эга бўламиз.

$$P(4) = P(3) + P(3)$$

$$P(5) = P(4) + P(3)P(3) + P(4) = 5$$

$$P(6) = P(5) + P(4)P(3) + P(3)P(4) + P(5) = 15$$

$$P(7) = P(6) + P(5)P(3) + P(4)P(4) + P(3)P(5) + P(6) = 42$$

$$P(8) = P(7) + P(6)P(3) + P(5)P(4) + P(4)P(5) + P(3)P(6) + P(7) = 132$$

Эслатма (7) формула ёрдамида ихтиёрий н учун

$$P(n) = \frac{2(2n-5)!}{(n-1)!\,(n-3)!}$$

га тенг.

8-мисол. Қаварик н бурчак ўзининг ҳеч бир учтаси бир нуқтада кесишмайдиган диагоналлари орқали нечта қисимга бўлинишини топинг?

Кўрсатма қававарик $A_1,A_2,\ldots,A_нA_{н+1}$ н+1 бурчак ва $A_1A_нA_{н+1}$ учбурчакка айланади. A_1 $A_2\ldots$ $A_н$ н бурчакнинг диагоналлар ёрдамида бўлишлар сони Ф(н) маълум ддеб ҳисоблайлик. Энди $A_{н+1}$ учи устма-уст тушганда қанча қисм қўшилишини ҳисоблаймиз.

Шундай қилиб (2) ва (5) формула ёрдамида

$$F(n+1) = F(n) + (n-1) + 1(n-2) + 2(n-3) + \cdots + (n-3)2 + (n-2$$

ни топамиз. (8-9) қуйидаги кўринишда қайтатдан ёзиш мумкин:

$$F(n+1) = F(n) + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = F(n) + \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{3} - 1$$

Ф(н),Ф(н-1),…,Ф(4) ларнинг қийматини қўшиб ва (2),(3),(4), формулаларни қўллаб

$$F(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$$

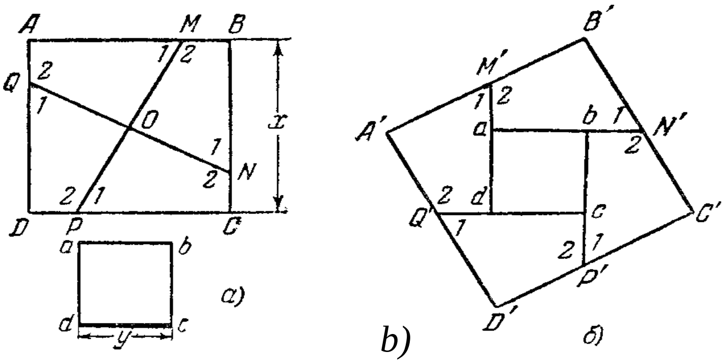
ни ҳосил қиламиз.

Ясашга доир индуксиянинг тадбиқлари.

Ясашга доир масалаларда индуксияни тадбиқ қилиш масала ечишни янада осонлаштиради. Бунга қуйидаги мисолларни келтириш мумкин.

9-мисол. Ихтиёрий н та квадрат берилган. Уларни шундай қисмларга бўлиш керакки, натижада бу қисмлардан янги квадрат ҳосил бўлишини исбот қилиш керак.

Ечиш. 1^0 н=1 да бизнинг тадбиғимиз учун исботнинг ҳожати йўқ. н=2 да ҳам тасдиғимиз тўғри бўлишини исбот қиламиз. Берилган АБСД ва абсд квадратнинг томонини мос равишда х ва й; х $\geq$ й орқали белгилаймиз. АБСД квадратнинг томонларидан АМ=БН=СП=ДҚ=$\frac{x+y}{2}$ бўлакларни оламиз. Бу квадратни МП ва НҚ тўғри чизиқлар ёрдамида бўлакларга ажратамиз. Бундан кўриш мумкинки, бу тўғри чизиқлар квадратнинг О марказида тўғри бурчак остида кесишади ва квадратни тўртта тенг қисмларга ажратади. Бу бўлакларни 5б-расмдагидай қилиб қўямиз.



13-расм.

Олинган шакл ҳам квадрат бўлади, чунки $М^1$,$Н^1$,$П^1$,$Қ^1$ нуқталардаги бурчаклар

$\angle А^1, Б^1, С^1, Д^1$ тўғри бурчаклар ва $А^1Б^1=Б^1С^1=С^1Д^1=Д^1А^1$.

2^0 Фараз қилайлик бу тасдиғимиз н квадратлар учун исботланган. Энди $К_1,К_2,\dots,К_н,К_{н+1}$ н+1 та квадрат берилган бўлсин.

Бу квадратлардан ихтиёрий иккитасини, айтайлик, $К_н$ ва $К_{н+1}$ ни танлаб оламиз. 1^0 масалада кўрсатилганидек бу квадратлардан бирини бўлакларга бўлиб ва бу бўлакларни қайтадан бирлаштириб янги $К^1$ квадрат олиш мумкин. Худди шундай берилган $К_1,К_2,\dots,К_{н-1},К^1$ квадратларни бўлакларга бўлиб, бу бўлаклардан янги квадрат ҳосил қилиш мумкин. Масала исботланди.

10-мисол: Эйлер теоремаси.

Ихтийрий харита томонлари сонини $с$ чегарасини $л$ ва узунлигини n билан белгилаймиз.

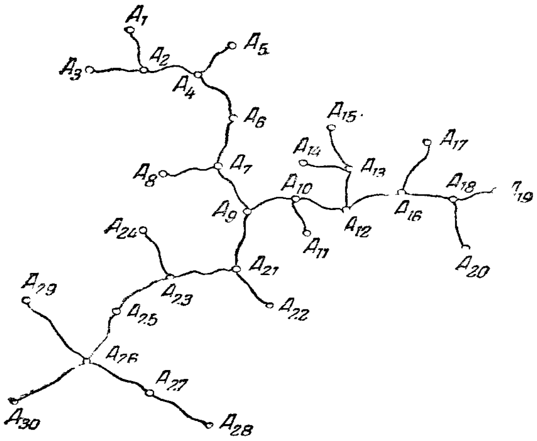
У ҳолда $с+n=л+2$ бўлишини исботланг.

Исбот. $л$ чегарали харита учун индуксия қўллаймиз.

1^0 $л=0$ бўлсин у ҳолда $с=1$ $n=1$ Бу ҳолда $с+n=л+2$

2^0 фараз қиламиз, бу теорема н чегарали ихтиёрий харита учун ўринли бўлсин. $л=н+1$ чегарали $с$- томонли n-узунлик харитани қараймиз. Иккита ҳол бўлиши мумкин.

а) Хаританинг ихтиёрий иккита учларини туташтирувчи харита чегараси бўйлаб ягона йўл мавжуд. (бу йўлларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси картанинг туташиш чизиғи бўлади). Бу ҳолда харита бирорта ҳам ёпиқ контурга эга бўлмайди ва 9-расмдаги кўринишни олиши келиб чиқади.

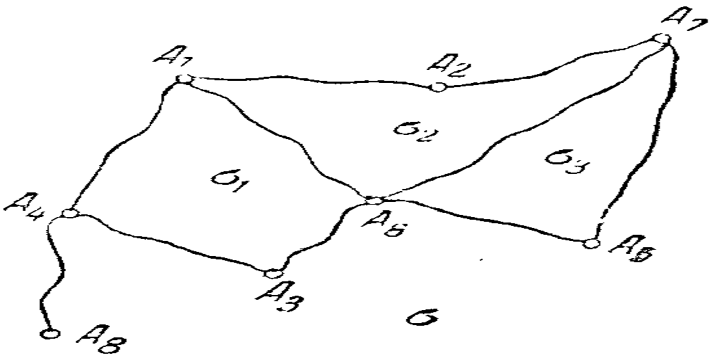


14-расм.

бунда $с=1$ бўлади. Бундай харитада битта чегарага тегишли бўлган ҳеч бўлмаганда битта учи мавжуд (9-расимдаги A_1 учни биз чекка учи деб атаймиз). Ҳақиқатан хаританинг ихтиёрий учини оламиз. Агар у чекка нуқта бўлмаса, у ҳолда у нуқта ҳеч бўлмаганда чегаранинг икки нуқтаси бўлиб хизмат қилади. Бу чегараларнинг биридан иккинчи учига ўтамиз. Агар бу уч чекка бўлмаса, у ҳолда у қандайдир бошқа чегара бўлиб хизмат қилади, бу чегара бўйлаб унинг иккинчи охирига борамиз ва ҳоказо. Харита, шартимиз бўйича ёпиқ контурларга эга эмас, биз олдин кўрган чекка нуқталарга қайтмасдан, охир оқибат шундай учга келамизки, бу нуқта чекка нуқта бўлади. Бу учни унинг чеккаларига эга бўлган ягона чегара билан йўқотиб янги харитани ҳосил қиламиз. $л^1 = л-1 = н$ $с^1 = с = 1$ $п^1 = п-1$

албатта бу янги карта боғлиқли бўлиб қолади. Индуксия фаразидан $с^1 + п^1 = р+з$ ни оламиз ва бундан $с+п=л+2$

б) Ҳеч бўлмаса битта йўл билан боғланган иккита уч мавжуд. (8-расм)



15-расм.

У ҳолда харитада бу учлардан ўтувчи бир нечта ёпиқ контур мавжуд. Бу контурнинг чегараларидан бирини йўқотиб (учинчисини йўқотмасдан) янги боғлиқликдаги харитани оламиз:

$л^1 = л\text{-}1 = н \quad с^1 = с\text{-}1 \quad п^1 = п$

Индуксия фаразида $л+2^1 = с^1 + п^1$ бунда $с+п=л+2$

15-масала. Агар *л-* учлар сони *л-*қирралар сони *с- қавариқ кўпбурчаклар граней бўлса* с+п=л+2 эканлигини исбот қилиш керак. (Эйлернинг кўпбурчаклар ҳақидаги теоремаси).

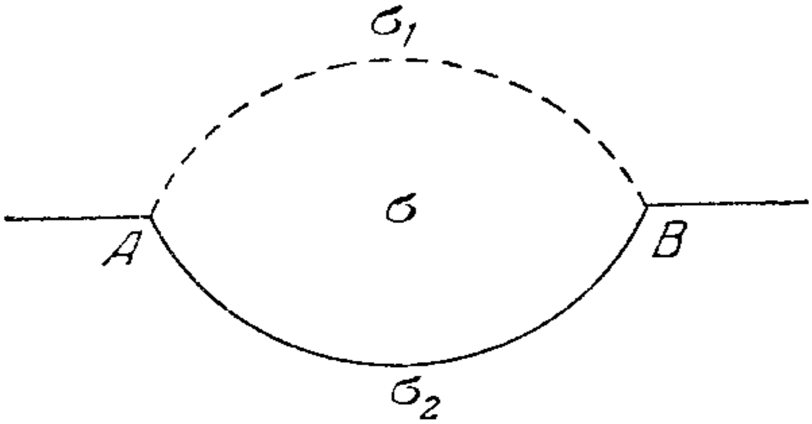
Кўрсатма. Кўпбурчакни имкони борича катта радиусли шар ичига жойлаштрамиз ва шар марказидан (бу марказ кўпбурчак ичига жойлашган деб ҳисоблаймиз). Кўпбурчакнинг барча нуқталарини шар сиртига кўчирамиз. Сферада ҳосил бўлган хаританинг бирорта ҳам чегарага тегишли бўлмаган нуқтасини тексликка, қайсики бу текслик нуқтага проексиялаймиз тескари равшда сферага диаметрик тегишли (Стереографик проексия). Олинган текис харита учун Эйлер теоремасини қўллаш мумкин.

11-мисол. (5 ранг ҳақидаги теорема). Ихтиёрий харитани 5 хил ранг билан бўяш мумкин.

Исбот. 1^0 Томони бештадан ошмайдиган харита учун бу тасдиқ равшан.

2^0 Фараз қилайлик давлат *н-1* га ёки *н* га тенг бўлган ихтиёрий нормал харита учун бу тасдиқ ўринли ва давлат *н+1* га тенг бўлган *с* харитани қараймиз 13-мисолда кўрсатилганидек, *с* харита чегаралари бешдан ошмайдиган ҳеч бўлмаганда битта давлатга эга. Содир бўлиши мумкин бўлган барча ҳолларни қараймиз.

а) σ иккита чегарага эга бўлсин. (22-расмга қаранг)

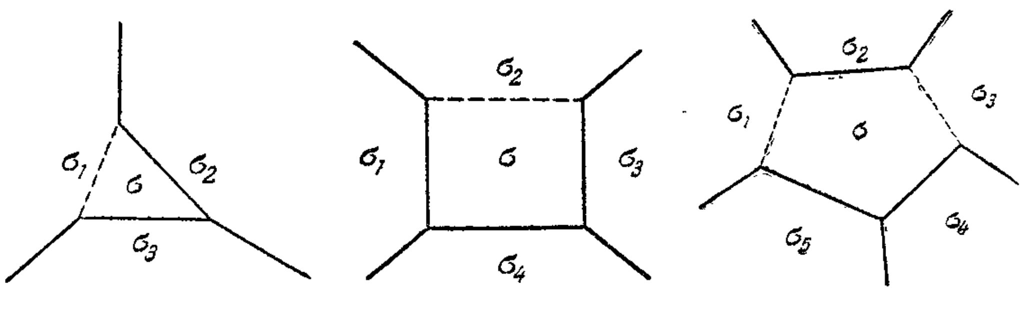


16-расм.

σ_1 ва σ_2 лар σ билан қўсни бўлсин σ_1 ва σ_2 давлатларни бирлаштриб C^1 нормал харитани ҳосил қиламиз, бу харитада давлатлар сони *н* га тенг. Индуктив фаразга кўра C^1 нормал харитани беш хил ранг билан тўғри бўяш мумкин. $\sigma_1^1 = \sigma + \sigma_1$ ва $\sigma_2^1 = \sigma_2$ давлатлар шу ранглардан қандайдир иккитаси билан бўялган бўлади. σ давлатни қўзғатиб уни қолган учта ранглардан бири билан қайтатдан бўяш мумкин.

б) σ учта чегарага эга (24а-расм) σ_1 ва σ ни бирлаштирамиз. Олинган c^1 харитани беш хил ранг билан бўяб, биз кейин σ давлатни ҳам қолган икки хил ранг билан бўяшимиз мумкин, қайсики бу ранглар $\sigma_1^1 = \sigma + \sigma_1$ $\sigma_2^1 = \sigma_2$ $\sigma_3^1 = \sigma_3$ давлатларни бояшда ишлатилмаган.

с) σ тўртта чегарага эга бўлсин (24б-расм). Шундай иккита бир бири билан устма-уст тушмайдиган иккита давлатни топиш мумкинки, улар σ га ёнма –ён бўлсин.



а) б) с)

17-расм.

Бу давлатлардан бирини масалан σ_2 ни σ га бирлаштриб, индуктив фаразга асосан беш хил ранг билан тўғри бўяб бўладиган *н* давлатдан иборат бўлган *c*[1] харитани ҳосил қиламиз. Шунинг билан $\sigma_1^1 = \sigma_1$ $\sigma_2^1 = \sigma_2 + \sigma$ $\sigma_3^1 = \sigma_3$ ва $\sigma_4^1 = \sigma_4$ мамлакатлар беш хил мумкин бўлган рангдан қандайдир тўрттасини олади (ёки камроқ, агар σ_1^1 ва σ_2^1 устма-уст тушса ёки бир хил ранг билан бўялган бўлса) σ давлатни тиклаб, уни беш хил ранг билан бўяшимиз мумкин.

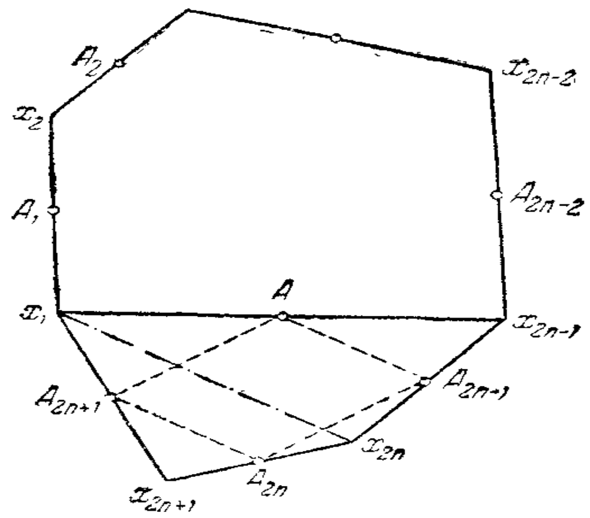
д) σ бешта чегарага эга бўлсин. (17с-расм) 16-мисолда кўрсатилганидек, бир-бири билан чегарадош бўлмаган σ га қўшни бўлган иккита σ_1 ва σ_2 давлатни топиш мимкин. Бу давлатларни σ га туташтириб *н-1* давлатга эга бўлган нормал $c^{ИИ}$ харитага эга бўламиз. Индуктив фаразга асосан $c^{ИИ}$ беш хил рангга тўғри бўяш мумкин. Шу туфайли $\sigma_1^1 = \sigma_1 + \sigma + \sigma_3$, $\sigma_2^{II} = \sigma_2$ $\sigma_4^I = \sigma_4$ $va\ \sigma_5^I = \sigma_5$ давлатлар шу беш хил ранглардан қандайдир тўрттасини олади. σ давлатни тиклаб, уни беш хил рангга бўяшимиз мумкин.

12-мисол. Тексликда *2н+1* та нуқта берилган. Бу нуқталар томонларининг ўртаси бўлган (*2н+1*)- бурчакни ясаш керак.

Ечиш. 1^0 *н=1* бўлганда масала томонларининг ўрталари берилган учбурчакни ясашга келтирилади ва унинг ечими осон. (берилган учта нуқталарнинг ҳар бирдан ҳар икки нуқтани бирлаштирувчи тўғри чизиқга параллел бўлган тўғри чизиқ ўтказиш етарли).

2^0 томонларининг ўрталари берилган (*2н-1*) бурчакни ясаш мумкин. Айтайлик A_1, A_2 , … , $A_{2н+1}$ *2н+1* та нуқта берилган бўлиб улар изланаётган x_1 ,x_2 , … , $x_{2н+1}$ бурчакнинг томонлари ўрталари бўлсин.

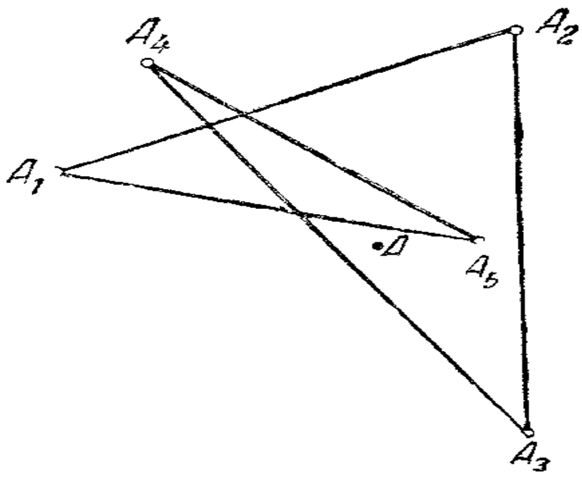
x_1 ,$x_{2н-1}$,$x_{2н}$,$x_{2н+1}$ тўртбурчакни қараймиз (18-расм).



18-расм.

$A_{2н-1}$,$A_{2н}$, $A_{2н+1}$ нуқталар учта $x_{2н-1}x_{2н}$, $x_{2н}x_{2н+1}$, $x_{2н+1}x_1$ томонларининг ўрталари бўлсин. Тўртинчи x_1 $x_{2н-1}$ томоннинг ўртаси А бўлсин. $A_{2н-1}A_{2н}A_{2н+1}A$ тўртбурчак параллелограм. (исботлаш учун x_1 $x_{2н}$ тўғри чизиқни ўтказиш ва $x_1x_{2н+1}x_{2н}$ ва $x_1x_{2н-1}x_{2н}$ учбурчакларни қараш етарли, қайсики $A_{2н}A_{2н+1}$ ва $A_{2н-1}A$ кесмалар ўрта чизиқлари). Бизга $A_{2н-1}A_{2н}$ ва $A_{2н+1}$ нуқталар маълум, у ҳолда параллелога рамнинг тўртинчи учи А ни осонгина ясаш мумкин. A_1 ,A_2 , … , $A_{2н+1}$, А нуқталар x_1 ,x_2 , … , $x_{2н-1}$ (*2н-1*) бурчакнинг томонлари ўрталаридир, қайсики фаразга кўра уни ясашимиз мумкин. Бизга фақат $A_{2н+1}$ ва $A_{2н-1}$ нуқталарда тенг иккига бўлинадиган $x_1x_{2н+1}$ ва $x_{2н}$ $x_{2н-1}$ кесмаларни ясаш қолди (x_1 ва $x_{2н-1}$ нуқталар аллақачон аниқланган).

Томонлари биринчиларини кесмайдиган кўпбурчак бўлганда равшанки, ташқи ва ички нуқталарни қараш керак. Умумий ҳолда бу қуйидаги ҳолатда ўз маъносини йўқотади.



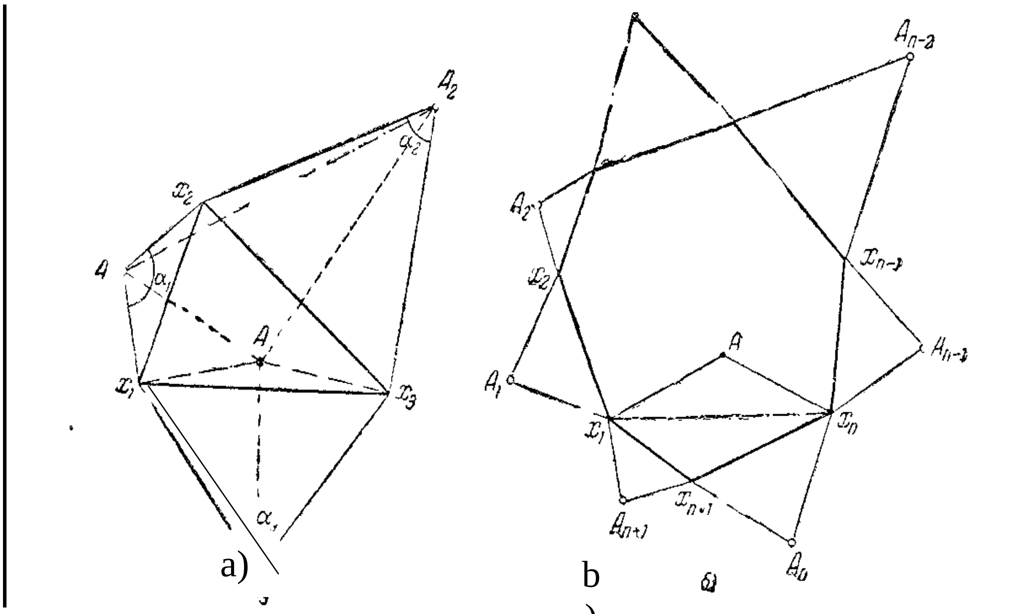
19-расм.

Масалан: А нуқтанинг 19-расмда кўпбурчакнинг ичи ёки ташқарисида жойлашганини айтиб бўлмайди. Бунинг ўрнига қуйидагиларни бажарамиз. А1 ,А2 , … , Ан кўпбурчак берилган бълсин. Бунинг учун йўналишни кўпбурчак учларидан ўтадиган қиламиз (айтайлик A_1 ,A_2 , … , $A_н$ тартибда). Кўпбурчакнинг томонларидан бири айтайлик A_1A_2 томонидан $A_1БA_2$ учбурчак ясалган. Агар учбурчакнинг учларидан ўтиш йўналиши $A_1A_2Б$ тартибда, яъни кўпбурчак учларидан ўйиш йўналишига тескари (бири соат стрелкаси бўйича, иккинчиси унга тескари) бўлса, у ҳолда учбурчак кўпбурчакка нисбатан ташқи томонга юзланган дейишимиз мумкин, аксинча агар кўпбурчак ва учбурчак учларидан ўтиш йўналиши устма-уст тушса айтиш мумкинки, у кўпбурчакка нисбатан ичкарига юзланган.

13-мисол. Текисликда *н* та нуқта берилган. *н* бурчакни шундай ясаш керакки бу кўпбурчакнинг томонлари тенг томонли учбурчакларнинг асослари бўлсин. Бу учбурчакларнинг учлари берилган *н* нуқталар бўлиб бу учлардаги бурчакларни $\alpha_1 , \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Ечиш, $\alpha_1 , \alpha_2, \dots, \alpha_n$ бурчаклардан баъзи бирлари 180^0 дан катта деб ҳисоблаймиз. $\alpha < 180^0$ бўлганда тенг томонли учбурчак кўпбурчакка нисбатан ташқарида юзланган, $\alpha > 180^0$ да эса ички томонга (чунки бу ҳолда учдаги бурчак $360^0 - \alpha$ га тенг).

1^0 *н=3* бўлсн. Айтайлик, бу масала учлари x_1,x_2,x_3 бўлган изланаётган учбурчак учун ечилган бўлсин, бу ерда A_1,A_2,A_3 берилган учлар учбурчакнинг томонларида ясалган тенг томонли учбурчакни учларидаги бурчакари α_1 , α_2 , α_3 (38а- расм).



20а,б- расм

Текисликни A_1 нуқта атрофида α_1 бурчакка буриб (бу бурилишлар соат стрекасига тескари равишда бўлсин деб шарт қўямиз) x_1 уч x_2 учга ўтишини кўрамиз. A_2 нуқта атрофида α_2 бурчакка буришда эса x_2 уч x_3 учга ўтади. Кетма- кет бажарилган бу бурилишлар қандайдир А нуқта атрофида $\alpha_1 + \alpha_2$ бурчакка буришга тенг, яъни A_1 ва A_2 нуқта ҳамда $\alpha_1\ va\ \alpha_2$ бурчак бўйича қуйидагича ясаш мумкин. A_1 ва A_2 нуқталардаги A_1 , A_2 кесмада $\frac{\alpha_1}{2}$ ва $\frac{\alpha_2}{2}$ бурчакларни, бу бурчакларнинг икки томонлари кесишиш нуқтаси А, $\alpha_1\ va\ \alpha_2$ бурчакка буришнинг маркази бўлади. Шундай қилиб ҳал қилувчи буришда x_1 уч x_3 га ўтади. Демак, А нуқта атрофид $360^0 - (\alpha_1 + \alpha_2)$ бурчакка буришда x_3 уч x_1 га ўтади ва А нуқта x_1x_3 асосли тенг томонли учбурчакнинг учи бўлади, бу учдаги бурчак $360^0 - (\alpha_1 + \alpha_2)$ га тенг.

А ва A_3 нуқталар бўлиб, агар улар устма-уст тушмаса (агар $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \ = 360^0$ бўлгандагина шундай ҳол бўлади). x_1 x_3 томонни ясаш мумкин. Бунинг учун А A_3 кесмада иккала томони ҳам А ва A_3

нуқталардан чиқувчи $\frac{360^0-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$ ва $\frac{\alpha_3}{2}$ бурчакларни ясаймиз. Бундан сўнг x_2 учни ясаш қийин эмас. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3= \ =360^0\cdot k$ (яъни A нуқта A_3 нуқта билан устма-уст тушади) бўлганда ечим маънога эга эмас.

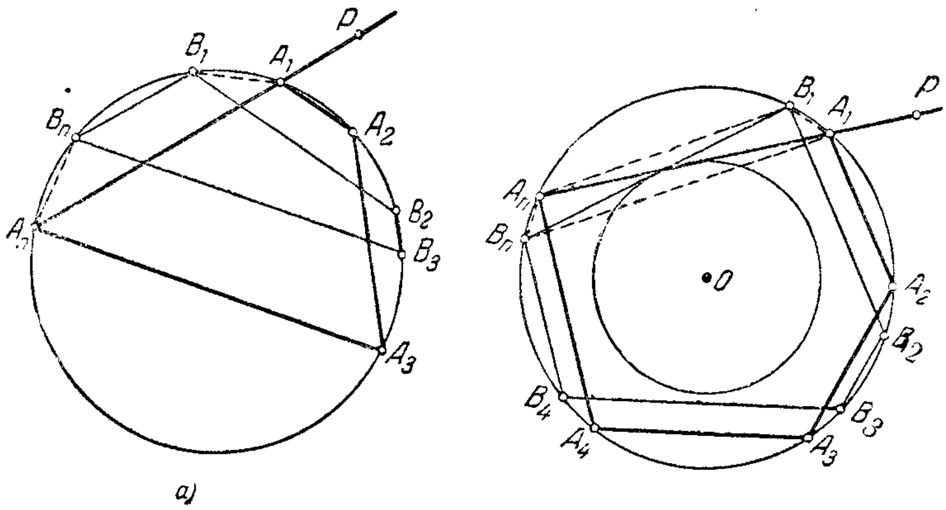
2^0 Фараз қиламиз, биз учлари билан *н* бурчак берилган ва унинг томонларида берилган учларида берилган бурчакли тенг томонли учбурчакни ясаб биламиз, энди A_1 , A_2, … , $A_н$ $A_{н+1}$ учли бўлган (*н+1*) бурчакни ясаш талаб қилинади, унинг томонларида $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\alpha_{n-1}$ бурчакли тенг томони учбурчаклар ясалган x_1,x_2,…,$x_н$, $x_{н+1}$ изланаётган (*н+1*) бурчак бўлсин, $x_1x_нx_{н+1}$ учбурчакни қараймиз. 1^0 да кўрилганидек, $A_н$ ва $A_{н+1}$ маълум учларида $x_н$ $A_н$ $x_{н+1}$ ва $x_{н+1}$ $A_{н+1}$ x_1 тенг томонли учбурчакларда $x_н$ $x_{н+1}$ ва $x_{н+1}x_1$ тамонларда тузилган $x_1Ax_н$ тенг томонли учбурчакнинг A учини топиш мумкин. Бу учбурчак x_1 $x_н$ диоганал ёрдамида қурилган бўлиб, бу учдаги бурчак $360^0-(\alpha_n+\alpha_{n+1})$ га тенг. шу билан масала A_1 , A_2, … , $A_н$ A учли ва томонларида тенг томонли учбурчаклар чизилган x_1,x_2,…,$x_н$ *н* бурчакни ясашга келади, тенг томонли учбурчакнинг учидаги бурчаклари $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$, $360^0-(\alpha_n+\alpha_{n+1})$ га тенг. Индуктив фаразга асосан x_1,x_2,…,$x_н$ *н* бурчакни ясаш мумкин ва изланаётган x_1,x_2,…,$x_н$ $x_{н+1}$ (*н+1*) ни ҳам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n=$ $=360^0\cdot k$ да масалани ишлаб бўлмайди ёки мавжуд эмас.[16]

14-мисол. Тексликда айлана ва *н* нуқталар берилган. Томонлари берилган нуқталардан ўтувчи *н* бурчакка ташқи айлана чизиш керак.

Ечиш. Бу ерда *н* томонли кўпбурчак учун индуксияни қўллаб бўлмайди, бунинг ўрнига *н* кўпбурчакни ясашнинг умумийроқ масалани кўриш керак, яъни бу кўпбурчакнинг *к* қўшни томонари *к* берилган нуқталардан ўтади, қолган *н-к* томонлари эса берилган тўғри чизиққа параллел (бу масала *н=к* масалани кўришда ўтади) ва индиксия *к* марта ўтказилади.

1^0 *к=1* да шундай масалага эга бўламиз. A_1 $A_н$ томони *П* нуқтадан ўтувчи *н* бурчакка айлана чизиш керак, қолган A_1 , A_2, … , $A_{н-1}$ $A_н$ *н-1* томонлар берилган $л_1, л_1, ..., л_{н-1}$ тўғри чизиқларга параллел.

Айтайик, масала ечилган ва изланаётган кўпбурчак ясалган (39а,б-чизма)



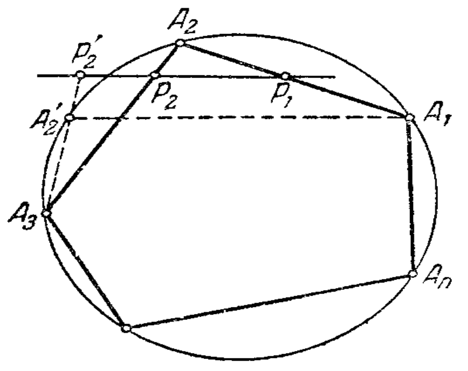
b

21а,б-чизма

Айланада ихтиёрий Б нуқтани оламиз ва $Б_1$, $Б_2$, …, $Б_н$ томонли кўпбурчакни унга ички чизмиз, яъни $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$, … ,$Б_{н-1}$,$Б_н$, томонлари мос равишда $л_1, л_1, ..., л_{н-1}$ тўғри чизиқларга параллел. У ҳолда $А_1Б_1$, $А_2Б_2$, … , $А_нБ_н$ ёйлар ўзаро тенг, аммо $А_1Б_1$ ва $А_2Б_2$ $А_2Б_2$ ва $А_3Б_3$ ва ҳоказо ёйлар айланада тескари йўналишга эга бўлади. Демак, *н* жуфт бўлганда $А_1Б_1$ ва $А_нБ_н$ ёйлар тескари яъни қарама-қарши йўналган ва $А_1Б_1А_нБ_н$ тўртбурчак $А_1А_н$ ва $Б_1Б_н$ тенг ёнли трапеция бўлади. Шунинг учун изланаётган кўпбурчакнинг $А_1А_н$ томони $Б_1$, $Б_2$, …, $Б_н$ *н* кўпбурчакнинг $Б_1Б_н$ томонига параллел бундан келиб чиқадики, бу ҳолда *П* нуқта орқали $Б_1Б_н$ га параллел бўлган тўғри чизиқ ўтказиш керак, шундан сўнг $А_1$, $А_2$, … , $А_н$ *н* бурчакнинг қолган учларини топиш мумкин.

н тоқ бўлганда $А_1Б_1$ ва $А_нБ_н$ ёйлар бир хил йўналишга эга ва $А_1Б_1А_нБ_н$ тўрбурчак $А_1Б_н$ ва $Б_1А_н$ асосли тенг ёнли трапеция бўлади. (39б-расм). Худди шундай трапецянинг $А_1А_н$ ва $Б_1Б_н$ диагоналлари тенг, у ҳолда *п* нуқтадан тўғри чизиқни шундай ўтказиш керакки, берилган айлана $А_1А_н$ ватарни кесиб ўтин, ёки айланага уринувчи тўғри чизиқни ўтказиш керакки, у берилганда концентрик ва $Б_1Б_н$ га тегишли уринувчи бўлсин.

2^0 Фараз қиламиз, айланага ички чизилган *н* бурчакни ясаш масаласини ишлаш мумкин. Бу *н* кўпбурчакнинг *к* та кетма-кет келган томонлари *к* та берилган нуқталардан ўтади, қолган *н-к* томонлари берилган тўғри чизиққа параллел. Энди айланага шундай *н* кўпбурчакни ички чизиш талаб қилинсинки унинг $А_1$ $А_2$, $А_2А_3$,…, $А_{к+1}$ $А_{к+2}$ *к+1* қўшни томонлари берилган $П_1$,$П_2$, …, $П_{к+1}$ *к+1* та нуқтадан ўтин, қолган *н-к-1* томонлари берилган тўғри чизиқларга параллел. Айтайлик, бу масала ҳал қилинган ечилган ва изланаётган н-бурчак ясалган. (22-расм)



22-расм

Бу кўпбурчакнинг $А_1А_2$ ва $А_2А_3$ томонларини қараймиз. $А_1$ уч орқали $П_1П_2$ га параллел $А_1А_2$ чизиқни ўтказамиз, бу тўғири чизиқни айлана билан кесишиш нуқтасини $А_2$ билан ва $П_2$ орқали $А_1А_3$ тўғири чизиқ билан $П_1П_2$ нинг кесишиш нуқтасини белгилаймиз.

$$\Delta P_1A_2P_2 \sim \Delta P_2^1P_2A_3\,, \text{ chunki } \angle A_2P_1P_2 = \angle A_2A_1A_2^1$$
$$= \angle A_2A_3A_2 \quad va \ \angle A_2P_2P_1 = \angle P_2P_2A_3$$

бундан

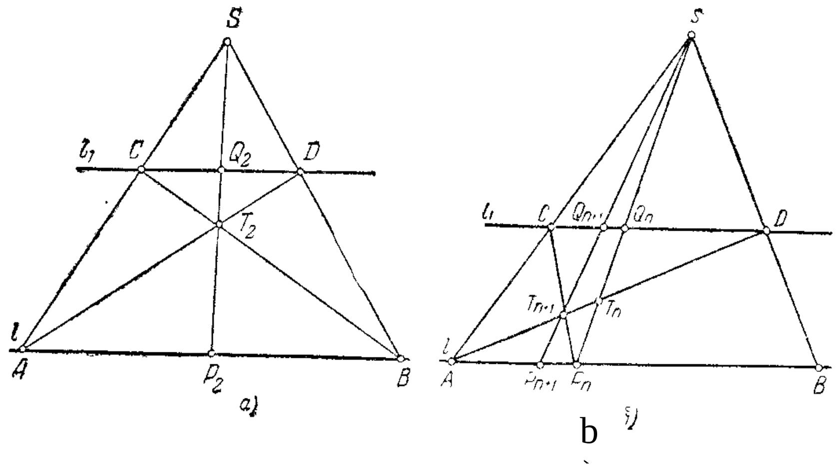
$$\frac{P_1P_2}{A_3P_2} = \frac{A_2P_2}{P_2P_2} \text{ va } P_2^1P_2 = \frac{A_3P_2 * A_2P_2}{P_1P_2}$$

Худди шундай, $А_3П_2$*$А_3П_2$ кўпайтма $П_2$ нуқта ва айланага боғлиқ. A_2 va A_3 нуқталарни танлашга боғлиқ эмас) у ҳолда бу аниқланган бўлиши мумкун. Шунинг учун $P_2^1P_2$ кесма узунлиги топилган ва демак, P_2 нуқта ясалган бўлиши мумкун. Шундай қилиб, бизга маълумки $A_1A_2^1A_3 \ldots A_n$ н бурчакнинг к та қўшни A_2^1 A_3 A_3A_4 …$A_{k+1}A_{k+1}$ томонларидан к та $П_2$, $П_3$ …, $П_{к+1}$ нуқталарда ўтади ва қолган *н-к* та $А_{к+2}$ $А_{к+3}$ … $А_н$ $А_1$ $A_1A_2^1$ томон маълум тўғри чизиқларга параллел. Индуктив фаразга кўра биз

$A_1A_2^1A_3 \dots A_n$ *н* бурчакни ясашимиз мумкин, шундан сўнг $A_1, A_2, \dots, A_н$ *н* бурчакни ясаш қийин эмас.

15-мисол. Иккита *л* ва *л₁* параллел тўғри чизиқлар берилган. Чизғич ёрдамида АБ кесмани танлаб олиб ва *л* тўғри чизиқни *н* та тенг бўлакларга бўлинг.

Ечиш. 1^0 *н=2* бўлсин С тексликнинг *л* ва *л₁* тўғри чизиққа тегишли бўлмаган ихтиёрий нуқтасини А ва Б нуқталар билан бирлаштирамиз (42а-расм)



23-расм.

ва *л₁* тўғри чизиқнинг АС ва БС тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарини С ва В билан белгилаймиз. АД ва БС тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини T_2 билан *л* ва CT_2 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини $П_2$ билан белгилаймиз. $П_2$ изланаётган нуқта эканлигини исбот қиламиз, ёки $AP_2 = \frac{1}{2}AB$

CT_2 ва *л₁* тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини $Қ_2$ билан белқилаймиз. $\Delta T_2P_2B \sim \Delta T_2Q_2C$ $\Delta ABT_2 \sim \Delta DCT_2$ $\Delta SAP_2 \sim \Delta SCQ_2$ $\Delta SAB \sim \Delta SCD$

бунда

$$\frac{P_2B}{Q_2C} = \frac{T_2B}{Q_2C} = \frac{AB}{CD} \qquad va \qquad \frac{P_2A}{Q_2C} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$$

дан

$$\frac{P_2B}{Q_2C} = \frac{T_2A}{Q_2C}$$

га тенг.

Шунинг учун $P_2A = P_2B$ ва $AP_2 = \frac{1}{2}AB$ бўлади.

2^0 Фараз қилайлик чизғич ёрдамида АБ кесмани танлаб олиб, шундай $П_н$ нуқтани топиш мумкинки, бунда $AP_n = \frac{1}{n}AB$ *л* ва *л₁* тўғри чизиқларнинг ташқарида ихтиёрий С нуқта оламиз ва $СП_н$ тўғри чизиқнинг АД ва *л₁* тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарини мос равишда $Т_н$ ва $Қ_н$ белгилаймиз (23б-расм).

($Т_{н+1}$ нуқта билан) АД ва СД тўғри чизиқ кесишиш нуқтаси бўлган $Т_{н+1}$ ни С билан бирлаштрамиз ва $СТ_{н+1}$ нинг *л* ва *л₁* тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарни $Қ_{н+1}$ ва $П_{н+1}$ нуқталар билан белгилаймиз.

$П_{н+1}$ изланаётган нуқта эканини исботлаймиз, ёки

$$AP_{n+1} = \frac{1}{n+1}AB.$$

Ҳақиқатан $СҚ_{н+1}Т_{н+1}$ ва $P_nP_{n+1}Т_{н+1}$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан $СТ_{н+1}Д$ ва $П_нТ_{н+1}А$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{P_{n+1}P_n}{CQ_{n+1}} = \frac{P_nT_{n+1}}{CT_{n+1}} = \frac{AP_n}{CD} \qquad (11)$$

Масаланинг қўйилиши:

1.Бу ташуншунчалар билан боғлиқ математик тасдиқларни математик индуксия методи билан исботланг.

1) қавариқ кўпбурчак ички бурчакларнинг йиғиндиси ва диагоналлари сони;

2) кўпёқли бурчакнинг текис бурчакларининг хоссалари;

3) тўғри чизиқ , текислик ва фазони қисмларга ажратиш;

4) айланаларнинг текисликни қисмларга бўлиши ;

5) текисликдаги қавариқ фигураларнинг умумий нуқтасининг мавжудлиги;

6) тегишли ғилдиракли системасининг айланиши;

7) ҳосилавий учбурчакларнинг мавжудлиги ;

8) нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши;

9) доирачаларни тўрт хил ранг билан бояш;

Ишни бажариш учун намуна

Масала. Текисликда н та бир хил кўринишдаги тишли ғилдираклар қуйидагича туташтирилган.

1-ғилдирак 2-ғилдиракка, 2- ғилдирак 3- ғилдиракка ва ҳоказо. н-ғилдирак 1- ғилдиракка тишлар орқали туташтирилган.Бундай ғилдираклар системаси айланиши мумкинми?

Ғилдираклар системаси айланиши учун 1- ғилдирак билан н - ғилдирак бир-бирига тескари ё`налишда айланиши керак. Тоқ ўриндаги ғилдираклар 1- ғилдирак йўналишида айлангани учун н жуфт сон бўлади , яъни ғилдираклар сони жуфт бўлса, ғилдираклар системаси айланади. Бу тасдиқни математик индукция методидан фойдаланиб исботлаш мумкин.

Исбот: н= 2 бўлса, ғилдираклар системаси айланади.

н=2к учун ғилдираклар системаси айланади деб фараз қилиб, н= 2к+2 учун ҳам ғилдираклар системасининг айланишини исботлаймиз.

1-ғилдирак соат стрелкаси йўналиши бўйича айланганда, фаразга кўра (2к)- ғилдирак соат стрелкасига тескари йўналишда айланади.(2к+1)-ғилдирак эса соат стрелкаси йўналишида, (2к+2)- ғилдирак соат стрелкаси тескари йўналишда айланади, яъни 1-ғилдирак соат стрелкаси йўналишида айланса, (2к+2)- ғилдирак унга тескари йўналишда айланади. Демак, ғилдираклар системаси айланади, яъни тасдиқ тўғри.

Назорат саволлари:

1.Баъзи геометрик тасдиқларни индукциядан фойдаланиб исботланг.

2.Кўпбурчаклар хақидаги баъзи теоремаларни тескари индукция методидан фойдаланиб исботланг.

3. Геометрияда ҳисоблашга доир масалаларда индуксиянинг тадбиқлари.

4. Геометрик исботлашда индуксиянинг тадбиқлари.

5. Ясашга доир индуксиянинг тадбиқлари.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

3 - Амалий машғулот:

Математик структура ва унинг модели, аксиомалари системалари.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш.

Математик структура ва унга доир мисоллар.

Бизга маълумки бўш бўлмаган $М_и$, $и=\overline{1,н}$ тўпламларнинг декарт $М_1*М_2* \ldots *М_н$ кўпайтмасидан олинган турли Δ_1 ва Δ_2 тўплам остилар, $М_и$ тўпламлар системасида икки турли муносабатни аниқлайди. Бу Δ_1 ва Δ_2 муносабатлар маълум хоссалари билан бир-биридан фарқ қилади, яъни $\Delta_1 \neq \Delta_2$. Агар биз $П(М_и * М_2 \ldots * М_н)$ билан $М_и * М_2 \ldots * М_н$ нинг барча тўплам остиларини белгилайлик. Агар $М_и$ лардан камида бирортаси чексиз тўплам бўлса, бу тўплам чексиздир.

Математикада бу тўпламнинг мумкин бўлган барча муносабатларини органиш вазифасини қўйиш мақсадга мувофиқ эмасдир. Аксинча, амалиёт талаблари асосида бу масалага бир мунча тескари масала қурилади (ҳам қилинади) яъни: олдиндан берилган маълум хоссаларни қаноатлантирувчи муносабатлар изланади ва ўрганилади. Энди аниқлик учун чекли сондаги бўш бўлмаган Э, Ф ва Г тўпламларни оламиз.

Энди бу Э, Ф ва Г тўпламлар системасида аниқланган, шундай Δ_1, Δ_2, … , $\Delta_к$ муносабатларни оламизки, улар $А_1$, $А_2$, …, $А_с$ хоссаларга аксиомаларга эга бўлсин. Бундай $\sigma= \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots , \Delta_к \}$ системалар ягона бўлмаслиги мумкин. Масалан: ҳақиқий сонлар тўпламида қўшиш ва кўпайтириш амалларининг комутативлиги ($А_1$-комутативлик, Δ_1, Δ_2-операциялар (амаллар)) ёки векторлар устида сонга кўпайтириш ва векторларни қўшиш амаллари.

Энди биз Т билан $А_1$, $А_2$, …, $А_с$ (1) хоссаларни (аксиомаларни) қаноатлантирувчи $\sigma= \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots , \Delta_к \}$ муносабатлар системалар синфини белгилаймиз.

Агар $Т\neq \emptyset$ бўлса, $\sigma \in T$ елемент Э, Ф ва Г тўпламлар системасида Т турдаги структурани ёки Т турдаги математик структурани аниқлайди дейилади.

Δ_1, Δ_2, … , $\Delta_к$ – лар структура асосий муносабатлари, A_1, A_2, …, A_c лар структуранинг аксиомалари. Э, Ф ва Г лар структура баъзаси дейилади.

Математика математик структураларини ўрганиш билан шуғулланади ва уни ўрганиш услуби эъса аксиоматик услубдир, яъни бу услубда аксиёмалар системаси келтирилиб мантиқ асосида структура назарияси кўринади. Юқорида келтирилган мисоллардан кўринадики геометрия фани ҳам аксиоматик методга асосланган экан.

Юқоридаги Т математик структурани аниқлашда, Т тўплам бўш тўплам ҳам бўлиши мумкин. Бизни Т нинг бўш бўлмаган ҳолати қизиқтиради, чунки Т нинг бўш бўлиши ҳеч бири мантиқий маънога эга эмас.

$T \neq \emptyset$ нинг асосан қуйидаги икки сабаби бор:

Берилган база керак Т тур структурани аниқламайди, лекин базани ўзгартириш билан

$T \neq \emptyset$. Базани алмаштирганда ҳам $T \neq \emptyset$ бўлаверса, керакли турда структурани аниқловчи база мавжуд бўлмайди.

Бу ҳолда аксиомалар системаси A_1, A_2 … A_c – лар зидли дейилади.

в) акс ҳолда эса, яъни структурани қаноатлантирувчи база мавжуд бўлса, аксиомалар системаси зидсиз дейилади.

Агар шундай конкрет (элементлари “ аниқ ”) тўплам М топилсаки муносабатлар аниқ маънога эга бўлганда A_1, A_2 … A_c аксиомалар бир вақтда ўринли бўлса, Т структура интерпретацияси (тасаввури) қурилди дейилади. М тўпламнинг ўзи эса Т структура модели (андозаси) дейилади.

4) М – деб ҳақиқий сонлардан ташкил топган барча 2 – тартибли матрицалар тўпламини белгиласак ва М га оддий матрицаларни кўпайтириш ва қўшиш амалларни қарасак, бу М тўплам тўрт ўлчамли вестор фазонинг модели бўлади.

Бизга Т= { σ= {Δ_1, Δ_2, … , $\Delta_к$ }, A_1, A_2, …, A_c } структура берилган бўлсин.

Агар $M^{|}$ тўпламда $\Delta^{|}_1$, $\Delta^{|}_2$, … , $\Delta^{|}_к$ муносабатлар аниқ маънога эга бўлиб, у A_1, A_2, …, $A_с$ аксиомаларни қаноатлантирсин.

$M^{||}$ тўпламда ҳам аниқ маънога эга бўлган $\Delta^{||}_1$, $\Delta^{||}_2$, … , $\Delta^{||}_к$ муносабатлар аниқланиб у A_1, A_2, …, $A_с$ аксиомаларни қаноатлантирсин.

Таъриф. σ ва $\sigma^{|}$ структуралар изоморф дейилади, агар ф: $M^{|} \to M^{||}$ биектив (бир қийматли) акслантириш мавжуд бўлиб, у учун ($х^{|}$, $й^{|}$, …, $з^{|}$) $\in \Delta_ж^{|}$ - фақат ва фақат (ф($х^{|}$)+ф($й^{|}$),…, ф($з^{|}$)) $\in \Delta_ж^{||}$.

5) Т = структура абел группаси(кўпайтириш) бўлсин $\sigma^{|}$ эса - Р – тўпламдаги аддитив (қўшишга нисбаттан) группа мусбат ҳақиқий тўпламда аниқланган кўпайтиришга нисбатан группа бўлсин.

Қуйидаги ф: Р $\to$ Р акслантиришни ф(х) = лн х кўринишда аниқлаймиз.

Хулоса қилиб айтиш мумкинки $\sigma^{|}$ ва $\sigma^{||}$ лар изоморфдир.

6) Алмаштириш ёки харакатлар структураси.

Э текисликдаги алмаштиришлар ёки ҳаракатлар тўплами, Δ деб алмаштириш ёки ҳаракатнинг кетма – кет бажариш (компазиция) амалини белгилаймиз:

A_1 – Э да компазициянинг бажарилиши; (аксиома)

A_2 – алмаштиришлар гуруҳлаш (ассоциативлик);(аксиома)

A_3 – Э айний алмаштиришнинг мавжудлиги; (аксиома)

A_4 – Э да тескари алмаштиришнинг мавжудлиги. (аксиома)

Аксиомалар системасига қўйиладиган асосий талаблар.

Аксиоматик методнинг моҳиятини тушуниш мақсадида мактабда ўрганиладиган геометрия курсига мурожаат қилайлик. Унда бир қанча теоремалар исботланган бўлиб, исботланган ҳар бир теорема ўзидан олдин келган теоремаларга асосланади, шу йўсинда иш кўришда исбоцproperly қабул қилиниши зарур бўлган ибора (жумла) лар ва тушунчаларга дуч келамиз: натижада таърифсиз қабул қилинган объектларни (масалан, нуқта, тўғри чизиқ, текислик, масофа тушунчалари), уларни боғловчи нисбатлар (масалан, нуқтанинг тўғри чизиқда ётиши, тўғри чизиқдаги нуқтанинг шу тўғри чизиқдаги бошқа икки нуқта “орасида” ётиши, кесма ва бурчакларнинг тенг (конгруент)лиги) вужудга келади.

Асосий объектлар, уларни боғловчи нисбатлар ва тегишли аксиомалар системасини танлаб олиш муҳим масаладир. Аксиоматик метод асосида муҳокама юритишни қисқароқ қилиб қуйидагича айтиш мумкин:

аввало таърифланмайдиган асосий объектлар танлаб олинади, кейин уларни ўзаро боғловчи асосий муносабатлар- аксиомалар танлаб олинади

Шу аксиомалар асосида мантиқ (логика) қоидаларга асосланган ҳолда янги жумлалар (теоремалар) исботланади.

Қабул қилинадиган аксиомалар системаси қуйидаги талабларга жавоб бериши керак:

Аксиомалар системаси зидсиз бўлиши керак, яъни мантиқ қонунлари асосида аксиомалар системасидан бир - бирини инкор этувчи иккита жумла (гап) келиб чиқмайдиган бўлсин.

Аксиомалар системаси эркин бўлиши керак, яъни аксиомалар системасида иштирок этадиган ҳар бир аксиома қолган аксиомаларнинг мантиқий хулосаси бўлмаслиги керак. (Теорема сифатида исботланмаслиги керак).

Аксиомалар системаси тўлиқ бўлиши керак.

Таъриф. Маълум объектларнинг бирор тўплами аниқланган бўлиб, шу тўплам элементлари орасида асосий муносабат сақланиб, унда аксиомаларнинг барча шартлари бажарилса, бу аксиомалар системасининг модели қурилган дейилади.

Таъриф. Зидсиз аксиомалар системасидаги ҳар бир аксиома шу системадаги қолган барча аксиомаларнинг мантиқий хулосаси бўлмаса, бундай аксиомалар системаси эъркин система деб аталади.

Бундан кўринадики, аксиомалар системасининг эркин бўлиш талаби ҳар бир аксиоманинг қолган аксиомаларнинг хулосаси (натижаси) эмаслигини текшириш билан исботланади. Бу масала қуйидагича ҳал қилинади.

Аксиомаларнинг зидсиз $A_1, A_2, \ldots, A_н$ системасига қарашли масалан, $A_н$ аксиоманинг эркин эканлигини кўрсатиш учун бу системадан $A_н$ ни чиқариб ташлаб, унинг ўрнига $\bar{A}_н$ аксиома, яъни $A_н$ нинг мазмунини инкор этувчи жумла – иборани киритиб, аксиомаларнинг янгу системасини ҳосил қилиш ва унинг зидсизлигини исботлаш керак. Ҳақиқатдан ҳам, агар $A_н$ аксиома $A_1, A_{2,} \ldots, \bar{A}_н$ аксиомаларнинг натижаси бўлиб чиқади. Бу эса аввалги системасини зидлигини билдиради.

Аксиомалар системасидаги бирор аксиоманинг эркинлиги, яъни унинг мустақил аксиома эканлигини бу системадаги аксиомалар сонини камайтириш мумкин эмаслигидан дарак беради.

Аксиомалар системасининг эркинлигини текширишда ҳар бир аксиоманинг эркинлиги алоҳида текширилмайди, лекин бази аксиомаларга нисбатан эркинлик талаби текширилади.

Аксиомалар системасининг тўлиқлигининг мазмуни шундан иборатки, янги аксиомалар қўшмасдан туриб, шу назарияга тааллуқли ҳар бир даъвонинг шу системага таянган ҳолда ўринлилигини ёки инкорини айтиш мумкин бўлсин. Бу талабнинг амалга оширилиши одатда Система учун қурилган икки модел орасидаги изоморфизм деб аталадиган тишунчага асосланади.

Таъриф. Аксиомалар системасининг икки Э, $Э^{I}$ моделининг асосий объекти (нуқта, тўғри чизиқ, текисликлар) орасида ўзаро бир қийматли мостлик ўрнатилган бўлиб, бу мостликда элемент (объект) лар, иккала моделда ҳам бир хил нисбатда бўлса, яъни $АЭЭ \rightarrow A^{I}Э Э^{I}$ бўлса, бу икки модел изоморф дейилади.

Таъриф. Аксиомалар системасига тааллуқли исталган жумланинг тўғри ёки нотўғри эканини аниқланган мумкин бўлса, аксиомаларнинг бу системаси тўлиқ (мукаммал) деб аталади.

Аксиомаларнинг зидсиз $\sum$ системаси берилган бўлсин, шу система асосида қурилган назариянинг барча жумлаларини уч синфга ажратиш мумкин;

$\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида исботлаш мумкин бўлган жумладир.

$\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида инкор этиш мумкин бўлган жумлалар.

$\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида исбот ҳам қилиб бўлмайдиган, инкор ҳам қилиб бўлмайдиган жумлалар.

Демак, $\sum$ нинг бирор модели қурилиб бўлса1-чи синфга кирувчи барча жумлалар шу моделда ўринли бўлади, 2 -чисинфга кирувчи барча жумлалар шу моделда оринли бўлмайди, нихоят, 3 –чи синфга кирувчи жумлалар шу моделда ўринли бўлиб, $\sum$ нинг бошқа шундай модели мавжуд бўлиши мумкинки, унда бу жумлалар ўринли бўлмайди. Бундан кўринадики, $\sum$ нинг исталган икки модели ўзаро изоморф бўлса, аксиомаларнинг бундай системаси тўлиқ бўлади. Бунинг маъноси шундан иборатки, аксиомаларнинг тўлиқ системаси учун турли моделлар фақат ўзининг асосий объект (елемент) ларга бериладиган конкрет мазмуни билан фарқ қилади, мантиқий жиҳатдан улар бир хилдир.

Демак, аксиомаларнинг бирор системасининг тўлиқлигини исботлаш учун унинг камида иккита моделини олиб, уларнинг ўзаро изоморфлигини кўрсатиш кифоя.

Математикада аксиомаларнинг тўлиқ бўлмаган системаси билан ҳам иш кўришга тўғри келади. Масалан, группавий аксиомалар системаси тўртта аксиомадан иборат бўлиб, у тўлиқ эмас, чунки бу системанинг бир бирига изоморф бўлмаган иккита моделини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатдан, рационал сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан группа ташкил қилади, бундан тшқари барча ҳақиқий сонлар тўплами ҳам қўшиш амалига нисбатан группа ҳосил қилади. Лекин бу икки модел орасида изоморф мослик ҳосил қилиш мумкин эмас, чунки рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эмас.

Гилберт аксиомалари системаси.

Гилберт аксиомасида асосий объектлар “нуқта”, “тўғри чизиқ”, “текислик” – дан иборат бўлиб улар орасидаги муносабатлар “тегишли”, “орасида”, “когурентлик” дир, буларнинг хоссаларини аниқловчи аксиомалар беш группага бўлинади:

1 – группа: Боғланиш (тегишлилик) аксиомалари. (8 та)

2 – группа: Тартиб аксиомалари. (4 та)

3 – группа: Когурентлик аксиомалари. (5 та)

4 – группа: Узлуксизлик аксиомалари. (1 та)

5 – группа: Паралеллик аксиомалари. (1 та)

Геометрияни ва ҳар қандай математик назарияни аксиомалар асосида қуриш ишни 1-дан асосий объектлар категориясини, 2-дан бу объектлар орасидаги асосий муносабатларни 3-дан аксиомаларни кўрсатишдан бошланиши керак. Геометрияда қараладиган ундан кам объектлар ва улар орасидаги муносабатлар асосий объектлар орқали таърифланиши керак ва барча теоремаларни аксиомаларга суяниб исботлаш керак.

Гилберт аксиомалар системасида асосий тушунчалар нуқта, тўғри чизиқ, текислик.

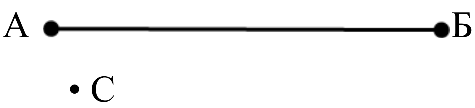
1 группа. Боғланиш аксиомалари.

I_1. Ихтиёрий А ва Б нуқталар учун шундай тўғри чизиқ мавжуд бўлиб, бу нуқталар шу тўгри чизиқда ётади.

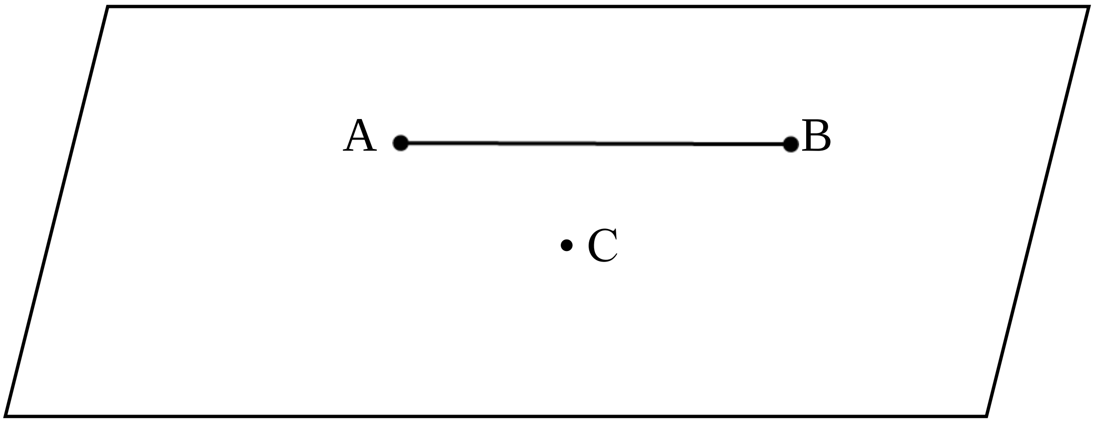
I_2. А ва Б нуқталардан ўтувчи биттадан ортиқ тўғри чизиқ мавжуд эмас.

I_3. Ҳар қандай тўғри чизиқда камида иккита нуқта мавжуд.

Битта тўгри чизиқда ётмайдиган учта нуқта мавжуд.



I_4. Бир тўгри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай учта А, Б, С нуқталардан ўтувчи текислик мавжуд.



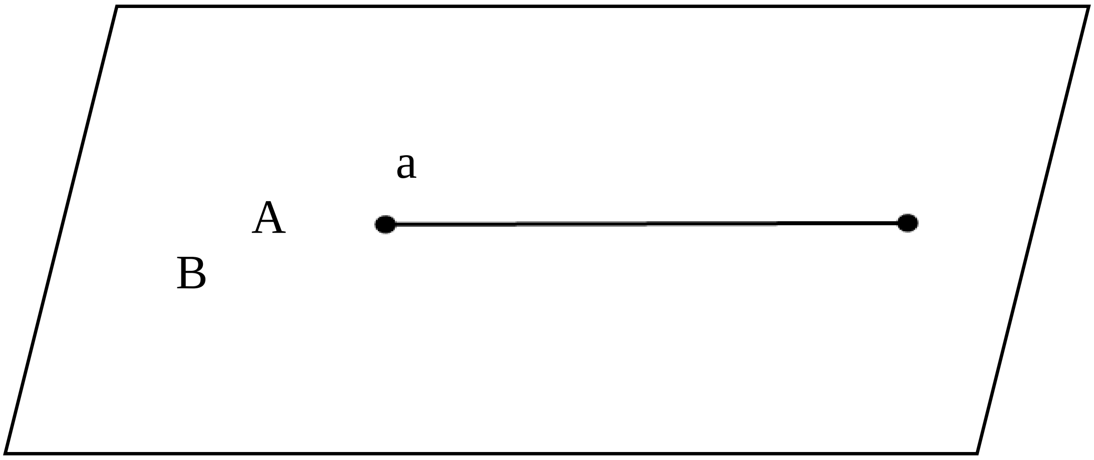
I_5. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай А, Б, С нуқталардан ўтувчи ягона текислик мавжуд.

I_4 ва I_5 аксиомаларда қуйидаги текислик келиб чиқади.

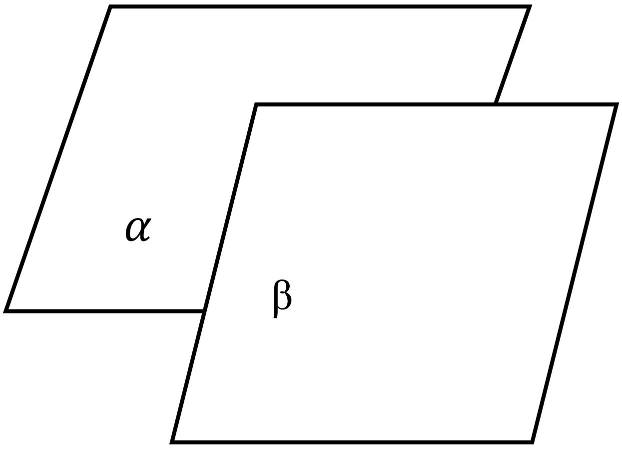
Теорема. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай ушта А , Б ,С нуқталардан битта ва фақат битта АБС текислик ўтказиш мумкин.

I_6. Агар а тўғри чизиқнинг А ва Б нуқталари α текисликда ётса, а тўғри

чизиқнинг ҳар қандай нуқтаси ҳам шу текисликда ётади.



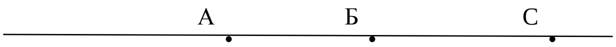
I_7. Агар $\alpha\ va\ \beta$ текисликлар умумий А нуқтага эга бўлса, у ҳолда А нуқтадан фарқли Б нуқта мавжуд.



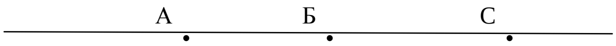
I_8. Битта текисликда ётмайдиган камида тўртта нуқта мавжуд.

2 – Тартиб аксиомалари

II_1. Агар Б нуқта А ва С нуқталар орасида ётса, у ҳолда А, Б, С бир тўғри чизиқдаги турли нуқталар бўлиб, Б нуқта С ва А нуқталар орасида ётади.



II_2. Агар А, Б бирор тўғри чизиқнинг нуқталари бўлса, шу тўғри чизиқда камида шундай битта С нуқта топиладики Б нуқта А билан С нинг орасида ётади.

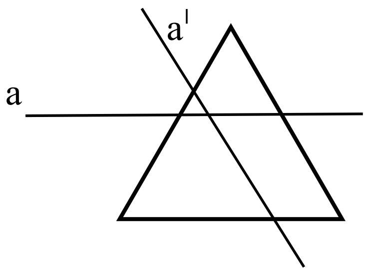


II_3. Тўғри чизиқдаги ҳар қандай учта нуқтадан биттадан ортиғи қолган иккитаси орасида ётмайди.

II_4. Паш аксиомалари.

АБС учбурчакнинг бирорта ҳам учидан ўтмайдиган ва унинг текислигида ётадиган тўғри чизиқ шу учбурчакнинг АБ томони билан умумий нуқтага эга

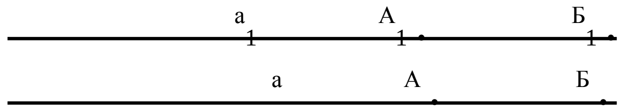
бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ ё БС кесма ёки АС кесма нуқтаси орқали ўтади.



3. Конгруентлик аксиомалари.

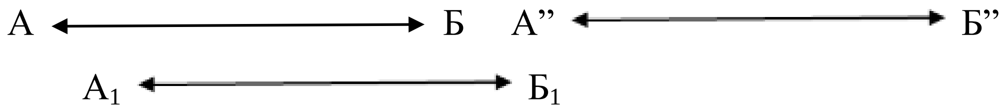
Бу группа аксиомалари кесма ва бурчакларнинг конгруентлик (тенглик) тушунчасини аниқлайди.

III_1. Икки А ва Б нуқта а тўғри чизиқнинг нуқтаси, $А^{l}$ эса шу тоғри чизиқнинг ёки бошқа бирор $а^{l}$ тўғри чизиқнинг нуқтаси бўлса, у ҳолда шу тўғри чизиқнинг $А^{l}$ нуқтадан берилган томонида ётувчи фақат битта $Б^{1}$ нуқтани доимо топиш мумкинки, АБ кесма $А_1Б_1$ кесмага конгруент бўлади.

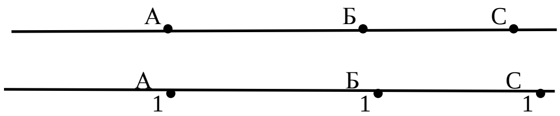


$[АБ] \equiv [А_1 Б_1]$

III_2. Икки кесма учинчи кесмага конгруент бўлса, у ҳолда улар бир – бирига конгруентдир яъни $А_1Б_1 \equiv АБ$, $А'' Б'' \equiv АБ$ бўлса, $А_1Б_1 \equiv А''Б''$



III_3. АБ ва БС кесмалар а тўғри чизиқнинг икки умумий нуқталарга эга бўлмаган кесмалари бўлсин, шу тўгри чизиқнинг ёки бошқа $а_1$ тўғри чизиқнинг $А_1Б_1$, $Б_1С_1$ кесмалари ҳам ички умумий нуқталарга эга бўлмай $АБ \equiv А_1Б_1$, $БС \equiv Б_1С_1$ бўлса, $АС \equiv А_1С_1$ бўлади.



$$\left.\begin{array}{l} АБ \equiv А_1Б_1 \\ БС \equiv Б_1С_1 \end{array}\right] АС \equiv А_1С_1$$

III_4. П текисликда < (ҳ, к) бурчак ва шу текисликда ёки бирор Пъ текисликда аъ тўғри чизиқ берилган бўлиб, а, тўғри чизиқ билан аниқланган ярим текисликлардан бири ҳамда аъ тўғри чизиқдаги 0ъ учли ҳъ нур тайин бўлсин.

У ҳолда 0_1 нуқтадан чиқувчи ва аниқланган ярим текисликда ётган шундай ягона $Р_1$ нур мавжудки, < (х, к) бурчак < $(х_1, к_1)$ бурчакка конгруент бўлади. Бурчаклар орасидаги бундай нисбат < (х, к) = < $(х_1, к_1)$ кўринишда белгиланади. Ҳар бир бурчак уз – ўзига конгруент деб олинади.

III_5. АБС ва $А_1Б_1С_1$ учбурчаклар учун $АБ \equiv А_1Б_1$, $БАС \equiv Б_1А_1С_1$ бўлса $АБС \equiv А_1Б_1С_1$ бўлади.

Таъриф. АБС ва $А_1Б_1С_1$ учбурчакларнинг учта бурчаклари ва учта

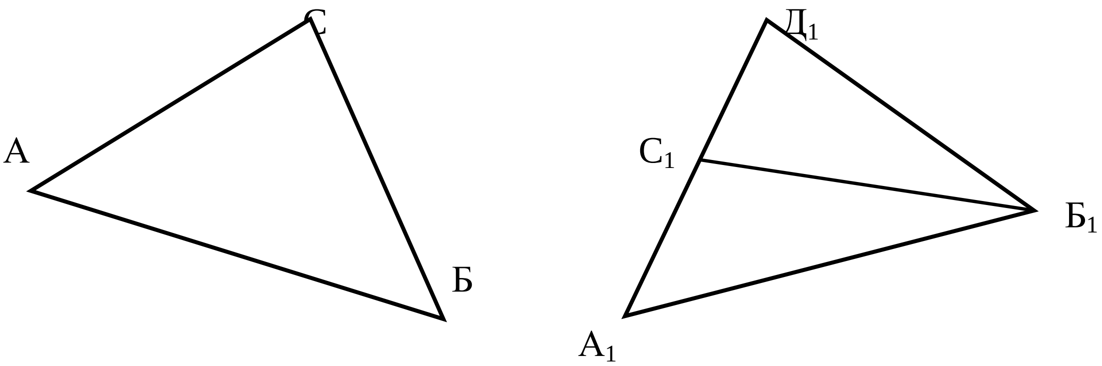
∆

томонлари мос равишда конгруент бўлса, бу учбурчаклар ўзаро конгруент дейилади ва АБС ≡ Δ $А_1Б_1С_1$ кўринишда белгилнади.

Конгруентлик аксиомалари ёрдамида учбурчакнинг тенглик аломатларини исботлаш мимкин.

Теорема. АБС ва $А_1Б_1С_1$ учбурчакларда АБ ≡ $А_1Б_1$, <АБС ≡ <$А_1Б_1С_1$, <БАС ≡ < $Б_1А_1С_1$ бўлса, ΔАБС ≡ Δ $А_1Б_1С_1$ бўлади.

Исбот. Аввал АС ва $А_1С_1$ томонларнинг ўзаро конгруентлигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, АС ≡ $А_1С_1$ бўлсин.



III. га асосан $А_1С_1$ нурда шундай $Д_1$ нуқта мавжудки. АС≡$А_1Б_1$ бўлади. Бу вақтда юқоридаги теоремага асосан ΔАБС ≡ Δ $А_1Б_1Д_1$ бўлиш, АБС ≡ $А_1Б_1Д_1$ бўлади. Лекин шартга кўра АБС ≡ $А_1Б_1С_1$.

Бу эса III аксиомага зид. Демак, АС ≡ $А_1С_1$ бўлади. У ҳолда юқоридаги теоремага асосан ΔАБС ≡ Δ $А_1Б_1С_1$.

4. Узлуксизлик аксиомалари.

Бу аксиоманинг моҳияти шундан иборатки, у тўғри чизиқ нуқталари тўплами билан барча ҳақиқий сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатишга имкон беради.

IV. АБ кесманинг барча нуқталари шу кесма учлари билан биргаликда қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган қилиб икки синфга ажратилган бўлиб:

а) АБ кесманинг ҳар бир нуқтаси фақат битта синфга тегишли бўлиб, А нуқта биринчи синфга, Б нуқта эса иккинчи синфга тегишли бўлсин, бу синфлар бўш бўлмасин;

б) Биринчи синфнинг А дан фарқли ҳар бир нуқтаси А билан иккинчи синфнинг ихтиёрий нуқтаси орасида ёцин. У ҳолда АБ кесмада шундай С нуқта топиладики, А билан С орасидаги барча нуқталар биринчи синфга, С билан Б орасидаги барча нуқталар иккинчи синфга тегишли бўлиб, С нуқтанинг ўзи биринчи ёки иккинчи синфга тегишли бўлади. С нуқта эса АБ кесма нуқталарини икки синфга ажратувчи (кесадиган) нуқта деб аталади.

5 – Паралеллик аксиомалари.

Теорема: Тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида битта тўғри чизиқ ўтади.

Юқорида абсолют геометриянинг бу теоремасига эътибор қилсак, унда тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида битта тўғри чизиқнинг ўтиши таъкидланиб, бироқ шундай тўғри чизиқнинг ягоналиги ҳақида ҳукм чиқарилмаган. Бундай тўғри чизиқнинг ягоналиги ёки ягона эмаслиги тўғрисида қўшимча талабнинг қўйилишига қараб Евклид геометрияси ёки Лобачевский геометрияси тўғрисидаги таълимотни ҳосил қиламиз. I- IV группа аксиомаларига суянган геометрия бу икки геометриянинг умумий қисмидир.Евклид геометриясида параллеллик аксиомаси қуйидагича ифодаланади.

В. Тўғри чизиқ ташқарисидаги нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган тўғри чизиқ биттадан ортиқ эмас.

Юқоридаги 19 та аксиома абсолют геометрияни ташкил этади.

3.4.Вейл аксиомалари системаси.

1916 йилда немис математиги Герман Вейл (1885- 1955) томонидан таклиф қилинган аксиоматика фанда векторли аксиоматика деб юритилиб, Гилберт аксиомалари системасига нисбатан соддалиги билан фарқ қилади, бундан ташқари бу аксиоматика ҳозирги замон математикасини талай билимлари билан узвий боғланганлиги билан ажралиб туради.

Бу системада асосий тушунчалар сифатида “ВЭКТОР” ва (НУҚТА) қабул қилинган.

Векторлар ва нуқталарни бир – бири билан боғловчи муносабатлар “векторларни қўшиш”, “векторларни сонга кўпайтириш”, “векторларни скаляр кўпайтириш”, “векторларни нуқтадан бошлаб қўйиш” дир.

1.Векторларни қўшиш аксиомалари исталган икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторга уларнинг йиғиндиси деб аталадиган $\vec{a}+\vec{b}$ вектор мос келтирилиб, бу амал хоссалари ушбу аксиомаларда ифодаланади:

$I_{1.}$ Ихтиёрий $\vec{a}, \vec{b}$ вектор учун $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ тенглик бажарилади.

$I_{2.}$ Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$,$\vec{c}$ векторлар учун $(\vec{a}+\vec{b})+ \vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+ \vec{c})$ тенглик бажарилади.

I_3. Нол вектор деб аталган $\vec{0}$ вектор мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $\vec{a}+ \vec{0} =\vec{a}$

I_4. Ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун шундай $\vec{a}^{ъ}$ вектор мавжудки, унинг учун $\vec{a} +\vec{a}^{ъ} =\vec{0}$

2.Векторни сонга кўпайтириш амаллари исталган $\vec{a}$ вектор ва исталган ҳақиқий к сонга уларнинг кўпайтмаси деб аталадиган к$\vec{a}$ вектор мос келтириб, бу амал хоссалари ушбу аксиомаларда ифодаланилади:

II_1. Ихтиёрий $\overrightarrow{a,} \vec{b}$ векторлар ва к ҳақиқий сон учун к$(\vec{a}+\vec{b})$= к$\vec{a}$+к$\vec{b}$ тенглик бажарилади.

II_2. Ихтиёрий к, т ҳақиқий сонлар ва ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун (к+т)$\vec{a}$=к$\vec{a}$+т$\vec{a}$ бўлсин, яъни векторни сонга кўпайтириш муносабати ҳақиқий сонларни қўшиш амалига нисбатан дистрибутиве қонунига бўйсунишини талаб қилинади.

II_3. Ихтиёрий к, т ҳақиқий сонлар ва ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун к(т$\vec{a}$)= (кт)$\vec{a}$ тенглик бажарилади.

II_4. Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун 1* $\vec{a}$= $\vec{a}$

Бу икки группа аксиомалари ёрдамида векторларнинг чизиқли комбинацияси, чизиқли эркинлиги, чизиқли боғлиқлиги ва шу каби тушунчаларни киритиш мумкин.

3.Ўлчов аксиомалари.

III_1. Фазода учта чизиқли эркин вектор мавжуд.

III_2. Фазодаги ҳар қандай тўртта вектор чизиқли боғликдир.

4.Векторларни скаляр кўпайтириш аксиомалари.

IV_1. Ихтиёрий икки $\overrightarrow{a},\ \vec{b}$ вектор учун $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$

IV_2. Ихтиёрий учта $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектор учун $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} =$

$$\overline{=\vec{a}\vec{c}} + \vec{b}\vec{c}$$

IV_3. Ихтиёрий $\vec{a}, \vec{b}$ вектор ва ҳақиқий k сон учун

$(k\vec{a}\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b})$

IV_4. Ихтиёрий $\overrightarrow{a}$ вектор учун $\overrightarrow{a} * \vec{a} \geq 0$

5. Векторни нуқтадан бошлаб қўйиш аксиомалари.

V_1. Ихтиёрий вектор ва ҳар қандай М нуқта учун ягона шундай Н нуқта мавжудки, унинг учун $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$

V_2. Ихтиёрий А,Б,С нуқталар учун $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Масаланинг қўйилиши:

1) Математик структура (Группа структураси) Э тўплам, Δ - операция, амал (муносабат)

A_1 : Δ - алгебраик амал Э да аниқланган;

A_2 : Δ - нинг ассоциативлиги;

A_3 : Э – да нейтрал элемент мавжудлиги;

A_4 : Э – да симметрик ёки тескари элементининг мавжудлиги.

2) Евклид геометрияси Гилберт аксиомалар системаси мисолида.

Э – нуқталар тўплами;

Ф- тўғри чизиқлар,

Г – текисликлар тўплами

Δ_1 – “ да ётади ”

Δ_2 – " орасида ётади"

Δ_3 – "конгруентлик"

A_1, A_2, …, A_{20} – Гилберт аксиомалари.

3) Математик структура Лобачевский геометрияси аксиомалари асосида

Бу ҳам Евклид геометрияси структурасидек бўлиб, фақат A_{20} аксиомаси B^* - Лобачевский аксиомаси билан алмаштирилади.

Ишни бажариш учун намуна

Мисол. Бутун сонлар тўплами қўшишга нисбатан группа ташкил қилади.

Г тўплам кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил қилади дейилади, агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса:

а*(б*с)=(а*б)*с, $\forall$а,б,с $\in G$

Г да бирлик элемент деб аталувчи э ϵ Г мавжуд бўлиб, $\forall a \epsilon G$ учун а*е = а тенглик ўринли бўлсин.

$\forall a \epsilon G$ учун тескари $a^{-1} \epsilon G$ мавжуд бўлиб, а*а = э ва қуйидагича белгиланади: (Г, *)

Бутун сонлар тўпламининг қошишга нисбатан группа ташкил қилишини текширайлик. Бу ерда ((*), =, +) оламиз.

а+(б+с) = (а+б)+с тенглик ихтиёрий бутун сонлар учун ўринли.

е=0 олсак, у ҳолда а+0=а тенлик ихтиёрий бутун сонлар учун ўринли.

$\forall$а учун $а^{-1}$= - а олсак, а+(-а)=0 тенглик ўринли. Демак (З, +) – группа экан.

Бутун сонлар тўплами аксиомалар системасининг модели бўла олади, бунда асосий объектлар бутун сонлар тўплами, асосий объектлар қўшиш амали.

Аксиомалар системасининг зидсизлиги шу система моделининг танлаб олиниши билан ҳам қилинади. Агар текшириладиган аксиомалар бирор усул билан моделда бажарилса ва бу модел объектларнинг табиатида зидликнинг йўқлигига ишонч ҳосил қилинса, у ҳолда бу аксиомалардан бир – бирини мантиқан инкор этадиган иккита жумла келиб чиқмаслиги, яъни битта фактни ҳам тасдиқлаб, ҳам инкор этиб бўлмаслиги маълум бўлади. Демак, биз юқорида келтирган мисолимизда группавий аксиомалар системасининг ва чизиқли фазо аксиомалари системасининг зидсиз эканини кўрсатдик.

Назорат саволлари:

1. Математик структура ва унга доир мисоллар.
2. Аксиомалар системасига қўйиладиган асосий талаблар.
3. Гилберт аксиомалари системаси.
4. I – группа: Боғланиш (тегишлилик) аксиомалари. (8 та)
5. II – группа: Тартиб аксиомалари. (4 та)
6. III – группа: Когурентлик аксиомалари. (5 та)
7. IV – группа: Узлуксизлик аксиомалари. (1 та)
8. V – группа: Паралеллик аксиомалари. (1 та)
9. Ўлчов аксиомалари.
10. Векторларни скаляр кўпайтириш аксиомалари.
11. Векторни нуқтадан бошлаб қўйиш аксиомалари.
12. Векторларни қўшиш аксиомалари.
13. Векторни сонга кўпайтириш.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.
2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.
3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

4 - Амалий машғулот:
Геометрия асослари.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш

Проектив текисликдаги тайин тўғри чизиқли геометрия.

Маълумки геометрияни группавий- назарий нуқтаий назардан қуриш учун фазога эга бўлишимиз керак, яъни Ω - элементлари нуқталар деб аталувчи тўплам ва бу тўпламнинг алмаштиришлар тўплами G берилган бўлсин. Ω фазода нуқталарнинг U тўплами берилган бўлсин. G группанинг U тўплам нуқталарини яна шу U тўплам нуқталарига ўтказувчи ихтиёрий алмаштириши U тўпламга нисбатан автоморф алмаштириш ёки автоморфизм дейилади. Автоморфизм U тўплам нуқталарини қўзғалмас қилиб қолдирмайди. Автоморфизмда U тўплам нуқталари ёки ўзига ёки шу тўпламнинг бошқа нуқтасига ўтади.

Теорема-1. Агар берилган геометриянинг Ω фазоси G алмаштиришлар группасига эга бўлиб, бунда U нуқталар тўплами берилган бўлса у ҳолда, U га нисбатан автоморф бўлган G группанинг алмаштиришлари тўплами G группанинг қисм группаси бўлади.

Бизга P_2 проектив текислик ва унда бирор тайин p^* тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу ҳолда проектив текисликни P_2^* орқали белгилаймиз ва p^* тўғри чизиқни бу текисликнинг абсолюти деймиз. Агар бу проектив текисликдаги ихтиёрий иккита тўғри чизиқлардан бирортаси ҳам абсолют билан устма-уст тушмасдан, аммо уларнинг кесишган нуқтаси абсолютга тегишли бўлса бу иккита тўғри чизиқлар яқинлашувчи дейилади.

Энди P_2^* текисликдаги аффин коллинеацияси тушунчасини киритамиз.

Таъриф. P_2^* текисликдаги аффин коллинсация деб P_2 текисликни абсолютнинг нуқталарига нисбатан автоморф бўлган ихтиёрий проектив алмаштиришига айтилади.

Теорема-1 га кўра P_2^* текисликнинг барча аффин коллинециялари тўплами проектив алмаштиришлар группасининг қисм группаси бўлади.

Теорема-2. P_2^* текислик абсолютида ётмайдиган ва ноколлинеар A_1B_1C ва $A_1^{'}B_1^{'}C$ нуқталар учликлари берилган бўлсин. У ҳолда A_1B_1C нуқталарни $A_1^{'}B_1^{'}C^{'}$ нуқталарга ўтказувчи битта ва фақат битта аффин коллинеация мавжуд бўлади.

Юқоридаги теоремадан чексиз кўп аффин коллинеациялар мавжудлиги келиб чиқади. Энди эса аффин гомология тушунчасини кўриб чиқамиз.

Таъриф. Агар аффин коллинеация айний бўлмасдан ва қўзғалмас нуқталар тўғри чизиқига эга бўлса уни аффин гомология дейилади.

Бошқача айтганда аффин гомология бу гомология бўладиган аффин коллинеация экан. Бу таърифдан кўринадики бир вақтда гиперболик (параболик) гомология ҳам бўлган аффин коллинеациялар аффин гиперболик (параболик) гомология дейилади.

Аффин гомологиянинг турларини кўриб чиқишдан олдин қуйидаги леммани келтирамиз.

Энди кўчиришлар аффин коллинеациясини кўриб чиқамиз.

Таъриф. Агар P_2^* текисликнинг проектив алмаштиришида барча қўзғалмас нуқталари абсолютнинг барча нуқталари билан устма-уст тушса ёки P_2^* текисликнинг нуқталари билан устма-уст тушса бунда проектив алмаштириш кўчиришлар аффин коллинеацияси дейилади.

Юқоридаги таърифдан шундай хулоса келиб чиқади:

кўчиришларнинг аффин коллинеацияси ёки ўқи абсолют билан устма-уст тушадиган аффин параболик гомология ёки айний алмаштириш бўлади.

Теорема. Агар P_2^* текисликда абсолютда ётмайдиган иккита M ва M' нуқталар берилган бўлса у ҳолда M нуқтани M' нуқтага ўтказадиган фақат ва фақат битта кўчиришлар аффин коллинеацияси мавжуд бўлади.

Теорема. P_2^* текисликнинг барча кўчиришлар аффин коллинеatsiялари тўплами группа ҳосил қилади.

Аффин геометриясининг проектив талқини.

Геометрия қурилишининг группавий схемасига кўра аффин геометриясининг проектив алмаштиришлар группасининг бирор қисм группасининг геометрияси сифатида қараш мумкин. Бунинг учун икки ўлчовли аффин геометриясининг проектив текисликдаги моделини қурамиз ва аффин геометриясининг барча тушунчалари бу текисликда проектив геометрия терминларида табиий равишда талқин қилинишини кўрамиз.

P_2^* − тайин p^* абсолютга эга бўлган проектив текислик бўлсин. Қуйидагича белгилашлар киритамиз. P_2^* текисликнинг p^* тўғри чизиқда ётмайдиган ихтиёрий нуқтасини аффин нуқтаси деб атаймиз, p^* тўғри чизиқдан фарқли ихтиёрий тўғри чизиқни аффин тўғри чизиқ деймиз.

Барча аффин нуқталар тўпламини аффин текислик деймиз ва уни $\overline{P_2^*}$ орқали белгилаймиз Шундай қилиб $\overline{P_2^*}$ аффин текислиги бу P_2^* текисликнинг p^* абсолютга тегишли бўлмаган нуқталари тўплами экан. P_2^* текисликнинг абсолютини хосмас тўғри чизиқ деймиз бу абсолют нуқталарини эса хосмас нуқталар деймиз. “ Нуқта ва “ тўғри чизиқ ” деганда аффин нуқтасини ва аффин тўғри чизиқни тушунамиз. Аффин нуқта ва аффин тўғри чизиқларни проектив нуқта ва тўғри чизиқлар каби белгилаймиз, яъни

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots\ldots, \ell, \mathrm{m}, \ldots\ldots, (\ell), (m).$

P_2^* текисликнинг хосмас нуқталари аффин нуқталардан ажратиш учун хосмас нуқталарни $\mathrm{A}^*, B^*, \ldots$ орқали белгилаймиз. $\overline{P}_2^*$ текисликнинг аффин a тўғри чизиғи P_2^* текисликнинг проектив a тўғри чизиғи билан устма-уст тушади. Аммо $\overline{P}_2^*$ текисликнинг (a) аффин тўғри чизиғи P_2^* текисликнинг (a) тўғри чизиғи билан устма-уст тушмайди. Чунки агар

$A^* = a \cap p^*$

бўлса, у ҳолда A^* нуқта проектив (a) тўғри чизиқнинг нуқтаси бўлиб аффин (a) тўғри чизиқнинг нуқтаси бўлмайди.

Группавий нуқтаий назарга кўра бирор геометрияни аниқлаш учун фазодан ташқари бу фазонинг алмаштиришлари группасига эга бўлишимиз керак. Бу группани аниқлаш учун P_2^* текисликнинг аффин коллинеацияларидан фойдаланамиз.

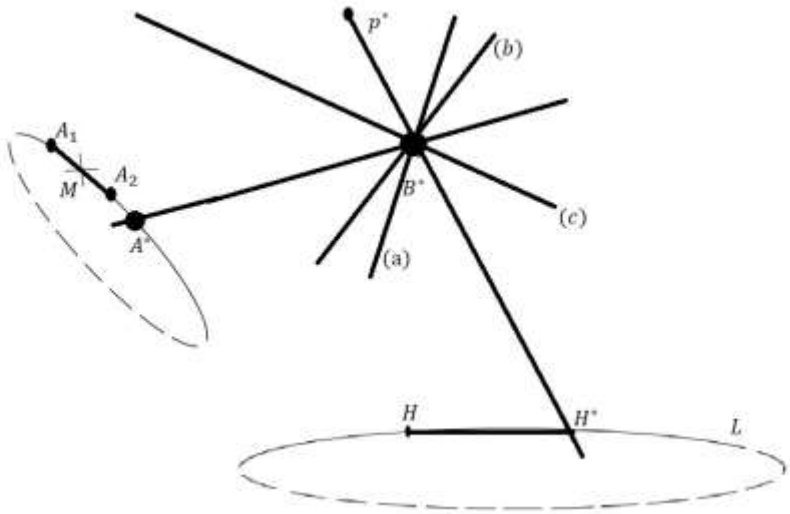
Юқорида киритилган белгилашларга асосан P_2^* текисликнинг ихтиёрий π аффин коллинеацияси аффин нуқталарни аффин нуқталарга, хосмас нуқталарни хосмас нуқталарга ўтказади. Бундан ташқари P_2^* текисликнинг ҳар бир аффин коллинеацияси $\overline{P}_2^*$ текислик аффин нуқталарини бирор алмаштиришини ҳосил қилади бу алмаштиришни $\overline{P}_2^*$ текисликнинг аффин алмаштиришлари деймиз. Демак $\overline{P}_2^*$ текисликнинг аффин алмаштириши бу P_2^* текисликдаги аффин коллинеация ҳосил қиладиган $\overline{P}_2^*$ текисликнинг ихтиёрий алмаштиришидир.

Аффин алмаштиришларни $\overline{\pi}, \overline{\partial}, \ldots\ldots,$ лар орқали белгилаймиз, уларга мос аффин коллинеацияларни эса худди юқоридаги ҳарфлар билан аммо устида чизиқчасиз белгилаймиз.

P_2^* текисликнинг τ айний алмаштириши $\overline{P_2^*}$ текисликнинг $\overline{\tau}$ айний алмаштиришини ҳосил қилади. Агар π_1 ва π_2 лар $\overline{\pi_1}$ ва $\overline{\pi_2}$ алмаштиришларни ҳосил қилса $\pi_2\pi_1$ алмаштириш $\overline{\pi_2\pi_1}$ алмаштиришни ҳосил қилади, яъни

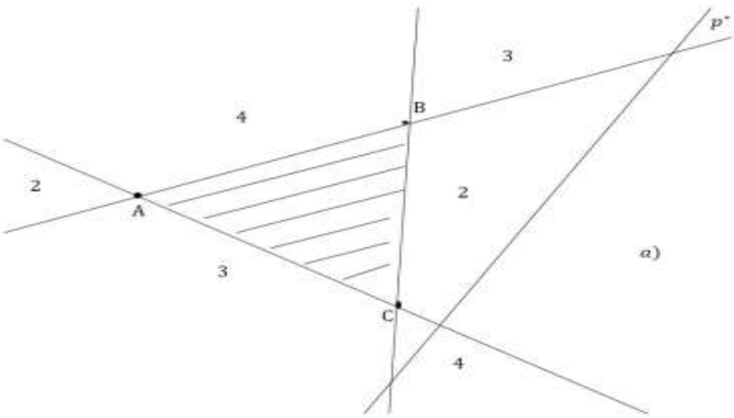
$$\overline{\pi_2\pi_1} = \overline{\pi_2}\,\overline{\pi_1}\,.$$

Равшанки барча аффин коллинеациялар тўплами. Демак, $\overline{P_2^*}$ текисликнинг ҳам барча аффин алмаштиришлари ҳам группа ҳосил қилади. Бу группа геометрияси аффин геометрия дейилади. $\overline{P_2^*}$ текисликнинг иккита яқинлашувчи тўғри чизиғи аффин текисликнинг параллел тўғри чизиқлари дейилади. Бошқача айтганда қуйидаги чизмадаги (a) ва (b) тўғри чизиқлар агарда $\overline{P_2^*}$ текисликда умумий нуқтага эга бўлса улар аффин текисликдаги параллел тўғри чизиқлар дейилади.



Равшанки бу тушунчалар геометрик тушунчалар ҳисобланади, чунки улар барча аффин алмаштиришларга нисбатан инвариантдир. Агар (a) тўғри чизиқ (b) тўғри чизиқга параллел, (b) тўғри чизиқ эса (c) тўғри чизиқга параллел бўлса ва $(a)\neq(c)$ бўлса у ҳолда (a) тўғри чизиқ (c) тўғри чизиқга параллел бўлади. Бир-бирига параллел барча P_2^* даги тўғри чизиқлар умумий хосмас нуқтага эга. Юқоридаги расмда (a), (b) ва (c) тўғри чизиқлар учун бундай нуқта B^* бўлади.

a проектив тўғри чизиқнинг иккита турлича A_1 ва A_2 нуқталари охирлари бу нуқталарда бўлган иккита кесма ҳосил қилади. Аммо бу нуқталар аффин нуқталар эди. Шунинг учун бу нуқталар орқали аниқланадиган кесмалар тенг кучли эмас, чунки уларнинг бирига хосмас A^* нуқта тегишли иккинчисига эса тегишли эмас. $A_1A_2\,/\,\mathrm{A}^*$ кесма $\overline{P}_2^*$ текисликдаги аффин кесма дейилади, унинг охирлари A_1 ва A_2 нуқталардан иборат.



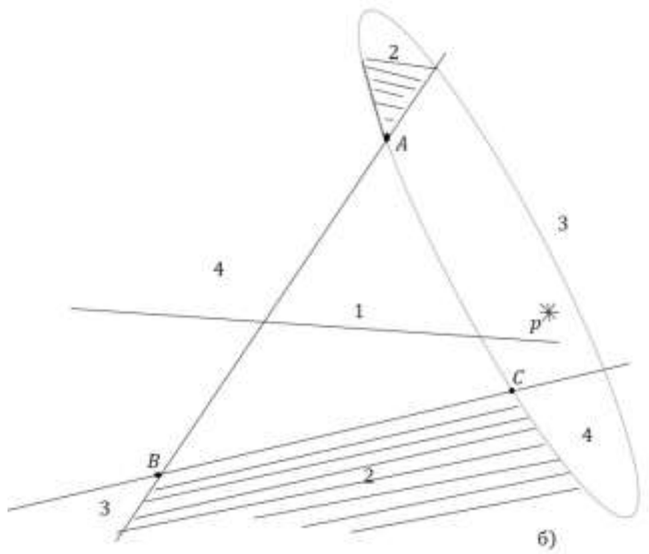
Юқоридаги чизмада бу кесма ажратиб кўрсатилган. A_1A_2 тўғри чизиқнинг

$$A_1A_2 \div MA^*$$

шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқтаси A_1 ва A_2 нуқталар орасида ётувчи нуқта дейилади.

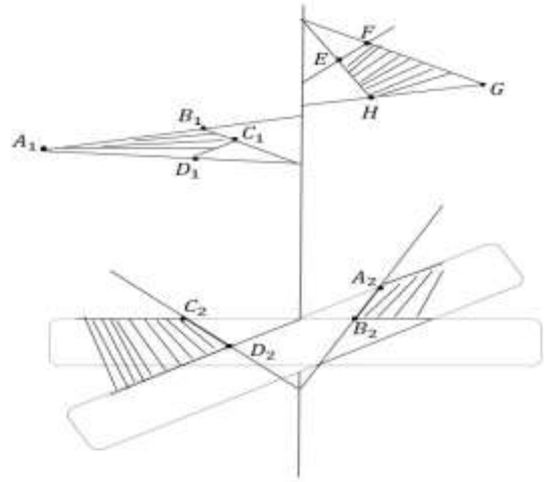
Энди нур тушунчасини киритамиз. ℓ – проектив тўғри чизиқ бўлсин ва абсолютдан фарқли. N эса бу тўғри чизиқнинг аффин нуқтаси бўлсин. Бу тўғри чизиқда N^* хосмас нуқта оламиз ва N $N^*/1$ ва $N\ N^*/2$ проектив кесмаларни оламиз. $\overline{P}_2^*$ текисликдаги N^* нуқта кирмайдиган ҳар бир кесма N нуқтадан чиқувчи нур дейилади. Берилган нуқтадан иккита нур чиқади. Битта нуқтадан чиқувчи ва бир тўғри чизиқда ётмайдиган иккита нурга бурчак дейилади.

Кесманинг одатдаги аниқланишига эга бўлганимиздан кейин синиқ чизиқ ва кўпбурчакларни аниқлаш мумкин. Бу тушунчалар аффин тушунчалар ҳисобланади. Бунга ўхшаш тушунчалар проектив текисликда мавжуд эмас. Масалан, аффин текисликда учбурчаклар ва проектив текисликдаги уч учлик тушунчалари бир -биридан фарқ қилади. Уч учликнинг томонлари тўғри чизиқлар учбурчак томонлари кесмалар бўлади. Янада чуқуррок фарқлари қуйидагича бўлади:



б)

Уч учликнинг томонлари проектив текисликнинг нуқталарини тўртта соҳага ажратади. Бу соҳалар расмда 1, 2, 3, 4 рақамлари билан белгиланган. Соҳалардан ҳеч қайсисини қолганларидан одатдагидек ажратиб бўлмайди, чунки улар бир-бирига проектив эквивалентдир. Шунинг учун уч учлик учун проектив текисликда ички соҳа тушунчасини киритиб бўлмайди. Аммо агар уч учлик P_2^* текисликда берилган бўлса ва бу текисликликда фиксирланган p^* абсолют берилган бўлса, у ҳолда тўртта соҳадан бири қолган учтасидан унга абсолютнинг бирорта ҳам нуқтасини ўз ичига олмагани билан фарқ қилади. Бу соҳа $\overline{P}_2^*$ текисликдаги ABC учликнинг ички соҳаси бўлади. ABC учликнинг томонлари аффин текислигини 7 та соҳага ажратади. Учбурчак томонлари билан чегараланган соҳа ички соҳа бўлади. Биз қурган моделда бошқа аффин фигураларни ҳам аниқласа бўлади.



Масалан расмда иккита $A_1 \; B_1 C_1 D_1$ ва $A_2 B_2 C_2 D_2$ параллелограммлар ва $EFGNC$ трапеция тасвирланган.

Учта нуқтанинг оддий нисбати. Векторлар.

Аффин геометриянинг асосий тушунчаларидан бири бир тўғри чизиқда ётувчи учта нуқтанинг оддий нисбати ҳисобланади. Шунинг учун бу тушунчанинг проектив талқини қандай бўлишини кўриб чиқамиз.

ℓ - P_2^* текисликдаги аффин тўғри чизиқ бўлсин.

A_1 B ва C лар ℓ тўғри чизиқдаги учта аффин нуқталар бўлсин. Агар L^* - бу тўғри чизиқнинг хосмас нуқтаси бўлса у ҳолда,

$$\varepsilon = -\left(L^* CBA\right)$$

сон A_1 B ва C сонларнинг оддий нисбати дейилади ва $\left(ABC\right)$ орқали белгиланади. Агар A_1 B ва C лар жуфт – жуфти билан турлича нуқталар бўлса у ҳолда,

$$\left(L^* CBA\right) = -\left(ABCL^*\right)$$

бўлади. Шунинг учун

$$\left(ABC\right)=-\left(ABCL^{*}\right).$$

L^{*} нуқта A_1 B ва C нуқталарнинг бирортаси билан устма-уст тушмагани учун $\left(ABC\right)$ оддий нисбат $B\neq C$ бўлган ихтиёрий A_1 B_1 C нуқталар учун аниқланган. Агар $B\neq C$ бўлса у ҳолда ихтиёрий ε учун BC тўғри чизиқда битта ва фақат битта A нуқта мавжуд бўлади ва

$$\left(ABC\right)=\varepsilon$$

тенглик ўринли.

$A\neq B$ бўлганда бу аниқланган сонга C нуқтани AB йўналган кесмани бўлаётган нисбатини билдиради.

$\varepsilon=1$ га C нуқтага AB ни ўртаси дейилади. Кесманинг ўртаси проектив геометрияда содда геометрик маънога эга: AB кесманинг ўртаси C нукта ва AB тўғри чизиқнинг хосмас L^{*} нуқтаси A B нуқталар жуфтини гармоник ажратади. Ҳақиқатан ҳам

$$-\left(ABC\right)=\left(L^{*}CBA\right)=-1\Rightarrow CL^{*}.......AB$$

(1) муносабатдан ва тўртта нукта мураккаб нисбати хоссаларидан оддий нисбатнинг асосий хоссасини келтириб чиқариш мумкин.

$$\left(ABC\right)=\frac{1}{\left(BAC\right)} \quad \text{ва} \quad \left(A_1BC\right)\left(A_2A_1C\right)=-\left(A_2BC\right)$$

$\overline{P}_2^{*}$ текисликдаги аффин алмаштиришларда учта нуқтанинг оддий нисбати ўзгармайди, чунки у тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати орқали ифодаланаяпти, ва мураккаб нисбат аффин коллинеatsiянинг инварианти бўлади.

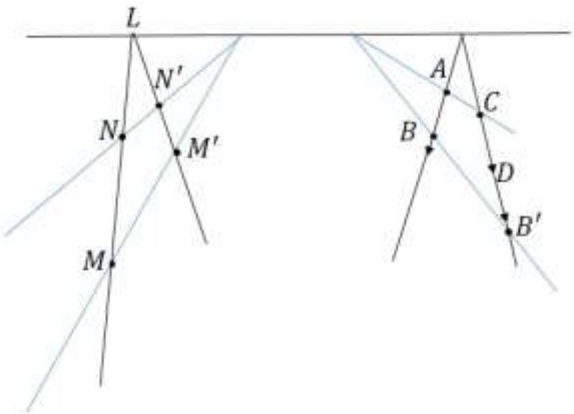
Энди $\overline{P}_2^{*}$ текисликдаги векторларни кўриб чиқамиз.

$\overline{P}_2^{*}$ текисликдаги кўчиришлар аффин коллинеацияси билан ҳосил қилинган $\overline{P}_2^{*}$ даги аффин алмаштиришларга параллел кўчиришлар дейилади. Агар аффин текисликда иккита A ва A' нуқталар берилган бўлса у ҳолда A ни A' га ўтказувчи ягона параллел кўчириши мавжуд.

Теорема. Аффин текисликдаги барча параллел кўчиришлар тўплами группа ҳосил қилади.

Параллел кўчиришлар векторлар алгебрасини проектив нуқтаий назардан талқин қилиш имконини беради.

Вектор деб маълум тартибда олинган A ва B нуқталар жуфтлигига айтилади ва $\overline{AB}$ кўринишда белгиланади. Агар A ва B нуқталарни мос равишда C ва D нуқталарга ўтказувчи параллел кўчириш мавжуд бўлса у ҳолда $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар тенг дейилади. Тенг векторлар таърифидан агар $\overline{MN}$ ва $\overline{M'N'}$ $\overline{M'N'}$ векторлар параллел тўғри чизиқларга тегишли бўлса у ҳолда MM' ва NN' тўғри чизиқлар бўлса, $\overline{MN}=\overline{M'N'}$ бўлади.



Векторларни қўшиш аналитик геометриядаги каби аниқланади. Векторни сонга кўпайтириш тушунчасини киритамиз. $\overline{OA}$ - нолмас вектор,

α - ихтиёрий ҳақиқий сон.

$$\alpha=-\left(A'AO\right)$$

шартни қаноатлантирувчи ягона A' нуқта мавжуд. $\overline{OA'}$ векторга $\overline{OA}$ векторни α сонга кўпайтмаси дейилади ва $\alpha\,\overline{OA}$ кўринишда белгиланади. Демак

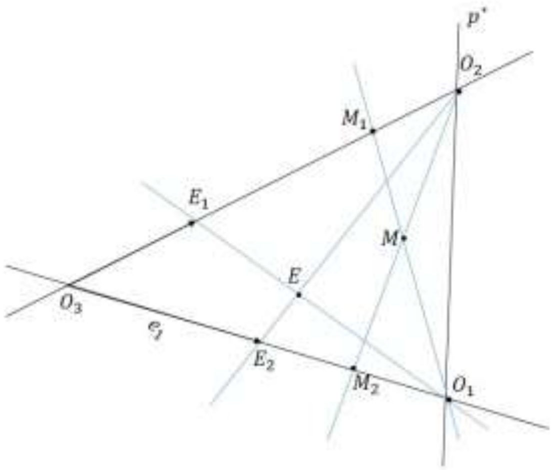
$$\overline{OA'} = -\left(A'AO\right)\overline{OA}$$

Агар $\overline{OA} = \overline{O}$ бўлса таърифга кўра

$$\alpha\overline{OA} = O$$

Энди аффин текисликда нуқталкрнинг координаталарини киритилишини кўриб чиқамиз.

Агар $O_1 \in p^*$ ва $O_2 \in p^*$ бўлса у ҳолда $O_1O_2O_3E$ проектив координаталар системаси P_2^* текисликнинг p^* абсолюти билан боғланган дейилади.



Агар

$$E_1 = O_1E \cap O_2O_3 \ , \qquad E_2 = O_2E \cap O_1O_3$$

бўлса у ҳолда O_3 нуқтадан ва

$$\overline{e_1} = \overline{O_3E_2} \ , \quad \overline{e_2} = \overline{O_3E_1}$$

векторлардан тузилган геометрик шаклга $\overline{P}_2^*$ текисликдаги координаталар системаси дейилади ва бу система $O_1\,O_2\,O_3\,I$ проектив система орқали ҳосил қилинган.

$O_1O_2O_3E$ системада p^* абсолют $x_3 = 0$ тўпламга эга. Шунинг ҳар бир $M\left(x_1 : x_2 : x_1\right)$ аффин нуқтанинг учинчи координатаси нолдан фарқли.

$$x = x_1 : x_3 \ , \quad y = x_2 : x_3$$

сонларига $M \in \overline{P}_2^*$ нуқтанинг $O_{e_1e_2}$ системадаги аффин координаталари дейилади.

x ва y сонларининг геометрик маъносини аниқлаймиз.

Мураккаб нисбатни аниқланишига кўра

$$x_2 : x_3 = \left(O_2O_3E_1M_1\right) \ , \qquad x_1 : x_3 = \left(O_1O_3E_2M_2\right).$$

Шундай қилиб

$x = -\left(M_2E_2O_3\right) \quad y = -\left(M_1E_1O_3\right)$ ёки

$$x = \frac{\overline{O_3M_2}}{\overline{O_3E_2}} \ , \qquad y = \frac{\overline{O_3M_1}}{\overline{O_3E_1}} \ . \qquad (1)$$

$O_3M_1MM_2$ - параллелограмм бўлгани учун

$$\overline{O_3M} = \overline{O_3M_1} + \overline{O_3M_2}$$

бўлади. Шунинг учун

$$\overline{O_3M} = x\overline{O_3E_2} + y\overline{O_3E_1} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2} \ . \qquad (2)$$

(1) ва (2) формулалар аффин текисликдаги формулалар билан устма – уст тушади. Координаталар боши вазифасини O_3 нуқта бажаради, базис векторлар эса $\overline{O_3E_2}$ ва $\overline{O_3E_1}$.

Масаланинг қўйилиши:

1.Проектив текисликдаги тайин тўғри чизиқли геометрия.

2. Аффин геометриясининг проектив талқини.

3. Учта нуқтанинг оддий нисбати.

4.Векторлар.

Ишни бажариш учун намуна.

Лемма. Агар берилган аффин гомологиянинг ўқи P_2^* текисликнинг абсолюти билан устма-уст тушмаса у ҳолда аффин гомологиянинг маркази абсолютга тегишли бўлади.

Исбот. ℓ ва L лар берилган гомологиянинг ўқи ва маркази бўлсин. p^* абсолютда ётувчи ва гомология ўқида ётмайдиган M

нуқтани оламиз ва бу нуқтанинг M' образини қараймиз. Агар $M' = M$ бўлса у ҳолда берилган гомология гиперболик бўлади ва

$$L = M = M'.$$

Шунинг учун $L \in p^*$ бўлади.

Агар $M' \neq M$ бўлса гомология маркази L нинг аниқланишига кўра L марказ MM' тўғри чизиқда ётади.
Биз

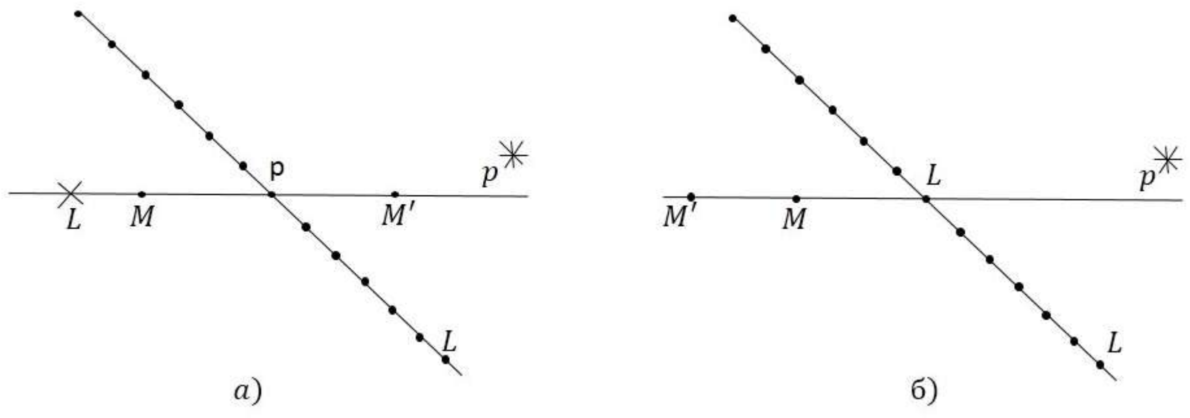
$$M \in p^*, \qquad M' \in p^* \Rightarrow L \in p^*$$

ларга эга бўлдик.

Аффин гомологияларнинг классификациясини гомология маркази L ва ўқи ℓ нинг p^* абсолютга нисбатан жойлашишига қараб олиб борамиз.

a) Аффин гиперболик гомология.
Бу гомология ўқи абсолют билан устма-уст тушмайди. Бу ҳолда

$$L \notin \ell, \quad L \in p^* \quad \text{ва} \quad C \neq p^*$$



Юқоридаги қисмлаштиришнинг қўзғалмас нуқтаси ℓ тўғри чизиқнинг барча нуқталари ва L нуқтаси бўлади.

b) Аффин пароболик гомология. Бу гомология ўқи абсолют билан устма-уст тушмайди.
расм

Бунда

$$L = \ell \cap p^* \quad \text{ва} \quad \ell \neq p^*.$$

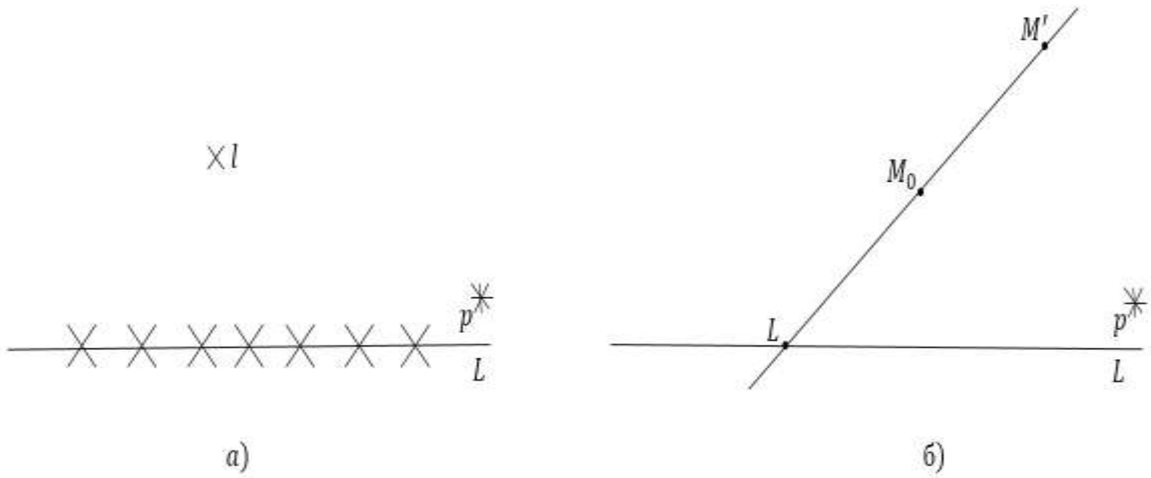
ℓ тўғри чизиқнинг барча нуқталари ва абсолютнинг битта нуқтаси аффин гомология маркази қўзғалмас нуқталар бўлади.

с) Ўқи абсолют билан устма-уст тушадиган аффин гиперболик гомология. Бу ҳолда

$$L \notin p^*, \quad \ell = p^*.$$

Абсолютнинг барча нуқталари ва $L \notin \ell$ нуқта қўзғалмас бўлади.

д) Ўқи абсолют билан устма-уст тушадиган аффин параболик гомология.



Бу ҳолда қўзғалмас нуқталар абсолютнинг барча нуқталари бўлади.

Назорат саволлари:

1. Проектив текисликдаги тайин тўғри чизиқли геометрия.
2. Аффин геометриясининг проектив талқини.
3. Учта нуқтанинг оддий нисбати. Векторлар.
4. Аффин ва Евклид геометриясининг проектив схемаси.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

5 - Амалий машғулот:

Топологик фазода *ind* ўлчами ва мисоллар.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш.

5.1. Топологик фазоларнинг *ind* ўлчами.

X регуляр фазо ва n- манфий бўлмаган бутун сон берилган бўлсин.

3.4.1-таъриф.

1) $indX = -1$ фақат ва фақат, $X = \varnothing$ бўлса;

2) агар ихтиёрий $x \in X$ ва унинг ихтиёрий атрофи *B* учун шундай очиқ $U \subset X$ топилса ва $x \in U \subset V$ ҳамда $indF_r U \le n-1$ ўринли бўлса, $indX \le n$;

3) агар $indX \le n$ тенгсизлик ўринли ва $indX \le n-1$ тенгсизлик бажарилмаса, $indX = n$;

4) агар $ind \le n$ тенгсизлик ҳеч бир n учун ўринли бўлмаса, $indX = \infty$.

Бу 1) − 4) шартлар ҳар бир *X* регуляр фазога $indX$ манфий бўлмаган бутун сонни ёки 1 ёхуд чексиз сон ∞ мос қўймоқда. Бошқача айтганда, *ind* функция барча регуляр фазолар оиласини $\{-1,0,1,2,...,n....+\infty\}$ тўпламга акслантиради. Яна шуни таъкидлаш лозимки, ўлчами бир хил бўлган фазолар топологик эквивалентдир. $indX$ сон регуляр фазонинг Менгер-Урисон ўлчами ёки кичик индуктив ўлчами дейилади. Осонгина текшириб кўриш мумкинки, агар X ва Y регуляр фазолар гомеоморф бўлса, у ҳолда $indX = indY$ ўринлидир.

3.4.2-таъриф. *X* топологик фазонинг E тўплами унинг $P \subset X$ ва $Q \subset X$ тўпламларини айиради (ёки ажратади), дейилади, агар $X \setminus E = H_1 \cup H_2$ бўлиб, H_1, H_2 дизюнкт ва $X \setminus E$ да очиқ ва $P \subseteq H_1; Q \subseteq H_2$ бўлса**.**

X топологик фазонинг регуляр бўлганлиги туфайли таърифдаги и2) шартнинг U тўпламини кучлироқ $\overline{U} \subset V$ шарт билан алмаштирсак ҳам бўлади. Бу ҳолда $indX \le n \ge 0$ тенгсизлик ихтиёрий $x \in X$ нуқта билан бу нуқтани ўз ичига олган ихтиёрий F ёпиқ тўпламни ўлчами $indF \le n-1$ бўлган тўплам орқали ажратиш мумкин бўлса.

Менгер-Урисон ўлчами таърифидан бевосита айтишимиз мумкин: агар X фазонинг шундай β базаси мавжуд бўлса ва $indX \leq n$ бу фазонинг ихтиёрий $U \in \beta$ элементи учун $F_2U \leq n-1$ ўринли бўлса.

Топологик фазонинг регулярлиги наслий хосса бўлганлиги туфайли, агар X фазода инд ўлчам аниқланган бўлса, у ҳолда унинг ихтиёрий фазоостиси $M \leq X$ да ҳам $indX$ ўлчам аниқланган бўлади.

3.4.3-теорема. Регуляр топологик фазонинг ихтиёрий M фазоостиси учун $indM \leq indX$ ўринли.

Исбот. Агар $indX = 1$ ёки $indX = \infty$ бўлса, теорема шартидаги тенгсизлик ўринлидир. Юқоридаги $indM \leq indX$ тенгсизлик $indX \leq n-1$ шартни қаноатлантирувчи барча X фазолар учун исботланган бўлсин. Энди X регуляр фазо ва $indX = n$ бўлсин ва ихтиёрий $x \in M$ нуқтани олайлик. V тўплам x нуқтанинг M даги ихтиёрий атрофи бўлсин. X да V_1 ихтиёрий очиқ тўплам оламиз, у $V = V_1 \cap X$ шартни қаноатлантирсин. $indX \leq n$ бўлганлиги сабабли шундай $U_1 \subset X$ очиқ тўплам топиладики, у учун

$x \in U_1 \subset V_1$ ва $indFrU_1 \leq n-1(1)$

$U = M \cap U_1$ тўплам x нуқтанинг M атрофи бўлади, унинг M даги чегараси $FrU = M \cap \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M \setminus U_1}$. U_1 нинг X даги чегарасининг фазоостидир.

Бинобарин, (1) ва индуктив шартга кўра, $indM \leq n$.

Энди X нормал фазо ва n манфий бўлмаган бутун сон бўлсин.

3.4.4-таъриф.

1) $IndX = -1$ фақат ва фақат, $X = \varnothing$ бўлса;

2) агар ихтиёрий $V \subset X$ атрофи учун шундай $U \subset X$ очиқ тўплам топилмаса ва у учун $A \subset U \subset V$ ва $IndFrU \leq n-1$ ўринли бўлса; $IndX \leq n$ бўлади.

3) агар $IndX \leq n$ бўлса ва $IndX \leq n-1$ тенгсизлик бажарилмаси $IndX = n$ бўлади.

4) агар $IndX \leq n$ тенгсизлик ҳеч бир n учун ўринли бўлмаса $IndX = \infty$

бўлади.

1) − 4) шартлар ҳар бир нормал X фазо учун $IndX$ сонни мос келтирмокда, бу $IndX$ ёки $\geq/-1$ бутун сон ёки “чексиз катта” ∞ сондан иборатдир. $IndX$ сон X нормал фазонинг Брауер-Чех ўлчами ёки катта индуктив ўлчами деб юритилади. Агар X ва Y фазолар гомеоморф бўлса, у ҳолда $IndX = IndY$ эканлиги осонгина текширилади.

Бу таърифдан ҳамда X нормал фазо бўлганлиги туфайли И2) шартдаги U тўпламни янада кучлироқ шарт $\overline{U} \subset V$ билан алмаштирса бўлади. Бу ҳолда 2) шарт қуйидаги кўринишга келади:

$IndX \leq n$ тенгсизлик шуни англатади: агар X фазода ихтиёрий икки ёпиқ кесишмайдиган $A \subset X$ ва $B \subset X$ тўпламлар чегарасининг ўлчами $\leq n-1$ дан иборат бўлган тўплам билан ажратилган (ёки айирилган) бўлса.

Қуйидаги теореманинг исботи ўқувчига қийинчилик туғдирмайди. Бу теорема кичик ва катта индуктив ўлчамлар деб аталишини оқлайди.

5.2. *ind* ўлчами хоссалари.

3.4.5-теорема. Агар X нормал фазо бўлса, у ҳолда $indX \leq IndX$. Маълумки, нормал фазолар наслий хоссага эга эмас. Қуйидаги теорема ҳам 3.4.3-теоремага ўхшаб исботланади.

3.4.6-теорема. Нормал фазонинг ихтиёрий $M \subset X$ ёпиқ фазоостиси учун $IndM \leq IndX$ тенгсизлик ўринлидир.

Бўш бўлмаган X тўплам берилган бўлсин, $A = \{A_\alpha : A_\alpha \subset X, \alpha \in J\}$ тўпламостилар системаси карраси деб шундай энг катта бутун n сонга айтиладики, A системанинг $n+1$ та элементи кесишмаси бўш бўлмаса ёки “чексиз сон” ∞ дейилади, агар бундай бутун сон мавжуд бўлмаса. Демак, агар A системанинг тартиби n га тенг бўлса, у ҳолда ихтиёрий $n+2$ та ҳар хил $S_1, S_2, \ldots S_{n+2} \in J$ индекс учун $A_{s1} \cap A_{s1} \cap \ldots \cap A_{s_{n+2}} = \varnothing$ ўринли. A системанинг карраси $ordA$ кўринишида белгиланади.

Масаланинг қўйилиши:

1. Саноқли фазо таърифи ва мисоллар.

2. Метрик фазолар деб қандай фазога айтилади?
3. Яна қандай ўлчамларни биласиз?
4. Топологик фазоларнинг ind ўлчами.
5. Ind ўлчами хоссалари.

Ишни бажариш учун намуна.

Теорема. Регуляр топологик фазонинг ихтиёрий M фазоостиси учун $indM \le indX$ ўринли.

Исбот. Агар $indX = 1$ ёки $indX = \infty$ бўлса, теорема шартидаги тенгсизлик ўринлидир. Юқоридаги $indM \le indX$ тенгсизлик $indX \le n-1$ шартни қаноатлантирувчи барча X фазолар учун исботланган бўлсин. Энди X регуляр фазо ва $indX = n$ бўлсин ва ихтиёрий $x \in M$ нуқтани олайлик. V тўплам x нуқтанng M даги ихтиёрий атрофи бўлсин. X да V_1 ихтиёрий очиқ тўплам оламиз, у $V = V_1 \cap X$ шартни қаноатлантирсин. $indX \le n$ бўлганлиги сабабли шундай $U_1 \subset X$ очиқ тўплам топиладики, у учун

$x \in U_1 \subset V_1$ ва $indFrU_1 \le n-1(1)$

$U = M \cap U_1$ тўплам x нуқтанинг M атрофи бўлади, унинг M даги чегараси $FrU = M \cap \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M \setminus U_1}$. U_1 нинг X даги чегарасининг фазоостидир.

Бинобарин, (1) ва индуктив шартга кўра, $indM \le n$.

Назорат саволлари:

1. Саноқли фазо таърифи ва мисоллар.
2. Метрик фазолар деб қандай фазога айтилади?
3. Яна қандай ўлчамларни биласиз?
4. Топологик фазоларнинг ind ўлчами.
5. ind ўлчами хоссалари.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” -Т. 2012 240 бет.

6- Амалий машғулот:

Топологик фазода *dim* ўлчами ва мисоллар.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш.

Топологик фазоларнинг *dim* ўлчами.

1-таъриф. Агар шундай $f: X \to [0,1]$ функсия мавжуд бўлиб, унинг учун $f^{-1}(0) = A$ бажарилса, X топологик фазонинг A тўпламостиси функсионал ёпиқ тўплам дейилади.

X фазонинг функсионал ёпиқ тўпламларининг тўлдирувчиси функсионал очиқ тўплам дейилади. Таърифдан маълум бўладики, функсионал ёпиқ тўплам ёпиқ тўпламдир. Шу сабабли функсионал очиқ тўплам очиқ тўплам бўлади.

Энди X Тихонов фазоси, n бутун сон ва $n \geq -1$ бўлсин.

2-таъриф. 1) агар X фазонинг ихтиёрий функсионал очиқ чекли қопламасига карраси $\leq n$ бўлган функсионал очиқ чекли қоплама чизиш мумкин бўлса; $\dim X \leq n$ бўлади.

2) агар $\dim X \leq n$ ўринли, лекин $\dim X \leq n-1$ ўринли бўлмаса; $\dim X = n$ бўлади.

3) агар $\dim X \leq n$ тенгсизлик барча n лар учун бажарилмаса, $\dim X = \infty$; бўлади.

1) − 3) шартлар ҳар бир Тихонов фазоси X га $\dim X$ сонни мос келтирмокда. Бу $\dim X$ сон ёки бутун сон ≥ 1 ёхуд “чексиз сон” ∞ бўлар экан. $\dim X$ сон X Тихонов фазосининг Чех-Лебег ўлчами ёки фазонинг қоплама маъносида ўлчами деб юритилади. Агар X ва Y фазолар гомеоморф бўлса, $\dim X = \dim Y$ ўринли бўлади.

Фазонинг қоплама маъносидаги таърифидан бевосита айтиш мумкинки, $X=\varnothing$ бўлган тақдирдагина $\dim X\le -1$ бўлади.

Тихонов фазолари наслий хоссага эга бўлгани учун, агар бундай X да $\dim$ аниқланган бўлса, унинг ихтиёрий фазоостисида ҳам $\dim$ аниқлангандир.

Қуйидаги теоремани исбоциз келтирамиз. Бу теорема кўп ҳолларда таъриф сифатида ҳам қабул қилинади.

dim ўлчами хоссалари.

1-теорема. Ҳар бир X нормал фазо учун қуйидаги икки шарт эквивалентдир:

1) $\dim X\le n$;

2) X фазонинг ихтиёрий чекли очиқ қопламасига карраси $\le n$ бўлган чекли очиқ қоплама чизиш мумкин.

Агар X метрик ҳамда саноқли базага эга бўлган фазо бўлса, келтирилган ўлчам $\dim$, келтирилган ўлчам $\dim$ ва келтирилган ўлчамлар ind, Ind ва $\dim$лар ўзаро эквивалентдир. Яъни, саноқли базага эга бўлган метрик X фазо учун қуйидаги тенглик доимо ўринли:

$\dim X = indX = IndX$

Масаланинг қўйилиши:

1. Топологик фазоларнинг *ind* ўлчами, мисоллар.
2. Қоплама таърифи, мисоллар.
3. Яна қандай ўлчамларни биласиз?
4. *dim* ўлчами хоссалари.
5. Топологик фазоларнинг *dim* ўлчами.

Ишни бажариш учун намуна.

Қоплама маъносида ўлчам артларини айтинг.

Жавоб: 1) агар X фазонинг ихтиёрий функсионал очиқ чекли қопламасига карраси $\le n$ бўлган функсионал очиқ чекли қоплама чизиш мумкин бўлса; $\dim X\le n$ бўлади.

2) агар $\dim X \le n$ ўринли, лекин $\dim X \le n-1$ ўринли бўлмаса; $\dim X = n$ бўлади.

3) агар $\dim X \le n$ тенгсизлик барча n лар учун бажарилмаса, $\dim X = \infty$; бўлади.

1) − 3) шартлар ҳар бир Тихонов фазоси X га $\dim X$ сонни мос келтирмоқда. Бу $\dim X$ сон ёки бутун сон ≥ 1 ёхуд “чексиз сон” ∞ бўлар экан. $\dim X$ сон X Тихонов фазосининг Чех-Лебег ўлчами ёки фазонинг қоплама маъносида ўлчами деб юритилади. Агар X ва Y фазолар гомеоморф бўлса, $\dim X = \dim Y$ ўринли бўлади.

Назорат саволлари.

1. Топологик фазоларнинг *ind* ўлчами, мисоллар.
2. Қоплама таърифи, мисоллар.
3. Яна қандай ўлчамларни биласиз?
4. *dim* ўлчами хоссалари.
5. Топологик фазоларнинг *dim* ўлчами.

Фойдаланилган адабиётлар.

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.
2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.
3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

7-Амалий машғулот :

Топологик фазонинг фундаментал группаси.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш.

Ёпиқ йўллар.

<u>Тариф.1.</u> Агар f учун $f(0)=f(1)$ ўринли бўлса, $f\in S(I,X)$ йўл ёпиқ дейилади. Агар $f(0)=f(1)$ бўлса, F йўл X фазонинг x нуқтасидаги ёпиқ йўли дейилади.

Кўп адабиётларда ёпиқ йўлни илмоқ (петля) ёки ҳалқа деб ҳам аташади.

Таъкидлаш мумкинки, X нинг бирорта x нуқтасида x да ёпиқ ихтиёрий жуфт f ва g лар учун $f*g$ аниқланган. $S(I,X)$ топологик фазонинг x нуқтадаги ёпиқ йўллар эквивалентлик синфини $\pi(X,x)$ билан белгилаймиз. Равшанки, $\pi(X,x)\subset C(I,X)$. 4.3.6-леммадан маълумки, агар $[f],[g]\in\pi(X,x)$ бўлса, у ҳолда $[f]*[g]\in\pi(X,x)$ бўлади. $\pi(X,x)$ тўплам X топологик фазонинг x нуқтадаги фундаментал гуруппаси дейилади.

Топологик фазонинг фундаментал гуруппаси

$S(I,X)$ фазода аниқланган йўлларнинг эквивалентлик синфлари (агар $\{0,1\}$ га нисбатан гомотоп бўлса, йўллар эквивалент) аксиомалар гуруҳсининг деярли ҳаммасини қаноатлантиради. Бу тўпламда, яъни $C(I,X)$ да муаммо шундаки, кўпайтириш доимо аниқланмаган, чунки бирлик элемент маълум маънода “сузади” (плавает). Бу қийинчиликни бартараф этиш учун ёпиқ йўллар синфини кўриб чиқамиз.

<u>1-Тариф.</u> Агар f учун $f(0)=f(1)$ ўринли бўлса, $f\in S(I,X)$ йўл ёпиқ дейилади. Агар $f(0)=f(1)$ бўлса, F йўл X фазонинг x нуқтасидаги ёпиқ йўли дейилади.

Кўп адабиётларда ёпиқ йўлни илмоқ (петля) ёки ҳалқа деб ҳам аташади.

Таъкидлаш мумкинки, X нинг бирорта x нуқтасида x да ёпиқ ихтиёрий жуфт f ва g лар учун $f*g$ аниқланган. $S(I,X)$ топологик фазонинг x нуқтадаги ёпиқ йўллар эквивалентлик синфини $\pi(X,x)$ билан белгилаймиз. Равшанки, $\pi(X,x)\subset C(I,X)$. 4.3.6-леммадан маълумки, агар $[f],[g]\in\pi(X,x)$ бўлса, у ҳолда $[f]*[g]\in\pi(X,x)$ бўлади. $\pi(X,x)$ тўплам X топологик фазонинг x нуқтадаги фундаментал гуруҳси дейилади.

<u>1-Теорема.</u> $\pi(X,x)$ тўплам $C(\tau,X)$ фазода гуруҳ ташкил қилади.

Маълумки, бу тўпламда * амали аниқланади, $[f],[g]\in\pi(X,x)$ бўлса, у ҳолда $[f],[g]\in\pi(X,x)$ бўлади. Бирлик элементи эса$[\varepsilon_x]$ дан иборат.

Тескари элемент $[[f]^{-1}=[\overline{f}]$ тенглик билан аниқланади. Амалнинг ассоциативлиги 4.3.7-леммадан келиб чиқади. Бунинг учун $[(g*h)oh]$ ёзуви ўрнига кўп ҳолларда $[f*g*h]$ ёзувни ишлатамиз.

Мисол 4.4.3. Агар X чекли дискрет топологик фазо бўлса, $\pi(X,x)=0$. Яъни бу π(X,x) гуруҳ элементлари$[\varepsilon_x]$ лардан иборат.

<u>2-Теорема.</u> $x,y\in X$. Агар X фазода x ва у ларни боғловчи йўл мавжуд бўлса, $\pi(X,x)$ ва $\pi(X,y)$гуруҳлар изоморф бўлади.

Исбот. X фазонинг x ва y нуқталари орасидаги йўл f бўлсин, яъни $f\in C(I,X)$ ва $f(0)=x$ ва $f(1)=y$. Агар $g\in C(I,X)$ x нуқтадаги ёпиқ йўл бўлса, у ҳолда $(f*g)*f$ y нуқтада ёпиқ йўл бўлади. Шу сабабли, $U_f:\pi(X,x)\to\pi(X,y)$ акслантиришни $u_f(g)=[\overline{f}*g*f]$ формуласи билан аниқлаймиз. Бу акслантириш гуруҳлар гомоморфизми бўлади, чунки

$$u_f([g][h])=u_f[g*h]=[\overline{f}*g*h]=[\overline{f}*f*\overline{f}*h*f]=\overline{f}*g*h][\overline{f}*h*f]=u_f[g]u_f[f]$$

ўринлидир. Тескари йўл $\overline{f}$ ни, яъни y ва x лар орасидаги йўлни қўллаб, $U_f:\pi(X,y)\to\pi(X,x)$ ни $u_f(h)=[f*\overline{h}*$ формуласи билан аниқлаймиз. Текшириш натижасида $u_fu_f[g]=[g]$ ва $u_fu_f[h]=[h]$ ларга эга бўламиз. Демак, u_f биектив акслантириш экан. Шу сабабли U_f изоморф бўлади.

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижага эга бўламиз.

1-Натижа. Агар X фазо чизиқли боғламли бўлса, унинг ихтиёрий x

ва у элементлари учун $\pi(X,x)$ ва $\pi(X,u)$ гуруҳлар изоморф бўлади.

Бу натижада X чизиқли фазо бўлганлиги аҳамиятлидир. X ни боғламли фазога алмаштириб ҳам бўлмайди. Чунки кейинги бўлимларда танишамизки, X боғламли бўлганида, $\pi(X,x)$ ва $\pi(X,x)$ орасида доимо изоморфизм ўрнатиб бўлмайди. X чизиқли фазо бўлганида $\pi(X,x)$ белгилашларда x ни ташлаб юборсак бўладими? Бу бироз хавфли, чунки $\pi(X,x)$ ва $\pi(X,u)$ орасида каноник изоморфизм бўлмайди, сабаби x ва u лар ўртасидаги ҳар хил йўллар турлича изоморфизмни аниқлаши мумкин. X ва Y топологик фазоларда $\varphi: X \to Y$ узлуксиз акслантириш берилган бўлсин. Маълумки, $S(I,X)$ ва $S(I,Y)$ топологик фазоларга мос равишда $\pi(X,x)$ ва $\pi(Y,y)$ гуруҳлари бор. Қуйидаги уч факт равшандир:

- агар *ф,гєС(И,Х)* бўлганда, $\varphi f \quad \varphi g \in C(I,Y)$; бўлади.
- агар $f \sim g$ бўлса, у ҳолда $\varphi f \sim \varphi g$; бўлади.
- $f(0) = f(1) = x$ бўлса, яъни f йўл нуқтада ёпиқ йўл бўлса, $f \in C(I,X)$ бўлади. $\varphi g \in C(I,Y)$, $\varphi f(0) = \varphi f(1) = \varphi(x)$ яъни φf йўл $\varphi(x)$ нуқтадаги ёпиқ йўл экан.

Демак, агар $[f] \in \pi(X,x)$ бўлса, у ҳолда $[\varphi f]$ коррект аниқланган ва $[\varphi f'] \in \pi\ (Y,\varphi(x))$ бўлади.

Шу сабабли $\varphi * \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$ акслантиришни $\varphi* = ([f]) = [\varphi f]$ тенглик билан аниқлаймиз.

Лемма 1. $\varphi * \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$ гомоморфизмдир.

Ҳақиқатда ҳам,

$$\varphi * ([f][g]) = \varphi * [f * g] = [\varphi(f * g)] = [\varphi(\varphi * g)] = [\varphi f][\varphi g] = \varphi * [f]\varphi * [g]$$

$\varphi * \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$ гомоморфизм $\varphi: X \to Y$ узлуксиз акслантиришнинг индуцирланган гомоморфизми деб юритилади.

Қуйидаги икки тасдиқ исбосиз келтирамиз.

3- Теорема.

– агар $\varphi: X \to Y$ ва $\Psi: Y \to Z$ узлуксиз акслантиришлар бўлса, у ҳолда $(\Psi\varphi) * \Psi * \varphi *$;

- агар $1_x : X \to X$ айний аксланитириш бўлса, $1_x * : \pi(X,x) \to (X,x)$ айний гомоморфизм.

2 - Натижа: Агар $\varphi : X \to U$ гомоморфизм бўлса, у ҳолда $\varphi * : \pi(X,x) \to \pi(U,\varphi(x))$ изоморфизмдир.

Демак, фундаментал гуруҳ топологиядан алгебрага ўтиш учун бир восита бўлмоқда. Бу жараённинг характерли жиҳатлари қуйидагилар:

1) бир топологик фазога (белгили нуқтали) унинг биз ўрганган фундаментал гуруҳиси мос қўйилмоқда;

2) топологик фазолар орасидаги акслантиришларга (индуцирланган) гуруҳлар гомоморфизми мос қўйилмоқда;

3) узлуксиз акслантиришлар композициясига индуцирланган гомоморфизмлар композицияси мос қўйилмоқда;

4) айний акслантиришга айний гомоморфизм мос қўйилмоқда;

5) гомеоморфизмга эса изоморфизм мос қўйилмоқда.

Баён қилинган топологиядан алгебрага ўтиш жараёни алгебраик жараён деб юритилади. Алгебраик топология қандай масалалар билан шуғулланади ёки алгебраик топология қандай жумлага яхши мисол бўлади?

Қуйидаги теоремани исбосиз келтирамиз.

<u>4 -Теорема.</u> Агар φ:X→У гомотопик эквивалентлик бўлса, ихтиёрий $x \in X$ учун $\varphi * : \pi(X,x) \to \pi(U,\varphi(x))$ изоморфизмдир.

3 -Натижа. Тортилувчан фазолар (стиягиваемое пространство) тривиал фундаментал гуруҳга эга.

<u>2 - Таъриф.</u> Агар X чизиқли боғламли ва ихтиёрий нуқтасида $\pi(X,x) = \{1\}$ ўринли бўлса, x топологик фазо бир боғламли дейилади,

Демак, тортилувчан фазолар бир боғламли экан. Қуйидаги теоремани ҳам исбосиз келтирамиз.

<u>5 -Теорема.</u> X ва U топологик фазолар чизиқли боғламли бўлсин. XxU кўпайтманинг фундаментал гуруҳси бу фазолар фундаментал гуруҳларининг кўпайтмасига изоморфдир. Яъни, $\pi\left(X \times Y\right) = \pi\left(X\right) \times \pi\left(Y\right)$.

Биз ўрганган $\pi(X, x_0)$ фундаментал гуруҳ кўп ҳолларда $\pi_1(X, x)$ кўринишда белгиланади, чунки 1 индекс фундаментал гуруҳ таърифидаги йўлда $S(I, X)$ фазонинг $[0,1]=I$ нинг бир ўлчамли фазо бўлганлиги учун олинмоқда.

Умумий ҳолда $\pi_n(X_1, X_0)$ фундаментал гуруҳнинг акслантиришларини $S(I^n, X)$ фазодан олиш мумкин. Бу $\pi_n(X_1, X_0)$ фундаментал гуруҳ X фазонинг x_0 нуқтадаги n-ўлчамли гомотопик гуруҳси дейилади. Бу таъриф билан қисқача таништирамиз.

I^n куб, яъни $I^n = IxIx...xIx....xI^n, \partial I^n$ тўплам унинг чети, яъни $\partial I^n = \{x \in I^n : x = (x_1 ... x_n), x_1 = 0$ ёки $1\}$.

$\pi_n(X, x_0)$ тўплам ∂I^n га нисбатан гомотопик синфлардан иборат бўлиб, $f \in C(I^n, X)$ акслантиришлар $f(\partial I^n) = x_0$ шартни қаноатлантиради.

$[f][g]=[f*g]$ кўпайтма қуйидагича аниқланади:

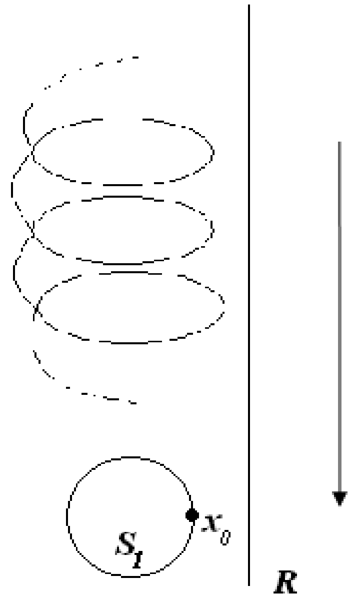
$$(f*g)(t)=\begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n);\ agar\ 0 \le t_1 \le \dfrac{1}{2}\ bo'lsa, \\ g(2t_1-1, t_2, ..., t_n);\ agar\ \dfrac{1}{2} \le t_1 \le 1\ bo'lsa. \end{cases}$$

Бундай аниқланган кўпайтириш амали корректдир ва шу сабабли $\pi_n(x_1, x_0)$ гуруҳ стуруктурасини беради. Албатта, $n=1$ бўлса, $\pi_n(X, x_0)$ фундаментал гуруҳга эга бўламиз. $\pi_n(X, x_0)$ фундаментал гуруҳ ҳар доим ҳам абел гуруҳси эмас, лекин $n \ge 2$ бўлганда, доимо Абел гуруҳидир.

Айлана ва баъзи сиртларнинг фундаментал гуруҳи

Бу параграфда айлананинг фундаментал гуруҳсини ҳисоблаймиз ва унинг бутун сонлар тўплами Z га изоморф эканлигини кўрсатамиз. Сўнгра сиртлар тор, сфера, проектив RP^2 фазоларнинг фундаментал гуруҳларини аниқлаймиз.

Ихтиёрий $f \in C(I, S^1)$ ёпиқ йўлни олайлик, бунда $x_0 \in S^1, f(0)=1$ дан иборат бўлсин. Ҳар бир бундай $f \in C(I, S^1)$ $f(0)=x_0$ S^1 ёпиқ йўлни олсак, айланани бир неча марта ўралган, деб тушуниш мумкин. Бу ўрамлар сонини шу ёпиқ $f \in C(I,S)$ йўлнинг даражаси дейишимиз мумкин, яъни $x_0 \in S^1$ нуқтадан ҳар бир $f \in C(I,S^1)$ ёпиқ йўлга бирорта бутун сон н ёки n мос қўйилган десак бўлади. Агар айланани ўраган ёпиқ йўл соат милига тескари н марта ўралган бўлса, бу сон n деб олинади. Шуни таъкидлаш мумкинки, агар уларнинг даражалари тенг бўлса, икки ёпиқ йўл фақат ва фақат эквивалентдир ($\{0,1\}$га нисбатан гомотоп). Шундай қилиб, ҳар бир н сон учун даражаси н га тенг бўлган ёпиқ йўл мавжуддир.



4.5.1-rasm

Ёпиқ йўлнинг аниқ ва қатъий таърифини келтириш учун ҳақиқий сонлар ўқи R ва $e(t) = e^{nit}$ формуласи билан аниқланган узлуксиз $e: R \to S^1$ ни олайлик. Геометрик нуқтаи назардан ҳақиқий сонлар тўғри чизиғини спирал шаклида тасаввур қиламиз, проексияни е акслантириш деб оламиз (4.5.1-расм).

Бу ҳолда айтишимиз мумкинки, $ye^{-1}(1) = Z$. Фикримиз шундан иборатки, агар $f \in C(I,S)$ учун $f(0) = f(1) = 1$ ўринли бўлса, шундай ягона $\overline{f} \in C(I,S)$ топиладики, унинг учун $\overline{f}(0) = 0$ ва $e\overline{f} = f$ ўринли бўлади. Бу ерда бу $\overline{f}$ акслантириш f акслантиришнинг тикланмаси (поднятия) дейилади. Демак, $f(1) = 1$, у ҳолда $\overline{f}(1) = e^{-1}(1) = Z$. Бу бутун сон f акслантиришнинг даражаси дейилади.

__**Лемма.**__ Айтайлик, $U \subset S^1\{1\}$ очиқ тўплам ва $V = I \bigcap e^{-1}(U) \subset R$бўлсин. У ҳолда $ye^{-1}(U)$ тўплам $V + n = \{v + n : v \in V\}$ $n \in Z$ кўринишдаги очиқ тўпламларнинг дизъюнкт бирлашмасидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бирини e гомеоморф тарзда U га акслантирилади.

Исбот: Айтишимиз мумкинки, U-очиқ интервал, яъни $U = \{2\pi it : 0 \le a \le t \le b \le 1\}$ а,б сонлар. У ҳолда $V = (a,b)$ ва $V + n = (a+n, b+n)$,Равшанки, $\ell^{-1}(U)^{-1}$(У) тўплам $V + n$, $n \in N$, кўринишдаги очиқ тўпламларнинг дизъюнкт бирлашмасидан иборат. Айтайлик, $e_n = e(a+n, bb+n)$ бўлсин. Равшанки, l_n узлуксиз ва биектив. e_n^{-1}нинг узлуксизлигини текшириш учун $x \in (a+n, b+n)$нуқтани оламиз ва шундай кичик$\varepsilon > 0$ оламизки, $x \in W = [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset W$ ўринли бўлсин. W кесма компакт бўлгани ва S^1 Хаусдорф бўлгани учун $e_n : W \to \ln(W)$ гомеоморфизмни аниқлайди. $\ln(x)$ нуқта$\ln(x)$ ёйнинг охири бўла олмайди, чунки ундай ҳолда лн[1]гомсоморфизмда $\ln(x) \setminus \ln(x)$боғламли тўплам образи боғламсиз $W \setminus \{x\}$ тўплам бўлиши мумкин. Шу сабабли$\ln(W)$ тўплам $\ln(x)$ нуқтанинг S^1 даги ва У даги очиқ атрофидир ва ye_n^{-1} акслантиришнинг бу тўпламлардаги чеклови (чекланиши) гомеоморфизмдир. Демак, $e(x)$ фунсияда нуқтада узлуксиз, $x \in (a+n, b+n)$ нуқтанинг ихтиёрийлигидан e_n^{-1} акслантириш $x \in ((a+n, b+n)) = U$ да узлуксиздир. Шу сабабли e_1 — гомеморфизм.

Шуни таъкидлаш керакки, 4.5.1-лемма $S^1 \setminus \{x\}$ учун ўринли, бу ерда $x \in S^1$ нинг ихтиёрий натижасидир.

<u>Натижа .</u> Агар акслантириш $f : X \to S^1$ сюръектив бўлмаса, у ҳолда ф нолга гомотоп бўлади.

Исбот: Агар х $x \bar{\varepsilon} f(X)$бўлмаса, у ҳолда$S^1 \setminus \{x\}$ фазо (0,1) га гомеоморфдир. ($x = e^{2\pi is}$ва $S^1 = \{e^{2\pi is} : s \le t \le 1+s\}$). Бу ерда (0,1) интервал тортилувчан фазодир.

Бу теорема $S(I, S^1)$ да ёпиқ йўлнинг даражасини таърифлашда қўл келади. $1 \in S^1$ нуқтадаги $f \in C(I, R)$ ёпиқ йўл бўлсин ва $\bar{f} \in C(I, R)$ унинг ягона тикланмаси бўлиб, $f(0) = 0.$ $e^{-1}(f(1)) = e^{-1}(1) = Z$ бўлгани учун $\bar{f}$ (1) — бутун сон. Шу сон $\bar{f}$ нинг даражаси дейилади.

<u>Лемма:</u> Ҳар бир $F \in C(I^2, S^1)$ акслантириш $\tilde{F} \in C(I^2, R)$тикланмага эга. Ваҳоланки, агар $x_0 \in R$ва $\ell(x_0) = F(0,0)$бўлса, у ҳолда шундай ягона $\tilde{F}$ тикланма мавжудки, унинг учун $\tilde{F}(0,0) = x_0$ бўлади.

Исбот: Олдинги теорема исботидаги мулоҳазаларни давом эттирамиз.

I^2 квадрат компакт бўлганлиги туфайли a_i ва b_i сонларни шундай танлаймизки, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$0 = a_0 < a_i < ... < a_n = 1, 0 = b_0 < b_1 < ... < b_m = 1$

$F(R_{is}) \subset S_{is}$, бу ерда R_{is} тўғри тўртбурчак, $i = \overline{0,n} j = \overline{o,m}$

$R_{is} = \{(t,s) \in I^2 : a_i \le t \le a_{i+1}; b_j \le s \le b_{j+1}\}$ S_{ij} тўплам С^{1}даги очиқ тўплам, у учун $ye^{-1}(S_{ij})$. Бу R даги очиқ тўпламларнинг дизъюнкт бирлашмаси бўлиб, уларнинг ҳар бири e натижасида Сиж га гомеоморф аксланади. Бу ерда тўғри тўртбурчаклардаги $R_{oo}, R_{oi}, ..., R_{om} R_{io}, R_{ii}, ...,$ $\tilde{F}$ тикланма индуксия бўйича олдинги теоремага ўхшаб аниқланади. Қолган баъзи (исботнинг) қисмларни тиклаш ўқувчига ҳавола.

Натижа: 4.5.5. $f_0 f_1 \in C(I,S)$ лар S^1 нинг l нуқтасидаги эквивалент йўллар бўлсин. Агар $\tilde{f}_0$ ва $\tilde{f}_1$ тикланмалари бўлиб, $\tilde{f}_0(0) = f_1(0)$ бўлса, у ҳолда $\tilde{f}_0(1) = f_1(1)$ бўлади.

Исбот: f_0 ва f_1 орасидаги $\{0,1\}$ га нисбатан Ф гомотопия бўлсин.

Ф бир қийматли $\tilde{F} : I^2 \to R$ гача тикланмага эга бўлиб, $\tilde{F}(0,0) = f_0(0) = f_0(0).$ $F(t,0) = f_0(t)$ ва $F(t,1) = f(t)$ бўлгани учун $F(t,0) = f_0(t)$ ва $F(t,1) = f_1(t)$ваҳоланки, $F(t,1) = f_1(t)$ $\tilde{f}_0(1)$ (дан $\tilde{f}_1(1)$ гача бўлган йўл $\tilde{F}(1,t)$, $\tilde{F}(1,t) = f_0(1) = f_1(1)$. Бундан $F(1,t)$ ўзгармас (доимий) йўл ва $f_0(1) = f_1(1)$ $\tilde{f}_0$. Бундан кўринадики, $\tilde{F}$ йўл f_0 ва f_1 лар орасидаги $\{0,1\}$ га нисбатан гомотопиядир.

<u>**Теорема.**</u> $\pi(S^1,1) \approx Z$.

Исбот: $\varphi : \pi(S^1,1) \to Z$ акслантиришни оламиз ва уни $\varphi([f]) = \deg f$ кўринишда аниқлаймиз; бу ерда $\deg f$ дегф белги f нинг даражасини билдиради. Таъкидлаймизки, $\deg f = f(1)$, бу ерда $\tilde{f}$ акслантириш f нинг ягона тикланмаси бўлиб, $\tilde{f}(0) = 0$. Олдинги натижага кўра, φ акслантириш коррект аниқлангандир.

φ нинг гуруҳлар орасидаги изоморфизм эканлигини кўрсатамиз.

Олдин φ нинг гомоморфизмлигини кўрсатайлик.

Айтайлик, $1_a(f)$ акслантириш f фтикланманинг бошланиши $a \in e^{-1}(f(0))$ бўлсин. Демак, $e_0(f)=\tilde{f}\hat{a}\grave{a}e_\alpha(f)(t)=\tilde{f}(t)+a$ бирорта бошланиши 1 да бўлган S^1 йўлдир. Равшанки, $1_a(f*g)=1_a(f)*1_a(g)$, бу ерда б=$b=\tilde{f}(1)+a$.

Демак, агар $[g],[f]\in(S^1,1)$ (С^1,1) бўлса, у ҳолда
$([f][g])=\varphi([f*g])=[\tilde{f}*g](1)=\ell_0(f*g)=(\ell_0(f))*\ell_b(g))(1)=1_b(g)(1)=b+\tilde{g}(1)=f(1)+\tilde{g}(1)=$ $\varphi([f])+\varphi([g])$ бўлади. Бу ерда $b=f(1)$. Демак, φ — гомоморфизм.

Энди φ акслантиришнинг сюръектив эканлигини кўрсатамиз. $n\in Z$ учун, айтайлик, $g:I\to R$ акслантириш $g(t)=nt$ тенглик билан аниқлансин. У ҳолда $egI\to S^1$акслантириш 1 нуқтада ёпиқ йўл бўлади. Бу ерда г акслантириш лг нинг тикланмаси бўлгани туфайли унинг учун $g(0)=0$. У ҳолда $\varphi([eg])=\deg(eg)=g(1)=n$. Бу φ нинг сюръективлигидир. Эндиφ нинг инъективлигини кўрсатиш учун $\varphi([f])=0$ деб фараз қилайлик, яъни $\deg f=0$. f нинг тикланмаси $\tilde{f}$ эса $\tilde{f}$(0)=$\tilde{f}$(1)=0 шартларни қаноатлантиради. R нинг тортилувчан эканлигидан $\tilde{f}\approx\tilde{\varepsilon}_0(rel\{0,1\})$. Бошқача айтганда, шундай $F:I^2\to R$ акслантириш топиладики, унинг учун $F(0,t)=f(t),F(1,0)=0$ ва $F(t,0)=F(t,1)=0$ бўлса, лекин $F(s,t)=(1-s)f(t)$. Аммо $eF:I^2\to S^1$ акслантириш қуйидаги $eF(0,t)=f(t),eF(1,t)=1eF(t,0)=eF(t,1)$ е шартларни қаноатлантиради.

Шу сабабли $f\approx\varepsilon_1(rel\{0,1\})$. Яъни$[f]=1\in\pi(S^1:1)$. Бу$\varphi$ нинг инъективлигини кўрсатади. Демак, φ изоморфизм экан.

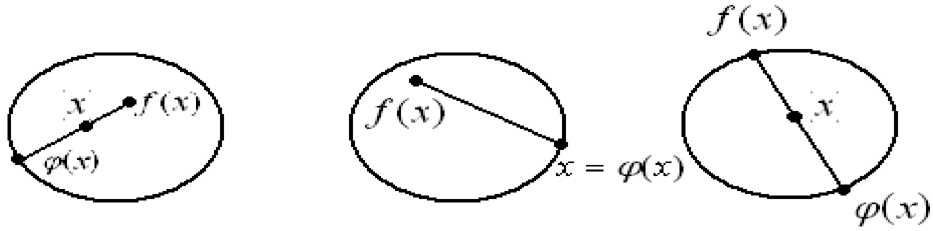
Тор $T=S^1xS^1$ бўлганлиги туфайли бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа: $\pi(T,1)\approx ZxZ$.

Фундаментал гуруҳ техникасининг қўлланилишини қуйидаги теоремада кўришимиз мумкин.

Теорема: Ихтиёрий $f:B^2\to B^2$ узлуксиз акслантириш қўзғалмас нуқтага эга.

Исбот: Бу ерда V^2 — текисликда маркази бирорта нуқтада бўлган ёпиқ шар. Тескари исбот қиламиз, яъни ихтиёрий $x \in V^2$ учун $f(x) \neq x$ ўринли бўлсин.



4.5.3-расм

Бундай ҳолда $\varphi : V^2 \to V^2$ акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз: $\varphi(x) = [f(x], x) \cap S^1$, бунда $[f(x], x)$ — боши $f(x)$ ва X нуқтадан ўтувчи нур. S^1 еса B^2 шар чегараси — айланадир (4.5.3-расм).

φ нинг узлуксизлиги равшан. $i : S^1 \to B^2$ жойлаш бўлса, $\varphi * i = id$ айний акслантиришдир.

Бу ҳолда қуйидаги коммутатив диаграммага эга бўламиз:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i"'] & & S^1 \arrow[dl, "\varphi"] \\ & B^2 & \end{tikzcd}$$

Бундан қуйидаги диаграмманинг коммутативлиги келиб чиқади:

$$\begin{tikzcd} \pi(S^1,1) \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_*"'] & & \pi(S^1,1) \arrow[dl, "\varphi_*"] \\ & \pi(B^2,1) & \end{tikzcd}$$

V^2 шарнинг тортилувчи бўлганлиги туфайли $\pi(V^2,1) = 0$. У ҳолда қуйидаги диаграммага эга бўламиз:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "id"] \arrow[dr, "i_*"'] & & Z \arrow[dl, "\varphi_*"] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

Бундай бўлиши эса мумкин эмас. Демак, ихтиёрий узлуксиз акслантириш $f : B^2 \to B^2$ доимо қўзғалмас нуқтага эга экан.

Масаланинг қўйилиши:

1 Агар A бирорта X метрик фазода ёпиқ тўплам бўлса, $b \in A$ бўлганда, $\rho(b, A) = 0$ бўлишини исботланг.

2. $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$ −тенгсизликни (X, ρ) шу метрик фазонинг ихтиёрий A тўплами ва x, y нуқталари учун ўринли бўлишини кўрсатинг.

3. Ихтиёрий метрик фазо учун Хаусдорф масофаси унинг чегараланган ёпиқ тўпламостилари тўпламида метрика бўлишини исботланг.

4. Қавариқ кўпбурчаклар (текисликда) тўпламида d_Δ метриканинг Хаусдорф d_ρметрикасига эквивалентлигини исботланг.

Ишни бажариш учун намуна.

<u>Теорема.</u> Ҳар бир узлуксиз $f \in C(I, S)$ акслантириш учун унинг тикламаси $\overline{f} \in C(I, R)$ мавжуддир.

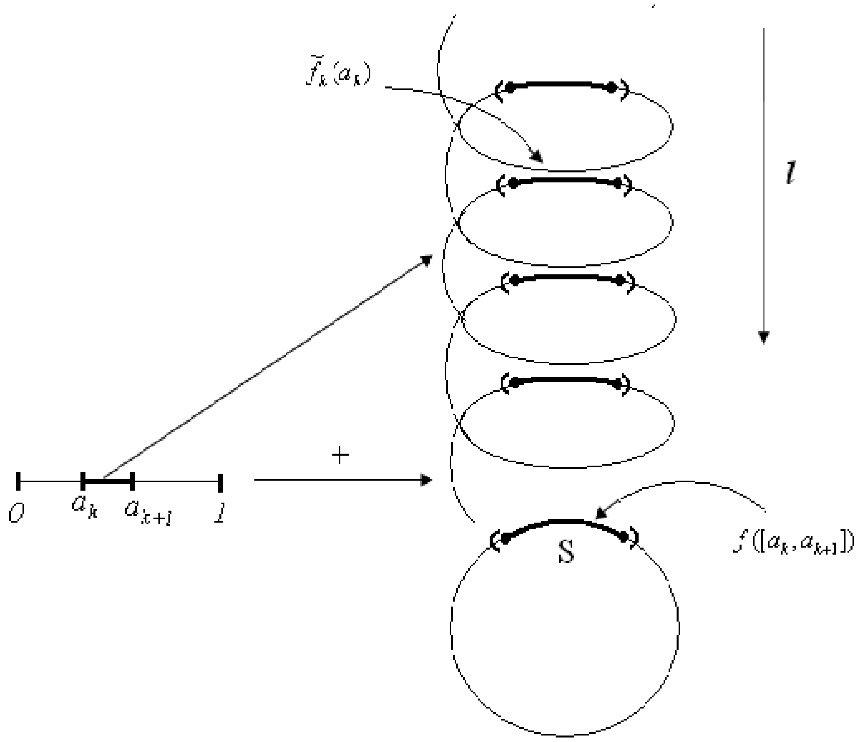
Ваҳоланки, агар $x_0 \in R$ бирорта нуқта бўлиб, $l(x_0) = f(0)$ л бўлса, у ҳолда шундай ягона $\overline{f}$ тиклама топиладики, й учун $\overline{f}(^{-1}0) = x_0$ ўринли бўлади.

Исбот: Айтайлик, ихтиёрий $x \in S^1$ учун U_x учун шундай очиқ атроф бўлсинки, $e^{-1}(Ux)$ е$^{-1}$ тўплам R да дизъюнкт очиқ тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлсин ва уларнинг ҳар бирини $e\, U_x$ га гомсоморф акслантирсин.

$\{f^{-1}(U_x) : x \in S^1\}$ тўпламни И тўпламнинг $\{(x_j y_j) \cap I : j \in J\}$ очиқ қопламаси кўринишида ёзишимиз мумкин. И кесманинг компакт эканлигидан унинг $[0, t_1 + \varepsilon_1), (t_2 - \varepsilon_2), \ldots (t_n - \varepsilon_n, 1]$ кўринишдаги чекли қопламаси мавжуддир, бу ерда $t_1 + \varepsilon_i > t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, i = 1n - 1$. Ҳар бир $i = \overline{1, n}$ учун бир

$a_i \in (t_{i-1} - \varepsilon_{i+1}, t_i + \varepsilon_i)$ нуқтани оламиз. Улар учун $0 = a_0 < a_1 <, ..., a_n = 1$ ўринли бўлсин. Равшанки, $f[a_i, a_{i+1}]$ тўплам S^1 нинг S_i очиқ тўпламида ётиб, бунда $e^{-1}(Si)$ тўплам R нинг дизъюнкт очиқ тўпламостиларнинг бирлашмасидан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири ye акслантириш натижасида S_i га гомеоморф аксланади. Энди тикланмани $k = 1, ..., n,$

бўйича индуксия ёрдамида аниқлаймиз.



4.5.2-расм

$K = 0$ бўлганда тривиалдир. $f_0(0) = x_0$ ва бошқа танлаш йўқ. Фараз қилайлик, тикланма $\overline{f_k} : [0, a_k] \to R$ аниқланган ва ягона. Эсга оламизки, $f([a_k, a_{k+1}] \subset S_k$ ва $ye^{-1}(S_k)$ тўплам $\ell / \{(W_j\, j \in J)\}$ кўринишдаги очиқ тўпламларнинг дизъюнкт бирлашмаси бўлиб, улар учун $\ell / W_j : W_j \to S_k$ акслантириш ихтиёрий $j \in J$ учун гомеоморфизмдир. Бинобарин, $f_k(ak) \in W$, бу ерда $W \in \{W_1 : j \in J\}$ қандайдир элемент (4.5.2-расм). $[a_k, a_{k+1}]$ чизиқли боғлиқ бўлганлиги сабабли ихтиёрий $\overline{f_k}\ _{+1}$ давомлаштириш $[a_k, a_{k+1}]$ ни W га акслантириши керак. Бу ерда $\ell / W_j : W_j \to S_k$ чеклов гомеоморфизм бўлгани учун шундай ягона П: [а$_к$, а$_{к+1}$]→W акслантириш топиладики, $(\ell_p = f[a_k, a_{k+1}])$ бўлади. (Аслида, п=($p = (\ell / w)^{-1} f$). f_{k+1} акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\overline{f_{k+1}}(S) = \begin{cases} \overline{f}_k(S), \text{agar } 0 \le s \le a_k, \text{ bo‘lsa;} \\ \\ P(S), \text{agar } a_k \le s \le a_k, \text{ bo‘lsa;} \end{cases}$$

Бу акслантириш узлуксиз ва тузилиши бўйича ягона ҳамда $\overline{f_k}(a_k) = P(a_k)$ индуксияга кўра $\overline{f}$ тикланмага эга бўлдик.

Назорат саволлари:

1.Ёпиқ йўллар.

2.Топологик фазонинг фундаментал гуруппаси.

3.Фундаментал группа хоссалари.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

13. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” -Т. 2012. 240 бет.

8 - Амалий машғулот:

Топологик кўпхилликлар ва унинг Эйлер характристикаси.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш.

Топологик сиртлар ва кўпхилликлар.

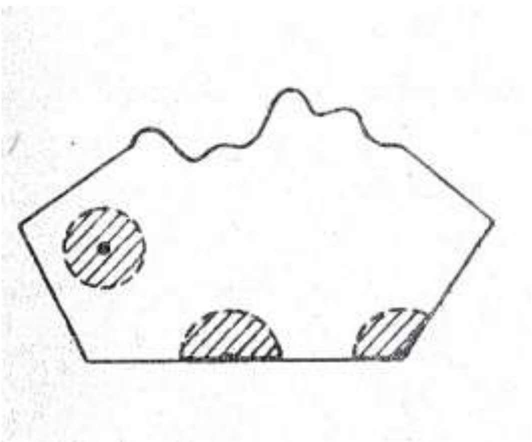
Сирт тушунчаси Эвклид томонидан геометрия фанига олиб кирилганида сиртга: “Сирт шулдирки, у узунликка ва энга эга”, “Сиртнинг чегаралари чизиқлардир”, “Текислик шундай сиртки, у ўзидаги барча тўғри чизиқларга нисбатан бир хил жойлашгандир” дея таъриф берилган ва қарийб икки минг йил давомида турли сиртлар ўрганиб келинган. Кейинчалик сиртлар элементар ва содда сиртларга ажратиб тадқиқ қилинган. Масалан, квадрат, ёпиқ ярим текислик ва текислик энг содда сирт деб аталган. Энг содда сиртлар воситасида элементар сирт киритилган. Элементар сирт деб содда сиртларнинг бирортасига гомеоморф бўлган фигурага айтилган. Масалан, эллиптик ва гиперболик параболоидлар ва параболик силиндрлар элементар сиртга мисол бўла олади, чунки уларнинг ҳар бири текисликнинг бир қисмига гомеоморфдир.

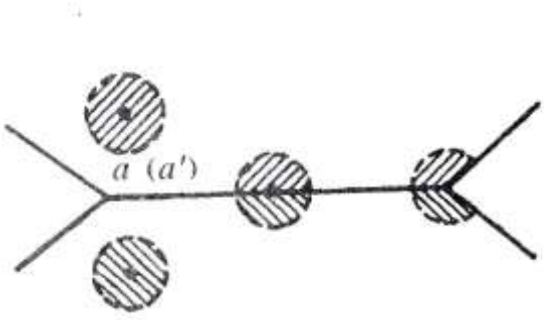
Ярим сферани чегараси билан бирга олсак, у ҳам элементар сиртларга мисол бўла олади, чунки у ёпиқ ярим текисликка гомеоморфдир. Эвклид фазоси R^3 даги чекли ёки саноқли сондаги элементар сиртлар билан қопланган тўплам (фигура) сирт деб аталади. Бошқача айтганда, Эвклид фазоси R^3 даги бирорта фигурани чекли ёки саноқли сондаги элементар сиртлар билан қоплаш мумкин бўлса, унга сирт дейилади. Сфера, эллипсоид, эллиптик силиндр, бир паллали ва икки паллали гиперболоидларни олсак, улар сиртга мисол бўла олади. Чунки сферани иккита ярим сфера билан қоплаш мумкин: эллипсоид эса, сферага гомеоморфдир; эллиптик силиндрни чекли сондаги силиндрик полоскалар (йўлакчалар) орқали қоплаш мумкин. Уларнинг ҳар бири эса, текисликка гомеоморфдир; бир паллали гиперболоид иккита йўлакчадан иборат бўлиб, уларнинг ҳар бири текисликка гомеоморфдир. Олдинги бобларнинг бирида биз елимлаш амали ёки фактор фазо ва фактор акслантириш тушунчаси аниқлангандан кейин елимлаш орқали P^3 Эвклид фазода кўпгина сиртларни кўришимизга тўғри келган. Шу сиртларнинг ҳар бирини топологик сирт сифатида қараб, ихтиёрий бирор ўлчамга эга бўлган сиртни олсак, бундай сиртлар таснифини бера оламизми ёки йўқми деган саволларга жавоб излашга уринамиз.

Қаттиқ жисмлар денгиз тўлқинларининг бир ондаги сирти ёки кундалик ҳаётда ишлатиладиган пиёла, гантел ёки икки тутқичли жисмлар сиртларини олсак, улар турли-тумандир. Ушбу сиртларнинг умумий хусусиятларини аниқлаб, шунга кўра уларни синфларга ажратишимиз мумкин бўлади.

Икки ўлчамли сиртларни елимлаш.

Бу бўлимда текис фигурани елимлаб ёпиштириш амали натижасида ҳосил бўладиган фактор фазосини тўлиқ ўрганамиз. P^2 текисликда П кўпбурчак оламиз ва унда индуцирланган метрикани кўриб чиқамиз. Маълумки, ҳар бир $x \in П$ нуқтанинг доирасимон атрофи мавжуд. Бу атроф П кўпбурчак билан маркази x нуқтада бўлган доира кесишмасидан иборат бўлади. Агар x нуқта П кўпбурчакнинг чегарасига тегишли бўлмаса, x нинг етарли кичик доирасимон атрофи очиқ доиралардир. Агар x нуқта П кўпбурчак чегарасига тегишли бўлса, у ҳолда атрофи очиқ доиранинг чегараловчи радиуслари билан олинган секторлардан ёки сегментлардан иборат бўлади (8.1.1-расм).



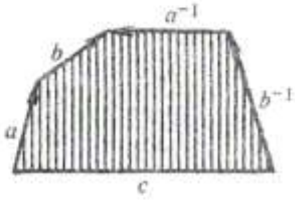


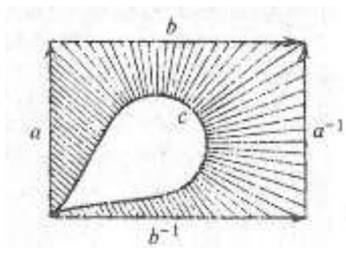
8.1.1-расм 8.1.2-расм

Иккита П ва $П^1$ кўпбурчаклар берилган бўлсин ва уларнинг a ва a^1 томонларининг узунлиги тенг бўлсин. Кўпбурчакларни a ва a^1 томонлари бўйича елимлаб ёпиштирамиз. Бу билан $\lambda : a \to a^1$ гомеоморфизмда образ ва прообразни (бу икки нуқтани бир нуқта деб қабул қиламиз) эквивалент деб оламиз. P эквивалентлик муносабатида $(П \cup П^1)$ /P фактор фазо топологияси: агар x ва x^1 нуқталар кўпбурчакларнинг ички нуқталари бўлса, уларнинг очиқ атрофи бу нуқтани ўз ичига олган доирадан иборат бўлади; агар x ва x^1 нуқталар кўпбурчакларнинг чегарасига тегишли, яъни елимланган эквивалент $x \in a$ ва $x^1 \in a^1$ нуқталардан иборат бўлса, бу уларнинг атрофлари нуқталарни ўз ичига олган елимланувчи секторлардан иборат бўлади. 8.1.2-расмда кўпбурчакларнинг a ва a^1 томонларини елимлаш чизмаси келтирилган. Шунга ўхшаб, кўпбурчакнинг икки томонини елимлаб ёпиштириш мумкин бўлади.

Юқорида елимлаш натижасида ҳосил бўлган сиртнинг фактор фазодаги топологиясининг базаси (ёки очиқ тўплами) қандай бўлишини кўрсатдик.

Энди сиртларни елимлашга ўтайлик.

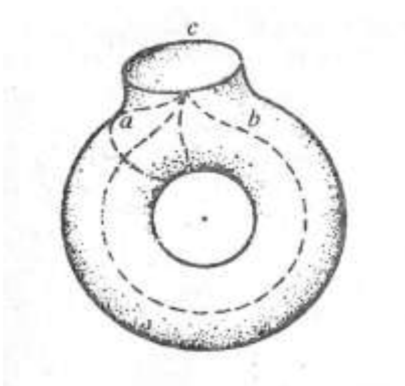




8.1.3-расм 8.1.4-расм

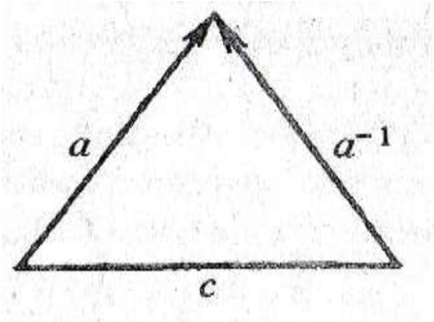
6.1.3-расмда берилган бешбурчакнинг бир хил ҳарфлар билан белгиланган томонларини елимлаб ёпиштирамиз. Елимлаш тартиби қуйидагича: мос, яъни бир хил ҳарфлар билан белгиланган томонлар йўналиши стрелка билан кўрсатилган бўлиб, йўналтирилган мос кесмаларнинг боши билан боши, охири билан охири елимланади. Ҳарфлар тепасидаги -1 ишораси ўша томонларнинг йўналиши мос тушмаслигини билдиради, яъни кўпбурчакнинг чети бўйлаб соат мили йўналишига нисбатан стрелка (йўналиш) тескаридир. Елимлаш тартибини баён қилишда кўпбурчак томонларини айланиб ўтиш соат мили бўйлаб олинса, қулайроқ бўлади. Масалан, юқоридаги бешбурчакда елимлаш жараёни а томондан бошланса, унинг схемаси аба$^{-1}$, б$^{-1}$с кўринишда бўлади. Бу кўринишдаги елимлаш схемаси кўпбурчакнинг елимланадиган томонларини тўла аниқлайди ва елимлаш қонуниятини қаноатлантиради. Шуни таъкидлаш керакки, елимлаш жараёнида елимланадиган томонларнинг узунликлари бир хил деб олинади.

Ишонч ҳосил қилиш мумкинки, бу фактор фазони бошқа усул, яъни топологик эквивалентлик усули орқали ҳам ясашимиз мумкин (6.1.4-расм): бу ерда фактор фазо тешигининг чети с чизиқдан иборат бўлган тор (баллон, камера)дир. 6.1.5-расмда штрихланган чизиқлар орқали елимлаш аа$^{-1}$ ва бб$^{-1}$ чизиқлари белгиланган. Тешикли тор даста (ручка) деб аталади.

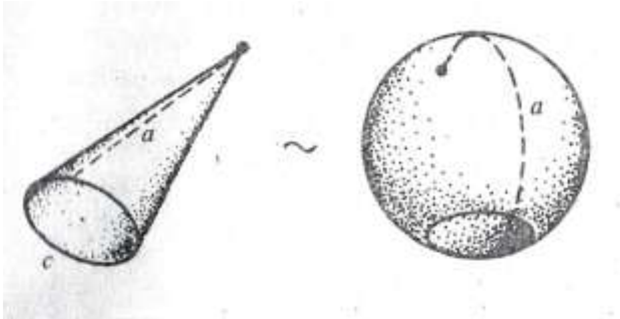


8.1.5-расм

6.1.1-мисол. Ихтиёрий учбурчак оламиз ва унинг қўшни томонларини елимлашни кўриб чиқайлик. Агар ориентация тескари бўлса, у ҳолда елимлаш схемаси $aa^{-1}c$ кўринишида (6.1.6-расм) бўлади. Бу ҳолда фактор фазо топологик тешикли сферага эквивалентдир (6.1.7-расм).



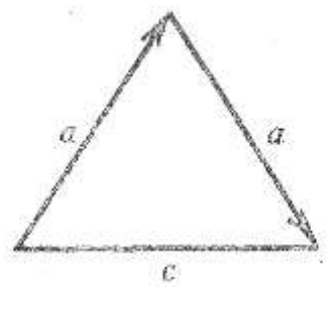
6.1.6-расм



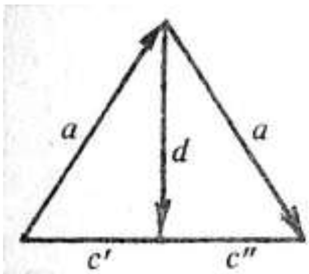
6.1.7-расм

6.1.2-мисол. Энди бир хил ориентацияли учбурчакнинг кўш томонларини елимлашни схема бўйича (6.1.7-расм) кўриб чиқайлик. Учбурчакни бир умумий д баландлиги билан кўрсатилган ориентatsiяли иккита тўғри бурчакли учбурчак деб олайлик (6.1.8-расм). Бундай ҳолатда учбурчакларни елимлаш тартиби қуйидагича бўлади. Биринчи навбатда учбурчакларнинг гипотенузалари елимланади, сўнгра катетлари д елимланади (6.1.9-расм). Натижада, Миёбиус варағи ҳосил бўлади. Буни олдинги бобларда келтирилган Миёбиус варағи билан солиштириш мумкин.

Шуни таъкидлаш керакки, охирги ҳосил бўлган фактор фазо биринчи келтирилган (6.1.7-расм) фазога гомеоморфдир.

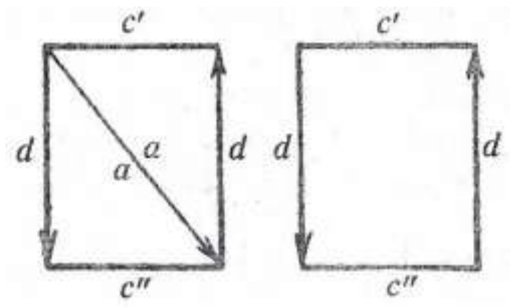


8.1.8-расм



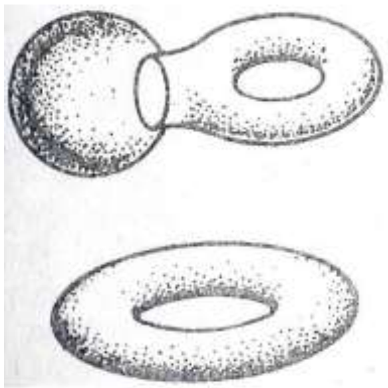
8.1.9-расм

6.1.3-мисол. C^2 сферадан ҳалқача кесиб оламиз ё бўлмаса тешикли сферага эркин четки с чизиғи бўйлаб даста ёки Миёбиус варағини елимлаб ёпиштирамиз. Биринчи ҳолда торга эга бўламиз (6.1.10- расм).



8.1.10-расм

Иккинчи ҳолда эса, проектив текислик РП^2 га эга бўламиз. Ҳақиқатан ҳам, проектив текислик (олдинги бўлимда келтирилган) топологик (6.1.10-расм) фактор фазога эквивалентдир. Бунинг учун юқори “қопқоқга” чети с чизиқдан иборат Миёбиус варағи эканлигини кўрсатиш етарлидир. Бу фигурани ички айлананинг диаметриал қарама-қарши нуқталари айнанлаштирилган (елимланган, яъни диаметриал қарама-қарши икки нуқта бир нуқта деб ҳисобланган) текис ҳалқа сифатида тасаввур қилиб, Миёбиус варағига олиб келувчи топологик алмаштиришлар (6.1.11-расм) бажарилади. Юқоридаги ясаш (сиртларни кўриш) жараёнини қуйидаги икки йўналишда ривожлантириш мумкин:



8.1.11-расм

1) сферада Р дона ҳалқача қирқиб, унга Р дона даста елимлаймиз;

2) сферада қ дона ҳалқача қирқиб, унга қ дона Миёбиус варағини елимлаб ёпиштирамиз.

Шундай қилиб, биз икки қатор қуйидаги сиртлар кетма-кетлигига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} M_0;\ M_1,\ldots,M_p,\ldots \\ H_0,\ H_1,\ldots,H_к,\ldots \end{array}\right\} (1)$$

Таъкидлаш лозимки, M_0 ва H_0 сиртлар C^2 сферадир. Ҳосил қилинган бу сиртларнинг баъзи геометрик хоссаларини ўрганамиз ва талқин қиламиз. Биринчи навбатда, бу сиртлар чекли сондаги қаварик кўпбурчакларнинг томонларини елимлаш ва кейинги топологик алмаштиришлар натижасида ҳосил қилинганлигини англаб олиш керак.

M_r ва N_q сиртлар орасида шундай бир боғлиқлик борки, улар ягона бўлакдан иборат, яъни бу сиртлар ўзаро кесишмайдиган кўпбурчаклар гуруҳига ажралмайди. Чунки, бу сиртларнинг қурилиш жараёнига эътибор берсак, кўпбурчакнинг икки учини боғловчи томони бўйича елимлашда учларини туташтирувчи узлуксиз йўл доим мавжуд эканлигини кўрамиз. Бу сиртлар четга эга эмас, чунки елимлашда қатнашаётган кўпбурчакнинг ихтиёрий чегаравий томони фақат битта бошқа томон билан елимланади. Бундан келиб чиқадики, бу сиртларнинг ихтиёрий нуқтаси очиқ доирага гомеоморф атрофга эга. Шу сабабли бундай сиртлар (фазолар) икки ўлчамли кўпхиллик дейилади.

Шуни таъкидлаш лозимки, Mр сирт ориентирланган ва уни P^3 фазога ўзаро кесишмаган икки томонли сирт сифатида жойлаштириш мумкин.

N_q сирт эса, M_r сиртнинг акси-ориентирланмаган Миёбиус варағига ўхшаб бир томонли ва уни P^3 фазога ўзаро кесишган сирт сифатида жойлаштириш мумкин эмас. Лекин уни P^4 фазога жойлаштириш мумкин.

Сиртнинг ориентирланганлиги топологик хосса бўлганлиги туфайли M_r ва M_q сиртлар (к≥ 1) ҳеч қачон гомеоморф бўла олмайди.

Ҳар хил икки M_r ва M_q сиртлар (ёки N_p ва N_q сиртлар) (бунда $r \neq q$) ҳам ҳеч қачон ўзаро гомеоморф бўла олмайди (бу таъкид қуриш жараёнидан келиб чиқади).

Демак, (1) рўйхат ёпиқ сиртларнинг тўла топологик таснифидан иборат бўлар экан.

Агар сферага r та даста ва қ≥ 1 та Миёбус варағи ($r+q$ та тешик тешиб) елимласак, ҳосил бўлган сирт сферага, 2р+қ та Миёбиус варағи елимланган сиртга топологик эквивалентдир.

Сиртларнинг триангулясияси.

Бу бўлимда икки ўлчамли ёпиқ сиртларни топологик учбурчакларга бўлиб, уларнинг баъзи геометрик хоссаларини кўриб чиқамиз.

Агар X топологик фазонинг ҳар бир x нуқтаси P^2 фазодаги очиқ доирага гомеоморф бўлган атрофга эга бўлса, X фазо икки ўлчамли кўпхиллик дейилади. Бундай фазоларни ўрганишда уларни Эвклид фазоларидаги учбурчакка гомеоморф бўладиган элементар бўлакларга бўлиб ўрганиш қулай бўлади.

1-таъриф. Агар $T \subset X$ бўлиб, $\varphi : \Delta \to T$ гомеоморф бўлса, у ҳолда (T, φ) жуфтлик X фазодаги топологик учбурчак дейилади. Бу ерда $\Delta \subset P^2$, $\Delta \approx$ учбурчак, φ гомеоморфизм “устига”, бошқача айтганда, φ сюректив, яъни акслантириш $\varphi^{-1}(t) \neq \varnothing$, $\forall \gamma, t \in T$.

Агар $\varphi : \Delta \to$ т гомеоморфизм тайин бўлса, ортиқча такрорламаслик ва тушунмовчилик бўлмаслиги учун Δ учбурчакнинг учи ва томонларини топологик $T \subset R^2$ учбурчакнинг ҳам учи ва қирралари деб қабул қиламиз. Бир хиллик ҳамда қулай бўлиши учун Δ учбурчакнинг томонларини Т нинг қирралари деймиз. Учбурчакнинг ориентациясини аниқлаймиз ва Δ нинг учларидан ташкил топган ҳар хил тартибланган “учликдан” (учта учидан) иборат нуқталар тўплами ҳосил қиламиз.

Агар бир учлик иккинчи учликдан ўрин алмаштириш натижасида ҳосил қилинган бўлса, иккита учлик эквивалент деймиз. Маълумки, бу ерда эквивалентлик синфи иккитадан иборат бўлади. Агар бу тайин бир эквивалент синфларининг биридан иборат бўлса, Δ учбурчакни ориентирланган деймиз. Агарда Δ учбурчак ориентирланган бўлса, (T, φ) топологик учбурчак ориентирланган дейилади.

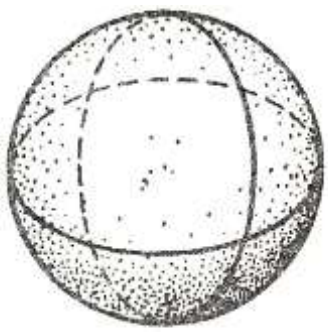
Δ учбурчакнинг ориентацияси ушбу учбурчакнинг учлари орқали соат миллари бўйлаб ёки соат милига тескари ҳаракатланиш орқали бир қийматли аниқланади. Бу ўтиш йўналиши φ нинг гомеоморфизм ёрдамида топологик учбурчакда ҳам учларидан ўтиш йўлини аниқлайди. Бунга индуцирланган гомеоморфизм φ ориентацияси дейилади. Учбурчакнинг ориентацияси унинг қирралари ориентациясини ҳам аниқлайди. Юқоридагидан кўринадики, шунга ўхшаб н бурчак ва унинг қирралари (н>3) ориентациясини ҳам аниқлаш мумкиндир.

2-таъриф. Агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса, X фазонинг чекли сондаги $R=\{(T_i\varphi_i):i=\overline{1,k}\}$ топологик учбурчаклардан ташкил топган тўплами икки ўлчамли кўпхилликнинг триангулясияси дейилади:

1) $X=\bigcup\limits_{i=1}^{K}T_i$;

2) $T_i,T_j=\varnothing$ ёки $T_i\cap T_j$ кесишма T_i ва T_j ларнинг умумий қиррасидан ёки умумий учидан иборат бўлса, бу ерда $\forall i,j\in\{1,k\},\ K=\{T_i:i=\overline{1,k}\}$ триангулясия.

Агар кўпхилликлар триангулясияга эга бўлса, бундай кўпхилликлар триангулясияли кўпхиллик дейилади. Агар К учбурчакларнинг ихтиёрий икки учини қирраларидан тузилган йўл орқали туташтириш мумкин бўлса, у ҳолда X боғламли дейилади.



8.2.1-расм

6.2.1-расмда C^2 сфера саккизта учбурчакдан ташкил топган триангулясияли фигурага мисол бўлади.

3-таъриф. Боғламли триангулясияли икки ўлчамли кўпхилликлар ёпиқ сирт дейилади.

Сиртларнинг ёйилмаси.

Бу бўлимда ҳам Δ системага ўхшаш X сиртни тақдим этувчи схематик К триангулясияси зарур бўлади. Аммо бунда учбурчаклар билан биргаликда н бурчаклар ҳам (н>3) иштирок этиши мумкин.

4-таъриф. Агар Қ=({$К_и$},{$\varphi_{иж}$}) система учун қуйидагилар ўринли бўлса, бу система ёйилма ташкил қилган дейилади, агар {$Қ_и$} чекли сондаги кесишмайдиган текис кўпбурчаклардан иборат бўлиб, {$\varphi_{i,j}$} чекли сондаги елимловчи гомеоморфизм бўлиб, улар {$Қ_и$} кўпбурчаклар наборининг жуфт қирраларини елимласа ва ҳар бир қирра фақат битта қирра билан елимланса, бу елимлашда битта кўпбурчакнинг қирраси иштирок эца.

Хусусий ҳолда $\Delta = (\{\Delta_i\},\{\varphi_{ij}\})$ система ҳам ёйилма ташкил қила олади, бу Δ ёйилма X сиртнинг К триангулясияси билан боғлиқ ёйилмаси деб юритилади.

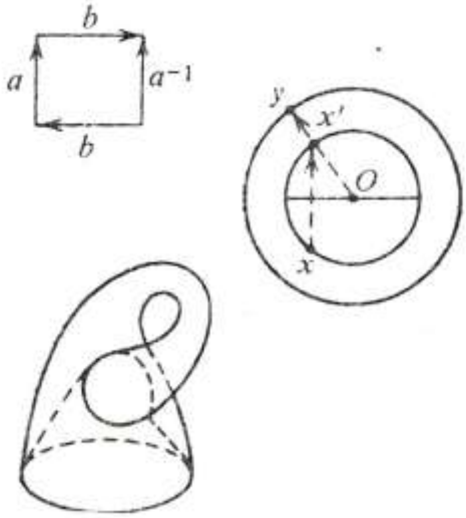
Ихтиёрий Қ ёйилма берилган бўлсин. Бу ёйилмада ёки $\cup Q_i$ бирлашмада φ_{ij} гомеоморфизмлар аниқланган Р эквивалентлик муносабати орқали ҳосил бўлган $\tilde{Q}$ фактор фазони қарайлик, яъни $\tilde{Q} = (\overset{I}{\underset{i}{\cup}} Q_i)/R$. $\tilde{Q}$ фактор фазони ёйилма фазоси деб атаймиз. Маълумки, бу фактор фазо, яъни ёйилма фазоси икки ўлчамли кўпхилликдир. Бу фазо етарли майда кўпбурчак Q_i триангулясия ҳосил қилган триангулясияга эга бўлади. Шу сабабли, агар $\tilde{Q}$ фактор фазо боғламли бўлса, бу фазо ёпиқ сирт бўлади. Бу ҳолда Q га $\tilde{Q}$ сиртнинг ёйилмаси дейилади.

8.5.Кўпбурчак ва сиртларнинг Эйлер характеристикаси.

Бу пунктда топологик сирт кўпбурчак ёки топологик кўпбурчакларнинг Эйлер характеристикаси ва мунтазам кўпёқлиларнинг турлари аниқланади. Олдинги пунктдаги теоремадан маълум бўлдики, ихтиёрий ёпиқ сирт Мр ёки Нқ га гомеоморф экан. Бундан кўринадики, Мр ва Нқ ларнинг Эйлер характеристикасини келтирсак, топологик сиртлар ёки сиртларнинг тўла классификациясини келтирган бўламиз. Шу сабабли баъзи бир сиртларнинг турли эквивалент таърифларини келтириш мақсадга мувофиқ бўлади.

1. Энди Клейн бутилкаси деб аталувчи, H_2 сиртга эквивалент бўлган таърифларни келтирамиз.

а) тўғри тўртбурчакнинг (6.5.1-расм) томонларини $aba^{-1}b$ схема бўйича елимлайм



8.5.1-расм

б) ҳалқанинг четлари ω ички ва ташқи айланаларни йўналишини алмаштирган ҳолда елимлаймиз. Бунга қуйидагича эришиш мумкин: ички айланани бирорта диаметри бўйича букиб, ички ва ташқи айланалардаги бир радиусда ётган х ва й нуқталар елимланади (6.5.1-расм);

д) иккита Миёбиус варағини чети ω айланалари бўйича елимлаймиз;

е) ҳалқанинг четлари ω ҳар бир айланага иккита Миёбиус варағини елимлаймиз.

2. Маълумки, проектив фазо $РП^1$ айлана $С^1$ нинг диаметриал қарама-қарши нуқталарини айнанлантириш натижада ҳосил қилингандир. Исботлаш мумкинки,

а) $РР^1$ фазо $С^1$ га гомеоморфдир;

б) $РП^1 \subset РП^2$;

д) $РП^2$ фазода $РП^1$ нинг шундай Миёбиус варағига гомеоморф бўладиган атрофи топилади.

3. Ёпиқ қавариқ кўпбурчакка гомеоморф бўлган топологик фазолар топологик кўпбурчаклар дейилади. Бу гомеоморфизмда кўпбурчак мос учларининг (томонларининг) образлари топологик кўпбурчакларнинг учлари (қирралари) деб юритилади. Умумийликни бузмаслик мақсадида сиртнинг триангулясияси қирралари бир-бирига ёпишган қўшни топологик кўпбурчаклардан ташкил топгандир, деб хулоса қилса бўлади. Бунга эришиш учун қавариқ кўпбурчакнинг сирт ҳосил қиладиган (қаралаётган сирт) томонларини айнанлаштириш керак. Бундан олдин эса, кўпбурчакни етарли майда кўпбурчакларга (масалан, учбурчакларга) бўлиб юбориш лозим бўлади. Энди шундай сиртларнинг триангулясияларини кўрамиз.

Ҳар қандай триангулясияланган *П* сирт учун $\chi(П) = l - k + f$ сонни аниқлаймиз. Бу ерда *л* триангулясиянинг учлари, *к* қирралари ва *ф* кўпбурчаклар сонидир. $\chi(П)$ сон *П* сиртнинг Эйлер характеристикаси дейилади. Бу сон ажойиб хоссага триангулясияга боғлиқ эмаслик хоссасига эга. Бошқача айтганда, топологик инвариантдир.

4. Бизга маълум, қуйидаги сиртлар Эйлер характеристикаси $С^2$ сфера учун 2 га; тор учун 0 га; доира учун 1 га; даста учун -1га ва Миёбиус варағи учун 0 га тенг бўлади.

Агар Жордан теоремасидан фойдалансак, C^2 сфера учун $\chi(S^2)$ Эйлер характеристикасининг топологик инвариантлигини осонгина исботлаш мумкин бўлади.

Жордан теоремаси

Жордан теоремаси. Ихтиёрий содда ёпиқ чизиқ (айланага гомеоморф бўлган чизиқ) текислик ёки сферани иккита чегаралари шу чизиқдан иборат бўлган ўзаро кесишмайдиган соҳаларга ажратади.

Энди C^2 нинг бирорта триангулясиясини олайлик. Битта уч (*) ни тайин қилиб ва қирраларни кетма-кет ўчириб, C^2 га келишимиз мумкин. Биринчи қиррани (*) уч билан янги учини туташтириб, ҳар бир кейинги қирра янги чизилган қирранинг учидан бошланишини таъминлаймиз. Ҳар бир босқичда ҳосил бўлган учлар сони *л* ни, қирралар сони *к* ни ва қирралардан ташкил топган содда ёпиқ чизиқ билан чегараланган соҳалар сони *ф* ни ҳисоблаб борамиз. Айтайлик, бошланғич ҳолатда *л*=1, *к*=0, ф=1 бўлсин (яъни C^2 сфера (*) уч ва уни тўлдирувчи соҳадан иборат бўлсин). Ишонч ҳосил қилиш мумкинки, *л-к+ф* сон битта янги қирра қўшиш билан ўзгармайди. Ҳақиқатан ҳам, агар бу қирра янги учга борган бўлса, у ҳолда янги соҳа вужудга келмайди. Аммо *л* ва *к* лар 1 тага ошади. Агар янги қирра икки эски учларни туташтирса, у ҳолда бу қирра қирралардан иборат бўлган йўлни ёпади (яъни ёпиқ йўл ҳосил бўлади) ва натижада Жордан теоремасига кўра, янги соҳа ҳосил бўлади. Демак, *к* ва *ф* лар биттага ошади, лекин *л* ўзгармайди. Охирги қиррани туташтириб, триангулясияни тўла тиклаймиз ва у ҳолда $l-k+f=\chi(S^2)$ бўлади. Бошланғич ҳолатда $l-k+f=2$ тенглик ўринли эди. Демак, $\chi(S^2)=2$.

5. *П₁* ва *П₂* сиртлар берилган бўлсин ва уларнинг четлари l_1 ва l_2лар S^1 га гомеоморф бўлсин. Бу ҳолда $П_1$ ва $П_2$ сиртларнинг четини $\alpha: l_1 \to l_2$ гомеоморфизм орқали елимланган деб ҳисоблашимиз мумкин. Айтайлик, $П_1 \underset{\alpha}{\cup} П_2$ ҳосил бўлган фактор фазо бўлсин. Қуйидаги формулани исботлаймиз:

$$\chi(\Pi_1 \underset{\alpha}{\cup} \Pi_2) = \chi(\Pi_1) + \chi(\Pi_2) \quad (1)$$

$П_1$ ва $П_2$ сиртларни шундай триангулясиялаймизки, унинг четлари l_1 ва l_2 ларда гомеоморф триангулясиялар ҳосил бўлсин. S^1 нинг триангулясияси *л* учдан ва шундай сондаги қиррадан иборат бўлсин. Елимлашдан кейин учлар, қирралар ва кўпбурчаклар сони мос равишда l_1+l_2-l, k_1+k_2-l ва f_1+f_2 ларга тенг бўлиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$(l_1+l_2-l)-(k_1+k_2-l)+(f_1+f_2)=(l_1-k_1+f_1)+(l_2-k_2+f_2).$$

(1) формула бу тенгликдан келиб чиқади. Бу формула баъзи ҳолларда сиртларнинг Эйлер характеристикасини ҳисоблаш учун жуда қулайдир. Айтайлик, ${}_nC^2$ тешикли сфера бўлсин. Агар бу ${}_nC^2$ фигурага қайта Р та

доира елимласак, C^2 сферага эга бўламиз. (1) формула $\chi(S^2)=\chi({}_P S^2)+P$ тенгликни келтириб чиқаради.

Охирги тенгликдан $\chi({}_\text{п}C^2)$=2-П га эга бўламиз. Бизга маълумки, (олдинги пунктда келтирилган) M_p сирт ${}_\text{п}C^2$ сиртга Р дона дастани елимлашдан ҳосил бўлган эди. Бу дасталар ҳар бирининг Эйлер характеристикаси -1 дан иборат. (1) формуладан

$\chi(M_p)$=2-2П (2)

Шунга ўхшаб, Нқ кўринишдаги сиртлар учун

$\chi(Nq)=2-q$ (3)

формулага эга бўламиз. Маълумки, ҳар бир Миёбиус варағининг Эйлер характеристикаси 0 га тенгдир.

(2) ва (3) тенгликлардан кўринадики, $\chi(M_{p1})=\chi(M_{p2})$ тенглик фақат $P_1=P_2$ бўлганда, χ(Нқ$_1$)= χ(Нқ$_2$) тенглик эса, фақат қ$_1$=қ$_2$, бўлганда ўринли бўлади. Эйлер характеристикасининг топологик инвариант эканлигидан M_p ва M_{p1} сиртлар $P\neq P^1$ бўлганда гомеоморф бўла олмайди. Шунга ўхшаб, Нқ ва Нқ^1 сиртлар ҳам $q\neq q^1$ бўлганда гомеоморф бўла олмайди.

6. Эйлер характеристикаси қаварик кўпёқлилар геометрияси назариясида мазмунли ва қизиқ қўлланишга эга. Қаварик кўпёқларнинг сиртни чекли сондаги қаварик кўпбурчакларни (томонларини) айнан акслантириш ёрдамида қирраларни елимлаш натижасида ҳосил бўлган сирт сифатида қараш мумкин. Бу қаварик кўпёқ учун қуйидаги Эйлер характеристикасига эга бўламиз.

$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$ (4)

Бу ерда α_0 кўпёқнинг учлари, α_1 қирралари ва α_2 ёқлари сонидир.

Ҳақиқатан ҳам, ўнгдаги 2 сон сферага гомеоморф бўлган кўпёқ сиртининг Эйлер характеристикасидан иборатдир.

Агар ҳар бир уч м та ёқнинг умумий учи бўлиб, ҳар бир ёқ н-бурчакдан иборат бўлса, кўпёқли (н,м) типга эга дейилади.

Агар н бурчаклар мунтазам бўлса, у ҳолда кўпёқли мунтазам дейилади. Кўпёқлининг (н,м) типини билсак, у ҳолда α_0, α_1 ва α_2 ларни ҳисоблаш мумкин бўлади. Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир учда м та қирра учрашади (кесишади). Шу сабабли $\alpha_0 m = 2\alpha_1$ ҳар бир ёқда н қирра бор. Бундан эса, $\alpha_2 \cdot n = 2\alpha_1$ (ҳар бир қирра икки учни бирлаштиради ва қирра икки ёқнинг таркибида бўлади).

Демак:

$$\frac{\alpha_0}{m^{-1}} = \frac{\alpha_1}{2^{-1}} = \frac{\alpha_2}{n^{-1}} = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{2}{m^{-1} - 2^{-1} + n^{-1}} = \frac{4mn}{2n + 2m - mn}$$

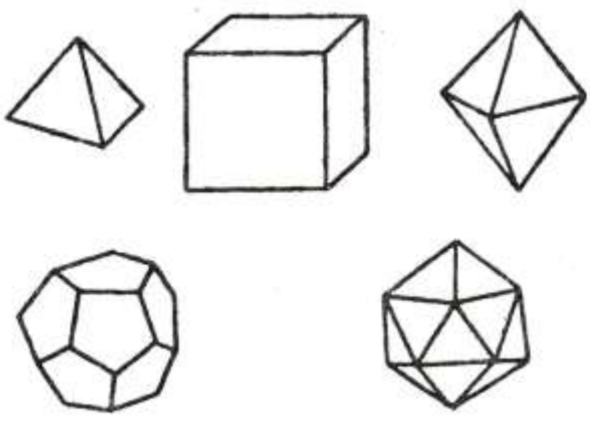
Бу тенглик ёрдамида $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ларнинг қийматлари ҳисобланади. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ларнинг мусбат бўлиши ҳақидаги табиий шартнинг бажарилиш заруратидан n ва бутун мусбат сонлар учун қуйидаги тенгсизликка эга бўламиз:

$2n + 2m - mn > 0,$ бундан $(n-2)(m-2) < 4$

Текшириб кўриш қийин эмаски, бу охирги тенгсизлик қуйидаги 5 та ечимга эга:

$\{3;3\} \leftrightarrow \{4;3\} \leftrightarrow \{3;4\} \leftrightarrow \{5;3\} \leftrightarrow \{3;5\}$ (5)

Элементар геометриядан маълумки, 5 та мунтазам кўпёқли мавжуд (6.5.2- расм):



8.5.2-расм

тетраедр; куб; октаедр; додекаедр; икосаедр.

Бу кўпёқларнинг типлари (5) ечим билан бир хил бўлади. Шундай қилиб, биз (н,м) типдаги кўпёқлиларнинг тўла классификациясини келтирдик.

Масаланинг қўйилиши:

1.Топологик сиртлар.

2.Кўпхилликлар.

3. Икки ўлчамли сиртларни елимлаш.

4. Сиртларнинг триангулясияси.

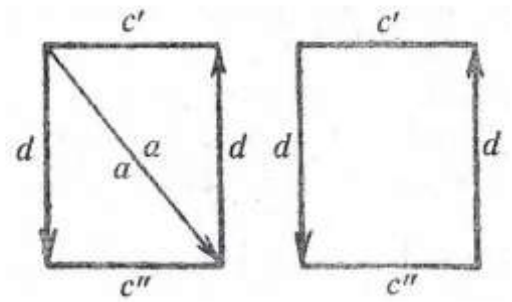
5. Сиртларнинг ёйилмаси.

6. Кўпбурчак ва сиртларнинг Эйлер характеристикаси.

7. Жордан теоремаси.

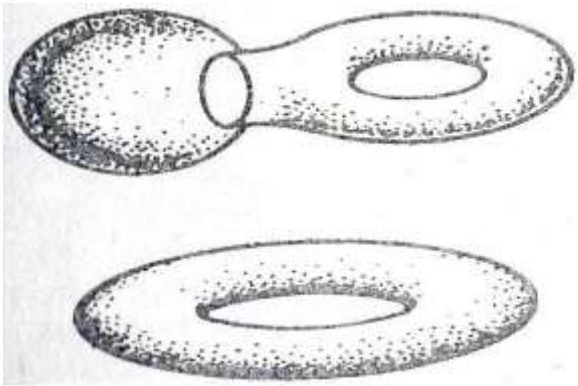
Ишни бажариш учун намуна.

Мисол. C^2 сферадан ҳалқача кесиб оламиз ё бўлмаса тешикли сферага эркин четки с чизиғи бўйлаб даста ёки Миёбиус варағини елимлаб ёпиштирамиз. Биринчи ҳолда тўрга эга бўламиз (6.1.10- расм).



6.1.10-расм

Иккинчи ҳолда эса, проектив текислик $РП^2$ га эга бўламиз. Ҳақиқатан ҳам, проектив текислик (олдинги бўлимда келтирилган) топологик (6.1.10-расм) фактор фазога эквивалентдир. Бунинг учун юқори “қопқоқга” чети с чизиқдан иборат Миёбиус варағи эканлигини кўрсатиш етарлидир. Бу фигурани ички айлананинг диаметриал қарама-қарши нуқталари айнанлаштирилган (елимланган, яъни диаметриал қарама-қарши икки нуқта бир нуқта деб ҳисобланган) текис ҳалқа сифатида тасаввур қилиб, Миёбиус варағига олиб келувчи топологик алмаштиришлар (6.1.11-расм) бажарилади. Юқоридаги ясаш (сиртларни кўриш) жараёнини қуйидаги икки йўналишда ривожлантириш мумкин:



6.1.11-расм

1) сферада Р дона ҳалқача қирқиб, унга Р дона даста елимлаймиз;

2) сферада қ дона ҳалқача қирқиб, унга қ дона Миёбиус варағини елимлаб ёпиштирамиз.

Шундай қилиб, биз икки қатор қуйидаги сиртлар кетма-кетлигига эга бўламиз:

$$\left.\begin{array}{l} M_0;\ M_1,\ldots,M_p,\ldots \\ H_0,\ H_1,\ldots,H_к,\ldots \end{array}\right\}(1)$$

Назорат саволлари.

1.Топологик сиртлар .

2.Кўпхилликлар.

3. Икки ўлчамли сиртларни елимлаш.

4. Сиртларнинг триангулясияси.

5. Сиртларнинг ёйилмаси.

6. Кўпбурчак ва сиртларнинг Эйлер характеристикаси.

7. Жордан теоремаси.

Фойдаланилган адабиётлар.

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

3.Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

9- Амалий машғулот:

Чизиқ таърифи ва мисоллар.

R^n фазо ва унинг тўпламостилари ўлчами.

Ўлчамлар назарияси нафақат геометрик фигураларнинг, балки R^n Эвклид фазосининг ихтиёрий мукаммал тўпламостиларининг ўлчовлар сони ҳақида гап юритишга имкон беради. Гоҳида Эвклид фазоси R^n нинг тўпламостилари шунчалик мураккаб бўладики, уларни ўрганиб чиқишда геометрик тасаввуримиз кўп ҳолларда ожизлик қилиб қолади. Ўлчамлар назариясида эса, тескари топологиядан геометрияга ўтиш жараёни мавжуд бўлиб қолди. Ихтиёрий топологик фазоларнинг ўлчамини геометрик тушунчалар полиедр ва n ўлчовли кублар ўлчовлари сони ёрдамида характерлаш мумкин. Бундай уриниш биринчи марта ўтган асрнинг 20-йиллари ўрталари ва охирларида рус математиги П.С. Александров томонидан ε силжиш, ε акслантиришлар ва жиддий акслантириш ҳақидаги теоремалар ёрдамида амалга оширилди.

Александровнинг ε акслантириш ҳақидаги теоремаси топологик фазоларнинг энг муҳим синфи Эвклид фазоси R^n даги барча тўпламостиларнинг характеристикасини келтириб чиқарди. Маълум бўлдики, бу тўпламостилар барча чекли-ўлчовли ёки саноқли базага эга бўлган метрик фазолардан бошқа нарса эмас экан.

Жиддий акслантиришлар ҳақидаги теоремаси эса, Александровнинг гомологик ўлчамлар назариясини қуришни бошлаб берди ва ўлчамнинг алгебраик характеристикасини вужудга келтирди. Метрик фазолар синфидан четга чиқсак, келтирилган учала ўлчам таърифи ўзаро эквивалент эмас. Метрик фазолар синфидан ташқарида асосан $\dim$ ўлчами назарияси инвариантдир. Яъни, ўлчамнинг топологик фазодаги қоплама маъносидаги таърифи жуда қўл келади. Шуни таъкидлашимиз керакки, метрик фазолар синфидан ташқарида ўлчамлар назарияси етарлича мазмунга эга ва геометрикроқдир.

9.5.1-мисол. Ҳақиқий сонлар ўқи R ёки айлана S^1 ни олайлик. Уларнинг ихтиёрий x нуқтаси ва бу нуқтанинг ихтиёрий V атрофи учун уларнинг шундай U атрофи топиладики, $U \subset V$ ва чегара F_rU фақат иккита нуқтадан иборат бўлади. Яъни, таърифга кўра, $indF_rU = \varnothing$ чегара. У ҳолда $indR \le 1$ ва $indS^1 \le 1$ га эга бўламиз. $indM \le indX$ ва дискрет фазолар нол ўлчамли эканлигидан $IndR > 0$ тенгсизликни ёза оламиз. Шу сабабли қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$$IndR = IndI = 1 \quad indS^1 = 1$$

Эвклид фазоси R^n ёки S^n сферанинг ихтиёрий x нуқтаси ва унинг ихтиёрий V атрофи учун шундай U атроф топиладики, $U \subset V$ ва F_rU гомеоморф S^{n-1} бўлади. Индуксия орқали кўпайтмасини осон исботлаш мумкин: $indR^n \le n$, $indS^n \le n$ ва $indI^n \le n$ тенгсизликлар ўринли.

9.5.2-теорема. C_1 ва C_2 ёпиқ тўпламлар X фазонинг ўзаро кесишмайдиган тўпламлари ва $A \subset X$ фазоостиси бўлиб, $\dim A \le n$ бўлсин. У ҳолда C_1 ва C_2 ларни ажратувчи шундай B тўплам топиладики, у учун $\dim A \cap B \le n-1$ ўринли бўлади.

Исбот. Теоремани индуксия методи билан исботлаймиз. Агар $n = 0$ бўлса, $\dim A = -1$ ёхуд $\dim A = 0$ бўлиб, теорема ўринли.

Энди $n > 0$ бўлсин. Маълумки, тўпламга чекли сондаги элементларни қўшсак, ўлчам ўзгармайди. Шу сабабли A тўпламни $A = D \cup E$ кўринишда ифодалашимиз мумкин, бу ерда $\dim D \le n-1, \dim E \le 0$. Теорема шартига кўра, $n = 0$ бўлганда, C_1 ва C_2 ларни айирувчи шундай B тўплам топиладики, $B \cap E = ø$ ўринли бўлади. Бундан $A \cap B \subset D$, $\dim D \le n-1$ бўлганлиги сабабли $\dim A \cap B \le n-1$.

95.3-теорема. X топологик фазо ва $\dim X \le n-1$ бўлсин. n тадан C_i ва $C^1{}_i$ ёпиқ тўпламлар берилган бўлиб, улар $C_i \cap C^|_i = \varnothing$, $i = 0,1,...,n-1$ шартни қаноатлантирсин. У ҳолда шундай n та ёпиқ B_i тўпламлар топиладики, ҳар бир B_i тўплам C_i ва $C^|{}_i$ ни ажратади ва $B_0 \cap B_2 \cap ... \cap B_{n-1} = \varnothing$ ўринли

бўлади.

Исбот. Топологик фазо учун $\dim X \le n-1$ ўринли бўлсин. Олдинги теоремага кўра, шундай B_i ёпиқ тўплам топиладики, B_1 тўплам C_1 ва $C^{|}_1$ ни айиради ва $\dim B_1 \le n-2$ бўлади. Яна шу теоремани қўлласак, шундай B_2 тўплам C_2 ва C_2^1 тўпламларни айиради ва $\dim B_1 \cap B_2 \le n-3$ бўлади. Олдинги теоремани қўллаш натижасида n та B_i ёпиқ тўпламлар топиладики, улар C_k ва C_k^1 ни айиради ва $\dim(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k) \le n-k-1, k = 1,2,...,n$ ўринли бўлади. Агар $n = k$ бўлса, $\dim(B_1 ... \cap B_{n-1}) = -1$, бу эса, фақат $\varnothing$ тўплам учун ўринлидир. Яъни, $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n = \varnothing$.

Энди қуйидагини исбот қиламиз.

9.5.5-теорема. Ихтиёрий n учун $\dim I^n \ge n$ ўринли.

Исбот. Тескарисини фараз қиламиз, яъни $\dim I^n \le n-1$ бўлсин. 3.5.3-теоремага кўра, I^n кубнинг турли қарама-қарши ёқларини айирувчи n та ёпиқ B_i тўпламостилар мавжуд бўлиб, улар $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \overline{T}$ ø шартни қаноатлантиради. Бу эса, 3.5.4-мисолда келтирилган қоидага зиддир. Демак, $\dim I^n \ge n$.

3.5.5-теорема ва 3.5.1-мисолдан қуйидаги ўринли.

9.5.6-теорема. Ихтиёрий n бутун сон учун $indR^n = indS^n = IndI^n = n$ тенглик ўринлидир.

Саноқли базага эга метрик фазоларда учала ўлчам эквивалент бўлганлиги туфайли қуйидаги ўринли.

9.5.7-теорема. Ихтиёрий n бутун сон учун қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$indR^n = indS^n = IndI^n = n$$

$$\dim R^n = \dim S^n = \dim I^n = n$$

$$IndR^n = IndS^n = IndI^n = n$$

Маълумки, $\overline{T}^n$ симплекс ёпиқ B^n шарга гомеоморф. Шу туфайли $\overline{T}^n$ нинг чегараси S^{n-1} га гомеоморфдир. $n = 2$ бўлганда ёпиқ учбурчак $[a_0 a_1 a_2]$, текисликдаги ёпиқ доирага гомеоморфдир. Учбурчакнинг чегараси (контури) $[a_0a_1]\cup[a_1a_2]\cup[a_2a_0]$ S^1 айланага гомеоморфдир. Шу сабабли $n=2$ бўлган ҳолда 3.3-§ да қуйидаги теореманинг исботи келтирилган.

9.5.8-теорема. R^n фазода ёпиқ B^n шар ва S^{n-1} унинг $(n-1)$ ўлчамли чегараси берилган бўлсин. S^{n-1} сферанинг нуқталарнинг қўзғалмас қолдирадиган ҳеч қандай узлуксиз $F:B^n\to S^{n-1}$ акслантириш мавжуд эмас. Бошқача айтганда, S^{n-1} сфера B^n шарга ретракт бўла олмайди.

Қуйидаги теорема тўпламостининг ички ва чегаравий нуқталарининг R^n фазода инвариантлиги ҳақида Брауер теоремасидир.

9.5.9-теорема. X тўплам R^n нинг ихтиёрий тўпламостиси бўлсин ва $f:X\to Y$ гомеоморфизм бўлсин ва $f(X)=Y\subset R^n$. Агар $x\in X$ нуқта X нинг ички нуқтаси бўлса, $f(x)\in Y$ нуқта ҳам $f(X)$ нинг ички нуқтаси бўлади. Агар $x\in X$ нуқта X нинг чегара нуқтаси бўлса, у ҳолда $f(x)$ нуқта ҳам Y нинг чегара нуқтаси бўлади. Хусусий ҳолда агар A ва B тўпламлар R^n нинг гомеоморф тўпламлари бўлиб, A очиқ тўплам бўлса, у ҳолда B ҳам очиқ тўплам бўлади.

Исбот. Бу теореманинг ички нуқта чегаравий нуқта учун исботини келтирамиз. Ҳақиқатан ҳам, x нуқта X нинг ички нуқтаси бўлсин.

$S_r(x)$ бу нуқтанинг шундай сферик атрофи бўлсинки, $\overline{S_r(x)}\subset X$. Кўрамизки, x нуқтанинг X даги $S_r(x)$да ётадиган атрофи қандай бўлишидан қатъи назар, $X\setminus U$ни S^{n-1} га акслантирувчи узлуксиз акслантириш мавжуд бўладики, бу акслантиришни бутун X га давомлаштириш мумкин бўлмайди. S^{n-1} сифатида $\overline{S_r(x)}$ нинг чегарасини, $f:X\setminus U\to S^{n-1}$ акслантириш сифатида эса, x нуқтадан $X\setminus U$ тўпламнинг S^{n-1} га проексиясини оламиз. Бу проексияда S^{n-1} нинг нуқталари қўзғалмас қолади. Бу $f:X\setminus U\to S^{n-1}$ акслантиришни бутун X фазога давомлаштириш мумкин эмас. Агар мумкин бўлса, яъни $f:X\to S^{n-1}$ ўринли бўлса, S^{n-1} нинг нуқталари қўзғалмас қолиб, $\overline{S_r(x)}$ ҳам S^{n-1} га узлуксиз акслантириш бўлади. Яъни, S^{n-1} сфера $\overline{S_r(x)}$ шарнинг ретракти бўлиб қолмоқда. 3.5.8-теоремага кўра эса бу мумкин эмас. Демак, R^n ички нуқталар инвариант экан.

9.2.Чизиқ таърифи.

Биз биринчи бобда баъзи чизиқлар билан танишдик. Эвклиднинг “Негизлар” асарида ҳам “чизиқ ─ энсиз узунликдир” деб изоҳланган. Юқорида киритилган ўлчамлар чизиқни таърифлашга имкон беради.

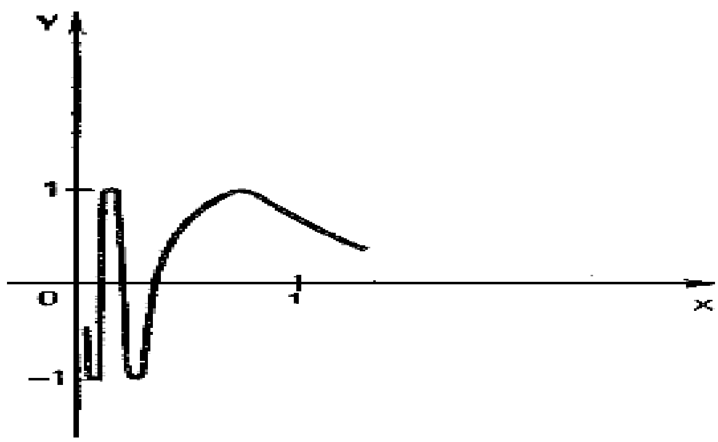
Олимлар деярли 2500 йил мобайнида геометриянинг асосий тушунчаларидан бири чизиққа турли таърифлар бериб келишган. Энди охирги аниқ уринишни келтирамиз.

9.5.10-таъриф. Бир ўлчамга эга боғланган ва компакт метрик фазолар чизиқ дейилади.

Компакт бўлмаган ҳолларда эса чизиқни қуйидагича таърифлаш мумкин.

9.5.11-таъриф. Бир ўлчамли локал компакт чекли дизюнкт ёпиқ боғламли тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлган метрик фазоларга чизиқ дейилади.

Текисликда ётган чизиқларга силлиқ чизиқ дейилади. Текисликда ички нуқтага эга бўлмаган боғламли ёпиқ компакт тўпламлар силлиқ чизиқ деб аталади. Бу ─ чизиққа Кантор томонидан берилган характеристика ёки таърифдир. Чизиққа кесма, айлана, гипербола ва қуйидаги текислик тўпламостиси мисол бўла олади.



3.5.1-расм

Бу чизиқни $\left\{(x,y)\in R^2 : y=\sin {1}/{x}; x\in\left(o,T\right]\right\}\cup\left\{(x;y)\in R^2 :\ x=0,-1\le y\le 1\right\}$ тўплам сифатида олишимиз мумкин. (3.5.1-расм)

Маълум бўлишича, ихтиёрий чизиқни I^3 кубда ётган Менгер универсал чизиғининг бирорта қисмига топологик эквивалент деб олишимиз мумкин.

Масаланинг қўйилиши:

1. R^n фазо ва унинг тўпламостилари ўлчами.

2. Чизиқ таърифи ва мисоллар.

Ишни бажариш учун намуна:

Мисол. I^n куб берилган бўлсин, $I^n\subset R^n-$Эвклид фазоси. Маълумки, ихтиёрий $x\in I^n$ учун $x=(x_1,x_2,...,x_n),\ |x_i|\le 1$ шарт ўринлидир. $C_i=\left\{x\in I^n : x_i=1\right\};\ \ C_i^1=\left\{x\in I^n : x_i=-1\right\}$. Агар B_i ёпиқ тўплам Ci ва C_2^1 ларни айирса, у ҳолда $B_1\cap B_2\cap...\cap B_n\ne$ ø .

Исбот. Агар B_i ёпиқ тўплам Ci ва C_2^1 ларни айирса, у ҳолда таърифга кўра, $X\setminus B_i=U_i\cap U_i^1, C_i\subset U_i, C_i^1\subset U_i^1\ U_i\cap U_i^1=\varnothing$ ўринли.

U_i ва $U_i^|$ лар $I^n\setminus B_i$ тўпламда очиқ бўлгани учун улар I^n да ҳам очиқ тўпламдир. Ҳар бир $x\in I$ нуқта учун $\overrightarrow{V(x)}$ вектор оламиз. $V(x)$ нинг $i-$ координатаси $\pm\rho(x,\ B_i)$ дан иборат бўлиб, агар $x\in U_i$ бўлса, $+\rho(x,B_i)$ олинади; агар $x\in U_i^1$ бўлса, $-\rho(x,B_i)$ олинади.

Ҳар бир $x\in I^n$ нуқта учун бундай мосликда $f(x)$ деб, x нуқтадан бошлаб $\overrightarrow{V(x)}$ қўйсак, шу $\overrightarrow{V(x)}$ нинг учини $f(x)$ нуқта деб оламиз. $\bar{T}^n$ ва I^n фазолар гомеоморф бўлганлиги туфайли Брауер теоремасини қўллаш мумкин. Брауер теоремасига кўра, бу узлуксиз акслантиришда шундай ишоралар қонуниятига кўра, ҳар қандай ҳолда ҳам $f(x)\in I^n$ ўринлидир. Натижада, $f: I^n\to I^n$ акслантиришга эга бўламиз. Бу акслантириш узлуксиздир.

$x^0\in I^n$ нуқта топиладики, $f(x^0)=0$ ўринли бўлади.

Ихтиёрий i индекс учун $\rho(x^0, B_i) = 0$, бундан $x^0 \in B_i$ дейишимиз мумкин. У ҳолда $B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n \neq \varnothing$.

Назорат саволлари:

1. R^n фазо ва унинг тўпламостилари ўлчами.

2.Чизиқ таърифи ва мисоллар.

Фойдаланилган адабиётлар.

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

10- Амалий машғулот:

Функторлар ҳақида тушунча. Эҳтимоллик функтори.

Ишдан мақсад: Амалий машғулот давомида назарий билимларга асосланган ҳолда амалий кўникмаларни шакллантириш

Категория.

10.1.1-таъриф. Агар элементлари обект деб аталувчи $Ob\zeta$ синф берилган бўлиб, у қуйидаги шартларни қаноатлантирса, ζ категория берилган категория дейилади:

1) агар ζ нинг ҳар бир (A,B) жуфт обектлари учун морфизмлар деб аталувчи тўплами $Mor\zeta(A,B)$ (А дан Б га) берилган бўлса; бу ерда $Mor\zeta(A,B)=\{u: A\to B\}$ морфизмдан иборат дейиш мумкин, кўп ҳолларда у $\in Mor\zeta(A,B),\ A\xrightarrow{u}B$ кўринишда ёзилади;

2) ζ нинг ихтиёрий учлик (A,B,C) обекти учун $\mu: Mor\zeta(A,B)\times Mor\zeta(B,C)\to Mor\zeta(A,C)$ акслантириш аниқланган бўлсин, бу ерда $\mu(y,\vartheta)$ (й,ϑ) жуфтликнинг акси (образи), $u\in Hom\zeta(A,B)$, $\vartheta\in$ Морζ (Б,С), бу μ(й,ϑ) образ ϑ_0й ёки $\vartheta *$й кўринишда белгиланиб, y,ϑ ларнинг композицияси деб аталади;

3) Қуйидагича тасдиқ. Морζ(А,Б) тўпламлар ва морфизмлар композицияси учун ўринли: (д) бу композиция ассоциативдир, яъни ихтиёрий морфизмлар учлиги $A\xrightarrow{u}B\xrightarrow{\vartheta}C\xrightarrow{\omega}D$ учун ω(ϑй)=($\omega\vartheta$)у ўринли;

4) ζ нинг ҳар бир А обекти учун айний морфизм деб аталувчи $1_А$:А→А морфизм мавжуд бўлади, агар унинг ихтиёрий А$\xrightarrow{u}$Б; А$\xrightarrow{\vartheta}$С морфизмлари учун $1_А u=u$ ва $\vartheta 1_А=\vartheta$ лар ўринли бўлса;

5) (γ) агар ζ нинг (А,Б), ($А^1$,$Б^1$) жуфтликлари ҳар хил бўлади, агар Морζ(А,Б) ва Морζ ($А^1$,$Б^1$) тўпламларнинг кесишмаси бўш тўплам бўлса.

Функторлар.

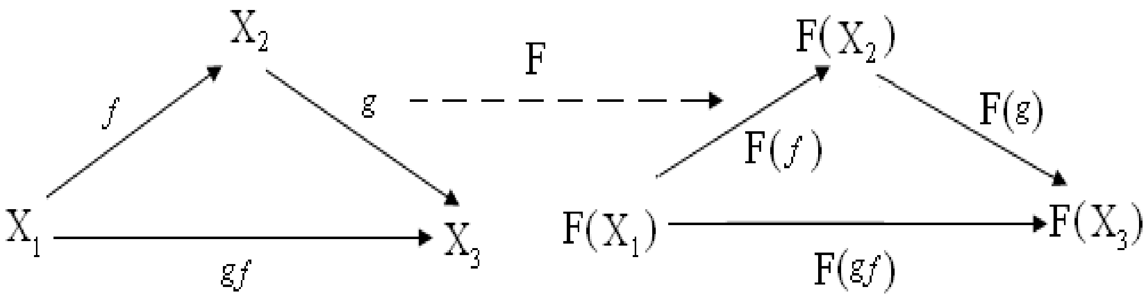
Энди бирорта категорияда аниқланган бирлик элементни ва морфизмлар композициясини сақловчи маълум шартларни қаноатлантирувчи акслантиришларни кўриб чиқайлик.

10.2.1-таъриф. А ва Б категориялар берилган бўлсин. А категориянинг ҳар бир X обектига Б категориянинг Ф(X) обектини ва А категориянинг ҳар бир f:$X_1 \to X_2$ морфизмига Б категориянинг Ф(f):Т(X_1)→Т(X_2) морфизмини мос келтирувчи Ф:А→Б акслантириш берилган бўлиб, агар у

1. Ф(1_x)=$1_Ф$(x)
2. Ф(гf)=Ф(г)Ф(f)

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда у ковариант функтор дейилади.

Бу таърифнинг 1) ва 2) шартларини функторнинг кўргазмали кўринишида қуйидагича ифодалаш мумкин. А категорияда ихтиёрий коммутатив диаграмма Б категориянинг коммутатив диаграммасига аксланади:



Агар Ф:А→Б ковариант функтор бўлса, А категория F функторнинг аниқланиш соҳаси, Б эса, унинг ўзгариш ёки қийматлари соҳаси дейилади.

102.2-мисол. Г гуруҳлар категориясини олайлик. Ҳар бир Г гуруҳга унинг [Г,Г] коммутанти бўйича олинган Г|[Г,Г] фактор гуруҳини мос қўяйлик. Г([Г,Г] фактор гуруҳ, бизга маълумки, абел гуруҳини ташкил қилади. Ҳар бир f:Г→Ҳ гомеоморфизмга, f гомеоморфизм орқали вужудга келган, $f([g])=f([g])/[f(g)]$ формула билан аниқланган $\hat{f}$:Г/[Г,Г]→Ҳ/[Ҳ,Ҳ] гомеоморфизмни мос қўяйлик. Натижада, гуруҳлар категорияси Г ни абел гуруҳлар категорияси АГ га акслантирувчи Ф:Г→АГ ковариант функторга эга бўлдик. Кўп ҳолларда бу функтор коммутирланган функтор деб юритилади.

10.2.3-таъриф. Юқорида келтирилган ковариант функтор таърифида Ф функтор учун

Ф(1_x)=1Ф(х)=$1_{Ф(X)}$

Ф(гf)=Ф(f)$*$Ф(г)

шартлар ўринли бўлса, Ф функтор контравариант функтор дейилади.

Бошқача айтганда, контравариант функтор А категориядаги коммутатив диаграммани Б категориядаги коммутатив диаграммага ўтказар экан, бунда у фақат стрелкалар йўналишини алмаштиради:

$$\begin{tikzcd}
& X_2 \arrow[dr, "g"] \arrow[rrr, dashed, "F"] & & & F(X_2) \arrow[dl, "F(f)"'] & \\
X_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] & & X_3 & F(X_1) & & F(X_3) \arrow[ul, "F(g)"'] \arrow[ll, "F(gf)"]
\end{tikzcd}$$

10.2.4.-мисол Айтайлик, С(Х)={φ:Х→Р – узлуксиз функсия} барча Х фазодаги узлуксиз функсиялар тўплами бўлсин. Маълумки, бу тўпламнинг ихтиёрий $\phi \in C(X)$ ва $\varphi \in C(X)$ елементлари учун

($\varphi+\psi$)(х)=φ(х)+ ψ(х), ($\varphi\psi$)(х)= φ(х)$*$$\psi$(х)

формулалар ёрдамида бинар амал аниқланган. Бу тўпламда юқоридаги бинар амалига нисбатан бирлик элемент ҳам мавжуд. Шу сабабли С(Х) фазо коммутатив ҳалқа ташкил қилади. Агар f:Х→Й узлуксиз акслантириш бўлса, у ҳолда ҳар бир узлуксиз φ**:**Й→Р акслантиришга $\psi \circ f : X \to R$ композицияни мос қўйсак, натижада Ф(ф):С(Й)→С(Х) акслантиришга эга бўламиз. Бу акслантириш ҳалқалар орасидаги гомеоморфизмдан иборат бўлади. Натижада, ҳар бир Х$\in$Об топ обектга (топологик фазога) Х фазода узлуксиз функсиялар ҳалқаси С(Х) ни, ҳар бир f:Х→Й морфизмга ($f\in$Мор$_{топ}$ (Х,Й)) ҳалқавий гомеоморфизм Ф(ϕ):С(Й)→С(Х) ни мос келтирдик. Буни текшириш муаммо туғдирмайди, топологик фазолар категориясида бирлик элементли, коммутатив ҳалқалар категориясига акслантирувчи контравариант Ф функтор мавжуд.

Топологик масалаларни ҳал қилишда гуруҳлар назариясига функторларнинг қўлланилиши хусусида тўхталайлик. Олдинги бобларда акслантиришларни давомлаштириш (кенгайтириш) масаласи баён қилинган эди. Энди шу масалани қуйидагича ёритамиз. Х топологик фазо бўлсин ва $A \subset X$. и:$A \to X$ табиий акслантириш (ёки жойлаштириш) бўлсин, яъни ҳар бир $a \in A$ учун и$(a)=a$ ўринлидир. φ:А→Й узлуксиз акслантириш бўлсин.

$\bar{\varphi}$:Х→Й акслантириш φ нинг давомлаштириши бўлиши учун қуйидаги диаграмма коммутатив бўлиши зарур ва етарлидир.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X \arrow[dl, "\bar{\varphi}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Ф функтор (масалан, ковариант функтор) ёрдамида ҳосила □ алгебраик масалага эга бўламиз. Қуйидаги диаграммада коммутатив бўладиган Ф($\bar{\varphi}$) гомеоморфизм мавжудми?

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(i)"] \arrow[dr, "F(\varphi)"'] & & F(X) \arrow[dl, "F(\bar{\varphi})"] \\ & F(Y) & \end{tikzcd}$$

Бундан кўринадики, юқоридаги масала ечилса, кейинги алгебраик масала ҳам ечилади. Демак, Ф($\bar{\varphi}$) гомеоморфизмнинг мавжуд бўлиши φ акслантиришнинг давомлаштириши $\bar{\varphi}$ мавжудлигининг зарурий шартидир.

10.2.5-теорема. Ф:$К_1 \to К_2$ ихтиёрий ковариант ёки контравариант функтор берилган бўлсин. У ҳолда Ф функтор натижасида $К_1$ категориядаги f эквивалентликнинг $К_2$ категориядаги образи Ф(f)

эквивалентлик бўлади.

Исбот. Ф:$К_1$→$К_2$ ковариант функтор бўлсин ва f:Х≅Й $К_1$ категориядаги эквивалентлик бўлсин. Эквивалентлик таърифига кўра, шундай г:Й→Х морфизм топиладики, унинг учун $f \circ g = 1X$, $f \circ g = 1Y$ ўринли бўлади. Функторнинг иккита аксиомасига кўра, $Ф(г)_oФ(f)=Ф(г_o f)=Ф(1_х)=1_{Ф(х)}$ ва $Ф(f_o)Ф(г)=Ф(ф_oг)=Ф(1_Й)=1_{Ф(Й)}$ бўлади.

Демак, Ф(f) морфизм, ҳақиқатан ҳам эквивалентлик экан. Контравариант функтор исботи ҳам шунга ўхшайди.

10.2.6-натижа. Ихтиёрий функтор эквивалент обектларни эквивалент обектларга ўтказади.

Нормал функторлар.

ξ =(σ,м) категория берилган бўлсин, бу ерда σ ─ барча обектлар ва м ─ барча морфизмлар жамланмаси бўлсин.

Агар обектлар жамланмаси σ ва ҳар бир [Х,Й] жамланма бирор тўпламдан иборат бўлса, ζ категория кичик категория дейилади. Бу ерда Х дан Й га бўлган барча морфизмлар оиласини [Х,Й] билан белгилаймиз. Агар ζ =(σ,м) категория бўлса, унинг обектлар жамланмаси σ да, табиийки, олд тартиб мавжуддир, яъни бирор муносабат рефлексив ва транзитивдир. Ҳақиқадан ҳам, Х$\le$Й$\Leftrightarrow$[Й,Х]$\neq$Ø.

10.3.1-таъриф. Агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса, кичик $\Im$=(σ,м) категория тескари спектр дейилади:

1) σ тўпламдаги олд тартиб қисман тартибланган бўлса;

2) қисман тартибланган σ тўплам юқорига йўналган бўлса, яъни ихтиёрий икки Х,Й$\in$σ обектлар учун шундай З$\in$σ топилса ва унинг учун Х $\le$З ва Й$\le$З ўринли бўлса;

3) [Х;Й] тўплам битта элементдан ортиқ бўлмаса.

Тескари спектрнинг обектлари унинг элементлари, морфизмлари эса проексиялари деб юритилади. Қулайлик мақсадида спектрнинг элементларини Х билан белгилаб, уни индексдаги α бўйича бирорта қисман тартибланган тўпламдан иборат дейишимиз мумкин. Шунда Х дан

X_{α} га проексияни π_{β}^{α} билан белгилаймиз. Демак, спектрни $S=\{X_{\alpha};\pi_{\beta}^{\alpha};A\}$ кўринишида белгиласак бўлар экан. Албатта, бу ерда $\alpha,\beta\in$ А ва $\beta\leq\alpha,\ \pi_{\beta}^{\alpha}:X_{\alpha}\to X_{\beta}$ деб тушунилади. Тескари спектрларни ҳам спектрлар деб атаймиз.

Агарда (албатта, С спектр қаралаётган категорияда) ихтиёрий, $\alpha,\beta\in$ А, $\beta\leq\alpha$, учун $\pi_{\beta}^{\alpha}\circ\pi_{\alpha}=\pi$ ўринли ва ихтиёрий бошқа Й обект ва $\pi_{\beta}^{\alpha} o f_{\alpha}=f_{\beta}$ хоссаларига эга бўлган $f_{\alpha}:Y\to X_{\alpha}$ морфизмлар оиласи учун шундай ягона f:Й→X морфизм топилиб, ҳар бир $\alpha\in$ А учун $f_{\alpha}=\pi_{\alpha} o f$ ўринли бўлса, X обект ва морфизмлар оиласи π_{α}:X→ X_{α}, $\alpha\in$ А,С спектрнинг лимити дейилади. Спектрнинг лимити X=лимС кўринишда белгиланади. π_{α} морфизмларга ораловчи проексиялар дейилади.

Бирор категорияда аниқланган Ф ковариант функтор ва С=$\{X_{\alpha}:\pi_{\alpha}\}$ спектр берилган бўлсин. Айтайлик, Ф(С)={Ф(X_{α}): π_{α}^{β} }. Бу ҳолда Ф(С) ҳам спектрдан иборат бўлади. Уни ораловчи проексияларни π_{α}^{F} билан белгилаймиз.

10.3.2-таъриф. Агар ихтиёрий С спектр учун Ф(лимС)=лимФ(С) ўринли бўлса, Ф функтор узлуксиз дейилади. Бошқача айтганда, шундай f:Ф(лимС)→лим Ф(С) гомеоморфизм мавжудки, унинг учун

$$Ф(\pi_{\alpha})=\pi_{\alpha}^{F} o f \qquad (1)$$

ўринли бўлади. (1) тенгликдан маълумки, f гомеоморфизм мавжуд ва у ягонадир. Бу Ф(f_{α}) акслантиришларнинг лимитидан иборат. Яъни, агар Ф(π_{λ}) ларнинг лимити гомеоморфизм бўлса, Ф функтор узлуксиздир. Бунинг акси бўлса, функтор Сомп категориясида қаралаётган ҳисобланади.

10.3.3-таъриф. Агар Ф функтор бир нуқтали тўпламни яна бир нуқтали тўпламга ўтказса, функтор нуқтани сақлайди.

Айтайлик, $и_{A}$:A→X ёпиқ А тўпламни X га айнан жойлаштириш бўлсин. $Ф_{x}$(А) орқали Ф($и_{A}$) акслантириш образини белгилайлик. Агар ихтиёрий X ва унинг ихтиёрий {A_{α}) тўпламостилар тизими учун

$F_X(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha} F_X(A_{\alpha})$ ўринли бўлса, Ф фактор кесишмаларни сақлайди дейилади.

Агар, $Ф(f)^{-1}Ф_{Й}(А)=Ф_{X}(f^{-1}A)$ тенглик ихтиёрий f:X→Й акслантириш ва ихтиёрий А⊂Й тўплам учун ўринли бўлса, Ф функтор прообразларни (аслларни) сақлайди.

10.3.4-таъриф. Агар ихтиёрий ўзаро бир қийматли f акслантириш (сюректив) учун Ф(f) акслантириш ҳам ўзаро бир қийматли (сюректив) бўлса, Ф функтор мономорф мос равишда эпиморф дейилади.

10.3.5-таъриф. Агар қуйидаги шартларни қаноатлантирса, Ф функтор нормал функтор дейилади:

1) Ф функтор нуқта ва бўш тўпламни сақласа;

2) Ф функтор кесишмаларини сақласа;

3) Ф мономорфизмни сақласа;

4) Ф эпиморфизмни сақласа;

5) Ф узлуксиз бўлса;

6) Ф прообразлар ва бикомпактларнинг салмоғини сақласа, яъни $\omega(X) \le \tau \Rightarrow \omega(F(X)) \le \tau$ бўлса.

Охирги 30–40-йиллар мобайнида топологик фазоларнинг турли категорияларида юқоридаги хоссаларга эга бўлган нормал функторларнинг геометрик ва топологик хоссалари ўрганиб борилмоқда. Нормал функтор бирорта топологик фазода қаралса, бу фазонинг кўпгина геометрик хоссаларини у ёки бу маънода ўзгартириб юборади.

Эҳтимол ўлчовли функторлар ва уларнинг қисм функторлари.

Эҳтимол ўлчовли функтор бикомпакт фазолар категориясида қаралса, функтор натижасида ҳосил бўлган топологик фазоларнинг геометрик ва бошқа хоссаларини ўрганиш катта аҳамиятга эгадир. Бу функторни чекли тўпламларда қарасак, чекли ўлчамли симплексларга эга бўламиз. Унинг функторостиларини оладиган бўлсак, чекли ўлчамли фазоларни яна чекли ўлчамли фазога ўтказади ва бу функтор фазонинг кўпгина хоссаларини “яхшироқ” хоссаларга алмаштиради.

X бикомпакт бўлсин. Маълумки, ҳар бир $\mu \in$ C(C(X)) узлуксиз чизиқли функционалга (акслантириш) X нинг ўлчови дейилади. C(C(X)) фазо кўп ҳолларда $(C(x))^*$ кўринишида белгиланади. $(C(X))^*$ барча узлуксиз функционаллар фазоси деб юритилади ва бу фазо C(X) фазога қўшма фазодир. $C(X))^*$ нормаланган фазо, бу фазода норма $\|f(x)\|$=суп$\{\|f(x)\|: x \in X\}$ кўринишда аниқланади, бошқача айтганда, $(C(X))^*$ фазо Банах фазосидир. Албатта, барча узлуксиз функционалларни оладиган бўлсак, улар чегаралангандир.

Агар X фазодаги барча чекли регуляр ўлчовларни M(X) билан белгиласак, Рисс теоремасига кўра, $(C(X))^*$ фазо M(X) фазо билан изоморфдир. Шу сабабли M(X) даги баъзи белгилашларни қабул қиламиз. Бизга Рисс теоремаси шарт бўлмайди, ўлчовлар назариясидан бошқа тушунчаларни ишлатмаймиз. X фазода ўлчов деб фақат $\mu \in C^*$ (X) узлуксиз функционални тушунамиз. Баъзида $\int \varphi d\mu$ белгилашни μ функционалнинг φ даги қиймати деб тушунилади.

Агар ихтиёрий $\varphi \geq 0$ учун ва $\mu \in$ M(X) ўлчов учун $\mu(\varphi) \geq 0$ ўринли бўлса, μ ўлчов мусбат дейилади ва $\mu \geq 0$ каби ёзилади. M(X) фазонинг барча мусбат ўлчовлари тўплами мусбат конус дейилади. Шуни айтиш керакки, $\mu \geq 0$ бўлиши учун $\mu(1_x)=\|\mu\|$ бажарилиши зарур ва етарлидир. Ҳақиқатан ҳам, $\mu \geq 0$ ва $|\varphi| \leq 1$ бўлсин. У ҳолда μ $(1_x-\varphi) \geq 0$. Бундан μ $(1_x) \geq \mu$ (φ) ва μ $(1_x)=\|\mu\|$. Энди эса μ $(1_x)=\|\mu\|$ ва $\varphi \geq 0$ бўлсин.

Айтайлик, $\psi=1_x-(\varphi/\|\varphi\|)$. Бунда $\|\varphi\| \leq 1$, $\mu(\psi) \leq \|\mu\|=\mu(1_x)$, яъни μ (1_x)- μ $(\varphi/\|\varphi\|) \leq \mu(1_x)$. Бундан $\mu(\varphi) \geq 0$ келиб чиқади.

Агар $\mu \in$ M(X) ўлчов учун $\|\mu\|$=1 бўлса, μ ўлчов нормаланган дейилади. Мусбат нормаланган μ ўлчов эҳтимол ўлчови дейилади. Олдингилардан кўринадики, μ ўлчов эҳтимоллик ўлчови бўлиши учун $\int 1_x;\lambda\mu=1$ бўлиши зарур ва етарлидир. Энди M(X) тўпламда кучсиз деб аталувчи топологияни киритамиз. Яъни, M(X) тўплам сонлар ўқининг кўпайтмасидан иборат десак, M(X) ни П{Pφ :$\varphi\in$(X)} тўпламнинг тўпламостиси деб олишимиз мумкин.

Демак, M(X) фазо тўла (мутлоқ) регуляр фазо бўлар экан.

$\mu\in$M(x) элементнинг атрофлари базасини O($\mu,\varphi,...\varphi_{\text{к}},\varepsilon$) кўринишдаги тўпламлар ташкил қилади. Бу ерда $\phi\in C\left(X\right),\varepsilon>0$ ва $O(\mu,\varphi,...\varphi_{\text{к}},$ $\varepsilon)=\{\mu\in M(x):\mu^{1}\quad(\varphi_{i})-\mu(\varphi_{i})|<\varepsilon,i,=i_{1}\bar{k}\}$. M(X) фазонинг барча эҳтимоллик ўлчовларидан ташкил топган тўпламостисини П(X) билан белгилаймиз. Демак, П(X)$\subset$M(X).

10.4.1-теорема. Ихтиёрий X бикомпакт учун П(X) бикомпакт.

Исбот. Бизга маълумки, П(X)$\subset\prod$ {P$\varphi:\varphi\in C(X)$}. Энг аввало, П(X) нинг бу кўпайтмада ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатамиз. Агар $\mu\in\left[P(X)\right]$ бўлса, у ҳолда μ функсия чизиқли, агар $\varphi,\psi\in C(X),\varepsilon>0$ бўлса, у ҳолда шундай $\mu_{1}\in P(X)$ ни оламиз; $\mu_{1}\in O(\mu,\varphi,\psi,\varphi+\psi,\varepsilon/3)$ бўлсин. У ҳолда
$$|\mu(\varphi+\psi)-\mu(\varphi)-\mu(\psi)|=|\mu(\varphi+\psi)-\mu_{1}(\varphi+\psi)+\mu_{1}(\phi)+\mu_{1}(\psi)-$$
$$-\mu(\varphi)-\mu(\psi)|\leq(\mu(\varphi+\psi)-\mu_{1}(\varphi+\psi)|+|\mu_{1}(\varphi)-\mu(\varphi)|+|\mu_{1}(\psi)-\mu(\psi)|<\varepsilon.$$
Яъни, $\mu(\varphi+\psi)=\mu(\varphi)+\mu(\psi)$. Шунга ўхшаб, $\mu(r\varphi)=r\mu(\varphi)$. $\|\mu\|=1$: агар $\|\varphi\|\leq1$ ва $\varepsilon<0$ бўлса, у ҳолда шундай $\mu_{1}\in P(X)$ топиладики, $|\mu_{1}(\varphi)-\mu(\varphi)|<\varepsilon$ бўлади. У ҳолда $|\mu(\varphi)|\leq|\mu_{1}(\varphi)|+\varepsilon$, яъни $|\mu(\varphi)\|\leq1+\varepsilon$. Демак, $|\mu(\varphi)|\leq1$. Шунга ўхшаб, $\mu(1_{x})=1$ўринли. Демак, μ ўлчов нормаланган ва мусбат экан, яъни $\mu\in P(X)$. Иккинчи томондан, П(X) тўплам $[-\|\varphi\|,\|\varphi\|]$ кесмаларнинг кўпайтмаси $\prod$ $\{[-\|\varphi\|,\|\varphi\|]:\varphi\in C(X)\}$ да ётмоқда. Демак, П(X) бикомпакт экан.

Агар Ф да нол бўлган (Ф тўпламда қиймати нолга тенг) ихтиёрий $\varphi\in C(X)$ функсия учун$\int\varphi d\mu=0$ ўринли бўлса, μ ўлчов Ф$\subset$X тўпламда жамланган дейилади.

μ ўлчовнинг жамланган тўпламларининг энг кичиги унинг элтувчиси дейилади ва супп μ кўринишда ёзилади.

10.4.2-лемма. Ҳар бир $x \in X$ нуқта учун шу нуқтада жамланган ягона эҳтимол ўлчови δ_{x} мавжуд.

Исбот. Айтайлик, δ_{x} айтилган ўлчов бўлсин. У ҳолда δ_x (1_{x})=1 ва δ_x $(\varphi) = \delta_x\ (\varphi(x)1_x \setminus = \varphi(x)$. Иккинчидан, $\delta_x\ (\varphi) = \varphi(x)$ тенглик билан аниқланган δ_{x} ўлчов эҳтимоллик ўлчови ва у х нуқтада жамланган.

Фазонинг х нуқтасида жамланган δ_{x} ўлчов Дирак ўлчови дейилади.

10.4.3-лемма. Х фазодаги x нуқтани δ_{x} Дирак ўлчовига ўтказувчи (мос қўювчи) $\delta : X \to P(X)$ акслантириш узлуксиз ва гомеоморфизмдир.

Исбот. Бу акслантиришнинг ўзаро бир қийматли эканлиги равшан. Шу сабабли унинг узлуксизлигини кўрсатайлик. δ_{x} нинг ихтиёрий $O\delta_x$ атрофида $O(\delta_x, \varphi_1, ..., \varphi_k \varepsilon)$ базис атроф мавжуддир. Унинг Ox атрофи топиладики, унинг учун $|(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))| < \varepsilon$ тенгсизлик барча $y \in Ox$ ва $i = \overline{1,k}$ ларда ўринлидир. У ҳолда $\delta(Ox) \subset O(\delta_x, \phi, ..., \phi_k, \varepsilon).$

10.4.4-лемма. Ихтиёрий чексиз бикомпакт Х учун $\omega(X) = \omega P(X)$ ўринли.

Исбот. 5.3.3-леммага кўра, Х фазо δ акслантириш натижасида $P(X)$ га жойлаштирилган. Шу сабабли $\omega(X) \leq \omega P(X)$ ўринлидир. Иккинчидан, $M(X)$ фазодаги топологияни аниқлашда φ_i функцияларни $C(X)$ даги ҳамма жойдаги зич тўпламдан олса бўлади. Бу ерда ε ни ҳам рационал сон дейиш мумкин. Маълумки, агар X бикомпакт салмоғи τ бўлса, у ҳолда $C(X)$ фазода фазонинг ҳамма жойида зич ва куввати τ бўлган тўплам ости мавжуд. Шу сабабли чексиз бикомпакт X учун $d(C(X)) \leq \omega X$ ўринли.

Айтайлик, $f : X \to Y$ узлуксиз акслантириш бўлсин. $P(f) : P(X) \to P(Y)$ акслантиришни $(P(f)(\mu)(\phi)) = \mu(\phi \circ f)$ (1) формула билан аниқлаймиз. $P(f)$ акслантириш узлуксиздир. Ҳақиқатан ҳам, $\mu \in P(x)$ ва $\nu = P(f)(\mu)$ бўлсин. ν нуқтанинг базис атрофи $V = O(\nu, \varphi_1, ..., \varphi_k, \varepsilon)$ ни олайлик, $U = O(\mu, \varphi_1 of, \varphi_2 of, ..., \varphi_k of, \varepsilon)$ дейлик ва $P(f)(U) \subset V$ ни кўрсатайлик. Агар $\mu^1 \in U$ бўлса, у ҳолда $\left|\mu(\phi_i of) - \mu(\phi_i of)\right| < \varepsilon$ (1) тенгликка кўра бу тенгсизлик

$|(P(f)(\mu^1))(\varphi_i)-\nu(\varphi_i)|<\varepsilon$ тенгсизликка тенг кучлидир. Бундан $P(f)(\mu)\in V$ га эга бўламиз. Бевосита текшириш мумкинки, $P(g\circ f)=P(g)\circ P(f)$ тенглик ҳам ўринлидир. Демак, П функтор *Comn* категорияда ҳаракатланувчи ковариант функтор экан. Қуйидаги теоремани исбоциз келтирамиз.

104.5-теорема. Р функтор узлуксиздир, яъни $S=\{x_\alpha;\pi_\beta^\lambda,A\}$ спектр учун $P(\lim x)=\lim P(s)$ ўринли.

104.6-теорема. Агар $f:X\to Y$ мономорфизм бўлса, у ҳолда $P(f):P(X)\to P(Y)$ ҳам мономорфизмдир.

Исбот. Агар $\mu_1,M_2\in P(X)$ иккита ҳар хил ўлчовлар бўлса, у ҳолда шундай $\varphi\in C(x)$ функция мавжуд бўладики, $\mu_1(\varphi)\neq\mu_2(\varphi)$ ўринли бўлади. Брауер-Тице-Урисон теоремасига кўра, шундай $\Psi\in C(Y)$ функсия топиладики, унинг учун $\varphi=\Psi of$ ўринли бўлади. (1) тенгликка кўра, $P(f)(\mu_i)(\Psi)=\mu_i(\Psi of)=\mu_i(\varphi)$. Бундан $P(f)(\mu_i)\neq P(f)(\mu_2)$ келиб чиқади.

Элтувчиси чекли сондаги нуқталардан иборат бўлган ўлчов чекли элтувчили ўлчов деб тушунилади. Яъни, μ ўлчов учун $|\text{супп}\,\mu|<\infty$. Айтайлик, $\mu\in P(X)$ ўлчовнинг элтувчиси $\sup p\mu=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ ҳар хил нуқталардан иборат бўлсин. Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\varphi_1,\varphi_2,....,\varphi_n\in C(x)$ функсияларни олайлик:

$$\phi_i(x_j)=\begin{cases}1, \ agar\ i=j\ bo'lsa;\\ 0,\ agar\ i\neq j\ bo'lsa.\end{cases}$$

Айтайлик, $m_i=\mu(\varphi_i)$. Ўлчовларнинг элтувчилик таърифига кўра, m_i сонлар (2) шартни қаноатлантирувчи φ_i функсияларни танлашга боғлиқ эмас. Шу сабабли улар m_i сонини x_i нуқтанинг $\mu-$ўлчови дейилади. (2)-шартни қаноатлантирувчи φ_i функсияларни $\sum\varphi_i=1$ ва $\varphi_i\geq 0$ шартлар қаноатлантирувчи қилиб танлашимиз мумкин. Шу сабабли

$m_1+m_2+....+m_n=1$ ва $m_i\geq 0$ (3) .

Энди элтувчиси $\{x_1,.....,x_n\}$ чекли тўпламдан иборат бўлган μ ўлчов x_i нуқталарининг ўлчовлари m_i лар орқали бир қийматли аниқланишини кўрсатамиз. Яъни,

$\mu(\varphi)=m_1\varphi(x_1)+.....+m_n\varphi(x_n)$ (4)

Тенглик кўриниши. Дирак ўлчови δ_{x_i} нинг аниқланишига кўра, (4) тенглик

$\mu=m_1\delta x_1+m_2\delta x_2+....+\mu_n\delta x_n$ (5)

га айланади. Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий φ функсияни

$\varphi=\varphi(x_1)\varphi_1+\varphi(x_2)\varphi_2+.....+\varphi(x_n)\varphi_n$

кўринишда ифодалаш мумкин, бу ерда $\varphi_1,.....,\varphi_n$ фуксиялар (2) шартни қаноатлантиради. У ҳолда

$\mu(\varphi)=\varphi(x_1)\mu(\varphi_i)+\varphi(x_2)\mu(\varphi_2)+.....+\varphi(x_n)\mu(\varphi_n)=\varphi(x_1)m_1+\varphi(x_2)m_2+....+\varphi(x_n)m_n$

Шундай қилиб, қуйидаги теорема ҳам исботланди.

10.4.7-теорема. Чекли элтувчили ўлчовлар Дирак ўлчовларининг қавариқ чизиқли комбинатsiяси (5) дан иборат экан.

Қуйидаги теоремани исбосиз келтирамиз.

10.4.8-теорема. Чекли элтувчили барча ўлчовлар П(Х) тўпламда зич тўпламостини ташкил қилади.

10.4.9-теорема. Агар $f:X\to Y$ эпиморфизм бўлса, у ҳолда $P(f):P(X)\to P(Y)$ ҳам эпиморфизмдир.

Исбот. Дастлаб $P(f)$ акслантириш натижасида барча $\mu\in P(Y)$ чекли элтувчили ўлчовлар қамраб олинишини кўрсатамиз, яъни $\mu=\sum_{i=1}^{u}m_i\delta y_i$.

Ҳақиқатан ҳам, $f^{-1}(y_i)$ дан биттадан $x_i\in f^{-1}(y)$ нуқтани олсак ва $v=\sum m_i\delta x_i$ ўлчовни тузсак, $P(f)(v)=\mu$ ўринли бўлади. Энди 5.4.8-теоремани қўлласак, исбот поёнига етади.

Агар $f:X\to Y$ акслантириш ва ҳар бир $a\in F(X)$ нуқта учун қуйидаги $f(\sup pa)=\sup pF(f)a$ (6) ўринли бўлса, F функтор элтувчиларни сақлайди.

10.4.10-теорема. Мономорф F функтор элтувчини сақлаши учун F функтор прообразларни сақлаши зарур ва етарлидир.

Исбот. *Етарлилиги.* Ихтиёрий $A\subset X$ ёпиқ тўплам учун $F(A)$ ни

$F(X)$ даги табиий равишдаги $F_X(A)\subset F(X)$ тўпламостиси сифатида қараш мумкин, яъни $i_a : A \to X$ айний жойлаштиришни олсак ва $F(i_\alpha)$ функтордаги образини қарасак, $F(i_A)(A)\subset F(X)$ ўринли бўлади. Айтайлик, $A=\mathrm{supp}a$ бўлсин. $F(f)(a)\in F(f)|_{F(A)}\subset F(f_A)$ ўринли, яъни $\mathrm{supp}F(f)(a)\subset f(\mathrm{supp}a)$ Y ва аксинча, айтайлик, $B=\sup pF(f)(a)$ бўлсин. У ҳолда F прообразларни сақлаганлиги туфайли қуйидагига эга бўламиз:

$$F(f^{-1}(B))=F(f)^{-1}F(B)\supset F(f)^{-1}F(f)(a)\supset a$$

Демак, $\mathrm{supp}a\subset f^{-1}B$. Яъни, $f\left(\mathrm{supp}a\right)\subset B$ бўлади.

Зарурлиги. f акслантириш $f^{-1}(A)$ ни А га ўтказганлиги туфайли $F(f)(F(f)(f^{-1}(A))\subset F(A)$ га эга бўламиз ва шу сабабли $F(f^{-}(A))\subset F(f)^{-1}F(f)(F(f^{-1}A))\subset F(f)^{-1}F(A)$ бўлади. Демак, $F(f)^{-1}F_Y(A)=F_x(f^{-1}(A))$ тенгликда $\supset$ни текширишда F нинг элтувчини сақлаши зарур бўлмади.

Энди тескари $\supset$ни текширамиз. Айтайлик, $a\in F(f)^{-1}F(A)$ бўлсин. У ҳолда F нинг элтувчини сақлаши туфайли $f(\mathrm{supp}a)\subset A$ га эга бўламиз. Ниҳоят, $\mathrm{supp}(a)\subset f^{-1}(A)$ ўринли ва $a\in F(f^{-1}A)$.

10.4.11-теорема. $x\in X$ нуқта $\mu\in P(X)$ ўлчовнинг элтувчисига тегишли бўлиши унинг ихтиёрий Ox атрофи учун $\mu([Ox])>0$ бўлиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Фараз қилайлик, x нуқтанинг шундай Ox мавжуд бўлсинки, у учун $\mu([Ox])=0$ ўринли бўлсин. Ихтиёрий шундай $\varphi\in C(X)$ функсияни олайликки, $\varphi(X\setminus Ox)=0$ бўлсин. Айтайлик, $|\varphi|\le M>0$бўлсин. $C(X)$ фазода шундай $\Psi\in C(X)$ ни оламизки, у учун $0\le\Psi\le 1$ ва $\Psi([0_x])=1,$ $\mu(\mu\varphi)<\varepsilon M$ ўринлидир. У ҳолда $|\varphi|\le M\psi$ ва, ниҳоят, $\mu(|\varphi|)\le\mu(M\psi)<\varepsilon.$ Демак, ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун $\mu(|\varphi|)<\varepsilon.$ Ниҳоят, $\mu(|\varphi|)=0,$ бундан эса, $\mu(\varphi)=0$келиб чиқади. Элтувчининг таърифига кўра, $\sup p\mu\subset X\setminus(Ox)$ ва, ниҳоят, $x\bar{\in}\,\mathrm{supp}\mu$. Бунинг акси, агар $x\bar{\in}\sup p\mu$ бўлса, X нинг O_x атрофини $O_x\cap\sup p\mu=\varnothing$ шартни қаноатлантирадиган қилиб олиб, Урисон теоремасига кўра шундай $\psi \in C(X)$ топиш мумкинки, $x \in \mathrm{supp}\mu$ нуқталарда $\psi(x)=0$ бўлади. У ҳолда $\mu([Ox]) \le \mu(\varphi)=0$. Бу ерда $\mu([Ox]) = \inf\{\mu(\phi): \phi \in C(X),\ 0 \le \phi(x) \le 1, \phi(x)=0, x \in F\}$.

Бу теорема билан бир қаторда қуйидаги ҳам исботланди.

10.4.12-теорема. Агар $\mu(F)>0$ бўлса, у ҳолда $F \cap \sup p\mu \ne \varnothing$.

10.4.13-теорема. Ихтиёрий $f \in C(X,Y)$ акслантириш ва ихтиёрий $\mu \in P(X)$ учун қуйидаги ўринли: $\mathrm{supp}P(f)(\mu) = f(\mathrm{supp}\mu)$.

Исбот. Аввал $\subset$ бўлишини текширамиз. Айтайлик, $\varphi \in C(Y)$ функсия $f(\sup p\mu)$ да нолга тенг бўлсин. У ҳолда $(\varphi o f)(\sup p\mu)=0$ бўлади. Демак, $\mu(\varphi o f)=0.$ Бу ҳолда $P(f)(\mu)(\phi)=\mu(\phi o f)=0$ ҳам ўринли.

Энди $\supset$ бўлишини текширайлик. Айтайлик, $y \in f(\sup p\mu).$ Бу ҳолда 8.4.11- теоремага кўра, ихтиёрий Оу атроф учун $P(f)(\mu)([Oy])>0$ ни текшириш керак. Шундай $x \in \sup p\mu$ нуқта ва шундай Ox атроф олайликки, $f(O_x) \subset Oy$ ўринли бўлсин.10.4.11-теоремага кўра, $\mu([Ox])>0.$ Лекин ихтиёрий ёпиқ $F \subset X$ тўплам учун қуйидагига эга бўламиз:

$\mu(F) \le P(f)(\mu)(f(F))$ (1)

Ҳақиқатан ҳам, агар $x \in F$ бўлса, бу тенгсизлик $0 \le \varphi \le 1,$ $\varphi(x)=0,$ $x \in f(F)$ лардан $0 \le \varphi o f \le 1,$ $\varphi o f(x)=0$, ларни келтириб чиқаради. Демак, $P(f)(\mu)([Oy]) \ge P(f)(\mu)(f[Ox]) \ge ((1)\ \text{ga ko‘ra}) \ge \mu([Ox]) > 0$.

10.4.14-теорема. Эҳтимоллик функтори П нормал функтордир.

Исбот. Маълумки, эҳтимоллик функтори П нуқтани ва бўш тўпламни сақлайди, яъни П натижасида нуқта яна нуқтага, бўш тўплам яна бўш тўпламга ўтади. Ушбу параграфда биз функторнинг узлуксизлиги (8.4.5-теорема), мономорфлиги (10.4.6-теорема), эпиморфлиги (10.4.9-теорема), чексиз биокомпактларнинг салмоғини сақлашини (10.4.4-лемма) кўрсатдик. Энди прообразларни ҳамда кесишмаларни сақлашини кўрсатишимиз лозим. Прообразларни сақлаши элтувчини сақлашга эквивалент бўлганлиги туфайли (10.4.10-теорема) ўринлидир. Кесишмаларни сақлашини кўрсацак етарли бўлади, чунки П функтор

10.4.13-теоремага кўра элтувчини сақлайди. Маълумки, П функтор узлуксиз, шу сабабли бир жуфт тўпламнинг кесишмасини сақлашини кўрсатишимиз етарли. Айтайлик, $Y_1, Y_2, \subset X$ ва $\mu \in P(Y_1) \cap P(Y_2)$ бўлсин. Бу ихтиёрий $\varphi \in C(Y_i)$ функсия ва унинг X гача ихтиёрий давомлаштиришлари φ^1, φ^{11} лар учун $\mu(\varphi^1) = \mu(\varphi^{11})$ ўринли. Бошқача айтганда, агар $\varphi \in C(X)$ ва $\varphi(Y_i) = 0$ бўлса, у ҳолда $\mu(\varphi) = 0.$ Айтайлик, $\varphi(Y_1 \cap Y_2) = 0$ бўлсин. Y_1тўпламда φ га ва Y_2 тўпламда нолга тенг бўлган $\psi': Y_1 \cup Y_2 \to R$ функсияни оламиз. Айтайлик, ψ функсия ψ^1 нинг X гача бўлган ихтиёрий давомлаштириши бўлсин. $\mu \in P(Y_1)$ бўлганлиги сабабли $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$ га эга бўламиз. Лекин $\psi(Y_2) = 0$ ва $\mu \in (Y_2)$. Демак, $\mu(\varphi) = 0$. Бинобарин, $\mu(\varphi) = 0$ ва $\mu \in P(Y_1 \cap Y_2)$. $P(Y_1 \cap Y_2) \subset P(Y_1) \cap P(Y_2)$ нинг исботи тривиалдир.

Биз эҳтимоллик функтори $P: Comp \to Comp$ бикомпактлар ва уларнинг узлуксиз акслантиришлари категорияда нормал функтор эканлигини кўрсатдик. Р функторнинг функторостилари P_n ва P^c лар ҳам ажойиб геометрик хоссаларга эга. Қизиққан ўқувчилар бошқа $\exp, \exp_n, \lambda, \lambda_n$ функторлар билан ҳам танишишлари мумкин.

Масаланинг қўйилиши:

1.Топологик фазоларнинг қандай ўлчамларини биласиз?

2.Ёпиқ йўл таърифини келтиринг.

3.Кўпхилликларнинг қандай турларини биласиз?

4.Чизиқ таърифи ва мисоллар.

Ишни бажариш учун намуна.

Мисол. Олдинги бобда келтирилган фазонинг *н* ўлчовли фундаментал гуруҳи $\pi_н$(X) ва *X* фазонинг *н* ўлчовли гомологияси *Ҳ*$Х_н(X)$ ни олсак, бу $\pi_н$ ва $Х_н$ лар ҳам ковариант функторлар бўлади.

P^2 ва P^1 фазоларни топологик фарқлаш масаласида олдинги бобда келтирилган $Х_0$ функторнинг қўлланилишига тўхталайлик.

Тескаридан фараз қиламиз: f:$P^1 \to P^2$ гомеоморфизм мавжуд бўлсин. У ҳолда, P\{0} ва P^2\{0} лар ҳам гомеоморфдир.

Иккинчидан, $P\backslash\{0\}$ ва $P^2\backslash\{0\}$ ларнинг боғламли компоненталарининг сони иккига тенг, шу сабабли бунга мос $Ҳ_0(P^1\{0\})$ эркин абел гуруҳи фақат битта боғламли компонентага эга. Юқоридаги 5.1.1-натижага кўра, H_0 функтор гомеоморф фазоларни изоморф г гуруҳларга ўтказиши керак. Лекин, $Ҳ_0(P^1\backslash\{0\})$ ва $Ҳ_0(P^2\backslash\{0\})$ гуруҳлар изоморф бўла олмайди, чунки уларнинг ясовчилар сони ҳар хилдир. Бу зиддият P^1 ва P^2 фазоларнинг гомеоморф эмаслигини кўрсатади.

Назорат саволлари:

1.Топологик фазоларнинг қандай ўлчамларини биласиз?

2.Ёпиқ йўл таърифини келтиринг.

3.Кўпхилликларнинг қандай турларини биласиз?

4.Чизиқ таърифи ва мисоллар.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Ostermann, A., Wanner, G. Geometry by Its History. Germany2012 Springer, Germany Английский.

2. Marilyn Wolf Computers as Components, Third Edition: Principles of Embedded Computing System Design 3rd Edition USA, 2012 Morgan Kaufmann английский.

3. Жўраев Т.Ф. “Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар.” Т.2012 240 бет.

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

1-Кейс. Математик структура ва унинг модели, аксиомалари системалари.

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар.

1. Лобачевский геометрияси ва Евклид геометрияси аксоомаларини фарқли жихатлари.

2. Математик структура (Группа структураси) Э тўплам, Δ - операtsiя, амал (муносабат)

A_1 : Δ - алгебраик амал Э да аниқланган;

A_2 : Δ - нинг ассоциативлиги;

A_3 : Э – да нейтрал элемент мавжудлиги;

A_4 : Э – да симметрик ёки тескари элементининг мавжудлиги.

2) Евклид геометрияси Гильберт аксиомалар системаси мисолида.

Э – нуқталар тўплами;

Ф- тўғри чизиқлар,

Г – текисликлар тўплами

Δ_1 – “ да ётади ”

Δ_2 – “ орасида ётади”

Δ_3 – “конгруэнтлик”

A_1, A_2, …, A_{20} – Гильберт аксиомалари.

2-Кейс.Геометриасослари Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар.

1. Аффин текисликдаги барча параллел кўчиришлар тўплами группа ҳосил қиладими

2. Учта нуқтанинг оддий нисбатининг элементар исботи.

3. Қуйидаги тасдиқларни исботланг.

a) Агар $Y \subset X$ топологик фазонинг тўпламостиси бўлса, $Y \subset F \subset X$ ва F ёпиқ бўлганда, уҳолда $\bar{Y} = F$.

b) Й ёпиқ фақат ва фақат агар$Y = \bar{Y}$бўлса

c) $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$;

d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;

e) $X \setminus Y = \left(\overline{X \setminus Y}\right)$;

f) $\bar{Y} = Y \cup \partial Y \; bunda \; \partial Y = \bar{Y} \cap \left(\overline{X \setminus Y}\right)$; ($\partial Y$ га Й нинг чегараси дейилади)

g) Yёпиқ фақат ва фақат шунда ёпиқки, агар $\partial Y \subset Y$ бўлса;

h) Y бир вақтнинг ўзида ҳам очиқ ҳам ёпиқ бўлгандагина $\partial Y = \emptyset$ бўлади;

i) $\partial(\{x \in R: a < x < b\}) = \partial(\{x \in R: a \leq x \leq b\}) = \{a, b\}$;

j) Y ўз ичининг ёпиғИ билан устма-уст тушгандагина, Й бирорта очиқ тўпламнинг ёпиғи бўлишини исботланг;

3-Кейс.Топологик фазода *ind* ўлчами ва мисоллар

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар.

1.Xтопологик фазо берилган бўлсин. Қуйидаги тасдиқларни исботланг: (I) ихтиёрий $x \in X$ нуқта учун унинг ҳеч бўлмаганда битта атрофи мавжуддир; (II) агар Nтўплам x нинг атрофи ва$N \subset M$ бўлса, унда M ҳам унинг атрофидир. (III) ихтиёрий$x \in X$ нуқта ва унинг ихтиёрий ва атрофи учун, x нуқтанинг шундай U атрофи топиладики, у учун $U \subset N$ ва U тўплам ўзининг ҳар бир нуқтасининг атрофи бўлади;

a) $f: X \to Y$узлуксиз ва биектив. Шундай X, Y фазоларга мисоллар келтирингки, f^{-1} узилишли бўлсин.

b) XваY топологик фазолар берилган бўлсин. X ва Y лар шунда ва фақат шу ҳолда гомеорфки, агар $f: X \to Y$ акслантириш мавжуд бўлса,

I) f биектив

II) $f(u)$ очиқ бўлсагина,$U \subset X$ очиқ бўлишини исботланг;

c) Y тўпламда шундай d_1 ва d_2 метрикалари берилганки, баъзи мусбат m ва M, барча $y, y' \in Y$ лар учун

$$md_1(y, y') \leq d_2(y, y') \leq Md_1(y, y').$$

ўринли бўлсин. Шу метрикалар билан аниқланадиган бу икки топологик фазо гомеоморфлигини кўрсатинг;

d) X-топологик фазо ва $G(X) = \{f: X \to X\}$барча гомеоморфизмлар тўплами берилган бўлсин, $x \in X$ учун $G_X(X) = \{f \in G(X): f(X) = X\}$ ни аниқлаймиз. $G_X(X)$тўплам$G(X)$ нинг группаостиси эканлигини исботланг.

3. $f: X \to Y$топологик фазонинг узлуксиз акслантириши бўлсин. Агар f

a) Инъектив;

b) Сюректив;

c) Биектив бўлса, берилган тўртта ҳолдан қайси бири ҳақиқатда ўринли бўлиши мумкин?

4-Кейс. Топологик фазода *dim* ўлчами ва мисоллар

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар.

1. Агар $A \subset B$ бўлиб, улардаги фазоостильар бўлсин.AтўпламB учун атрофли ретракт, B эса X учун атрофли ретракт бўлса, A тўплам X учун атрофли ретракт бўлишини исботланг.

2.A тўплам X учун ретракт, B эса Y учун ретракт бўлса, $A \times B\ to'plam\ X \times Y$ учун ретракт бўлишини исботланг.

3. R^3фазоостисининг қайси бир тўпламлари ўзаро гомеорфлигини кўрсатинг.

5-Кейс. Топологик фазонинг фундаментал группаси

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар.

A)YтўпламX нинг фазоостиси, Z тўплам Y нинг фазоостиси бўлса, унда X тўплам Z нинг фазоостиси бўлишини кўрсатинг.

b) Метрикаланган фазонинг ихтиёрий фазоостиси метрикалангандир.

c) SтўпламX нинг фазоостиси деб хисоблайлик. $i: S \to X$ акслантиришининг узлуксизлигини кўрсатинг. Бундан ташқари S даги топологиянинг $i: S \to X$ (жойлаш) си узлуксизлигига нисбатан топологиялар ичида энг кичиклигини (энг кичик очиқ тўпламга эга).

d) $X -$топологик фазо, $S -$унинг тўплам остиси ва $i: S \to X$- жойлаштириш берилган бўлсин. Sда шундай топология берилган деб хисоблайликки, ихтиёрий Y фазо ва $f: Y \to S$ акслантиришлар учун, $i \circ$

$f: Y \to X$ композиция узлуксиз бўлгандагина бу акслантириш узлуксиз бўлади. Sдаги топология X даги индутсирланган топология билан мос тушсин.

e) Y тўпламX ни фазоостиси, A тўплам эса Y даги тўпламости бўлсин. X даги A нинг ёпиғини $Cl_X(A)$, Y даги A нинг ёпиғини $Cl_Y(A)$ орқали белгилайлик. $Cl_Y(A) \subset Cl_X(A)$ўринли эканлиги, умуман олганда, $Cl_Y(A) \neq Cl_X(A)$ ўринли бўлишини исботланг;

f) Rнинг(a, b) тўпламостили индустрланган топологиядаR га гомеоморф эканлигини исботланг. (Кўрсатма: cваd мос келганда $X \to [\pi(cx + d)]$кўринишидаги (га ўхшаш) функциядан фойдаланинг).

g) X, Y – топологик фазо ва $S \subset X$ даги фазо берилган бўлсин. $f: X \to Y$ узлуксиз бўлса, $f/_S: S \to Y$ ҳам узлуксиз бўлишини исботланг.

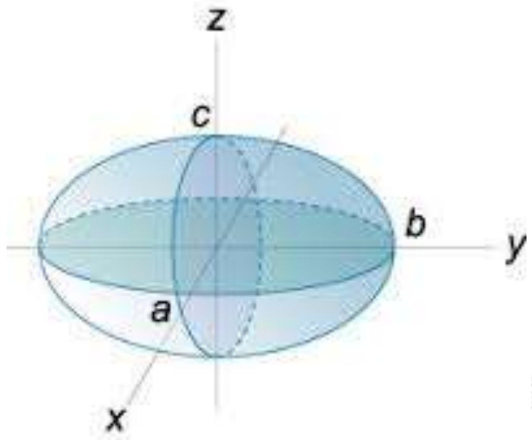
h) Rдаги табиий топологияда $(1, \infty)$ва $(0, 1)$ фазоостильарининг гомеоморфлигини кўрсатинг. (Кўрсатма: $X \to {}^1/_X$).

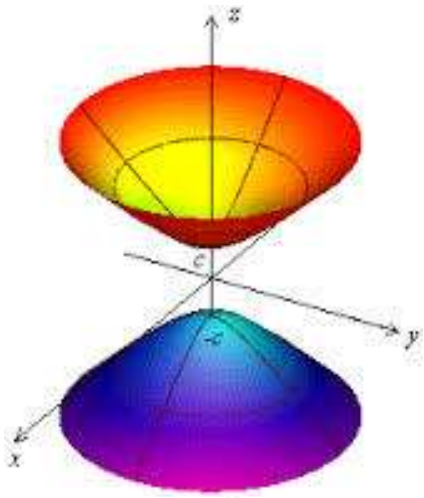
i) $S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ни табиий топологияли R^n га гомеоморф эканлигини исботланг. (Кўрсатма: $\varphi: S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \to R^n \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$, формула орқали $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1+\|x\|^2}\big((2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \ \|x\|^2 - 1)\big)$формула орқали аниқланг.)

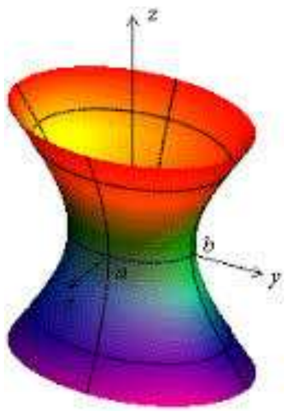
j) $R^{n+1} \setminus \{0\}$ваS^n ларR^{n+1} фазонинг индустириланган табиий топологияси билан тўлдирилган (қониқтирилган) бўлсин. $f(x) = {}^x/_{\|x\|}$тенглик билан аниқланган $f: R^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ акслантиришнинг узлуксизлигини исботланг.

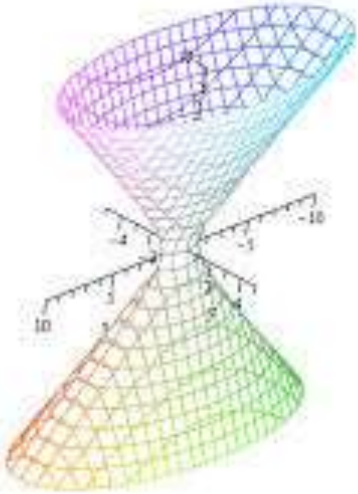
2. $f: X \to Y$акслантириш узлуксиз бўлиши учун Й тўпламдаги ихтиёрий $G \subset Y$очиқ тўпламнинг прообрази $f^{-1}G \subset X$ очиқ бўлиши зарур ва етарли.

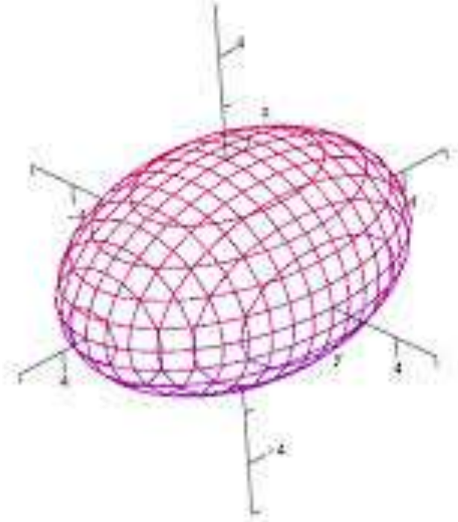
3.Қуйидаги сиртларни таърифланг.







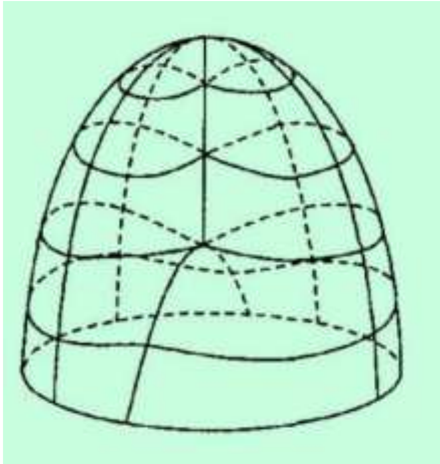
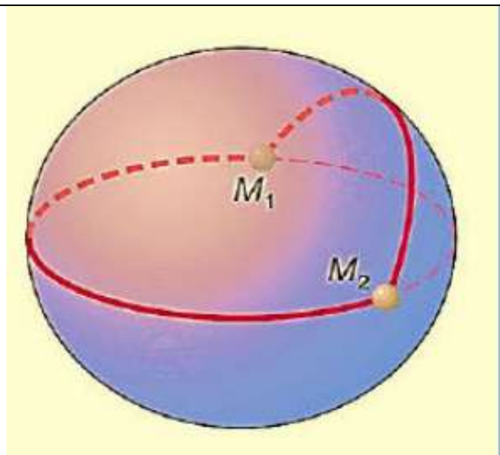




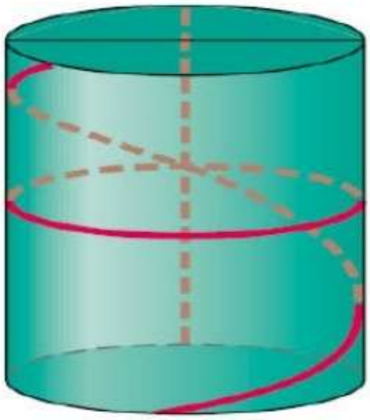
6-Кейс. Топологик кўпхилликлар ва унинг Эйлер характристикаси

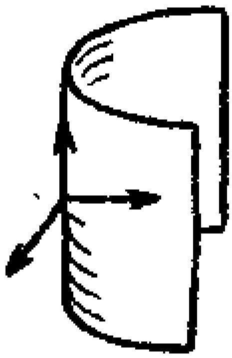
Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар.

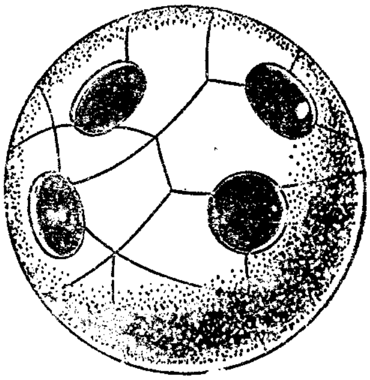
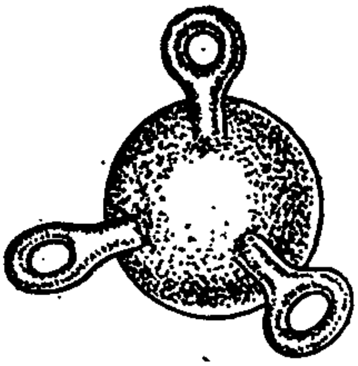
- 0 – ўлчамлик кўп хилликларга мисол келтиринг.
- Иккита бир ўлчамли кўпхиллик бирлашмаси бир ўлчамли кўпхиллик бўладими?
- Кўпёқ сирти кўпхиллик бўладими?
- Текисликдаги алгебраик чизиқ кўпхиллик бўладими?
- Бирорта узлуксиз функция графиги кўпхиллик бўладими?
- Фазодаги алгебраик сирт кўпхиллик бўладими?
- Проектив тўғри чизиқ кўпхиллик бўладими?
- Проектив текислик кўпхиллик бўладими?
- Винт чизиғи кўпхиллик бўладими?

Ф.И.Ш.______________________________ Гурух ______________________________ Сирт (кўпхиллик) хақида қуйидаги саволларга жавоб беринг? Ўлчами-__________________________ Боғламлилиги-___________________ Компактлиги-____________________ Чегаралилиги-___________________ Тутқичлилиги-__________________ Тешиклилиги-___________________ Сирт номи-______________________	
Ф.И.Ш.______________________________ Гурух ______________________________ Сирт (кўпхиллик) хақида қуйидаги саволларга жавоб беринг? Ўлчами-__________________________ Боғламлилиги-___________________ Компактлиги-____________________ Чегаралилиги-___________________ Тутқичлилиги-__________________ Тешиклилиги-___________________ Сирт номи-______________________	

Лемниската ва кардиоида чизиғи бир ўлчамли кўпхиллик бўладими?

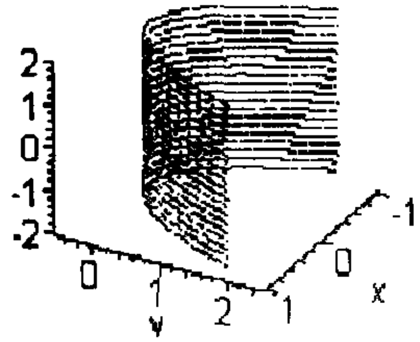
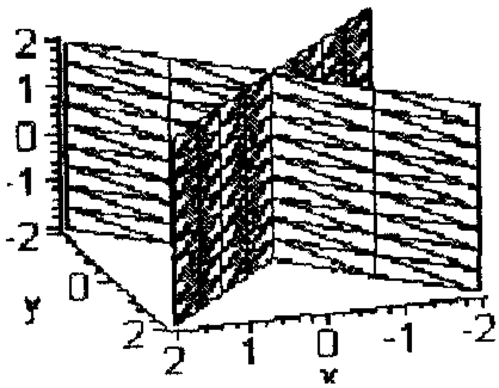
Ф.И.Ш.___________________________ Гурух ____________________________ Сирт (кўпхиллик) хақида қуйидаги саволларга жавоб беринг? Ўлчами-________________________ Боғламлилиги-__________________ Компактлиги-___________________ Чегаралилиги-__________________ Тутқичлилиги-__________________ Тешиклилиги-___________________ 7.Сирт номи-_____________________	

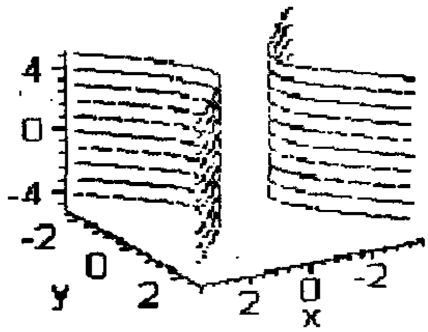
Ф.И.Ш.___________________________ Гурух ____________________________ Сирт (кўпхиллик) хақида қуйидаги саволларга жавоб беринг? Ўлчами-________________________ Боғламлилиги-__________________ Компактлиги-___________________ Чегаралилиги-__________________ Тутқичлилиги-__________________ Тешиклилиги-___________________ Сирт номи-_____________________	

<table>
<tr>
<td>Ф.И.Ш.___________________________
Гурух ____________________________
Сирт (кўпхиллик) хақида қуйидаги саволларга жавоб беринг?
Ўлчами-________________________
Боғламлилиги-_________________
Компактлиги-__________________
Чегаралилиги-__________________
Тутқичлилиги-_________________
Тешиклилиги-__________________
Сирт номи-____________________</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Ф.И.Ш.___________________________
Гурух ____________________________
Сирт (кўпхиллик) хақида қуйидаги саволларга жавоб беринг?
Ўлчами-________________________
Боғламлилиги-_________________
Компактлиги-__________________
Чегаралилиги-__________________
Тутқичлилиги-_________________
Тешиклилиги-__________________
7.Сирт номи-____________________</td>
<td></td>
</tr>
</table>

7-Кейс. Чизиқ таърифи ва мисоллар

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар.

Ф.И.Ш._________________________ Гурух __________________________ Сирт (кўпхиллик) хақида қуйидаги саволларга жавоб беринг? Ўлчами-_____________________ Боғламлилиги-________________ Компактлиги-_________________ Чегаралилиги-_________________ Тутқичлилиги-________________ Тешиклилиги-_________________ Сирт номи-___________________	
Ф.И.Ш._________________________ Гуруҳ __________________________ Сирт (кўпхиллик) хақида қуйидаги саволларга жавоб беринг? Ўлчами-_____________________ Боғламлилиги-________________ Компактлиги-_________________ Чегаралилиги-_________________ Тутқичлилиги-________________ Тешиклилиги-_________________ Сирт номи-___________________	

<table>
<tr>
<td>
Ф.И.Ш.__________________________
Гурух ___________________________
Сирт (кўпхиллик) ҳақида қуйидаги саволларга жавоб беринг?
Ўлчами-_______________________
Боғламлилиги-_________________
Компактлиги-__________________
Чегаралилиги-_________________
Тутқичлилиги-_________________
Тешиклилиги-__________________
7.Сирт номи-____________________
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

8-Кейс. Функторлар ҳақида тушунча. Эҳтимоллик функтори

Кейсни бажариш босқичлари ва топшириқлар.

1. *X=(0,1)* интервал компакт тўплам бўлмайди нега

2. $X=[a_1,b_1]\cup[a_2,b_2]\cup...\cup[a_n,b_n]$ - тўплам компакт тўплам бўладими

3. Агар X дискрет фазо бўлса, уни ихтиёрий *Й* топологик фазога аксланттириш узлуксиз бўладими нега

4. $r: R \to I$ аксланттириш

$$r(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x \le 0 \\ x, \text{ агар } 0 \le x \le 1 \\ 1, \text{ агар } x \ge 1 \end{cases}$$ формула билан аниқлансин.

Бу аксланттириш ёпиқ, аммо очиқ эмас нега

5. $f: L \to R$ аксланттириш Немыцкий текислигидаги (x,y) нуқта учун абсциссаси $x \in R$ ни мос қўювчи аксланттириш бўлса, бу аксланттириш очиқ, аммо ёпиқ эмаслигини изоҳланг.

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни

Тингловчи мустақил ишни муайян модулни хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;;
- автоматлаштирилган ўргатувчи ва назорат қилувчи дастурлар билан ишлаш;
- махсусу адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- тингловчининг касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган модул бўлимлари ва мавзуларни чуқур ўрганиш.

Мустақил таълим мавзулари

1. Алгебра ва алгебраик амаллар. Группа ва майдон тушунчаси.
2. Геометрик алмаштиришлар группаси ва эквивалент фигуралар. Хоссалари.
3. Геометриянинг индуксия ёрдамида ечиладиган масалалари.
4. Гилберт ва Вейл аксиомалари системаси.
5. Лобачевский геометрияси ва унинг моделлари.
6. Топологик фазода тўплам ва унинг ички, ташқи, чегаравий, уриниш нуқталари. Хоссалари.
7. Топологик фазода *ind* ўлчамининг баъзи хоссалари.
8. Топологик фазода қоплама тушунчаси, хоссалари ва dim ўлчами.
9. Топологик фазода кўпхиллик ва уларнинг классификацияси.
10. Чизиқ ва чизиққа доир масалалар.
11. Эҳтимоллик функтори ва симплекслар.

VII. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
Топологик фазо	Ихтиёрий “табиатли” бўш бўлмаган X тўплам ва $\tau=\{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ система (шу X тўпламнинг тўпламостилардан ташкил топган) берилган бўлсин. **1.3.1-таъриф.** Агар τ система (тўпламостилар оиласи) қуйидаги: 1) $\varnothing, X \in \tau$; 2) τ системанинг ихтиёрий сондаги элементларининг бирлашмаси τ га тегишли бўлса, яъни $\forall A` \subset A$ учун $\bigcup_{\alpha^1 \in A^1} U_{\alpha`} \in \tau; \alpha^1 A^1$; 3) τ системанинг ихтиёрий чекли сондаги элементлари кесишмаси τ га	Given a X set. Its $\mathcal{T}$ subsets is called a topology on system, if the following conditions are met: The union of an arbitrary family of sets belonging to $\mathcal{T}$, owned $\mathcal{T}$, that is $U_\alpha \in \mathcal{T} \quad \forall\alpha \in A$, if then $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$. The intersection of a finite family of sets belonging to $\mathcal{T}$, owned $\mathcal{T}$, that is $U_i \in \mathcal{T} \quad i=1,\ldots,n$, if then $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$ . . $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ The pair $(X, \mathcal{T})$ is called a topological space $\mathcal{T}$. The sets belonging, called open sets.

	тегишли бўлса, яъни $\forall\alpha_i \in A$, $i=\overline{1,S}$ $\bigcap_{i=1}^{S} U_{\alpha_i} \in \tau$ шартларни қаноатлантирса, τ система X тўпламдаги топология, $(X;\tau)$ жуфтлик эса, биргаликда топологик фазо дейилади.	
Нол ўлчамли топологик фазо	Агарда p нинг ихтиёрий U атрофи учун шундай V атроф топилса ва у $V \subset U$ ҳамда $FrV = \varnothing$ шартни қаноатлантирса, X топологик фазо $p \in X$ нуқтада нол ўлчамли фазо дейилади (ўлчами нол).	If for any X in p there exists a V, as, topological protsranstvo X at points called zero-dimensional (dimension zero)
n ўлчамли топологик фазо	. Бўш тўплам ва фақат бўш тўплам − 1 ўлчамга эга. Агар x_0 нуқта чегараси $\leq n-1$ ўлчамга эга бўлган шундай турли кичик атрофларга эга бўлса, топологик фазо X	For any normal (in particular, metrizable) space Lebesgue dimension is the smallest integer such that for every finite open cover of the space there is inscribed in it (open end) Floor space is called the multiplicity. zero-dimensional in the sense dim, if every finite open cover, you can enter an open cover, the elements-cerned not intersect.

	ўзининг $x_0 \notin X$ нуқтасида ўлчами $\leq n (n \geq 0)$ га эга дейилади. Топологик фазо, агар ўзининг ҳар бир нуқтасида $\leq n$ ўлчамга эга бўлса, унинг ўлчами $\leq n (n \geq 0)$ дейилади ва $\dim X \leq n$ кўринишда ёзилади. Агар X фазо $\dim X \leq n$ бўлиб, $\dim X > n-1$ бўлса, $\dim X = n$ дейилади.	
T_1 **ва** T_3 **фазолар**	Агар X топологик фазонинг ихтиёрий икки турли нуқтаси бирорта атрофга эга бўлиб, бири иккинчисини ўзида сақламаса бундай фазолар синфи T_1 фазо дейилади. Агар X фазонинг ихтиёрий ёпиқ тўплами A ва ихтиёрий $x_0 \overline{\in} A$ нуқтаси X фазода	T1 in a topological space for every two different points of each point has an open neighborhood not containing the other. T3 in a topological space every point and it does not contain a closed set have disjoint open neighborhoods.

	шундай очиқ ўзаро кесишмайдиган атрофларга эга бўлса, X топологик фазо T_3 топологик фазо дейилади.	
Регуляр фазо	Агар X топологик фазо X бир вақтда ҳам T_1 фазо, ҳам T_3 фазолар бўлса, у ҳолда у регуляр фазо дейилади.	If a topological space is T_1 and T_3 both a space and the space is called regular
Фазонинг ind ўлчами	X регуляр фазо ва н- манфий бўлмаган бутун сон берилган бўлсин. **3.4.1-таъриф.** 1) $indX = -1$ фақат ва фақат, $X = \varnothing$ бўлса; 2) агар ихтиёрий $x \in X$ ва унинг ихтиёрий атрофи B учун шундай очиқ $U \subset X$ топилса ва $x \in U \subset V$ ҳамда $indF_rU \leq n-1$ ўринли бўлса, $indX \leq n$; 3) агар $indX \leq n$ тенгсизлик ўринли ва $indX \leq n-1$ тенгсизлик	X umpteenth regular space and non-negative integers. Definition 3.4.1. 1)and only; 2) a voluntary and optional surrounding V, since, if and when necessary; 3) fails if the corresponding inequality and inequality; 4)if the inequality in any capacity. 5) shartlarhar normal space for the number, and regular space called Menger size or small size inductive kick.

	бажарилмаса, $indX = n$; 4) агар $ind \le n$ тенгсизлик ҳеч бир n учун ўринли бўлмаса, $indX = \infty$. 5) шартлар ҳар бир нормал X фазо учун $IndX$ сонни мос келтирмоқда, $indX$ сон регуляр фазонинг Менгер-Урисон ўлчами ёки кичик индуктив ўлчами дейилади.	
$T_{3/2}$ **фазо**	Агар X фазонинг ихтиёрий x_0 нуқтаси ва бу нуқтани ўзида сақламайдиган бўш бўлмаган F ёпиқ тўплам функсионал айри бўлса, X топологик фазо $T_{3/2}$ фазо дейилади.	If X is a space at any point x, and this point can not stay away from the loss of functionality is called a $T_{3/2}$topological space.
Тихонов фазоси	Агар X топологик фазо бир вақтда ҳам T_1 фазо, ҳам $T_{3/2}$ фазо бўлса, уни Тихонов фазоси ёки тўкис регуляр (буткул регуляр) фазо	If the space X is a space at the same time $T_1$and$T_{3/2}$ space this space of Tikhonov

	дейилади. Тихонов фазоси регуляр фазо бўлади.	
Топологик фазонинг дим ўлчами	X Тихонов фазоси, n бутун сон ва $n \geq -1$ бўлсин. д1) агар X фазонинг ихтиёрий функсионал очиқ чекли қопламасига карраси $\leq n$ бўлган функсионал очиқ чекли қоплама чизиш мумкин бўлса; $\dim X \leq n$ бўлади. д2) агар $\dim X \leq n$ ўринли, лекин $\dim X \leq n-1$ ўринли бўлмаса; $\dim X = n$ бўлади. д3) агар $\dim X \leq n$ тенгсизлик барча n лар учун бажарилмаса, $\dim X = \infty$; бўлади. д1) − д3) шартлар ҳар бир Тихонов фазоси X га $\dim X$ сонни мос келтирмоқда. $\dim X$ сон X Тихонов фазосининг Чех-Лебег ўлчами	For any normal (in particular, metrizable) space X dimension Lebesgue is the smallest integer n such that there exists a refinement for every finite open cover of the space in it (finite open) cover of multiplicity n + 1

T_4 **фазо**	Агар X фазонинг ихтиёрий икки бўш бўлмаган кесишмайдиган ёпиқ F_1 ва F_2 тўпламларининг ўзаро кесишмайдиган $U(F_1)$ ва $U(F_2)$ очиқ атрофлари мавжуд бўлса, X топологик фазо T_4 фазо дейилади.	The T4 topological space every two disjoint closed sets have disjoint open neighborhoods.
Нормал фазо	Агар X топологик фазо бир вақтда ҳам T_1, ҳам T_4 фазо бўлса, бундай топологик фазоларга нормал топологик фазолар дейилади.	If space X is a topological space and at the same time that T_1 and T_4 such a space is called normal.
Топологик фазо базаси	Агар X фазонинг ихтиёрий бўш бўлмаган U очиқ тўплами β жамланмага тегишли бўлган элементларнинг бирлашмасидан иборат бўлса, (X, τ) топологик фазонинг очиқ тўпламларидан ташкил топган β тўпламлар	Base topology (the base of a topological space topology base, open base) - a family of open subsets of a topological space X such that any open set in X is a union of members of this family.

	жамланмаси τ топологиянинг базаси ёки фазонинг базаси дейилади.	
Боғламли топологик фазо	Агар X тўпламни ўзининг бўш бўлмаган иккита ўзаро кесишмайдиган очиқ тўпламостилари бирлашмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлмаса, X топологик фазо боғламли топологик фазо дейилади. Яъни, $X \neq U_1 \cup U_2$ $U_1 \cap U_2 = \theta$, $U_1 \neq \theta$, $U_2 \neq \theta$ θ – бўш тўплам, U_1, U_2 очиқ тўпламлардир.	A topological space is said to be connected if it can be represented as a union of two non-empty disjoint open subsets. Otherwise, the space is said to be connected.
Чизиқли боғламли фазо	Агар X топологик фазонинг ихтиёрий икки нуқтасини йўл орқали туташтириш мумкин бўлса, X фазо чизиқли боғламли фазо дейилади.	The linearly connected space - is a topological space in which any two points can be joined by a continuous curve.
Бир боғламли	Агар X чизиқли	A simply-connected space - linearly

фазо	боғламли ва ихтиёрий нуқтасида $\pi(X,x)=\{1\}$ ўринли бўлса, x топологик фазо бир боғламли дейилади, Демак, тортилувчан фазолар бир боғламли экан.	connected topological space in which any closed path can be continuously shrunk to a point. Example: the sphere is simply connected, and the surface of the torus is not simply connected, because the circle on the torus, shown in red in the figure, can not be contracted to a point.
Кўпхилликнинг триангулясияси	Агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса, X фазонинг чекли сондаги $R=\{(T_i\varphi_i):i=\overline{1,k}\}$ топологик учбурчаклардан ташкил топган тўплами икки ўлчамли кўпхилликнинг триангулясияси дейилади: 1) $X=\bigcup_{i=1}^{K}T_i$; 2) $T_i,T_j=\varnothing$ ёки $T_i\cap T_j$ кесишма T_i ва T_j ларнинг умумий қиррасидан ёки умумий учидан иборат бўлса, бу ерда $Vi,j\in\{1,k\},\ K=\{T_i:i=\overline{1,k}\}$	A triangulation of a topological manifold is presenting it as the union of a set of simplices, with different simplices adjacent right and face of any simplex can not be incident to the brink of the same simplex.

	триангулясия.	
Боғламли триангулясияли	Агар К учбурчакларнинг ихтиёрий икки учини қирраларидан тузилган йўл орқали туташтириш мумкин бўлса, у ҳолда Х боғламли дейилади.	If K is a voluntary aspect can be created by connecting the two ends of the triangle, then X is called connected.
Ёпиқ сирт	Боғламли триангулясияли икки ўлчамли кўпхилликлар ёпиқ сирт дейилади.	The connected two-dimensional manifold triangulation revoked surface.
Эйлер характеристикаси	Ҳар қандай триангулясияланган $П$ сирт учун $\chi(П) = l - k + f$ сонни аниқлаймиз. Бу ерда *л* триангулясиянинг учлари, *к* қирралари ва *ф* кўпбурчаклар сонидир. $\chi(П)$ сон $П$ сиртнинг Эйлер характеристикаси дейилади.	For the end of the cell complex (in particular for finite simplicial complex) Euler characteristic can be defined as the alternating sum $\chi = k_0 - k_1 + k_2 - ...,$ where denotes the number of cells of dimension.
Очиқ қоплама	(X, τ) топологик фазо ва	Given a topological space (X, T), where X - any set, and - certain topology on X.

	$U=\{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ тўпламлар системаси берилган бўлсин. Агар $X=\bigcup_\alpha \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ўринли бўлса, U система X нинг қопламаси дейилади. Агар қопламанинг элементлари очиқ тўпламлар бўлса, у қоплама очиқ қоплама дейилади.	Then the family of open sets is called an open cover, if $Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
Компакт топологик фазо	Агар топологик фазонинг ихтиёрий очиқ қопламасидан (қоплама элементлари очиқ тўпламлар), чекли қопламаости ажратиб олиш мумкин бўлса, бу топологик фазо компакт дейилади.	If a topological space with the optional cover (cover open names) may be limited, it is called a topological space is compact.
Локал компакт	Агар X топологик фазонинг ҳар бир $x \in X$ нуқтаси ёпиғининг компакт бўладиган атрофи мавжуд бўлса, бундай фазоларга локал компакт фазо дейилади. Локал компакт	Compact space - is a topological space in which any surface open sets there is a finite sub-covering.

	фазоларга R^n фазони кўрсатишимиз мумкин.	
Чизиқ таърифи	Бир ўлчамга эга боғланган ва компакт метрик фазолар чизиқ дейилади. Компакт бўлмаган ҳолларда эса чизиқни қуйидагича таърифлаш мумкин: Бир ўлчамли локал компакт чекли дизюнкт ёпиқ боғламли тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлган метрик фазоларга чизиқ дейилади.	The reference to the size of a compact metric space and is called direct. Section CD, the line can be described as follows: A one-dimensional locally compact closed final compound dizyunktno package, which consists of a combination of a metric space is called a line.
Ковариант функтор	А ва Б категориялар берилган бўлсин. А категориянинг ҳар бир Х обектига Б категориянинг Ф(Х) обектини ва А категориянинг ҳар бир f:$X_1 \rightarrow X_2$ морфизмига Б категориянинг	Covariant) functor from category to category - the mapping between classes of objects and sets of morphisms between all possible pairs of objects, such that

	$\Phi(f)$:T(X_1)→T(X_2) морфизмини мос келтирувчи Ф:А→Б акслантириш берилган бўлиб, агар у 1. $\Phi(1_x)=1_\Phi(x)$ 2. Ф(гf)=Ф(г)Ф(f) шартларни қаноатлантирса, у ҳолда у ковариант функтор дейилади.	
Спектр	Агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса, кичик $\Im=(\sigma, м)$ категория тескари спектр дейилади: 1) σ тўпламдаги олд тартиб қисман тартибланган бўлса; 2) қисман тартибланган σ тўплам юқорига йўналган бўлса, яъни ихтиёрий икки $X,Y\in\sigma$ обектлар учун шундай $З\in\sigma$ топилса ва унинг учун $X\leq Z$ ва $Y\leq Z$ ўринли бўлса; 3) [X;Y] тўплам	Let A - operator acting in a Banach space E over . The number λ is called regular for the operator A, if the operator is called the resolvent of A, defined on all of E and continuousThe set of regular values of A is called the resolvent set of the operator , and the complement of the resolvent set - the spectrum of this operator

	битта элементдан ортиқ бўлмаса.	
Функтор узлуксизлиги	Агар ихтиёрий C спектр учун Ф(лимC)=лимФ(C) ўринли бўлса, Ф функтор узлуксиз дейилади.	Let - category with the outside . Single - covariates functor called . continuous if for every chart with any small circuit , the equality More details last equality means that if ( ) - the limit of the diagram J, where - morphisms included within the definition , the limit of the diagram The functor is continuous if and only if it commutes with the works of all the families of objects and morphisms of pairs of cores . Every main functor from the category of sets is continuous .

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Махсус адабиётлар

1. Жўраев Т.Ф. "Топологияга кириш. Фукторлар. Ўлчамлар. Чизиқлар." Т.2012 240 бет.

2. Ryszard Engelking «General Topology» Warszawa 2000

3. Нарманов А. Дифференциал геометрия Т.Университет, 2003, 184с

4. Нарманов А.Я, Шарипов А.С., Асланов Ж.О. Дифференциал геометрия ва топология курсидан масалалар туплами Т. Университет, 2014, 200с.

5. SHult E., Surwski D. Algebra Germaniy 2015 Springer, Germaniy Angliyskiy

6. Ostermann A., Wanner G Germaniy by Is History Germany 2012 Springer, Germany Angliyskiy.

Интернет ресурслар

1. http://www.freebookcentre.net/SpecialCat/Free-Mathematics-Books
2. http://www.nap.edu/collection/43/higher-education
3. http://www.worldscientific.com/worldscibooks
4. http://bookzz.org/Science-Mathematics
5. www.school.edu.ru;
6. www. tdpu. uz
7. www. pedagog. uz
8. www. Ziyonet. uz
9. www. edu. uz