

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ГОЛОВНОЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ПО ОРГАНИЗАЦИИ
ПЕРЕПОДГОТОВКИ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ И РУКОВОДЯЩИХ КАДРОВ СИСТЕМЫ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ**

**ОТРАСЛЕВОЙ ЦЕНТР ПЕРЕПОДГОТОВКИ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ ПРИ
ТАШКЕНТСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

УЧЕБНО–МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

по модулю

«ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ»

направление

**«АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И
ПРОИЗВОДСТВ»**

ТАШКЕНТ -2016

Данный учебно-методический комплекс разработан на основании учебного плана и программы утвержденного приказом Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан № 137 от 6 апреля 2016 года

Разработали

Рецензент: Германия, Siemens AG PhD Project manager Izabella Putz

Данный учебно-методический комплекс рекомендован к изданию Советом Ташкентского государственного технического университета (протокол № _____ от _____ 2016 года).

СОДЕРЖАНИЕ

I.	Рабочая программа	3
II.	Интерактивные методы обучения, используемые в модуле	9
III.	Теоретические материалы.....	13
IV.	Практические материалы.....	80
V.	Банк кейсов	111
VI.	Темы для самостоятельного обучения	114
VII.	Глоссарий	116
VIII.	Список литературы,,,.....	121

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Введения

Программа составлена на основе указа ПФ-4732 от 12 июня 2015 года Президентом Республики Узбекистан «О мерах улучшения системы переподготовки и повышения квалификации руководящих и педагогических кадров высших учебных заведений», цель которой является улучшение, переподготовка и суть процесса повышения квалификации на основе современных требований, а так же поставленная задача регулярно повышать профессиональную компетентность педагогических кадров высших учебных заведений.

Рабочая программа включает в себя изучение теоретических и практических основ теории управления, средства, методы, структуру, организацию и проведение занятий по модулю.

Цель и задачи модуля

Целью изучения модуля «Теория управления» является овладение системой знаний, практических умений и навыков, обеспечивающих совершенствование и подготовку к высокопрофессиональной деятельности, а также содействие формированию у слушателей знаний и умений анализа и синтеза систем автоматического управления в терминах метода пространства состояний.

Задачи модуля «Теория управления» являются:

- изучение методов анализа систем автоматического управления;
- изучение методов синтеза систем автоматического управления;
- изучение пространства состояний и приводятся формы описания динамических систем;
- изучение векторно-матричных моделей систем управления в непрерывном и дискретном времени.

Требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам по модулю

Слушатель, в пределах задач модуля «Теория управления» должен:

иметь представление и охарактеризовать:

- основные принципы и концепции построения систем автоматического регулирования и управления;
- математический аппарат теории автоматического управления;
- методы анализа и синтеза систем автоматического регулирования и управления;
- основные проблемы и перспективы направления развития теории автоматического регулирования.

знать и уметь:

- составлять математические описания автоматических систем регулирования и управления;
- осуществлять анализ устойчивости и качества автоматических систем регулирования и управления;
- обоснованно выбирать структуры и схемы автоматического регулирования и управления;
- осуществлять параметрическую оптимизацию регулирующих и управляющих устройств;
- синтезировать законы и алгоритмы оптимального управления объектами.

владеть навыками:

- построения векторно-матричных моделей объектов и систем управления в непрерывном и дискретном времени;
- использования математического аппарата матричной алгебры для анализа и синтеза систем управления;
- решения практических задач построения современных систем управления с наблюдателями состояния;
- проведения расчетов и моделирования систем автоматического регулирования в пакетах математических программ (Matlab).

Рекомендации по организации и проведения модуля

При проведении обучения запланировано использование современных методов, педагогических и информационно-коммуникативных технологий:

- лекции запланировано проводить в форме презентаций с использованием современных компьютерных технологий;
- при проведении практических занятий предусмотрены применение технических средств, экспресс-запросов, тестов, опросов, мозгового штурма, группового мышления, работы с небольшими группами, и других методов интерактивного обучения как «Диаграмма Венна», «Кластер» и «Кейс-стади».

Взаимосвязь учебного модуля с другими модулями

Изучение модуля «Теория управления» базируется в основном на учебном материале следующих дисциплин: «Технологические измерения и приборы», «Автоматизация технологических процессов», и «Интеллектуальные системы управления и принятие решений».

Роль модуля в системе высшего образования

Происходящие коренные изменения в системе образования, особенно научно-техническое развитие определяет роль модуля “Теория управления” в системе высшего образования.

Организация эффективного и плодотворного образования путем создания новых инновационных технологий обучения дисциплин направления модуля “Теория управления” и их применения в системе образования помогает системно увеличить качество образования. Отдельное внимание обосновывается формированием знаний, умений и навыков применения современных информационных технологий и педагогических программных средств, информационно-коммуникационных технологий в процессе учебно-воспитательной деятельности.

Распределение часов по модулю

№	Темы	Учебная нагрузка, час					
		Общие	Итого	Аудиторная учебная нагрузка			Самостоятельная работа
				Теоретические	Практические	Внеаудиторное	
1	Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем.	6	4	2	2		2
2	«Характеристики систем управления с обратной связью»	8	6	2	4		2
3	Возмущения в системах управления с обратной связью	6	4	2	2	4	
4	Качество систем управления с обратной связью	8	6	2	2		2
5	Устойчивость линейных систем с обратной связью	6	4	2	4		2
Общие		34	24	10	16	4	8

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ

1 -тема: Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем.

Введение. Понятие пространства состояний. Модели систем в переменных состояний в виде сигнального графа. Решение уравнения состояния в дискретном времени. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

Тема 2: «Характеристики систем управления с обратной связью»

Разомкнутые и замкнутые системы управления. Чувствительность систем управления к изменению параметров. Воздействие на переходную характеристику систем управления

3-тема: Возмущения в системах управления с обратной связью

Возмущения в системах управления с обратной связью. Измерение снижения уровня шума. Вектора состояния при случайных возмущениях и наличии помех. Вектор состояния некоторой системы.

4 -тема: Качество систем управления с обратной связью

Критерии качества систем управления. Оценка качества процессов управления. Оптимальное распределение полюсов системы управления. Качество системы второго порядка. Оценка качества процессов управления на основе оптимального распределения полюсов системы управления

5 –тема Устойчивость линейных систем с обратной связью

Понятие устойчивости. Устойчивость систем управления. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Относительная устойчивость систем управления с обратной связью. Устойчивость систем, описываемых переменными состояниями. Анализ устойчивости с помощью MATLAB. Синтез систем управления с регулятором состояния и систем оптимального управления.

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1- практическое занятие:

Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем

Расчёт векторно-матричных моделей систем управления в непрерывном времени. Вывод уравнения состояния для простейшей *RLC*-цепи показанной на рис.

2- практическое занятие:

«Характеристики систем управления с обратной связью»

Расчёт модели с обратной связью в дискретном времени для интегратора второго порядка, структурная схема которого приведена на рис. Описать динамический процесс для объекта дифференциальным уравнением.

3- практическое занятие:

«Характеристики систем управления с обратной связью»

Вычислительные алгоритмы формирования модели с обратной связью в дискретном времени. Вычисление экспоненты с помощью степенного ряда при заданном значении периода квантования T .

4- практическое занятие:

Возмущения в системах управления с обратной связью

Расчёт управляемости, наблюдаемости и стабильности. Выберем простую систему второго порядка.

5- практическое занятие:

Качество систем управления с обратной связью

При построении векторно-матричной модели без учета инерционности преобразователя, вводя компоненты вектора состояния $x^T = [\Omega_{MX} \quad F \quad \Omega_{ДВ} \quad i]$, где Ω_{MX} – скорость вращения платформы, F – усилие, под действием которого вращается платформа, $\Omega_{ДВ}$ – скорость вращения электродвигателя, i – ток электродвигателя.

6- практическое занятие:

Устойчивость линейных систем с обратной связью

Анализ устойчивости динамических систем на основе теорем. Устойчивость нелинейных систем. Решение систем третьего порядка ($n=3$).

7- практическое занятие:

Синтез системы управления

Для электромеханического объекта с упругой передачей механического движения от вала электродвигателя к валу рабочего механизма, численные значения параметров, выполняется синтез оптимального управления и безынерционного регулятора состояния.

Внеаудиторные занятия

Знакомство слушателей с лабораториями фирмы ООО “Химавтоматика” в области автоматизация технологических процессов (2 часа), и с научной лабораторией кафедры АПП, ТашГТУ (2 часа),

Формы обучения

Форма обучения отражает такие внешние стороны учебного процесса, как способ его существования: порядок и режим; способ организации обучения: лекция, семинар, самостоятельная работа и пр; способ организации совместной деятельности обучающего и обучающихся: фронтальная, коллективная, групповая, индивидуальная.

При обучения важным является выбор формы организации учебной деятельности участников:

- Коллективная – коллективное, совместное выполнение общего учебного задания всеми студентами. Характер полученного результата: итог коллективного творчества.

- Групповая – совместное выполнение единого задания в малых группах. Характер полученного результата: итог группового сотрудничества на основе вклада каждого.

- Индивидуальная – индивидуальное выполнение учебного задания. Характер полученного результата: итог индивидуального творчества. Обычно предшествует групповой работе.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

№	Виды оценивание	баллы	Максимальный балл
1	Кейс	1 балл	2.5 балл
2	Самостоятельная работа	1,5 балл	

I. ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МОДУЛЕ

Интерактивная лекция

Интерактивная лекция представляет собой выступление преподавателя перед аудиторией с применением следующих интерактивных форм обучения:

1. Управляемая дискуссия или беседа.
2. Демонстрация слайдов или учебных фильмов.
3. Мозговой штурм.
4. Мотивационная речь и др.

Дискуссия

Дискуссия как интерактивный метод обучения означает исследование или разбор. Учебной дискуссией называется целенаправленное, коллективное обсуждение конкретной проблемы, сопровождающееся обменом идеями, суждениями, мнениями в группе. Эффективность использования учебной дискуссии как метода обучения определяется целым рядом факторов: актуальность выбранной проблемы; сопоставление различных позиций участников дискуссии; информированность, компетентность и научная корректность диспутантов.

Применения метода в учебный процесс

1. Ознакомить слушателей с правилами дискуссии. Определить порядок и регламент выступлений, вопросов и ответов.
2. Организовать деятельность обучающихся, поставить разнообразные проблемные ситуации и вопросы по теме, формировать и поддерживать информационное поле.
3. При завершении дискуссии короткое резюме изложить устно, либо показать с заранее подготовленного слайда. Обобщать и комментировать полученную информацию. Отвечать на возникшие вопросы, сообщать необходимую дополнительную информацию.

Проблемные вопросы для дискуссии по теме «Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем».

1. Какие свойства системы управления можно описать в пространства состояний?
2. Какие преимущества дают описания динамических систем в пространства состояний?

"Мозговой штурм"

Мозговой штурм (брейнсторминг - мозговая атака) – метод коллективной генерации идеи решения научной или практической задачи.

Во время мозгового штурма участники стремятся совместно решить сложную проблему: высказывают свое мнение по решению задачи (генерируют), отбирают наиболее соответствующие, эффективные и оптимальные идеи без критики остальных вариантов, обсуждают отобранные идеи и развивают их, а также оцениваются возможности их обоснования или опровержения.

Основная цель мозговых атак – активизация учебной деятельности, самостоятельное изучение проблемы и развитие мотивации его решения, культура общения, формирование коммуникативных навыков, избавление от инерции мышления и преодоление привычного хода мышления при решении творческой задачи.

- **Прямой коллективный мозговой штурм** – обеспечивает сбор максимального числа мнений насколько это возможно. Вся группа исследования (не более 20 человек) занимается решением одной проблемы.

- **Массовый мозговой штурм** – дает возможность резко повысить эффективность генерации идей в большой аудитории, разделенной на микрогруппы.

- В каждой группе решается один из аспектов проблемы.

Применения метода в учебный процесс

Вопросы для «Мозгового штурма»

Пример 1 Модель системы получено с высокой адекватностью но параметры рассчитанные на основе модуля не подходят реальному объекту.

Вопрос: Дайте своё мнение по этому поводу. Приведите обоснование. Укажите возможные варианты выхода из положения.

Диаграмма Венна

Графический органайзеры - методы и инструменты демонстрационного представления информации. “Диаграмма Венна” создает возможность систематизировать сведения, полученные в процессе самостоятельного чтения и слушания лекций. Позволяет формировать способность связывать новые данные с ранее полученными а также уметь, сравнит и сопоставляет данных.

Применения метода в учебный процесс

Дайте общие показатели состояний в дискретном времени и в виде сигнального графа?



Кейс-стади

Кейс-стади (англ. case – набор, конкретная ситуация, stadi-обучение) – это метод обучения, основанный на реальной ситуации из жизни организации или же искусственно созданной ситуации, воссоздающей типичные проблемы, возникающие в организационной жизни и требующей от обучающихся поиска целесообразного решения.

Пример занятия по методу «Кейс-стади»

Этапы работы над ситуацией в аудитории

Этапы	Содержание работы
1-этап	индивидуальное изучение текста ситуации и проанализировать ситуацию.
2-этап	разобраться в сути проблем, выделять варианты правильных и ошибочных решений.
3-этап	работа в составе малой группы, предложить возможные решения и выбрать лучшее из них, обсуждать с членами группы выбирать оптимального решения, принимать коллективные решения.
4-этап	представление «решений» каждой малой группы, общая

	дискуссия, вопросы, выступление преподавателя, его анализ ситуации.
--	---

Мини кейс: При эксплуатации цеха водяного охлаждения, система автоматики регулирования уровня система вышла из стабильной работы. Основными причинами неустойчивости приводятся неправильно рассчитанные параметры регулятора.

Задание кейса

1: Проанализируйте систему управления

Исходные данные:

А) экспериментальная переходная функция ОУ.

<i>t</i>	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
<i>h(t)</i>	0	0.01	0.1	0.2	0.3	0.38	0.45	0.5	0.58	0.63	0.7	0.75	0.8	0.85	0.85

2: Рассчитайте переходную функцию системы.

III. МАТЕРИАЛЫ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1-тема: Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем

План:

1. Введение.
2. Понятие пространства состояний.
3. Модели систем в переменных состояния в виде сигнального графа.
4. Решение уравнения состояния в дискретном времени.
5. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

Ключевые слова: система управления, пространство состояний, векторно-матричные модели, управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

1.1 Введение

Анализ и синтез систем управления во временной области основан на понятии состояния системы. Состояние системы - это совокупность таких переменных, знание которых, наряду с входными функциями и уравнениями, описывающими динамику системы, позволяет определить ее будущее состояние и выходную переменную.

Для динамической системы, ее состояние описывается набором переменных состояний $[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$. - Это такие переменные, которые определяют будущее поведение системы, если известно ее текущее состояние и все внешние воздействия. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 3.1, где $y_1(t), y_2(t)$ есть выходные переменные, а $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — входные переменные. Для этой системы переменные $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ имеют следующий смысл: если в момент времени t_0 известны начальные значения $[x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]$ и входные сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$ для $t > t_0$, то этой информации достаточно, чтобы определить будущие значения всех переменных состояния и выходных переменных¹.

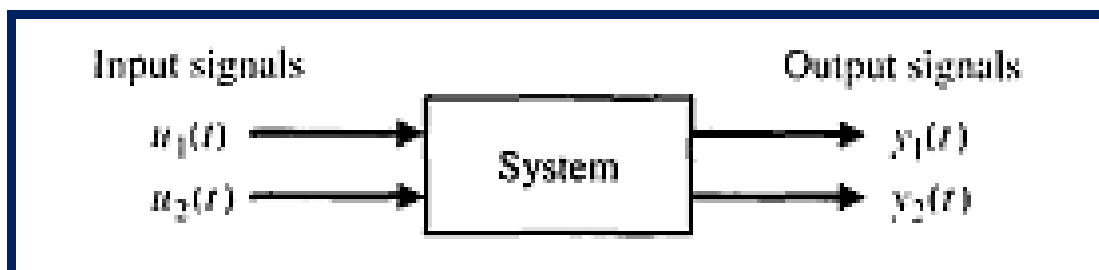


Рис. 3.1 Структурная схема системы управления

¹Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (162-163 p.)

1.2 Понятие пространства состояний

Переменные состояния описывают поведение системы в будущем, если известны текущее состояние, внешние воздействия и уравнения динамики системы. Общий вид динамической системы приведен на рис. 3.2.

Простым примером переменной состояния может служить положение выключателя электра лампочки. Выключатель может быть в одном из двух положений — «включено» или «выключено», поэтому его состоянию соответствует одно из двух возможных значений. Если мы знаем, в каком состоянии (положении) находится выключатель в момент времени t_0 , и если мы прикладываем к нему воздействие, то мы всегда можем определить будущее состояние элемента.

Понятие о переменных состояния, описывающих динамическую систему, можно проиллюстрировать на примере механической системы «масса-пружина» с затуханием, изображенной на рис. 3.3. Число переменных состояния, выбираемых для описания системы, должно быть по возможности минимальным, чтобы среди них не было излишних. Для данной системы вполне достаточно иметь две переменные состояния — положение и скорость движения массы. Таким образом, мы примем в качестве переменных состояния совокупность (x_1, x_2) , где

$$x_1(t) = y(t) \quad \text{and} \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение системы, обычно записывается в виде²

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = u(t). \quad (3.1)$$

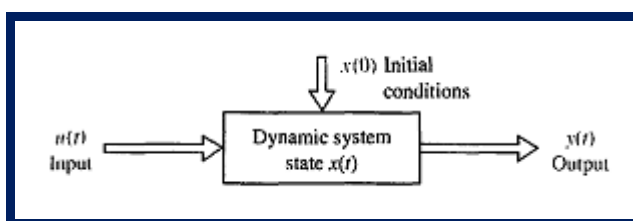


Рис. 3.2 Динамическая система.

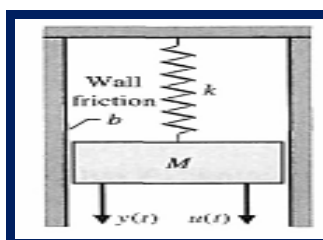


Рис. 3.3. Система «масса-пружина» с затуханием

² Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (163-164 p.)

С учетом введенных выше переменных состояния это уравнение примет вид:

$$M \frac{dx_2}{dt} + bx_2 + kx_1 = u(t). \quad (3.2)$$

Следовательно, исходное дифференциальное уравнение второго порядка мы можем представить в виде эквивалентной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \quad (3.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{-b}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{1}{M}u. \quad (3.4)$$

Эти уравнения, по сути, описывают поведение системы в терминах скорости изменения каждой переменной состояния. Другим примером системы, которую можно описать переменными состояния, является RLC - цепь, изображенная на рис. 3.4. Состояние системы характеризуется двумя переменными (x_1, x_2) где x_1 есть напряжение на конденсаторе $v_c(t)$, и x_2 — ток через индуктивность $i_L(t)$. Выбор этих переменных интуитивно понятен, т. к. общая энергия, запасенная в цепи, непосредственно зависит от них, как

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li_L^2 + \frac{1}{2}Cv_c^2. \quad (3.5)$$

Таким образом, $x_1(t_0)$ и $x_2(t_0)$ несут информацию о полной начальной энергии в цепи и, следовательно, о состоянии системы в момент $t = t_0$. Для описания пассивной LRC-цепи число необходимых переменных состояния равно числу независимых элементов, накапливающих энергию. Используя закон Кирхгофа для токов, запишем дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее скорость изменения напряжения на конденсаторе³:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = +u(t) - i_L. \quad (3.6)$$

³ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (164 p.)

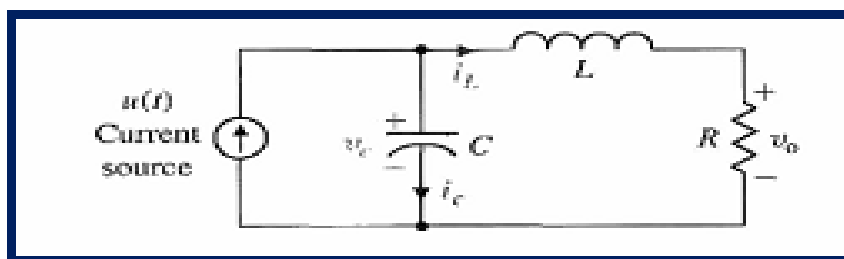


Рис. 3.4. RLC-цепь

Закон Кирхгофа для напряжений, примененный к правому контуру, дает уравнение, определяющее скорость изменения тока через индуктивность:

$$L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c. \quad (3.7)$$

Выход системы определяется линейным алгебраическим уравнением:

$$v_o = Ri_L(t).$$

Уравнения (3.6) и (3.7) мы можем переписать в виде системы двух дифференциальных уравнений относительно переменных состояния x_1 и x_2 :

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t), \quad (3.8)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = +\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2. \quad (3.9)$$

Тогда выходной сигнал будет равен

$$y_1(t) = v_o(t) = Rx_2. \quad (3.10)$$

Используя уравнения (3.8) и (3.9), а также начальные условия $[x_1(t_0), x_2(t_0)]$ мы сможем определить будущее поведение системы и ее выходную переменную.

Переменные состояния, описывающие систему, не являются единственными, и всегда можно выбрать альтернативную комбинацию таких переменных. Например, для системы второго порядка, такой как масса-пружина или RLC-цепь, в качестве переменных состояния можно выбрать любые две линейно независимые комбинации $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Так, для RLC-цепи мы могли бы принять за переменные состояния два напряжения, $v_c(t)$ и $v_L(t)$, где v_L — напряжение на индуктивности. Тогда новые переменные состояния, x_1^* , и x_2^* , будут связаны со старыми переменными x_1 и x_2 соотношениями:

$$x_1^* = v_c = x_1, \quad (3.11)$$

$$x_2^* = v_L = v_c - Ri_L = x_1 - Rx_2. \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) связывает напряжение на индуктивности со старыми переменными состояния v_c и i_L . В реальной системе всегда можно образовать несколько комбинаций переменных состояния, которые определяют энергию, запасенную в системе, и, следовательно, адекватно описывают ее динамику. На практике в качестве переменных состояния часто выбирают такие физические переменные, которые легко могут быть измерены⁴.

Альтернативный метод получения модели в переменных состояния основан на использовании графа связей. Такие графы могут быть построены для электрических, механических, гидравлических и тепловых элементов или систем, а также для комбинаций элементов различных типов. Графы связей позволяют получить систему уравнений относительно переменных состояния.

Переменные состояния характеризуют динамику системы. Инженера в первую очередь интересуют физические системы, в которых переменными являются напряжения, токи, скорости, перемещения, давления, температуры и другие аналогичные физические величины. Однако понятие состояния применимо к анализу не только физических, но также биологических, социальных и экономических систем. Для этих систем понятие состояния не ограничивается рамками представлений об энергии и подходит к переменным состояния в более широком смысле, трактуя их как переменные любой природы, описывающие будущее поведение системы.

Состояние системы описывается дифференциальными уравнениями первого порядка относительно каждой из переменных состояния. Эти уравнения в общем случае имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m, \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Эту же систему дифференциальных уравнений можно записать в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \dots b_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ b_{n1} \dots b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Матрица-столбец, состоящая из переменных состояния, называется вектором состояния и имеет вид:

⁴ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (165-166 p.p)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

где полужирное начертание символа означает вектор. Вектор входных сигналов обозначается как u . Тогда систему можно описать в компактном виде дифференциальным уравнением состояния

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) часто называют просто уравнением состояния.

Матрица A является квадратной размерности $n \times n$, а матрица B имеет размерность $n \times m$. Уравнение состояния связывает скорость изменения состояния системы с самим состоянием и входными сигналами. В общем случае выходные сигналы линейной системы связаны с переменными состояния и входными сигналами уравнением выхода

$$y = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \quad (3.17)$$

где y - совокупность выходных сигналов, представленная в виде вектора-столбца.

Воспользовавшись уравнениями (3.8) и (3.9), запишем уравнение состояния для LC-цепи, изображенной на рис. 3.4:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.18)$$

Уравнение выхода будет иметь вид:

$$y = [0 \quad R]\mathbf{x}. \quad (3.19)$$

Если $R = 3$, $L = 1$ и $C = 1/2$, то

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 3]\mathbf{x}.$$

Решение дифференциального уравнения состояния (3.16) можно получить точно так же, как решается скалярное дифференциальное уравнение первого порядка. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = ax + bu, \quad (3.20)$$

где $x(t)$ и $u(t)$ — скалярные функции времени. Решение будем искать в виде экспоненты e^{at} . Преобразуя уравнение (3.20) по Лапласу, получим:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s),$$

откуда

$$X(s) = \frac{x(0)}{s - a} + \frac{b}{s - a}U(s). \quad (3.21)$$

Обратное преобразование Лапласа уравнения (3.21) дает искомое решение:

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{+a(t-\tau)}bu(\tau) d\tau.$$

(3.22)

Аналогично получается и решение дифференциального уравнения состояния. Прежде всего введем в рассмотрение **матричную экспоненциальную функцию**, представив ее в виде ряда⁵

$$e^{At} = \exp(At) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \dots,$$

(3.23)

который сходится для всех конечных t и любой \mathbf{A} . Тогда решение уравнения состояния будет иметь вид:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t - \tau)]\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.24)$$

Решение (3.24) можно также получить, применив преобразование Лапласа к уравнению (3.16) и сгруппировав члены. В результате получим:

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{x}(0) + [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (3.25)$$

где можно ввести обозначение $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \Phi(s)$, что является преобразованием Лапласа функции $\Phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)$. Применив к (3.25) обратное преобразование Лапласа и учитывая, что второе слагаемое в правой части содержит произведение $\Phi(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$, мы и получим решение (3.24). Матричная экспоненциальная функция $\Phi(t)$ описывает свободное движение системы и называется **фундаментальной матрицей** или **переходной матрицей состояния**. Таким образом, решение (3.24) можно записать в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.26)$$

В результате для свободного движения системы (в случае, когда $\mathbf{u}=0$) решение можно записать очень просто:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \dots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \dots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Отсюда легко можно видеть, что для того чтобы определить переходную матрицу состояния, необходимо начальные значения всех

⁵ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (167-168 p.p)

переменных состояния кроме одной положить равными нулю и вычислить реакцию каждой переменной состояния на это ненулевое значение. Иначе говоря, элемент $\phi_{ij}(t)$ представляет собой реакцию i -й переменной состояния на начальное значение j -й переменной состояния при условии, что начальные значения всех остальных переменных состояния равны нулю. Мы воспользуемся этим свойством в последующих разделах при вычислении элементов переходной матрицы состояния. Однако сначала мы рассмотрим несколько моделей систем в переменных состояния, представленных в виде сигнальных графов, и покажем, как с их помощью можно исследовать устойчивость систем⁶.

1.3 Модели систем в переменных состояния в виде сигнального графа

Выше мы рассмотрели случай, когда состояние системы и ее динамика описываются рядом дифференциальных уравнений первого порядка. В качестве альтернативы может быть использовано уравнение состояния вида (3.16). В любом случае будет полезно получить модель системы в виде сигнального графа, узлы которого соответствовали бы переменным состояния, а затем установить связь между таким графом и уже известным нам представлением системы в виде передаточной функции.

Как было показано ранее, система может быть полностью описана передаточной функцией $G(s)$, связывающей ее входную и выходную переменные. Например, если нас интересует связь между входным и выходным напряжением в схеме на рис 3.4, то мы можем получить передаточную функцию

$$G(s) = \frac{V_0(s)}{U(s)}$$

Передаточная функция RLC-цепи на рис. 3.4 имеет вид

$$G(s) = \frac{V_0(s)}{U(s)} = \frac{\alpha}{s^2 + \beta s + \gamma}, \quad (3.36)$$

где α , β , γ являются функциями параметров цепи R , L и C . Значения α , β , γ можно определить по сигнальному графу, отображающему дифференциальные уравнения, описывающие электрическую цепь. Для нашего случая (см. уравнения 3.8 и 3.9) мы имеем:

⁶ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (171 p.)

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t), \quad (3.37)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2, \quad (3.38)$$

$$v_o = Rx_2, \quad (3.39)$$

Граф, отражающий эту систему уравнений, изображен на рис. 3.5, где $1/s$ есть символ интегрирования. По формуле Мейсона мы получим передаточную функцию:

$$\frac{V_o(s)}{U(s)} = \frac{+R/(LCs^2)}{1 + R/(Ls) + 1/(LCs^2)} = \frac{+R/(LC)}{s^2 + (R/L)s + 1/(LC)}. \quad (3.40)$$

К сожалению, многие электрические цепи, электромеханические системы и другие системы управления не так просты, как схема на рис. 3.4, и часто очень трудно получить дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие динамику системы. Поэтому бывает проще получить передаточную функцию системы и затем на ее основании построить модель в переменных состояния.

Модель системы в виде графа с переменными состояния в узлах легко получить по передаточной функции. Но, как мы заметили в разд. 3.3, возможны несколько комбинаций переменных состояния и, следовательно, можно изобразить несколько различных сигнальных графов⁷.

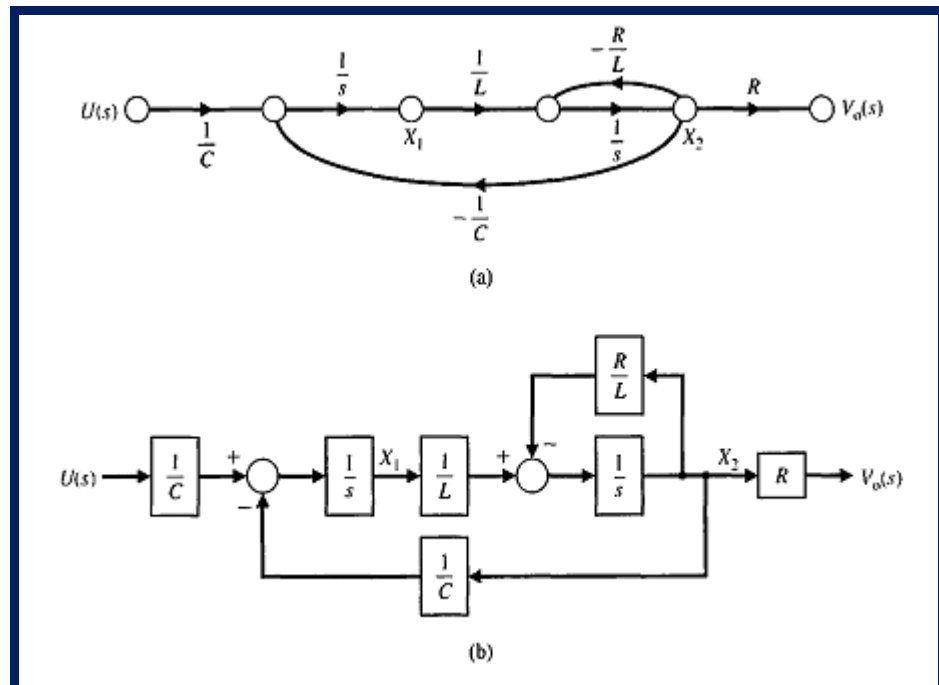


Рис. 3.5. Сигнальный граф для RLC-цепи (а), диаграмма (б)

В общем случае передаточную функцию можно представить в виде

⁷ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (171-172 p.p)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.41)$$

где $n > m$ и все коэффициенты a и b есть вещественные числа. Умножив числитель и знаменатель на s^{-n} , мы получим:

$$G(s) = \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1} s^{-(n-m+1)} + \dots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}}. \quad (3.42)$$

Мы уже знакомы с формулой Мейсона, поэтому легко можем увидеть в знаменателе коэффициенты передачи контуров с обратной связью, а в числителе — коэффициенты передачи прямых путей. Напомним формулу Мейсона

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta}. \quad (3.43)$$

Если все контуры с обратной связью являются касающимися, а все прямые пути в свою очередь касаются этих контуров, то выражение (3.43) сводится к следующему⁸:

$$G(s) = \frac{\sum_k P_k}{1 - \sum_{q=1}^N L_q} = \frac{\text{Sum of the forward-path factors}}{1 - \text{sum of the feedback loop factors}}. \quad (3.44)$$

(Сумма коэффициентов передачи прямых путей, Сумма коэффициентов передачи контуров)

Передаточную функцию можно представить различными графами. Представляют интерес два частных случая таких конфигураций, основанных на формуле Мейсона, и мы рассмотрим их более подробно. В следующем разделе мы приведем еще две дополнительных конфигурации графов.

Чтобы проиллюстрировать получение сигнального графа в терминах переменных состояния, рассмотрим сначала передаточную функцию четвертого порядка:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_0 s^{-4}}{1 + a_3 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_1 s^{-3} + a_0 s^{-4}}. \quad (3.45)$$

Прежде всего мы заметим, что система имеет четвертый порядок и поэтому нам потребуются четыре переменных состояния (x_1 ; x_2 , x_3 , x_4). Имея в виду формулу Мейсона, напомним, что знаменатель можно рассматривать как 1 минус сумма коэффициентов передачи контуров, а числитель передаточной функции есть коэффициент передачи прямого пути графа. Сигнальный граф должен содержать минимальное число интеграторов, равное порядку системы. Следовательно, для графического представления данной системы нам потребуются четыре интегратора. Соответствующие

⁸ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (173 p.)

узлы и интеграторы сигнального графа отображены на рис. 3.9. Наиболее простая конфигурация из этих элементов, соответствующая передаточной функции, представлена на рис. 3.7. Анализируя этот рисунок, мы можем заметить, что все контуры являются касающимися и, следовательно, передаточная функция имеет вид (3.45). Читатель легко может убедиться, что коэффициент передачи прямого пути действительно равен bg/s , а знаменатель равен единице минус сумма коэффициентов передачи всех контуров⁹.

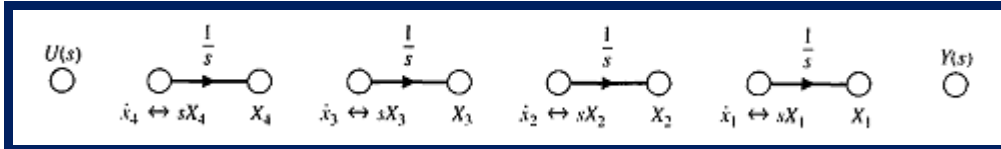


Рис. 3.9. Узлы и интеграторы графа для системы четвертого порядка

Мы можем также рассмотреть модель блок-схемы уравнения. Перегруппируя члены в уравнении и обратное преобразование Лапласа дает следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4(y/b_0)}{dt^4} + a_3 \frac{d^3(y/b_0)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2(y/b_0)}{dt^2} + a_1 \frac{d(y/b_0)}{dt} + a_0(y/b_0) = u.$$

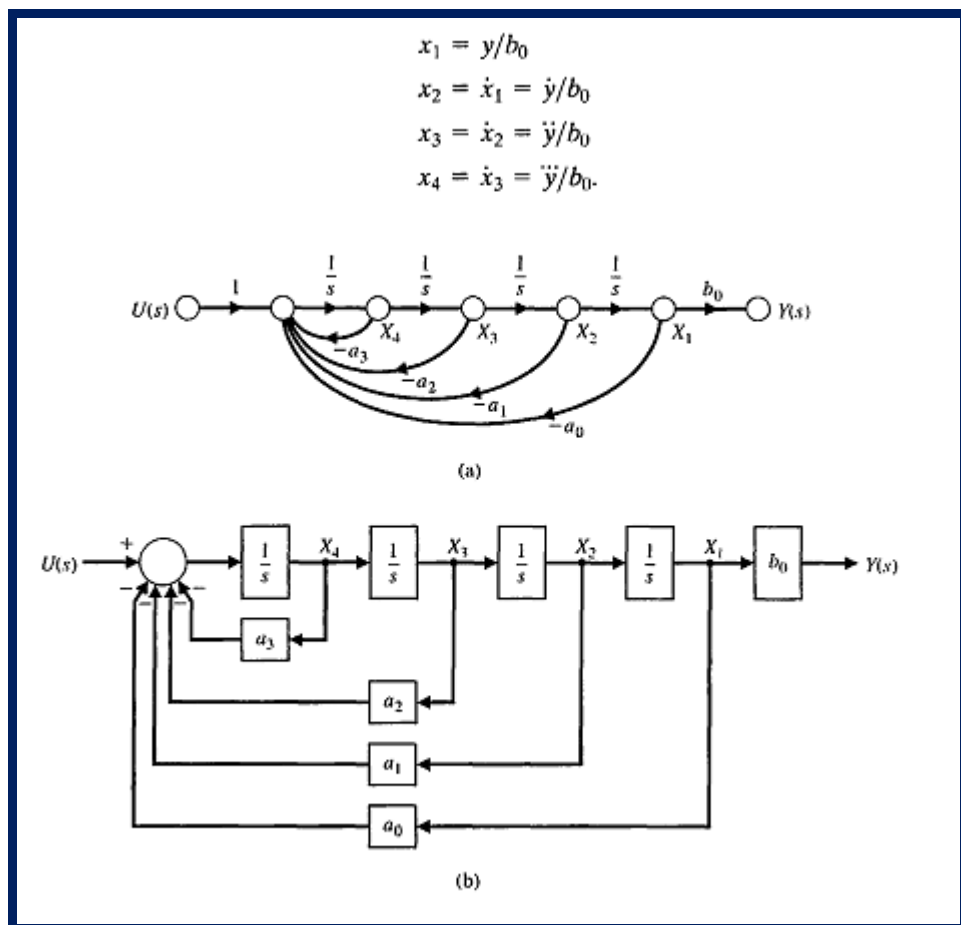


Рис. 3.7. Граф состояния для $G(s)$, соответствующей выражению (3.37)

⁹ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (174 p.)

Теперь рассмотрим передаточную функцию четвертого порядка, в которой числитель является полиномом переменной s , т. е.

$$G(s) = \frac{b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$= \frac{b_3s^{-1} + b_2s^{-2} + b_1s^{-3} + b_0s^{-4}}{1 + a_3s^{-1} + a_2s^{-2} + a_1s^{-3} + a_0s^{-4}}$$

Слагаемые в числителе представляют собой коэффициенты передачи прямых путей в формуле Мейсона. Прямые пути касаются всех контуров, поэтому сигнальный граф выглядит так, как представлено на рис. 3.8. Прямые пути имеют коэффициенты передачи b_3/s , b_2/s^2 , b_1/s^3 и b_0/s^4 , что соответствует числителю передаточной функции. Еще раз напомним, что в числителе формулы Мейсона всегда содержатся члены числителя передаточной функции, т. е. сумма прямых путей от входа системы к ее выходу. Общий вид графа, представляющего передаточную функцию (3.3 8) на рис. 3.8, включает в себя контуров с коэффициентами a_i и t прямых путей с коэффициентами передачи. Такое изображение сигнального графа называется представлением в форме фазовой переменной¹⁰.

1.4 Связь между передаточной функцией и уравнениями состояния

Если задана передаточная функция $G(s)$, то, изобразив модель системы в виде сигнального графа, мы затем можем получить уравнения состояния. Теперь мы решим обратную задачу, т. е. покажем, как по уравнениям состояния системы с одним входом и одним выходом определить ее передаточную функцию. Напомним еще раз уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (1.26)$$

Преобразуя эти уравнения по Лапласу, получим:

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}, \quad (1.27)$$

где B — матрица размерности $n \times 1$, поскольку и есть единственный вход. Заметим, что в преобразовании Лапласа мы не учитывали начальные условия, поскольку определению подлежит передаточная функция. Группируя члены в уравнении (1.27), получим:

$$\begin{cases} A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n, \\ B(s) = b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m. \end{cases}$$

¹⁰ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (175 p.)

а также векторно-матричными моделями в дискретном времени

$$\begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) \\ X(s) = \Phi(s) + BU(s), \end{cases} \quad (1.28)$$

Полную картину динамического поведения объектов и систем управления, как в непрерывном, так и в дискретном времени можно оценить по результатам решения уравнений состояния (1.26) или (1.28).

Общее решение уравнений состояния в непрерывном времени было выполнено при рассмотрении алгоритмов вычисления матриц состояния (Φ) и управления (Γ) векторно-матричной модели непрерывного объекта в дискретном времени.

Дискретная стационарная система может быть описана разностными уравнениями (1.28), если значение периода квантования для простоты записи предварительно принято равным $T = 1$.

Предположим, что известны начальный вектор $x(k_0)$ и входные сигналы: $u(k_0), u(k_0 + 1), u(k_0 + 2), \dots$

Систему уравнений (4.3) можно решить просто, выполнив следующие итерации:

$$\begin{aligned} x(k_0 + 1) &= \Phi x(k_0) + \Gamma u(k_0), \\ x(k_0 + 2) &= \Phi x(k_0 + 1) + \Gamma u(k_0 + 1) = \Phi^2 x(k_0) + \Phi \Gamma u(k_0) + \Gamma u(k_0 + 1), \\ x(k_0 + 3) &= \Phi x(k_0 + 2) + \Gamma u(k_0 + 2) = \Phi^3 x(k_0) + \Phi^2 \Gamma u(k_0) + \Phi \Gamma u(k_0 + 1) + \Gamma u(k_0 + 2), \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

или для любого значения k имеем

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \Phi^{k-k_0-1} \Gamma u(k_0) + \dots + \Gamma u(k-1) = \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j), \\ y(k) &= \Phi^{k-k_0} x(k_0) + C \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j) + Du(k). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Полученное решение (1.29) состоит из двух частей: одна зависит от начальных условий, другая является взвешенной суммой входных сигналов. Поскольку передаточная функция $G(s) = Y(s)/U(s)$, то окончательно имеем:¹¹

$$G(s) = C\Phi(s)B$$

1.5 Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость

Эти понятия были введены в работе Калмана и затем рассматривались многими авторами. Для более полного ознакомления с предметом читателю следует обратиться к работам, список которых приведен в конце этой главы. Здесь изложены только основные результаты для объектов, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными

¹¹ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (187-188 p.p)

коэффициентами. Случай систем с переменными коэффициентами рассмотрен в работе. Пусть объект описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (1.30)$$

где x – вектор размерности n .

Объект называется управляемым, если можно найти такой (быть может, неограниченный) вектор управления, который из произвольного начального состояния переводит систему в произвольное конечное состояние за ограниченное время. Таким образом, необходимо найти условие, при котором можно определить управление, которое переводит систему из состояния $x(0)$ в заданное состояние $x(n)$.

$$\begin{cases} x(1) = \Phi x(0) + \Gamma u(0), \\ x(2) = \Phi x(1) + \Gamma u(1) = \Phi^2 x(0) + \Phi \Gamma u(0) + \Gamma u(1), \\ \dots \\ x(n) = \Phi^n x(0) + \Phi^{n-1} \Gamma u(0) + \dots + \Gamma u(n-1), \end{cases}$$

или

$$x(n) - \Phi^n x(0) = [\Phi^{n-1} \Gamma : \Phi^{n-2} \Gamma : \dots : \Gamma] \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(n-1) \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Поскольку Φ , $x(0)$ и $x(n)$ известны, левая часть уравнения (1.31) определена. Единственное решение и существует только тогда, когда матрица

$$[\Phi^{n-1} \Gamma : \Phi^{n-2} \Gamma : \dots : \Gamma],$$

имеет ранг n . В этом случае (Φ, Γ) называют управляемой парой.

Объект называется наблюдаемым, если по измерениям выходного сигнала объекта можно определить его состояние. Таким образом, необходимо найти условие, при котором по измерениям y можно определить $x(0)$.

$$\begin{cases} y(0) = Cx(0), \\ y(1) = Cx(1) = C\Phi x(0), \\ \dots \\ y(n-1) = C\Phi^{n-1} x(0), \end{cases}$$

или, транспонируя, имеем

$$[y'(0) : y'(1) : \dots : y'(n-1)] = x'(0) [C' : \Phi' C' : \dots : \Phi'^{n-1} C']. \quad (1.32)$$

Так как векторы y известны, единственное решение $x(0)$ существует только тогда, когда матрица

$$[C' : \Phi' C' : \dots : \Phi'^{n-1} C'] ,$$

имеет ранг n . В этом случае (Φ, C) называются наблюдаемой парой.

Объект называется идентифицируемым, если по измерениям координат состояния объекта можно определить матрицу системы Φ .

$$\begin{aligned} x(1) &= \Phi x(0), \\ x(2) &= \Phi^2 x(0), \\ &\dots \\ x(n) &= \Phi^n x(0), \end{aligned}$$

или

$$[x(1) : x(2) : \dots : x(n)] = A [x(0) : \Phi x(0) : \dots : \Phi^{n-1} x(0)] . \quad (1.33)$$

Так как векторы x известны, единственное решение для A существует только тогда, когда матрица¹²

$$[x(0) : \Phi x(0) : \dots : \Phi^{n-1} x(0)] ,$$

имеет ранг n .

В литературе можно найти более детальное рассмотрение этих понятий. Так например, различают управляемость по состоянию и по выходу, полную и общую, сильную и слабую. Наблюдаемость может быть полной и общей.

Контрольные вопросы:

1. Для построения дискретной модели непрерывного объекта 5-го порядка используется алгоритм вычисления матричной экспоненты с помощью степенного ряда 25 степени ($i=0, 1, \dots, 25$). Какую максимальную степень (k) матрицы A (A^k) при этом необходимо вычислить?
2. Укажите основной недостаток алгоритма вычисления матричной экспоненты с помощью степенного ряда.
3. Назовите главное достоинство символьно-численного алгоритма формирования дискретной векторно-матричной модели.
4. При каких условиях для вычисления матрицы состояния Φ дискретной ВММ с помощью символьно-численного алгоритма дважды используются одинаковые матричные коэффициенты, т.е. $F_k = F_{k+1}$.
5. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

$$Q_v = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T] \quad Q_v = \begin{bmatrix} C \\ AC \\ A^2 C \\ \dots \\ A^{n-1} C \end{bmatrix} ,$$

определите состояние $x(2)$?

6. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

¹² Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (189-190 p.p)

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad u(k) = 0.5k + 1.$$

Определите такую управляющую последовательность, что

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7. Для каких систем понятия достижимости и управляемости эквивалентны?

8. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Оцените достижимость, наблюдаемость и управляемость этой системы.

9. Какие свойства и характеристики системы изменятся после преобразования ее векторно-матричной модели к новому координатному базису $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ с помощью невырожденной матрицы \mathbf{T} .

Использованные литературы:

1. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.

Тема 2: «Характеристики систем управления с обратной связью»

План:

1. Разомкнутые и замкнутые системы управления
2. Чувствительность систем управления к изменению параметров
3. . Воздействие на переходную характеристику систем управления

Ключевые слова: Разомкнутые системы, замкнутые системы, чувствительность систем, система с обратной связью, управляемость, передаточной функции, чувствительность замкнутой системы идентифицируемость

1. Разомкнутые и замкнутые системы управления

Система управления определяется как взаимосвязь компонентов, образующих систему что обеспечит желаемый отклик системы. Поскольку известна желаемая реакция системы, то можно сформировать сигнал, пропорциональный ошибке между желаемой и действительной реакциями. Использование этого сигнала для управления объектом приводит к появлению замкнутой последовательности операций, как показано на рис. 4.1. В результате образуется система с обратной связью. Введение обратной связи часто вызывается необходимостью улучшения функционирования системы управления. Интересно, что обратная связь объективно присутствует в таких системах как биологические и физиологические. Например, частота сердечных сокращений у человека регулируется системой с обратной связью.¹³

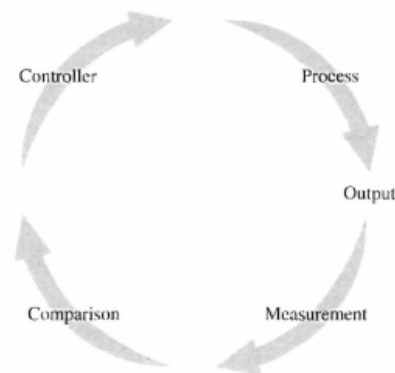


Рис. 4.1 Замкнутая система

¹³ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (235.p.)

Чтобы проиллюстрировать преимущества введения обратной связи, мы рассмотрим простую одноконтурную систему. Хотя очень многие системы управления и не являются одноконтурными, многие моменты проще всего прояснить на примере одноконтурной системы, а затем полученные результаты распространить на многоконтурные системы.

Система без обратной связи, часто называемая системой с прямой цепью передачи воздействий или разомкнутой системой, изображена на рис. 4.2.

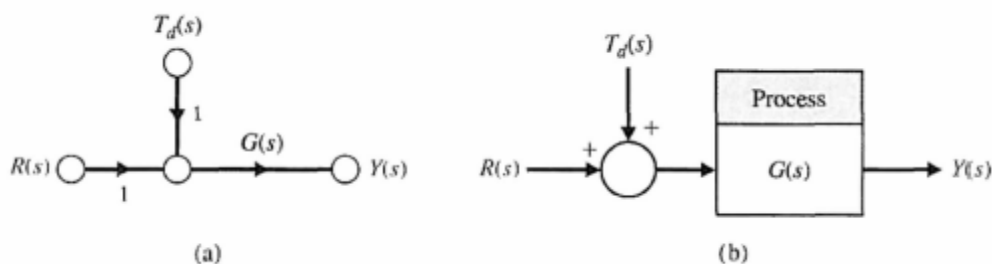


Рис. 4.2. Разомкнутая система управления

Разомкнутая система (система с прямой цепью передачи воздействий) не имеет обратной связи и образует выходной сигнал в виде непосредственной реакции на входной сигнал.

Система с обратной связью использует измерение выходного сигнала, и сравнение с желаемым выходом для генерации сигнала ошибки, который используется контроллером для регулировки привода.

Две формы систем управления показаны на блок-схеме, как и отношение сигнал потока граф формы. Несмотря на стоимость и повышенная сложность системы, обратной связи с замкнутым контуром контроль имеет следующие преимущества:

- Снижение чувствительности системы к изменениям параметров процесса.
- Улучшенная отказ от нарушений.
- Улучшенное подавление шума измерения,
- Улучшенное восстановление стационарной ошибки системы.

Простое управление и регулировка переходной характеристики системы

В замкнутой системе управления происходит измерение выходного сигнала и сравнение с его желаемым значением, в результате чего образуется сигнал ошибки, используемый для управления объектом.

Оба типа систем управления представлены как в виде структурных схем, так и в виде сигнальных графов.

Во многих случаях $N(s)$ равно единице или некоторой константе, отличной от единицы. Последнее характерно, например, для преобразования единиц измерения, скажем, радиан в вольты. ¹⁴.

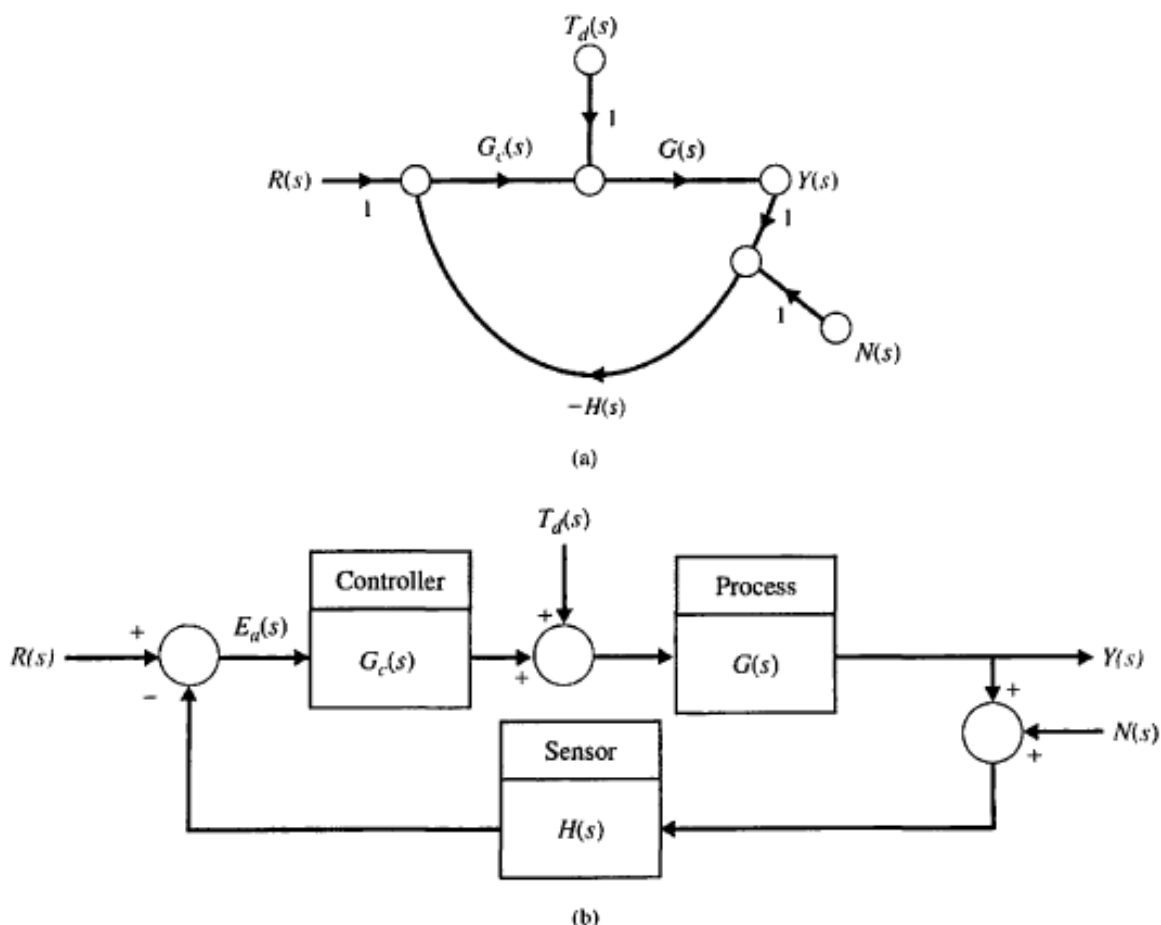


Рис. 4.3 Замкнутая система управления

2. Чувствительность систем управления к изменению параметров

Объект управления, представленный передаточной функцией $G(s)$, какова бы ни была его природа, подвержен влиянию окружающей среды, старению, отсутствию точной информации о его параметрах и других объективных факторов, которые негативно сказываются на его поведении. В разомкнутой системе все эти факторы приводят к отклонению выходной переменной от желаемого значения. Замкнутая система, напротив, чувствует это отклонение, обусловленное изменениями параметров объекта, и пытается скорректировать выходную переменную. Поэтому чувствительность системы управления к изменению параметров есть вопрос первостепенной важности. Основное преимущество систем с обратной связью состоит в их способности снижать чувствительность к изменению параметров.

¹⁴ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (235-236 p.)

В случае замкнутой системы, если $G_c(s)G(s) \gg 1$ для всех представляющих интерес значений комплексной частоты, то из (4.2) мы имеем:

$$Y(s) \cong R(s).$$

Следовательно, выход определяется только передаточной функцией $H(s)$, которая может быть и константой. Если $H(s) = 1$, то мы в точности достигаем желаемого результата, т. е. выход становится равным входу. Однако прежде чем использовать эту идею для синтеза систем управления, мы должны заметить, что условие $G(s)H(s) \gg 1$ может привести к тому, что реакция системы будет сильно колебательной или даже к потере системой устойчивости. Но, тем не менее, тот факт, что увеличивая модуль функции $G(s)$, мы уменьшаем влияние изменений в $G(s)$ на выходную переменную, является исключительно ценным. Таким образом, первым преимуществом системы с обратной связью является то, что в ней уменьшается влияние изменений параметров объекта управления.¹⁵

Чтобы проиллюстрировать сказанное выше, рассмотрим случай, когда за счет изменения параметров объекта его передаточная функция приняла выражение $G(s) + \Delta G(s)$. Тогда, если система является разомкнутой, выходная переменная (в виде изображения по Лапласу) получит приращение

$$E(s) + \Delta E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)(G(s) + \Delta G(s))} R(s).$$

Тогда изменение ошибки

$$\Delta E(s) = \frac{-G_c(s) \Delta G(s)}{(1 + G_c(s)G(s) + G_c(s) \Delta G(s))(1 + G_c(s)G(s))} R(s).$$

Так как мы обычно находим, что $G_c(s)G(s) \gg G_c(s) \Delta G(s)$, мы имеем

$$\Delta E(s) \approx \frac{-G_c(s) \Delta G(s)}{(1 + L(s))^2} R(s).$$

Мы видим, что изменение ошибки слежения уменьшается на коэффициент $1 + L(s)$, которая, как правило, больше, чем 1 в диапазоне частот, представляющих интерес. Для больших $L(s)$, мы имеем $1 + L(s) \sim L(s)$, и мы можем приблизиться к изменению в ошибке отслеживания по

$$\Delta E(s) \approx -\frac{1}{L(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)} R(s).$$

¹⁵ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (239 p.)

Чувствительность системы определяется как отношение процентного изменения передаточной функции системы к процентному изменению передаточной функции объекта. Система имеет передаточную функцию

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)},$$

и, следовательно, чувствительность определяется, как

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}.$$

В пределе, переходя к малым изменениям, (4.10) приводится к виду:

$$S = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G}.$$

Чувствительность системы — это отношение изменения ее передаточной функции к изменениям передаточной функции (или параметров) объекта управления при условии их малости.

Отсюда еще раз видно, что чувствительность замкнутой системы можно сделать меньше, чем ее чувствительность в разомкнутом состоянии, путем увеличения $G_H(s)$ в представляющем интерес диапазоне частот.

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}.$$

Чувствительность замкнутой системы к изменению передаточной функции элемента обратной связи $H(s)$ равна

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{G_c}{(1 + G_c G)^2} \cdot \frac{G}{G G_c / (1 + G_c G)}$$

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}.$$

Мы находим, что чувствительность системы может быть уменьшена ниже, чем в разомкнутом контуре система за счет увеличения $L(S) = G_c(s)G(s)$ по всему диапазону частот, представляющей интерес. Заметим, что S_a^T в уравнении (4.12) в точности такой же, как чувствительные функции $S(s)$ в уравнении (4.5). На самом деле, эти функции являются одним и тем же.

Часто, мы стремимся определить, $S \mathcal{L}$, где a параметр в передаче Функция блока G . Используя цепное правило, мы находим, что¹⁶.

$$S_{\alpha}^T = S_G^T S_{\alpha}^G.$$

3. Воздействие на переходную характеристику систем управления

Одна из наиболее важных характеристик систем управления — это переходная характеристика, т. е. реакция системы на входное воздействие, представленная как функция времени. Поскольку система управления должна обеспечивать желаемый вид этой реакции, то переходную характеристику часто приходится подгонять до тех пор, пока она не будет удовлетворять выдвинутым требованиям. Если система разомкнутая и ее переходная характеристика не является удовлетворительной, то, скорее всего, наиболее радикальное решение проблемы — это заменить объект. Напротив, в замкнутой системе часто можно добиться желаемого вида переходной характеристики настройкой параметров контура с обратной связью. Правда, и в разомкнутой системе иногда удастся решить ту же задачу, включив последовательно с объектом (но перед ним) регулятор с передаточной функцией $G_c(s)$, как показано на рис. 4.6. В этом случае синтез состоит в том, чтобы определить передаточную функцию $G_c(s)G(s)$, обеспечивающую желаемый вид реакции системы.¹⁷

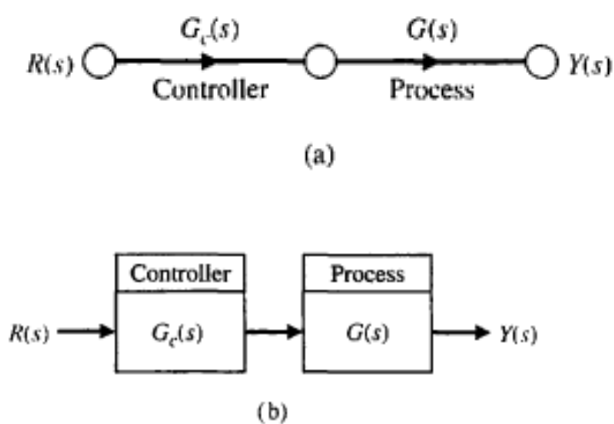


Рис. 4.6. Разомкнутая система управления с последовательно включенным регулятором

Чтобы лучше понять сказанное выше, рассмотрим систему управления, которая может работать и как разомкнутая, и как замкнутая. Это система

¹⁶ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (240 p.)

¹⁷ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (248 p.)

управления скоростью двигателя, изображенная на рис. 4.7. Подобная система, например, используется в прокатных станах для перемещения стальной полосы через валки. Передаточная функция такой системы без обратной связи была получена ранее, откуда для $\omega(s)/V_a(s)$ мы имеем:

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = G(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1},$$

где

$$K_1 = \frac{K_m}{R_a b + K_b K_m} \quad \tau_1 = \frac{R_a J}{R_a b + K_b K_m}.$$

В прокатном стане валки обладают очень большим моментом инерции, поэтому необходим мощный двигатель, управляемый по цепи якоря. Если выдается команда на ступенчатое изменение скорости вращения валков, то

$$V_a(s) = \frac{k_2 E}{s},$$

и реакция системы определяется выражением

$$\omega(s) = G(s)V_a(s).$$

Переходная характеристика, описывающая изменение скорости, имеет вид:

$$\omega(t) = K_1(k_2 E)(1 - e^{-t/\tau_1}).$$

Если процесс установления скорости идет очень медленно, то можно попытаться взять другой двигатель, чтобы изменить постоянную времени τ_1 . Однако поскольку τ_1 определяется в основном моментом инерции нагрузки J , то вряд ли таким образом удастся повлиять на вид переходной характеристики.¹⁸

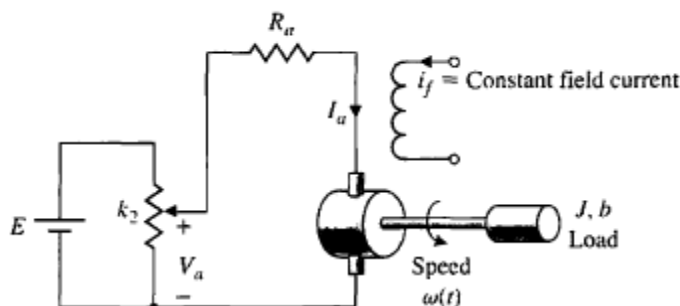


Рис. Разомкнутая система управления скоростью двигателя

¹⁸ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (248-249 p.)

Замкнутую систему управления скоростью легко реализовать, если использовать тахогенератор, выходное напряжение которого пропорционально скорости вращения. Это напряжение вычитается из напряжения, снимаемого с потенциометра, и разность затем подается на усилитель, как показано на рис. 4.8(а). На рис. 4.8(б) изображена полученная таким образом замкнутая система с маломощным транзисторным усилителем. Передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\omega(s)}{R(s)} &= \frac{K_a G(s)}{1 + K_a K_t G(s)} \\ &= \frac{K_a K_1}{\tau_1 s + 1 + K_a K_t K_1} = \frac{K_a K_1 / \tau_1}{s + (1 + K_a K_t K_1) / \tau_1}. \end{aligned}$$

Переходная характеристика системы при ступенчатом изменении входного сигнала определяется выражением. Для того чтобы удовлетворить требованиям, предъявляемым к переходной характеристике системы, есть две возможности: варьирование параметров K_a (коэффициента усиления усилителя) и K_t (коэффициента передачи тахогенератора)

$$\omega(t) = \frac{K_a K_1}{1 + K_a K_t K_1} (k_2 E) (1 - e^{-pt}),$$

где $p = (1 + K_a K_t K_1) / \tau_1$. В предположении, что момент инерции нагрузки достаточно велик, путем увеличения коэффициента K_a мы можем приближенно описать реакцию системы выражением

$$\omega(t) \approx \frac{1}{K_t} (k_2 E) \left[1 - \exp\left(\frac{-(K_a K_t K_1)t}{\tau_1}\right) \right].$$

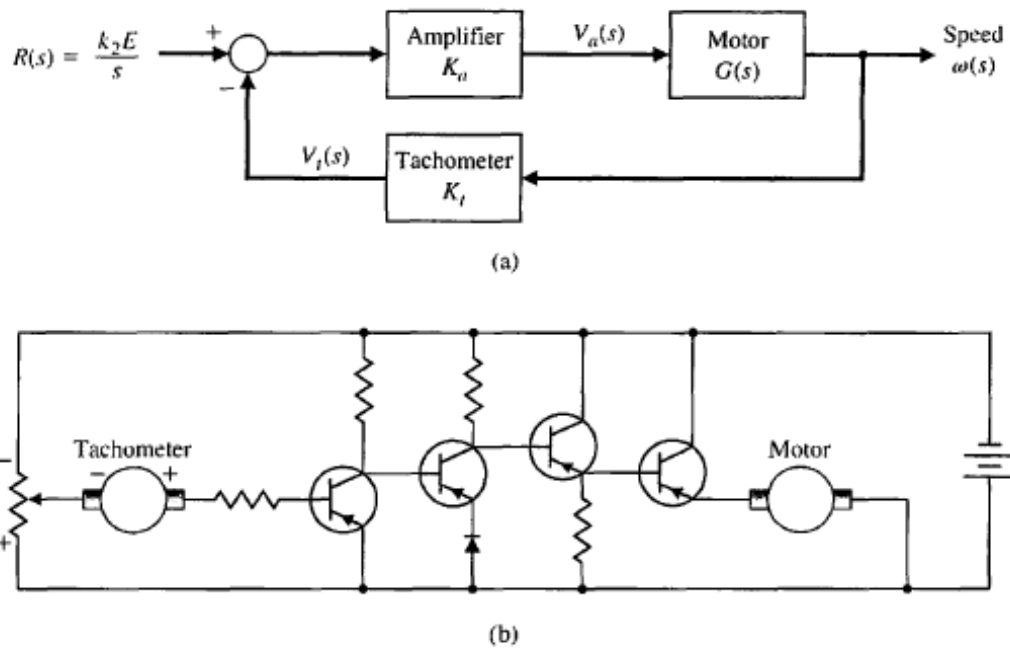


Рис. 4.8. Замкнутая система управления скоростью двигателя, (а) Структурная схема, (б) Принципиальная схема

Если, например, полюс разомкнутой системы равен $1/t_j = 0,1$ то полюс замкнутой системы можно сделать равным $(K_a K_t K_1)/\tau_1 = 10$, т. е. тем самым в 100 раз повысить быстродействие системы. Заметим, однако, что для обеспечения надлежащего значения $K_a K_t K_1$ коэффициент усиления усилителя K_a должен быть достаточно большим, и соответственно должно быть больше напряжение, прикладываемое к якорю двигателя (в сравнении с разомкнутой системой). Поэтому чтобы избежать насыщения двигателя, он должен быть выбран с большим запасом по мощности. На рис. 4.9 представлены переходные характеристики разомкнутой и замкнутой систем. Обратите внимание, насколько увеличилось быстродействие замкнутой системы

Хотя сейчас речь идет об улучшении быстродействия системы управления скоростью двигателя, имеет смысл также определить чувствительность разомкнутой и замкнутой систем. Как и прежде, чувствительность разомкнутой системы к изменению коэффициента передачи двигателя K_m или коэффициента передачи потенциометра k_2 равна единице. Чувствительность замкнутой системы к изменению K_m равна

$$S_{K_m}^T = S_G^T S_{K_m}^G \approx \frac{[s + (1/\tau_1)]}{s + (K_a K_t K_1 + 1)/\tau_1}$$

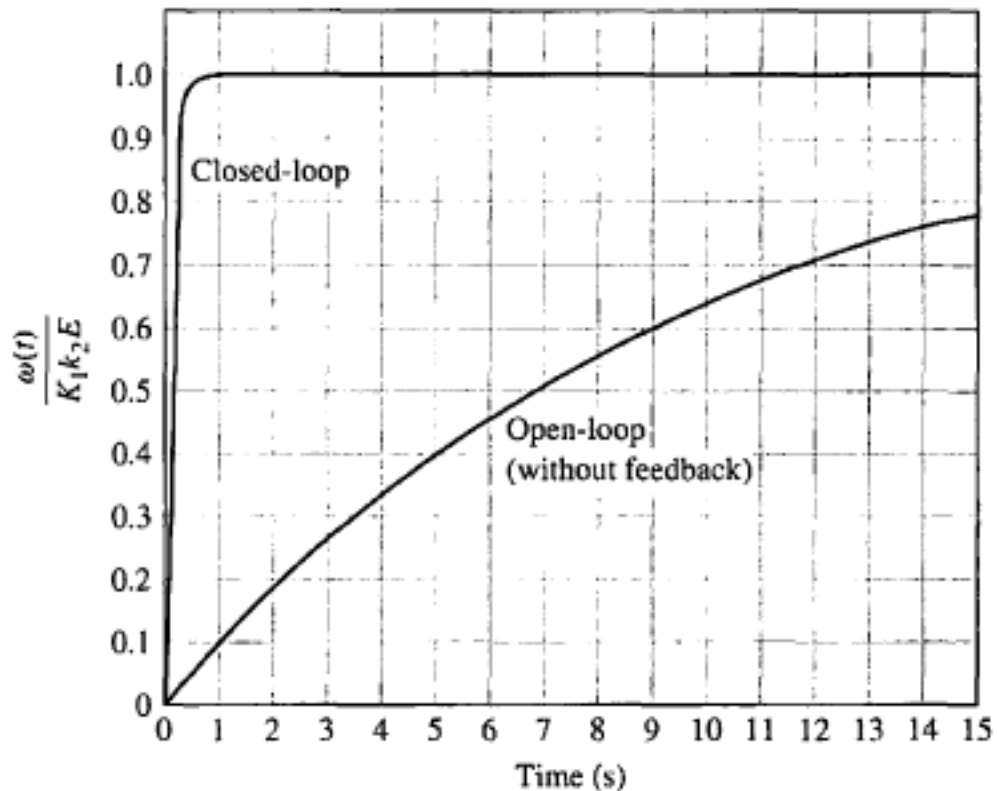


Рис 4.9 Переходные характеристики разомкнутой и замкнутой систем управления скоростью двигателя При $\tau_1 = 10$ с. и $K_a K_t K_1 = 100$. Для достижения 98% установившегося значения скорости в разомкнутой и замкнутой системе требуется соответственно 40 с и 0,4 с¹⁹.

Используя значения параметров, приведенные в предыдущем разделе, получим:

$$S_{K_m}^T \approx \frac{(s + 0.10)}{s + 10}.$$

Мы видим, что чувствительность является функцией переменной s и должна вычисляться для различных значений частоты. Этот анализ не столь сложен, но мы отложим его до некоторого времени. Тем не менее, ясно, что при некоторой низкой частоте — например, при $s = j\omega = j1$ — чувствительность составляет примерно $S_{K_m}^T \sim 0,1$.

Контрольные вопросы:

1. Объект управления первоначально представлен передаточной функцией

¹⁹ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (250 p.)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4}$$

Какое число корней Вы должны расположить на комплексной плоскости для задания желаемого динамического качества проектируемой системы управления?

2. Технологические требования к проектируемой системе управления не допускают перерегулирования входного сигнала $y(t)$ более 1% при ступенчатом входном воздействии $u(t)$. Какое стандартное распределение полюсов следует выбрать в качестве критерия качества управления?
3. Какой из рассмотренных здесь фильтров имеет амплитудно-частотную характеристику максимально приближающуюся к АЧХ идеального фильтра?
4. Какая нелинейная динамическая система называется абсолютно устойчивой?
5. Свойством какого вида движения динамической системы является устойчивость по Ляпунову?
6. Какое невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым?
7. Какая динамическая система называется устойчивой «в целом»?
8. Как называется непрерывная функция, если она в рассматриваемой области не сохраняет одного и того же знака?
9. Какие ограничения на функцию Ляпунова и ее производную по времени накладывает теорема Ляпунова об устойчивости?
10. Что с геометрической точки зрения представляет собой производная от функции Ляпунова по времени, составленная в силу уравнений движения динамической системы?
- 11.

Использованные литературы:

1. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.

3-тема: Возмущения в системах управления с обратной связью

План:

1. Возмущения в системах управления с обратной связью
2. Измерение снижения уровня шума

Ключевые слова: Наблюдатель состояния, устойчивость систем управления, оценка качества процессов управления, оптимальное распределение полюсов систем управления.

1. Возмущения в системах управления с обратной связью

Одной из важной функцией обратной связи в системах управления является частичная компенсация влияния возмущений. Возмущение — это нежелательный входной сигнал, который оказывает влияние на выходной сигнал системы. Многие системы управления подвержены влиянию внешних воздействий, приводящих к отклонению выходного сигнала от желаемого значения. Так, в электронных усилителях всегда имеет место шум, возникающий в транзисторах или интегральных схемах; на антенны радиолокаторов влияют порывы ветра; во многих системах также возникают искажения за счет присутствия в них нелинейных элементов. Системы с обратной связью обладают тем преимуществом, что в них влияние всех этих негативных факторов может быть существенно снижено.²⁰

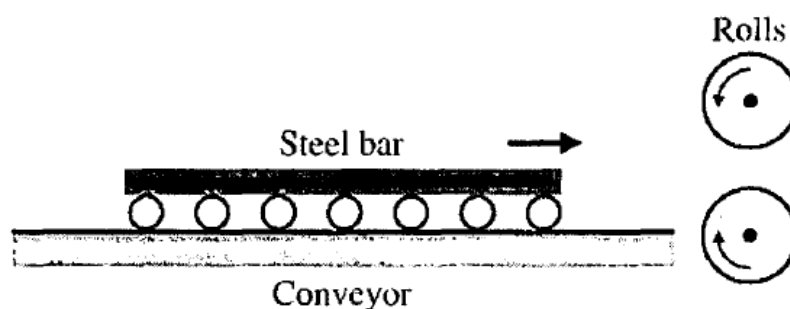


Рис. 4.10. Прокатный стан

В качестве примера системы с нежелательным возмущением рассмотрим уже знакомую нам систему управления скоростью вращения привода валков прокатного стана. Валки, через которые проходит стальная полоса, подвержены значительному изменению нагрузки, играющей роль возмущения. Пока стальная полоса приближается к валкам (см. рис. 4.10), они по существу вращаются без нагрузки. Однако когда полоса попадает

²⁰ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (243 p.)

между валками, то нагрузка на них мгновенно становится значительной. Этот эффект может быть учтен в виде ступенчатого изменения возмущающего момента, как показано на рис. 4.11. Тот же эффект можно проиллюстрировать, используя нагрузочные (внешние) характеристики типичного электродвигателя, изображенные на рис. 4.12.

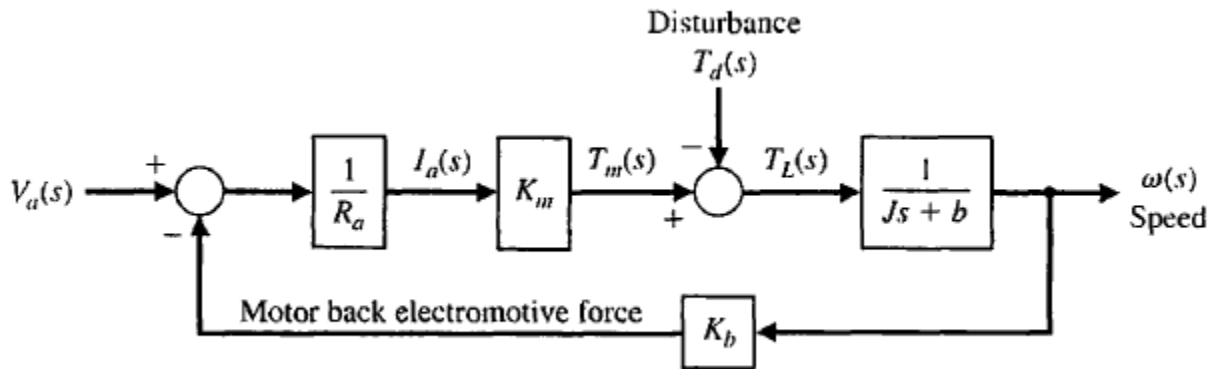


Рис. 4.11. Разомкнутая система управления скоростью (без главной обратной связи)

Для двигателя постоянного тока, управляемого по цепи якоря была получена модель в виде структурной схемы. Эта модель воспроизведена на рис. 4.11, причем предполагается, что $L_a \sim 0$. Ошибка системы на рис. 4.11 равна

$$E(s) = R(s) - \omega(s)$$

где $R(s)$ = соесть желаемое значение скорости. Для упрощения вычислений положим $R(s) = 0$ и будем исследовать $E(s) = -\omega(s)$ т. е. изменение скорости, вызванное возмущением.²¹

$$E(s) = -\omega(s) = \frac{1}{Js + b + K_m K_b / R_a} T_d(s).$$

²¹ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (243 p.)

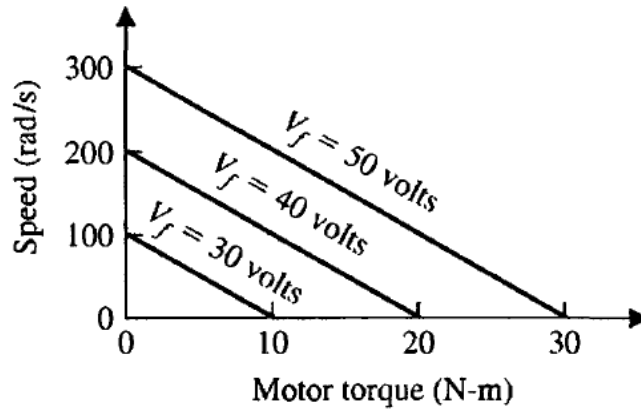


Рис. 4.12 Нагрузочные характеристики двигателя

При ступенчатом изменении момента нагрузки $T_d(s) = D/s$, и с помощью теоремы о конечном значении мы можем определить установившуюся ошибку:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{Js + b + K_m K_b / R_a} \left(\frac{D}{s} \right) \\ &= \frac{D}{b + K_m K_b / R_a} = -\omega_0(\infty). \end{aligned}$$

Замкнутая система управления скоростью в виде структурной схемы изображена на рис. 4.13. Та же система, но в виде сигнального графа, изображена на рис. 4.14, где

$$\begin{aligned} G_1(s) &= K_a K_m / R_a, \quad G_2(s) = 1 / (Js + b), \\ H(s) &= K_t + K_b / K_a. \end{aligned}$$

По сигнальному графу с помощью формулы Мейсона можно получить выражение для ошибки $E(s) = -\omega(s)$:

$$E(s) = -\omega(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} T_d(s).$$

Если в некотором диапазоне комплексной переменной s выполняется условие $G_1 G_2 H(s) \gg 1$, то можно считать, что

$$E(s) \approx \frac{1}{G_1(s)H(s)} T_d(s).$$

Следовательно, если произведение $G_1(s)H(s)$ сделать достаточно большим, то влияние возмущения можно существенно уменьшить. Заметим, что

$$G_1(s)H(s) = \frac{K_a K_m}{R_a} \left(K_t + \frac{K_b}{K_a} \right) \approx \frac{K_a K_m K_t}{R_a},$$

поскольку $K_a \gg K_b$. Поэтому мы должны постараться получить большой коэффициент усиления K_a и сохранить $R_a < 2$ Ом. В системе на рис. 4.14 ошибка $E(s) = R(s) - \omega(s)$, где $R(s) = \omega_d(s)$ есть желаемое значение скорости. Как и в разомкнутой системе, положим $R(s)=0$ и исследуем $\omega(s)$.²²

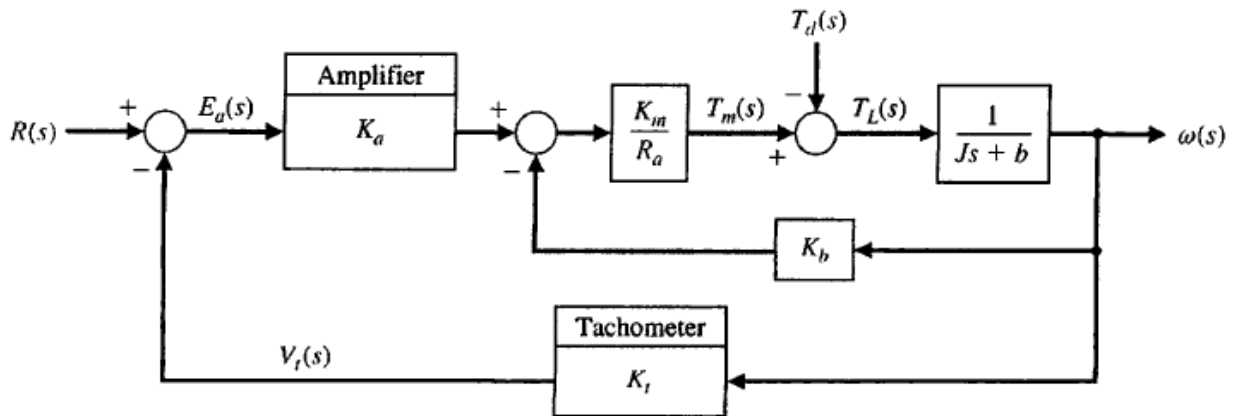
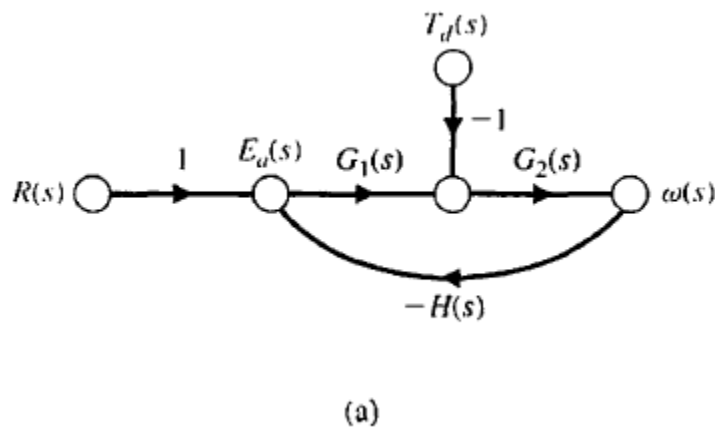


Рис. 4.13. Замкнутая система управления скоростью



²² Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (245 p.)

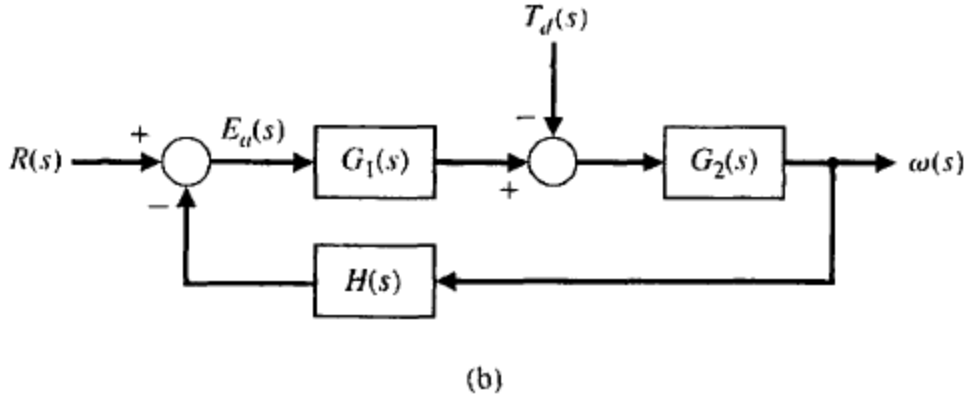


Рис. 4.14 Замкнутая система управления скоростью. (а) Модель в виде графа, (б) Модель в виде структурной схемы.

Выражение для выходной переменной системы на рис. 4.13 при $R(s) = 0$ можно получить с помощью формулы Мейсона:

$$\begin{aligned} \omega(s) &= \frac{-1/(Js + b)}{1 + (K_t K_a K_m / R_a)[1/(Js + b)] + (K_m K_b / R_a)[1/(Js + b)]} T_d(s) \\ &= \frac{-1}{Js + b + (K_m / R_a)(K_t K_a + K_b)} T_d(s). \end{aligned}$$

Сравнивая изменение скорости из-за нежелательного возмущения в замкнутой и разомкнутой системах, получим

$$\frac{\omega_c(\infty)}{\omega_0(\infty)} = \frac{R_a b + K_m K_b}{K_a K_m K_t}$$

Преимущество замкнутой системы управления скоростью можно также проиллюстрировать на примере нагрузочных характеристик этой системы, приведенных на рис. 4.15. Мы видим, что эти характеристики почти горизонтальны, а это указывает на то, что скорость почти не зависит от момента нагрузки.

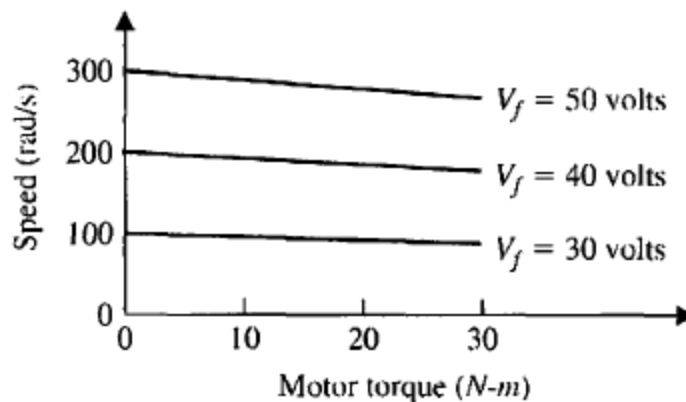


Рис. 4.15. Нагрузочные характеристики замкнутой системы

2 Измерение снижения уровня шума

Когда $R(s)=T_d(s)=0$, то из уравнения следует, что

$$E(s) = C(s)N(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s).$$

Поскольку коэффициент усиления контура $L(s)$ уменьшается, влияние $N(s)$ на ошибки слежения уменьшается. Другими словами, дополнительная функция чувствительности $C(s)$ мала, когда усиление контура $L(s)$ мала. Если мы создаем $C_c(s)$ таким образом, что $L(s) \ll 1$, то шум ослабляется потому как

$$C(s) \approx L(s).$$

Будем говорить, что малый коэффициент усиления контура приводит к хорошему шумоглушению. Точнее, для эффективного измерения ослабления шума, нам нужно небольшое усиление контура по частотам связанных с ожидаемыми шумовых сигналов.

На практике измерения уровня шума сигналы часто высокие частоты. Таким образом, мы хотим коэффициент усиления контура регулирования, чтобы быть низкой при высоких частотах. Это эквивалентно небольшой комплементарно

Функция чувствительности на высоких частотах. Разделение нарушений (при низкие частоты) и шума измерения (на высоких частотах) очень повезло, потому что это дает система управления проектировщику способ приблизиться к процессу конструкции. Контроллер должен быть высокий коэффициент усиления на низких частотах и низкий коэффициент усиления на высоких частотах.

Помните, что при низких и высоких мы имеем в виду, что величина коэффициента усиления контура низкий / высокий при различных высоких / низких частот. Это не всегда так, что нарушения низкие частоты или, что измерение шума является высокая частота.

Основная причина введения обратной связи состоит в ее способности уменьшать влияние внешних возмущений и шумов, возникающих внутри системы. Во многих системах шум возникает на выходе измерительного элемента (датчика). Этот шум можно представить в виде сигнала $N(s)$, Влияние шума на выходную переменную оценивается выражением²³

$$Y(s) = \frac{-G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s),$$

²³ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (246 p.)

или, приближенно

$$Y(s) \simeq -N(s),$$

Очевидно, что проектировщик должен стремиться получить как можно большее значение $N(s)$, что эквивалентно максимизации отношения сигнал/шум на выходе датчика. Кроме того, элементы обратной связи $N(s)$ должны работать при минимальном шуме, дрейфе и изменении параметров. Для большого коэффициента усиления контура $L(s)=G_c(s)G(s)$. Это согласуется с ранее при обсуждении что меньший коэффициент усиления контура приводит к измерению шума затуханием. Очевидно, проектировщики должны формировать усиление контура соответствующим образом.

Эквивалентность чувствительности, S_G^T , и отклик системы с замкнутым контуром отслеживания ошибки к опорному входу можно проиллюстрировать на рис 4.3. Чувствительность системы к $G(S)$ является

$$S_G^T = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}.$$

Влияние возмущения на выходную переменную при $R(s) = 0$ оценивается выражением

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{1}{1 + L(s)}.$$

В обоих случаях мы видим, что нежелательные эффекты можно ослабить путем увеличения коэффициента K_a , входящего в $G_c(s)$. Примечательно, что меры по уменьшению влияния изменения параметров системы или внешних возмущений эквивалентны и по счастливому стечению обстоятельств действуют одновременно. В качестве заключительной иллюстрации этого факта мы отметим, что для системы, влияние шума или возмущения на выходную переменную оценивается выражением²⁴

$$\frac{E(s)}{T_d(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

Мы считаем, что нежелательные эффекты измерения шума могут быть смягчены за счет уменьшения коэффициент усиления контура регулирования. Имея в виду отношения

$$S(s) + C(s) = 1,$$

компромисс в процессе проектирования очевиден.

²⁴ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (247 p.)

Контрольные вопросы:

1. Для объекта, описанного ВММ, матрицы, которой имеют размеры $A(7 \times 7)$, $B(7 \times 7)$, $C(1 \times 7)$, синтезирован регулятор состояния при допущении, что все переменные состояния измеряемы. Каков будет размер матрицы состояния системы «объект – регулятор»?
2. Какие операции должны быть обязательно выполнены при реализации любого из алгоритмов синтеза регулятора состояния?
3. Укажите основные особенности численного решения матричного дифференциального уравнения Риккати?
4. При каких условиях матричное дифференциальное уравнение Риккати вырождается в алгебраическое?
5. Какие значения должны принимать коэффициенты обратных связей для «точной» реализации оптимального управления?
6. Для достижения каких целей, и из каких условий выбирается матрица L наблюдателя полного порядка?
7. Какое пространство называют фазовым пространством динамической системы?
8. Как определяют координаты состояний равновесия нелинейной динамической системы в фазовом пространстве?

Использованные литературы:

4. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.

4-тема: Качество систем управления с обратной связью

План:

1. Тестовые входные сигналы
2. Качество системы второго порядка
3. Влияние третьего полюса и нуля на характеристики системы второго порядка
4. Оценка качества процессов управления на основе оптимального распределения полюсов системы управления

Ключевые слова: *устойчивость систем управления, теоремы Ляпунова, оценка качества процессов управления, оптимальное распределение полюсов систем управления.*

Введение

Важным преимуществом систем управления с обратной связью является возможность влиять на качество системы в переходном и установившемся режимах. Прежде чем приступить к анализу или синтезу системы, необходимо договориться о том, как определять и измерять ее качество. И только определив желаемое качество системы, можно заняться настройкой ее параметров. Поскольку системы управления объективно являются динамическими, их качество обычно оценивается по поведению как в переходном, так и в установившемся режимах. Переходная характеристика — это реакция системы, затухающая с течением времени. Установившийся режим — это реакция системы, которая остается спустя большой промежуток времени с момента приложения входного сигнала.²⁵

Исходные данные для синтеза систем управления обычно включают в себя некоторые показатели реакции системы на входной сигнал определенного вида, а также желаемую точность в установившемся режиме. Часто в процессе синтеза эти данные пересматриваются ради достижения некоторого компромисса. Таким образом, исходные данные редко когда представляют собой жесткий набор требований — скорее всего они являются первой попыткой перечисления желаемых показателей качества. На рис. 5.1 графически изображен поиск компромисса между различными требованиями к системе. Параметр p может минимизировать показатель качества M_2 , если выбирать очень малые его значения. Но при этом становится очень большим показатель M_1 , что может быть нежелательным. Если оба показателя

²⁵ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (304 p.)

качества одинаково важны, то наилучшим компромиссом является точка пересечения двух кривых при P_{min} . Ясно, что если исходные ограничения, накладываемые и на M_1 и на M_2 , близки к нулю, то они не могут быть удовлетворены одновременно, и их надо изменить таким образом, чтобы добиться разумного компромисса с $P_{min}[1,10,15,20]$.

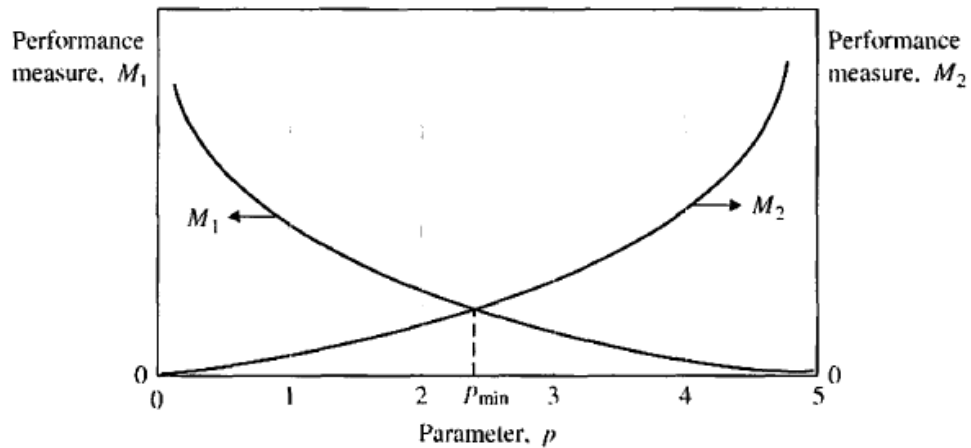


Рис. 5.1. Зависимость двух показателей качества от параметра p

Требования к системе, сформулированные в виде ее показателей качества, в конечном счете позволяют ответить на вопрос: насколько хорошо система выполняет задачу, ради которой она была спроектирована?

1. Тестовые входные сигналы

Важнейший интерес при анализе качества представляет поведение систем управления во времени, т. к. эти системы объективно являются динамическими. Прежде всего необходимо определить, устойчива ли система управления (методы анализа устойчивости будут рассмотрены в последующих главах). Если она устойчива, то показатели качества можно оценить по реакции системы на определенный входной сигнал. Но, поскольку обычно заранее неизвестно, каким в реальных условиях будет этот сигнал, при анализе качества выбирается некоторый тестовый входной сигнал. Такой подход вполне оправдан, т. к. имеется корреляция между реакцией системы на типовой входной сигнал и ее поведением в реальных рабочих условиях. Кроме того, использование типового входного сигнала позволяет проектировщику сравнить несколько вариантов создаваемой ²⁶

²⁶ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (305 p.)

системы. К тому же многие системы управления в процессе эксплуатации подвергаются внешним воздействиям, которые по виду очень близки к тестовым сигналам.

В качестве типовых тестовых сигналов обычно используются ступенчатый, линейный и параболический сигналы, изображенные на рис. 5.2. В табл. 5.1 приведены выражения для этих сигналов как функции времени, а также их преобразования по Лапласу, полученные с помощью табл. 2.3. Линейный сигнал является интегралом от ступенчатого, а параболический — интегралом от линейного

Таблица 5.1.

Тестовые входные сигналы

Тестовый сигнал	$r(t)$	$R(s)$
Ступенчатый	$r(t)=A, t>0$ $r(t)=0, t<0$	$R(s)= A/s$
Линейный	$r(t)=At, t>0$ $r(t)=0, t<0$	$R(s)= A/s^2$
Параболический	$r(t)=At^2, t>0$ $r(t)=0, t<0$	$R(s) = 2A/s^3$

В качестве тестового сигнала может также служить единичная импульсная функция, получаемая из прямоугольного импульса

$$f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2}; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

где $\epsilon > 0$. При $\epsilon \rightarrow 0$ импульс $f(t)$ стремится к единичной импульсной функции $\delta(t)$, обладающей следующими свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a)g(t) dt = g(a).$$

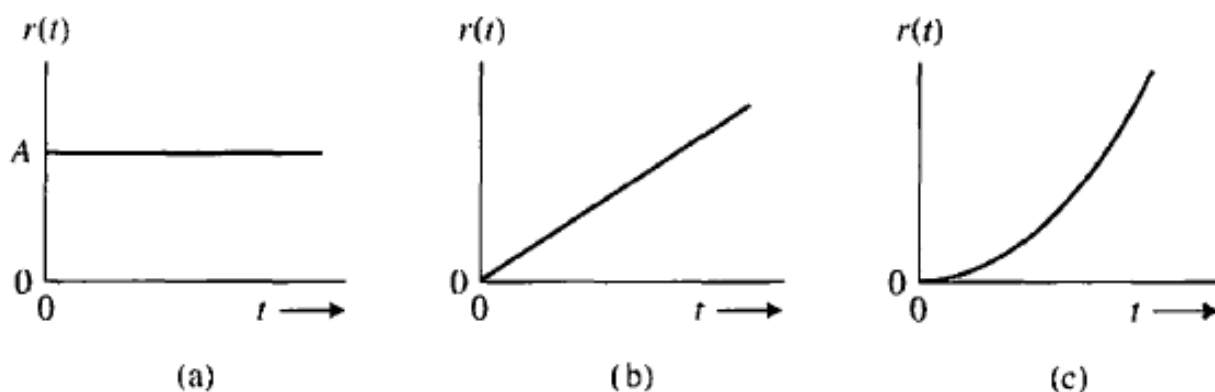


Рис. 5.2. Тестовые входные сигналы: (а) ступенчатый, (б) линейный, (в) параболический

Импульсный входной сигнал может оказаться полезным, когда выходной сигнал $y(t)$ записывается в виде интеграла свертки

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)r(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)R(s)\}.$$

Эта связь изображена в виде структурной схемы на рис. 5.3. Если входной сигнал является единичной импульсной функцией, то

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)\delta(\tau) d\tau.$$

Этот интеграл отличен от нуля только при $\tau = 0$, поэтому

$$y(t) = g(t),$$

что соответствует импульсной переходной функции системы с передаточной функцией $G\{s\}$. Реакция системы на импульсный тестовый сигнал может представлять интерес, если в реальных условиях система подвержена воздействию очень коротких импульсов с большой амплитудой и площадью A .²⁷

Типовые тестовые сигналы имеют общий вид

²⁷ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (307 p.)

$$r(t) = t^n,$$

Для которых преобразование по Лапласу

$$R(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

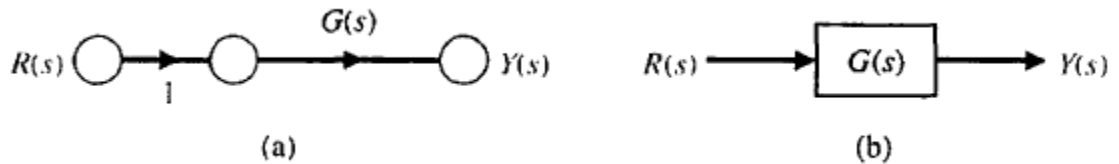


Рис. 5.3. Разомкнутая система управления

Отсюда следует, что реакцию на один тестовый сигнал всегда можно выразить через реакцию на другой тестовый сигнал. Поскольку ступенчатый входной сигнал является наиболее простым, то его обычно и выбирают для оценки качества системы.

Найдем реакцию системы, изображенной на рис. 5.3, на единичную ступеньку, если

$$G(s) = \frac{9}{s + 10}.$$

Тогда преобразование по Лапласу для выходного сигнала

$$Y(s) = \frac{9}{s(s + 10)},$$

переходный процесс описывается выражением

$$y(t) = 0.9(1 - e^{-10t}),$$

а его установившееся значение $y(\infty) = 0.9$. Для установившейся ошибки, приняв $E(s) = R(s) - Y(s)$, имеем

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0.1.$$

2. Качество системы второго порядка

Рассмотрим одноконтурную систему второго порядка и найдем ее реакцию на единичное ступенчатое воздействие. Для системы, изображенной на рис. 5.4. можно записать: ²⁸

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s).$$

Используя обозначения перепишем уравнение в виде

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s).$$

При единичном ступенчатом входном воздействии получим:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)},$$

для которых преобразование Лапласа найдём воспользовавшись таблицей преобразований Лапласа (табл. 5.3).

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t + \theta),$$

Здесь

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2}, \theta = \cos^{-1} \zeta, 0 < \zeta < 1$$

На рис 5.5 (а) изображены переходные характеристики этой системы для различных значений коэффициента затухания ζ . С уменьшением ζ корни характеристического уравнения замкнутой системы приближаются к мнимой

²⁸ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (308 p.)

оси и реакция становится сильно колебательной. На рис. 5.5 (б) приведены те же переходные характеристики в зависимости от параметра C , и времени. ²⁹

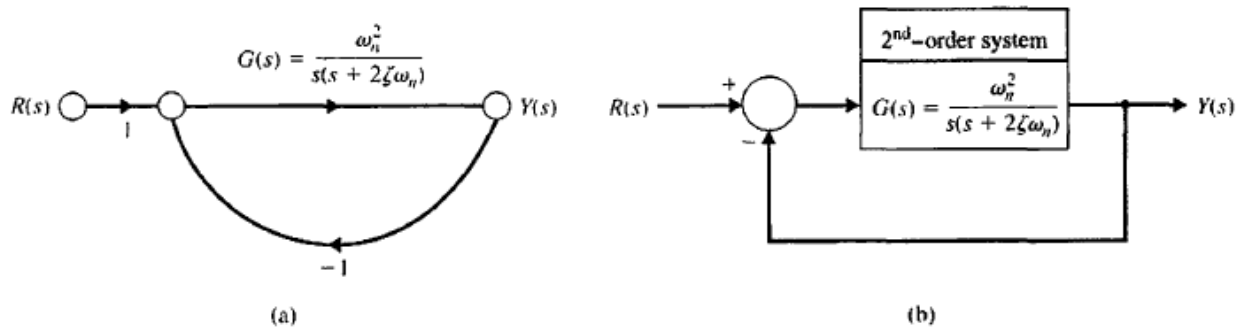


Рис. 5.4. Замкнутая система управления

В случае единичной импульсной функции, для которой изображение по Лапласу $R(s) = 1$, можно записать:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

что совпадает с передаточной функцией замкнутой системы $T(s) = Y(s)/R(s)$. Реакция системы на единичную импульсную функцию определяется выражением

$$y(t) = \frac{\omega_n}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \beta t),$$

которое является производной от реакции на единичную ступеньку. На рис. 5.6 изображены реакции системы второго порядка на единичную импульсную функцию для различных значений параметра ζ . При определении показателей качества проектировщик может использовать реакцию системы как на ступенчатую, так и на импульсную функцию.

²⁹ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (309 p.)

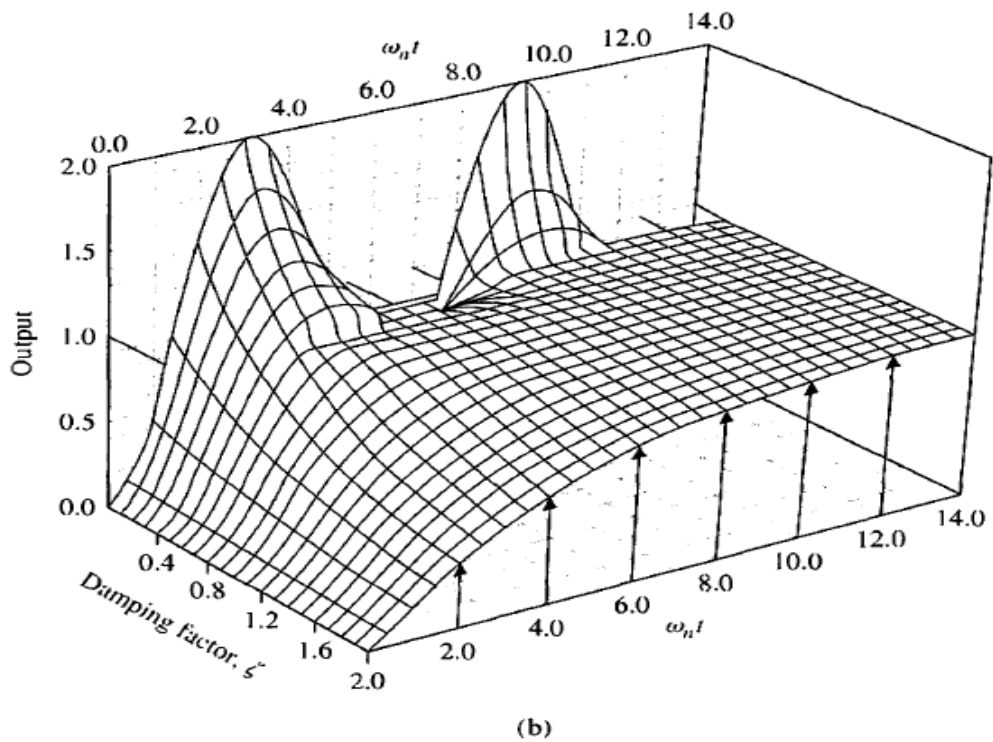
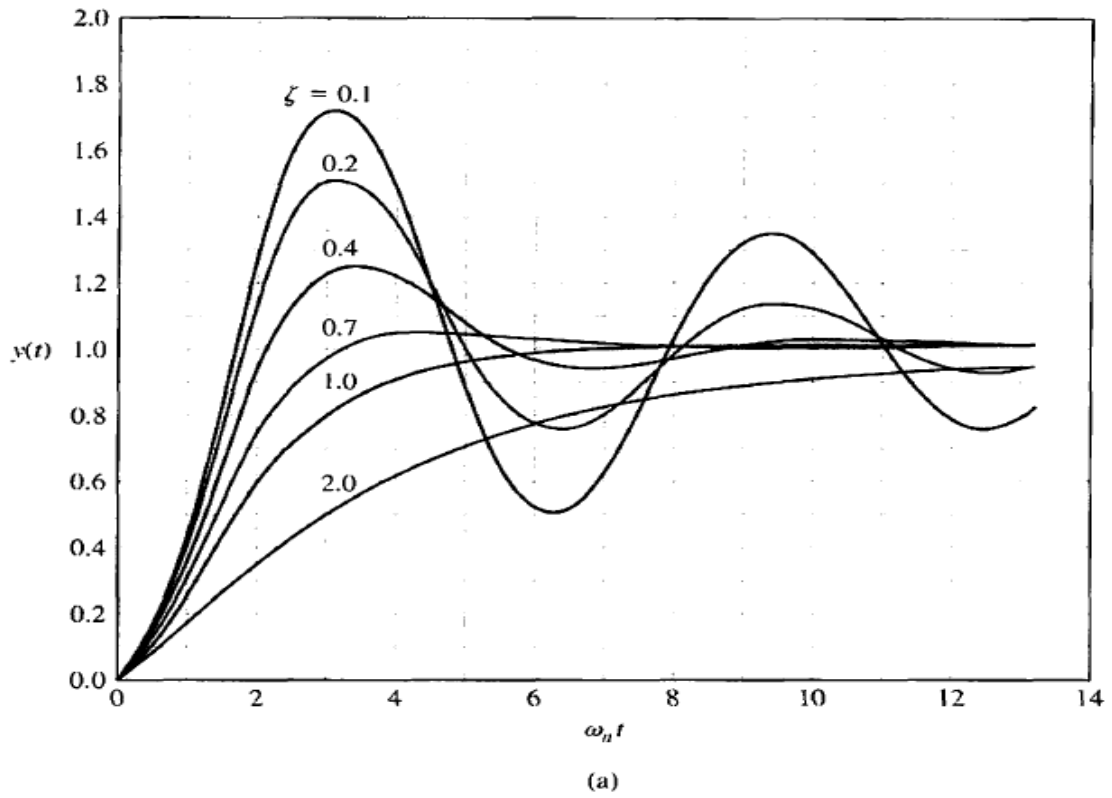


Рис. 5.5 (а) Переходные характеристики системы второго порядка при ступенчатом входном сигнале.(б) Те же характеристики в зависимости от ζ и времени

Типовые показатели качества обычно определяются по виду реакции на ступенчатое входное воздействие, как показано на рис 5.7. Быстродействие системы напрямую связано с временем нарастания T_r и временем максимума переходной характеристики T_p . Для недодемпфированных систем, переходная характеристика которых обладает перерегулированием, время нарастания определяется как время изменения реакции от 0 до 100% заданного значения выходной переменной. Если система передемпфирована, то перерегулирование отсутствует, время максимума смысла не имеет, а в качестве времени нарастания T_{r1} рассматривается интервал, в течение которого переходная характеристика изменяется от 10% до 90% ее значения. Насколько хорошо действительная реакция системы соответствует ступенчатому входному сигналу, оценивается по относительному перерегулированию и времени установления T_s . При единичном ступенчатом воздействии относительное перерегулирование (ОП) определяется как

$$P.O. = \frac{M_{pt} - fv}{fv} \times 100\%$$

где M_{pt} — максимальное значение переходной характеристики, а к.з. — ее конечное значение. Обычно к.з. совпадает с величиной входной ступеньки, но во многих системах оно существенно отличается от желаемого значения, определяемого входным сигналом. Для системы, описываемой уравнением выше.

Время установления T_s определяется моментом, после которого переходная характеристика остается полностью внутри зоны, отличающейся от величины входного воздействия на $+\delta\%$. Данная зона изображена на рис 5.7. Для системы второго порядка, реакция которой описывается выражением (5.9), время установления T_s можно найти по моменту, начиная с которого реакция отличается от своего конечного значения не более, чем на 2%, т. е. если ³⁰

$$e^{-\zeta\omega_n T_s} < 0.02,$$

$$\zeta\omega_n T_s \cong 4.$$

³⁰ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (310 p.)

Следовательно,

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}.$$

Таким образом, время установления можно считать равным четырем постоянным времени τ , где $\tau=1/\xi\omega_n$ постоянная времени, соответствующая доминирующим корням характеристического уравнения. По реакции системы на ступенчатое воздействие можно также определить установившуюся ошибку, как это показано на рис. 5.7.

Реакцию системы на ступенчатое воздействие можно охарактеризовать двумя факторами:

1. Быстродействием, которое определяется временем нарастания и временем максимума.
2. Близостью к желаемому виду, которая определяется перерегулированием и временем установления.

По своей сути эти факторы являются противоречащими друг другу, что заставляет искать определенный компромисс.

Чтобы получить зависимость показателей M_p и T_p от параметра ξ , можно продифференцировать выражение (5.9) и приравнять производную нулю. Другой способ основан на использовании свойства дифференцируемое™ преобразования Лапласа, которое записывается в виде

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s)$$

при условии, что начальное значение $y(t)$ равно нулю. В результате мы можем получить производную от $y(t)$, умножив выражение (5.8) на s , что даст нам правую часть выражения (5.10). Применив обратное преобразование Лапласа к последнему выражению, мы получим (5.11), которое обращается в нуль при $\omega_n\beta t=\pi$. Отсюда выражение для времени максимума переходной характеристики системы второго порядка:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}},$$

а максимальное значение переходной характеристики,

$$M_{pt} = 1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

В результате относительное перерегулирование составляет

$$P.O. = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Зависимость относительного перерегулирования от коэффициента затухания ζ , представлена на рис. 5.8. Здесь же изображена зависимость нормированного времени максимума $\tau_m T$ от коэффициента затухания ζ . Для некоторых значений коэффициента затухания ζ , величина относительного перерегулирования представлена в таблице 5.2. И снова мы сталкиваемся с необходимостью поиска компромисса между скоростью реакции и допустимым перерегулированием.

Таблица 5.2. Относительное перерегулирование (в %) в зависимости от коэффициента затухания для системы второго порядка

Коэффициент затухания	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
Относительное перерегулирование	0,2	1,5	4,6	9,5	16,3	25,4	37,2

3 Влияние третьего полюса и нуля на характеристики системы второго порядка

Кривые, изображенные на рис. 5.8, являются точными только для системы второго порядка, определяемой выражением (5.8). Тем не менее они являются весьма полезными и для многих других систем, обладающих парой доминирующих корней, реакция которых на ступенчатое воздействие может быть представлена в виде рис. 5.8. Такой подход, хотя и является приближенным, позволяет обойтись без применения обратного преобразования Лапласа для оценки относительного перерегулирования и других показателей качества. Например, для системы третьего порядка, имеющей в замкнутом состоянии передаточную функцию

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta s + 1)(\gamma s + 1)},$$

расположение ее корней показано на рис. 5.12 (здесь предполагается, что $\omega=1$). Экспериментально было установлено, что относительное перерегулирование, ОП, и время установления, T_s , для данной системы соответствуют кривым для системы второго порядка, если

$$|1/\gamma| \geq 10|\zeta\omega_n|.$$

Иными словами, реакцию системы третьего порядка можно аппроксимировать с помощью доминирующих корней системы второго порядка, если только действительная часть этих корней меньше 1/10 действительной части третьего корня.³¹

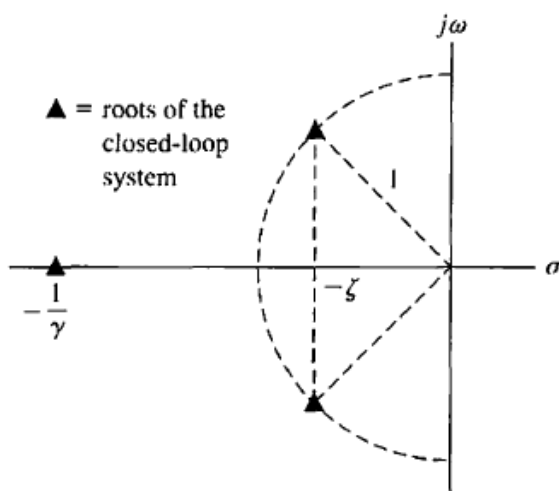


Рис. 5.12. Положение корней системы третьего порядка на s-плоскости

С помощью вычислений на компьютере для $\xi=0,45$ можно найти реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие. При $\gamma=2,25$ реакция является монотонной (система передемпфирована), т. к. действительная часть комплексных полюсов равна $-0,45$, тогда как вещественный полюс равен $-0,444$. Время установления (по критерию 2% от конечного значения) составляет 9,6 с. При $\gamma=0,90$, или $1/\gamma=1,11$, в сравнении с $\xi\omega_n=0,45$ мы видим, что перерегулирование составляет 12%, а время установления равно

³¹ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (315 p.)

8,8 с. Если бы комплексные корни были доминирующими, то перерегулирование составляло бы 20%, а время установления равнялось бы $t_{\omega_n} = 8,9$ с. Результаты расчетов сведены в табл. 5.3. ³²

Таблица 5.3. Влияние третьего полюса при $\xi = 0,45$

γ	$1/\gamma$	Относительное перерегулирование, %	Время установления*
2,25	0,444	0	9,63
1,5	0,666	3,9	6,3
0,9	1,111	12,3	8,81
0,4	2,50	18,6	8,67
0,05	20,0	20,5	8,37
0	∞	20,5	8,24

* Примечание: Время установления нормировано, т. е. приведено в значениях t_{ω_n}, T_s и определено по критерию 2%.

Следует также заметить, что показатели качества, отмеченные на рис. 5.8, имеют силу только тогда, когда передаточная функция не имеет конечных нулей. Если же передаточная функция содержит конечные нули, которые располагаются достаточно близко к доминирующим комплексным полюсам, то эти нули будут оказывать существенное влияние на вид переходной характеристики системы.

4. Оценка качества процессов управления на основе оптимального распределения полюсов системы управления

Процесс функционального проектирования систем управления неразрывно связан с решением задачи оптимизации управления, то есть задачи оптимального достижения главной цели при соблюдении множества

³² Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (317 p.)

ограничений. В общем случае *цель управления* заключается в том, чтобы перевести объект из начального состояния $x(t_0)$, в котором он находится в момент t_0 , в конечное состояние $x(t_2)$, принадлежащее подобласти R_1 области допустимых состояний R , то есть $x(t_2) \in R_1$. Здесь $R_1 \in R$, что соответствует выделению в пространстве состояний области допустимых состояний R и сужению ее до некоторой области R_1 , которая для нас по каким-то причинам является желательной.

Задача управления заключается в том, чтобы в области допустимых управлений $Q(u)$ найти такое управление, при котором будет достигнута цель.

Функционалы и функции, выражающие цель управления и ограничения, называют *критериями качества*.

Операция формирования критерия качества управления является наиболее ответственной на подготовительной стадии проектирования. Поэтому наиболее оптимальное ее выполнение достигается путем сочетания формализованных методов и творческой деятельности проектировщика, работающего в диалоге с вычислительной системой.

Рассмотрим некоторые методические аспекты формирования критериев качества управления для решения задач предварительного синтеза системы управления.

При описании объекта управления с помощью векторно-матричной модели в пространстве состояний задание качества управления может быть трансформирован в оптимальное распределение на комплексной плоскости полюсов замкнутой системы.

Для системы, описываемой векторно-матричной моделью в непрерывном времени

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.15)$$

полюса системы - это собственные значения матрицы A , которые обычно обозначаются через $\lambda_i(A)$, где $i = 1, \dots, n$. В то же время собственными значениями матрицы A называются корни ее характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0. \quad (2.16)$$

Для односвязных систем, которые могут быть описаны общей передаточной функцией³³

³³ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (403-404 p.p)

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{m-1}s^{m-1} + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n} \quad (2.17)$$

полюса системы – это корни характеристического многочлена $A(s)$. Соответственно нулями системы называются корни многочлена $B(s)$, при которых $H(s)=0$.

Расположение полюсов на комплексной плоскости во многом характеризует синтезируемую систему, определяя ее переходные и частотные характеристики, а, следовательно, и динамические показатели качества. Так, например, устойчивость системы определяется размещением полюсов в левой полуплоскости.

Часто понятие оптимального переходного процесса связывают с минимизацией какого-либо функционала. Подобные стандартные формы получены эмпирически, и область их применения ограничивается системами невысокого порядка. К таким фильтрам относятся приведенные в табл.2.1. распределения, минимизирующие интеграл от квадрата ошибки и оптимизирующий функционал.

Таблица 2.1

Коэффициенты полинома $1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$ для распределений

а) минимум интеграла от квадрата ошибки

б) минимум оптимизирующего функционала

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
2	1						
3	2	1					
4	2	3	1				
5	3	3	4	1			
6	3	6	4	5	1		
7	4	6	10	5	6	1	
8	4	10	10	15	6	7	1

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
2	1.4						
3	2.15	1.75					
4	2.7	3.40	2.10				
5	3.4	5.50	5.00	2.80			
6	3.95	7.45	8.60	6.60	3.25		
7	4.58	10.64	15.54	15.00	10.42	4.47	
8	5.15	13.30	22.20	25.75	21.60	12.8	5.20

Качество работы системы управления характеризуется, с одной стороны, ее точностью в установившемся режиме, а с другой – переходным процессом от одного установившегося состояния к другому. При исследовании переходных процессов чаще всего полагают, что входной сигнал является единичной ступенчатой функцией. В этом случае кривая переходного процесса называется переходной функцией и характеризуется некоторыми показателями, принимаемыми за меру качества системы управления. К числу таких показателей могут быть отнесены:

- время нарастания t_H – время, необходимое для достижения 95% конечного значения;
- время установления (регулирования) t_y – время, необходимое для попадания в некоторую окрестность конечного значения без выхода из него;
- перерегулирование – максимальная относительная величина выброса $(Y_{\max} / Y_{уст} - 1) \cdot 100\%$;
- пульсации (колебания) – число колебаний до выхода кривой в установившийся режим.

Обобщенный функционал качества управления. Для детерминированных процессов с непрерывным временем, описываемых в пространстве состояний, функционал качества в общем случае имеет вид

$$I = V_3[x(t_k), Q_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[x(t), u(t), t, Q, R] dt \quad (2.18)$$

Здесь V_3 – заданная с точностью до матрицы параметров Q_k скалярная функция конечного состояния – терминальная функция; L – скалярная функция, действующая из пространств состояния, управления; Q – матрица параметров зависимости L от x ; R – матрица параметров зависимости L от u .

Функционал (7.2) можно назвать классическим. Он использовался в классических задачах вариационного исчисления:

- в задаче Больца, где $V_3 \neq 0, L \neq 0$;
- в задаче Лагранжа, где $V_3 = 0, L \neq 0$;
- в задаче Майера, где $V_3 \neq 0, L = 0$.

Опустим векторы параметров как аргументы функций в (2.18). Тогда функционал Больца запишется в общей форме как

$$I = V_3[x(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[x(t), u(t), t] dt \quad (2.19)$$

На практике применяют частные формы классического функционала (2.19). Некоторые из этих форм рассмотрим ниже.

Классический функционал с аддитивной функцией затрат на управление функция L может быть представлена в виде суммы функций:

$$L[x(t), u(t), t] = Q_3[x(t), t] + U_3[u(t), t] \quad (2.20)$$

Функция $U_3[u(t), t]$, как правило, имеет смысл тех или иных затрат на управление. Поэтому функционал

$$I = V_3[x(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} Q_3[x(t), t] dt + \int_{t_0}^{t_k} U_3[u(t), t] dt, \quad (2.21)$$

называют классическим функционалом с аддитивной функцией затрат на управление.

Классический квадратичный функционал (Летова–Калмана). Пусть все три функции V_3 , Q_3 , U_3 выражаются квадратичными формами:

$$V_3 = 0.5x^T(t_k)Q_kx(t_k); \quad Q_3 = 0.5x^T(t)Qx(t); \quad U_3 = 0.5u^T(t)Ru(t), \quad (2.22)$$

где Q_k , Q – положительно полуопределенные квадратные $n \times n$ – матрицы; R – положительно определенная квадратная $r \times r$ – матрица; Q и R могут быть нестационарными матрицами.

Напомним, что некоторую матрицу $F(n \times n)$ называют положительно полуопределенной (неотрицательно определенной), если она симметрична, то есть $F = F^T$, и при любом n -мерном векторе $x \neq 0$ выполняется неравенство $x^T F x \geq 0$.

Положительно определенная матрица F в тех же условиях обладает свойством $x^T F x > 0$.

Соответствующий функционал

$$I = \frac{1}{2} x^T(t_k)Q_kx(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{2} x^T(t)Qx(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} u^T(t)Ru(t) dt \quad (2.23)$$

является классическим квадратичным функционалом.

Проанализируем смысловое содержание функционала (2.23).

Первое слагаемое в его составе характеризует ошибку управления в конечный момент времени t_k и используется с целью обеспечить малость этой ошибки.

Второе слагаемое оценивает отклонения реальных переменных состояния от желаемых и представляет собой своеобразный «штраф» за большие ошибки при любом $t_0 \leq t \leq t_k$.

Последнее слагаемое, будучи всегда положительным, оценивает стоимость управления. Физически оно характеризует затрагиваемую энергию на управление.

Основное затруднение формирования квадратичного критерия качества связано с выбором элементов весовых матриц Q и R .

Предварительный выбор значений элементов весовых матриц Q и R может быть осуществлен с помощью следующих рекомендаций.

1. Обычно матрицы Q и R назначаются постоянными и диагональными, т. е. матрица Q – содержит n ненулевых элементов $q_{ii}, i=1,2,\dots,n$, а матрица R – r элементов $r_{jj}, j=1,2,\dots,n$.

2. Принимаем, что максимально допустимые отклонения переменных состояния $x(t)$ в любой момент времени вносят в функционал качества одинаковый вклад. Распространяя аналогичные рассуждения и на отклонения сигналов управления $u(t)$, можно записать

$$q_{ii} = \left(\frac{x_{1\max}}{x_{i\max}} \right)^2 q_{11}; \quad r_{jj} = \left(\frac{u_{1\max}}{u_{j\max}} \right)^2 r_{11}. \quad (2.24)$$

Здесь $x_{i\max}$ – максимально допустимое отклонение i -й переменной состояния $(i=2,3,\dots,n)$, определяемое техническим заданием; $u_{j\max}$ – максимально допустимое отклонение j -го сигнала управления $(j=2,3,\dots,r)$ согласно техническому заданию.

Общий вклад максимально допустимых отклонений переменных состояния должен приблизительно соответствовать общему вкладу максимально допустимых отклонений сигналов управления.

$$\sum_{i=1}^n q_{ii} x_{i\max}^2 = \sum_{j=1}^r r_{jj} u_{j\max}^2. \quad (2.25)$$

3. Произвольно выбираем значение r_{11} (например, $r_{11}=1$), и по формулам (2.24), (2.25) вычисляем значения остальных коэффициентов.

Полученные значения весовых коэффициентов следует рассматривать как начальные оценки. Если отклонения по всем переменным достигают своего максимума не одновременно, формулы (2.24), (2.25) неверно отражают требования, предъявляемые к системе. Поэтому окончательный выбор весовых коэффициентов целесообразно производить после нескольких пробных процедур синтеза и моделирования системы управления.

Контрольные вопросы:

1. Каковы будут значения параметров регулятора состояния, синтезированного для объекта? Векторно-матричная модель объекта и эталонная модель системы управления приведены ниже.

2. ВММ объекта управления

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u,$$
$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Эталонная модель СУ

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -40 & -400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u,$$

1. Каковы будут значения параметров регулятора состояния, синтезированного для объекта? Векторно-матричная модель объекта и эталонная модель системы управления приведены ниже.
2. Назовите два основных принципа синтеза наблюдателя.
3. В какой последовательности следует выполнять проектные операции синтеза регулятора и наблюдателя состояния?

Использованные литературы:

1. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.

5-тема: Устойчивость линейных систем с обратной связью

План:

1. Понятие устойчивости
2. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица
3. Относительная устойчивость систем управления с обратной связью
4. Устойчивость систем, описываемых переменными состояниями
5. Анализ устойчивости с помощью MATLAB

Ключевые слова: система управления, регулятор состояния, оптимальное управление, оценка вектора состояния, анализ устойчивости, критерия Рауса-Гурвица, положения корней, устойчивость систем, переменными состояниями.

1. Понятие устойчивости

При проектировании системы управления с обратной связью ключевой проблемой является обеспечение ее устойчивости. С полным пониманием того, что неустойчивая система не имеет практического смысла, мы прежде всего должны разработать методы анализа и синтеза устойчивых систем. Система считается устойчивой, если при ограниченном входном сигнале ее выходной сигнал также является ограниченным. Подобное представление об устойчивости красной нитью проходит через всю данную главу.

Устойчивость системы с обратной связью непосредственно связана с расположением корней ее характеристического уравнения. В этой главе мы рассмотрим весьма полезный метод анализа устойчивости, известный как критерий Рауса-Гурвица. Этот метод позволяет определить число корней характеристического уравнения, расположенных в правой полуплоскости, не прибегая к вычислению значений корней, т. е. не обременяя себя рутинными и трудоемкими операциями. Ценность этого метода также в том, что с его помощью становится возможным выбор некоторых параметров системы, гарантирующих ее устойчивость в замкнутом состоянии. Для устойчивых систем мы введем понятие относительной устойчивости, с помощью которого будем характеризовать степень устойчивости. Глава завершается примером, в котором показано применение критерия Рауса-Гурвица к синтезу регулятора, обеспечивающего устойчивость системы чтения информации с диска.³⁴

При анализе и синтезе систем управления с обратной связью первостепенное значение имеет их устойчивость. С практической точки зрения неустойчивая система не имеет никакого смысла. Декларируя это, мы

³⁴ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (387 p.)

должны признать, что, конечно, могут быть и исключения, но в дальнейшем мы будем считать, что все синтезируемые системы управления должны быть устойчивыми. Многие реальные системы объективно неустойчивы в разомкнутом состоянии, а некоторые даже и проектируются, будучи таковыми. Большинство современных истребителей, если не использовать активную обратную связь, помогающую пилоту управлять машиной, являются неустойчивыми и просто не могут летать. Инженер-проектировщик в первую очередь должен обеспечить устойчивость системы управления неустойчивым объектом (например, самолетом), после чего позаботиться об удовлетворении других требований к динамике системы. С помощью обратной связи мы можем обеспечить устойчивость неустойчивого объекта, а затем надлежащим выбором параметров регулятора удовлетворить такие показатели качества, как установившаяся ошибка, относительное перерегулирование, время установления, время максимума переходной характеристики и другие, которые подробно были рассмотрены в главах 4 и 5.

Всегда можно сказать, что замкнутая система является либо устойчивой, либо неустойчивой. При таком подходе речь обычно идет о так называемой абсолютной устойчивости. Систему, обладающую абсолютной устойчивостью, называют просто устойчивой, отбрасывая слово «абсолютная». Если же замкнутая система является устойчивой, то речь может идти о степени этой устойчивости, и тогда пользуются понятием относительной устойчивости. С этим понятием хорошо были знакомы пилоты на заре развития авиации — чем более устойчив был самолет, тем труднее было совершать различные маневры (например, развороты). Одним из показателей относительной устойчивости современных истребителей является их высокая маневренность. Истребитель менее устойчив, чем пассажирский самолет, поэтому он способен маневрировать намного легче. Действительно, движения, совершаемые истребителем, могут быть весьма болезненными для «пассажиров». Как мы увидим позже в этом разделе, система будет устойчива (в абсолютном смысле), если все полюсы ее передаточной функции или, что то же самое, все собственные значения матрицы A находятся в левой половине s -плоскости. Если же окажется, что все полюсы (или собственные значения) находятся в правой половине s -плоскости, то далее речь может идти об относительной устойчивости, которая определяется положением этих полюсов.³⁵

Устойчивую систему определяют как систему, обладающую ограниченной реакцией. Иначе говоря, если система подвергается

³⁵ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (387 p.)

воздействию ограниченного входного сигнала или возмущения и ее реакция также является ограниченной по модулю, то такую систему называют устойчивой.

Устойчивая система — это динамическая система, обладающая ограниченной реакцией на ограниченный входной сигнал.

Понятие устойчивости можно проиллюстрировать на примере конуса, находящегося на плоской горизонтальной поверхности. Если конус поставить на основание и слегка наклонить, он вернется в первоначальное положение равновесия. Говорят, что такое положение равновесия и соответствующая реакция являются устойчивыми. Если конус положить на бок и слегка толкнуть, то он покатится, тем не менее оставаясь все время на боку. Такое положение равновесия называют нейтрально устойчивым. Если же конус поставить на вершину и отпустить, то он упадет на бок, поэтому данное положение равновесия является неустойчивым. Соответствующие ситуации представлены на рис. 6.1.

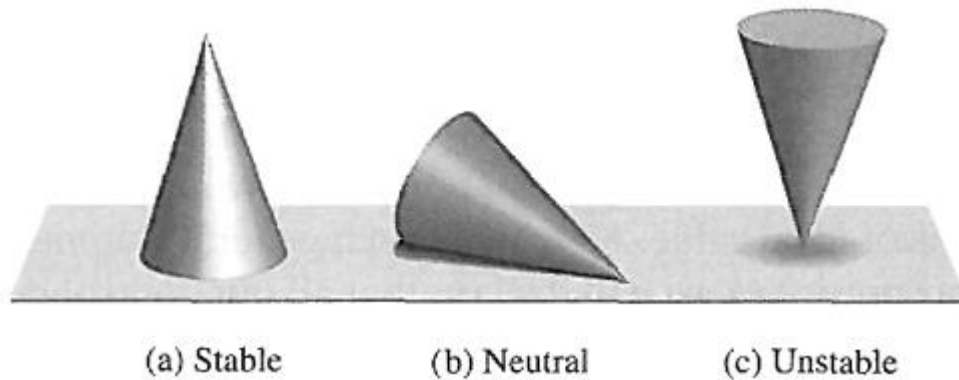


Рис. 6.1 Устойчивое положение конуса
 а) Устойчивое б) Нейтральное в) Неустойчивое³⁶

Устойчивость динамической системы определяется аналогичным образом. Реакция системы на отклонение, или начальные условия, будет либо затухать, либо оставаться нейтральной, либо нарастать. Согласно определению, линейная система устойчива тогда и только тогда, если интеграл в бесконечных пределах от абсолютного значения ее импульсной переходной функции $g(t)$ является конечным. Иначе говоря, необходимо, чтобы при ограниченном входном сигнале интеграл $\int_0^{\infty} g(t)dt$ был конечным.

Положение полюсов системы на s -плоскости определяет вид ее переходной характеристики. Полюсы, расположенные в левой половине s -плоскости,

³⁶ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (388 p.)

дают затухающую реакцию на входное воздействие, а полюсы на мнимой оси или в правой половине s -плоскости, соответственно, нейтральную или расходящуюся реакцию. Это наглядно проиллюстрировано на рис. 6.2. Очевидно, что все полюсы синтезируемых систем управления должны находиться в левой половине s -плоскости.



Рис. 6.2 Иллюстрация устойчивости на s -плоскости

Типичным примером дестабилизирующего действия обратной связи является система микрофон-динамик, используемая в аудиториях для общения с публикой. В этом случае динамик создает звуковой сигнал, представляющий собой усиленную версию сигналов, принимаемых микрофоном. Микрофон, помимо иных звуков, чувствителен также и к аудио сигналу, создаваемому динамиком. Насколько сильным будет влияние последнего, зависит от расстояния между динамиком и микрофоном. Поскольку распространение звука в воздушной среде сопровождается его затуханием, то чем больше будет это расстояние, тем слабее будет сигнал, приходящий к микрофону. Кроме того, из-за конечной скорости распространения звуковых волн появляется задержка между сигналом, создаваемым динамиком, и сигналом, достигающим микрофона. Последний суммируется с основным внешним сигналом, в результате чего образуется положительная обратная связь. Если микрофон и динамик расположены очень близко друг к другу, то система будет неустойчивой. Неустойчивость проявляется в виде чрезмерного усиления и искажения аудио сигналов и возникновения пронзительного свиста.

Еще один пример неустойчивой системы изображен на рис. 6.3. Первый мост через пролив Такома в Паджет Саундс, шт. Вашингтон, был открыт для движения 1 июля 1940 г. Было замечено, что когда дует ветер, мост начинает раскачиваться. Спустя четыре месяца, 7 ноября 1940 г., ветер привел к нарастанию амплитуды колебаний, и в итоге мост развалился на части.

Что касается линейных систем, то требования устойчивости сводятся к заданию положения полюсов передаточной функции замкнутой системы. Эта передаточная функция может быть записана в виде

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + \sigma_k) \prod_{m=1}^R [s^2 + 2\alpha_m s + (\alpha_m^2 + \omega_m^2)]}, \quad (6.1)$$

где $q(s)=\Delta(s)=0$ есть характеристическое уравнение, корни которого являются полюсами замкнутой системы. Реакция системы на импульсный входной сигнал (при $N = 0$) определяется выражением:

$$y(t) = \sum_{k=1}^Q A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{m=1}^R B_m \left(\frac{1}{\omega_m} \right) e^{-\alpha_m t} \sin(\omega_m t + \theta_m), \quad (6.2)$$

Где A_k и B_m - константы, зависящие от δ_k , z_i , ω_m , K и α_m . Чтобы реакция была ограниченной, все полюсы замкнутой системы должны находиться в левой половине s -плоскости. Таким образом, необходимое и достаточное условие того, чтобы замкнутая система была устойчива, состоит в том, чтобы все полюсы передаточной функции системы имели отрицательную действительную часть. Если не все из этих полюсов находятся в левой полуплоскости, то мы будем считать систему неустойчивой. Если характеристическое уравнение системы имеет простые корни, расположенные на мнимой оси, а все остальные корни находятся в левой половине s -плоскости, то реакция системы на ограниченный гармонический входной сигнал, частота которого равна модулю чисто мнимых корней, будет представлять собой неограниченно нарастающие колебания. Такую систему принято называть находящейся на границе устойчивости, т. к. только отдельные входные сигналы (гармонические сигналы, частота которых совпадает с полюсами системы) обуславливают неограниченное нарастание реакции системы. У неустойчивой системы по крайней мере один корень характеристического уравнения находится в правой половине s -плоскости или это уравнение имеет кратные корни на мнимой оси. В этом случае выходная переменная будет неограниченно нарастать при любом входном сигнале.³⁷

Например, если характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$(s+10)(s^2 + 16) = 0,$$

то говорят, что система находится на границе устойчивости. Если на вход такой системы подать синусоидальный сигнал с частотой $\omega = 4$, то выходной сигнал станет неограниченным.

Чтобы определить, устойчива ли система управления, необходимо найти корни характеристического полинома $\Delta(s)$. Вычисление этих корней даст гораздо больше информации, чем требуется для ответа на вопрос: является ли система устойчивой? Ведь именно этот вопрос интересует нас в

³⁷ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (290 p.)

первую очередь. И для получения ответа «да» или «нет» на данный вопрос можно воспользоваться любым их трех методов:

- методом анализа на s -плоскости;
- методом анализа в частотной области;
- методом анализа во временной области.

Частотный метод анализа устойчивости будет рассмотрен в гл. 9, а анализ во временной области.

2. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица

Проблема устойчивости издавна волновала умы многих ученых и инженеров. Впервые вопрос устойчивости динамических систем был исследован Максвеллом и Вышнеградским. В конце XIX века А. Гурвиц и Э. Дж. Раус независимо друг от друга опубликовали работы, посвященные методу анализа устойчивости линейных систем. Метод Рауса-Гурвица позволяет ответить на вопрос об устойчивости путем анализа характеристического уравнения системы, записанного в виде³⁸

$$\Delta(s) = q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (6.3)$$

Для ответа на поставленный вопрос необходимо установить, находится ли хотя бы один из корней этого уравнения в правой половине s -плоскости. Уравнение (6.3) можно записать в виде произведения сомножителей:

$$a_n (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n) = 0, \quad (6.4)$$

где через r_j , обозначен i -й корень характеристического уравнения. Перемножение скобок приводит к результату:

$$\begin{aligned} q(s) = & a_n s^n - a_n (r_1 + r_2 + \dots + r_n) s^{n-1} \\ & + a_n (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 + \dots) s^{n-2} \\ & - a_n (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 \dots) s^{n-3} + \dots \\ & + a_n (-1)^n r_1 r_2 r_3 \dots r_n = 0. \end{aligned}$$

Иначе говоря, для уравнения n -й степени можно записать:

$$q(s) = a_n s^n - a_n (\text{сумма всех корней}) s^{n-1} + a_n (\text{сумма произведений всех корней, взятых по 2}) s^{n-2} - a_n (\text{сумма произведений всех корней, взятых по 3}) s^{n-3} + a_n (-1)^n (\text{произведение всех корней}) = 0.$$

Анализ последних уравнений показывает, что если все корни расположены в левой полуплоскости, то все коэффициенты характеристического полинома должны иметь один и тот же знак. Необходимо также, чтобы все коэффициенты были отличны от нуля (если система устойчива). Однако эти условия являются лишь необходимыми, но не достаточными. Это означает,

³⁸ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (391 p.)

что если данные условия не выполняются, то сразу можно сказать, что система неустойчива; но если даже эти условия выполняются, то для ответа на вопрос об устойчивости системы необходимы дальнейшие исследования. Например, если характеристический полином имеет вид

$$q(s) = (s + 2)(s^2 - s + 4) = (s^3 + s^2 + 2s + 8), \quad (6.7)$$

то система является неустойчивой, хотя все коэффициенты полинома положительны.

Критерий Рауса-Гурвица дает необходимое и достаточное условие устойчивости линейных систем. Первоначально он был предложен в форме определителей, но мы приведем его в более удобной табличной форме.

В основе критерия Рауса-Гурвица лежит упорядочение коэффициентов характеристического уравнения

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (6.8)$$

в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \dots \end{array} \quad "$$

Следующие строки таблицы образуются по приведенному ниже правилу³⁹

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^0 & h_{n-1} & & \end{array}$$

где

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix},$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix},$$

и т. д. Алгоритм вычисления элементов таблицы можно построить на основе определителей или на основе выражения для b_{n-1}

³⁹ Richard C. Dorf, Robert H. Bishop Modern Control Systems, Twelfth edition 2010 (392 p.)

Критерий Рауса-Гурвица утверждает, что число корней полинома $q(s)$ с положительной действительной частью равно числу изменений знака в первом столбце таблицы Рауса.

Этот критерий требует, чтобы для устойчивой системы в первом столбце таблицы Рауса не было изменений знака. Данное условие является и необходимым, и достаточным.

Необходимо рассмотреть четыре различных случая, относящихся к виду первого столбца таблицы, причем для каждого из них в отдельности должны быть указаны специфические правила вычисления элементов таблицы. Эти частные случаи таковы:

1. В первом столбце нет ни одного нулевого элемента;
2. В первом столбце имеется нулевой элемент, но некоторые другие элементы строки, содержащей нуль в первом столбце, отличны от нуля;
3. В первом столбце имеется нулевой элемент, и все остальные элементы соответствующей строки также равны нулю;
4. Тот же случай, что и (3), но характеристический полином имеет кратные корни на мнимой оси.

3. Относительная устойчивость систем управления с обратной связью

Критерий Рауса-Гурвица дает только частный ответ на вопрос об устойчивости, а именно, он исследует абсолютную устойчивость системы, проверяя, расположены ли какие-либо корни характеристического уравнения в правой половине s -плоскости. Однако, если система удовлетворяет критерию Рауса-Гурвица и является абсолютно устойчивой, полезно установить ее относительную устойчивость, т. е. исследовать затухание, обусловленное каждым корнем характеристического уравнения. Относительную устойчивость системы можно определить как свойство, оцениваемое действительной частью каждого корня или пары корней характеристического уравнения. Так, например, корень r_2 на рис. 6.6 относительно «более устойчив», чем корни r_1 , и r'_1 . Относительную устойчивость системы можно также оценивать по коэффициентам затухания ξ , соответствующим каждой паре комплексно-сопряженных корней, и, следовательно, по скорости нарастания ее реакции и величине перерегулирования.⁴⁰

Анализ влияния каждого корня на относительную устойчивость принципиально необходим, потому что, как мы выяснили в гл. 5, положение полюсов замкнутой системы на s плоскости определяет и ее качество. Это обязывает нас еще раз обратиться к характеристическому полиному $q(s)$ и рассмотреть некоторые методы определения относительной устойчивости.

⁴⁰ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (399 p.)

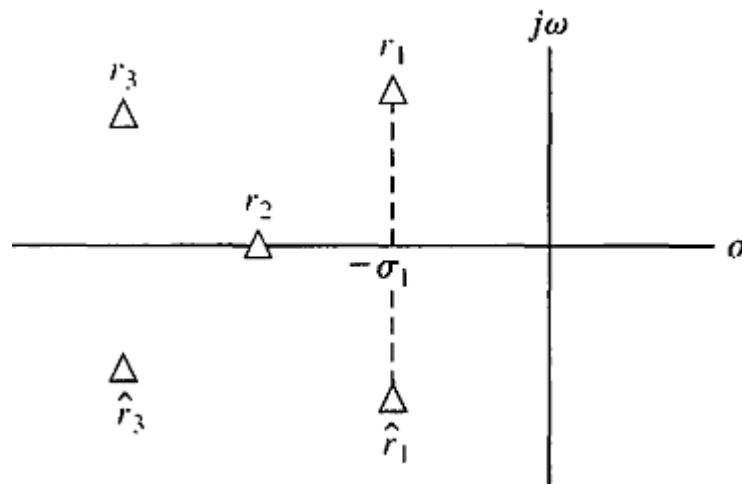


Рис.6.6 Положение корней на s плоскости.

Первый из этих методов, связанный с использованием s-плоскости, предполагает распространение критерия Рауса-Гурвица для определения относительной устойчивости. Идея метода состоит в замене переменной, приводящей к сдвигу оси s-плоскости. Анализ рис. 6.6 показывает, что если сдвинуть ось ординат влево на величину δ_1 то корни r_1 , и r'_1 , окажутся на этой оси. Правильную величину сдвига можно получить только путем проб и ошибок. Тогда, не прибегая к решению уравнения пятого порядка, можно будет определить действительную часть доминирующих корней r_1 , и r'_1 .⁴¹

4. Устойчивость систем, описываемых переменными состояния

Устойчивость системы можно определить и по ее модели в переменных состояния. Если система задана своей передаточной функцией

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)},$$

где $p(s)$ и $q(s)$ — полиномы от переменной s , то ее устойчивость определяется корнями характеристического уравнения $q(s) = 0$. Чтобы система была устойчива, все корни этого уравнения должны быть расположены в левой половине s-плоскости. Итак, для ответа на вопрос об устойчивости системы, описываемой передаточной функцией, мы используем характеристическое уравнение и применяем критерий Рауса-Гурвица. Если же система представлена в виде сигнального графа в переменных состояния, то определитель этого графа совпадает с характеристическим полиномом, к которому легко применить уже известный критерий. Проиллюстрируем это несколькими примерами

⁴¹ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (400 p.)

5. Анализ устойчивости с помощью MATLAB

Этот раздел мы начнем с критерия Рауса-Гурвица и покажем, какое простое и удобное средство предоставляет MATLAB для вычисления корней характеристического уравнения. Если характеристическое уравнение содержит один варьируемый параметр, то можно отразить в виде диаграммы изменение положения корней в зависимости от этого параметра.

В данном разделе будет введена функция `for`, с помощью которой последовательность инструкций повторяется заданное число раз.⁴²

Критерий Рауса-Гурвица. Как было отмечено выше, критерий Рауса-Гурвица определяет необходимое и достаточное условие устойчивости. Если задано характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами, то с помощью критерия Рауса-Гурвица можно определить число корней, расположенных в правой полуплоскости. Например, рассмотрим характеристическое уравнение замкнутой системы, изображенной на рис. 6.10

$$q(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24 = 0$$

Соответствующая таблица Рауса приведена на рис. 6.11. Два изменения знака в первом столбце указывают на наличие двух корней уравнения в правой полуплоскости; следовательно, замкнутая система неустойчива. С помощью MATLAB мы можем проверить этот результат, непосредственно вычислив корни характеристического уравнения, как это показано на рис. 6.12. Для этого необходимо использовать функцию `roots`, которая вычисляет корни алгебраического полинома

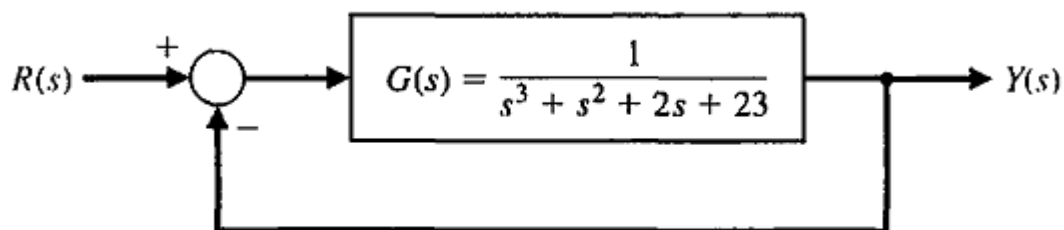


Рис. 6.10 Замкнутая система управления с передаточной функцией

⁴² Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (413 p.)

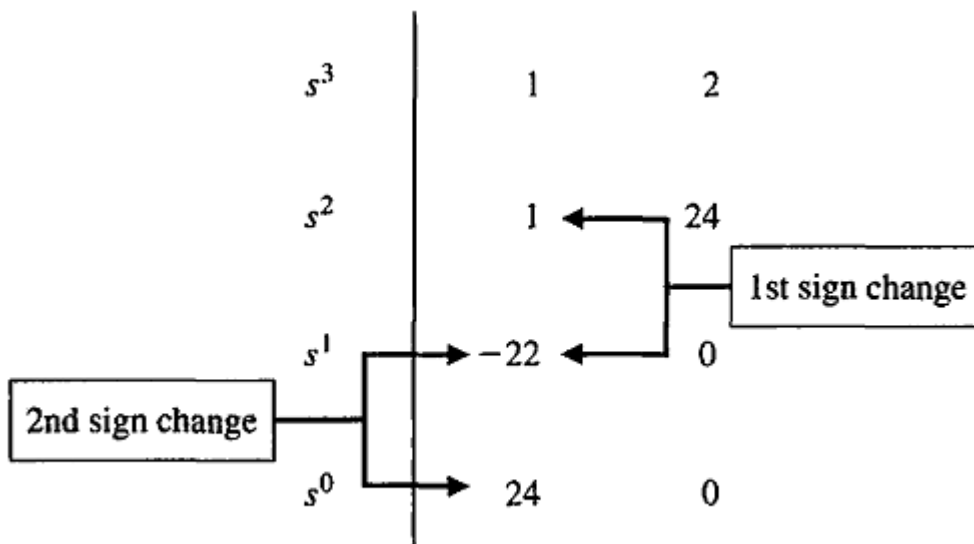


Рис. 6.11 Таблица Рауса для замкнутой системы с передаточной функцией

Если характеристическое уравнение является функцией единственного параметра, то с помощью критерия Рауса-Гурвица можно определить диапазон значений этого параметра, при которых система будет устойчивой. Рассмотрим замкнутую систему, изображенную на рис. 6.13. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K = 0.$$

```
>> numg=[1]; deng=[1 1 2 23]; sysg=tf(numg,deng);
>> sys=feedback(sysg,[1]);
>> pole(sys)
```

ans =

```
-3.0000
 1.0000 + 2.6458i
 1.0000 - 2.6458i
```

← Unstable poles

Рис. 6.12 Использование функции pole для вычисления полюсов замкнутой системы, изображенной на рис. 6.10.

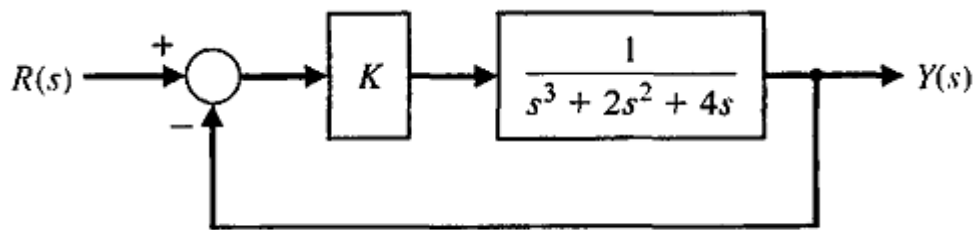


Рис. 6.13 Замкнутая система с передаточной функцией $T(s) = K/(s^3 + 2s^2 + 4s + K)$

С помощью критерия Рауса-Гурвица мы нашли (см. уравнение 6.12), что система устойчива при $0 < K < 8$. Этот результат можно проверить графически с помощью MATLAB. Как показано на рис. 6.14(a), мы задали диапазон значений K , при которых хотим вычислить корни характеристического уравнения. Затем с помощью функции `roots` вычислили и изобразили траектории корней. Как видно из графика, с увеличением K корни характеристического уравнения смещаются вправо, при $K = 8$ они оказываются на мнимой оси, а при $K > 8$ попадают в правую полуплоскость.

Программа на рис. 6.14 содержит функцию `for`. Эта функция обеспечивает выполнение одной и той же серии инструкций заданное число раз. Она в сочетании с инструкцией `end` образует цикл повторяющихся вычислений. На рис. 6.15 приведен формат функции `for`, а также пример ее использования. В примере цикл повторяется 10 раз. На i -м шаге, где $1 < i < 10$, i -й элемент вектора a устанавливается равным 20, а скаляр b пересчитывается.

Критерий Рауса-Гурвица позволяет получить однозначный ответ на вопрос об абсолютной устойчивости линейной системы, В то же время он не позволяет судить об относительной устойчивости, которая непосредственно связана с положением корней характеристического уравнения. Критерий Рауса-Гурвица говорит о том, сколько корней находится в правой полуплоскости, но не указывает конкретного положения этих корней. С помощью MATLAB мы можем вычислить точные значения корней и тем самым судить об относительной устойчивости системы.⁴³

Контрольные вопросы:

1. ВММ объекта управления

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u, \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Эталонная модель СУ

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -40 & -400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u,$$

⁴³ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (415 p.)

2. Вы решили воспользоваться методом расположения полюсов для синтеза наблюдателя полного порядка. С какой векторно-матричной моделью должна выполняться эта операция, если ВММ объекта управления имеет вид

3. Какой из рассмотренных ранее алгоритмов используется для вычисления матрицы коэффициентов усиления оптимального фильтра?

4. При каких условиях матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана-Бьюси постоянна во времени?

5. Какой из рассмотренных ранее алгоритмов используется для вычисления матрицы коэффициентов усиления оптимального фильтра?

6. При каких условиях матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана-Бьюси постоянна во времени?

Использованные литературы:

1. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.

IV. Материалы практических занятий

1-практическое занятие:

Пространства состояний и формы описания динамических систем.

Цель работы: Преобразование систем управления в уравнения состояния.

Задача 1.1. Получим уравнения состояния для простейшей RLC -цепи, показанной на рис 1.1.1

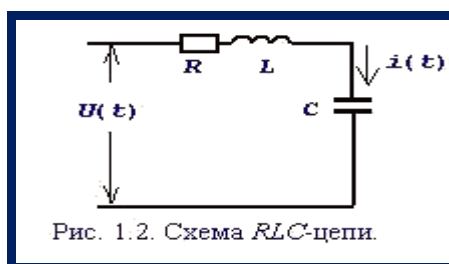


Рис. 1.1.1. Схема RLC -цепи.

Динамическое поведение этой системы при $t \geq t_0$ полностью определяется, если известны начальные значения $i(t_0)$, $U_c(t_0)$ и входное напряжение $U(t)$ при $t \geq t_0$. Следовательно, $i(t)$, $U_c(t)$ можно выбрать в качестве переменных состояния, то есть $x^T = [i(t), U_c(t)]$, $y[i(t)]$.

Для указанных переменных состояния можно записать дифференциальные уравнения⁴⁴

$$\begin{aligned} U(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + U_c, \\ C \frac{dU_c}{dt} &= i(t), \end{aligned}$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{U}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} U(t). \quad (1.1.1)$$

Таким образом, для рассматриваемой системы матрицы A, B, C векторно-матричная модель будет иметь следующий вид:⁴⁵

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

Задача 1.2. На рис. 1.2.1. показан электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения, работающий при постоянном магнитном потоке ($\Phi = const$).

⁴⁴ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (220-221 p.p)



Рис. 1.2.1. Электродвигатель постоянного тока.

Дифференциальные уравнения для такого объекта могут быть записаны относительно следующих переменных состояния: $\Omega(t)$ – скорости вращения ротора, тока якоря $i(t)$, углового перемещения ротора $\varphi(t)$. При использовании зависимостей для электродвижущей силы $E = k\Phi\Omega = C\Omega$ и вращающего момента двигателя $M = k\Phi \cdot i = Ci$, получим уравнение электрической цепи

$$U_{\text{я}}(t) = R_{\text{я}}i(t) + L_{\text{я}} \frac{di(t)}{dt} + E,$$

и уравнения вращающейся части

$$M - M_c = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega,$$

где J – приведенный момент инерции электродвигателя.

Представляя векторы состояния, входа и выхода как $x^T = [\Omega(t) \ i(t) \ \varphi(t)]$; $u^T = [U_{\text{я}} \ M_c]$; $y = [\Omega(t)]$ получим следующую векторно-матричную модель электродвигателя постоянного тока⁴⁶

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{i} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C/J & 0 \\ -C/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\text{я}} \\ M_c \end{bmatrix}, \quad (1.2.1)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \varphi \end{bmatrix},$$

то есть для рассматриваемой системы матрицы A , B , C векторно-матричная модель будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C/J & 0 \\ -C/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1/J \\ -1/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0].$$

⁴⁶ Richard C. Dorf., Robert H. Bishop Modern Control Systems , Twelfth edition 2010 (217-218 p.p)

Задача 1.3. Построим векторно-матричную модель электромеханического объекта – электропривода постоянного тока, приводящего в движение через механический редуктор тяжелую платформу. Функциональная схема такого объекта приведена на рис. 1.3.1.

Здесь легко можно выделить три функциональных элемента, соответствующие трем видам преобразования энергии:

преобразователь, осуществляющий управляемое преобразование электрической энергии;

двигатель, выполняющий преобразование электрической энергии в механическую, – электромеханический преобразователь;

механизм, осуществляющий передачу механической энергии от вала двигателя через редуктор к рабочему органу - платформе.

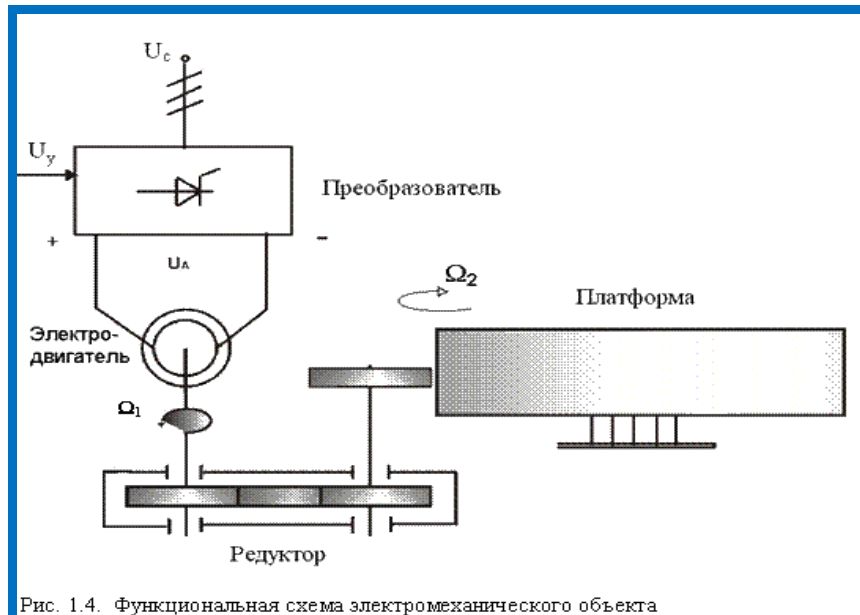


Рис. 1.3.1. Функциональная схема электромеханического объекта

При использовании общеизвестных допущений и обозначений координат и параметров такого объекта его динамическое поведение при $M_c = 0$ описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= -\frac{1}{T_n} U_n + \frac{K_n}{T_n} U_y, \\ \frac{di_\lambda}{dt} &= -\frac{1}{T_\lambda} i_\lambda - \frac{C}{R_\lambda T_\lambda} \Omega_\lambda + \frac{1}{R_\lambda T_\lambda} U_n, \\ \frac{d\Omega_1}{dt} &= \frac{C}{J_1} i_\lambda - \frac{1}{J_1} M_y, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

$$\frac{dM_y}{dt} = C_{12}\Omega_1 - C_{12}\Omega_2,$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{1}{J_2}M_y.$$

Если компонентами вектора состояния выбрать $x^T = [U_n \ i_\lambda \ \Omega_1 \ M_y \ \Omega_2]$, где U_n – напряжение преобразователя, i_λ – ток электродвигателя, Ω_1 – скорость вращения электродвигателя, M_y – момент упругости механизма, Ω_2 – скорость вращения механизма, то элементы векторно-матричной модели

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

принимают следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_f} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_y T_y} & -\frac{1}{T_y} & -\frac{\tilde{N}}{R_y T_y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{J_1} & 0 & -\frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & C_{12} & 0 & -C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{K_n}{T_n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (1.3.3)$$

$$C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Таблица 1.3.1

Параметры объекта

Параметр	Значение	Ед. изм.
T_n	0,01	<i>c</i>
K_n	22	отн.
T_y	0,0143	<i>c</i>
K_y	2,1	ом
J_1	0,045	кгм ²
J_2	0,104	кгм ²
C	0,83	Вб
C_{12}	80	НМ/с ⁻¹

После подстановки реальных значений параметров объекта, которые приведены в табл. 1.3.1., компоненты матриц состояния A и управления B принимают вид:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33,3 & -70 & -27,7 & 0 & 0 \\ 0 & 18,4 & 0 & -22,2 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 9,62 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте описание возможным формам представления уравнения состояния для непрерывных систем.
2. Объект управления имеет r – входов, m – выходов, его математическое описание в непрерывном времени содержит n дифференциальных уравнений первого порядка. Какова в этом случае будет размерность матрицы состояния?
3. Сформируйте векторно-матричную модель фильтра, электрическая схема которого представлена на рис. 1.6.

Использованные литературы:

1. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
2. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.

2-практическое занятие:

Канонические формы уравнений состояния.

Цель: Анализировать и выбрать стандартное распределение полюсов в качестве критерия качества управления.

Постановка задачи:

Задания 2.1. Получим ВММ в дискретном времени для интегратора второго порядка, структурная схема которого приведена на рис. 2.1.1. Динамический процесс для такого объекта при $\tau_1 = \tau_2 = 1$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = u. \quad (2.1.1)$$

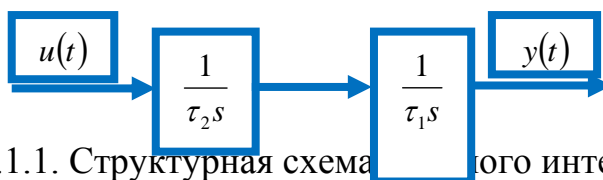


Рис. 2.1.1. Структурная схема второго интегратора

Вводя z и \dot{z} как состояния системы, получим векторно-матричную запись уравнения (2.1.1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицы Φ и \tilde{A} разложением матричной экспоненты в ряд.

$$\Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \int_0^T \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}.$$

Так как $A^2 = 0$, приведенный ряд сходится точно.⁴⁷

Таким образом, векторно-матричная модель двойного интегратора в дискретном времени имеет вид

$$x(kT + T) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(kT),$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(kT).$$

Задача 2.2. Для непрерывной модели электродвигателя постоянного тока будем считать, что $L_y = 0$, $M_c = 0$. Тогда уравнения электродвигателя будут иметь вид

$$\begin{cases} U_y(t) = R_y i(t) + C \Omega(t), \\ C i(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt}, \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = \Omega(t). \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{d\Omega(t)}{dt} = -\frac{C^2}{JR} \Omega(t) + \frac{C}{JR} U_y(t), \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = \Omega(t). \end{cases}$$

В нормализованной форме записи значений параметров электродвигателя, то есть при $R_y = 1$, $C = 1$, $J = 1$ в пространстве состояния $x^r = [\Omega(t) \ \varphi(t)]$; $u = [U_y]$; $y = [\varphi(t)]$ получим следующую запись ВММ в непрерывном времени

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Найдем изображение матричной экспоненты по Лапласу:

$$L\{e^{AT}\} = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

⁴⁷ Wolfgang Altmann, Practical Process Control for Engineers and Technicians: Jordan Hill, Oxford 2005, p.p. 432

Вычисляя обратное преобразование элементов полученной матрицы, получим матрицу

$$\Phi = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения матрицы \tilde{A} используем выражение (2.2.1):

$$e^{AT} B = \begin{bmatrix} e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}; \quad \tilde{A} = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 1 - e^{-s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, векторно-матричная модель рассматриваемой системы в дискретном времени имеет вид

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix} u(kT), \\ y(kT) &= [0 \quad 1] x(kT). \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Для систем с реальными параметрами чаще всего применяют *теорему Гамильтона – Кэли*, согласно которой любую функцию квадратной матрицы

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + \dots + d_{n-1} A^{n-1}$$

можно вычислить через характеристический полином

$$f(\lambda_i) = d_0 I + d_1 \lambda_i + \dots + d_{n-1} \lambda_i^{n-1},$$

где $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ – корни характеристического уравнения матрицы A $\det(\lambda I - A) = 0$.

Задания 2.3. Построим ВММ в дискретном времени для непрерывной системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0] x.$$

Первоначально определим корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

решение которого дает следующие значения: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Так как порядок матрицы равен 2, имеем $e^{AT} = d_0 I + d_1 A$.

Коэффициенты d_0 , d_1 определяем из системы уравнений

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} \\ e^{\lambda_2 T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 \\ 1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix},$$

решение которой имеет вид

$$d_1 = \frac{e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T}}{\lambda_2 - \lambda_1} = e^{-T} - e^{-2T};$$

$$d_0 = e^{\lambda_1 T} - d_1 \lambda_1 = 2e^{-T} - e^{-2T}.$$

Следовательно,

$$\Phi = e^{AT} = (2e^{-T} - e^{-2T}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-T} - e^{-2T}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} - e^{-2T} & -e^{-T} + e^{-2T} \end{bmatrix} = e^{-T} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + e^{-2T} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\Gamma = \int_0^T e^{As} B ds = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-s} & -e^{-2s} \\ -e^{-s} & +2e^{-2s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} -e^{-T} + e^{-2T} \\ 1 + e^{-T} - 2e^{-2T} \end{bmatrix}.$$

Контрольные вопросы:

1. Технологические требования к проектируемой системе управления не допускают перерегулирования входного сигнала $y(t)$ более 1% при ступенчатом входном воздействии $u(t)$. Какое стандартное распределение полюсов следует выбрать в качестве критерия качества управления?
2. Какой из рассмотренных здесь фильтров имеет амплитудно-частотную характеристику максимально приближающуюся к АЧХ идеального фильтра?

Использованные литературы:

4. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
5. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
6. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.

3-Практическое занятие: Канонические формы уравнений состояния

Цель работы: Вычислить уравнением состояния свойства системы

Постановка задачи:

Задания 3.1. Для иллюстрации понятий управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости выберем простую систему второго порядка

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

$$y(k) = Cx(k).$$

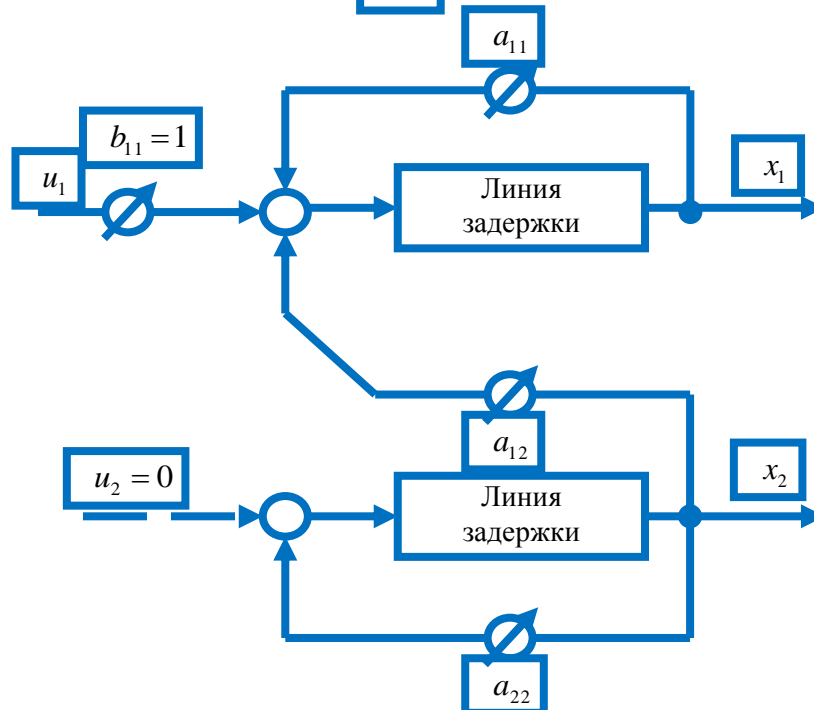
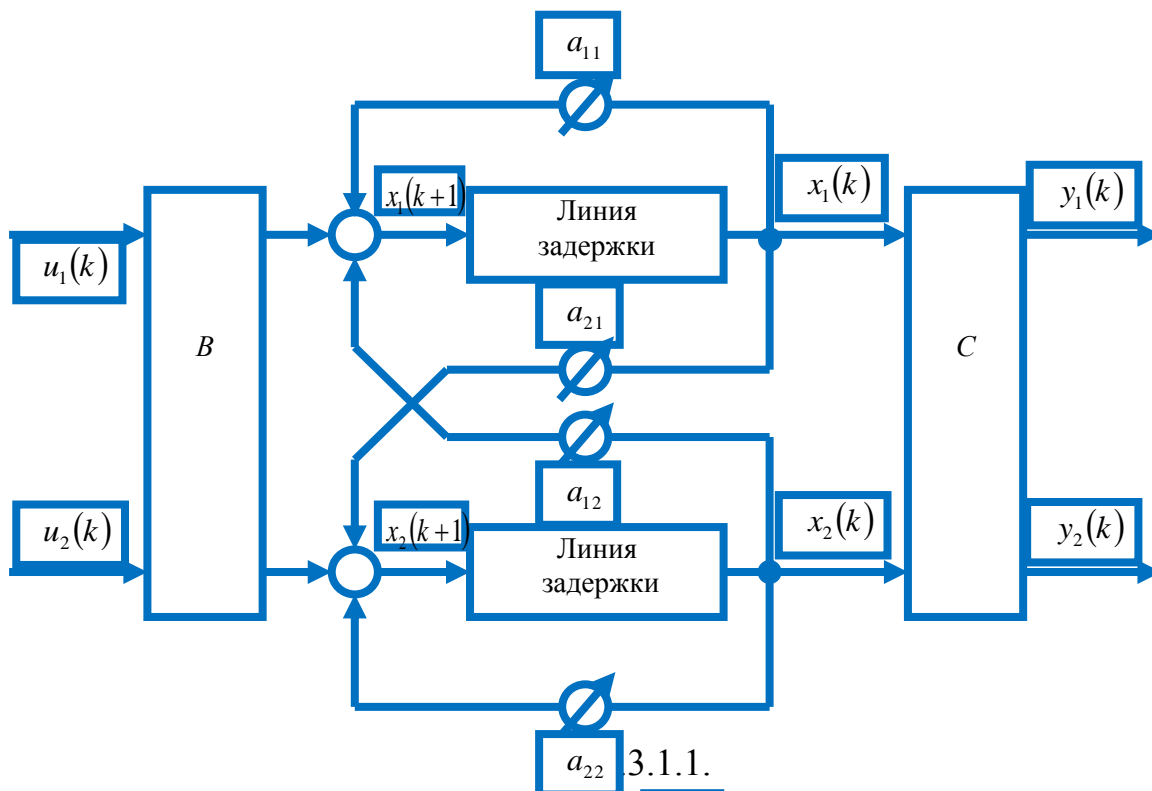


Рис.3.1.2.

(рис.3.1.1), где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим управляемость системы. Имеем

$$[AB \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система управляема, если ранг равен 2, т. е. когда $a_{21} \neq 0$, и неуправляема, если $a_{21} = 0$. Из рис.3.1.2 видно, что, когда $a_{21} = 0$, отсутствует управление координатой x_2 . Отметим, что все остальные параметры a_{ij} могут равняться нулю, но система останется управляемой. Перейдем к наблюдаемости.⁴⁸ Имеем

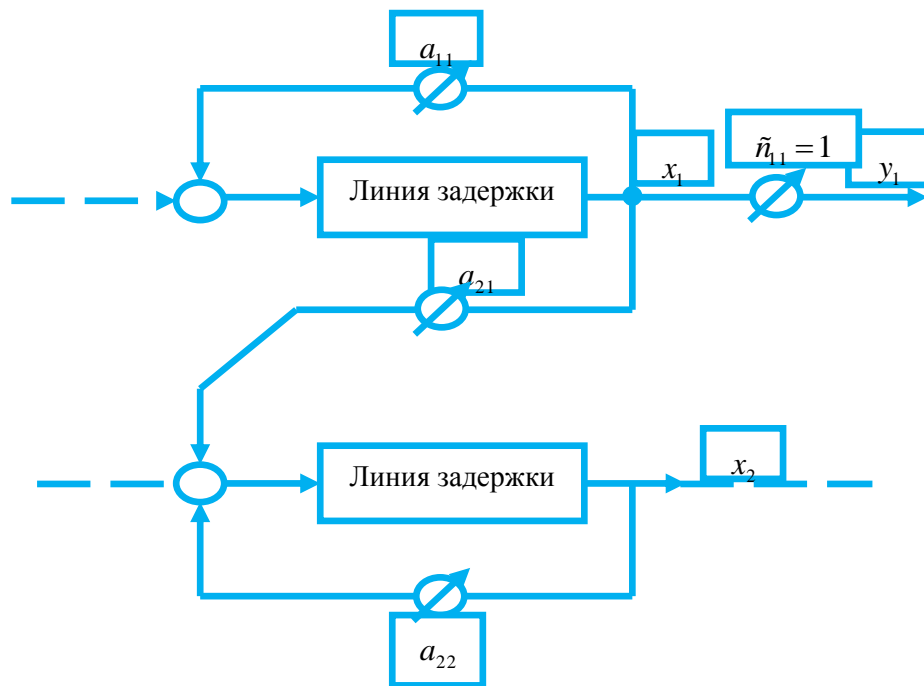
$$[C' \mid A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

Система наблюдаема, если ранг равен 2, т. е. когда $a_{12} \neq 0$, и ненаблюдаема, когда $a_{12} = 0$. В этом случае выходная координата y не содержит информации о x_2 (рис.3.1.3). Снова отметим, что все остальные параметры могут равняться нулю, но система останется наблюдаемой. Идентифицируемость:

$$[x(0) \mid Ax(0)] = \begin{bmatrix} x_1(0) & a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) \\ x_2(0) & a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Система идентифицируема, если ранг матрицы равен 2, и неидентифицируема, если определитель матрицы равен нулю. Для этого оба столбца матрицы должны быть линейно зависимы. Различают простейший случай, когда $x_1(0) = x_2(0) = 0$, т. е. объект, который находится в состоянии покоя, не может быть идентифицирован,

⁴⁸ Wolfgang Altmann, Practical Process Control for Engineers and Technicians: Jordan Hill, Oxford 2005, p.p. 446



и нетривиальный случай, когда

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}, \text{ или } [A - \lambda I] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = 0.$$

В этом случае нужно найти собственные значения λ_1 и λ_2 и соответствующие собственные векторы r_1 и r_2 . Если $x(0) = \alpha r_1$, то возбуждается только одна гармоника объекта $\exp[\lambda_1 t]$, а гармоника $\exp[\lambda_2 t]$ не идентифицируется. Если $x(0) = \beta r_2$, то может быть идентифицирована одна только гармоника $\exp[\lambda_2 t]$. Таким образом, объект идентифицируем только тогда, когда начальное условие $x(0)$ возбуждает все гармоники объекта.

Контрольные вопросы:

1. Укажите основные особенности численного решения матричного дифференциального уравнения Риккати?
2. При каких условиях матричное дифференциальное уравнение Риккати вырождается в алгебраическое?
3. Какие значения должны принимать коэффициенты обратных связей для «точной» реализации оптимального управления?

Использованные литературы:

7. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
8. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.

4-практическое занятие:

Наблюдатель состояния полного порядка и оценка вектора состояния при случайных возмущениях и наличии помех

Цель работы: Сравнительные динамические характеристики в непрерывно и дискретном времени

Постановка задачи:

Задания 4.1. Вычисление матричной экспоненты с помощью степенного ряда при заданном значении периода квантования T .

Получение относительно точного решения степенного ряда

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!}, \quad \Gamma = A^{-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!} - IB \right) \quad (4.1.1)$$

сопряжено с необходимостью вычисления высоких степеней матрицы A . Однако с помощью алгоритма, построенного на основании теоремы Кели-Гамильтона, матричная экспонента может быть вычислена с помощью $(n-1)$ степеней матрицы A .⁴⁹

Согласно этому алгоритму вычисление матриц Φ и Γ производится в несколько этапов (шагов).

Шаг 1: вычисляют первые $(n-1)$ степеней матрицы A .

Шаг 2: вычисляют коэффициенты характеристического уравнения

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0 \quad (4.1.2)$$

по следующим формулам:

⁴⁹ Wolfgang Altmann, *Practical Process Control for Engineers and Technicians*: Jordan Hill, Oxford 2005, p.p. 455

$$\left. \begin{aligned} a_{n-1} &= -T \\ a_{n-2} &= -\frac{1}{2}(a_{n-1} = T + T_2) \\ a_{n-3} &= -\frac{1}{3}(a_{n-2} = T + a_{n-1}T_2 + T_3) \\ &\dots \\ a_0 &= -\frac{1}{n}(a_1T_1 + a_2T_2 + \dots + a_{n-1}T_{n-1} + T_n), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.3)$$

где $T_k = t_r(A^k)$ – след матрицы A^k .

Шаг 3: согласно теореме Кели-Гамильтона n – яя степень матрицы вычисляется через коэффициенты характеристического уравнения как

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0I, \quad (4.1.4)$$

$a(n+m)$ -я степень матрицы A находится с помощью последовательного умножения этого соотношения на матрицу A .

$$A^{n+m} = -q_{0m}I + q_{1m}A + q_{2m}A^2 + \dots + q_{n-1}A^{n-1} \quad (4.1.5)$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$; где

$$\left. \begin{aligned} q_{00} &= -a_0 \\ q_{10} &= -a_1 \\ &\dots \quad \dots \\ q_{n-1,0} &= -a_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.6)$$

а остальные коэффициенты определяются из рекуррентных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} q_{m0} &= -a_0q_{0,m-1} \\ q_{1m} &= -q_{0,m-1} - a_1q_{1,m-1} \\ q_{2m} &= q_{0,m-1} - a_2q_{2,m-1} \\ &\dots \\ q_{n-1} &= -q_{n-2,m-1} - a_{n-1}q_{n-1,m-1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.7)$$

Шаг 4: для любого заданного T функцию e^{AT} можно записать как

$$e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (AT)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (AT)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{n+k}}{(n+k)!} \left[\sum_{j=0}^{n-1} q_{jk} A^j \right] = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \left[\frac{T^j}{j!} + \sum_{k=0}^{\infty} q_{jk} \frac{T^{n+k}}{(n+k)!} \right]. \quad (4.1.8)$$

Таким образом, функцию e^{AT} можно определить с любой заданной точностью с помощью уже вычисленных матриц A^2, A^3, \dots, A^{n-1} и коэффициентов q_{ii} без вычисления и суммирования степеней матрицы A выше $(n-1)$.

Интегрирование матричной экспоненты при разложении в ряд заменяется взвешенной суммой

$$\int_0^T e^{AT} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \sum_0^T s^k ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} A^k T^{k+1} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AT)^k}{(k+1)!}, \quad (4.1.9)$$

которая вычисляется аналогично матричной экспоненте

$$T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AT)^k}{(k+1)!} = T \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} (AT)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{n+k}}{(n+k+1)!} \sum_{j=0}^{n-1} q_{jk} A^j \right]. \quad (4.1.10)$$

Применение соотношений (4.1.8-4.1.10) возможно только в том случае, если заранее определена величина периода квантования.

Задания 4.2. Вычисление матричной экспоненты при неизвестном значении периода квантования T .

Особую актуальность представляют *символьно-численные алгоритмы* формирования дискретной ВММ, когда величина периода квантования заранее неизвестна.

Для этих целей может быть использовано представление e^{AT} в виде функции от матрицы. Анализ известного математического аппарата вычисления функций от матриц показывает, что наиболее приемлемым методом вычисления матричной экспоненты является формула Сильвестра, согласно которой

$$e^{AT} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k-1} T^l e^{\lambda_k T} Z_{kl}, \quad (4.2.1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_q$ – различные собственные значения матрицы A (то есть $\lambda_i \neq \lambda_j; i, j = 1, 2, \dots, \theta$), m_k – кратность собственного значения λ_k как нуля минимального многочлена матрицы A , Z_{kl} – компоненты матрицы A , определяемые через значения приведенной присоединенной матрицы.

Если характеристический многочлен матрицы $A \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ имеет все различные нули, то $m_k = 1$ для $k = 1, 2, \dots, n$ и минимальный многочлен совпадает с характеристическим. При этом основная формула теоремы Сильвестра приводится к следующему виду:

$$e^{AT} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k T} Z_{k1} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k T} \frac{\prod_{i=k}^n (A - \lambda_i I)}{\prod_{i=k}^n (\lambda_k - \lambda_i)}. \quad (4.2.2)$$

Если первоначально считать период квантования неизвестным, то будет целесообразным представить матрицы Φ и \tilde{A} формируемой ВММ трехмерными $\Phi(n \times n \times n)$, $\tilde{A}(n \times m \times n)$.

В этом случае матрицы дискретной модели записываются как произведение некоторых матричных коэффициентов, умноженных на собственные моды $\lambda_i \neq \lambda_j; i, j = 1, 2, \dots, \theta$, то есть

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= F_1 e^{\lambda_1 T} + F_2 e^{\lambda_2 T} + \dots + F_n e^{\lambda_n T}, \\ \Gamma(T) &= G_1 e^{\lambda_1 T} + G_2 e^{\lambda_2 T} + \dots + G_n e^{\lambda_n T}. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Таким образом, трехмерные матрицы дискретных моделей содержат n квадратных коэффициентных матриц F_i или G_i и при выбранном значении периода квантования T численное значение каждого элемента матриц вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} \Phi(i, j) &= F_1(i, j)e^{\lambda_1 T} + F_2(i, j)e^{\lambda_2 T} + \dots + F_n(i, j)e^{\lambda_n T}, \\ \tilde{A}(i, j) &= G_1(i, j)e^{\lambda_1 T} + G_2(i, j)e^{\lambda_2 T} + \dots + G_n(i, j)e^{\lambda_n T}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Причем моды комплексных собственных значений записываются через синус и косинус, например, для $\lambda_k = \alpha + j\omega$, $\lambda_{k+1} = \alpha - j\omega$ $e^{\lambda_k T} = e^{\alpha T} \sin \omega T$, $e^{\lambda_{k+1} T} = e^{\alpha T} \cos \omega T$, значения корней характеристического полинома определяются численным методом по алгоритму, в основу которого положен метод нахождения комплексных корней многочлена Берстоу.

Рациональность такого способа формирования дискретных ВММ объясняется, прежде всего, тем, что наиболее трудоемкие вычислительные операции по определению постоянных матричных коэффициентов выполняются один раз для любого количества исследуемых значений периода квантования. Такого никак нельзя добиться при использовании степенного ряда.

Для подтверждения преимуществ символьно-численного алгоритма рассмотрим варианты формирования дискретной модели непрерывного объекта 3-го порядка, представляющего собой линеаризованную модель серийного электродвигателя.

В непрерывном времени объект описывается векторно-матричной моделью вида:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 8.75 & 0 \\ -59.07 & -525 & -103 \\ 357.44 & 76.3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \times U. \quad (4.2.5)$$

Компонентами вектора состояния здесь являются: магнитный поток – Φ , ток – i , скорость вращения ротора – Ω .

В результате вычислительных экспериментов сформировано выражение для вычисления матричной экспоненты

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \begin{bmatrix} 0.999 & 0.019 & 0.004 \\ 0.028 & -0.028 & -0.208 \\ -0.004 & 0.141 & 1.028 \end{bmatrix} e^{-20089T} \cos(2477T) + \begin{bmatrix} 0.999 & 0.019 & 0.004 \\ 0.028 & -0.028 & -0.208 \\ -0.004 & 0.141 & 1.028 \end{bmatrix} e^{-20089T} \cos(2477T) + \\ &+ \begin{bmatrix} 0.999 & 0.019 & 0.004 \\ 0.028 & -0.028 & -0.208 \\ -0.004 & 0.141 & 1.028 \end{bmatrix} e^{-50982T}. \end{aligned}$$

Многочисленные эксперименты по оценки достоверности результатов конструирования ВММ в дискретном времени показывают, что значения переменных состояния, вычисленные с использованием построенной дискретной модели, практически не отличаются от значений координат непрерывной модели. Результаты единичного эксперимента приведены на рис.4.2.1.

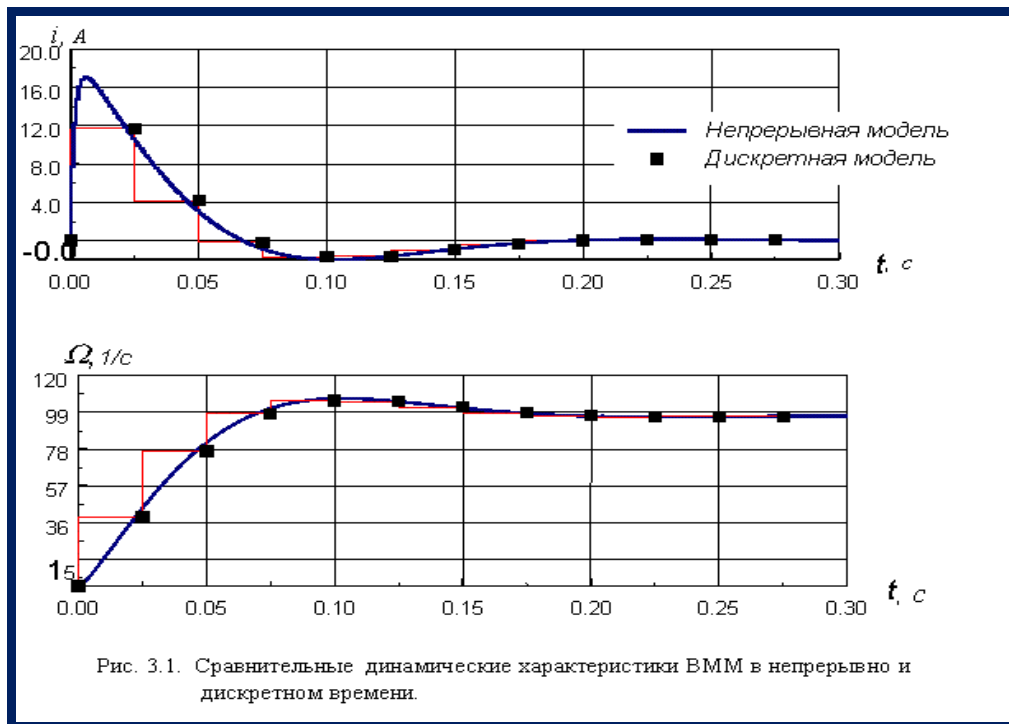


Рис. 4.2.1. Сравнительные динамические характеристики ВММ в непрерывно и дискретном времени.

На основе вышесказанного можно сделать вывод о предпочтительном использовании символьно-численного алгоритма формирования ВММ в дискретном времени, основанного на теореме Сильвестра, что дает возможность анализировать зависимость результатов вычисления от периода квантования, а вычисленные собственные значения и коэффициенты характеристического уравнения могут быть использованы в дальнейших расчетах.

Контрольные вопросы:

1. Для достижения каких целей и из каких условий выбирается матрица L наблюдателя полного порядка?
2. Назовите два основных принципа синтеза наблюдателя.
3. В какой последовательности следует выполнять проектные операции синтеза регулятора и наблюдателя состояния?

Использованные литературы:

10. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
11. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
12. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.

5-практическое занятие: Устойчивость и критерии качества систем управления

Цель работы: Определить устойчивость системы на основе теорем А.М.Ляпунова

Постановка задачи:

Задания 5.1. Приведем пример практического использования теоремы А.М.Ляпунова об устойчивости нелинейных систем на наглядных геометрических образах. Для простоты возьмем систему третьего порядка ($n=3$). Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= X_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (5.1.1)$$

Возьмем знакоопределенную положительную функцию Ляпунова в виде

$$V = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2, \quad (5.1.2)$$

где a, b, c – произвольно заданные вещественные числа. Будем придавать величине V возрастающие постоянные значения: $V=0, C_1, C_2, C_3, \dots$, что означает

$$\left. \begin{aligned} a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= 0, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= C_1, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= C_2, \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

Первое из этих выражений соответствует одной точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (началу координат фазового пространства), а остальные – поверхностям эллипсоидов в фазовом пространстве, причем каждый последующий эллипсоид содержит внутри себя целиком предыдущий (рис.5.1.1).⁵⁰

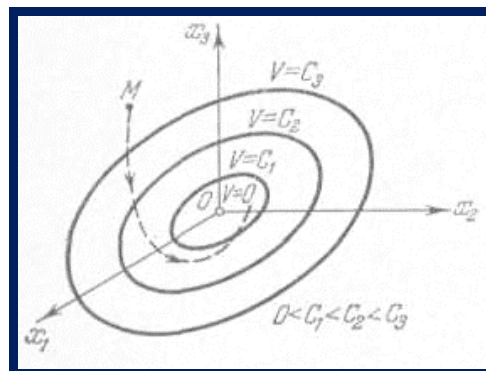


Рис.5.1.1

⁵⁰ Wolfgang Altmann, Practical Process Control for Engineers and Technicians: Jordan Hill, Oxford 2005, p.p. 455

Возьмем теперь производную от функции Ляпунова по времени. Согласно

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n,$$

где X_1, X_2, \dots, X_n – правые части уравнений (5.1.1) системы автоматического регулирования, представляющие собой заданные функции от отклонений x_1, x_2, \dots, x_n , и (5.1.2)

$$\frac{dV}{dt} = 2a^2 x_1 X_1(x_1, x_2, x_3) + 2b^2 x_2 X_2(x_1, x_2, x_3) + 2c^2 x_3 X_3(x_1, x_2, x_3) = W(x_1, x_2, x_3),$$

где функции X_1, X_2, X_3 берутся из заданных уравнений системы регулирования (5.1.1).

Если полученная таким путем функция $W(x_1, x_2, x_3)$ окажется знакоопределенной отрицательной, т. е. если

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad (5.1.3)$$

во всех точках исследуемого фазового пространства, кроме одного только начала координат, где

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (\text{при } x_1 = x_2 = x_3 = 0),$$

то при любых начальных условиях изображающая точка M (рис.5.1.1) вследствие (5.1.3) будет двигаться в сторону уменьшения значения V , т.е. будет пересекать эллипсоиды, изображенные на рис.5.1.1, извне внутрь. В результате с течением времени изображающая точка M будет стремиться к началу координат O фазового пространства и уже никак не сможет выйти за пределы тех эллипсоидов, в которые она проникла.

Это и означает затухание всех отклонений x_1, x_2, x_3 в переходном процессе с течением времени. Таким образом, установлена устойчивость данной системы регулирования, что иллюстрирует справедливость теоремы для системы третьего порядка (в случае знакоопределенной функции W).

Отсюда вытекает справедливость теоремы и в общем случае. Рассуждения остаются аналогичными, только вместо трех уравнений (5.1.1) будет n уравнений. Как и раньше, для любой знакоопределенной положительной функции Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ получим некоторые замкнутые поверхности, окружающие начало координат (рис.5.1.1), но уже не в обычном трехмерном, а в n -мерном фазовом пространстве (их иногда называют гиперповерхностями). Поэтому, если производная $\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ окажется знакоопределенной отрицательной, то траектория изображающей точки M в n -мерном пространстве при любых начальных условиях с течением времени будет пересекать указанные поверхности только извне внутрь, что и свидетельствует об устойчивости данной системы.

Если же функция W будет не знакоопределенной, а знакопостоянной, то очевидно, что траектория изображающей точки M не везде будет пересекать поверхности $V=C$, а может их касаться в тех точках, где W обращается в нуль

(помимо начала координат). Но так как во всех других местах фазового пространства функция W имеет один и тот же знак, вследствие чего изображающая точка может идти только извне внутрь поверхности $V=C$, то при решении задачи остается только проверить, не «застрянет» ли изображающая точка там, где $W=0$.

Задания 5.2. Рассмотрим следующую схему системы автоматического регулирования, представленную на рис. 5.2.1.а.

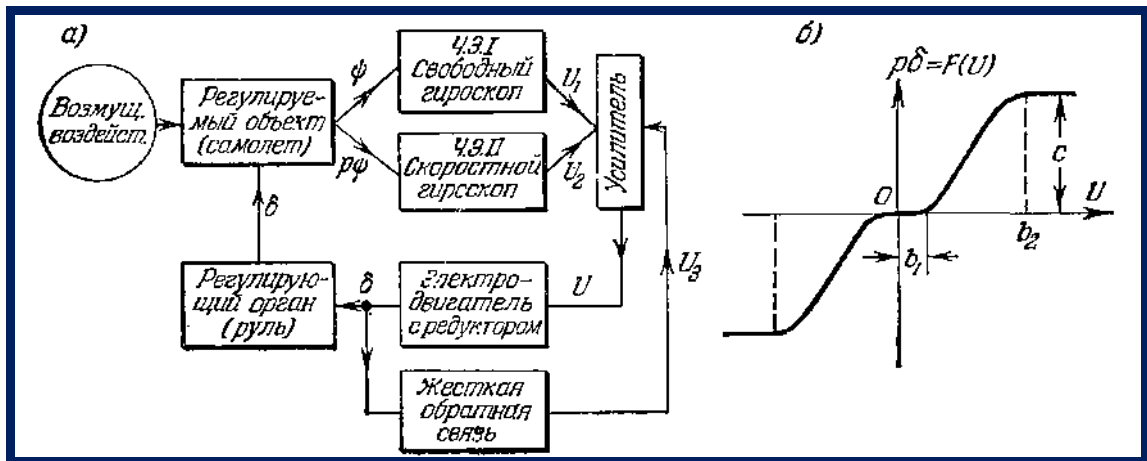


Рис.5.2.1

Пусть все звенья системы являются линейными, за исключением электродвигателя (с редуктором), для которого будем рассматривать его реальную характеристику (рис.5.2.1,б). Она может иметь произвольное криволинейное очертание с зоной застоя (при $|U| < b_1$) и с зоной насыщения (при $|U| < b_2$). Наклон характеристики и ее криволинейность могут быть любыми, лишь бы только соблюдались условия

$$\frac{dF}{dU} \geq 0, F > 0 \text{ при } U > b_1 \text{ и } F < 0 \text{ при } U < -b_1. \quad (5.2.1)$$

Требуется найти условия устойчивости данной системы автоматического регулирования.

Уравнение самолета как регулируемого объекта в грубо упрощенном виде будет

$$(T_1 p + 1) p \psi = -k_1 \delta, \quad (5.2.2)$$

где ψ – отклонение курсового угла самолета, δ – отклонение руля.

Уравнения чувствительных элементов (гироскопов с потенциометрами):

$$U_1 = k_2 \psi, \quad U_2 = k_3 p \psi. \quad (5.2.3)$$

Уравнение обратной связи

$$U_3 = k_4 \delta. \quad (5.2.4)$$

Уравнение усилителя

$$U = k_5 U_1 + k_6 U_2 - k_7 U_3. \quad (5.2.5)$$

Уравнение электродвигателя с редуктором и рулем

$$p\delta = F(U), \quad (5.2.6)$$

где $F(U)$ задается графиком рис.5.2.1,б.

Уравнения (5.2.3), (5.2.4), и (5.2.5) можно свести к одному:

$$U = k_{\psi} \psi + k_{p\psi} p\psi - k_{oc} \delta, \quad (5.2.7)$$

где

$$k_{\psi} = k_2 k_5, \quad k_{p\psi} = k_3 k_6, \quad k_{oc} = k_4 k_7.$$

Введем новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{T_1 k_1} p\psi + \frac{1}{T_1} \delta, & x_2 &= -\frac{1}{T_1} \delta, \\ x_3 &= \frac{1}{T_1 k_1 k_{p\psi}} U = \frac{k_{\psi}}{T_1 k_1 k_{p\psi}} \psi + \frac{1}{T_1 k_1} p\psi - \frac{k_{oc}}{T_1 k_1 k_{p\psi}} \delta \end{aligned} \right\} \quad (5.2.8)$$

и безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{T_1}. \quad (5.2.9)$$

С введением этих переменных дифференциальные уравнения всей системы (5.2.2), (5.2.6), (5.2.7) преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -x_1 + f(x_3), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -f(x_3), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= (\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - r f(x_3), \end{aligned} \right\} \quad (5.2.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{T_1 k_{\psi}}{k_{p\psi}}, & r &= \frac{k_{\psi}}{k_1 k_{p\psi}}, \\ f(x_3) &= F(T_1 k_1 k_{p\psi} x_3), \end{aligned} \right\} \quad (5.2.11)$$

т. е. функция $f(x_3)$ имеет все те же свойства, что и заданная функция $F(U)$ (рис.5.2.1,б), и отличается лишь масштабом чертежа по оси абсцисс в связи с заменой переменной U на x_3 согласно третьему из равенств (5.2.8).

Установившийся процесс полета при данной системе согласно (5.2.2), (5.2.6), (5.2.8) и графику рис.5.2.1,б будет иметь место при

$$\delta = 0, \quad p\psi = 0, \quad |\psi| < \frac{b_1}{k_{p\psi}}, \quad (5.2.12)$$

т. е. наличие зоны застоя двигателя приводит к тому, что в установившемся процессе курсовой угол может принять любое постоянное значение в пределах (5.2.12).

В новых переменных (5.2.8) установившийся процесс полета определяется значениями:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad |x_3| < \frac{b_1}{T_1 k_1 k_{p\psi}}, \quad (5.2.13)$$

чему соответствует любая точка отрезка AB в фазовом пространстве (рис.5.2.2,а).

При отыскании условий устойчивости рассмотрим два случая: $\gamma > 1$ и $0 < \gamma < 1$.

Случай $\gamma > 1$. Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{\gamma-1}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3. \quad (5.2.14)$$

Здесь интеграл будет всегда положительным, так как функция $f(x_3)$ нечетная (см.условие (5.2.1)), Поэтому V есть знакоопределенная положительная функция, если $\gamma > 1$, обращающаяся в нуль на отрезке установившегося

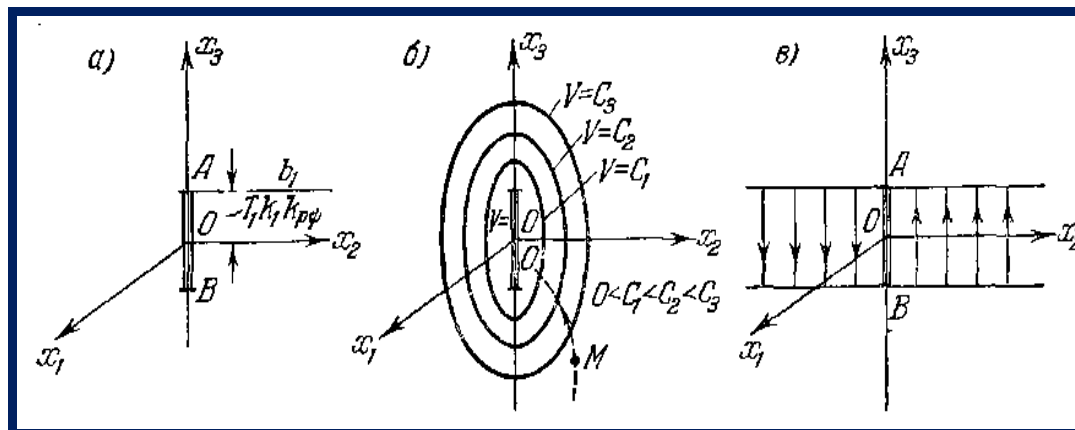


Рис.5.2.2

процесса AB (рис.5.2.2), Поверхности $V(x_1, x_2, x_3) = C$ окружают этот отрезок (рис.5.2.2,б), стягиваясь к нему с уменьшением C .

Составим производную от функции Ляпунова:

$$W = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\tau},$$

причем частные производные возьмем из (5.2.14), а производные по безразмерному времени – из уравнений системы (5.2.10). Тогда

$$W = -(\gamma-1)x_1^2 + (\gamma-1)x_1 f(x_3) - \gamma x_2 f(x_3) + f(x_3)[(\gamma-1)x_1 + \gamma x_2 - r f(x_3)].$$

Представим это в виде

$$W = -(\gamma-1)[f(x_3) - x_1]^2 - (r-\gamma+1)[f(x_3)]^2. \quad (5.2.15)$$

Эта функция W знакопостоянная, так как она не включает в себя координату x_2 , а потому обращается в нуль не только на отрезке установившегося процесса AB , а на всей полосе шириной AB в плоскости

x_2, x_3 (рис.5.2.2,в). Но вне этой полосы согласно (5.2.15) она будет всюду отрицательной при

$$r > \gamma - 1, \text{ если } \gamma > 1. \quad (5.2.16)$$

Поэтому согласно теореме Ляпунова об устойчивости выражение (5.2.16) является достаточным условием устойчивости рассматриваемой нелинейной системы самолета с курсовым автопилотом (при любой кривизне и любом наклоне характеристики двигателя, имеющей вид рис.5.2.1,б).

Траектория изображающей точки M будет пересекать поверхности $V = C$ извне внутрь везде, где $W = \frac{dV}{d\tau} < 0$. Нужно только проверить, не «застрянет» ли изображающая точка M там, где W обращается в нуль (помимо отрезка установившегося процесса AB). В данном случае речь идет о том, не останется ли изображающая точка на полосе (показанной на рис.5.2.2,в), где $W = 0$, если она случайно на нее попадет.

Для решения этого вопроса найдем проекции скорости изображающей точки $M \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}$, когда эта точка находится в любом месте указанной полосы. Поскольку там

$$x_1 = 0, \quad |x_3| < \frac{b_1}{T_1 k_1 k_{p\psi}}, \quad f(x_3) = 0,$$

то искомые проекции скорости согласно (5.2.10) будут

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = \gamma x_2.$$

Таким образом, если изображающая точка M попадет на указанную полосу вне отрезка AB (рис.5.2.2,в), то она не останется в ней, а пройдет ее поперек по прямой, параллельной оси x_3 , с постоянной скоростью, равной γx_2 , как показано стрелками на рис.5.2.2,в. Пройдя полосу, изображающая точка снова будет пересекать поверхности $V = C$ извне внутрь, т. е. данная система регулирования будет устойчивой.

Случай $0 < \gamma < 1$. Для этого случая возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1-\gamma}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3.$$

Производная от нее будет

$$W = \frac{dV}{d\tau} = -(1-\gamma)x_1^2 - r[f(x_3)]^2.$$

Отсюда аналогично предыдущему приходим к достаточному условию устойчивости системы в виде

$$r > 0, \text{ если } 0 < \gamma < 1. \quad (5.2.17)$$

Общий вывод. Полученные в данной задаче достаточные условия устойчивости (5.2.16) и (5.2.17) после подстановки выражений γ и r через параметры системы (5.2.11) принимают вид соответственно

$$k_{oc} > (T_1 k_{p\psi} - k_{p\psi}) k_1, \text{ если } k_{p\psi} < T_1 k_{\psi},$$

$$k_{oc} > 0, \quad \text{если } k_{p\psi} > T_1 k_{\psi}.$$

Первое из этих условий устойчивости говорит о том, что передаточное число обратной связи надо сделать достаточно большим, если производная $p\psi$ введена в закон регулирования недостаточно интенсивно. Из второго же условия устойчивости следует, что система будет устойчива при любой, обратной связи, если передаточное число по производной достаточно велико.

Как видим, данные условия устойчивости не зависят от формы характеристики двигателя (рис.5.2.1,б), т. е. они одинаковы при любой кривизне, любом наклоне и любой зоне застоя (в том числе и при однозначной релейной характеристике двигателя постоянной скорости, а также и при линейной характеристике). Такие условия называются условиями абсолютной устойчивости. Они гарантируют, что при их выполнении система будет наверняка устойчива при любой нелинейности с ограничением лишь (5.2.1).

Контрольные вопросы:

1. Вы решили воспользоваться методом расположения полюсов для синтеза наблюдателя полного порядка. С какой векторно-матричной моделью должна выполняться эта операция, если ВММ объекта управления имеет вид
2. Какой из рассмотренных ранее алгоритмов используется для вычисления матрицы коэффициентов усиления оптимального фильтра?
3. При каких условиях матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана-Бьюси постоянна во времени?

Использованные литературы:

13. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
14. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
15. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.

6-практическое занятие: Синтез системы управления с регулятором состояния

Цель работы: Решение примеров по синтезу систем управления с регулятором состояния

Постановка задачи:

Задания 6.1. Для упругого электромеханического объекта, который рассмотрен выше, синтезируем регулятор состояния.

При построении ВММ откажемся от учета инерционности преобразователя и введем следующие компоненты вектора состояния $x^T = [\Omega_{MX} \quad F \quad \Omega_{ДВ} \quad i]$, где Ω_{MX} – скорость вращения платформы, F – усилие, под действием которого вращается платформа, $\Omega_{ДВ}$ – скорость вращения электродвигателя, i – ток электродвигателя.⁵¹

Таблица 6.1.1.

Параметры электромеханического объекта

		Электродвигатель				Механизм	
Параметр	K_T	$R_{я}$	$T_{я}$	$C_{дв}$	$J_{дв}$	$C_{мх}$	$J_{мх}$
Единицы измерения	п	О м	с	В*с	кг*м ²	Н*м/ра д	кг*м ²
Численные значения	6	3.1 5	0.025	0.16	0.015	0.65	0.1

Векторно-матричная модель объекта с учетом численных значений параметров преобразователя, электродвигателя и механизма, приведенных в табл. 6.1.1, принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6.5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -43.3 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 76.2 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot x.$$

Выберем желаемый характеристический полином

$$p(\lambda) = 14641 + 3478.071\lambda + 413.1198\lambda^2 + 28.7444\lambda^3 + \lambda^4,$$

которому соответствует эталонная модель, представленная в канонической форме

⁵¹ Wolfgang Altmann, Practical Process Control for Engineers and Technicians: Jordan Hill, Oxford 2005, p. 465.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -14641 & -3478.1 & -413.12 & -28.744 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

Вычислительные эксперименты, выполненные с помощью компьютерного комплекса функционального проектирования СУ, позволили получить расчетные параметры регулятора состояния в виде значений коэффициентов обратных связей по вектору состояния, которые приведены во второй строке табл.6.1.2.

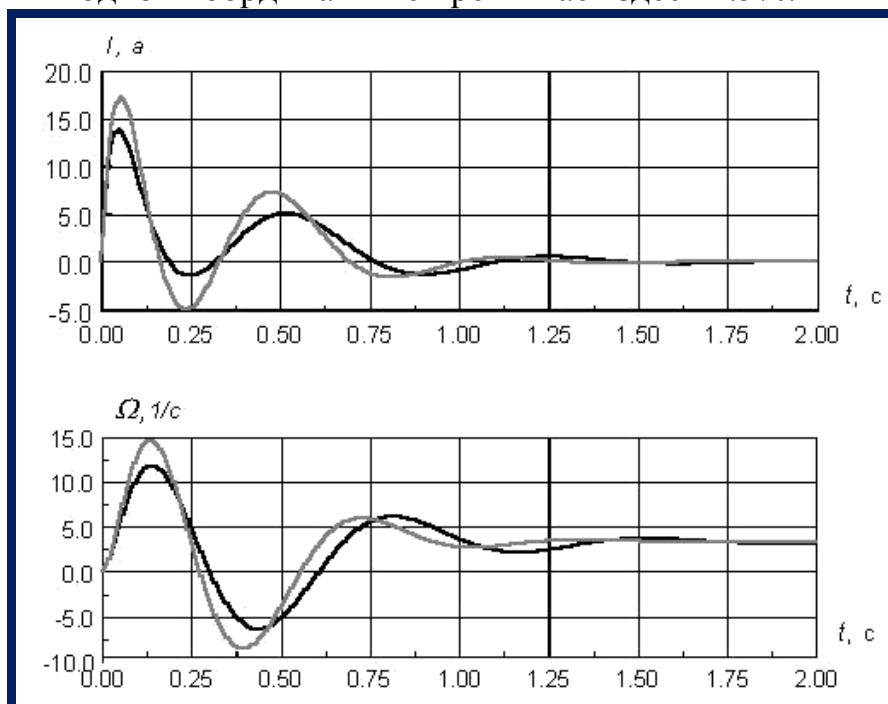
Таблица 6.1.2

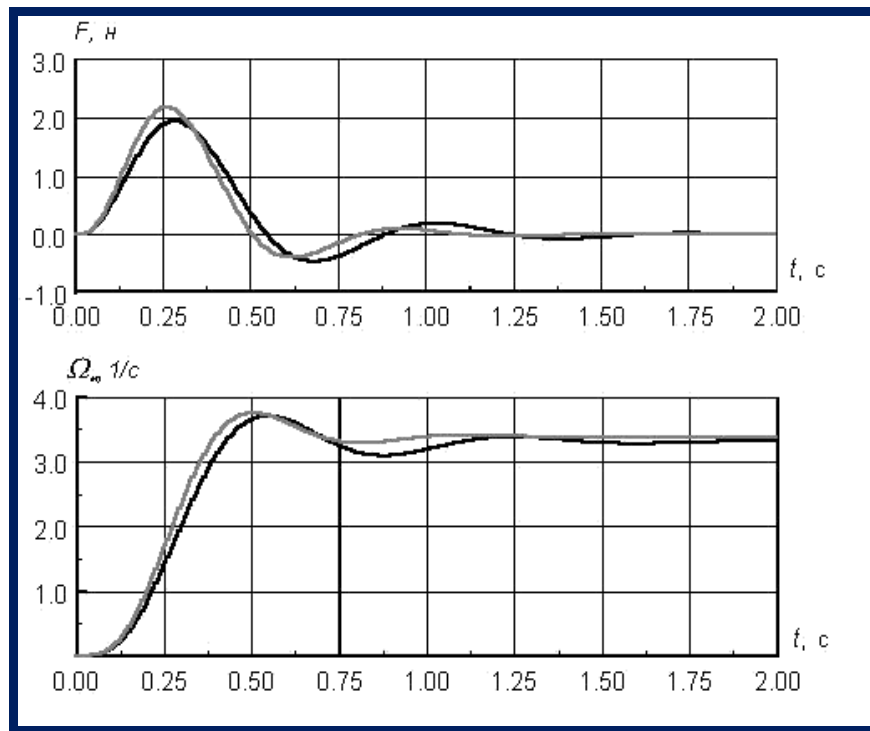
Параметры регулятора состояния

	K_1	K_2	K_3	K_4
Расчетные значения	-2.479	-2.685	-0.451	0.148
Значения реализации	-2.5	-2.5	-0.5	0

Анализ полученных результатов показывает, что для обеспечения заданного качества динамических характеристик СУ электромеханическим объектом необходимо введение слабой положительной обратной связи по току электродвигателя, что нежелательно. В этой связи было принято решение в дальнейшем отказаться от реализации обратной связи по току, а значения других коэффициентов округлить в допустимых пределах. Выбранные значения параметров дальнейшей реализации регулятора состояния приведены в третьей строке табл.6.1.2.

Обоснованность принятого решения доказывают приведенные на рис.6.1.1 предварительные результаты вычислительных экспериментов с моделями синтезированных систем управления. Суммарное среднеквадратичное отклонения выходной координаты не превышает здесь 1.5%.





- расчетные параметры регулятора состояния
 - параметры реализации

Рис.6.1.1. Сравнительные динамические характеристики СУ

Контрольные вопросы:

1. При каких условиях матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана-Бьюси постоянна во времени?
2. Какой из рассмотренных ранее алгоритмов используется для вычисления матрицы коэффициентов усиления оптимального фильтра?
3. При каких условиях матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана-Бьюси постоянна во времени?

Использованная литература:

16. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
17. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
18. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.

**7- практическое занятие:
Детерминированный синтез систем управления**

Цель работы: Примеры по синтезу оптимального управления

Постановка задачи:

Задания 7.1. Для электромеханического объекта с упругой передачей механического движения от вала электродвигателя к валу рабочего механизма, численные значения параметров которого приведены в табл. 7.1.1, выполним синтез оптимального управления и безынерционного регулятора состояния.

Таблица 7.1.1

Параметры электромеханического объекта

Параметр	Электродвигатель					Механизм	
	K_T п	$R_{я}$	$T_{я}$	$C_{дв}$	$J_{дв}$	$C_{мх}$	$J_{мх}$
Единицы измерения	–	О м	с	В*с	кг*м ²	Н*м/ра д	кг*м ²
Численные значения	7	3.1 5	0.05	0.16	0.015	0.65	0.05

Результатом серии вычислительных экспериментов явились:

- внутреннее содержание весовых матриц Q , и R

$$diag Q = [0.001 \ 0.001 \ 0.005 \ 0.32]; \quad R = [1.0],$$

- временные характеристики

$$K_0(t) = -R^{-1}(t)B(t)P(t),$$

полученные в результате решения уравнения Риккати в обратном времени, которые приведены на рис. 7.1.1

Для постановки имитационных экспериментов используем приведенные в табл.7.1.2 постоянные расчетные значения коэффициентов обратных связей, соответствующие $t=0$, и значения реализации.

Таблица 7.1.2

Значения коэффициентов обратных связей

	K_1	K_2	K_3	K_4
Расчетные значения	- 0.480285	-0.97471	-0.00073	-0.20381
Значения реализации	-0.5	-1.0	0	-0.2

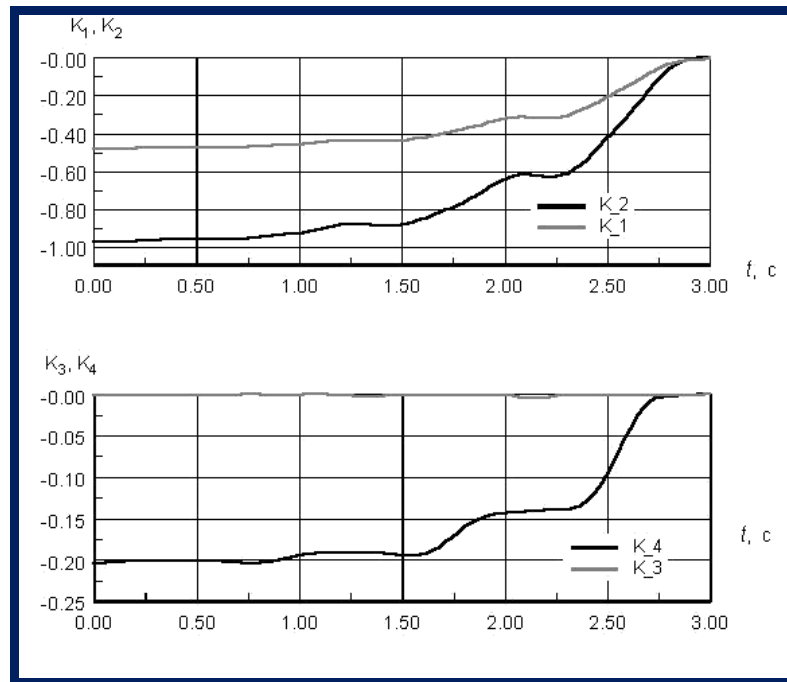


Рис. 7.1.1. Динамические характеристики $K_0(t)$

Сравнительные динамические характеристики (см. рис.7.1.2), систем управления, в которых параметры регулятора соответствуют значениям реализации коэффициентов обратных связей (табл.7.1.2) и значениям регулятора состояния, синтезированного при использовании в качестве критерия качества биномиального распределения корней ($\Omega_0 = 8.5c^{-1}$), подтверждают корректность алгоритмического и программного обеспечения синтеза оптимального управления.

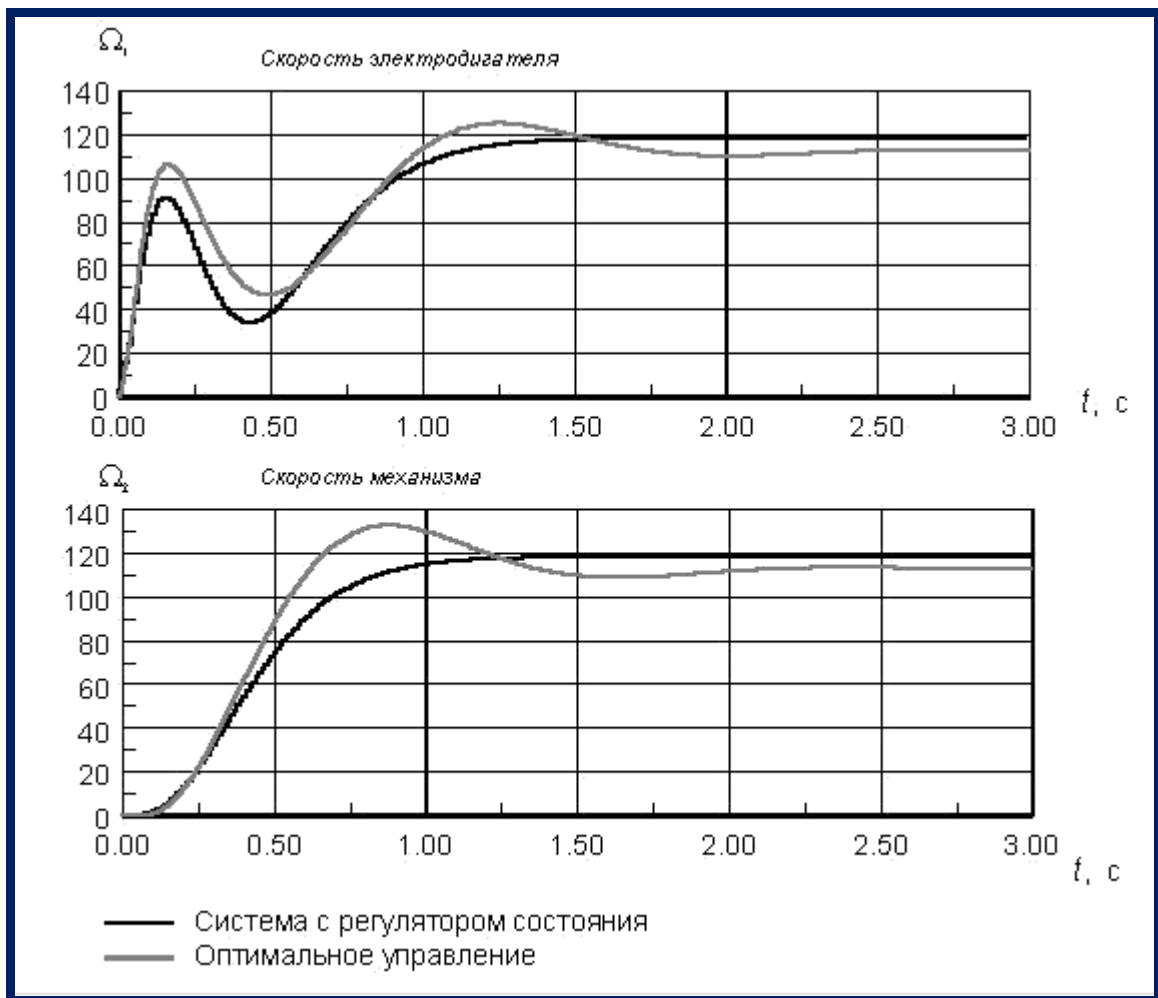


Рис. 7.1.2. Сравнительные динамические характеристики систем управления с регулятором состояния

Контрольные вопросы:

1. Какой из рассмотренных ранее алгоритмов используется для вычисления матрицы коэффициентов усиления оптимального фильтра?
2. Для достижения каких целей и из каких условий выбирается матрица L наблюдателя полного порядка?
3. В какой последовательности следует выполнять проектные операции синтеза регулятора и наблюдателя состояния?
4. Вы решили воспользоваться методом расположения полюсов для синтеза наблюдателя полного порядка. С какой векторно-матричной моделью должна выполняться эта операция, если ВММ объекта управления имеет вид

Использованные литературы:

1. Richard C. Dorf,. Robert H. Bishop *Modern Control Systems* , Twelfth edition 2010. – 890 с.
2. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
3. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.

V. БАНК КЕЙСОВ

Кейс №1: Бетонный завод фирмы «ТЕКА» производит бетон различных марок. В зависимости от заказа, может производить бетон для дорог, бетонных плит, фундаментов, а также песко-бетон для различных отделочных работ. Имеет 5 резервуара, для воды, песка, цемента, щебня и добавки. Весь процесс полностью автоматизирован, и управляется контроллером. Весь процесс контролируется оператором через Персональный Компьютер. В процессе работы возникла проблема. Выходит, ошибка на экране монитора: *«Резервуар воды полный. Освободить резервуар»*. Получается, что по факту резервуар пустой, но сигнал идет что он полный, в итоге автоматический режим не работает. Приходится работать в ручном режиме. Вопрос: Как вы думаете, какие факторы могли повлиять появление такого рода ошибки?

Бетонный завод фирмы «ТЕКА»



Последовательность решения задачи:

Этапы	Задачи для выполнения
1.	Изучите весь технологический процесс
2.	Подробно изучить схему всего производства, а также все устройства
3.	Проверьте работоспособность всех датчиков весов воды, а также прибор, который соединён с весами воды
4.	Проверьте связь между прибором весов воды и контроллером.
5.	Если прибор вышел из строя, замените его новым прибором, и повторите всю последовательность и примите самый доступный решения задачи .

Кейс №2: Сталепрокатный завод производит стальные листы трех различных размеров: 100 дюймов, 80 дюймов и 55 дюймов. Поступил заказ на стальные листы размером 45, 30 и 18 дюймов в количестве 150, 200 и 185 штук соответственно. Каким образом компания должна разрезать стальные листы, чтобы минимизировать отходы? Учтите, что желательно также при раскрое не получать слишком много лишних листов с размерами, заданными данным заказчиком. Приведите наилучшее решение для случая, когда заказанные в этот раз размеры встречаются при заказах довольно часто и для случая, когда полученный заказ совершенно нестандартный.

Последовательность решения задачи:

Этапы	Задачи для выполнения
1.	Изучите весь технологический процесс
2.	Подробно изучите схему управление производства, а также все её устройства
3.	Проверьте работоспособность всех датчиков
4.	Найдите решение для разработки стандартного заказа
5.	Найдите самое оптимальное решения задачи .

Сталепрокатный завод

Сталепрокатный завод						
Вариант раскроя	Лист проката	Размер листа, дюймов			Остаток	Число листов
		45	30	18		
1	100	2	0	0	10	0
2	100	1	1	1	7	0
3	100	1	0	3	1	44
4	100	0	3	0	10	0
5	100	0	2	2	4	0
6	100	0	1	3	16	0
7	100	0	0	5	10	0
8	80	1	1	0	5	106
9	80	1	0	1	17	0
10	80	0	2	1	2	47
11	80	0	1	2	14	0
12	80	0	0	4	8	0
13	55	1	0	0	10	0
14	55	0	1	1	7	0
15	55	0	0	3	1	2
	Получено листов	150	200	185	670	Всего
	Заказ	150	200	185		

Кейс №3: При эксплуатации цеха воденного охлаждения, система автоматического регулирования уровня вышла из стабильной работы. Основными причинами неустойчивости являются неправильно рассчитанные параметры регулятора.

Задание кейса

1: Проанализируйте систему управления

2: Рассчитайте переходную функцию системы.

Исходные данные:

А) экспериментальная переходная функция ОУ.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
$h(t)$	0	0.01	0.11	0.22	0.33	0.38	0.45	0.55	0.68	0.73	0.77	0.8	0.85	0.88	0.88

Этапы работы над ситуацией в аудитории

Этапы	Содержание работы
1-этап	индивидуальное изучение текста ситуации и проанализировать ситуацию.
2-этап	разобраться в сути проблем, выделять варианты правильных и ошибочных решений.
3-этап	работа в составе малой группы, предложить возможные решения и выбрать лучшее из них, обсуждать с членами группы выбирать оптимального решения, принимать коллективные решения.
4-этап	представление «решений» каждой малой группы, общая дискуссия, вопросы, выступление преподавателя, его анализ ситуации.

VI. ТЕМЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ

Слушатель во время подготовки самостоятельной работы по данному модулю должен:

- изучат главы и содержание учебника и учебных пособий по предмету;
- освоить по раздаточному материалу определенные части лекций;
- работать над темами модуля с использованием специальной литературы;
- глубоко изучить главы предмета, связанные с выполнением учебно-научной работой;
- использовать интерактивные методы обучения, дистанционное обучение.

Темы самостоятельных работ

1. Динамические и статические системы. Уравнения состояния линейных систем.
2. Передаточные функции и их определение по уравнениям состояния. Передаточные функции линейных систем. Алгоритмы вычисления передаточных функций.
3. Уравнения состояния при соединении систем. Независимые подсистемы. Последовательное соединение. Соединение с обратной связью.
4. Диагональная и жорданова формы. Простые вещественные собственные числа. Простые мнимые собственные числа. Общий случай. Вещественная форма Жордана.
5. Управляемое каноническое представление. Наблюдаемое каноническое представление
6. Преобразование уравнений состояния к диагональной и блочно-диагональной формам. Простые вещественные собственные числа. Простые мнимые собственные числа.
7. Преобразование уравнений состояния к управляемой и наблюдаемой каноническим формам. О возможности преобразования матрицы к форме Фробениуса. Управляемое каноническое представление. Наблюдаемое каноническое представление.
8. Определение уравнений состояния по передаточной функции. Управляемое каноническое представление. Наблюдаемое каноническое представление.
9. Поле фазовых скоростей. Классификация особых точек. Вектор фазовой скорости. Состояния равновесия системы. Декомпозиция пространства состояний.
10. Виды фазовых портретов для систем второго порядка. Фазовые портреты при диагональной (жордановой) форме матрицы. Фазовые портреты при канонической форме фазовой переменной.
11. Решение уравнений состояния. Формула Коши. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения. Свойства переходной матрицы

12. Дискретные модели непрерывных систем. Постановка задачи дискретизации. Формулы перехода к разностным уравнениям.
13. Методы вычисления матричной экспоненты. Точные методы. Приближенные методы.
14. Устойчивость дискретных моделей. Связь с методами численного интегрирования. Условия устойчивости. Устойчивость методов численного интегрирования.
15. Управляемость и наблюдаемость линейных систем. Критерии управляемости. Критерии наблюдаемости. Теорема дуальности.
16. Оценивание состояния объекта и возмущений.
17. Наблюдатели состояния. Наблюдатели пониженного порядка. Оценивание возмущений.
18. Синтез модальных и терминальных регуляторов. Модальное управление по выходу объекта. Теорема разделения. Терминальное управление.
19. Особенности процессов в нелинейных системах. Предельные циклы. Автоколебания. Состояния равновесия. Пересечение траекторий. Скользящие режимы. Влияние внешних воздействий
20. Методы исследования нелинейных систем. Методы фазового пространства. Метод фазовой плоскости. Метод точечных отображений. Условия существования предельных циклов для систем второго порядка.
21. Метод функций Ляпунова. Основные определения. Устойчивость множеств и частичная устойчивость. Функции Ляпунова. Устойчивость непрерывных систем. Устойчивость дискретных систем.
22. Методы теории абсолютной устойчивости. Задача абсолютной устойчивости. Круговой критерий. Критерий В.М. Попова.
23. Исследование скользящих режимов. Метод эквивалентного управления. Понятие о скользящих режимах. Определение движения в скользящем режиме.
24. Методы адаптивного управления. Структура адаптивных систем управления. Методика решения задач адаптивного управления.
25. Управление синхронизацией систем на основе адаптивных наблюдателей. Идея управляемой синхронизации. Постановка задачи и схема решения. Условия адаптивной синхронизации. Передача сообщений с использованием систем Чуа.

VII. ГЛОССАРИЙ

Term / Термин	Пояснение на русском	Description in English
Алгоритм / Algorithm	Набор (математических) инструкций или процедур для выполнения конкретной задачи, такие как определение меры, принимаемые системой автоматизации.	A set of (mathematical) instructions or procedures for carrying out a specific task such as defining the steps taken by an automation system.
Барьер / Barrier	Перегородка или разделение, используемый для изоляции или изоляции электрического схемы или электрические дуги (как определено в NEMA Standard Pub. No. ICS 2, 1988).	A partition or separation used for the insulation or isolation of electric circuits or electric arcs (as defined in NEMA Standard Pub. No. ICS 2, 1988).
Бод / Baud	Единица скорости передачи сигналов равно числу дискретных состояний или сигнала событий в секунду. Там, где один бит кодируется на каждой сигнализации события, число бод совпадает с числом бит / с. См дибит (стр).	A unit of signaling speed equal to the number of discrete conditions or signal events per second. Where one bit is encoded on each signaling event, the number of baud is the same as the number of bit/s. See dibit (page).
Булева алгебра / Boolean algebra	Алгебраический метод манипулирования логических уравнений.	An algebraic method of manipulating logic equations.
Газоанализатор / Analyzer	Прибор, предназначенный для получения информации о значении концентрации измеряемого компонента или суммы компонентов в анализируемой газовой смеси.	An instrument designed to obtain information about the value of the concentration of the measured component or the amount of components in the test gas mixture.
Гибкая система управления / Flexible control system	Перенастраиваемая в широком диапазоне система управления, создаваемая на базе электронно-вычислительных машин с комплектом программ	Readjusted in a wide range of control system, created on the basis of electron - computers with a set of control programs, the address driving mechanisms of control signals for the given

	управления, адресуемых сигналы управления приводным механизмам для обеспечения заданных законов движения исполнительных звеньев.	laws of motion actuators.
Датчик / Sensor	Средство измерения, преобразующее ту или иную физическую величину (например, температуру, скорость, давление, электрическое напряжение и др.) в сигнал для регистрации, передачи, обработки, хранения этой информации.	Measuring instrument, transforming one or another physical quantity (eg, temperature, velocity, pressure, voltage, and others.) Into a signal for recording, transmission, processing and storage of this information
Двоичный / Binary	Базовая - 2 система нумерации (используя только цифры 0 и 1) .	A base-2 numbering system (using only the digits 0 and 1).
Действительная производительность / Actual performance	Это производительность действующих автоматов и автоматических линий. Реальный уровень технологической, цикловой и фактической производительности характеризует степень реализации замысла проектировщиков линии и может значительно отличаться от проектных значений, а также быть переменным во времени эксплуатации.	This is the performance of existing machines and automatic lines. The actual level of the process, the cycle and the actual performance characterizes the degree of realization of the designers design the line and may significantly differ from the design values, as well as to be variable in the time of operation
Динамическая погрешность / Dynamic error	Это добавочная погрешность измерительного преобразователя, возникающая при измерение изменяющего во времени параметра	This extra error transducer that occurs when measuring changes over time parameter .
Динамической	Такой элемента называется	This element is called the

характеристики / Dynamic properties	зависимость изменения во времени выходной величины (X вых) в переходном режиме при определенном изменении входной величины.	dependence of the change in the output value of time (X out) in transition mode for a certain change in the input variable.
Единичное производство / A single production	Неопределенное множество не повторяющихся операций выполняемых одним исполнителем, Кзо больше 40.	Undefined set of non-recurring transactions carried out by a contractor , for more than 40 QSOs .
Жесткая система управления / Push rod system	Не переналаживаемая или переналаживаемая в узких пределах система управления, создаваемая на базе кинематических цепей машин и механизмов, обеспечивающих заданные законы движения исполнительных звеньев.	Not readjusted or readjusted in a narrow range management system, created on the basis of the machinery of the kinematic chain , providing a predetermined laws of motion actuators.
Завод / Factory	Объединение цехов и участков по видам совместно выпускаемой продукции.	Combining shops and sites by type of co- products.
Запасная батарея / Battery backup	Батарея или набор батарей, которые будут обеспечивать питание памяти только тогда, когда основной источник питания выключен .	A battery or set of batteries that will provide power to memory only when the main power source is off.
Канал / Channel	Путь для сигнала. Несколько каналов могут совместно использовать общую связь.	A path for a signal. Several channels may share a common link
Комбинационная логика / Combinational logic	Логика , в котором состояние каждого выхода контролируется только состояниями входы и задержки переключения переходов , возникающие в логическом пути . Сравнить последовательной логики	Logic in which the state of each output is controlled only by the states of inputs and the switching-transition delays encountered in the logic path. Compare sequential logic
Конкурентоспособность / competitiveness	Это совокупность показателей качества и стоимости товаров, определяющая их предпочтительность для	This set of indicators of the quality and value of the goods is determined by their preference for the consumer .

	потребителя.	
Линия / Line	Расположение оборудования в порядке выполнения операций.	The location of the equipment in the order of operations
Маршрутное описание технологического процесса / Route description of the process	Сокращенное описание всех технологических операций в маршрутной карте в последовательности их выполнения без указания переходов и технологических режимов.	Short description of all process steps in the route map in order of their performance without transitions and technological modes.
Массовое производство / Mass production	Одна операция выполняется одним или несколькими исполнителями в течении всего отчетного периода, меньше 1.	One operation is performed by one or more performers during the reporting period , the is less than 1.
Метод регулирования / Control method	Заключается в достижении точности замыкающего звена за счет регулирования одного или нескольких составляющих звеньев.	It is to achieve the accuracy of the closing level by adjusting one or more of the constituent units .
Механизация / Mechanization	применение энергии неживой природы в производственных процессах, управляемых людьми.	The use of inanimate nature of energy in the production process , controlled by people.
Модифицирование / Modification	Приспособление изделия к новым условиям работы без изменения конструкции: хладостойкие материалы, антикоррозионные материалы, дополнительные системы и способы подготовки рабочего тела, специальные покрытия, уплотнения и т.п.	Device products to the new conditions of work without changing the design : cold-resistant materials , anti-corrosion materials , additional systems and methods for the preparation of the working fluid , special coatings , seals , etc.
Объекты автоматизации / Automation objects	Объекты автоматизации являются объектами СА Process Automation, что дизайнеры используют контент для создания контента. Объекты автоматизации включают в себя календарь, пользовательский значок, пользовательский оператор, набор данных, форма запроса	Automation objects are the CA Process Automation objects that content designers use to create content. Automation objects include calendar, custom icon, custom operator, dataset, interaction request form, package, process, process watch, resources, schedule, and start

	взаимодействия, упаковка, процесс, процесс часы, ресурсы, график, и начать форму запроса.	request form.
Плата (карта) / Board (card)	1) печатная плата. 2) Узел печатных печатных плат – в ощущение, что (печатная) плата физически основным компонентом Печатная плата в сборе.	1) A printed-circuit board. 2) A printed-circuit-board assembly — in the sense that the (printed-circuit) board is physically the main component of a printed-circuit-board assembly.
Пустой блок пространства / Blank unit space	Блок пространство не оборудован, чтобы принять будущий блок (как определено в NEMA Стандартный Pub	Unit space not equipped to accept a future unit (as defined in NEMA Standard Pub. No. ICS 2, 1988).
Раздвоенный / Bifurcated	Что-то, что ответвляется в 2-х ветвей (например, раздвоенная терминал).	Something that branches off into 2 branches (e.g., a bifurcated terminal).
Точка останова / breakpoint	Точки останова отладки помощи, которая приостанавливает выполнение запущенного процесса на Операторы, которые устанавливаются с точки останова. Точек останова позволяет дизайнерам контента просмотрите данные и схема последовательности операций процесса для проверки правильного поведения до завершения их изменения.	A breakpoint is a debugging aid that pauses the execution of a running process at the operators that are set with a breakpoint. A breakpoint lets content designers inspect the data and flow of a process to validate the correct behavior before finalizing their changes.

VIII. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основные литературы:

4. Richard C. Dorf, Robert H. Bishop *Modern Control Systems*, Twelfth edition 2010. – 890 с.
5. Ad Damen *Modern Control Theory* Prentice Hall 2002 460 с.
6. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
7. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
8. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
9. К.Ю.Поляков. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2008. - 80 с.

Ресурсы нтернета:

1. www.labview.ru
2. www.matlab.com
3. www.ziyonet.uz
4. www.edu.uz