`ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ
ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ
ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ
КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ
ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“МАТЕМАТИКА”
йўналиши

“АЛГЕБРАИК ТИЗИМЛАР”
модули бўйича
Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тошкент – 2016

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“АЛГЕБРАИК ТИЗИМЛАР”

модули бўйича

Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тошкент – 2016

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2016 йил 6 апрелидаги 137-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: ЎзМУ, **А.Х.Худойбердиев**

Тақризчи: **Manuel Ladra,**
Head of Deparrtment of "Algebra" of the University of Santiago de Compostela

Ўқув -услубий мажмуа ЎзМУнинг Университет кенгашининг 2016 йил 7-сентябрдаги 1-сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш.

Мазкур дастур Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2015 йил 12 июндаги “Олий таълим муассасаларининг раҳбар ва педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малакасини ошириш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ПФ-4732-сон Фармонидаги устувор йўналишлар мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни татбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир. “Алгебраик тизимлар” модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг катталиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни тадбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизимини самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ва амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет элнинг илғор тажрибаларни ўрганиш ва илмий-тадқиқот натижаларини таълим амалиётига тадбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидар. «Алгебраик тизимлар» модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

«Алгебрик тизимлар» курсининг мақсади тингловчиларни замонавий алгебраик тизимлар ва уларни ўқитишнинг замонавий технологиялари, таълимдаги инновациялар билан таништириш ва ана шу инновациялар ва технологиялардан маҳорат билан фойдаланиш малакасини шакллантиришдир.

Модулнинг мақсади ва вазифалари:

“**Алгебрик тизимлар**” **модулининг мақсади:** математика йўналиши бўйича педагог кадрларни қайта тайёрлаш ва малака ошириш курс тингловчиларини алгебранинг ривожланаётган замонавий соҳаларини ўқитишдаги замонавий педагогик ва инновацион технологиялар, модулли технологиялар ҳақидаги билимларини такомиллаштириш, бу борадаги муаммоларни аниқлаш, таҳлил этиш ва баҳолаш. Илмий тадқиқот натижаларини ўрганиш ва амалда қўллаш кўникма ва малакаларини шакллантириш.

“Алгебрик тизимлар” модулининг вазифалари:

•Тингловчиларга математиканинг янги илмий йўналишлари ва бу соҳалардаги олинган натижалар таҳлили, келиб чиқиш тарихи тўғрисида маълумотлар бериш, замонавий модулли технологияларидан фойдаланиб тингловчиларни мазкур йўналишда малакасини оширишга кўмаклашиш;

• Таълим-тарбия жараёнида модулли технологияларни қўллашнинг афзалликларини ёритиш ва тингловчиларда улардан фойдаланиш технологиялари билан таништириш;

•Математиканинг ривожланиш тенденцияларини таҳлил этиш ва юксак малакали мутахассис кадрлар тайёрлаш борасидаги ислоҳотларни амалга ошириш жараёнида илғор хориж тажрибасини ўрганиш, улардан самарали фойдаланиш маҳоратини шакллантиришдан иборат.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникмаси, малакаси ва компетенцияларига қўйиладиган талаблар:

“**Алгебрик тизимлар**” модулини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида**:**

Тингловчи:

- модуль,ўқитиш модулли, кредит,рейтинг тушунчаси;
- технологиялаштириш қоидалари, тамойиллар;
- назорат жараёнини ташкил этиш;
- интерфаол технологиялар ва улардан самарали фойдаланиш ҳақида **билимларга** эга бўлиши лозим;

Тингловчи:

- педагогик фаолият жараёнини модуллаштириш;
- назорат жараёнини тез ва самарали ўтказа олиш;
- назоратнинг турли шаклларидан самарали фойдаланиш;
- интерфаол методларни мақсадли равишда тўғри танлаш ва фойдаланиш ***кўникмаларини*** эгаллаши лозим;

Тингловчи:

- ўқув курсининг модулини тузиш;
- ахборотни структуралаштириш;
- талабаларнинг мустақил амалий фаолиятини ташкил этиш;
- кириш ва чиқиш назоратини ташкил этиш эришилган натижаларини таҳлил этиш;
- интерфаол методлардан фойдаланиш ***малакаларини*** эгаллаши лозим;

Тингловчи:

- ўз соҳасига оид ахборотни мантиқий блокларга ажратиш ва аниқ, лўнда, тушунарли равишда баён этиш;

- модулли ёндашув асосида ўқув жараёнини ташкил этиш;

- технологик ёндашув асосида таълим ва тарбия жараёнини бошқариш;

- коммуникативликни ва мустақил фаолиятни ташкил этиш юзасидан

компетенцияларига эга бўлиши лозим**.**

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар.

"**Алгебрик тизимлар**" модули маъруза ва амалий машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари ва илмий ютуқларни қўллаш назарда тутилган:

Назарий машғулотларда замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан фойдаланилади;

Ўтказиладиган амалий машғулотларда ва кўчма машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа модуллар билан боғлиқлиги ва узвийлиги.

"**Алгебрик тизимлар**" модули ўқув режадаги биринчи блок ва мутахассислик фанларининг барча соҳалари билан узвий боғланган ҳолда педагогларнинг умумий тайёргарлик даражасини оширишга хизмат қилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни.

Модулни ўзлаштириш орқали тингловчилар алгебранинг асосий мавзулари бўйича таълим жараёнини ташкил этишда технологик ёндашув асосларини ва бу борадаги илғор тажрибани, илмий ютуқларни ўрганадилар, уларни таҳлил этиш, амалда қўллаш ва баҳолашга доир касбий компетентликка эга бўладилар.

МОДУЛНИНГ МАЗМУНИ.

Алгебрани ўқитишда ишлатиладиган мавжуд амалий дастурлар, уларнинг бўлимлари, уларнинг ишлатилиши, Maple, Matematica, mathcard пакетлари. Математик дастурлар пакети Maple ёрдамида алгебрадан дарсларни ташкил қилиш. Алгебрадаги асосий тушунчаларни ва таърифларни киритиш методикаси, улардан фойдаланиш, уларнинг таҳлили. Акслантиришлар. Группалар. Қисм группалар. Нормал қисм группалар. Изоморфизм. Гомоморфизм. Халқа. Халқанинг умумий хоссалари. Халқанинг идеаллари. Майдон ва унинг хоссалари. Чекли майдон. Банах алгебраси. Гомоморфизмлар.

Коммутатив Банах алгебралари. Спектр ва резольвента. Идеаллар. Гелъфанд тасвирлари. С* алгебралар. Алгебраларнинг турлари ва уларнинг таснифлаш усуллари; бунда математиканинг амалий дастурлар пакетидан фойдаланиш. Алгебра ва сонлар назариясининг классик муаммолари ва ҳозирги кундаги долзарб масалалари. Замонавий алгебра муаммолари бўйича сўнгги йилларда хорижда ва республикамизда ўрганилаётган долзарб муаммолар ва уларнинг ечимлари таҳлили.

“Алгебрик тизимлар”
Модул бўйича соатлар тақсимоти.

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Модул мавзулари</th><th colspan="5">Тингловчининг ўқув юкламаси, соат</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Ҳаммаси</th><th colspan="3">Аудитория ўқув юкламаси</th><th rowspan="3">Мустақил таълим</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Жами</th><th colspan="2">жумладан</th></tr>
<tr><th>Назарий</th><th>Амалий машғулот</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Алгебра фани ривожланишининг қисқача тарихи ва замонавий математикадаги ўрни. Алгебраик тизим тушунчаси.</td><td>4</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Группа, ҳалқа ва майдонлар</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Ассоциатив алгебралар хақида тушунчалар.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Ноассоциатив алгебраларнинг турлари ва уларнинг таснифлаш усуллари.</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Алгебраик тизимларнинг физика, химия, биология, квант механикаси, криптография, компьютер технологиялари ва бошқа соҳалардаги тадбиқлари.</td><td>4</td><td>2</td><td></td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Замонавий алгебра муаммолари бўйича сўнгги йилларда хорижда ва республикамизда ўрганилаётган долзарб муаммолар ва уларнинг ечимларининг таҳлили.</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Жами:</td><td>24</td><td>20</td><td>8</td><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-мавзу: Группа, ҳалқа ва майдонлар.

Бинар амали. Яримгруппалар. Моноидлар. Даражалар ва йиғинди. Тескари элемент. Группалар, хоссалари ва мисоллар. Қисмгруппалар ва уларнинг хоссалари. Минимал қисмгруппалар. Циклик группалар ва уларнинг хоссалари. Халқа. Халқанинг умумий хоссалари. Мисоллар. Гомоморфизмлар ва ҳалқанинг идеаллари. Ҳалқанинг турлари. Майдон ва унинг хоссалари. Мисоллар. Чекли майдон. Майдоннинг характеристикалари.

2-мавзу: Ассоциатив алгебралар хақида тушунчалар.

Алгебра ва унинг хоссалари. Мисоллар. Ассоциатив алгебралар, бирли элемент, идеал, ўнг ва чап идеаллар, максимал идеал, матрицалар алгебраси.

3-мавзу: Ноассоциатив алгебраларнинг турлари ва уларнинг таснифлаш усуллари.

Ноассоциатив алгебралар, Йордан алгебралари, Ли алгебралари. Ли, Йордан ва ассоциатив алгебралар орсидаги боғланишлар. Алгебраларни таснифлаш усуллари. Кичик ўлчамли алгебраларнинг таснифлари.

4-мавзу: Замонавий алгебра муаммолари бўйича сўнгги йилларда хорижда ва республикамизда ўрганилаётган долзарб муаммолар ва уларнинг ечимларининг таҳлили.

Алгебра ва сонлар назариясининг ҳозирги кундаги долзарб масалалари. Операторлар алгебраси, Ли алгебралари ва уларнинг умумлашмалари бўйича ўргнилаётган масалалар. Функционал анализнинг замонавий масалалари.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-Амалий машғулот:
Алгебра фани ривожланишининг қисқача тарихи ва замонавий математикадаги ўрни. Алгебраик тизим тушунчаси.

Алгебра фани ривожланиш тарихини ўрганиш. Алгебраик тизим тушунчасини ўрганиш. Алгебраик тизимларга мисоллар кўриш.

2-амалий машғулот:
Группа, ҳалқа ва майдонлар

Яримгруппалар ва Моноидларларга доир мисоллар ечиш. Группаларнинг хоссалари исботлаш. Қисмгруппалар ва уларнинг хоссалари ўрганиш. Циклик группалар ва уларнинг хоссалари ўрганиш.

3-амалий машғулот:
Группа, ҳалқа ва майдонлар

Ҳалқаларга доир мисоллар ечиш. Ҳалқанинг умумий хоссаларини ўрганиш. Ҳалқа гомоморфизми ва ҳалқанинг идеалларига доир мисоллар ечиш. Ҳалқанинг турларини аниқлаш. Майдон ва унинг хоссалари ўрганиш. Чекли ва чексиз майдонга доир мисоллар кўриш. Майдоннинг характеристикаларини аниқлаш

4-амалий машғулот:
Ассоциатив алгебралар ҳақида тушунчалар.

Ассоциатив алгебраларга доир мисоллар ечиш. Матрицалар алгебрасининг хоссаларини аниқлаш. Берилган алгебранинг бирли элементи, идеаллари, ўнг ва чап идеалларини топиш. Бирли элементли аллгебранинг максимал идеалини аниқлаш.

5-амалий машғулот:
Ноассоциатив алгебраларнинг турлари ва уларнинг таснифлаш усуллари; бунда математиканинг амалий дастурлар пакетидан фойдаланиш.

Ноассоциатив алгебралар турларини ўрганиш, Йордан алгебралари, Ли алгебраларига мисоллар кўриш. Ли, Йордан ва ассоциатив алгебралар орсидаги боғланишларни аниқлаш. Алгебраларни таснифлаш усулларини ўрганиш. Икки ва уч ўлчамли Ли алгебраларнинг таснифлаш.

6-амалий машғулот:
Алгебраик тизимларнинг физика, химия, биология, квант механикаси, криптография, компьютер технологиялари ва бошқа соҳалардаги тадбиқлари.

Ноассоциатив алгебраларнинг физика, химия ва биологияга тадбиқларини ўрганиш. Генетик алгебралар ва уларнинг хоссаларини ўрганиш. Эволюцион алгебралар ва уларнинг тадбиқларига доир мисоллар ечиш.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ.

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади:

- маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва тушунчаларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);
- давра суҳбатлари (кўрилаётган лойиҳа ечимлари бўйича таклиф бериш қобилиятини ошириш, эшитиш, идрок қилиш ва мантиқий хулосалар чиқариш);

- баҳс ва мунозаралар (масалалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

БАҲОЛАШ МЕЗОНЛАРИ.

№	Ўқув-топширик турлари	Максимал балл	Баҳолаш мезони		
		2,5	**"аъло" 2,2-2,5**	**"яхши" 1,8-2,1**	**"ўрта" 1,4-1,7**
1.	Тест-синов топшириқларини бажариш	0,5	0,4-0,5	0,34-0,44	0,28-0,3
2.	Ўқув-лойиҳа ишларини бажариш	1	0,9-1	0,73-0,83	0,56-0,7
3.	Мустақил иш топшириқларини бажариш	1	0,9-1	0,73-0,83	0,56-0,7

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТРЕФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОД

“Ассесмент” методи

Методнинг мақсади: мазкур метод таълим олувчиларнинг билим даражасини баҳолаш, назорат қилиш, ўзлаштириш кўрсаткичи ва амалий кўникмаларини текширишга йўналтирилган. Мазкур техника орқали таълим олувчиларнинг билиш фаолияти турли йўналишлар (топшириқлар, амалий кўникмалар, қиёсий таҳлил, ечимларни таҳлил қилиш) бўйича ташҳис қилинади ва баҳоланади.

Методни амалга ошириш тартиби:

“Ассесмент” лардан маъруза машғулотларида талабаларнинг ёки қатнашчиларнинг мавжуд билим даражасини ўрганишда, янги маълумотларни баён қилишда, семинар, амалий машғулотларда эса мавзу ёки маълумотларни ўзлаштириш даражасини баҳолаш, шунингдек, ўз-ўзини баҳолаш мақсадида индивидуал шаклда фойдаланиш тавсия этилади. Шунингдек, ўқитувчининг ижодий ёндашуви ҳамда ўқув мақсадларидан келиб чиқиб, ассесментга қўшимча топшириқларни киритиш мумкин.

Намуна. Ҳар бир катакдаги тўғри жавоб 5 балл ёки 1-5 балгача баҳоланиши мумкин.

1 Топшириқ
- алгебраларнинг ечимлилигини кўрсатинг
- алгебраларнинг нилрадикалини топинг.

3 Қиёсий таҳлил
- Нилпотент, нилиндекс ва нилрадикалларнинг қиёсий таҳлили.

2 Тушунча таҳлили
- алгебраларнинг ечимлилиги таърифи;
- нилрадикални топиш усули;

4 Амалий кўникма
- алгебраларнинг таснифлари.

“Хулосалаш” (Резюме, Веер) методи.

Методнинг мақсади: Бу метод мураккаб, кўптармоқли, мумкин қадар, муаммоли характердаги мавзуларни ўрганишга қаратилган. Методнинг моҳияти шундан иборатки, бунда мавзунинг турли тармоқлари бўйича бир хил ахборот берилади ва айни пайтда, уларнинг ҳар бири алоҳида аспектларда муҳокама этилади. Масалан, муаммо ижобий ва салбий томонлари, афзаллик, фазилат ва камчиликлари, фойда ва зарарлари бўйича ўрганилади. Бу интерфаол метод танқидий, таҳлилий, аниқ мантиқий фикрлашни муваффақиятли ривожлантиришга ҳамда ўқувчиларнинг мустақил ғоялари, фикрларини ёзма ва оғзаки шаклда тизимли баён этиш, ҳимоя қилишга имконият яратади. “Хулосалаш” методидан маъруза машғулотларида индивидуал ва жуфтликлардаги иш шаклида, амалий ва семинар машғулотларида кичик гуруҳлардаги иш шаклида мавзу юзасидан билимларни мустаҳкамлаш, таҳлил қилиш ва таққослаш мақсадида фойдаланиш мумкин.

Методни амалга ошириш тартиби:

тренер-ўқитувчи иштирокчиларни 5-6 кишидан иборат кичик гуруҳларга ажратади;

тренинг мақсади, шартлари ва тартиби билан иштирокчиларни таништиргач, ҳар бир гуруҳга умумий муаммони таҳлил қилиниши зарур бўлган қисмлари туширилган тарқатма материалларни тарқатади;

ҳар бир гуруҳ ўзига берилган муаммони атрофлича таҳлил қилиб, ўз мулоҳазаларини тавсия этилаётган схема бўйича тарқатмага ёзма баён қилади;

навбатдаги босқичда барча гуруҳлар ўз тақдимотларини ўтказадилар. Шундан сўнг, тренер томонидан таҳлиллар умумлаштирилади, зарурий ахборотар билан тўлдирилади ва мавзу якунланади.

III. НАЗАРИЙ МАТЕРИАЛЛАР

1-мавзу. ГРУППА, ҲАЛҚА Ва МАЙДОНЛАР

РЕЖА:

1.1. Группа ва унинг асосий хоссалари. Мисоллар.
1.2. Ҳалқа. Ҳалқанинг гомоморфизмлари ва идеаллари.
1.3. Майдон. Майдонлар характеристикаси.

Таянч иборалар: *группа, ҳалқа, майдон, бинар муносабат, ярим группа, коммутатив группа, тривиал группа, моноид, гомоморфизм, мономорфизм, эпиморфизм, изоморфизм.*

1.1. Группа ва унинг асосий хоссалари. Мисоллар.

Берилган $M\neq\varnothing$ тўпламда бинар муносабат бирор α: $M\times M \to M$ акслантириш ёрдамида аниқланиб, ҳар бир (x, y) $(x, y\in M)$ жуфтлик учун $z=\alpha(x, y)\in M$ элемент мос қуйилади. Одатдабинарамали$\circ$, $\times$,$\cdot$, $\bullet$, …, каби белгилар билан ифодаланади, мисол учун $z=x\circ y$.

Агар M тўпламда аниқланган бинарамали “$\circ$“ ассоциативлик шартини қаноатлантирса, яъни

$$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\quad \forall x, y, z\in M,$$

у ҳолда $(M, \circ)$ жуфтлик ярим группа дейилади.

Агар $(G, \circ)$ярим группада қуйидаги шартлар бажарилса, у ҳолда у группа дейилади:

(G1) $\exists$ нейтрал элементнинг мавжудлиги, яъни $\exists\, e\in G$, $\forall g\in G$ учун

$$g\circ e = e\circ g = g;$$

(G2) $\forall g\in G$ элемент учун, тескари элемент деб аталувчи $g\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g=e$ шартни қаноатлантирувчи элементнинг мавжудлиги.

Ҳар қандай G группа ягона нейтрал элементга эга ва ҳар бир $g\in G$ учун ягона тескари элемент мавжуд.

Группада қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

$(g^{-1})^{-1}=g$, $(g_1\circ g_2\circ \dots \circ g_k)^{-1}=g_k^{-1}\circ g_{k-1}^{-1}\circ\dots \circ g_1^{-1}$.

Группа элементининг бутун даражасини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$g^n=g \circ g \circ \dots \circ g$ (n - марта),

$g^{-n}=g^{-1}\circ g^{-1}\circ \dots\circ g^{-1}=(g^n)^{-1}$, $n\in N$,

$g^0=e$, $g^n\circ g^m=g^{n+m}$, $(g^n)^m =g^{n+m}$, $n, m\in Z$.[1]

Группанинг айрим элементлари учун $g \circ f\neq f \circ g$. Агар $g \circ f = f \circ g$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда f ва g элементлар ўрин алмашувчан дейилади.

Агар G группанинг ихтиёрий икки элементи ўриналмашувчан бўлса, у ҳолда G группа коммутатив ёки Абел группаси дейилади.

Группада амал баъзан · белги (агар группа Абел группаси бўлса + белги) билан ифодаланади ва кўпайтириш амали (қўшиш) дейилади. Группанинг нейтрал элементи бир (нол) дейилади, мос равишда 1 (ёки 0) билан белгиланади, бунда группа мультипликатив (аддитив) дейилади.

Аддитив группда a элементга тескари элемент қарама-қарши элемент дейилади ва – a каби белгиланади, a^n ўрнига na ёзилади, $n\in Z$.

Аддитив группаларга мисоллар:

(Z, +), (Q, +), (R, +), (C, +) – аддитивгруппаларбўлади.

$P(x_1, x_2, \dots,x_n)$ кўпҳадлар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

M(n, R) $n\times n$ матрицалар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади

R_n чизиқли фазо қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади. C[a, b] – [a, b] кесмада аниқланган узлуксиз функциялар қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

[1] D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997. 57- 59 бетлар

Мультипликатив группаларга мисоллар:

$Q^* = Q\setminus\{0\}$, $R^* = R\setminus\{0\}$, $C^* = C\setminus\{0\}$ – кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа.

$M(n, R)$ детерминанти нолдан фарқли бўлган $n\times n$ матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа бўлади.

Биз, асосан, G группани мультипликатив группа сифатида ўрганамиз.

Чекли группа учун $n=|G|$ сони Gгруппа тартиби дейилади.

$E=\{e\}$ группанинг тартиби бирга тенг, у бир ёки тривиал группа дейилади.

Чексиз элементли группанинг тартиби чексиз, яъни, чексиз тартибли группа дейилади.[2]

Фараз қилайлик, M, N – G группанинг қисм тўпламлари бўлсин. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$M^{-1}=\{m^{-1} : m\in M\}; \qquad MN=\{mn : m\in M, n\in N\}.$$

G группанинг H қисм тўплами, G да аниқланган амалга нисбатан группа ташкил қилса, H тўплам G группанинг қисм тўплами дейилади.

Қуйидаги муносабатлар ўринли:

$(H \subset G$ қисм группа$) \Leftrightarrow (e \in H, HH \subset H, H^{-1}\subset H) \Leftrightarrow (e \in H, HH = H, H^{-1} = H)$.

Қисм группани қуйидагича белгилаймиз: $H \le G$.

Агар $H \le G$ ва $H \ne \{e\}$, $H \ne G$ бўлса, у ҳолда H хос қисмгруппа дейилади ва $H < G$ каби белгиланади.

Теорема 1. Ихтиёрий сондаги қисм группалар кесишмаси яна қисм группа бўлади.

$M\subseteq G$ бўлсин.

Таъриф. $Mg=\{mg : m\in M\}$ тўплам M тўпламнинг $g\in G$ билан ўнгга сурилиши дейилади, $gM=\{gm : m\in M\}$ тўплам M тўпламнинг $g\in G$ билан

[2] D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997. 68- 69 бетлар

чапга сурилиши дейилади.

$H \leq G$ бўлсин, у ҳолда Hg – G группанинг H қисм группадаги ўнг қўшни, gH – чап қўшни синфлари дейилади, g элемент Hg ва gH учун вакил дейилади.

Маълумки, $g=eg=ge \in Hg \cap gH$ ва

$$Hg_1=Hg_2 \text{ ёки } f_1H=f_2H \Leftrightarrow \exists\, h_1, h_2 \in H: g_2=h_1g_1,\ f_2=f_1h_2.$$

Ўнг ва чап қўшни синфлар кесишмаси бўш бўлмаслиги мумкин, аммо бир томонли қўшни синфлар Hg_1 ва Hg_2 (ёки f_1H ва f_2H) ёки устма-уст тушади ёки кесишмайди.

Ихтиёрий қисм группа бир вақтда чап ва ўнг қўшни синф бўлади: $H=eH=He$, аммо қўшни синфлар орасида бошқа қисмгруппалар мавжуд эмас. Барча қўшни синфлар бир хил қувватга эга- $|H|$.

Теорема 2. Ҳар хил бир томонли қўшни синфлар тўпламининг қуввати $|G : H|$ томонларнинг танланишига боғлиқ эмас.

Ушбу $|G:H|$ қиймат H қисмгруппанинг G группадаги индекси деб юритилади.

Чекли индекслар қуйидаги хоссани қаноатлантиради:
агар $K \leq H \leq G$, у ҳолда $|G:H|\,|H:K| = |G:K|$.

Хусусан, Лагранж теоремаси ўринлидир.

H –G чекли группанинг қисм группаси бўлсин, у ҳолда

$$|G|=|H|\,|G:H|.$$

G – группа берилган бўлсин, $g, h \in G$.
$g^h= hgh^{-1} \in G$ элемент h элемент ёрдамида g элементга қўшма дейилади.
g_1ваg_2 элементлар учун $\exists\, h \in G$ элемент топилиб, $g_1^h=g_2$бўлса, g_1элемент g_2элементнинг G группадаги қўшмаси дейилади. У ҳолда g_2 элемент g_1 элементга қўшма бўлади: чунки $g_1=g_2^{h^{-1}}$.

Тасдиқ. Қўшмалик муносабати – G группа элементларининг эквивалентлик муносабатидир.

Исбот: $g=g^e$, $g_1^h=g_2 \rightarrow g_2=g_1^h$, $g_1^h=g_2$, $g_2^k=g_3 \rightarrow g_1^{hk}=g_3$. □

G группа элементлари ўзаро кесишмайдиган [g] эквивалентлик синфларга ажралади, бу синфлар қўшмалик синфлари деб юритилади. Уларнинг ичида битта элементли [e] синф ҳам мавжуд.

G Абель группаси $\Leftrightarrow$ унинг барча қўшмалик синфлари битта элеменлидир.

$M \subseteq G$ бўлсин. $Mg=\{mg \mid m \in M\}$ тўплам $g \in G$элемент ёрдамида тузилган M нинг қўшма тўплами дейилади.

$g \in G$ элемент $h \in G$ элементни марказлаштиради дейилади, агар $hg=h$, яъни $gh=hg$.

$M \subseteq G$ қисмтўпламнинг марказлаштирувчиси (централизатори) CG(M) қуйидагича аниқланади:

$$CG(M)=\{ g \in G : gm=mg \forall m \in M\}.$$

Агар M=G бўлса, у ҳолда C(G)= CG(M) қисмгруппа G группа маркази дейилади.

$g \in G$элемент $M \subseteq G$ қисмтўпламни нормалаштиради дейилади, агар

$Mg=M$, яъни$\forall m \in M : mg \in M$ и $\forall m1 \in M \exists m2 \in M : m2g=m1$.

$M \subseteq G$ қисмтўпламнинг нормализатори NG(M) қуйидагича аниқланади:

$NG(M)=\{ g \in G : Mg=M\}$.

NG(M) – G нинг қисмгруппасидир.

Тасдиқ. $H \leq G \Rightarrow H \leq NG(H)$ ва $CG(M) \leq NG(M)$.

Исбот: $h \in H \Rightarrow Hh=hHh^{-1} \subset H$ ва $\forall x \in H$ учун $x=h(h^{-1}xh)h^{-1}$, яъни

$$\exists\ y = h^{-1}xh \in H : x= h-1yh=yh.$$

Демак Hh=H. $h \in CG(M) \Rightarrow mh=m \ \ \forall m \in M \Rightarrow Mh=M \Rightarrow h \in NG(M)$. □[3]

1.2. Халқа. Ҳалқанинг гомоморфизмлари ва идеаллари.

Таъриф. Бўш бўлмаган К тўпламда иккита алгебраик (бинар) амал: + (қўшиш) ва * (кўпайтириш) аниқланган бўлиб, қуйидаги

---

[3] [Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012. 22 – 23 бетлар
D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997. 99- 104 бетлар

(К1) (К,+) – Абелъ группа;

(К2) (К,*) – яримгруппа;

(К3) $(a+b)*c=a*c+b*c$, $c*(a+b)=c*a+c*b$, $\forall a,b,c\in K$.

шартлар бажарилса, К *ҳалқа* деб юритилади.

Ушбу (К,+) структура (ёки тизим) ҳалқанинг *аддитив группаси,* (К,*) эса *мультипликатив яримгруппаси дейилади.*

Агар (К,*) *моноид*(бирли яримгруппа)бўлса (К,+,*) *бирли ҳалқа* дейилади.

Майдоннинг бирлик элементи одатда 1 билан белгиланади. Баъзан бирлик элементнинг мавжудлиги майдоннинг таърифида талаб этилади.

Айрим назарияларда ҳалқанинг таърифида (К2) аксиома қатнашмайди, ёки (К2) аксиома бошқа бирор аксиома билан алмаштирилади. Бундай ҳолларда ҳалқа *ноассоциатив ҳалқа* деб юритилади.

Биз асосан одатдаги (ассоциатив) ҳалқаларни ўрганамиз.

К ҳалқанинг L қисм тўплами *қисмҳалқа* дейилади, агар $x, y\in L \Rightarrow x-y\in L$ и

$x\cdot y\in L$.

Ихтиёрий сондаги қисмҳалқалар кесишмаси қисмҳалқа бўлади. Натижада, бирор $T\subset K$ қисмтўпалам ёрдамида ҳосил қилинган $<T>\subset K$ қисмҳалқа тўғрисида гапириш мумкин, бу қисмҳалқа T ни ўз ичига олувчи барча қисмҳалқаларнинг кесишмасидир. Агар T –яримҳалқа бўлса, у ҳолда $<T>=T$.

К ҳалқа *коммутатив* дейилади, агар $xy=yx$, $\forall x, y\in K$ бўлса.

Мисоллар. 1) $(Z,+,\cdot)$. m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами m**Z, Z** нинг қисмҳалқаси бўлади;

2) (**Q**,+,·) – рационал сонлар ҳалқаси;

3) (**R**,+,·) – ҳақиқий сонлар ҳалқаси. **Z** ва **Q** тўпламлар **R** нинг бирлик яримҳалқасидир;

4) M_n(**R**)–**R** майдон устида аниқланган nxn матрицалар ҳалқаси, бирли ҳалқа бўлади. $n>1$ да$M_n(R)$ - нокоммутатив, $M_n(Q)$, $M_n(Z)$ – яримҳалқа;

5) **К**коммутатив ҳалқа устида аниқланган nxn матрицалар $M_n(\mathbf{K})$ ҳалқаси,

6) Функциялар ҳалқаси. X –ихтиёрий тўплам, **К-** ҳалқа. Барча f: X→**K** функциялар K^x={f: X→**K**} тўплами f+g*йиғинди*вafg кўпайтма:

$$(f+g)(x)=f(x)\oplus g(x),\ (fg)(x)=f(x)\otimes g(x),$$

амалларига нисбатан ҳалқа бўлади, бу ерда ⊕, ⊗– **К** ҳалқадаги амаллар.

Агар 0 ва 1**К**ҳалқанинг нол ва бирлик элементи бўлса, у ҳолда 0_x: x→ 0 ва 1_x: x→ 1 –ўзгармас функциялар K^x ҳалқанинг ноли ва бири бўлади.

Агар К –коммутатив бўлса, у ҳолда K^x – коммутатив.

Агар K=**R**ёкиX=[0.1] бўлса, K^x = $\mathbf{R}^{[0.1]}$ –[0; 1] да аниқланган барча ҳақиқий функциялар ҳалқасидир. У ўз ичига қуйидаги қисмҳалқаларни олади:

B[0.1] – барча чегараланган ҳақиқий функциялар ҳалқаси;

C[0.1] – барча ҳақиқий узлуксиз функциялар ҳалқаси.

$x\to a\in R, \forall x\in X$ ўзгармас функциялар R ҳалқага изоморф бўлган яримҳалқа ҳосил қилади.

7) ихтиёрий (A,+) аддитив группада ушбу $xy=0, \forall x,y\in A$ кўпайтириш амалини киритиш мумкин. Натижада, *кўпайтма нол бўлган ҳалқа* ҳосил бўлади. Хоссалари:

1. $a^m a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $a\cdot 0=0\cdot a=0$, $\forall a\in K$;
2. $a+0=a \Rightarrow a(a+0)=aa \Rightarrow a^2+a\cdot 0=a^2 \Rightarrow a\cdot 0=0$ (шунга ўхшаш $0\cdot a=0$);
3. $0=1\Rightarrow a=a\cdot 1=a\cdot 0=0, \forall a\in K$, яъни K={0}. Натижада, нетривиал ҳалқа учун $0\neq 1$.
4. (-a)b=a(-b)=-(ab).

Исбот. $0= a\cdot 0=a(b-b)=ab+a(-b) \Rightarrow a(-b)=(-ab)\text{-}(-a)=a\Rightarrow (-a)(-b)=ab$. □

5. Дистрибутивликнинг умумий қонуни:

$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\ (b_1+b_2+\ldots+b_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ (индукцияга кўра).

Хусусан, $n(ab)=(na)b=a(nb), \forall n \in \mathbf{Z}$.[4]

Фараз қилайлик, $(K,+,\cdot)$ ва $(K`,\oplus,\otimes)$ ҳалқа бўлсин. $f: K\to K`$ акслантириш *гомоморфизм* дейилади, агар

$$f(a+b)=f(a)\oplus f(b),$$
$$f(a\cdot b)=f(a)\otimes f(b), \forall a,b\in K .$$

Демак, $f(0)=0`$, $f(na)=nf(a), \forall n\in \mathbf{Z}$.

$\mathrm{Kerf} = \{a\in K : f(a)=0`\}$ –К да яримҳалқа. Kerf тўплам f нинг ядроси (ўзаги) дейилади.

Умуман, $L=\mathrm{Kerf} \Rightarrow Lx\subset L, \forall x\in K$.

Исбот. $\forall x\in K$, $l\in L$учун $f(lx)=f(l)\otimes f(x)=0`f(x)=0`$, яъни $lx\in L$. □

Шунга ўхшаш, $xL\subset L, \forall x\in K$, яъни$LK\subset L$ва$KL\subset L$.

Бундай L ярим ҳалқалар (икки томонлама) *идеал* деб юритилади.

$f: K\to K`$ гомоморфизм *мономорфизм* дейилади, агар $\mathrm{Kerf} =\{0\}$ бўлса. *Эпиморфизм дейилади*, агар$\mathrm{Imf}=\{f(x), x\in K \}=f(K)=K`$ бўлса. *Изоморфизмом дейилади*, агар f мономорфизм ва эпиморфизм бўлса, бундай ҳолда $K\cong K`$ каби белгиланади.

Мисоллар. 1) $f: \mathbf{Z}\to \mathbf{Z}_m$ эпиморфизм бўлади ва $\mathrm{Kerf}=m\mathbf{Z}$, $m\mathbf{Z}$- $\mathbf{Z}$да идеал (умуман $\mathbf{Z}$да ихтиёрий қисмҳалқа $m\mathbf{Z}$ кўринишга эга, яъни идеал);

2) $M_2(\mathbf{Z})$ –$\mathbf{Z}$майдон бўйича 2x2 матрицалар ҳалқаси. $K_0=\left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \alpha,\beta,\delta \in Z\right\}$ яримҳалқа бўлади, идеал эмас: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\notin K_0;$

3) Коммутатив ҳалқада идеал қуриш методлари:

а) $\forall a \in K$, aK –Книнг идеали бўлади: $ax+ay=a(x+y)$, $(ax)y=a(xy)$. aK идеал $a\in K$ элемент ёрдамида тузилган асосий идеал деб юритилади.[5]

---

[4] Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012. 24 – 28 бетлар
[5] D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997. 309- 312 бетлар

Фактор группалар ва фактор ҳалқалар.

Фараз қилайлик, К- ҳалқа, L – идеал бўлсин. K/Lнинг элементлари a+L қўшни синфлардир, $a\in K$ (L модул бўйича қолдиқ синфлар дейилади).

Қўшиш: $(a+L)\oplus(b+L)=(a+b)L$, $-(a+L)=-a+L$.

Кўпайтириш: $(a+L)\otimes(b+L)=ab+L$.

Кўпайтиришнинг корректлиги: $a`=a+x$, $b`=b+y$, x, $y\in L a`b`=ab+ay+xb+xy= =ab+z$, бу ерда $z=ay+xb+xy\in L$, чунки L – идеал, яъниa`b` битта ab нинг қўшни синфига тегишлидир. □

$a = a+L\Rightarrow \bar{a}\oplus \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a}\otimes \bar{b} = \overline{a\cdot b}$.

Хусусан, $\bar{0}$ =L, $\bar{1}$ =1+L (агар 1 мавжуд бўлса).

K/Lучун ҳалқанинг барча хоссалари осон текширилади.

Шундай қилиб π : $a\to \bar{a}$ акслантиришK$\to$K`=K/L эпиморфизм бўлади ва Kerπ=L.

Тасдиқ. К ҳалқанинг ихтиёрий гомоморф образи, L= kerf идеал бўйича тузилган K/ ker f фактор ҳалқага изоморфдир.

*Исбот.*Агар $f : K \to K`$ гомоморфизм бўлсин. У ҳолда $f(K)\subset K`$ни К` сифатида қараймиз: K`=f(K), яъни f – эпиморфизм. L=Кer f бўлсин ва $\bar{K}$=K/L.У ҳолда $a`\in K`\Leftrightarrow a+L= \bar{a}$, бунда a`=f(a) акслантириш К` ва $\bar{K}$ ҳалқалар изоморфизимини ҳосил қилади:

$\alpha(\bar{a}\oplus \bar{b})=\alpha(\overline{a+b})= =f(a+b)=f(a)+f(b)=\alpha(\bar{a})+\alpha(\bar{b})$.

$\alpha(\bar{a}\otimes \bar{b})=\alpha(\bar{a}\,\bar{b})=f(ab)=f(a)f(b)=\alpha(\bar{a})\cdot\alpha(\bar{b})$,

яъниα – гомоморфизм, $\alpha(\bar{K})=f(K)=K`$. Демак, $\alpha$ - эпиморфизм. Агар$\alpha(\bar{a})=\bar{0}$ бўлса, у ҳолда f(a)=0, яъни $a\in L$=Кer f= $\bar{a} = \bar{0}$ . Демак, $\alpha$-мономорфизм. Натижада, $\alpha$ акслантириш K`=f(K) ва K/L фактор ҳалқа орасида изоморфизмдир, яъни К ҳалқанинг ихтиёрий гомоморф образи, L= kerf идеал бўйича тузилган K/ ker f фактор ҳалқага изоморфдир. □

Теорема. *(ҳалқанинг гомоморфизмлари ҳақидаги асосий теорема)* К ҳалқанинг ихтиёрий L идеали K/L фактор тўплам устида ҳалқанинг структурасини аниқлайди, бунда K/L факторҳалқа K ҳалқанинг ядроси L бўлган гомоморфизмнинг образи бўлади. Тескариси, К ҳалқанинг ҳар бир гомоморф образи K`=f(K) ушбу K/ker f факторҳалқага изоморфдир.

Ҳалқанинг типлари(турлари)

Z, **Q**, **R**, **C** ҳалқаларда $ab=0 \Rightarrow a=$ёки $b=0$, аммо

а) $M_n(R)$ҳалқа $ab=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=0$;

в) Z_4 ҳалқада $2\otimes2=0$;

с) R^2 ҳалқада $(1,0)(0,1)=0$ ва б.

Таъриф. К ҳалқа бўлсин. Агар $a, b\in K$, $a\neq0$, $b\neq0$ учун $ab=0$ бўлса, у ҳолда *a* нолнинг *чап*, *b* эса *ўнг* бўлувчиси дейилади. Коммутатив ҳалқада эса *a* ва *b нолнинг бўлувчилари* дейилади.

Ихтиёрий $K\neq0$ ҳалқада, 0 нол элемент нолнинг (тривиал) бўлувчиси бўлади.

Нолнинг нолдан фарқли бўлувчиси бўлмаган $1\neq0$ бирли коммутатив ҳалқа *бутунли ҳалқа* дейилади.

Теорема.Бирли нотривиал коммутатив К ҳалқа бутунлик соҳаси бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, агар ҳалқада *қисқартириш қонуни* ўринли бўлса: $ab=ac$, $a\neq0 \Rightarrow b=c$, $\forall a, b, c \in K$.

Мисол. $s=\{x=(x_1,x_2, \dots, x_n, \dots), x_i\in\mathbf{R}\}$ – ҳақиқий сонлардан тузилган кет-кетликлар фазоси ва К – барча $a: s \to s$ чизиқли акслантиришлар ҳалқаси бўлсин. s да амаллар координаталар бўйича аниланган. К ҳалқада қўшиш ва операторлар супер позицияси (композицияси) амалларини қуйидагича аниқлаймиз: $(a_1\oplus a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x)$, $(a_1\otimes a_2)(x)=a_2(a_1(x))$, $x\in s$.

$a_i : s\to s$ операторлар қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$a_1: x=(x_1, x_2, \dots,x_n,\dots) \to (x_2, x_3, \dots, x_{n+1},\dots),$$

$$a_2: x=(x_1, x_2, \dots,x_n,\dots) \to (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1},\dots).$$

У ҳолда,

$$a_1\otimes a_2 :x=(x_1, x_2, \dots, x_n,\dots) \to (0, x_2, x_3, \dots, x_{n+1},\dots),$$

$$a_2 \oplus a_1 : x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \rightarrow (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, \ldots),$$

яъни $a_2 \oplus a_1 = 1$ –айни оператор.

Демак, $a_1 \oplus a_2 \neq 1$, $a_2 \oplus a_1 = 1$, яъниa_1ўнг (чап бўлмаган), a_2эса чап (ўнг бўлмаган) K даги бирнинг бўлувчиларидир.

$M_n=M_n(\mathbf{R})$ матрицалар ҳалқасида тескариланувчан элементлар, бу тескариланувчан матрицалардир(яъни нолдан фарқли детерменинантга эга бўлган марицалар). Тескариланувчан элемент нолнинг бўлувчиси бўлаолмайди:

$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow (a^{-1}a)b=0 \Rightarrow b=0$, (шунга ўхшаш, $ba=0 \Rightarrow b=0$).

Теорема. Бирли элементли **K** ҳалқанинг тескариланувчан элементлари тўплами кўпайтириш амалига нисбатан группа ташкил этади (ушбу группа U(K) каби белгиланади) .

Изоҳ. $M_n(\mathbf{R})$ ҳалқада чап ва ўнг тескариланувчанлик тушунчаси тескариланувчанлик тушунчаси билан бир хил. Чунки, $ab=1$, a, $b \in M_n(R) \Rightarrow \det(a)\det(b) = \det(ab) = 1$, яъни, $\det(a) \neq 0$ ва $\det(b) \neq 0$, демак, a ваb тескариланувчан. Хусусан, $ab=1 \Rightarrow a^{-1}(ab)=a^{-1} \Rightarrow b=a^{-1}$. □

Агар K ҳалқа аксиомаларидаги (K2) аксиомани янада кучлироқ қуйидаги аксиомага алмаштирсак:

(K2`) кўпайтириш амалига нисбатан $K^*=K\backslash\{0\}$ тўплам группа бўлади; у ҳолда K *бўлиш амали ўринли бўлган ҳалқа ёки жисм дейилади.*

Шундай қилиб, бўлиш амали ўринли бўлган ҳалқада нолнинг бўлувчилари мавжуд эмас ва нолдан фарқли ихтиёрий элемент тескариланувчан.

Агар жисм коммутатив бўлса, у *майдон* деб юритилади.

Таъриф. Бирли коммутатив **P** ҳалқа майдон дейилади, агар $1 \neq 0$ бўлибҳар бир $a \neq 0$ элемент тескариланувчан бўлса. $P^*=U(\mathbf{P})$группа**P** майдоннинг мультипликатив группаси дейилади.

ab^{-1}кўпайтмани одатда $\frac{a}{b}$(ёки a/b) каср кўринишда ёзамиз. Бу каср $bx=a$ тенгламанинг ягона ечимидир($b \neq 0$).

Тасдиқ. P ҳалқада аниқланган “каср” амали қуйидаги қоидаларга бўйсунади:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad = bc,\ (b,\ d \neq 0);\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},\ \ (b,\ d \neq 0);$$

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b},\ \ (b\neq 0);\ \frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \ (bd\neq 0);$$

$$(\frac{a}{b^{-1}})^{-1}=\frac{b}{a^{-1}}.$$

Таъриф. P майдон учун **F**$\subset$**P** қисммайдон дейилади, агар **F** тўплам **P** да қисмҳалқа бўлиб, **F** майдон ташкил қилса.

Мисол.Q $\subset$**R** $\subset$**C**.

Ушбу **F** $\subset$**P** ҳолатда, **P** майдон **F** майдоннинг кенгайтмаси дейилади.

Таърифга кўра 0,1$\in$**P**ва 0,1$\in$**F** ҳамда мос равишда **F** нинг бири ва ноли бўлади.

F$\subset$**P** қисммайдон ва $a\in$**P\F** бўлсин. **P** майдоннинг **F** ва a ни ўз ичига олувчи барча қисммайдонларининг кесишмаси $\mathbf{F_1}$, {**F**, a} тўпламни ўз ичига олувчи энг кичик майдон бўлади ва $\mathbf{F}_1$майдон **F**майдонга a элементни бирлаштириш (улаш) билан ҳосил қилинган майдон дейилади ва $\mathbf{F_1}$=**F**(a) каби белгиланади.

Агар $\mathbf{F}_1$майдон **F**қисммайдонга $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\in$**P**элементларни бирлаштириш билан ҳосил қилинган бўлса, биз $\mathbf{F}_1$ = **F**($a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$) каби ёзамиз.

Мисол. $Q(\sqrt{2}) = \{c\colon c=a + b\sqrt{2},\ a,\ b\in Q\}$.

Исбот. $(\sqrt{2})^2 = 2,\ \dfrac{1}{a+b\sqrt{2}}=\dfrac{a}{a^2-2b^2}-\dfrac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$,

бунда $a+b\sqrt{2} \neq 0$. □

Шунга ўхшаш,

$Q(\sqrt{3}) = \{c\colon c=a + b\sqrt{3},\ a,\ b\in Q\}$, $Q(\sqrt{5}) = \{c\colon c=a + b\sqrt{5},\ a,\ b\in Q\}$.

Pва **P’** майдонлар изоморф дейилади, агар улар ҳалқа сифатида изоморф бўлса. Таърифга кўра, ихтиёрий f: **P**→**P**’ изоморфизм учун f(0) = 0, f(1) = 1.

Ихтиёрий нолдан фарқли гомоморфизм мономорфизм бўлади.Чунки,

$$a\neq 0,\ f(a)=0 \Rightarrow f(1)=f(aa^{-1})=f(a)f(a^{-1})=0.$$

Натижада, $\forall\ b\in \mathbf{P}$, f(b) = f(b1) = f(b)f(1)= 0, яъни Kerf = **P**.

Майдонлар назариясида майдонлар *автоморфизмлири* муҳим аҳамиятга эга бўлиб, Галуа назариясининг асосий инструментларидан бири ҳисобланади.

Майдонларни кенгайтириш жараёни жуда узун тарихга эга:

$$1\to \{n\} \to \mathbf{N}\to \{\mathbf{N},0\} \to \mathbf{Z}\to \mathbf{Q}\to \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbf{R}\to \mathbf{C}.$$

Q→**R** алгебраик жараён эмас (тўлдиришнинг узлуксизиги).

p-адик сонлар майдони –**Q**ни бошқа бир метрика ёрдамида тўлдиришдир.

1.3. Майдон. Майдонлар характеристикаси.

m модулининг қолдиқларидан ушбу амал билан $\bar{k}+\bar{l}=\overline{k+l}$, $\bar{k}\bar{l}=\overline{kl}$ тузилган $\mathbf{Z}_m$ ҳалқани қараймиз:

$$\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots\overline{m-1}.$$

Агар st=m бўлса, у ҳолда $\bar{s}\cdot\bar{t}=\bar{0}$, $\bar{s}$ ва $\bar{t}$ - $\mathbf{Z}_m$ даги нолнинг бўлувчиларидир.

Демак, агар бўлувчи мавжуд бўлса(m≠1), яъни m–туб бўлмаса, у ҳолда $\mathbf{Z}_m$ майдон ташкил этмайди.

p–туб сон бўлсин. Кўрсатиш мумкинки, $\mathbf{Z}_p$- майдон. Фараз қилайлик, $\bar{s}\neq\bar{0}$ (яъни s сони p га бўлинмайди). $\bar{s}'\in Z_p^*$ тескари элемент мавжудлигини кўрсатамиз.

Қуйидаги сонларни қараймиз:

$$\bar{s},\ \overline{2s},\ \overline{3s},\ \ldots,\overline{(p-1)s}. \qquad (*)$$

Барчаси нолдан фарқли, чунки $s \neq 0(\mathrm{mod}\,p) \Rightarrow ks \neq 0(\mathrm{mod}\,p)$, агар$k = 1$, 2, …, p-1 бўлса. Бундан ташқари (*) даги барча элементлар бир-биридан фарқли, чунки агар $\overline{ks} = \overline{ls}$, k<s бўлса, у ҳолда $\overline{(l-k)s} = \overline{0}$, бу мумкин эмас (бизда *l*-k<p). Шунинг учун, Поэтому в (*) да қанча ҳар хил элементлар бўлса, ушбу

$$\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{p-1} \qquad (**)$$

тўпламда ҳам шунча элементлар бор, чъни (*) тўплам (**) нинг шунчаки ўриналмаштиришидан тузилган. Натижада (*) да $\overline{s's} = \overline{1}$ни қаноатлантирувчи элемент мавжуддир (1 ≤s’ ≤p-1). Демак, $\overline{s's} = \overline{1}$, яъни. $\overline{s'} = \overline{s}^{-1}$ - тескари элемент.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди.

Теорема. Қолдиқлар ҳалқаси Z_m майдон бўлиши учун m=p–туб сон бўлиши зарур ва етарли.

Натижа. (Ферманинг кичик теоремаси). p–туб сонга бўлинмайдиган ихтиёрий m бутун сон учун қуйидаги муносабат ўринлидир: $m^{p-1} \equiv 1$ (modp).

Длялюбою целого числа m, не делящегося m простое число римеет место сравнение: $m^{p-1} \equiv 1$ (modp).

Исбот. $\mathbf{Z}_p$ *м*айдон мультипликатив группаси $\mathbf{Z}_p^*$ нинг тартиби p-1 га тенг. Лагранж теоремасига кўра p-1 сони $\mathbf{Z}_p^*$даги ихтиёрий элемент тартибига бўлинади (яъни $\mathbf{Z}_p^*$га тегишли ихтиёрий элемент p-1 даражаси $\overline{1}$ га тенг), яъни

$$(\overline{m})^{p-1} = \overline{1} \Rightarrow \overline{m^{p-1}} - \overline{1} = \overline{0} \Rightarrow \overline{m^{p-1} - 1} = \overline{0} \Rightarrow m^{p-1} - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,p),\text{яъни}$$

$m^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. □

Таъриф. Хос қисммайдонга эга бўлмаган майдон *содда майдон* деб юритилади.

Теорема. Ҳар бир **P** майдон ягона $\mathbf{P_0}$ содда қисммайдонга эга. Бу содда майдон **Q** га ёки $\mathbf{Z_p}$ га изоморфдир(p бирор туб сон).

Исбот. Агар **P'** ва**P''** ҳар хил содда қисммайдонлар бўлса, у ҳолда $\mathbf{P_0}$=**P'**$\cap$**P''** қисммайдон (бўш эмас, чунки 0, 1 $\in \mathbf{P}_0$) , ва $\mathbf{P}_0 \neq$ **P'**, $\mathbf{P}_0 \neq$ **P''**, бу **P'** ва **P''** нинг содда эканлигига зиддир. Натижада, содда қисммайдон ягонадир (умуман $P_0 = \bigcap\limits_{\alpha} P_\alpha$ - **P** даги барча қисммайдонлар).

$1 \in \mathbf{P}_0$ бир элемент учун $n \cdot 1 = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n}$. Ҳалқа аксиомаларидан қуйидагилар келиб чиқади: s1 + t1 = (s + t)1,

$$(s1)\,(t1) = (st)1,\ \ \forall s, t \in \mathbf{Z}.$$

Z ҳалқани **P** майдонга f акслантиришни қарайлик**:**

$$f(n) = n1.$$

F ҳалқаниг гомоморфизмидир. Ядро Kerf **Z** да идеал бўлиб, Kerf = m **Z**, бирор m≥0, m$\in$**Z** учун.

Агар m=0 бўлса, у ҳолда Kerf ={0} ва f – изоморфизм **Z** ни **P** нинг ичига акслантириш бўлади.

Шунинг учун, **Z**$\subset$**P** ни қисмҳалқа деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда s1/t1, (s, t$\in$**Z)** каср **P** да маънога эга (чунки **P** майдон) ва улар **Z** ни ўз ичига олувчи **P** даги энг кичик $\mathbf{P}_0$ қисмҳалқани ҳосил қилади ва$\mathbf{P}_0 \approx \mathbf{Q}$.

Агар m> 0 бўлса, у ҳолда $f^* : \bar{k} = \{k\}_m \to f(k)$ акслантириш $\mathbf{Z}_m$ни **P** ичига изоморф акслантиради. Маълумки, **P** да нолнинг бўлувчилари йўқ, у ҳолда ва $\mathbf{Z}_m$да ҳам нолнинг бўлувчилари йўқ. Юқоридаги теоремага кўра m = p–туб сон, яъни $\mathbf{Z}_p$- майдон. Натижада, $f^*(\mathbf{Z}_p)$ –**P** да содда қисммайдон, яъни$\mathbf{P}_0 \approx \mathbf{Z}_p$. **Таъриф. P** майдон *нол характеристикага* эга дейилади, агар унинг $\mathbf{P}_0$ содда қисм майдони **Q** га изоморф бўлса.

Таъриф. P майдон p *содда характеристикага* эга дейилади, агар унинг $\mathbf{P}_0$ содда қисм майдони $\mathbf{Z}_p$га изоморф бўлса.

Мос равишда char **P**=0 ёки char **P** = p > 0 каби белгилаймиз.

Агар $\mathbf{Z}_p$ - майдон сифатида қаралса, одатда $\mathbf{F}_p$ ёки GF(p) (Galois

Field - Галуа майдони) каби белгиланади.

Шундай (чекли) GF(p) майон мавжудки, унинг элементлари учун $q = p^n$ тенглик ўринлидир, бу ерда p- туб сон, n –мусбат бутун сон.[6]

Мисол. Тўртта элементли GF(4)={0, 1, α, β}группани қараймиз:

+	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

*	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Назорат саволлари:

1. Бинар амаллар.
2. Яримгруппа ва моноидлар.
3. Тескариланувчи элементлар.
4. Группалар. Таърифи ва мисоллар.
5. Группаларнинг гомоморфизм ва изоморфизмлари.
6. Қисм-группалар ва фактор группалар.
7. Ҳалқалар ва бутунлик соҳалари.
8. Ҳалқаларнинг гомоморфизмлари ва идеаллари.
9. Майдон таърифи, мисоллар.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

[6] Fernando Q. Gouvea Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012. 221 – 226 бетлар

2-мавзу. АССОЦИАТИВ АЛГЕБРАЛАР ХАҚИДА ТУШУНЧАЛАР.

РЕЖА:

2.1. Ассоциатив алгебрала хақида умумий маълумотлар.
2.2. Бирли элементли алгебра.
2.3. Алгебранинг маркази. Идеал.

Таянч иборалар: *Ассоциатив алгебралар, бирли элемент, идеал, ўнг ва чап идеаллар, максимал идеал, матрицалар алгебраси.*

2.1. Ассоциатив алгебралар хақида умумий маълумотлар.

Маълумки $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}[a, b]$, $M_n(\mathbf{R})$, $\mathbf{F}[a, b]$, ҳалқалар ҳақиқий сонлар майдони устида берилган вектор фазо (чизиқли фазо) ташкил этади.

Таъриф. Агар (A, +, *) алгебраик структура **P** майдон устида вектор фазо ташкил қилса, яъни $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbf{P}$ учун

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда у алгебра дейилади ва аниқланган (A, +, *, λ) каби белгиланади.

Агар (A, +, *) ҳалқа ассоциатив ҳалқа бўлса, у ҳолда (A, +, *, λ) ассоциатив алгебра дейилади.

Агар (A, +, *) ҳалқа коммутатив ҳалқа бўлса, у ҳолда (A, +, *, λ) коммутатив алгебра дейилади.

(A, +, λ) чизиқли фазо ўлчамига алдгебранинг ўлчами дейилади. Ҳалқалар назариясидаги баъзи хоссалар алгебралар учун хам ўринли бўлади.

Таъриф. Агар A алгебранинг қисм тўплами B берилган амалларга нисбатан алгебра ташкил қилса, у ҳолда у *қисм алгебра* дейилади.

B тўплам A нинг қисмтўплами бўлсин. B ни ўз ичига олувчи энг кичик қисм алгебра B тўплам ёрдамида курилган қисмалгебра дейилади ва A[B] каби белгиланади.

Маълумки, A[B] тўплам B ўз ичига олувчи барча қисмалгебраларнинг кесишмасидан иборат бўлади .

Алгебранинг идеали ва идеал ёрдамида тузилган фактор алгебра тушунчалари, халқанинг идеали ва фактор халқа каби аниқланади. Алгебраларда аниқланган *гомоморфизм*, бу чизиқли акслантириш бўлиб, бир вақтда ҳалқада аниқланган гомоморфизмдир.[7]

Аассоциатив алгебранинг *маркази* Z(A) қуйидагича аниқланади:

$$Z(A) = \{a \in A: ax = xa, \forall x \in A\}.$$

Тасдиқ 1. А алгебранинг маркази Z(A) қисм алгебра бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $a_1a' \in Z(A) \Rightarrow (a\text{-}a')x = ax\text{-}a'x = xa\text{-}a'x = x(a\text{-}a')$, яъни $a\text{-}a' \in Z(A)$. Демак, $(aa')x = a(a'x) = a(xa') = (xa)a' = x(aa')$, яъни $aa' \in Z(A)$. Юқоридаги каби $(\lambda a)x = \lambda(ax) = \lambda(xa) = x(\lambda a)$, яъни $\lambda a \in Z(A)$.

□

Тасдиқ 2. Агар A – коммутатив бўлса Z(A) = A бўлади ва аксинча.

Агар A – ассоциатив бирли элементли алгебра бўлса, у ҳолда $\lambda\mathbf{1} \in Z(A)$, $\forall\lambda \in P$, бўлади, чунки, $(\lambda\mathbf{1})x = \lambda(\mathbf{1}x) = \lambda x = \lambda(x\mathbf{1}) = x(\lambda\mathbf{1})$).

Демак, $\lambda \to \lambda\mathbf{1}$ **P** ни $Z(A) \subset A$ га акслантириш бўлиб, у **P** ни A га ўтказувчи моноформизм бўлади.

Мисоллар. 1) **P** майдоннинг ихтиёрий **F** кенгайтмаси **P** майдон устида аниқланган коммутатив ва ассоциатив бирли алгебра бўлади :

Q майдоннинг **F** = **Q**($\sqrt{2}$) кенгайтмасини қарасак, у 2 ўлчамли алгебра бўлади;

Q майдоннинг кенгайтмаси **R** чексиз ўлчамли алгебра бўлади.

R майдоннинг кенгайтмаси **C** 2 ўлчамли алгебра бўлади.

2) Коэффициентлари **P** майдонга тегишли бўлган n та ўзгарувчили $K=\mathbf{P}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ кўпҳадлар ҳалқаси **P** майдон устида чексиз ўлчамли коммутатив ассоциатив алгебрадир. Бунда

$$K = K_0 \oplus K_1 \oplus \ \ldots$$

Яъни, K – биржинсли, даражаси m (K_0 = **P**) бўлган кўпҳадлар K_m

[7] Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012. 3-8 бет

қимфазоларининг тўғри йиғиндисидан иборатдир, бу ерда

$$K_i K_j \subset K_{i+j}.$$

Бундай ёйилмага эга бўлган алгебралар, *градуирланган алгебра* дейилади.

3) элементлари **P** майдонга тегишли бўлган барча nxn квадрат матрицалар тўплами $M_n(\mathbf{P})$, **P** майдон устида ўлчами n^2 бўлган алгебра бўлади.

Бу алгебранинг базичи сифатида қуйидаги матрицаларни олиш мумкин:

$$\left\{E_{ij} / i, j = \overline{1, n}\right\},$$

Бу ерда E_{ij} – матрица i – сатр ва j – устун кесишмасида 1 (P майдоннинг **1** элементи), бошқа элементлари 0 га тенг матрица. Маълумки, бу базис элементлари қуйидаги кўпайтириш қонунига бўйсунади.

$$E_{ik} E_{lj} = \delta_{kl} E_{ij}.$$

Маълумки, ихтиёрий $(a_{i,j}) \in M_n(P)$ матрица E_{ik} ларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади:

$$(a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

Бу алгебранинг бирлик элементи қуйидаги бирлик матрицадан иборат бўлади:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Маълумки, λE кўринишидаги элемент $M_n(\mathbf{P})$ алгебранинг ихтиёрий элементи билан ўрин алмашинувчи бўлади, яъни λE элемент $Z(M_n(\mathbf{P}))$ марказда ётади. [8]

Теорема 1. $Z(M_n(\mathbf{P})) = \{\lambda E : \lambda \in \mathbf{P}\}.$

[8] . Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012. 25-26 бет

Исбот: Айтайлик, $Z = (z_{ij}) \in Z(M_n(\mathbf{P}))$ бўлсин, у ҳолда

$$ZE_{ij} = E_{ij}Z, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Бу кўпайтмадан

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad (j)-\text{столбец} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & z_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & z_{2i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & z_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{j1} & z_{j2} & \dots & z_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

тенгликни оламиз.

Демак, $z_{kj} = 0$ ва $z_{ii} = z_{jj}$.

Агар $z_{ii} = z_{jj} = \lambda$ $(i, j = \overline{1, n})$ бўлса, у ҳолда

$$z_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{при} \quad i = j \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j \end{cases}, \text{ яъни } z = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E \ \square$$

Мисол 1. C(X) – тўплам X топологик фазодаги узлуксиз фунциялар тўплами бўлсин. C(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш λf, $f+g$, fg амалларига нисбатан коммутатив алгебра ташкил қилади.

2. Айтайлик X – чизиқли фазо бўлсин, L(X) орқали X да аниқланган барча чизиқли алмаштиришлар $B: X \to X$ тўпламини белгилаймиз. L(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва суперпозиция λB, $A+B$, $A \circ B$ амалларига нисбатан алгебра ташкил қилади. L(X) алгебра коммутатив бўлиши учун X бир ўлчамли бўлиши зарур ва етарли.

Агар X – чекли ўлчамли бўлса, у ҳолда $L(X) = M_n(\mathbf{C})$ бўлади. L(X) даги амаллар мтрицаларни қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш амаллари билан устма-уст тушади.

3. Агар X – банах фазоси бўлса, B(X) орқали барча чегараланган операторли белгиласак B(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш λB, $A+B$, $A \circ B$ амалларига нисбатан алгебра ташкил қилади.

2.2. Бирли элементли алгебра.

Агар A элемент қуйидаги шартни қаноатлантирувчи

$$ex=xe=x \ \text{для всех } x \in R. \qquad (1)$$

e элементга эга бўлса, у ҳолда у бирли элементли ёки бирли алгебра дейилади.

(1) шартни қаноатлантирувчи e элемент R алгебранинг бирлик элементи дейилади.

Тасдиқ 2. Бирлик элементга эга бўлмаган ихтиёрий R алгебрани бирли элементли R' алгебранинг қисм алгебраси сифатида қараш мумкин.

Исбот. R' алгебрани $\{\alpha, x\}$ жуфтликлардан ташкил топган фазо сифатида қараш мумкин, бу ерда $\alpha\in\mathbf{C}$, $x\in R$, бўлиб, амаллар қуйидагича аниқланган.

$$\beta\{\alpha, x\}=\{\beta\alpha, \beta x\};$$

$$\{\alpha_1, x_1\}+\{\alpha_2, x_2\}=\{\alpha_1+\alpha_2, x_1+x_2\};$$

$$\{\alpha_1, x_1\}\{\alpha_2, x_2\}=\{\alpha_1\alpha_2, \alpha_1x_2+ \alpha_2x_1+x_1x_2\}.$$

Бу ерда $e=\{1, 0\}$ элемент R' алгебранинг бирлик элементи бўлади, чунки

$$e\{\alpha, x\}=\{1, 0\}\{\alpha, x\}=\{\alpha, x\}$$

R алгебра эса $\{0, x\}$, $x\in R$ кўринишидаги элементлардан ташкил топган R' нинг қисм алгебраси бўлади. □

Равшанки, R' алгебра R ни ўз ичига олувчи минимал бирлик алгебра бўлади. R алгебрадан R' ни хосиқ қилиш бирни қўшиш деб аталади.

Агар R – бирли алгебра бўлиб, S унинг қисм алгебари бўлса, у ҳолда S алгебрани ўз ичига олувчи бирли алгебраларнинг кесишмаси S ни ўз ичига олувчи энг кичик алгебра бўлади, ва у $R'_a(S)$ орқали белгиланади.

Маълумки, $R'_a(S)$ тўплам $R_a(S)$ алгебрага бирни қўшиш орқали хосил бўлади ва унинг элементларининг умумий кўриниши $\alpha e+\sum_k \alpha_k a_k$ орқали ифодаланади, бу ерда a_k элемент S тўпламнинг элементлари кўпайтмаларидан ҳосил топган.

Тасдиқ 2.2. R бирли алгебранинг максимал коммутатив қисмалгебраси R_1 яна бирли элементли алгебра бўлади.

Исбот: Агар $e \notin R_1$, бўлса у ҳолда с га бирни қўшиш натижасида R коммутатив алгебрани хосил қиламиз. Бу эса R_1 нинг максимал эканлигига зид.

□

Агар x ва y элементлар учун yx=e шарт бажарилса, у ҳолда y элемент x нинг чап тескариси дейилади. x элемент эса y нинг ўнг тескариси дейилади.

Агар x элемент чап тескариси x_l^{-1} ва ўнг тескариси x_r^{-1} каби белгиланади.

Ихтиёрий элементнинг чап ва ўнг тескарилари устма уст тушади:

$$x_r^{-1}=(x_l^{-1}x)\, x_r^{-1}=x_l^{-1}(xx_r^{-1})= x_l^{-1}e= x_l^{-1}.$$

Тасдиқ 2.3. Агар x ва y элементлар ўрин алмашинувчи бўлиб, x^{-1} мавжуд бўлса, у ҳолда x^{-1} ва y ҳам ўрин алмашинувчи бўлади.

Исбот: xy=yx тенгликнинг чап ва ўнг томонларини x^{-1} га кўпайтирисак, $yx^{-1}=x^{-1}y$ ни хосил қиламиз. □

Тасдиқ 2.4. Агар R_1 максимал коммутатив қисмалгебра бўлиб, x элемент R_1 нинг элементи бўлса ва x^{-1} мавжуд бўлса, у ҳолда $x^{-1} \in R_1$.

Исбот: Тасдиқ 2.3 га кўра x^{-1} элемент R_1 нинг барча элементлари билан ўрин алмашинувчи бўлса. R_1 нинг максимал эканлигидан $x^{-1} \in R_1$.

□

Маълумки бирлик элементли ва ихтиёрий элементи тескариланувчи бўлган алгебра жисм дейилади.

Тасдиқ 2.5. Агар R бирлик элементли ва ихтиёрий элементининг чап тескариланувчи бўлса, у ҳолда R – жисм бўлади.

Исбот: Айтайлик, $x \in R$, ва $x \neq 0$ бўлсин. Шартга кўра, $a \in R$ элемент мавжуд бўлиб, ax=e бўлади. Айтайлик, xa=b бўлсин. Равшанки, $b \neq 0$, акс ҳолда a=axa=ab=0 бўлади ва бу эса зиддият. Шунинг учун b чап тескари элементга эга бўлади. Чап тескари элементни y деб белгиласак, yb=e бўлади, демак $yxa=e$.

Шундай қилиб, биз a элемент (yx) чап тескари элементга ва x ўнг тескари элементга бўлишини кўрсатдик. Чап ва ўнг тескари элементлар устма-уст тушганлиги учун $x=yx$, демак $e=yxa=xa$. Демак a элемент x нинг хам чап ва хам ўнг тескари элементи бўлади, яъни $a=x^{-1}$. □

Юқоридиги каби тасдиқ ўнг тескари элемент учун хам ўринли.

Агар $e+y$ элемент $e+x$ га чап тескари элемент бўлса, у ҳолда $y\in R$ элемент $x\in R$ га чап квазитескари элемент дейилади, яъни

$$(e+y)(e+x)=e \Leftrightarrow x+y+yx=0,$$

Ўнг квазитескари элемент хам аналогик тарзда аниқланади:

$$x+y+xy=0.$$

Мисол. 1. $C(X)$ бирлик элементли халқа бўлади, бу ерда айний фукнция бирлик элемент вазифасини бажаради.

2. $L(X)$ ва $B(X)$ алгебралар хам бирлик элементли халқа бўлади, бу ерда айний $e=E$ – оператор бирлик элемент вазифасини бажаради.[9]

2.3. Алгебранинг маркази. Идеал.

Қуйидаги $Z(A)$ тўплам A ассоциатив алгебранинг *маркази* дейилади:

$$Z(A) = \{a \in A: ax = xa, \forall x \in A\}.$$

Тасдиқ 1. A алгебранинг маркази $Z(A)$ қисмалгебра бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $a_1a' \in Z(A) \Rightarrow (a-a')x = ax-a'x = xa-a'x = x(a-a')$, яъни $a-a' \in Z(A)$. Демак, $(aa')x = a(a'x) = a(xa') = (xa)a' = x(aa')$, яъни $aa' \in Z(A)$. Юқоридаги каби $(\lambda a)x = \lambda(ax) = \lambda(xa) = x(\lambda a)$, яъни $\lambda a\in Z(A)$.

□

Тасдиқ 2. Агар A – коммутатив бўлса $Z(A) = A$ бўлади ва аксинча.

Агар A – ассоциатив бирли элементли алгебра бўлса, у ҳолда $\lambda\mathbf{1}\in Z(A)$, $\forall\lambda\in P$, бўлади, чунки, $(\lambda\mathbf{1})x = \lambda(\mathbf{1}x) = \lambda x = \lambda(x\mathbf{1}) = x(\lambda\mathbf{1})$).

[9] Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012. 269-272,бет

Демак, $\lambda \to \lambda \mathbf{1}$ **P** ни $Z(A) \subset A$ га акслантириш бўлиб, у **P** ни A га ўтказувчи моноформизм бўлади.

R алгебранинг I қисм тўплами қуйидаги шартларни қаноатлантирса, у идеал дейилади.

1^0. I тўплам R нинг қисм фазоси,

2^0. $IR \subset I$, яъни. $ax \in I \ \ \forall a \in I,\ x \in R$.

(мос равишда $RI \subset I$, яъни $ax \in I \forall a \in I,\ x \in R$).

Агар $I \neq R$ бўлса, у ҳолда I хос идеал дейилади. Одатда, биз хосмас идеалларни қараймиз.

Агар R бирли элементли алгебра бўлса, у ҳолда унинг хос идели бирлик элементни з ичига олиши мумки эмас. Ҳақиқатан хам, агар $e \in I$, бўлса $\forall x \in R$ учун $x = ex = xe \in I$, яъни, $R = I$ – бу эса зиддият.

Тасдиқ. Бирли элементли алгебранинг x элементи чап (ўнг) тескари элементга эга бўлиши учун у хеч қандай чап (ўнг) идеалга тегишли бўлмаслиги зарур ва етарли.

Исбот: Айтайлик x чап тескари элементга эга бўлсин, яъни $e = x_l^{-1}x$. Агар x бирорта I идеалга тегишли бўлсин. У ҳолда $e = x_l^{-1}x \in RI \subset I$, бу эса зиддият, демак x хеч қандай чап идеалга тегишли бўлмайди.

Аксинча, агар x ҳеч қандай чап (ўнг) идеалга тегишли бўлмаса, у ҳолда I орқали yx, $y \in R$ кўринишидаги барча элементларни белгилаймиз. Бу ўринишдаги тўплам барча R билан устма-уст тушиши мумкин эмас. Акс ҳолда, $y_o \in R$ мавжуд бўлиб, $y_o x = e$, яъни $y_o = x_l^{-1}$ бўлади. Бундан эса $I = \{yx : y \in R\}$ нинг чап идел эканлиги, ва у идеал $x = ex$ элементни ўз ичига олиши келиб чиқади. □

R алгебранинг чап (ўнг) идеали бошқа объектга қисм бўлмаса, у максимал идеал дейилади..

Тасдиқ 3.3. R бирли элементли алгебранинг ихтиёрий чап (ўнг) идеали бирор максимал идеалга қисм бўлади.

Исбот: Айтайлик, I идеал R нинг чап идеали бўлсин. I ни ўз ичига олувчи идеаллар тўпламида қисмий тартиб аниқлаймиз.

Бу тартиб Цорн леммаси шартларини қаноатлантиради. Хақиқатан хам I идеални ўз ичига олувчи $I_\alpha \supset I$ идеаллар учун, уларнинг бирлашмаси $\bigcup_\alpha I_\alpha$ юқори чегара вазифасини бажаради. $e \notin I_\alpha$ бўлгани учун $e \notin \bigcup_\alpha I_\alpha$ бўлади, демак, $\bigcup_\alpha I_\alpha$ идеал R га тенг эмас. Цорн леммасига кўра, I идеални ўз ичига олувчи идеаллар ичида максимали мавжуд.

Ўнг идел учун хам бу тасдиқ юқоридаги каби исботланади.

Натижа. Бирли элементли R алгебранинг x элементи чап тескари элементга эга бщлиши учун у бирор максимал чап идеалга тегишли бщлмаслиги зарур ва етарли

R алгебранинг I қисм тўплами бир вақтда хам ўнг ва хам чап идеал бўлса, у икки томонлама идеал дейилади.

R алгебра ўзи ва нолдан бошқа идеалга эга бўлмаса, у содда алгебра дейилади.

Айтайлик, I тўплам R нинг икки томонлама идеали бўлсин. $x_1, x_2 \in R$ элементлар учун $x_1 - x_2 \in I$ шар бажарилса, бу иккита элемент I га нисбатан эквивалент элементлар дейилади. Демак, R алгебра берилган I идеал бўйича кесишмайдиган ξ, η, … эквивалент синфларга бўлинади. Бу синфлар R алгебра берилган I идеал бўйича қўшмалик синфлари дейилади.

R_1 орқали алгебранинг берилган I идеал бўйича қўшмалик синфлари тўпламини белгилайлик. R_1 тўпламда қўшиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш амалларини қуйидагича аниқламиз:

$$(x+I)+(y+I) \overset{def}{=} x+y+I,$$

$$\lambda(x+I) \overset{def}{=} \lambda x+I, \ \lambda \in I,$$

$$(x+I)(y+I) \overset{def}{=} xy+I.$$

I – икки томонли идеал бўлганлиги учун, R_1 да аниқланган амаллар коррект бўлади ва R_1 ушбу амалларга нисбатан алгебра ташкил қилади.

R_1 алгебра фактор алгебра дейилади ва R/ I каби белгиланади.

Агар икки томонли идеал бошқа хеч қайси икки томонли идеалга қисм бўлмаса, у ҳолда у максимал идеал дейилади.

Юқоридаги тасдиқ каби қуйидаги тасдиқни исбот қилиш мумкин.

Тасдиқ 3.4. Бирли элементли алгебранинг ихтиёрий икки томонли идеали бирор максимал идеалга қисм бўлади.

Назорат саволлари:

1. Ассоциатив ҳалқа таърифи. Мисоллар.
2. Ассоциатив алгебра таърифи. Мисоллар.
3. Коммутатив ҳалқа таърифи. Мисоллар.
4. Коммутатив алгебра таърифи. Мисоллар.
5. Ассоциатив алгебранинг маркази.
6. Градуирланган алгебра. Мисоллар.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

3-мавзу. НОАССОЦИАТИВ АЛГЕБРАЛАРНИНГ ТУРЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАСНИФЛАШ УСУЛЛАРИ.

РЕЖА:

3.1. Ноассоциатив алгебралар турлари.

3.2. Ноассоциатив алгебралар орасидаги боғланишлар.

3.3. Кичик ўлчамли Ли, Лейбниц ва Зинбиел алгебраларининг

Таянч иборалар: *алгебра, Ли алгебраси, Зинбиел алгебраси, идеал, дифференциаллаш, дендриформ, диассоциатив алгебра.*

3.1. Ноассоциатив алгебралар турлари.

1 – таъриф: R (чизиқли) алгебра дейилади, агар

1) R чизиқли фазо бўлса;

2) R да кўпайтириш амали киритилиб, у ихтиёрий x,y,z $\in$R ва ихтиёрий α сон учун қуйидаги шартларни қаноатлантирса:

а) α(xy)қ(αx)yқx(αy),

b) (xy)zқx(yz),

в) (x+y)zқxz+yz,

г) x(y+z)қxy+xz.

1–мисол. C(X) – X топологик фазодаги барча комплекс қийматли узлуксиз функциялар тўплами λf, $f+g$, fg амалларига нисбатан коммутатив алгебра ташкил этади. Хусусан, C[0,1].

2–мисол. X–чизиқли фазо, L(X)–барча чизиқли B:X$\rightarrow$X операторлар тўпламида λB, A+B, A∘B (суперпозиция) амаллар бўлсин. У ҳолда L(X)–алгебра ва L(X) коммутатив фақат ва фақат шу ҳолда, агар X–бир ўлчовли фазо бўлса.

2–таъриф. F майдон устидаги G алгебранинг ихтиёрий x,y,z$\in$G элементи учун

$[x, x] = 0$ – антикоммутатив айнияти,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$ қ 0 – Якоби айнияти,

бажарилса, у ҳолда G алгебра Ли алгебраси дейилади.

3–таъриф. F майдон устидаги L алгебранинг ихтиёрий $x,y,z\in L$ элементи учун

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

тенглик бажарилса, у ҳолда L алгебра Лейбниц алгебраси дейилади.

4–таъриф. F майдон устидаги A алгебранинг ихтиёрий $x,y,z\in A$ элементи учун

$$(x\circ y)\circ z \text{ қ } x\circ(y\circ z) + x\circ(z\circ y)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда A алгебра Зинбиел алгебраси дейилади.

3–мисол: Айтайлик, $C^{\infty}_{[0,1]}$-[0,1] кесмадаги барча чексиз дифференциалланувчи функциялар тўплами бўлсин. Бу тўпламда кўпайтириш амалини қуйидагича киритамиз:

$$(a\circ b)(x) = a(x)\int_0^x b(t)d(t), \text{ бу ерда } a(x), b(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}.$$

У ҳолда $(C^{\infty}_{[0,1]},\circ)$ Зинбиел алгебраси ташкил этади.

5-таъриф. F майдон устида аниқланган L алгебра ва J унинг қисм тўплами учун $\forall\ x\in L$ ва $\forall\ a\in J$ учун $xa\in J$ $(ax\in J)$ бўлса, J- L нинг ўнг (чап) идеали дейилади.

Агар J-бир вақтнинг ўзида хам ўнг, хам чап идеал ташкил қилса, уни L алгебранинг идеали дейилади.

6-таъриф. A ва G алгебралар берилган бўлсин. φ: $A\to G$ акслантириш гомоморфизм дейилади, агар

$\forall\ x,y\in A$ учун $\varphi(xy)$қ$\varphi(x)\varphi(y)$ тенглик ўринли бўлса. Ўзаро бир қийматли гомоморфизмга изоморфизм дейилади.

7-таъриф. L алгебра ва H унинг қисм тўплами бўлсин. Агар H тўплам L даги амалларга нисбатан алгебра ташкил қилса, бу алгебрага L нинг қисм алгебраси дейилади.

8-таъриф. L алгебра ва J унинг идеали учун L/J- фактор тўплам L даги амалларга нисбатан алгебра ташкил қилса, L/J га L нинг фактор алгебраси дейилади.

9-таъриф. Агар ихтиёрий x,y∈L учун қуйидаги тенглик бажарилса**:**

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)]$$

У ҳолда ушбу d:L→L чизиқли акслантириш берилган L алгебрада дифференциал дейилади.

Агар d_1 ва d_2 – дифференциаллашлар бўлса,

$$[d_1,d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1$$

хам дифференциаллаш бўлади.

Der(L) орқали L алгебранинг барча дифференциаллашларини белгилаймиз. Маълумки, (Der(L),[-,-]) – Ли алгебраси ташкил қилади.

L- Ли алгебрасида ∀ a∈L учун

ad_a:L→L акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$ad_a(x)$=[x,a]ada – дифференциаллаш ташкил қилади

InDer(L) орқали қуйидаги тўпламни белгилаймиз

InDer(L)к{ad_a | a∈L} Бу тўпламга L-алгебранинг ички дифференциаллаши дейилади.

Француз математиги J.L.Loday Ли алгебраси тушунчасини умумлаштириб Лейбниц алгебрасини киритган. Ли алгебраси назарий физикада, квант майдонлар назариясида, физика ва математиканинг бошқа бир қанча соҳаларида муҳим рол ўйнайди.

Лейбниц алгебраси L қуйидаги айният билан аниқланади:

$$[[x,y],z] = [[x,z],y] + [x,[y,z]] \quad \forall x,y,z \in A \quad \text{(I)}$$

Бу алгебра Ли алгебрасининг нокоммутатив умумлашмасидир, чунки L да $[x,x]=0$ шарт бажарилса (I) айният Якоби айниятига айланади .

Замонавий алгебрада ассоциатив, коммутатив, Ли, Лейбниц алгебралари билан боғлиқ бўлган янги Зинбиел, диассоциатив, дендриформ алгебралар кенг ўрганилмоқда. [10]

3.2. Ноассоциатив алгебралар орасидаги боғланишлар.

Агар ассоциатив, коммутатив, Ли, Лейбниц, дендриформ, диассоциатив, Зинбиел алгебралар туркумларини мос равишда As, Com, Lie, Lieb, Dend, Dias, Zinb деб белгилаб олсак, у ҳолда туркумлар ўртасида қуйидаги боғлиқлик ўрнатилади:

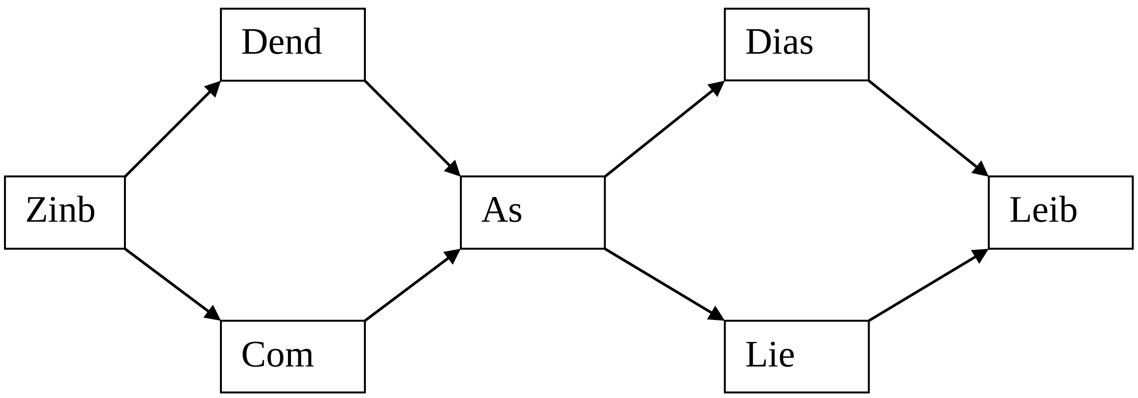
$[x,y]_{Lie}$:As$\to$Lie: $[x,y]_{Lie}=xy-yx$ ассоциатив алгебрада янги амал аниқлаб, Ли алгебрасини ҳосил қиламиз.

$\bullet$:Zind$\to$Com: $x\bullet y=xy+yx$

*:Dend$\to$As $x*y=x<y+x>y$

$[x,y]_{Leib}$:Dias$\to$Leib: $[x,y]_{Leib}=x\dashv y-y\vdash x$

Демак, биз туркумлар ўртасида боғлиқликни ифодаловчи қуйидаги диаграммага эга бўламиз.



K майдон устида берилган ихтиёрий чекли ўлчовли алгебраларда $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ базис мавжуд бўлиб, $e_i\cdot e_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ij}^k e_k$ ўринли, бунда $\alpha_{ij}^k\in K$.[11]

---

[10] Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012. 1-10 бетлар

[11] D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997. 1-10 бетлар

Чекли ўлчовли алгебраларни ўрганишда уларнинг тавсифи муҳим аҳамиятга эга.

Юқорида келтирилган алгебраларнинг аксарияти чекли ўлчовда тавсифланган. Хусусан, [1] да 2 ўлчовли комплекс Зинбиел алгебралари тавсифи келтирилган.[12]

3.3. Кичик ўлчамли Ли, Лейбниц ва Зинбиел алгебраларининг таснифи.

Таъриф. Агарда K майдонда аниқланган $\forall\, x, y, z \in L$ учун қуйидаги муносабат бажарилса:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot (z \cdot y) \qquad \text{(II)}$$

L алгебра Зинбиел алгебраси дейилади.

Зинбиел айниятидан кўринадики $\forall a,b,c \in L$ учун $(a \cdot b)c = (a \cdot c)b$ тенглик бажарилади.

Айтайлик, L алгебрада қуйидаги кетма-кетлик аниқланган бўлсин:

$$L^{(0)} = L,\ L^{(n+1)} = L^{(i)} \cdot L^{(i)}, i > 0$$

Таъриф. Агар $\exists n \in N$ натурал сон учун $L^{(n)} = 0$ тенглик бажарилса, у ҳолда L алгебра разрешимий дейилади.

Агар $C(a) = \{x \in L : a \cdot x = 0\}$ $a \in L$ элементнинг ўнг марказини қарасак, бу тўплам алгебани ўрганишда муҳим аҳамиятга эга бўлади.

Лемма 1. Ихтиёрий L Зимбиел алгебрасидан олинган $\forall a,b \in L$ элементлар учун қуйидаги муносабат ўринли.

$$C(a) \subseteq C(a \cdot b)$$

Исбот: $x \in C(a)$ бўлсин, у ҳолда

$(a \cdot b)x = (a \cdot x)b = 0$ тенгликдан $x \in C(a \cdot b)$ келиб чиқади.

Лемма 2. L Зимбиел алгебраси ва $a \in L$ элемент берилган бўлсин. Агар l_a- чизиқли оператор учун $\mu \in K$ хос сон ва ν-шу хос сонга мос

[12] Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012. 12-14 бетлар

келувчи ҳос вектор бўлса, у ҳолда $v\cdot v$- вектор $2^{-1}\mu$ ҳос сонга мос келувчи ҳос вектор бўлади.

Бу ерда $a\in L$ элементга мос келувчи $l_a : L\to L$ чизиқли оператор $l_a(x)=a\cdot x$ каби аниқланади.

Исбот. Агар $(a\cdot v)=\mu v$ бўлса, у ҳолда $(a\cdot v)v=\mu v\cdot v$ тенглик ўринли бўлади ва Зимбиел айниятига кўра $(a\cdot v)v=2a(v\cdot v)$, бундан эса $\mu v^2=2l_a(v^2)$ келиб чиқади.

Лемма 3. K алгебраик ёпиқ майдонда аниқланган уч ўлчовли L Зимбиел алгебрасида $\forall a\in L$ учун қуйидаги муносабатлардан бири ўринли бўлади:

* $l_a^3=0$

* $\exists b\neq 0, b\in L.\quad 0\neq\lambda\in K$ учун $l_a(b)=\lambda b, b\cdot b=0$ бўлади.

Исбот: Агар $l_a\in EndL$ нил бўлса, у ҳолда Гамильтон-Келининг теоремасига кўра $l_a^3=0$ бўлади.

Агар l_a-нил бўлмаса у ҳолда Гамильтон-Келининг теоремасига кўра l_aнинг нотривиал $\mu\in K$ ҳос сони мавжуд. $v\in L$ вектор μ-ҳос сонга мос келувчи ҳос вектор бўлсин. Лемма2 га кўра $l_a(v^{(K)})=2^{-K}\mu v^{(K)}\,\forall K\in N$

Агар $\mu\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\exists N\leq 3$ мавжудки, бу ерда $v^{(N-1)}\neq 0\quad v^N=o$ бўлади. Демак l_a учун $\exists\mu\neq 0$ ҳос сон мавжудки, $b=v^{(N-1)},\lambda=2^{-N+1}\mu$ деб олсак $l_a(b)=\lambda b, b\cdot b=0$ бўлади.

Лемма 4. Ихтиёрий уч ўлчовли L комплекс Зимбиел алгебрасида $\exists x\neq 0$ элемент мавжудки, бу элемент учун $C(x)=L$ бўлади.

Исбот. Бу леммани исботлашда биз аввал $\exists a_0\neq 0$ элемент мавжуд бўлиб, $\forall b\in L, b\neq 0$ учун $C(a_0)=C(a_0\cdot b)$ бўлишини исботлаймиз.

Бунинг учун $\forall a_1\in L$элемент оламиз. Агар $C(a_1)=L$ бўлса, у ҳолда лемма исботи тўғридан тўғри келиб чиқади.

Демак $C(a_1)\neq L$ деб фараз қиламиз. Лемма2 га кўра $\forall a_2\in L$ учун

$$C(a_1)\subset C(a_1\cdot a_2)\text{ бўлади.}$$

Агар $C(a_1 \cdot a_2) \neq L$ бўлса бу проссесни яна давом эттириб

$$C(a_1) \subset C(a_1 \cdot a_2) \subset C((a_1 \cdot a_2)a_3) \subset L$$

ни хосил қиламиз. L уч ўлчовли бўлгани учун $\exists k \leq 3$ мавжудки $\forall a_{k+1} \in L$ учун

$$C(...(a_1 \cdot a_2)...a_k) = C((...(a_1 \cdot a_2)...a_k)a_{k+1})$$

тенглик ўринли бўлади.

Демак $a_0 = (...(a_1 \cdot a_2)...a_k)$ деб олсак $\forall b \neq 0$ учун $C(a_0) = C(a_0 \cdot b)$ бўлади.

Энди $C(a_0) = L$ бўлишини исботлаймиз.

Агар $l_{a_0} = 0$ бўлса $C(a_0) = L$ бўлади.

Фараз қилайлик, $l_{a_0} \neq 0$ бўлсин, у ҳолда Лемма3 га кўра $l_{a_0}^3 = 0$ ёки $\exists b \in L, b \neq 0$ мавжудки $a_0 \cdot b = \lambda b, b \cdot b = 0$ бўлади, бу ерда $\lambda \neq 0$.

Бизда 2-ҳол бўлиши мумкин эмас, чунки $b \in C(a_0 \cdot b) = C(a_0) \Rightarrow a_0 \cdot b = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ бу эса зиддият.

Демак $l_{a_0}^3 = 0$, у ҳолда $\exists N$ топиладики $1 < N \leq 3$ $l_{a_0}^{N-1} \neq 0$ ва $l_{a_0}^N = 0$ бўлади. У ҳолда $\exists c \in L$ мавжуд бўлиб, $l_{a_0}^{N-1}(c) \neq 0$ бўлади.

Агар $b = l_{a_0}^{N-1}(c)$ деб белгиласак, $a_0 \cdot b = l_{a_0}^N(c) = 0$ бўлади ва биз қуйидагини аниқладик.

$$C(a_0) = C(a_0 \cdot b) = C(0) = L$$

$x = a_0$ деб олсак $C(x) = L$ бўлиб, Лемма исботи келиб чиқади.

Лемма 5. Ихтиёрий уч ўлчовли комплекс Зинбиел алгебрасида хос идеал мавжуд.

Исбот. 4-Леммага асосан $\exists x$ мавжудки $C(x) = L$.

Энди $I = \{L \cdot x\} = \{y \cdot x : y \in L\}$ ни L да идеал бўлишини исботлаймиз.

$\forall a \in L$ учун $(y \cdot x)a = (y \cdot a)x \in I$.

$C(x) = L$ эканлигидан $x \cdot y = 0$ келиб чиқади ва $\forall y \in L$ учун

$$a(y \cdot x) = a(y \cdot x) + a(x \cdot y) = (a \cdot y)x \in I.$$

Демак I икки томонли идеал бўлади.

L да $\{e_1, e_2, e_3\}$ базис мавжуд, агар $e_1 = x$ деб олсак $x \cdot x = 0$ ва

$e_2 \cdot x, e_3 \cdot x$ элементлар I да базис бўлади, яъни $\dim I < 3$ бўлади.

Агар $I \neq 0$ бўлса, у ҳолда I қисм алгебра L да хос идеал бўлади.

$I = L \cdot x = 0$ бўлганда эса $\{\alpha x : \alpha \in K\}$ тўплам L да бир ўлчовли идеал бўлади.

Лемма исботланди.

Теорема 1. K майдонда аниқланган ихтиёрий уч ўлчовли комплекс Зинбиел алгебраси разришимий бўлади.

Исбот: Бизга маълумки $\dim L = 1$ ва $\dim L = 2$ бўлган ҳолларда L Зинбиел алгебраси разрешимий бўлади.

Айтайлик $\dim L = 3$ бўлсин, у ҳолда 5-Леммага кўра L да I хос идеал мавжуд. $\dim I < 3$ ва $\dim L / I < 3$ бўлгани учун бу алгебраларнинг хар бири разрешимий бўлади. Бундан эса L нинг разрешимий эканлиги келиб чиқади.

Теорема исботланди.

Энди биз уч ўлчовли комплекс Зинбиел алгебрасини тавсифини келтирамиз

Теорема 2. Ихтиёрий уч ўлчовли комплекс Зинбиел алгебраси қуйидаги иккита Зинбиел алгебраларидан бирига изоморф бўлади.

$$L_1 : \; e_2 \cdot e_2 = a_1 e_1 \;,\; e_2 \cdot e_3 = a_2 e_1 \;,\; e_3 \cdot e_2 = a_3 e_1 \;,\; e_3 \cdot e_3 = a_4 e_1$$

$$L_2 : \; e_2 \cdot e_3 = e_1 \;,\; e_3 \cdot e_2 = \frac{1}{2} e_1 \;,\; e_3 \cdot e_3 = e_2$$

Назорат саволлари:

1. Чизиқли алгебра.
2. Ли алгебраси.
3. Лейбниц алгебраси.
4. Зинбиел алгебраси.
5. Ли, Лейбниц ва Зинбиел алгебраларининг таснифи.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Albeverio, S., Ayupov, Sh.A. and Omirov, B.A.: On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. Algebra. (2005), 159–172.

2. Loday. J. L. Dialgeras. Prepublication del'Inst. De Recherche Math. Avancee (Strasbourg). V. 14(1999). 61 pp.

3. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. – 1993. - Vol. 39. – P. 269-293.

4. Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M. Nilpotency of Zinbiel algebras. J. Dyn. Control. Syst., vol. 11(2), 2005, p. 195-213.

4-мавзу. ЗАМОНАВИЙ АЛГЕБРА МУАММОЛАРИ БЎЙИЧА СЎНГГИ ЙИЛЛАРДА ХОРИЖДА ВА РЕСПУБЛИКАМИЗДА ЎРГАНИЛАЁТГАН ДОЛЗАРБ МУАММОЛАР ВА УЛАРНИНГ ЕЧИМЛАРИНИНГ ТАҲЛИЛИ.

РЕЖА:

4.1. *Хозирги кунда ноассоциатив алгебраларни ўрганишнинг долзарблиги.*

4.2. *Ноассоциатив алгебралар бўйича асосий тушунчалар.*

4.3. *Сўнгги йилларда олинган асосий натижалар.*

Таянч иборалар: *Лейбниц алгебраси, Лейбниц супералгебраси, нилпотент, ечилувчан, нильиндекс, нилрадикал, филиформ, нуль-филиформ, дифференциаллаш, градуирланган grL алгебра.*

4.1. Ҳозирги кунда ноассоциатив алгебраларни ўрганишнинг долзарблиги.

Алгебраик воситалар квант назариясининг элементар зарралари, қаттиқ ва кристал моддаларнинг хусусиятлари, популяцион биология масалалари, иқтисодий масалаларнинг моделларини таҳлил қилишда жуда фойдали ҳисобланади. Алгебраларнинг дастлабки синфи ҳисобланган, ассоциатив алгебралар матрицаларнинг кўпайтириш амалига нисбатан ёпиқлиги натижасида ҳосил бўлган бўлса, кейинчалик алгебралар назариясининг жадал суратда ривожланиши натижасида, математиканинг бошқа соҳалари билан боғлиқ бўлган алтернатив, Ли ва Йордан алгебралари назарияси вужудга келди. Лейбниц алгебралари Ли алгебраларининг умумлашмаси ҳисобланиб, Ли алгебраларида ўринли бўладиган бир қанча хоссаларни Лейбниц алгебралари учун ҳам давом эттириш мумкин. Ли алгебралари назариясидан маълум бўлган теоремаларни Лейбниц алгебралари учун исботлаш билан бирга Ли бўлмаган Лейбниц алгебраларининг хоссаларини топиш билан боғлиқ тадқиқотлар ҳозирги кунда ноассоциатив алгебралар назариясининг устивор йўналишларидан бири бўлиб келмоқда.

Ли алгебраларининг классик назариясидан маълумки, чекли ўлчамли Ли алгебралари устида олиб бориладиган тадқиқотлар ечилувчан Ли алгебраларини таснифлашга олиб келинади. Ўз навбатида Лейбниц алгебралари ҳам ярим содда Ли алгебраси ва ечилувчан радикалнинг тўғри йиғиндиси шаклида ифодаланади. Нилрадикали махсус типга эга бўлган ечилувчан алгебралар турли хил физик моделлар билан боғлиқдир. Шунинг учун Ли алгебралари назариясида бўлгани каби, нилрадикали берилган чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларни тасниф қилиш ҳам долзарб муаммолардан ҳисобланади.

Нилпотент алгебралар ечилувчан алгебраларнинг қисм синфи ҳисобланиб, барча нилпотент алгебраларни тасниф қилиш масаласи ўта мураккабдир. Шунинг учун, нилпотент алгебраларни қўшимча шартлар асосида тасниф қилинади. Ҳусусан, уларни таснифлашда нилиндекси аниқ бўлган алгебралар синфини ажратиб олиш асосий омиллардан бири бўлиб, бундай синфларнинг дастлабкиси филиформ Лейбниц алгебраларидир. Филиформ Лейбниц алгебралари нисбатан содда шартларга эга бўлишига қарамасдан, етарлича мураккаб тузилишга эга ва уларни таснифлашда градуировка шартини қўллаш қулай ҳисобланади. Максимал градуировканинг самарадорлиги шундаки, у алгебранинг кўпайтириш жадвалидаги структуравий ўзгармаслар ҳақида аниқ маълумот беради.

Сиқиш, бузилиш ва деформация тушунчалари алгебрага физикадан кириб келган бўлиб, ҳусусан Ли алгебрасини сиқиш, физик нуқтаи назардан, бирор физик модел бошқасини инвариантлар группаси таъсирининг лимити ёрдамида ҳосил қилинганлигини англатади. Ўз навбатида, деформация берилган типдаги объектлар кўпҳиллигининг кичик атрофидаги локал тузилишини характерлайди. Шунинг учун, Лейбниц алгебраларининг деформациялари, геометрик хоссалари, структуравий назариялари ва когомологиясини ўрганиш жуда муҳимдир.

Берилган алгебраик кўпҳиллик чекли сондаги келтирилмас компоненталарнинг бирлашмасидан иборат бўлаганлиги, қаттиқ алгебралар орбиталарининг ёпилмаси эса келтирилмас компонентани берганлиги сабабли, чекли ўлчамли алгебраларнинг геометрик хоссаларини аниқлашда қаттиқ алгебраларни топиш алоҳида аҳамиятга эга. Лейбниц алгебралари ва уларнинг когомологик хоссаларининг, Йордан алгебралари, Ли алгебралари, ҳамда уларнинг умумлашмалари билан ўзаро алоқадорлиги диссертация мавзуси билан боғлиқ тадқиқотларнинг заруратини ифодалайди.

Ли алгебраларининг яна бир умумлашмаси ҳисобланган Ли супералгебралари математик физиканинг суперсимметрия хоссалари ёрдамида аниқланган. Лейбниц супералгебралари нафақат Лейбниц алгебраларининг, балки Ли супералгебраларининг ҳам умумлашмаси ҳисобланиб, уларнинг хоссаларини аниқлашда табиий равишда Лейбниц алгебралари ва Ли супералгебралари кўпҳиллигидаги усуллардан фойдаланилади. Лейбниц алгебрасидаги каби максимал нилиндексли ёки нилиндекси ўлчамига тенг бўлган нилпотент Лейбниц супералгебраларини таснифлаш чекли ўлчамли Лейбниц супералгебралари назариясининг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади.

Ҳозирги кунда Ли алгебраларнинг умумлашмаси ҳисобланган Лейбниц алгебралари синфи жадал суратда ўрганилмоқда. Лейбниц алгебралари ўтган асрнинг 90-йилларида француз математиги Ж.Л. Лоде томонидан ушбу

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

Лейбниц айнияти билан характерланадиган алгебра сифатида фанга киритилган[13].

Таъкидлаш жоизки, Лейбниц айниятини қаноатлантирувчи алгебра

---

[13] Goze M., Khakimdjanov Yu. Nilpotent Lie Algebras. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. – 1996. Vol. 361. – 336 p.

биринчи бўлиб 1965 йилда А. Блохнинг ишида D-алгебралар номи билан киритилган эди. Лекин, D-алгебраларни ўрганишга унчалик эътибор берилмаган бўлиб, фақатгина Ж.Л. Лоде ва Т.Пирашвилининг ишларидан кейингина Лейбниц алгебралари жадал суратда ўрганила бошланди ва ҳозирги кунга келиб бу алгебраларга бағишланган бир қатор мақолалар чоп қилинди.

Ж.Л. Лоде ва унинг илмий ҳамкорлари томонидан асосан Лейбниц алгебралари когомологик нуқтаи назардан ўрганилган бўлса, Ш.А. Аюпов, Б.А. Омиров, И.С.Рахимов, И.М. Рихсибоев, А.Х.Худойбердиев ва бошқа олимларнинг ишларида бу объектнинг структуравий назарияси ўрганилган.

Лейбниц алгебралари синфи Ли алгебраларининг умумлашмаси бўлганлиги учун, табиий равишда нильпотент ва ечимли Ли алгебралар назариясида ўринли бўладиган бир қанча натижалар ва усуллар Лейбниц алгебраларигача кенгайтирилади.

Чекли ўлчовли Ли алгебралари классик назариясидан маълумки, чекли ўлчовли Ли алгебраларини ўрганиш нильпотент Ли алгебраларини ўрганиш масаласига келтирилган. Максимал нильиндексга эга бўлган Ли алгебралари синфи эса нильпотент Ли алгебралар синфининг муҳим қисми хисобланади.

Маълумки, Ли алгебралари учун максимал нильиндекс, алгебра ўлчови билан устма-уст тушади, ҳамда бундай алгебралар филиформ алгебралари деб номланади. Лейбниц алгебраларининг Ли алгебраларидан фарқли жиҳатларидан бири шундаки, унинг максимал нильиндекси алгебра ўлчовидан биттага катта бўлади ва бундай Лейбниц алгебраларини нул-филиформ Лейбниц алгебралари дейилади.

Шу боисдан, нильиндекси алгебранинг ўлчовига тенг бўлган Лейбниц алгебраларини, яъни филиформ Лейбниц алгебраларини ўрганиш муҳим жихат хисобланади. Филиформ Лейбниц алгебралари нильпотент алгебраларининг нисбатан содда қисми бўлишига қарамасдан, улар етарлича мураккаб хусусиятларга эга. Шунинг учун, уларни градуировка шартлари билан ўрганиш қулайроқдир ва бу борада табиий равишдаги градуировка, максимал узунликдаги градуировка, берилган филтрлашга мос келувчи градуировкалар каби турли хил градуировкалардан фойдаланилади.

Ечимли Лейбниц алгебраларини ўрганишда Лейбниц алгебрасининг нилрадикали ва нилрадикалнинг дифференциаллашлари мухим роль ўйнайди. Ечимли Лейбниц алгебрасининг ва нилрадикал ўлчовларининг фарқи нилрадикалнинг нил-нильпотент бўлмаган дифференциаллашларнинг максимал сонидан ошиб кетмайда. Сўнгги йилларда нилрадикали берилган ечимли Лейбниц алгебраларининг татбиғига доир бир қанча ишлар чоп этилди[14].

Деформациялар назарияси берилган алгебралар кўпхиллигида мухим ахамиятга эга ва у алгебранинг геометрик нуқтаи назардан ўрганиш имконини беради. Ассоциатив ва Ли алгебралари учун деформациялар назарияси М Герстенхабер ва А.Ниженхуис, Р.В.Ричардсонларнинг ишларида келтирилган. Бир ўзгарувчили деформациялар назарияси Ли алгебраларининг когомологияси ва инфинитезимал деформациялар орасидаги боғланишни топиш имконини беради. Бундан ташқари инфинитезимал деформациаларни топиш Ли алгебралар кўп хиллигидаги қаттиқ алгебраларни топишда қўлланилгани учун уларни ҳисоблаш алгебраик геометриянинг асосий масалалари ҳисобланади. А.Х.Худойбердиев, Б.А.Омировнинг ишларида нульфилиформ Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформациялари тўлиқ таснифланиб, олинган тасниф ёрдамида баъзи қаттиқ алгебралар топилган.

---

[14] Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.
Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 4. – P. 1259–1277.
Loday J.-L., Pirashvili T. Leibniz representations of Leibniz algebras. // J. Algebra. – 1996. - Vol. 181. – P. 414-425.

Ушбу параграфда ечимли Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформацияларини ҳисоблашга бағишланган. Параграфда нилрадикали филиформ Лейбниц алгебрасидан иборат бўлган ечимли Лейбниц алгебраларининг инфинитезимал деформациялари топилган. Такидлаш жоизки, филиформ Лейбниц алгебралари учта синфдан иборат бўлиб, хар бир синф бир нечта ечимли Лейбниц алгебраларини беради. Иккинчи синф филиформ Лейбниц алгебраси орқали 7 та ечимли Лейбниц алгебраларини синфи хосил қилинган бўлиб, ушбу параграфда шу ечимли алгебралардан бири ўрганилган ва инфинитезимал деформациялари тўлиқ таснифланган. Бундан ташкари, танланган алгебранинг дифференциаллашлар фазоси хам тўлиқ таснифланиб, олинган таснифлар ёрдамида 2 – группа коцикллари $ZL^2(L, L)$ кочегараларининг $BL^2(L, L)$ ўлчамлари топилган. Маълумки, $ZL^2(L, L)$ ва $BL^2(L, L)$ ни топиш 2 – группа когомология $HL^2(L, L)$ ни топиш имконини беради, хамда $HL^2(L, L)$ нинг нолга тенг бўлиши алгебранинг қаттиқ бўлиши етарлилик шарти ҳисобланади.

4.2. Ноассоциатив алгебралар бўйича асосий тушунчалар.

1-таъриф. Агар ихтиёрий x, y, z $\in$G элементлар учун қуйидаги айниятлар бажарилса:

$$[x, x] = 0 \text{ – антикоммутативлик айнияти,}$$

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \text{ – Якоби айнияти,}$$

бу ерда [-,-] – G да аниқланган кўпайтириш амали.

У ҳолда, F майдони устидаги G алгебраси Ли алгебраси дейилади.

2-таъриф. Агар ихтиёрий x, y, z$\in$L элементлар учун Лейбниц айнияти бажарилса:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] – [[x, z], y]$$

бу ерда [-,-] – L да аниқланган кўпайтириш амали.

У ҳолда, F майдони устидаги L алгебраси Лейбниц алгебраси дейилади

Ихтиёрий Ли алгебраси Лейбниц алгебраси бўлади.

A алгебраси Z_2-градуирланган алгебра ёки супералгебра дейилади, агар $A=A_0\oplus A_1$ бўлса, бу ерда $A_i\cdot A_j\subseteq A_{i+j(\mathrm{mod}\ 2)}$, $i, j\in Z_2$.

3-таъриф. Агар қуйидаги шартлар бажарилса:

$$[x, y] = -(-1)^{\alpha\beta}[y, x] \quad \text{ихтиёрий } x\in G_\alpha,\ y\in G_\beta \text{ лар учун,}$$

$$(-1)^{\alpha\gamma}[x, [y, z]] + (-1)^{\alpha\beta}[y, [z, x]] + (-1)^{\beta\gamma}[z, [x, y]] = 0$$

ихтиёрий $x\in G_\alpha$, $y\in G_\beta$, $z\in G_\gamma$ лар учун (Якоби суперайнияти).

Берилган [-,-] кўпайтмали Z_2 – градуирланган алгебра $G=G_0\oplus G_1$ Ли супералгебраси дейилади.

4-таъриф. Агар қуйидаги шартлар бажарилса:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - (-1)^{\alpha\beta}[[x, z], y]$$

ихтиёрий $x\in L$, $y\in L_\alpha$, $z\in L_\beta$, лар учун (Лейбниц суперайнияти).

У ҳолда Берилган [-,-] кўпайтмали Z_2 – градуирланган алгебра $L=L_0\oplus L_1$ Лейбниц супералгебраси дейилади.

5-таъриф. Агар ихтиёрий $x,y\in L$ учун қуйидаги тенглик бажарилса**:**

$$d(xy)=d(x)y+xd(y).$$

У ҳолда ушбу $d:L\to L$ чизиқли акслантириш берилган L алгебрада дифференциал дейилади.

Ихтиёрий L Лейбниц алгебраси учун қуйидаги кетма-кетликларни аниқлаймиз:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}],\ k\geq 1$$

$$L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1],\ k\geq 1.$$

6-таъриф. L Лейбниц алгебраси ечимли дейилади, агар шундай $m\in N$ мавжуд бўлсаки, натижада $L^{[m]}=0$ бўлса. Ана шундай m ларнинг энг кичигига L ечимли алгебранинг индекси дейилади.

7-таъриф. L Лейбниц алгебраси нильпотентли дейилади, агар шундай $s\in N$ мавжуд бўлсаки, натижада $L^s=0$ бўлса. Ана шундай хусусиятга эга бўлган минимал s сони нильпотентлик индекси ёки L алгебрасининг нильиндеки дейилади.

8-таъриф. L Лейбниц алгебрасининг максимал нилпотент идеалига унинг нилрадикали дейилади.

9-таъриф. Агар $\dim L^i = n+1-i$ бўлса, бу ерда $n = \dim L$ ва $1 \le i \le n$.

У ҳолда, n-ўлчовли L Лейбниц алгебраси нуль-филиформ дейилади,

1-Теорема. Ихтиёрий n-ўлчовли нуль-филиформ Лейбниц алгебраси L да шундай $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ базис мавжудки, L алгебрасидаги кўпайтма қуйидаги кўринишга келади:

$$[e_i, e_1] = e_{i+1},\ 1 \le i \le n-1,$$

бу ерда иштирок этмаган кўпайтмалар нолга тенг бўлади.

10-таъриф. Агар $\dim L^i = n-i,\ 2 \le i \le n$ бўлса,

у ҳолда, L Лейбниц алгебраси филиформ дейилади,

L – чекли ўлчовли нильпотентли Лейбниц алгебраси бўлсин. $gr(L)_i:=L^i/L^{i+1}$, $1 \le i \le s-1$ деб оламиз, бу ерда s –L алгебрасининг нильиндекси, ва $grL=gr(L)_1 \oplus gr(L)_2 \oplus \ldots \oplus gr(L)_{s-1}$ деб белгилаб оламиз. У ҳолда $[gr(L)_i, gr(L)_j] \subseteq gr(L)_{i+j}$, бўлади ва биз градуирланган grL алгебрасига эга бўламиз.

11-таъриф. Юқоридаги каби аниқланган градуировкаларни табиий градуировкалашиш деб аталади. Агар L Лейбниц алгебраси grL адгебрасига изоморф бўлса, L табиий усул билан градуирланган Лейбниц алгебраси дейилади.

4.3. Сўнгги йилларда олинган асосий натижалар.

Ушбу теоремада табиий усулда градуирланган филиформ Лейбниц алгебсининг таснифи келтирилган.

3.1-Теорема.[15] Ихтиёрий n–ўлчовли комплекс табиий градуаллашган Лейбниц алгебраси қуйидаги жуфти билан изоморф

[15] Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.

бўлмаган алгебраларга изоморф бўлади

$$F_n^1: \quad [e_1,e_1]=e_3,\ [e_i,e_1]=e_{i+1} \text{ где } 2 \le i \le n-1,$$

$$F_n^2: \quad [e_1,e_1]=e_3,\ [e_i,e_1]=e_{i+1} \text{ где } 3 \le i \le n-1,$$

$$F_n^3: \quad [e_i,e_1]= -[e_1,e_i]=e_{i+1},\ [e_i,e_{n+1-i}]=[e_{n+1-i},e_i]=\alpha(-1)^{i+1}e_n \text{ где } 2 \le i \le n-1,$$

бу ерда иштирок этмаган кўпайтмалар нолга тенг бўлади, $\alpha\in\{0,1\}$, агар n жуфт бўлса ва $\alpha=0$, агар n тоқ бўлса.

L – чекли сондаги нол бўлмаган фазоли Z-градуировкаланган Лейбниц алгебраси бўлсин, яъни ихтиёрий i, j∈Z лар учун $L=\bigoplus_{i\in Z} V_i$ ўринли бўлсин, бу ерда $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$.

L нильпотент Лейбниц алгебраси Лейбница боғланган градуировкага имкон яратади деймиз, агар $L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus \dots \oplus V_{k_t}$, бу ерда $V_i \neq 0$ ихтиёрий i учун $(k_1 \le i \le k_t)$. $l(\oplus L)=k_t-k_1+1$ сони градуировка узунлиги дейилади. Кейинчалик $l(L)=\max\{len(\oplus L)=k_t-k_1+1 \mid L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus \dots \oplus V_{k_t}$ боғланган ҳолда градуирланган$\}$ ни L Лейбниц алгебрасининг узунлиги деб атаймиз. L Лейбниц алгебраси максимал узунликдаги алгебра дейилади, агар $l(L)=\dim L$ бўлса.

3.1-Мисол. Нуль-филиформли L Лейбниц алгебраси максимал узунликдаги алгебра бўлади. Ҳақиқатдан ҳам, 1.1.1-теорема да $1\le i \le n$ учун $V_i:=\{e_i\}$ деб қабул қилсак, биз $L=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_n$ га эга бўламиз, бу ерда $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$.

3.2-Теорема.[16] Ихтиёрий n-ўлчовли комплекс ечилмайдиган филиформ Ли бўлмаган максимал узунликдаги L алгебрасида шундай базис $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ мавжудки, L даги кўпайтма учун қуйидаги ўринли бўлади:

$$[x_i, x_1] = x_{i+1},\ \ 2 \le i \le n-1$$

[16] Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length (n–1) and their derivations. // Journal of Algebra. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488.

(иштирок этмаган кўпайтмалар нолга тенг бўлади).

Узунлиги n–1 бўлган комплекс n–ўлчовли филиформли Лейбниц алгебраси L берилган бўлсин. 1.2.1-Теорема дан келиб чиқадики, L алгебрасида шундай базис мавжуд бўлиб, унда унинг кўпайтмаси қуйидаги учта кўринишдан бирига эга бўлади F_1, F_2, F_3.

3.1-Тасдиқ. L – узунлиги F_1 синфига тегишли бўлган, узунлиги n–1 бўлган филиформли Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда n–1 узунликдаги градуировка табиий градуировка билан устма-уст тушади.

3.2-Тасдиқ.[17] Узунлиги n–1 бўлган F_2 синфига тегишли бўлган ихтиёрий n-ўлчовли филиформли Лейбниц алгебраси қуйидаги алгебраларнинг биттасига изоморф бўлади:

$$F_n^2:\begin{cases}[y_1,y_1]=y_3, & \\ [y_i,y_1]=y_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$M_1(k):\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_i,y_n]=y_{k+i-1}, & 1\le i\le n-k,\ 3\le k\le n-1,\end{cases}$$

$$M_2:\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_i,y_n]=y_{\frac{n+1}{2}+i-1}, & 1\le i\le \dfrac{n-1}{2},\\ [y_n,y_n]=\alpha y_{n-1}, & \alpha\ne 0,\end{cases}$$

$$M_3:\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_n,y_n]=y_{n-1}, & \end{cases}$$

бу ерда иштирок этамаган кўпайтмалар нолга тенг ва $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ – тегишли алгебранинг базаси бўлади.

Назорат саволлари:

1. Ноассоциатив алгебралар. Мисоллар.
2. Ли алгебраси Лейбниц алгебраси бўладими?
3. Якоби суперайнияти.
4. Лейбниц суперайнияти.

[17] Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 4. – P. 1259–1277.

5. L алгебрада дифференциал тушунчаси.
6. L Лейбниц алгебраси нильпотенти.
7. L Лейбниц алгебрасининг нилрадикали нима?
8. L Лейбниц алгебраси филиформи.
9. Градуирланган Лейбниц алгебраси нима?

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.

2. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length (n–1) and their derivations. // Journal of Algebra. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488.

3. Barnes D.W. On Levi's theorem for Leibniz algebras. // Bull. Austr. Math. Soc., – 2012. - Vol. 86. - № 2. – P. 184-185.

4. Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 4. – P. 1259–1277.

5. Loday J.-L., Pirashvili T. Leibniz representations of Leibniz algebras. // J. Algebra. – 1996. - Vol. 181. – P. 414-425.

6. Goze M., Khakimdjanov Yu. Nilpotent Lie Algebras. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. – 1996. Vol. 361. – 336 p.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР

1 - амалий машғулот:
Алгебра фани ривожланишининг қисқача тарихи ва замонавий математикадаги ўрни. Алгебраик тизим тушунчаси.

Ишдан мақсад: Алгебраик тизим тушунчалари ҳакида кўникмаларга эга булиш. Алгебраик тизимларга доир мисоллар ечиш.

Масаланинг қўйилиши:

1. Қуйидаги группалар аддитив группалар эканлигини кўрсатинг.

(Z, +), (Q, +), (R, +), (C, +)

Ишни бажариш учун намуна:

1. (Z, +) нинг аддитив группа эканлигини кўрсатамиз.

Биринчи навбатда (Z, +) нинг группа эканлигини текширамиз,

i) $\forall a,b,c \in Z$ учун ассациативликка текширайлик:

$$(a+b)+c=a+b+c=a+(b+c)$$

ii) $e=0 \in Z$, элемент $\forall a \in Z$ учун нейтрал элемент:

$$e+a=0+a=a$$
$$a+e=a+0=a$$

iii) $\forall a \in Z$ учун шундай $b \in Z$, $b=a^{-1}$

$$a+b=b+a=e=0 \Rightarrow \quad a^{-1}=-a$$

Назорат саволлари:

1. M(n, R) n×n матрицалар тўплами қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлишини кўрсатинг.

2. R_n чизиқли фазо қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

3. C[a, b] – [a, b] кесмада аниқланган узлуксиз функциялар қўшиш амалига нисбатан аддитив группа бўлади.

4. Қуйидаги группалар мультипликатив группалар эканлигини кўрсатинг

$Q^* = Q\backslash\{0\}$, $R^* = R\backslash\{0\}$, $C^* = C\backslash\{0\}$

5. M(n, R) детерминанти нолдан фарқли бўлган n×n матрицалар тўплами кўпайтириш амалига нисбатан мультипликатив группа бўлади.

6. Ихтиёрий сондаги қисмгруппаларнинг кесишмаси яна қисм группа бўлишини кўрсатинг.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

2-амалий машғулот:
Группа, ҳалқа ва майдонлар

Ишдан мақсад: Группалар ёрдамида ҳалқа ва майдонларнинг ҳосил қилинишини билиш. Майдонларнинг муҳимлиги ва айниқса чекли майдонларнинг структурасини тушуниш, уларга доир мисоллар ечиш.

Масаланинг қўйилиши:

1) $(Z,+,\cdot)$. m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами m**Z, Z** нинг қисмҳалқаси бўлади;

2) $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ – рационал сонлар ҳалқаси;

Ишни бажариш учун намуна:

$s=\{x=(x_1,x_2, \dots, x_n, \dots), x_i\in\mathbf{R}\}$ – ҳақиқий сонлардан тузилган кетма-кетликлар фазоси ва К – барча a: s → s чизиқли акслантиришлар ҳалқаси бўлсин. s да амаллар координаталар бўйича аниланган. К ҳалқада қўшиш ва операторлар супер позицияси (композицияси) амалларини қуйидагича аниқлаймиз: $(a_1\oplus a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x)$, $(a_1\otimes a_2)(x)=a_2(a_1(x))$, $x\in s$.

$a_i : s\to s$операторлар қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$a_1: x=(x_1, x_2, \dots,x_n,\dots) \to (x_2, x_3, \dots, x_{n+1},\dots),$$

$$a_2: x=(x_1, x_2, \dots,x_n,\dots) \to (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1},\dots).$$

У ҳолда,

$$a_1\otimes a_2 :x=(x_1, x_2, \dots, x_n,\dots) \to (0, x_2, x_3, \dots, x_{n+1},\dots),$$

$$a_2\oplus a_1: x=(x_1, x_2, \dots,x_n,\dots) \to(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1},\dots),$$

яъни $a_2\oplus a_1=1$ –айни оператор.

Демак, $a_1\oplus a_2\neq 1$, $a_2\oplus a_1=1$, яъниa_1ўнг (чап бўлмаган), a_2эса чап (ўнг бўлмаган) К даги бирнинг бўлувчиларидир.

Назорат саволлари:

1) $(Z,+,\cdot)$. m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами m**Z, Z** нинг қисмҳалқаси бўлади;

2) $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ – рационал сонлар ҳалқаси;

3) $(\mathbf{R},+,\cdot)$ – ҳақиқий сонлар ҳалқаси. **Z** ва **Q** тўпламлар **R** нинг бирлик яримҳалқасидир;

4) $M_n(\mathbf{R})$–**R** майдонустида аниқланган nxn матрицалар ҳалқаси, бирли ҳалқа бўлади. n> 1 да$M_n(R)$ - нокоммутатив, $M_n(Q)$, $M_n(Z)$ – яримҳалқа;

5) **К**коммутатив ҳалқаустида аниқланган nxn матрицалар $M_n(\mathbf{K})$ ҳалқаси,

6) Функциялар ҳалқаси. X –ихтиёрий тўплам, **К**- ҳалқа. Барча f: X→**K** функциялар $K^x=\{f: X\to\mathbf{K}\}$ тўплами f+g*йиғинди*вa*fg* кўпайтма:

$$(f+g)(x)=f(x)\oplus g(x),\ (fg)(x)=f(x)\otimes g(x),$$

амалларига нисбатан ҳалқа бўлади, бу ерда $\oplus$, $\otimes$– **К** ҳалқадаги амаллар.

7) Агар 0 ва 1**К**ҳалқанинг нол ва бирлик элементи бўлса, у ҳолда 0_x: $x\to 0$ ва 1_x: $x\to 1$ –ўзгармас функциялар K^x ҳалқанинг ноли ва бири бўлади.

Агар К –коммутатив бўлса, у ҳолда K^x – коммутатив.

Агар К=**R**ёкиX=[0.1] бўлса, K^x = $\mathbf{R}^{[0.1]}$ –[0; 1] да аниқланган барча ҳақиқий функциялар ҳалқасидир. У ўз ичига қуйидаги қисмҳалқаларни олади:

B[0.1] – барча чегараланган ҳақиқий функциялар ҳалқаси;

C[0.1] – барча ҳақиқий узлуксиз функциялар ҳалқаси.

8) **Z**, **Q**, **R**, **C** ҳалқаларда ab=0 $\Rightarrow$ a=ёки b=0, аммо

а) M_n(R)ҳалқа ab=$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0$;

в) Z_4 ҳалқада $2\otimes 2=0$;

с) R^2 ҳалқада (1,0)(0,1)=0 ва б.

Мисоллар. 1) f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_m$ эпиморфизм бўлади ва Kerf=m**Z**, m**Z**- **Z**да идеал(умуман **Z**да ихтиёрий қисмҳалқа m**Z** кўринишга эга, яъни идеал);

2) $M_2(\mathbf{Z})$ – **Z** майдон бўйича 2х2 матрицалар ҳалқаси**.** K_0= $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\delta\in Z\right\}$ ярим ҳалқа бўлади, идеал эмас: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & 0\end{pmatrix}\notin K_0$;

3) Коммутатив ҳалқада идеал қуриш методлари:

а) $\forall a\in K$, aK –Книнг идеали бўлади: ax+ay=a(x+y), (ax)y=a(xy). aK идеал $a\in K$ элемент ёрдамида тузилган асосий идеал деб юритилади.

Мисол. $s=\{x=(x_1,x_2, \ldots, x_n, \ldots), x_i\in\mathbf{R}\}$ – ҳақиқий сонлардан тузилган кет-кетликлар фазоси ва К – барча a: s $\to$ s чизиқли акслантиришлар ҳалқаси бўлсин. s да амаллар координаталар бўйича аниланган. Кҳалқада қўшиш ва операторлар супер позицияси (композицияси) амалларини қуйидагича аниқлаймиз: $(a_1\oplus a_2)(x)=a_1(x)+a_2(x)$, $(a_1\otimes a_2)(x)=a_2(a_1(x))$, $x\in s$.

a_i : s$\to$sоператорлар қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to (x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

$$a_2: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to (0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},\ldots).$$

У ҳолда,

$$a_1\otimes a_2 :x=(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ldots) \to (0, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

$$a_2\oplus a_1: x=(x_1, x_2, \ldots,x_n,\ldots) \to(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1},\ldots),$$

яъни $a_2\oplus a_1=1$ –айни оператор.

Демак, $a_1 \oplus a_2 \neq 1$, $a_2 \oplus a_1 = 1$, яъни a_1 ўнг (чап бўлмаган), a_2 эса чап (ўнг бўлмаган) К даги бирнинг бўлувчиларидир.

$M_n = M_n(\mathbf{R})$ матрицалар ҳалқасида тескариланувчан элементлар, бу тескариланувчан матрицалардир(яъни нолдан фарқли детерменинантга эга бўлган марицалар). Тескариланувчан элемент нолнинг бўлувчиси бўла олмайди:

$ab=0 \Rightarrow a^{-1}(ab)=0 \Rightarrow (a^{-1}a)b=0 \Rightarrow b=0$, (шунга ўхшаш, $ba=0 \Rightarrow b=0$).

Мисол. $Q(\sqrt{2}) = \{c\colon c=a + b\sqrt{2},\ a, b \in Q\}$.

$$. (\sqrt{2})^2 = 2,\ \frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2},$$

Мисол. Тўртта элементли GF(4)={0, 1, α, β}группани қараймиз:

+	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

*	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

3 -амалий машғулот:
Группа, ҳалқа ва майдонлар
Ҳалқа. Ҳалқанинг гомоморфизмлари ва идеаллари.

Ишдан мақсад: Группа, ҳалқа ва майдонларнинг гомоморфизмларини билиш. Бу гомоморфизмларда идеалларнинг аҳамиятини тушуниш ва гомоморфизмларнинг муҳим хоссаларига доир мисоллар ечиш.

Масаланинг қўйилиши:

1) $(Z,+,\cdot)$. m га бўлинувчи барча бутун сонлар тўплами $m\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ нинг қисмҳалқаси бўлади;

2) $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ – рационал сонлар ҳалқаси;

Ишни бажариш учун наъмуна

Элементлари **P** майдонга тегишли бўлган барча nxn квадрат матрицалар тщплами $M_n(\mathbf{P})$, **P** майдон устида ўлчами n^2 бўлган алгебра бўлади.

Бу алгебранинг базиси сифатида қуйидаги матрицаларни олиш мумкин:

$$\left\{E_{ij} \,/\, i, j = \overline{1, n}\right\},$$

Бу ерда E_{ij} – матрица i – сатр ва j – устун кесишмасида 1 (P майдоннинг **1** элементи), бошқа элементлари 0 га тенг матрица. Маълумки, бу базис элементлари қуйидаги кўпайтириш қонунига бўйсунади.

$$E_{ik}\,E_{lj} = \delta_{kl}E_{ij}.$$

Маълумки, ихтиёрий $(a_{i,j}) \in M_n(P)$ матрица E_{ik} ларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади:

$$\left(a_{ij}\right) = \sum_{i.j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Бу алгебранинг бирлик элементи қуйидаги бирлик матрицадан иборат бўлади:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Маълумки, λE кўринишидаги элемент $M_n(\mathbf{P})$ алгебранинг ихтиёрий элементи билан ўрин алмашинувчи бўлади, яъни λE элемент $Z(M_n(\mathbf{P}))$ марказда ётади.

Назорат саволлари:

1) f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_m$ эпиморфизм бўлади ва Kerf = m**Z**, m**Z** – **Z**да идеал(умуман **Z**да ихтиёрий қисмҳалқа m**Z**кўринишга эга, яъни идеал);

2) $M_2(\mathbf{Z})$ –**Z**майдон бўйича 2x2 матрицалар ҳалқаси.K_0= $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\delta\in Z\right\}$ яримҳалқа бўлади, идеал эмас: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \delta & 0\end{pmatrix}\notin K_0$;

3) Коммутатив ҳалқада идеал қуриш методлари:

a) $\forall a \in K$, aK –Книнг идеали бўлади: ax+ay=a(x+y), (ax)y=a(xy). aK идеал $a\in K$ элемент ёрдамида тузилган асосий идеал деб юритилади.

1) **P** майдоннинг ихтиёрий **F** кенгайтмаси **P** майдон устида аниқланган коммутатив ва ассоциатив бирли алгебра бўлади :

Q майдоннинг **F** = **Q**($\sqrt{2}$) кенгайтмасини қарасак, у 2 ўлчамли алгебра бўлади;

Q майдоннинг кенгайтмаси **R** чексиз ўлчамли алгебра бўлади.

R майдоннинг кенгайтмаси **C** 2 ўлчамли алгебра бўлади.

2) Коэффициентлари **P** майдонга тегишли бўлган n та ўзгарувчили K=**P**[x_1, x_2, …, x_n] кўпҳадлар ҳалқаси **P** майдон устида чексиз ўлчамли коммутатив ассоциатив алгебрадир. Бунда

$$K = K_0 \oplus K_1 \oplus \ \dots$$

Яъни, K – биржинсли, даражаси m (K_0 = **P**) бўлган кўпҳадлар K_m қимфазоларининг тўғри йиғиндисидан иборатдир, бу ерда

$$K_i\, K_j \subset K_{i+j}.$$

Бундай ёйилмага эга бўлган алгебралар, *градуирланган алгебра* дейилади.

3) элементлари **P** майдонга тегишли бўлган барча nxn квадрат матрицалар тщплами M_n(**P**), **P** майдон устида ўлчами n^2 бўлган алгебра бўлади.

Бу алгебранинг базиси сифатида қуйидаги матрицаларни олиш мумкин:

$$\left\{E_{ij} / i, j=\overline{1,n}\right\},$$

Бу ерда E_{ij} – матрица i – сатр ва j – устун кесишмасида 1 (P майдоннинг **1** элементи), бошқа элементлари 0 га тенг матрица. Маълумки, бу базис элементлари қуйидаги кўпайтириш қонунига бўйсунади.

$$E_{ik}\, E_{lj} = \delta_{kl} E_{ij}.$$

Маълумки, ихтиёрий $(a_{i,j}) \in M_n(P)$ матрица E_{ik} ларнинг чизиқли комбинацияси орқали ифодаланади

$$\left(a_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}.$$

Бу алгебранинг бирлик элементи қуйидаги бирлик матрицадан иборат бўлади:

$$E=\sum_{i=1}^{n} E_{ii}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Маълумки, λE кўринишидаги элемент $M_n(\mathbf{P})$ алгебранинг ихтиёрий элементи билан ўрин алмашинувчи бўлади, яъни λE элемент $Z(M_n(\mathbf{P}))$ марказда ётади.

Мисол 1. C(X) – тўплам X топологик фазодаги узлуксиз функциялар тўплами бўлсин. C(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш λf, $f+g$, fg амалларига нисбатан коммутатив алгебра ташкил қилади.

2. Айтайлик, X – чизиқли фазо бўлсин, L(X) орқали X да аниқланган барча чизиқли алмаштиришлар $B: X\to X$ тўпламини белгилаймиз. L(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва суперпозиция λB, $A+B$, $A\circ B$ амалларига нисбатан алгебра ташкил қилади. L(X) алгебра коммутатив бўлиши учун X бир ўлчамли бўлиши зарур ва етарли.

Агар X – чекли ўлчамли бўлса, у ҳолда $L(X)=M_n(\mathbf{C})$ бўлади. L(X) даги амаллар мтрицаларни қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш амаллари билан устма-уст тушади.

3. Агар X – банах фазоси бўлса, B(X) орқали барча чегараланган операторли белгиласак B(X) тўплам қушиш, сонга кўпайтириш ва кўпайтириш λB, $A+B$, $A\circ B$ амалларига нисбатан алгебра ташкил қилади.

Мисол. 1. C(X) бирлик элементли ҳалқа бўлади, бу ерда айни фукнция бирлик элемент вазифасини бажаради.

2. L(X) ва B(X) алгебралар ҳам бирлик элементли ҳалқа бўлади, бу ерда айни e=E – оператор бирлик элемент вазифасини бажаради.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

4-амалий машғулот:

Ассоциатив алгебралар ҳақида тушунчалар.

Ишдан мақсад: Алгебра ҳақида тасаввурга эга бўлиш, уларнинг тузилишини мисоллар ёрдамида аниқлаш, ассоциатив алгебраларнинг структуравий назариясини мисоллар ёрдамида текшириш.

Масаланинг қўйилиши:

Қуйидаги алгебраларни ассоциатив алгебра бўлишини текширинг:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1,e_1]=e_3 +6e_4$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

d) $[e_1, e_1]=e_2+3e_4$, $[e_2,e_1]=e_3+ 3e_4$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

Ишни бажариш учун наъмуна

Қуйидаги алгебрани ассоциатив алгебра бўлишини текширинг:

$[e_2,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

Бунинг учун барча учликларни (ab)c=a(bc) шартига кўра текширамиз, агар шарт бажарилмаса ассоциатив алгебра бўлмайди.

$$[e_3,e_1]e_4= -[e_2, e_4]= e_3$$

Иккинчи тарафдан:

$$e_3\, [e_{1,}e_4]= [e_3, 0]= 0$$

Тенг эмас, демак, ассоциатив алгебра эмас.

Назорат саволлари:

1-таъриф. Агар ихтиёрий $x, y, z \in G$ элементлар учун қуйидаги айниятлар бажарилса:

$[x, x] = 0$ – антикоммутативлик айнияти,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ – Якоби айнияти,

бу ерда [-,-] – G да аниқланган кўпайтириш амали.

У ҳолда, F майдони устидаги G алгебраси Ли алгебраси дейилади.

2-таъриф. Агар ихтиёрий $x, y, z\in L$ элементлар учун Лейбниц айнияти бажарилса:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] – [[x, z], y]$$

бу ерда [-,-] – L да аниқланган кўпайтириш амали.

У ҳолда, F майдони устидаги L алгебраси Лейбниц алгебраси дейилади

Ихтиёрий Ли алгебраси Лейбниц алгебраси бўлади.

3-таъриф. Агар ихтиёрий $x,y\in L$ учун қуйидаги тенглик бажарилса**:**

$$d(xy)=d(x)y+xd(y).$$

у ҳолда ушбу $d:L\to L$ сизиқли акслантириш берилган L алгебрада дифференциал дейилади.

Ихтиёрий L Лейбниц алгебраси учун қуйидаги кетма-кетликларни аниқлаймиз:

$$L^{[1]}=L,\ L^{[k+1]}=[L^{[k]}, L^{[k]}],\ \ k \geq 1$$

$$L^1=L,\ L^{k+1}=[L^k, L^1],\ \ k \geq 1.$$

4-таъриф. L Лейбниц алгебраси ечимли дейилади, агар шундай

$m\in N$ мавжуд бўлсаки, натижада $L^{[m]}=0$ бўлса. Ана шундай m ларнинг энг кичигига L ечимли алгебранинг индекси дейилади.

5-таъриф. L Лейбниц алгебраси нильпотентли дейилади, агар шундай $s\in N$ мавжуд бўлсаки, натижада $L^s=0$ бўлса. Ана шундай хусусиятга эга бўлган минимал s сони нильпотентлик индекси ёки L алгебрасининг нильиндеки дейилади.

Мисол. Қуйидаги алгебраларнинг нилиндекси n-1 га тенг эканлигини кўрсатинг.

$$F_n^2:\begin{cases}[y_1,y_1]=y_3,\\ [y_i,y_1]=y_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\end{cases}$$

$$M_1(k):\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_i,y_n]=y_{k+i-1}, & 1\le i\le n-k,\ 3\le k\le n-1,\end{cases}$$

$$M_2:\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_i,y_n]=y_{\frac{n+1}{2}+i-1}, & 1\le i\le \dfrac{n-1}{2},\\ [y_n,y_n]=\alpha y_{n-1}, & \alpha\ne 0,\end{cases}$$

$$M_3:\begin{cases}[y_i,y_1]=y_{i+1}, & 1\le i\le n-2,\\ [y_n,y_n]=y_{n-1},\end{cases}$$

бу ерда иштирок этмаган кўпайтмалар нолга тенг ва $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – тегишли алгебранинг базиси бўлади.

1–мисол. C(X) – X топологик фазодаги барча комплекс қийматли узлуксиз функциялар тўплами $\lambda f,\ f+g,\ fg$ амалларига нисбатан коммутатив алгебра ташкил этади. Хусусан $C[0,1]$.

2–мисол. X–чизиқли фазо, L(X)–барча чизиқли $B{:}X\to X$ операторлар тўпламида λB, $A+B$, $A\circ B$ (суперпозиция) амаллар бўлсин. У ҳолда L(X)–алгебра ва L(X) коммутатив фақат ва фақат шу ҳолда, агар X–бир ўлчовли фазо бўлса.

3–мисол: Айтайлик, $C^{\infty}_{[0,1]}$-[0,1] кесмадаги барча чексиз дифференциалланувчи функциялар тўплами бўлсин. Бу тўпламда кўпайтириш амалини қуйидагича киритамиз:

$$(a\circ b)(x)=a(x)\int_0^x b(t)d(t),\ \text{бу ерда } a(x),\ b(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}.$$

У ҳолда $(C^{\infty}_{[0,1]},\circ)$ Зинбиел алгебраси ташкил этади.

Агар d_1 ва d_2 – дифференциаллашлар бўлса,

$$[d_1,d_2]=d_1\circ d_2-d_2\circ d_1$$

хам дифференциаллаш бўлади.

L- Ли алгебрасида$\forall\ a\in L$ учун

$ad_a{:}L\to L$ акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$ad_a(x)=[x,a]ada$ – дифференциаллаш ташкил қилади

1. Қуйидаги алгебраларнинг Лейбниц алгебраси бўлишини исботланг:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1,e_1]=e_3 +6e_4$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

d) $[e_1, e_1]=e_2+3e_4$, $[e_2,e_1]=e_3+ 3e_4$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

2. Қуйидаги алгебраларнинг нилпотентлигини кўрсатинг ва нилиндексини топинг:

a)$[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_2 + e_5, [e_2, e_4] = e_3, [e_4, e_4] = e_3$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_5, [e_4, e_4] = e_3,$

d) $[e_1, e_2]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_4 +e_3$, $[e_3,e_4]= -e_2$,

3. Қуйидаги алгебраларнинг ечимлилигини кўрсатинг ва нилрадикалини топинг:

a)$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$,$[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$

b)$[e_1, e_1]=e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4]=2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_4] = e_2$

c) $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_4, e_2] = – e_2$,

d) $[e_1, e_3] = e_2 +e_4$, $[e_2, e_3] = e_1 – 3e_4$, $[e_4, e_2] = – e_2$,

4. Қуйидаги алгебраларнинг ички ва ташқи дифференциаллашларини топинг

a) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]= -e_3$, $[e_2,e_2]= -2e_3 + e_4$

b) $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = 2e_1$, $[e_3, e_4] = 3e_1$, $[e_4, e_1] = -e_1$

c) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=e_1$, $[e_2, e_5]=e_2$, $[e_4, e_1] =– e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_3, e_5] = e_3$

d) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=2e_1$, $[e_2, e_5]=3e_2$, $[e_4, e_1] =– e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$,

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

5 -амалий машғулот:

Ноассоциатив алгебраларнинг турлари ва уларнинг таснифлаш усуллари.

Ишдан мақсад: Ноассоциатив алгебраларнинг структуравий назариясини билиш. Баъзи ноассоциатив алгебраларни масалан Ли, Лейбниц, дендриформ, диассоциатив, Зинбиел алгебраларни мисоллар ёрдамида билиш ва уларнинг фарқларини тушуниш.

Масаланинг қўйилиши:

Қуйидаги алгебраларнинг ечимлилигини кўрсатинг ва нилрадикалини топинг:

a)$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$,$[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$

b)$[e_1, e_1]=e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4]=2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_4] = e_2$

c) $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_4, e_2] = – e_2$,

Ишни бажариш учун наъмуна.

Қуйидаги алгебрани ноассоциатив алгебра бўлишини текширинг:

$[e_2,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

Бунинг учун барча учликларни (ab)c=a(bc) шартига текширамиз, агар шарт бажарилмаса, ноассоциатив алгебра бўлади.

$$[e_3,e_1]e_4= -[e_2, e_4]= e_3$$

Иккинчи тарафдан:

$$e_3\,[e_1,e_4]= [e_3, 0]= 0$$

Тенг эмас, демак, ноассоциатив алгебра бўлади.

Назорат саволлари:

Агар ассоциатив, коммутатив, Ли, Лейбниц, дендриформ, диассоциатив, Зинбиел алгебралар туркумларини мос равишда As, Com, Lie, Lieb, Dend, Dias, Zinb деб белгилаб олсак, у ҳолда туркумлар ўртасида қуйидаги боғлиқлик ўрнатилади:

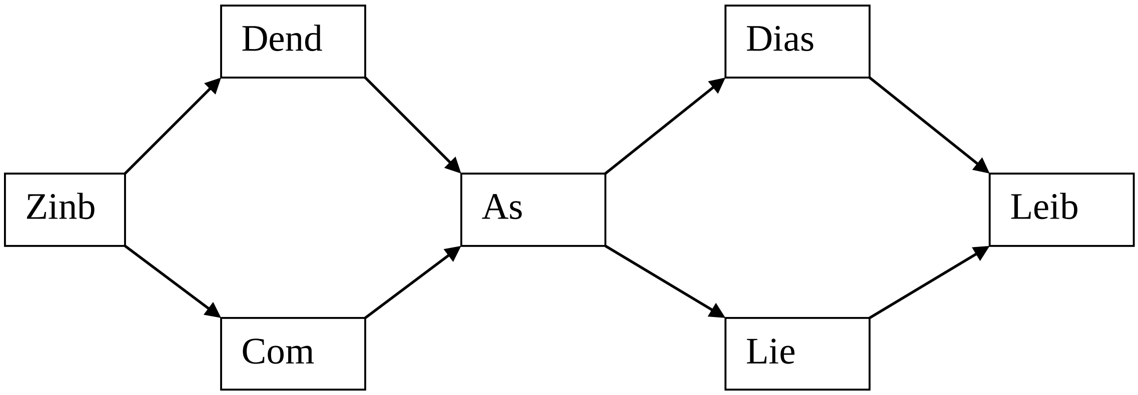
$[x,y]_{Lie}$:As$\to$Lie: $[x,y]_{Lie} = xy - yx$ ассоциатив алгебрада янги амал аниқлаб, Ли алгебрасини ҳосил қиламиз.

$\bullet$:Zind$\to$Com: $x \bullet y = xy + yx$

*:Dend$\to$As $x * y = x < y + x > y$

$[x,y]_{Leib}$:Dias$\to$Leib: $[x,y]_{Leib} = x \dashv y - y \vdash x$

Демак, биз туркумлар ўртасида боғлиқликни ифодаловчи қуйидаги диаграммага эга бўламиз.



1. Қуйидаги алгебраларнинг Лейбниц алгебраси бўлишини исботланг:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$

2. Қуйидаги алгебраларнинг нилпотентлигини кўрсатинг ва нилиндексини топинг:

a) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_2 + e_5, [e_2, e_4] = e_3, [e_4, e_4] = e_3$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_5, [e_4, e_4] = e_3,$

3. Қуйидаги алгебраларнинг ечимлилигини кўрсатинг ва нилрадикалини топинг:

a) $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_4, e_2] = -e_2$

b) $[e_1, e_1]=e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4]=2e_3$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_4, e_4] = e_2$

c) $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_4, e_2] = -e_2$,

4. Агар $\lim\limits_{t\to 0} g_t \cdot A = B$ бўлса, g_t ни топинг

- A: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$, B: $[e_1,e_1]=e_2$, $[e_3,e_3]=e_4$
- A: $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]=e_4$, $[e_2,e_2]= -e_3$, B: $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_3,e_2]= -e_1$

5. A: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$ ва $g_t(e_1)=t^{-1}e_1$, $g_t(e_2)=t^{-1}e_2$, $g_t(e_3)= -t^{-2}e_3$, $g_t(e_4)=t^{-2}e_3 + t^{-1}e_4$ бўлса $\lim\limits_{t\to 0} g_t \cdot A$ ни аниқланг.

6. Қуйидаги алгебраларнинг ички ва ташқи дифференциаллашларини топинг

a) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]= -e_3$, $[e_2,e_2]= -2e_3 + e_4$

b) $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = 2e_1$, $[e_3, e_4] = 3e_1$, $[e_4, e_1] = -e_1$

c) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=e_1$, $[e_2, e_5]=e_2$, $[e_4, e_1] = -e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_3, e_5] = e_3$

Мисол. 1. L алгебра I бўйича фактор алгебраси L/I уч ўлчамли содда Ли алгебраси sl_2 га изоморф бўладиган алгебра бўлсин У ҳолда ундаги кўпайтмалар қуйидагича аниқланади:

$$[e, h] = 2e, \qquad [f, h] = -2f, \qquad [e, f] = h,$$
$$[h, e] = -2e, \qquad [h, f] = 2f, \qquad [f, e] = -h,$$
$$[x_k, e] = -k(m+1-k)x_{k-1}, \qquad 1 \le k \le m,$$
$$[x_k, f] = x_{k+1}, \qquad 0 \le k \le m-1,$$
$$[x_k, h] = (m-2k)x_k, \qquad 0 \le k \le m.$$

2. Айтайлик, L алгебра $L/I \cong sl_2$ шартни қаноатлантирувчи 7 ўлчамли Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда, унинг дифференциаллашларининг $\{e, f, h, x_0, x_1, x_2, x_3\}$ базисдаги умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{pmatrix} -2\lambda_3 & 0 & 2\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_3 & -2\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3\lambda_3 & -3\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda+\lambda_3 & -4\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda-\lambda_3 & -3\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda-3\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

6 -амалий машғулот:
Алгебраик тизимларнинг физика, химия, биология, квант механикаси, криптография, компьютер технологиялари ва бошқа соҳалардаги татбиқлари.

Ишдан мақсад: Алгебраик тизимлар сўнгги йилларда жуда кўплаб бошқа соҳаларга татбиқ қилинмоқда. Хусусан, физика, химия, биология, квант механикаси, криптография, компьютер технологияларига кенг қўлланилмоқда ва бунинг натижасида бу соҳалар ҳам ривожланмоқда. Айниқса, криптография, компьютер технологиялари соҳаларида жадал суратларда ривожланганини мисоллар ёрдамида келтириш ва тингловчига тушунтириш.

Масаланинг қўйилиши:

1. X–чизиқли фазо, L(X)–барча чизиқли $B:X \to X$ операторлар тўпламида λB, $A+B$, $A\circ B$ (суперпозиция) амаллар бўлсин. У ҳолда L(X)–алгебра ва L(X) коммутатив фақат ва фақат шу ҳолда, агар X–бир ўлчовли фазо бўлса.

2. Айтайлик, $C^{\infty}_{[0,1]}$-[0,1] кесмадаги барча чексиз дифференциалланувчи функциялар тўплами бўлсин. Бу тўпламда кўпайтириш амалини қуйидагича киритамиз:

$$(a\circ b)(x) = a(x)\int_0^x b(t)d(t),\ \text{бу ерда } a(x),\ b(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}.$$

У ҳолда, $(C^{\infty}_{[0,1]},\circ)$ Зинбиел алгебраси ташкил этади.

Ишни бажариш учун намуна:

Айтайлик, $C^{\infty}_{[0,1]}$-[0,1] кесмадаги барча чексиз дифференциалланувчи функциялар тўплами бўлсин. Бу тўпламда кўпайтириш амалини қуйидагича киритамиз:

$$(a\circ b)(x) = a(x)\int_0^x b(t)d(t),\ \text{бу ерда } a(x),\ b(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}.$$

У ҳолда, $(C^{\infty}_{[0,1]},\circ)$ Зинбиел алгебраси ташкил этади.

Агар d_1 ва d_2 – дифференциаллашлар бўлса,

$$[d_1,d_2]=d_1\circ d_2-d_2\circ d_1$$

хам дифференциаллаш бўлади.

L- Ли алгебрасида$\forall$ $a\in L$ учун

$ad_a:L\to L$ акслантиришни қуйидагича аниқлаймиз:

$ad_a(x)=[x,a]ada$ – дифференциаллаш ташкил қилади

Назорат саволлари:

1. C(X) – X топологик фазодаги барча комплекс қийматли узлуксиз функциялар тўплами $\lambda f,\ f+g,\ fg$ амалларига нисбатан коммутатив алгебра ташкил этади. Хусусан, C[0,1].

2. X–чизиқли фазо, L(X)–барча чизиқли B:X$\to$X операторлар тўпламида λB, A+B, A∘B (суперпозиция) амаллар бўлсин. У ҳолда L(X)–алгебра ва L(X) коммутатив фақат ва фақат шу ҳолда, агар X–бир ўлчовли фазо бўлса.

3. Айтайлик, $C^{\infty}_{[0,1]}$-[0,1] кесмадаги барча чексиз дифференциалланувчи функциялар тўплами бўлсин. Бу тўпламда кўпайтириш амалини қуйидагича киритамиз:

$$(a\circ b)(x) = a(x)\int_0^x b(t)d(t),\ \text{бу ерда } a(x),\ b(x)\in C^{\infty}_{[0,1]}.$$

У ҳолда $(C^{\infty}_{[0,1]},\circ)$ Зинбиел алгебраси ташкил этади.

4. A:$[e_1,e_1]=e_3$, $[e_2,e_2]=e_4$, $[e_3,e_1]=e_4$ ва $g_t(e_1)=t^{-1}e_1$, $g_t(e_2)=t^{-1}e_2$, $g_t(e_3)= -t^{-2}e_3$, $g_t(e_4)=t^{-2}e_3 + t^{-1}e_4$ бўлса $\lim\limits_{t\to 0} g_t\cdot A$ ни аниқланг.

5. Қуйидаги алгебраларнинг ички ва ташқи дифференциаллашларини топинг

a) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]= -e_3$, $[e_2,e_2]= -2e_3 + e_4$

b) $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = 2e_1$, $[e_3, e_4] = 3e_1$, $[e_4, e_1] = -e_1$

c) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=e_1$, $[e_2, e_5]=e_2$, $[e_4, e_1] =- e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_3, e_5] = e_3$

6. **P** майдоннинг ихтиёрий **F** кенгайтмаси **P** майдон устида аниқланган коммутатив ва ассоциатив бирли алгебра бўлади :

7. **Q** майдоннинг **F** = **Q**($\sqrt{2}$) кенгайтмасини қарасак, у 2 ўлчамли алгебра бўлади; **Q** майдоннинг кенгайтмаси **R** чексиз ўлчамли алгебра бўлади. **R** майдоннинг кенгайтмаси **C** 2 ўлчамли алгебра бўлади.

8. Коэффициентлари **P** майдонга тегишли бўлган n та ўзгарувчили K=**P**[x_1, x_2, …, x_n] кўпҳадлар ҳалқаси **P** майдон устида чексиз ўлчамли коммутатив ассоциатив алгебрадир.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.

2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

1. Қуйидаги кўринишдаги матрицалар тўплами коммутатор амалига нисбатан Ли алгебраси ташкил қилишини исботланг ва бу Ли алгебрасининг нилиндексини топинг:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Қуйидаги алгебраларнинг ечимлилигини кўрсатинг ва нилрадикалини топинг:

a)$[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_3$,$[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_2] = - e_2$

b)$[e_1, e_1]=e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_3, e_4]=2e_3$, $[e_4, e_1] = - e_1$, $[e_4, e_4] = e_2$

c) $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_4] = e_2$, $[e_4, e_2] = – e_2$,

d) $[e_1, e_3] = e_2 +e_4$, $[e_2, e_3] = e_1 – 3e_4$, $[e_4, e_2] = – e_2$,

3. Қуйидаги алгебраларнинг ички ва ташқи дифференциаллашларини топинг.

a) $[e_1,e_1]=e_4$, $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_1]= -e_3$, $[e_2,e_2]= -2e_3 + e_4$

b) $[e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_1$, $[e_2, e_4] = 2e_1$, $[e_3, e_4] = 3e_1$, $[e_4, e_1] = -e_1$

c) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=e_1$, $[e_2, e_5]=e_2$, $[e_4, e_1] =– e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$, $[e_3, e_5] = e_3$

d) $[e_2, e_1]= e_3$, $[e_1, e_4]=2e_1$, $[e_2, e_5]=3e_2$, $[e_4, e_1] =– e_1$, $[e_3, e_4] = e_3$,

4. Қуйидаги алгебраларнинг нилпотентлигини кўрсатинг ва нилиндексини топинг:

a) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_2 + e_5, [e_2, e_4] = e_3, [e_4, e_4] = e_3$

b) $[e_1,e_4]=e_3$, $[e_4,e_1]= -e_3$, $[e_1,e_3]=e_2$, $[e_3,e_1]= -e_2$,

c) $[e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_4] = e_5, [e_4, e_4] = e_3,$

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ МАВЗУЛАРИ

1. Мустакил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни Алгебрик тизимлар фанини ўрганувчилар аудиторияда олган назарий билимларини мустаҳкамлаш ва криптография, компьютер технологияларида амалий масалаларни ечишда кўникма ҳосил қилиш учун мустақил таълим тизимига асосланиб, фан ўқитувчиси раҳбарлигида, мустақил иш бажарадилар. Бунда улар қўшимча адабиётларни ўрганиб ҳамда Интернет сайтларидан фойдаланиб, янги билим кўникмаларга эга бўладилар ва улар асосида илмий докладлар тайёрлайдилар.

2. Мустакил иш мавзулари:

1. Группа, ҳалқа ва майдонлар
2. Группанинг гомоморфизми, гомоморфизм хакидаги теоремалар.
3. Нетер ва Артин халкалари
4. Чекли майдонлар, майдон кенгайтмалари.
5. Ассоциатив алгебралар хақида тушунчалар
6. Ноассоциатив алгебраларнинг турлари ва уларнинг таснифлаш
7. Йордан алгебралари ва уларнинг таснифлари.
8. Нилпотент ва ечилувчан Ли алгебралари.
9. Ечилувчан ва нилпотент радикаллар, хамда улар орасидаги боғланишлар.
10. Кичик ўлчамли нилпотент Ли алгебраларининг таснифи.
11. Ли алгебралари учун Энгел ва Ли теоремалари.
12. Характеристик нилпотент Ли алгебралари.
13. Нилпотент Ли алгебраларининг дифференциаллашлари ва ички дифференциаллашлари.
14. Нилпотент Ли алгебрасида ташқи дифференциаллашнинг мавжудлиги.
15. Содда ва яримсодда Ли алгебралари.
16. Чекли ўлчамли содда Ли алгебраларнинг таснифи.
17. Картан матрицаси, Динкин схемаси.
18. Яримсодда Ли алгебраларини содда идеалларнинг тўғри йиғиндиси шаклида ёйилиши ҳақидаги теорема.
19. Ли алгебраларининг умумлашмалари ва улар орасидаги боғланишлар.
20. Ли супералгебралари, Лейбниц алгебралари.
21. Нилпотент ва ечилувчан Лейбниц алгебралари.
22. Нилпотент Лейбниц алгебраларининг таснифи.

VII. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
Бинар муносабат	бирор $\alpha: M\times M \to M$ акслантириш ёрдамида аниқланиб, ҳар бир (x, y) $(x, y\in M)$ жуфтлик учун $z=\alpha(x, y)\in M$ элемент мос қуйиладигон мослик.	The map $\alpha: M\times M \to M$, wich correspond to each par of (x, y) to element $z=\alpha(x, y)\in M$.
Ярим группа	ассоциативлик шартини қаноатлантирадиган бинарамали ва M тўплам.	The set with the operation which satisfy the assosiative low.
Группа	ягона нейтрал элементга эга ва ҳар бир $g\in G$ учун ягона тескари элементи мавжуд ярим группа	The semigroup which have unique unit element and any element $g\in G$ has an inverse.
Ҳалқа	иккита алгебраик (бинар) амал: + (қўшиш) ва * (кўпайтириш)аниқланган бўлиб (К1) (К,+) – Абелъ группа; (К2) (К,*) – яримгруппа; (К3) $(a+b)\ast c=a\ast c+b\ast c$, $c\ast(a+b)=c\ast a+c\ast b$, $\forall a,b,c\in K$. шартлар бажариладиган К тўплам.	The set with the two binary operation + (addition) and * (multiplication) (К1) (К,+) – Abelian group; (К2) (К,*) – semi-group; (К3) $(a+b)\ast c=a\ast c+b\ast c$, $c\ast(a+b)=c\ast a+c\ast b$, $\forall a,b,c\in K$.
Бирли ҳалқа	бирлик элементнинг мавжуд ҳалқа	The ring with a unit element
Идеал	$ax\in I$ $\forall a\in I$, $x\in R$ шартни қаноатлактирадиган қисм тўплам	The subset of R that for any $a\in I$, $x\in R$, $ax\in I$
Алгебра	бирор (A, +, *) ҳалқада	The ring (A, +, *) with

	қўшимча бинар амал аниқланса	another bunary operation
Ассоциатив алгебра	ассоциатив (A, +, *) ҳалқа	The ring (A, +, *) with assosiative condition
Коммутатив алгебра	коммутатив (A, +, *) ҳалқа	The ring (A, +, *) with commutative condition
Алгебранинг маркази	$a \in A$: $ax = xa$, $\forall x \in A$ шартни қаноатлантирадиган элементлар тўплами.	The subset, which any element $a \in A$: satisfying the condition $ax = xa$, $\forall x \in A$
Ли алгебраси -	$x,y,z \in G$ учун $[x, x] = 0$ ва $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ шартлари ўринли бўлган алгебра	The algebra with the following condition $[x, x] = 0$ and $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ for any elements $x,y,z \in G$
Зинбиел алгебраси	$x,y,z \in A$ элементи учун $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y)$ тенглик ўринли бўлган алгебра.	The algebra with the following condition $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) + x \circ (z \circ y)$ for any elements $x,y,z \in A$
Лейбниц алгебраси	$x, y, z \in L$ элементлар учун $[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$ айниятни бажарадиган *L* алгебра	The algebra with the following condition $[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$ for any elements $x,y,z \in A$
Дифференциаллаш	$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$ шартини бажарувчи d чизиқли акслантириш	The linear map with the condition $d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$
Ечимли алгебра	$L^{(n)} = 0$ бўладиган *L* алгебра	The algebra with condition $L^{(n)} = 0$
Нильпотентли	$L^s=0$ бўладиган *L* алгебра	The algebra with condition $L^s=0$
Нилрадикали	алгебранинг максимал нилпотент идеали	The maximal nilpotent ideal of algebra

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Махсус адабиётлар:

1. D. S. Malik, John M. Mordeson, M. K. Sen, Fundamentals of Abstract Algebra, Mcgraw-Hill College, 1997.
2. Fernando Q. Gouvêa. A Guide to Groups, Rings, and Fields, USA, 2012.
3. Albeverio S., Ayupov. Sh.A., Omirov B.A. On nilpotent and simple Leibniz algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 1. – P. 159-172.
4. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Omirov B. A., Khudoyberdiyev A.Kh. n-dimensional filiform Leibniz algebras of length (n–1) and their derivations. // Journal of Algebra. – 2008. - 319 (6). – P. 2471-2488.
5. Barnes D.W. On Levi's theorem for Leibniz algebras. // Bull. Austr. Math. Soc., – 2012. - Vol. 86. - № 2. – P. 184-185.
6. Burde D. Degenerations of 7-dimensional nilpotent Lie algebras. // Comm. in Algebra. – 2005. - Vol. 33. - № 4. – P. 1259–1277.
7. Loday J.-L., Pirashvili T. Leibniz representations of Leibniz algebras. // J. Algebra. – 1996. - Vol. 181. – P. 414-425.
8. Goze M., Khakimdjanov Yu. Nilpotent Lie Algebras. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. – 1996. Vol. 361. – 336 p.
9. Albeverio, S., Ayupov, Sh.A. and Omirov, B.A.: On nilpotent and simple Leibniz algebras. Comm. Algebra. (2005), 159–172.
10. Loday. J. L. Dialgeras. Prepublication del'Inst. De Recherche Math. Avancee (Strasbourg). V. 14(1999). 61 pp.
11. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math. – 1993. - Vol. 39. – P. 269-293.
12. Dzhumadil'daev A.S., Tulenbaev K.M. Nilpotency of Zinbiel algebras. J. Dyn. Control. Syst., vol. 11(2), 2005, p. 195-213.