`ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

“МАТЕМАТИКА”
йўналиши

“МАТЕМАТИК АНАЛИЗНИНГ МАХСУС БОБЛАРИ”
модули бўйича
Ў Қ У В –У С Л У Б И Й М А Ж М У А

Тошкент – 2016

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ОЛИЙ ТАЪЛИМ ТИЗИМИ ПЕДАГОГ ВА РАҲБАР КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШНИ ТАШКИЛ ЭТИШ БОШ ИЛМИЙ - МЕТОДИК МАРКАЗИ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ПЕДАГОГ КАДРЛАРИНИ ҚАЙТА ТАЙЁРЛАШ ВА УЛАРНИНГ МАЛАКАСИНИ ОШИРИШ ТАРМОҚ (МИНТАҚАВИЙ) МАРКАЗИ

«МАТЕМАТИК АНАЛИЗНИНГ МАХСУС БОБЛАРИ»

модули бўйича

Ў Қ У В – У С Л У Б И Й   М А Ж М У А

Тошкент – 2016

Мазкур ўқув-услубий мажмуа Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2016 йил 6 апрелидаги 137-сонли буйруғи билан тасдиқланган ўқув режа ва дастур асосида тайёрланди.

Тузувчи: ЎзМУ, **ф.-м.ф.д., академик А.Саъдуллаев**
ф.-м.ф.н., доц. Ж.Тишабоев

Тақризчи: **Prosessor Zair Ibragimov** Departament of Mathematics California State University Fullerton, California, USA

Ўқув -услубий мажмуа ЎзМУнинг Университет кенгашининг 2016 йил 7-сентябрдаги 1-сонли қарори билан нашрга тавсия қилинган.

МУНДАРИЖА

I. ИШЧИ ДАСТУР

Кириш.

Мазкур дастур ривожланган хорижий давлатларнинг олий таълим соҳасида эришган ютуқлари ҳамда орттирган тажрибалари асосида “Математика” қайта тайёрлаш ва малака ошириш йўналиши учун тайёрланган намунавий ўқув режа ҳамда дастур мазмунидан келиб чиққан ҳолда тузилган бўлиб, у замонавий талаблар асосида қайта тайёрлаш ва малака ошириш жараёнларининг мазмунини такомиллаштириш ҳамда олий таълим муассасалари педагог кадрларининг касбий компетентлигини мунтазам ошириб боришни мақсад қилади..

Жамият тараққиёти нафақат мамлакат иқтисодий салоҳиятининг юксаклиги билан, балки бу салоҳият ҳар бир инсоннинг камол топиши ва уйғун ривожланишига қанчалик йўналтирилганлиги, инновацияларни татбиқ этилганлиги билан ҳам ўлчанади. Демак, таълим тизими самарадорлигини ошириш, педагогларни замонавий билим ҳамда амалий кўникма ва малакалар билан қуроллантириш, чет эл илғор тажрибаларини ўрганиш ва таълим амалиётига татбиқ этиш бугунги куннинг долзарб вазифасидир. “Математик анализнинг махсус боблари” модули айнан мана шу йўналишдаги масалаларни ҳал этишга қаратилган.

Олий таълим муассасалари педагог кадрларининг малакасини ошириш ва уларни қайта тайёрлаш бугунги куннинг энг долзарб масалаларидан бири бўлиб келмоқда. Мамлакатимиз таълим тизимида босқичма-босқич амалга оширилаётган ислоҳотлар бу масалага янада масъулият билан ёндошишни талаб қилмоқда.

Ушбу “Математик анализнинг махсус боблари” модули мутахассислик фанлари блокидаги асосий модуллардан бири бўлиб, унда математик анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси фанларининг айрим боблари танлаб ўқитилади.

Маълумки, ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили функциялар анализи орасида ўхшашликлар ва тафовутлар бор. Ушбу курсда комплекс анализга хос бўлган усуллар алоҳида таъкидланади ва улар ёрдамида ҳақиқий ўзгарувчили функциялар анализининг айрим масалаларининг содда ҳал этилиши кўрсатилади.

Модулнинг мақсади ва вазифалари.

Анализнинг махсус боблари модулининг мақсади олий таълим муассасалари педагог кадрларини қайта тайёрлаш ва малака ошириш курси тингловчиларининг билимларини мустаҳкамлаш, олий математика фанининг айрим бўлимлари ва уларни ўқитиш бўйича малакаларини ошириш ва янада такомиллаштириш.

Модулнинг вазифаси тингловчиларда математиканинг зарурий маълумотлари мажмуаси (тушунчалар, тасдиқлар ва уларнинг исботи, амалий масалаларни ечиш усуллари ва бошқалар) бўйича кўникмаларни шакллантириш ва янада ривожлантиришдан иборат.

Модул бўйича тингловчиларнинг билими, кўникма ва малакаларига қўйиладиган талаблар.

"Математик анализнинг махсус боблари" курсини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида:

Тингловчи:

- математик анализ ва унинг бўлимлари, уни ўқитиш бўйича янги технологияларни билиши;
- математик анализнинг муаммолари ва унинг ривожланиш истиқболлари;
- математик анализ ва уни ўқитиш бўйича янги назарий **билимларга эга бўлиши**;

Тингловчи:

- математик анализнинг амалиётга татбиқлари;
- гармоник ва субгармоник функциялар ва уларнинг хоссаларидан фойдаланиш;
- субгармоник функцияларнинг аппроксимациялари;
- субгармоник функцияларнинг супремуми ва юқори лимитидан фойдаланиш **амалий кўникмаларини эгаллаши лозим.**

Модулни ташкил этиш ва ўтказиш бўйича тавсиялар.

"Математик анализнинг махсус боблари" курси маъруза ва амалий (семинар) машғулотлар шаклида олиб борилади.

Курсни ўқитиш жараёнида таълимнинг замонавий методлари, ахборот-коммуникация технологиялари қўлланилиши назарда тутилган:

- маъруза дарсларида замонавий компьютер технологиялари ёрдамида презентацион ва электрон-дидактик технологиялардан;
- ўтказиладиган амалий машғулотларда техник воситалардан, экспресс-сўровлар, тест сўровлари, ақлий ҳужум, гуруҳли фикрлаш, кичик гуруҳлар билан ишлаш, коллоквиум ўтказиш ва бошқа интерактив таълим усулларини қўллаш назарда тутилади.

Модулнинг ўқув режадаги бошқа фанлар билан ўзаро боғлиқлиги ва услубий жиҳатдан узвий кетма-кетлиги.

Математик анализнинг махсус боблари модули алгебраик тизимлар, геометриянинг замонавий масалалари, сонли усуллар ва амалий статистика каби модуллар билан чамбарчас боғлиқдир.

Ушбу фанни ўқитиш жараёнида ўқитишнинг анъанавий шаклларидан ташқари янги педагогик технологиялардан ҳам бевосита фойдаланиш назарда тутилади.

Модулнинг олий таълимдаги ўрни.

Математик анализ фани республика олий ўқув юртларида математика фанини юқори илмий ва методик савияда ўқитишни таъминлашда, математика фани ўқитувчиларининг юқори савиядаги педагог бўлишларида, келажакда илмий изланишлар олиб боришларида асосий ўрин тутади.

Бу курсда олий математиканинг анализ курсига оид бўлимлари, унинг асосий тушунчаларини ўқитиш методикаси билан таништириш кўзда тутилган. Бундан ташқари математик анализ фанини ўқитишда замонавий педагогик технологиялардан фойдаланишни ўргатиш ҳам кўзда тутилган.

“Математик анализнинг махсус боблари”
Модул бўйича соатлар тақсимоти.

<table>
<tr><th rowspan="4">№</th><th rowspan="4">Модул мавзулари</th><th colspan="5">Тингловчининг ўқув юкламаси, соат</th></tr>
<tr><th rowspan="3">Ҳаммаси</th><th colspan="3">Аудитория ўқув юкламаси</th><th rowspan="3">Мустақил таълим</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Жами</th><th colspan="2">жумладан</th></tr>
<tr><th>Назарий</th><th>Амалий машғулот</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Чекли вариацияли функциялар, функциянинг тўла вариацияси ва уларнинг хоссалари.</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Гармоник ва субгармоник функциялар.</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар.</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар супремуми, юқори лимити.</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Жами:</td><td>24</td><td>20</td><td>8</td><td>12</td><td>4</td></tr>
</table>

НАЗАРИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-мавзу: Чекли вариацияли функциялар, функциянинг тўла вариацияси ва уларнинг хоссалари.

Математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, геомеханика ва бошқа соҳалардаги кенг қўлланилиши. Математик анализнинг хориж ва республика миқёсидаги долзарб муаммолари, ечимлари, тенденциялари. Чекли вариацияли функциянинг таърифи, мисоллар, хоссалари. Чекли вариацияга эга бўлган функциялар синфи. Тўғриланувчи чизиқлар ва Жордан теоремаси. Стилтьес интеграли ва унинг хоссалари.

2-мавзу: Гармоник ва субгармоник функциялар.

Гармоник функциялар. Хоссалари. Пуассон формуласи. Гармоник функцияни C^{∞} синфга тегишлилиги. Харнак теоремаси. Субгармоник функциялар. C^{2} синфга тегишли субгармоник функциянинг Лаплас оператори. Узлуксиз бўлмаган субгармоник функциялар.

3-мавзу: Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари. $m(u,r)$ ва $n(u,r)$лар

Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$лар. Субгармоник функциянинг аппроксимацияси. Субгармоник функциянинг лапласиани. Рисс теоремаси.

4-мавзу: Чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар супремуми, юқори лимити.

Текис чегараланган субгармоник функциялар оиласи. Субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимити. Хартогс леммаси.

АМАЛИЙ МАШҒУЛОТЛАР МАЗМУНИ

1-2 амалий машғулотлар: Чекли вариацияли функциялар, функциянинг тўла вариацияси ва уларнинг хоссалари.

Математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, геомеханика ва бошқа соҳалардаги кенг қўлланилишини тушунтириш. Чекли вариацияли функциянинг таърифи ва хоссаларини, ҳамда Стилтьес интеграли ва унинг хоссаларини кенгроқ ўрганиш ва мисоллар ёрдамида татбиқ этиш.

3-4 амалий машғулотлар:

Гармоник ва субгармоник функциялар.

Гармоник ва субгармоник функцияларнинг энг содда, зарур хоссаларини ўрганиш билан бир қаторда, уларнинг голоморф функциялар билан боғлиқ масалалар.

5-амалий машғулот.

Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$лар

Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$лар ва уларнинг хоссалари ҳамда улар орасидаги боғланишни ўрганиш.

6-амалий машғулот.

Чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар супремуми, юқори лимити.

Ушбу амалий машғулот давомида чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар хоссалари ва супремуми, текис чегараланган субгармоник функциялар оиласига ва субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимитини ҳисоблашга доир мисолларни, Хартогс леммасининг татбиқига оид масалаларни ўрганилади.

ЎҚИТИШ ШАКЛЛАРИ.

Мазкур модул бўйича қуйидаги ўқитиш шаклларидан фойдаланилади: маърузалар, амалий машғулотлар (маълумотлар ва технологияларни англаб олиш, ақлий қизиқишни ривожлантириш, назарий билимларни мустаҳкамлаш);

баҳс ва мунозаралар (лойиҳалар ечими бўйича далиллар ва асосли аргументларни тақдим қилиш, эшитиш ва муаммолар ечимини топиш қобилиятини ривожлантириш).

БАҲОЛАШ МЕЗОНИ.

№	Ўқув-топшириқ турлари	Максимал балл	Баҳолаш мезони		
		2,5	**"аъло" 2,2-2,5**	**"яхши" 1,8-2,1**	**"ўрта" 1,4-1,7**
1.	Тест-синов топшириқларини бажариш	0,5	0,4-0,5	0,34-0,44	0,28-0,3

2.	Ўқув-лойиҳа ишларини бажариш	1	0,9-1	0,73-0,83	0,56-0,7
3.	Мустақил иш топшириқларини бажариш	1	0,9-1	0,73-0,83	0,56-0,7

МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ.

Мустақил ишни ташкил этишнинг шакли ва мазмуни:

Тингловчи мустақил ишни муайян модулнинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиб тайёрлаши тавсия этилади:

- меъёрий хужжатлардан, ўқув ва илмий адабиётлардан фойдаланиш асосида модул мавзуларини ўрганиш;
- тарқатма материаллар бўйича маърузалар қисмини ўзлаштириш;
- махсус адабиётлар бўйича модул бўлимлари ёки мавзулари устида ишлаш;
- амалий машғулотларда берилган топшириқларни бажариш.

II. МОДУЛНИ ЎҚИТИШДА ФОЙДАЛАНИЛАДИГАН ИНТЕРФАОЛ ТАЪЛИМ МЕТОДЛАРИ

«ФСМУ» методи

Технологиянинг мақсади: Мазкур технология иштирокчилардаги умумий фикрлардан хусусий хулосалар чиқариш, таққослаш, қиёслаш орқали ахборотни ўзлаштириш, хулосалаш, шунингдек, мустақил ижодий фикрлаш кўникмаларини шакллантиришга хизмат қилади. Мазкур технологиядан маъруза машғулотларида, мустаҳкамлашда, ўтилган мавзуни сўрашда, уйга вазифа беришда ҳамда амалий машғулот натижаларини таҳлил этишда фойдаланиш тавсия этилади.

Технологияни амалга ошириш тартиби:

- қатнашчиларга мавзуга оид бўлган якуний хулоса ёки ғоя таклиф этилади;
- ҳар бир иштирокчига ФСМУ технологиясининг босқичлари ёзилган қоғозларни тарқатилади:

Ф	• фикрингизни баён этинг
С	• фикрингизнинг баёнига сабаб кўрсатинг
М	• кўрсатган сабабингизни исботлаб мисол келтиринг
У	• фикрингизни умумлаштиринг

- иштирокчиларнинг муносабатлари индивидуал ёки гуруҳий тартибда тақдимот қилинади.

ФСМУ таҳлили қатнашчиларда касбий-назарий билимларни амалий машқлар ва мавжуд тажрибалар асосида тезроқ ва муваффақиятли ўзлаштирилишига асос бўлади.

“Брифинг” методи

“Брифинг”- (инг. briefing-қисқа) бирор-бир масала ёки саволнинг муҳокамасига бағишланган қисқа пресс-конференция.

Ўтказиш босқичлари:

1. Тақдимот қисми.
2. Муҳокама жараёни (савол-жавоблар асосида).

Брифинглардан тренинг якунларини таҳлил қилишда фойдаланиш мумкин. Шунингдек, амалий ўйинларнинг бир шакли сифатида қатнашчилар билан бирга долзарб мавзу ёки муаммо муҳокамасига бағишланган брифинглар ташкил этиш мумкин бўлади. Талабалар ёки тингловчилар томонидан яратилган мобил иловаларнинг тақдимотини ўтказишда ҳам фойдаланиш мумкин.

III. НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР МАТЕРИАЛЛАРИ

1-мавзу: ЧЕКЛИ ВАРИАЦИЯЛИ ФУНКЦИЯЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ.

РЕЖА:

1.1. Чекли вариацияли функциянинг таърифи. Чекли вариацияли функциялар синфи.
1.2. Чекли вариацияли функцияларнинг хоссалари.
1.3. Чекли вариацияли фукциялар учун зарурий ва етарли шартлар.
1.4. Тўғриланувчи чизиқлар. Жордан теоремаси.
1.5. Стилтьес интегралининг таърифи ва унинг мавжудлик шарти.
1.6. Стилтьес интегралининг хоссалари.
1.7. Стилтьес интегралини ҳисоблаш.
1.8. Стилтьес интегралини бахолаш.
1.9. Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.

Таянч иборалар: *чекли вариация, ўзгариши чегараланган функция, функциянинг тўлиқ вариацияси, мажоранта, Стилтьес интеграли.*

1.1. Чекли вариацияли функциянинг таърифи. Чекли вариацияли функциялар синфи.

Айтайлик, $f(x)$ функция чекли [a,b] оралиқда аниқланган бўлсин. Бу оралиқни ушбу

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$$

тенгсизликларни қаноатлартирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида n та оралиққа бўламиз ва қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right| . \qquad \textbf{(1)}$$

<u>1-таъриф.</u> *Агар (1)-йиғиндилар $\forall n \in N$ учун юқоридан текис чегараланган бўлса, унда $f(x)$ функция [a,b] кесмада* ***чекли вариацияга эга*** *ёки* ***ўзгариши чегараланган функция*** *дейилади. Шу йиғиндиларнинг аниқ юқори чегарасига* ***функциянинг тўлиқ вариацияси*** *ёки* ***тўлиқ ўзгариши*** *деб аталади ҳамда у $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$ каби белгиланади:*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) := Sup\{\vartheta_n\} \qquad \textbf{(2)}$$

Баъзи ҳолларда $f(x)$ функциянинг чексиз ораликдаги (масалан, $[a,+\infty)$ ораликдаги) вариацияси тўғрисида ҳам гапириш мумкин бўлади. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин**[1].**

2-таъриф. *Агар $f(x)$ функция $\forall[a,A]\subset[a,+\infty)$ оралиқда чекли вариацияга эга бўлиб, $\bigvee\limits_a^A f(x)$ тўлиқ вариациялар текис чегараланган бўлса, унда $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда чекли вариацияга эга, деб аталади ҳамда:*

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \sup_{A>a}\{\bigvee_a^A f(x)\} \qquad \textbf{(3)}$$

*деб қабул қилинади.***[1-3]**

Изох. *$f(x)$ функциянинг чекли вариацияга эга бўлишида унинг узлуксизлиги мутлақо аҳамиятга эга эмас.*

Мисоллар. 1*) [a,b] кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади.*

◀**а)** [a,b] - чекли бўлсин. $\Rightarrow$

$\vartheta_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$ ((функция монотон бўлгани учун модуллар йиғиндиси йиғиндининг модулига тенг бўлади)) $=\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}[f(x_{k+1})-f(x_k)]\right|=$

$|f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+f(x_3)-f(x_2)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})| = |f(x_n)-f(x_0)| =$

$|f(b)-f(a)| \Rightarrow \qquad \bigvee\limits_a^b f(x) = \sup\{\vartheta_n\} = |f(b)-f(a)|$.

б) $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ оралиқда берилган бўлсин. $\Rightarrow$

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) := \sup_{A>a}\left\{\bigvee_a^A f(x)\right\} = \sup_{A>a}\{|f(A)-f(a)|\} = |f(+\infty)-f(a)|,$$

бу ерда $f(+\infty) = \lim\limits_{A\to\infty} f(A)$.▶

2) *Энди узлуксиз, лекин чекли вариацияга эга бўлмаган функцияга мисол келтирамиз.*

◀Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0, \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни $[0;1]$ кесмада караймиз. Қуйидаги:

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар ёрдамида [0;1] кесмани оралиқларга ажратамиз ва (1)-йиғиндини ҳисоблаймиз ҳамда ушбу тенгликка эга бўламиз:

$\vartheta_n = \sum|f(x_{k+1})-f(x_k)| = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. $\Rightarrow$

$\bigvee\limits_0^1 f(x) = \sup\{\vartheta_n\} = \sup\limits_n\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\} = +\infty$.▶

Чекли вариацияли функциялар синфи.

Аввалги пунктда кўрганимиздек [a,b] кесмада ихтиёрий чегараланган монотон функция чекли вариацияга эга бўлади. Бу хоссадан фойдаланиб, чекли вариацияли функциялар синфини кенгайтириш мумкин.

1-теорема. *[a,b] кесмада берилган $f(x)$ функция шу кесмада бўлакли монотон бўлса, яъни:*

$$[a,b]=\bigcup_{k=0}^{m-1}[a_k,a_{k+1}] \quad (a_0=a,\ a_m=b)$$

бўлиб, $f(x)$ функция ҳар бир $[a_k,a_{k+1}]$ кесмада монотон бўлса, унда $f(x)$ функция [a,b] *кесмада чекли вариацияга эга бўлади***[2].**

◀[a,b] кесманинг ихтиёрий бўлинишини олиб:

$$\vartheta_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1}-f(x_k)\right|$$

йиғинди тузамиз. Бу бўлинишга $a_k(k=\overline{0,m})$ нуқталарни қўшиб, [a,b] кесманинг янги бўлинишини оламиз. Янги бўлиниш учун:

$$\overline{\vartheta}_{n(m)}=\sum_{k=0}^{m-1}\left|f(a_{k+1})-f(a_k)\right|=B$$

бўлиб, $\vartheta_n\le\overline{\vartheta}_{n(m)}$ тенгсизлик бажарилади $\Rightarrow$

$Sup\{\vartheta_n\}\le B\ \Rightarrow\ f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга.▶

2-теорема. *Агар $f(x)$ функция [a,b] кесмада Липшиц шартини қаноатлантирса, яъни шундай L>0 сон топилсаки, ихтиёрий $x,\overline{x}\in[a,b]$ нуқталар учун:*

$$\left|f(\overline{x})-f(x)\right|\le L\cdot\left|\overline{x}-x\right| \qquad \textbf{(4)}$$

*тенгсизлик бажарилса, унда $f(x)$ функция [*a,b*] кесмада чекли вариацияли функция бўлади ва:*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f(x)\le L\cdot(b-a)$$

*тенгсизлик бажарилади***[1].**

◀ $\vartheta_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|\overset{(4)}{\le}L\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=L\cdot(b-a)$, $\forall n\in\mathrm{N}$ учун $\Rightarrow$ $\overset{b}{\underset{a}{V}}f(x)\le L\cdot(b-a)$ ▶

3-теорема. А*гар $f(x)$ функция [a,b] кесмада чегараланган ҳосилага эга бўлса, унда $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлади***[1-2].**

◀Теорема шартига кўра шундай ўзгармас $L>0$ сон топиладики, $\forall x\in[a,b]$ учун

$$\left|f'(x)\right|\le L$$

тенгсизлик бажарилади. $\forall x,\overline{x}\in[a,b]$ нуқталар олиб $[x,\overline{x}]$ (ёки $[\overline{x},x]$) кесмада Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасидан фойдаланамиз:

$$\left|f(\bar{x})-f(x)\right|=\left|f'(\xi)\cdot(\bar{x}-x)\right|\le L\cdot\left|(\bar{x}-x)\right|.$$

Демак, $f(x)$ функция [a,b] кесмада Липщиц шартини қаноатлантирар экан. Унда 2-теоремага кўра у чекли вариацияга эга бўлади.►

4-теорема. *Агар [a,b] кесмада аникланган* $f(x)$ *функцияни шу кесмада ушбу*

$$f(x)=c+\int_a^x\varphi(t)dt \tag{5}$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, бу ерда $\varphi(t)$ *функция [a,b] кесмада абсолют интегралланувчи функция, у ҳолда* $f(x)$ *функция шу кесмада чекли вариацияга эга бўлиб,*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\, f(x)\le \overset{b}{\underset{a}{V}}\left|\varphi(t)\right|dt$$

тенгсизлик бажарилади[1,3].

◄Теореманинг исботи ушбу:

$$\vartheta_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi(t)dt\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|\varphi(t)\right|dt\le\int_a^b\left|\varphi(t)\right|dt$$ тенгсизликдан

келиб чиқади.►

1.2. Чекли вариацияли функцияларнинг хоссалари.

Айтайлик, чекли [a,b] кесма берилган бўлсин.

5-теорема. *[a,b] кесмадаги ихтиёрий чекли вариацияли функциялар шу кесмада чегараланган бўлади.*

◄ $\forall x'\in(a,b]$ нуқта оламиз. Унда шартга кўра:

$$\vartheta_2=\left|f(x')-f(a)\right|+\left|f(b)-f(x')\right|\le\overset{b}{\underset{a}{V}}\, f(x) \tag{6}$$

бўлади. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left|f(x')\right|=\left|f(x')-f(a)+f(a)\right|\le\left|f(x')-f(a)\right|+\left|f(a)\right|\overset{(6)}{\le}\overset{b}{\underset{a}{V}}\, f(x)+\left|f(a)\right|=M\Rightarrow$$

$f(x)$ чегараланган.►

6- теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлса, унда:*

а) $f(x)\pm g(x)$ *ва* ***б)*** $f(x)\cdot g(x)$

функциялар ҳам шу кесмада чекли вариацияли бўлади.

7-теорема. *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлиб, шу кесмада* $\left|g(x)\right|\ge c>0$ *бўлса, унда* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *нисбат ҳам [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлади.*

8-теорема. *Айтайлик, $f(x)$ функция [a,b] кесмада аниқланган ва $c\in(a,b)$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция [a,b] да чекли вариацияли бўлса, унда у [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияли бўлади ва аксинча. Шунингдек,*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)=\overset{c}{\underset{a}{V}} f(x)+\overset{b}{\underset{c}{V}} f(x) \tag{7}$$

тенглик бажарилади.

◀Фараз қилайлик $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияли бўлсин [a,c] ва [c,b] ораликнинг ҳар бирини $\forall$ усул билан алохида кесмаларга ажратамиз:

$$a=y_0<y_1<y_2<\dots y_m=c;\quad c=z_0<z_1<z_2<\dots z_\ell=b\ . \tag{8}$$

Натижада, бутун [a,b] кесма ҳам қисмларга ажралади. [a,c] ва [c,b] кесмалар учун қуйидаги йиғиндиларни тузамиз:

$$\vartheta_1^{(m)}=\sum_{\kappa=0}^{m-1}\left|f(y_{k+1})-f(y_k)\right|;\qquad \vartheta_2^{\ell}=\sum_{i=0}^{\ell-1}\left|f(z_{i+1})-f(z_i)\right|\ .$$

$\Rightarrow[a,b]$ учун $\vartheta_n=\vartheta_1^{(m)}+\vartheta_2^{\ell}$ бўлади. $\Rightarrow \vartheta_1^{(m)}+\vartheta_2^{(1)}=\vartheta_n\le\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)\Rightarrow\ \vartheta_1^{(m)}\le\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$ ва

$\vartheta_2^{(\ell)}\le\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)\,.\Rightarrow$ $f(x)$ функция [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли

вариацияга эга ва қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\overset{c}{\underset{a}{V}} f(x)+\overset{b}{\underset{c}{V}} f(x)\le\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)\ . \tag{9}$$

Энди фараз қилайлик, $f(x)$ функция [a,c] ва [c,b] кесмаларнинг ҳар бирида чекли вариацияга эга бўлсин. [a,b] кесманинг ихтиёрий бўлинишини оламиз. Агар c нуқта бўлиниш нуқталарига кирмаса, унда c ни ҳам бўлиниш нуқталарига қўшамиз. Натижада, ϑ_n йиғинди фақат катталашиши мумкин:

$$\vartheta_n\le\vartheta_1^{(m)}+\vartheta_2^{\ell}\le\overset{c}{\underset{a}{V}} f(x)+\overset{b}{\underset{c}{V}} f(x)\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга ва:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)\le\overset{c}{\underset{a}{V}} f(x)+\overset{b}{\underset{c}{V}} f(x) \tag{10}$$

тенгсизлик бажарилади. (9)- ва (10)-тенгсизликлардан (7)-тенгсизлик келиб чиқади.▶

Бу теоремадан натижа сифатида қуйидаги хосса келиб чиқади.

9-теорема. *Агар $f(x)$ фукнция* [a,b] *кесмада чекли вариацияга эга бўлса, унда ихтиёрий $x\in[a,b]$ учун:*

$$g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$$

тўлиқ вариация x ўзгарувчининг монотон ўсувчи ва чегараланган фукцияси бўлади.

1.3. Чекли вариацияли фукциялар учун зарурий ва етарли шартлар.

Айтайлик, $f(x)$ функция [a,b] оралиқда аниқланган бўлсин. Бу параграфда биз берилган $f(x)$ функциянинг чекли вариацияга эга бўлиши мезонларини келтирамиз.

10-теорема. *$f(x)$ функциянинг [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун шу кесмада монотон ўсувчи ва чегараланган шундай $F(x)$ функциянинг мавжуд бўлиб ихтиёрий $[x',x'']\subset[a,b]$ кесмада:*

$$|f(x'')-f(x')|\le F(x'')-F(x') \tag{11}$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли[1,2].

Шундай хоссага эга бўлган $F(x)$ функцияга $f(x)$ функция учун **мажоранта** дейилади.

11-теорема. *$f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлиши учун уни шу оралиқда иккита монотон ўсувчи ва чегараланган функцияларнинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлиши зарур ва етарли:*

$$f(x)=g(x)-h(x). \tag{12}$$

[1,2]◄**Зарурлиги.** Айтайлик, $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлсин. Унда 10-теоремага кўра шундай мажоранта $F(x)$ топиладики, унинг учун (11)- тенгсизлик бажарилади. Тузилишига кўра $F(x)$ функция монотон ўсувчи ва чегараланган. Агар:

$$g(x)=F(x) \text{ ва } h(x)=F(x)-f(x)$$

деб белгиласак, $f(x)=g(x)-h(x)$ бўлади ҳамда қуйидаги муносабат бажарилади:

$$h(x'')-h(x')=[F(x'')-F(x')]-[f(x'')-f(x')]\overset{(11)}{\ge}0,$$

$x''\ge x$ ва $x'',x'\in[a,b]$ $\Rightarrow h(x)\uparrow$ ва чегараланган, чунки:

$$|h(x)|\le|F(x)|+|f(x)|\le M.$$

Етарлилиги. Фараз қилайлик, $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар [a,b] кесмада монотон ўсувчи ва (12)-тенгсизлик бажарилсин.

$$F(x)=g(x)+h(x)$$

деб олиб, унинг $f(x)$ учун мажоранта бўлишини кўрсатамиз:

$$|f(x'')-f(x')|=|[g(x'')-g(x')]-[h(x'')-h(x')]|\le|g(x'')-g(x')|+$$

$$+|h(x'')-h(x')|=[g(x'')-g(x'')]+[h(x'')-h(x')]=[g(x'')+h(x'')]-$$

$-[g(x')+h(x')]=F(x'')-F(x')$ $\Rightarrow$ $F(x)$ – мажоранта. Унда 10-теоремага кўра $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлади.►

Натижа. *Агар $f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияга эга бўлса,унда $\forall x_0\in[a,b]$ нуктада унинг чекли бир томонли лимитлари мавжуд:*

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x); \qquad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x) \quad \textbf{(13)}$$

◀11-теоремага кўра шундай ўсувчи ва чегараланган $g(x)$ ва $h(x)$ функциялар топиладики,

$$f(x)=g(x)-h(x)$$

тенглик бажарилади. Математик анализ курсидан маълумки,монотон функциялар учун чекли:

$$\lim_{x\to x_0\pm 0} g(x)=g(x_0\pm 0) \text{ ва } \lim_{x\to x_0\pm 0} h(x)=h(x_0\pm 0)$$

лар мавжуд $\Rightarrow$ **(13)**.▶

1.4. Тўғриланувчи чизиқлар. Жордан теоремаси.

12-теорема. *$f(x)$ функция [a,b] кесмада чекли вариацияли функция бўлиб, $x_0\in[a,b]$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, унда:*

$$g(x)=\bigvee_a^x f(t)$$

функция ҳам x_0 нуктада узлуксиз бўлади.

◀ $x_0<b$ деб фараз қиламиз ва $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз эканлигини исботлаймиз. $\forall\varepsilon>0$ сон олиб, $[x_0;b]$ кесмани ушбу:

$$x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай нуқталар ёрдамида кесмаларга ажратамизки, натижада:

$$\vartheta_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|>\bigvee_{x_0}^b f(t)-\varepsilon \qquad \textbf{(14)}$$

тенгсизлик бажарилсин.

$f(x)\in C\{x_0\}$, бўлгани учун, x_1 нуқтани x_0 нуқтага шундай яқин олиш мумкинки, $\left|f(x_1)-f(x_0)\right|<\varepsilon$ бўлсин. Унда (14) га кўра:

$$\bigvee_{x_0}^b f(t)<\varepsilon+\vartheta_n=\varepsilon+\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|=\varepsilon+\left|f(x_1)-f(x_0)\right|+$$

$$+\bigvee_{k=1}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|<\varepsilon+\varepsilon+\bigvee_{k=1}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|\le 2\varepsilon+\bigvee_{x_1}^{b}\left|f(t)\right|$$

бўлади. Демак, $\bigvee_{x_0}^b f(t)-\bigvee_{x_1}^b f(t)<2\varepsilon$ ёки $\bigvee_{x_0}^{x_1} f(x)<2\varepsilon$ муносабат ўринли.$\Rightarrow$ $g(x_1)-g(x_0)<2\varepsilon$. $g(x)$ функция ўсувчи бўлгани учун $\Rightarrow$

$$0\le g(x_0+0)-g(x_0)<2\varepsilon$$

Бу тенгсизлик ва ε нинг ихтиёрийлигидан фойдалансак,

$$g(x_0+0)=g(x_0)$$

тенгликни, яъни $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксиз эканлигини ҳосил қиламиз.

$x_0>a$ бўлган ҳолда $g(x)$ функциянинг x_0 нуқтада чапдан узлуксиз эканлиги ҳам шу каби кўрсатилади.▶

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. *[a,b] кесмадаги чекли вариацияли узлуксиз* $f(x)$ *функцияни шу кесмада иккита узлуксиз, ўсувчи функциянинг айирмаси кўринишида ифодалаш мумкин:*

$$f(x)=g(x)-h(x).$$

13-теорема. *Айтайлик,* $f(x)\in C[a,b]$ *бўлсин . [a,b] кесмани ушбу*

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида қисмларга ажратамиз ва:

$$\vartheta_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]$$

йиғиндини оламиз. Унда, агар:

$$\lambda=\max_{k=\overline{0,n-1}}(x_{k+1}-x_k)$$

бўлса, Ушбу:

$$\lim_{\lambda\to 0}\vartheta_n=\bigvee_a^b f(x) \qquad \textbf{(15)}$$

тенглик ўринли бўлади .

◄Бизга маълумки,

$$\bigvee_a^b f(x)=Sup\{\vartheta_n\}$$

ва бўлиниш нуқталарига нисбатан $\{\vartheta_n\}\uparrow$. Демак, теоремани исботлаш учун ушбу:

$$Sup\{\vartheta_n\}=\lim_{\lambda\to 0}\vartheta_n \qquad \textbf{(16)}$$

тенгликнинг бажарилишини кўрсатиш кифоя .

Фараз қилайлик,

$$Sup\{\vartheta_n\}=A \qquad \textbf{(17)}$$

бўлсин. Унда аниқ юқори чегаранинг таърифга кўра қуйидагиларни хосил қиламиз:

1) $\forall n\in N$ учун $\vartheta_n\le A$

2) $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам $\exists n_0\in N$ топиладики,

$\vartheta_{n_0}>A-\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

$\{\vartheta_n\}\uparrow.$ $\Rightarrow$ $\forall n>n_0$ учун $\vartheta_n>A-\varepsilon$ булади.

Демак , $\forall n>n_0$ учун:

$$A-\varepsilon<\vartheta_n\le A<A+\varepsilon$$

экан. $\Rightarrow$ Кетма-кетлик лимитининг таърифига кўра:

$$\lim_{\lambda\to 0}\vartheta_n=A \qquad \textbf{(18)}$$

тенглик ўринли. (17) ва (18)дан $\Rightarrow$ (16).►

Чекли вариацияли функция тушунчаси эгри чизиқнинг тўғриланувчилиги масаласида ўз татбиқини топган.

Айтайлик,

$$\overset{\smile}{AB} = (L):\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \quad t\in[t_0;T] \end{cases} \tag{19}$$

содда эгри чизиқ берилган бўлиб, $\varphi(t),\psi(t)\in C[t_0;T]$ бўлсин. Фараз қилайлик, t параметр t_0 дан T га қараб ўзгарганда, унга L эгри чизиқда мос келувчи:

$$(x,y)=(\varphi(x),\ \psi(x))$$

нуқта A нуқтадан B нуқтага қараб ўзгарсин.

$[t_0;T]$ кесмада ушбу: $t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталарни олиб, уларга (L) эгри чизиқда мос келган нуқталарни $A=A_0<A_1<A_2<\ldots<A_n=B$ деб белгилаймиз. Бу нуқталарни кетма-кет туташтириш натижасида (L) эгри чизиққа чизилган синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. Бу синиқ чизиқнинг периметри:

$$P_n=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2+[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)]^2} \tag{20}$$

тенглик ёрдамида ифодаланади.

<u>3-таъриф</u>. *Агар ушбу:*

$$\ell im_{\lambda\to 0} P_n = L \qquad (\lambda=\max_{k=0,n-1}(t_{k+1}-t_k))$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, унда (L) эгри чизиқ ***тўғриланувчи чизиқ*** *дейилади ҳамда лимитнинг қиймати L га унинг* ***узунлиги*** *деб аталади.*

<u>14-теорема</u> ***(Жордан теоремаси).*** *(19)-эгри чизиқнинг туғриланувчи бўлиши учун $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ фунцияларнинг $[t_0;T]$ оралиқда чекли вариацияга эга бўлиши зарур ва етарли.*

Эгри чизик ёйи узунлигини $L=L(t)$ деб уни $[t_0;t]$ оралиқда қараймиз. Унда $L(t)\uparrow$ бўлади ва $\Delta t>0$ бўлганда $\Delta L=L(t+\Delta t)-L(t)$ учун:

$$0<\Delta L<\bigvee_t^{t+\Delta t}\varphi(t)+\bigvee_t^{t+\Delta t}\psi(t)$$

тенгсизликлар бажарилади. $\Rightarrow$ Узлуксиз тўғриланувчи эгри чизиқ учун $L(t)$ функция t параметрининг узлуксиз функцияси бўлади.

1.5. Стилтьес интегралининг таърифи ва унинг мавжудлик шарти.

Стилтьес интеграли Риман интегралининг табиий умумлашмаси бўлиб, қуйидагича аниқланади. Айтайлик, [a,b] кесмада 2 та чегараланган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. [a,b] кесмани ушбу:

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=\mathrm{b}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқталар ёрдамида n та

$[x_k ; x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$, қисмларга ажратамиз. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ва $\lambda = \max\limits_{k=\overline{0,n-1}} \Delta x_k$ деб белгилаймиз. $\forall \xi_k \in [x_k ; x_{k+1}]$ нуқта олиб, ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k) \tag{1}$$

(1)-йиғиндига **Стилтьеснинг интеграл йиғиндиси** дейилади.

1-таъриф. *Агар* $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = I$ *мавжуд ва чекли бўлиб, унинг қиймати [a,b] кесманинг бўлиниш усулига ҳамда ундаги* ξ_k *нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, унда шу сонга* $f(x)$ ***функциянинг*** $g(x)$ ***функция бўйича Стилтьес интеграли*** *дейилади ва* $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ *каби белгиланади***[1-3]**.

Демак,

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) := \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{\lambda=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k). \tag{2}$$

Агар (2) – интеграл мавжуд **бўлса**, унда $f(x)$ **функция** [a,b] **кесмада** $g(x)$ **функция бўйича интегралланувчи** деб аталади.

Энди Стилтьес интегралининг мавжудлик шартини аниқлаймиз. Фараз қилайлик, $g(x)$ функция монотон ўсувчи бўлсин. У ҳолда $\Delta x_k > 0$ бўлганда $\Delta g(x) > 0$ бўлади. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{[x_k, x_{k+1}]}\{f(x)\}, \qquad M_k = \sup_{[x_k, x_{k+1}]}\{f(x)\}, \\ \underline{S} &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k), \qquad \overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k). \end{aligned} \tag{3}$$

2-таъриф. $\underline{S}$ *ва* $\overline{S}$ *йиғиндилар мос равишда* ***Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йиғиндилари*** *деб аталади* **.**

Оддий Дарбу йиғиндилари каби бу йиғиндилар ҳам қуйидаги хоссаларга эга.

1^0**.** *Агар [a,b] кесманинг бўлиниш нуқталарига янгилари қўшилса, унда* $\underline{S}$ *фақат ортиши,* $\overline{S}$ *эса камайиши мумкин.*

Демак, $\{\underline{S}\}\uparrow$ ва $\{\overline{S}\}\downarrow$.

2^0. *Дарбу - Стилтьеснинг ихтиёрий қуйи йиғиндиси унинг ихтиёрий юқори йиғиндисидан катта бўла олмайди (агар у бошқа бўлинишга мос келса ҳам).*

Агар ушбу:

$I_* = \sup\{\underline{S}\}$ ва $I^* = \inf\{\overline{S}\}$

тенгликлар ёрдамида Дарбу – Стилтьеснинг **қуйи ва юқори интегралларини** аниқласак, унда:

$$\underline{S} \le I_* \le I^* \le \overline{S}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликлар ва Дарбу - Стилтьес йиғиндиларидан фойдаланиб, оддий Риман интеграли ҳолидаги каби қуйидаги теорема осонгина исботланади.

<u>1-теорема.</u> *Стилтьес интегралининг мавжуд бўлиши учун ушбу:*

$$\lim_{\lambda \to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$$

Ёки:

$$\lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta g(x_k) = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли $(\omega_k = M_k - m_k)$.

Стилтьес интеграли мавжуд бўлган фукциялар синфи.

<u>2-теорема.</u> *Агар* $f(x) \in C[a,b]$ *бўлиб,* $g(x)$ *функция [a,b] кесмада монотон ўсувчи бўлса, унда:*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) \qquad \textbf{(5)}$$

*Стилтьес интеграли мавжуд бўлади**[1,3].***

◀ $f(x) \in C[a,b]$ $\Rightarrow$ Кантор теоремасига кўра текис узлуксиз $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сон топиладики, [a,b] кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган бўлакларга ажратилганда, $f(x)$ функциянинг шу бўлаклардаги тебраниши ω_k учун ушбу:

$\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$ тенгсизлик бажарилади. Энди [a,b] кесмани узунликлари δ дан кичик бўлган қисмларга ажратамиз. $\Rightarrow$ $\lambda < \delta$ ва $\omega_k < \dfrac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$. $\Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta g(x_k) < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}\sum_{k=0}^{n-1}[g(x_{k+1}) - g(x_k)] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \cdot [g(b) - g(a)] = \varepsilon \;\;\Rightarrow\;\; \lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta g(x_k) = 0 \;\;\Rightarrow$$

(5)-интеграл мавжуд.▶

<u>3-теорема</u>. *Агар* $f(x)$ *функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб,* $g(x)$ *функция Липщиц шартини қаноатлантирса, яъни:*

$$\left|g(\overline{x}) - g(x)\right| \le L \cdot (\overline{x} - x)$$
$$(L = const, a \le x \le \overline{x} \le b) \qquad \textbf{(6)}$$

тенгсизлик бажарилса, унда (5)-Стилтьес интеграли мавжуд бўлади[1,3].

◀а) Аввал хоссани $g(x)$ функция (6)-шартни бажаришдан ташқари монотон ўсувчи бўлган ҳол учун исботлаймиз.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta g(x_k) < \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k [g(x_{k+1}) - g(x_k)] \overset{(6)}{\le} L \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k (x_{k+1} - x_k) =$$

$$= L \cdot \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k \Delta x_k . \qquad \textbf{(7)}$$

$f(x)$ функция [a,b] да Риман маъносида интегралланувчи бўлгани учун $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k = 0$ ва мос равишда (7)-тенгсизликка кўра $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta g(x_k) = 0$ бўлади. $\Rightarrow$ (5)-интеграл мавжуд.

б) Умумий ҳол. Липщиц шартини каноатлантирувчи $g(x)$ функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$g(x) = L\cdot x - [L\cdot x - g(x)] = g_1(x) - g_2(x). \tag{8}$$

(8)-тенгликдаги $g_1(x) = L\cdot x$ функция Липшиц шартини қаноатлантириши билан бир қаторда монотон ўсувчи ҳам бўлади. Шу шартларни $g_2(x) = L\cdot x - g(x)$ функция хам бажаради. Дархақиқат, $a \le x \le \bar{x} \le b$ учун:

$$g_2(\bar{x}) - g_2(x) = L(\bar{x} - x) - [g(\bar{x}) - g(x)] \overset{(6)}{\ge} L\cdot(\bar{x} - x) - L\cdot(\bar{x} - x) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{g_2(x)\}\uparrow$$

ва

$$|g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \le L(\bar{x} - x) + |g_2(\bar{x}) - g_2(x)| \overset{(6)}{\le} L(\bar{x} - x) + L(\bar{x} - x) =$$
$$= 2L(\bar{x} - x).$$

а) ҳолга кўра $g_1(x)$ ва $g_2(x)$ лар учун (4) шарт бажарилади $\Rightarrow$ (4)-шарт $g(x)$ функция учун ҳам бажарилади $\Rightarrow$ (5)-интеграл мавжуд.▶

<u>**4-теорема**</u>. *Агар $f(x)$ функция [a,b] кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функцияни ушбу:*

$$g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt, \tag{9}$$

бу ерда $\phi(x) - [a,b]$ кесмада абсолют интегралланувчи функция, кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, унда (5)-интеграл мавжуд бўлади.

1.6. Стилтьес интегралининг хоссалари.

Стилтьес интегралининг таърифидан тўғридан тўғри қуйидаги хоссалар келиб чиқади:

1^0. $(S)\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a).$

2^0. $(S)\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dg(x) = (S)\int_a^b f_1(x)dg(x) \pm (S)\int_a^b f_2(x)dg(x).$

3^0. $(S)\int_a^b f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] = (S)\int_a^b f(x)dg_1(x) \pm (S)\int_a^b f(x)dg_2(x).$

4^0. $(S)\int_a^b k\cdot f(x)d(\ell\cdot g(x)) = (S)k\cdot\ell\int_a^b f(x)dg(x).$

5^0. $(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(S)\int_a^c f(x)dg(x)+(S)\int_c^b f(x)dg(x)\ \ (a<c<b)$ [1]

Мисол. [-1;1] *кесмада берилган ушбу:*

$$f(x)=\begin{cases}0, & агар\ \ -1\le x\le 0\ \ бўлса,\\ 1, & агар\ \ \ 0<x\le 1\ \ бўлса\end{cases}\quad ва\quad g(x)=\begin{cases}0, & агар\ \ -1\le x<0\ \ бўлса,\\ 1, & агар\ \ \ 0\le x\le 1\ \ бўлса\end{cases}$$

функцияларни оламиз. Унда $(S)\int_{-1}^{0} f(x)dg(x)$ ва $(S)\int_{0}^{1} f(x)dg(x)$ интеграллар мавжуд ва нолга тенг бўлади, чунки иккала ҳолда ҳам Стилтьес йиғиндисида қатнашган ҳадлар 0 га тенг. Энди $(S)\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ интегралнинг мавжуд эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун [-1;1] кесманинг шундай бўлинишини оламизки, 0 нуқта бўлиниш нуқтаси бўлмасин. Интеграл йиғиндини тузамиз:

$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)=(($айтайлик, $0\in[x_k,x_{k+1}]$ бўлсин $\Rightarrow\ x_k<0<x_{k+1}\ \Rightarrow$ йиғиндидаги k-чи қўшилувчидан бошқа ҳаммаси нолга тенг бўлади, чунки $i\neq k$ да

$$\Delta g(x_i)=g(x_{i+1})-g(x_i)=0))=f(\xi_k)\cdot\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right]=f(\xi_k)\cdot(1-0)=$$

$$=f(\xi_k)=\begin{cases}0, & агар\ \ \xi_k\le 0\ \ бўлса,\\ 1, & агар\ \ \xi<0\ \ \ бўлса\end{cases}\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}\sigma-\nexists\Rightarrow(S)\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)-\nexists$$

1.7. Стилтьес интеграли учун бўлаклаб интеграллаш формуласи.

5-теорема. ***Агар*** $(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ ***ва*** $(S)\int_a^b g(x)dg(x)$ ***Стилтьес*** *интегралларидан бири мавжуд бўлса, унда иккинчиси ҳам мавжуд бўлади ва ушбу бўлаклаб интеграллаш формуласи ўринли:*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-(S)\int_a^b g(x)df(x) \qquad \textbf{(10)}$$

Стилтьес интегралини ҳисоблашга доир мисоллар:

Аввалги пунктда кўрганимиздек, маълум шартлар бажарилганда Стильтес интегралини ҳисоблаш учун қуйидаги формулалар ўринли бўлади:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx, \qquad \textbf{(11)}$$

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx, \qquad \textbf{(12)}$$

ва

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx+f(a)\cdot\left[g(a+0)-g(0)\right]+$$

[1] Wallace F. Lovejoy, Paul T. Homan// Methods of Estimating Reserves of Crude Oil, Natural Gas, and Natural Gas Liquids United Kingdom, 2015, English

$$+\sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)\cdot[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)\cdot[g(b)-g(b-0)] \quad (13)$$

Шу формулалардан фойдаланиб мисоллар ечамиз.[2]

1-мисол. *Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_0^2 x^2 d\ell n(1+x);$ *б)* $(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x;$ *в)* $(S)\int_{-1}^1 xdarctgx$.

◀**а)** $(S)\int_0^2 x^2 d\ell n(1+x)$ =(((12) - формуладан фойдаланамиз))

$$=(R)\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx= =\left(\frac{x^2}{2}-x+\ell n|x+1|\right)\Big|_0^2=2-2+\ell n3=\ell n3.$$

б) $$(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x=(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx=\left(\begin{pmatrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\cos xdx & & v=\sin x\end{pmatrix}\right)=$$

$$=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+0-1=\frac{\pi}{2}-1.$$

в) $$(S)\int_{-1}^1 xdarctgx=(R)\int_{-1}^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ell n(x^2+1)\Big|_{-1}^1=0.$$ ▶

2-мисол. *Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_{-1}^3 xdg(x)$, *бу ерда*

$$g(x)=\begin{cases}0, & агар \quad x=-1 \quad бўлса,\\ 1, & агар \quad -1<x<2 \quad бўлса,\\ -1, & агар \quad 2\le x\le 3 \quad бўлса;\end{cases}$$

ва

б) $(S)\int_0^2 x^2dg(x)$, *бу ерда*

$$g(x)=\begin{cases}-1, & агар \quad 0\le x<\frac{1}{2} \quad бўлса,\\ 0, & агар \quad \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2} \quad бўлса,\\ 2, & агар \quad x=\frac{3}{2} \quad бўлса,\\ -2, & агар \quad \frac{3}{2}<x\le 2 \quad бўлса.\end{cases}$$

[2] Wallace F. Lovejoy, Paul T. Homan// Methods of Estimating Reserves of Crude Oil, Natural Gas, and Natural Gas Liquids United Kingdom, 2015, English

◀**а)** $g(x)$ функциянинг $x=-1$ нуқтадаги сакраши 1га, $x=2$ нуқтадаги сакраши –2 га тенг хамда $x\neq -1;2$ нуқталарда $g'(x)=0$. Унда (13)-формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x) = -1\cdot(1-0)+2(-1-1) = -1-4 = -5$$

б) $g(x)$ функциянинг $x=\frac{1}{2}$ нуқтадаги сакраши 1га, $x=\frac{3}{2}$ нуқтадаги сакраши -2 га тенг ва $x\neq\frac{1}{2};\frac{3}{2}$ бўлганда $g'(x)=0$. Интегрални (13) – формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$(S)\int_{0}^{2} x^2dg(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(0+1)+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2-0) = \frac{1}{4}-\frac{18}{4} = -\frac{17}{4}$$.▶

3-мисол. *Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_{-2}^{2} xdg(x)$, *б)* $(S)\int_{-2}^{2} x^2dg(x)$, *в)* $(S)\int_{-2}^{2} (x^3+1)dg(x)$.

Бу ерда
$$g(x)=\begin{cases} x+2, & \text{агар } -2\le x\le -1 \text{ бўлса,}\\ 2, & \text{агар } -1< x< 0 \text{ бўлса,}\\ x^2+3, & \text{агар } 0\le x\le 2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

◀ $g(x)$ функциянинг $x=-1$ ва $x=0$ нуқталаридаги сакраши 1 га тенг ҳамда:

$$g'(x)=\begin{cases} 1, & \text{агар } -2\le x< -1 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } -1< x< 0 \text{ бўлса,}\\ 2x, & \text{агар } 0< x\le 2 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

а) $$(S)\int_{-2}^{2} xdg(x) = \int_{-2}^{-1} xdx+\int_{0}^{2} x\cdot 2xdx+(-1)\cdot(2-1)+0\cdot(3-2) =$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1}+\frac{2}{3}x^3\Big|_{0}^{2}-1 = \frac{1}{2}-2+\frac{16}{3}-1 = \frac{17}{6}$$.

б) $$(S)\int_{-2}^{2} x^2dg(x) \overset{(24)}{=} \int_{-2}^{-1} x^2dx+\int_{0}^{2} x^2 2xdx+(-1)^2\cdot 1+$$

$$+0\cdot 1 = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{-1}+\frac{x^4}{2}\Big|_{0}^{2}+1 = -\frac{1}{3}+\frac{8}{3}+8+1 = 11\frac{1}{3}$$.

в) $$(S)\int_{-2}^{2}\left(x^3+1\right)dg(x) \overset{(24)}{=} \int_{-2}^{-1}\left(x^3+1\right)dx+\int_{0}^{2}\left(x^3+1\right)2xdx+$$

$$+\left[(-1)^3+1\right]\cdot 1+\left(0^3+1\right)\cdot 1 = \left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+2\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}+0+1 =$$

$$=\frac{1}{4}-1-4+2+\frac{64}{5}+4 = 15\frac{1}{20}$$.▶

1.8. Стилтьес интегралини баҳолаш.

Стильтес интегралини ўрганиш жараёнида амалиётда $f(x)$ функция узлуксиз ва $g(x)$ функция чекли вариацияга эга бўлган ҳол мухим ахамиятга эга. Бундай ҳолда Стилтьес интегралини қуйидагича баҳолаш мумкин.

6-теорема. *Агар* $f(x)\in C[a,b]$ *ва* $g(x)$ *чекли вариацияли функция бўлса, унда:*

$$\left|(S)\int_a^b f(x)dg(x)\right|\le M\cdot V \tag{14}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Бу ерда: $M=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|,\quad V=\bigvee\limits_a^b g(x).$

◀Стилтьес йиғиндисини тузиб, уни баҳолаймиз:

$$|\sigma|=\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)\right|=\sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k)|\cdot|\Delta g(x_k)|\le$$

$$\le M\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|\le M\bigvee_a^b g(x)=M\cdot V\underset{\lambda\to 0}{\Rightarrow} \quad (15).$$ ▶

11-теорема. $f(x)\in C[a,b],\ \ g(x)$ - *чекли вариацияли функция ва* $I=(S)\int_a^b f(x)dg(x)$ *бўлсин. Унда* $\forall\varepsilon>0$ *учун* $\exists\delta>0:\ \ \lambda<\delta$ *бўлганда:*

$$|\sigma-I|\le\varepsilon\cdot\bigvee_a^b g(x) \tag{16}$$

бўлади.

1.9. Стилтьес интеграли белгиси остида лимитга ўтиш.

7-теорема. *Фараз килайлик,* [a,b] *кесмада* $\{f_n(x)\}\ \ (n=1,2,...)$ *функционал кетма-кетлик берилган бўлиб,* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ *бўлсин. Агар:*

1) $f_n(x)\in C[a,b]$,

2) $n\to\infty$ *да* $f_n(x)\rightrightarrows f(x),$

3) $g(x)$ *-чекли вариацияли функция бўлса, у ҳолда:*

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_a^b f_n(x)dg(x)=(S)\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dg(x)=(S)\int_a^b f(x)dg(x) \tag{17}$$

бўлади.

◀ $n\to\infty$ да $f_n(x)\rightrightarrows f(x),$ бўлгани учун $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $n_0\in N$ сон топиладики, $\forall n>n_0$ ва барча $x\in[a,b]$ лар учун

$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$

тенгсизлик бажарилади. Унда 15-пунктдаги (29)-тенгсизликка кўра $n>n_0$ бўлганда қуйидаги муносабатни ҳосил қиламиз:

$$\left|(S)\int_a^b f_n(x)dg(x)-(S)\int_a^b f(x)dg(x)\right|=$$

$$=\left|(S)\int_a^b[f_n(x)-f(x)]dg(x)\right|\leq\varepsilon\cdot\mathop{V}_a^b g(x)\underset{\varepsilon\to0}{\Rightarrow}$$

(18)►

8-теорема. *Фараз қилайлик,* $[a,b]$ *кесмада* $f(x)$ *функция ва* $\{g_n(x)\}\quad(n=1,2,...)$ *функционал кетма-кетлик берилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:*

1) $f(x)\in C[a,b],$

2) $g_n(x)\quad(n=1,2,...)$ *-чекли вариацияли функциялар,*

3) $\mathop{V}_a^b g_n(x)\leq V\quad(n=1,2,...),$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$.

У ҳолда:

$$\lim_{n\to\infty}(S)\int_a^b f(x)dg_n(x)=(S)\int_a^b f(xdg(x)$$

(19)

бўлади.

Назорат саволлари:

1. Чекли вариацияли функциялар таърифи.
2. Функциянинг тўлиқ вариацияси нима?
3. Чекли вариацияли функциялар синфи.
4. Чекли вариацияли фукциялар учун зарурий шартлар.
5. Чекли вариацияли фукциялар учун етарли шартлар.
6. Стилтьес интегралининг таърифини келтиринг.
7. Стилтьес интегралининг мавжудлик шарти.
8. Стилтьес интегралининг хоссаларини келтиринг.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Фихтенгольц Г.М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

2. Wallace F. Lovejoy, Paul T. Homan// Methods of Estimating Reserves of Crude Oil, Natural Gas, and Natural Gas Liquids United Kingdom, 2015, English

3. Туйчиев Т.Т., Тишабаев Ж.К., Кутлимуратов А.Р., Каримов Ж.Ж. Дополнителные главы анализа, Т. “Университет”. 2015.

4. Brian S. Tomson Theory of integral. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, 2012.

2-мавзу: ГАРМОНИК ВА СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР.

РЕЖА:

2.1. Гармоник функциялар ва уларнинг хоссалари.
2.2. Харнак теоремаси.
2.3. Субгармоник функциялар ва уларнинг хоссалари.
2.4. Максимумлар принципи.
2.5. C^2 синфга тегишли субгармоник функциянинг Лаплас оператори.

Таянч иборалар: *гармоник функциялар, субгармоник функциялар, монотон камаювчи, текис яқинлашувчи, максимумлар принципи***.**

2.1. Гармоник функциялар ва уларнинг хоссалари.

Таъриф. Агар $D\subset\mathbb{R}^n$ соҳада берилган $u\in C^2(D)$ функция ушбу:

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0$$

тенгликни қаноатлантирса, функция D соҳада гармоник функция дейилади.Бунда $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}-$ Лаплас оператори***[1-2].***

D соҳада гармоник бўлган барча функциялар тўпламини $h(D)$ белгилаймиз.

Гармоник функцияларнинг асосий хоссаларини келтирамиз.

а) агар $u\in h(D)$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x^0\in D$ нуқта ва сфера учун $S(x^0,r)\subset D$ ушбу тенглик ўринли:

$$u(x^0)=\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int\limits_{S(x^0,r)}u(x)d\sigma, \qquad (1)$$

бунда σ_n- $\mathbb{R}^n$ фазодаги бирлик сферанинг юзаси[1].

б) агар $u(x)$ функция $B(x^0,r)$ шарда гармоник бўлиб, унинг ёпилмасида узлуксиз бўлса,яъни:

$$u(x)\in h(B(x^0,r))\bigcap C(\overline{B(x^0,r)}),$$

у ҳолда ушбу Пуассон формуласи:

$$u(x)=\int\limits_{S(x^0,r)}u(y)P(x,y)d\sigma(y) \qquad (2)$$

ўринли, бунда $P(x,y)=\dfrac{r^2-\left|x-x^0\right|^2}{\sigma_n r\left|x-y\right|^n}$ – Пуассона ядроси, σ_n – $\mathbb{R}^n$ фазодаги бирлик сферанинг юзаси, $n\geq 2$. Бошқа томондан, агар $\varphi(y)$ функция $S(x^0,r)$ сферада узлуксиз бўлса, у ҳолда:

$$u(x)=\int\limits_{S(x^0,r)}\varphi(y)P(x,y)d\sigma(y)$$

функция шарда Дирихле масаласининг ечими бўлади**[1-2].**

Дирихле масаласи: $\Delta u=0$, $u\big|_{\partial D}=\varphi(x)$ ихтиёрий «регуляр» $D\subset\mathbb{R}^n$ соҳалар учун,хусусан чегараси ∂D силлиқ бўлганда ягона ечимга эга бўлади. $P(x,y)$ Пуассон ядроси $y\in S(x^0,r)$ бўлганда, $x\in B(x^0,r)$ бўйича чексиз силлиқ бўлгани учун (2) дан ушбу натижа келиб чиқади.

Натижа 1. D соҳада гармоник $u\in h(D)$ функция чексиз силлиқ бўлади: $u\in C^\infty(D)$ ***[1-2].***

2.2. Харнак теоремаси.

в) **Теорема 1 (*Харнак*).** Гармоник функцияларнинг монотон кетма-кетлиги D соҳа ичида ёки ∞ текис яқинлашади,ёки бирор гармоник фукцияга текис яқинлашади[1-2].

д) $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ комплекс текислигида гармоник функциялар голоморф функциялар билан узвий боғлиқдир. Лаплас операторининг комплекс кўриниши- $\Delta=\dfrac{\partial}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial}{\partial x_2^2}=4\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}$, бунда $z=x_1+ix_2\in\mathbb{C}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x_1}-i\dfrac{\partial}{\partial x_2})$, $\dfrac{\partial}{\partial\overline{z}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x_1}+i\dfrac{\partial}{\partial x_2})$. Бундан эса, $f\in O(D)$ голоморф функция учун $\operatorname{Re}f=\dfrac{f+\overline{f}}{2}$, $\operatorname{Im}f=\dfrac{f-\overline{f}}{2i}$ тенгликлардан $\Delta\operatorname{Re}f=0$, $\Delta\operatorname{Im}f=0$ келиб чиқади.Шунинг учун, f голоморф функциянинг хақиқий ва мавхум қисмлари гармоник фукциялар бўлади. Аксинча,агар $u(z)\in h(D)$бўлса,у ҳолда ихтиёрий $z^0\in D$ нуқта ва унинг $B(z^0,r)\subset D$ атрофи учун унда голоморф $f(z)$ функция мавжуд бўлиб, $\operatorname{Re}f(z)=u(z)$, $z\in B(z^0,r)$ бўлади***[1].***

2.3. Субгармоник функциялар.

Фараз қилайлик, $D\subset\mathbb{R}^n$соҳада $u:D\to[-\infty,\infty)$ функция берилган бўлсин.

Таъриф. Агар $u(x)$ функция қуйидаги икки шартни қаноатлантирса:

1) $u(x)$ юқоридан яримузлуксиз, яъни $\forall x^0 \in D$ учун:

$$\overline{\lim_{x\to x^0}} u(x) \le u(x^0)$$

тенгсизлик ўринли
(Бундан, D соҳанинг ихтиёрий компакт қисмида функция юқоридан чегараланганлиги келиб чиқади);

2) ихтиёрий $x^0 \in D$ нуқта учун $r(x^0) > 0$ сон топиласаки хар қандай $r \le r(x^0)$ учун:

$$u(x^0) \le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0,r)} u(x)d\sigma \qquad (4)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $u(x)$ функция D соҳада субгармоник дейилади. D соҳада субгармоник функциялар синфини $sh(D)$ каби белгилаймиз.[3]

Келгусида қулайлик учун биз тривиал $u(x) \equiv -\infty$ функцияси ҳам D да $Sh(D)$ га тегишли, деб қараймиз. Энди субгармоник функцияларнинг хоссаларини келтирамиз:

а) субгармоник функцияларнинг мусбат коэффициентли чизиқли комбинацияси субгармоник функция бўлади[1]:

$$u_k(x) \in Sh(D), \quad a_k \in R_+ \quad (k = 1,2,\ldots,m) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1u_1(x) + a_2u_2(x) + \ldots + a_mu_m(x) \in Sh(D);$$

б) чекли сондаги субгармоник функцияларнинг максимуми субгармоник функция бўлади[1]:

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x) \in Sh(D) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max\{u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)\} \in Sh(D);$$

в) монотон камаювчи субгармоник функциялар кетма – кетлигининг лимити субгармоник функция бўлади[1]:

$$u_j(x) \in Sh(D), \quad u_j(x) \ge u_{j+1}(x) \quad (j = 1,2,\ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} u_j(x) \in Sh(D);$$

г) текис яқинлашувчи субгармоник функциялар кетма – кетлиги субгармоник функцияга яқинлашади***[1]:***

$u_j(x) \in sh(D),\ (j = 1,2,\ldots),\ u_j(x) \rightrightarrows u(x) \Rightarrow u(x) \in sh(D)$;

2.4. Максимумлар принципи.

д) *Максимумлар принципи[1-2]*. Агар $u(x) \in Sh(D)$ функция бирор $x^o \in D$ нуқтада ўзининг максимумига эришса, яъни:

[3] Wallace F. Lovejoy, Paul T. Homan// Methods of Estimating Reserves of Crude Oil, Natural Gas, and Natural Gas Liquids United Kingdom, 2015, English

$$u(x^o)=\sup_{x\in D} u(x) \qquad (5)$$

бўлса, у ҳолда $u(x)\equiv const$ бўлади.

◄ Ушбу:

$$M=\left\{x\in D:\ u(x)=u(x^o)\right\}$$

тўпламни қарайлик. $u(x)$ функциянинг юқоридан яримузлуксиз бўлганлигидан ва (8) шартдан M тўпламнинг D да ёпиклиги келиб чикади.

Иккинчи томондан, ихтиёрий $p\in M$ учун (7) формулага кўра:

$$u(x^o)=u(p)\le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int_{S(p,r)} u(x)d\sigma\le u(x^o)\,, \qquad r\le r(p)\,,$$

бўлади. Бу муносабатдан $u\big|_{S(p,r)}\equiv u(x^o)$, яъни p нинг $B(p,r(p))$ атрофида $u(x)=u(x^o)$ бўлишини кўрамиз. Бу эса M тўпламнинг D да очиқ эканлигини кўрсатади. Демак, $M=D$. ►

e) Агар $\vartheta(x)\in Sh(D)$, $u(x)\in H(D)$ функциялар учун $S(x^o,r)\subset\subset D$ сферада:

$$\vartheta\big|_S\le u\big|_S$$

бўлса, у ҳолда $B(x^o,r)$ шарда $\vartheta(x)\le u(x)$ тенгсизлик ўринли бўлади.

◄ Бу хоссанинг исботи юқоридаги *д*) хоссадан келиб чиқади►;

e) – хоссадан қуйидаги муҳим ҳулосага келамиз. Фараз қилайлик,

$$\vartheta(x)\in Sh(D)\bigcap C(D)$$

берилган бўлиб, $B(x^o,r)\subset\subset D$ бўлсин. Ушбу:

$$u(x)=\int_{S(x^o,r)}\vartheta(y)P(x,y)d\sigma(y)\,, \qquad x\in B(x^o,r)\ ,$$

2.5. C^2 синфга тегишли субгармоник функциянинг Лаплас оператори.

Пуассон интегралини қарайлик. $u(x)\in h(B)$, $u\big|_S=\vartheta\big|_S$ бўлиб, *e*) – ҳоссага кўра $B=B(x^o,r)$ да $\vartheta(x)\le u(x)$ бўлади. Узлуксиз функциялар учун исботланган бу хосса ихтиёрий $\vartheta\in Sh(D)$ учун ҳам ўринлидир: $\vartheta(x)\le u(x)$ ва деярли барча $x\in S$ лар учун $\vartheta(x)=u(x)$ ўринлидир;

Теорема. Икки карра силлиқ $u(x)\in C^2(D)$ функция D соҳада субгармоник бўлиши учун унинг Лаплас оператори $\Delta u\ge 0$ тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли***[1-2].***

Назорат саволлари:

1. Гармоник функциянинг таърифи.
2. Гармоник функциянинг асосий хоссаларини келтиринг.
3. Гармоник функция ва голоморф функциялар орасидаги боғланиш.
4. Субгармоник функциялар таърифи.
5. Субгармоник функцияларнинг хоссалари.

6. Субгармоник функциянинг Ласпасиани.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Садуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Akademic Publishing, 2012.

2. Wallace F. Lovejoy, Paul T. Homan// Methods of Estimating Reserves of Crude Oil, Natural Gas, and Natural Gas Liquids United Kingdom, 2015, English

3. Klimek M. Pluripotential theory.Clarendon Press., 1991.

3. Tien Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony, Dynamics of holomorphic maps, p. 2.1.1 Subharmonic and quasi-subharmonic functions . *Introductory Lectures (Master)*, Paris-2011, available at: http://www.math.jussieu.fr/∼dinh

3-мавзу: СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯНИНГ ЎРТА ҚИЙМАТЛАРИ $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ ЛАР.

РЕЖА:

3.1. Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар.

3.2. Субгармоник функциянинг аппроксимацияси.

3.3. Субгармоник функциянинг лапласиани.

3.4. Рисс теоремаси.

Таянч иборалар: *субгармоник функция, локал интегралланувчи, монотон тўпламлар, Рисс теоремаси.*

3.1. Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар.

$u(x) \in Sh(D)$ функция ва $x^o \in D$ нуқта берилган бўлсин. Ушбу:

$$m(x^o, r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x^0,r)} u(x) d\sigma$$

ва

$$n(x^o, r) = \frac{1}{V_n r^n} \int_{B(x^o,r)} u(x) dV,$$

бунда $V_n r^n$ миқдор $B(x^o, r)$нинг ҳажми, интегралларни (ўрта қийматларни) қарайлик.

2 – т е о р е м а[1-2]. Фараз қилайлик, $u(x) \in Sh(D)$ ва $u(x) \not\equiv -\infty$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x^o \in D$ учун:

$$u(x^0) \le n(x^o,r) \le m(x^o,r),\ n(x^o,r) > -\infty,\ 0 < r < \rho(x^o, \partial D),$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бундан ташқари, агар r монотон камайиб нолга интилса, унда $n(x^o, r)$ ва $m(x^o, r)$ ўрта қийматлар монотон камайиб, $u(x^o)$ га интилади.

2 – теоремадан ушбу муҳим натижага эга бўламиз: $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада субгармоник $u(x) \neq -\infty$ функция D да локал интегралланувчидир, яъни ихтиёрий $B \subset\subset D$ учун $\int_B u(x) dV$ интеграл мавжуддир;

з) субгармоник функция D соҳанинг ҳар бир нуқтасида узи-лишга эга бўлиши мумкин. Айни пайтда, қуйидаги теорема ўринли бўлади.

4.2. Субгармоник функциянинг аппроксимацияси.

4.3.

3 – т е о р е м а[1-2]. Агар $u(x)\in Sh(D)$ бўлса, у ҳолда шундай монотон тўпламлар:

$$D_j\subset D_{j+1}\subset D\ ,\quad \bigcup_{j=1}^{\infty}D_j=D$$

кетма – кетлиги ва шундай монотон камаювчи функциялар:

$$u_j(x)\in Sh(D_j)\bigcap C^{\infty}(D_j)\ ,\qquad j=1,2,3,...$$

кетма – кетлиги мавжудки,

$$u(x)=\lim_{j\to\infty}u_j(x)\qquad (x\in D)$$

бўлади.

◀ Ушбу:

$$K(x)=\begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & агар\quad |x|\le 1\quad бўлса,\\ 0, & агар\quad |x|>1\quad бўлса,\end{cases}$$

функцияни қарайлик. Бу функция $C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ синфга тегишли бўлиб, унинг салмоғи $\mathrm{supp}K(x)=B(0,1)$дир. Энди $K(x)$ нинг ифодасидаги ўзгармас c ни шундай танлаб оламизки,

$$\int_{\mathbf{R}^n}K(x)dV=1$$

бўлсин. $u(x)\not\equiv-\infty$ деб, бу ядро ёрдамида ушбу:

$$u_\delta(x)=\frac{1}{\delta^n}\int_{|y-x|\le\delta}u(y)K\left(\frac{y-x}{\delta}\right)dV\ ,\quad \delta>0\ , \tag{6}$$

интегрални қарайлик. $u_\delta(x)$ функцияси:

$$D_\delta=\{x\in D:\ \rho(x,\partial D)<\delta\}$$

очиқ тўпламда аниқланган бўлиб, $x\in D_\delta$ да:

$$u_\delta(x)=\frac{1}{\delta^n}\int_{\mathbf{R}^n}u(y)K\left(\frac{y-x}{\delta}\right)dV=\int_{\mathbf{R}^n}u(x+\delta y)K(y)dV$$

бўлади. Кейинги тенгликдаги биринчи интеграл $C^{\infty}(D_\delta)$ синфга, иккинчи интеграл эса $Sh(D_\delta)$ синфга тегишли бўлади. Бинобарин,

$$u_\delta(x)\in Sh(D_\delta)\bigcap C^{\infty}(D_\delta).$$

$u(x)$ нинг субгармоник функция эканлигидан, u_δ нинг $\delta\downarrow 0$ да, монотон камаювчи бўлишлиги ва:

$$\int_{\mathbf{R}^n}K(x)dV=1$$

тенгликдан, $u_\delta(x)$ нинг $u(x)$ га интилишини топамиз. ►

4.4. Субгармоник функциянинг лапласиани.

и) Субгармоник функциялар умумий ҳолда C^2 синфга тегишли бўлмаслигидан, Δu - Лаплас операторини фақат умумлашган функция сифатида қараш мумкин бўлади[1-2]:

$$\Delta u(\varphi)=\int u\Delta\varphi, \qquad \varphi\in F(D).$$

4 – т е о р е м а. Ҳар кандай субгармоник функция $u(x)\in Sh(D)$, $u\not\equiv-\infty$, учун умумлашган маънода $\Delta u\geq 0$ булади, яъни ихтиёрий $\varphi\in F(D)$, $\varphi\geq 0$ учун $\int u\,\Delta\varphi\geq 0$ муносабат ўринлидир.

Жумладан, $u(x)$ функция C^2 синфга тегишли булиб, у субгармоник булса, $u\in Sh(D)\bigcap C^2(D)$, у ҳолда $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\geq 0$ дир.

Юқорида келтирилган теореманинг акси ҳам ўринли: агар умумлашган функция u учун:

$$\Delta u(\varphi)=\int u\Delta\varphi\geq 0\,, \quad \varphi\in F(D)\,, \quad \varphi\geq 0\,,$$

муносабат бажарилса, у ҳолда u субгармоник функция бўлади;

4.5. Рисс теоремаси.

к) *Ф.Рисс теоремаси.* Ҳар қандай $u(x)\in Sh(D)$, $u\not\equiv-\infty$, функция олинганда ҳам D соҳада шундай мусбат ўлчам μ мавжудки, ихтиёрий $D^0\subset\subset D$ соҳа учун:

$$u(x)=\int\limits_{D^0}K(x-y)d\mu_y+\Phi_{D^0}(x) \tag{7}$$

бўлади, бунда $\Phi_{D^0}(x)\in H(D^0)$ ва:

$$K(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|\,, & \text{агар } n=2 \text{ бўлса},\\ -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}\,, & \text{агар } n>2 \text{ бўлса}.\end{cases}$$

Эслатиб ўтамиз, $K(x)$ функцияси Лаплас тенгламасининг фундаментал ечимидир: $\Delta K(x)=\delta(x)$ бўлиб, бу ерда $\delta(x)$ - Диракнинг умумлашган функцияси, $\delta\circ\varphi(x)=\varphi(0)$, $\varphi\in F(\mathbf{R}^n)$. δ га массаси $x=0$ да бўлган бирлик ўлчам (заряд) мос келади.

Назорат саволлари:

1. Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лари.
2. Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар орасидаги боғланишлар.
3. Субгармоник функциянинг аппроксимацияси.
4. Субгармоник функциянинг лапласиани. Умумий ҳол.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Саъдуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Akademic Publishing, 2012.
2. Klimek M.,Pluripotential theory.Clarendon Press.,1991.

4-мавзу: ЧЕКЛИ ВА ЧЕКСИЗ СОНДАГИ СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР СУПРЕМУМИ, ЮҚОРИ ЛИМИТИ.

РЕЖА:

4.1. Текис чегараланган субгармоник функциялар оиласи.
4.2. Субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимити.
4.3. Хартогс леммаси.

Таянч иборалар: *субгармоник функциялар, текис чегараланган, юқори лимит, локал чегараланган, Хартогс леммаси*.

4.1. Текис чегараланган субгармоник функциялар оиласи.

Субгармоник функциялар назариясида юқоридан локал текис чегараланган функциялар синфи муҳим роль ўйнайди: агар ҳар бир $x^0 \in D$ нуқта учун шундай атроф $B(x^0, r) \subset\subset D$ ва шундай М константа топилсаки, $\{u_\alpha\} \subset Sh(D)$ синфдан олинган ҳар бир $u_\alpha(x)$ функция ушбу:

$$u_\alpha(x) \le M \quad (x \in B(x^0, r))$$

тенгсизлик бажарилса, $\{u_\alpha\}$ синфга D да *юқоридан локал чегараланган* субгармоник функциялар синфи дейилади Равшанки, қаралаётган $\{u_\alpha\}$ синф учун:

$$u(x) = \sup\nolimits_\alpha u_\alpha(x)$$

функция мавжуд ва у D дан олинган ҳар бир компакт $K \subset\subset D$ да юқоридан чегаралангандир. Агар бу функция юқоридан ярим узлуксиз бўлса, унинг субгармоник бўлишлигини исботлаш қийин эмас. $u(x)$ функция юқоридан ярим узлуксиз бўлмаса, унда, одатда қуйидаги регулярлаш операцияси қаралади, яъни:

$$u^*(x) = \lim_{r\to 0} \sup_{y\in B(x,r)} u(y) = \overline{\lim_{y\to x}} u(y).$$

Бунда $u^*(x)$ функция $u(x)$ нинг *регулярланган* функцияси дейилади. Регулярланган $u^*(x)$ функция юқоридан ярим узлуксиз бўлади.

5 – т е о р е м а*[1-2]*. Юқоридан локал чегараланган субгармоник функцияларнинг ихтиёрий синфи $\{u_\alpha\}$ учун:

$$u^*(x) \in Sh(D)$$

бўлиб, $N=\{x\in D:\ u(x)<u^*(x)\}$ тўплам D да поляр тўплам бўлади, бунда $u(x)=\sup\limits_{\alpha} u_\alpha(x)$.

Шунингдек, қуйидаги теорема ҳам ўринли.

4.2.Субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимити.

6 – т е о р е м а. Фараз қилайлик,

$$u_j(x)\in Sh(D)\ ,\ j=1,2,3,...$$

юқоридан локал чегараланган субгармоник функциялар кетма-кетлиги бўлиб, $u(x)=\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} u_j(x)$ бўлсин. У ҳолда, $u^*(x)\in Sh(D)$ бўлиб, $N=\{x\in D:\ u(x)<u^*(x)\}$ тўплам D да поляр тўплам бўлади.

4.3. Хартогс леммаси.

Хартогс леммаси. Фараз қилайлик, $D\in\mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан локал текис чегараланган:

$$u_j(x),\quad j=1,2,3,...\ ,$$

субгармоник функциялар кетма – кетлиги берилган бўлиб, ҳар бир тайинланган $x\in D$ нуқтада:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j(x)\le A$$

бўлсин. У ҳолда $\forall\varepsilon>0$ ва $K\subset\subset D$ компакт учун шундай $j_o\in N$ топиладики, $\forall j\ge j_o,\quad x\in K$ да:

$$u_j(x)\le A+\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади[1-2].

◄ Ушбу $K\subset\subset G\subset\subset D$ муносабатда бўлган G соҳада $\{u_j(x)\}$ кетма – кетликни юқоридан локал текис чегараланганлигидан, шундай $C=const$ мавжудки, $u_j(x)\le C\ \ (x\in G)$ тенгсизлик бажарилади. u_j ларнинг ўрнига u_j-C кетма – кетликни қараб, биз G да $u_j(x)\le 0$ деб қарашимиз мумкин.

Агар $0<r<\frac{1}{3}\rho(K,\partial G)$ сони олинса, унда ихтиёрий $x^o\in K$ да $B(x^o,r)\subset G$ бўлиб, Фату теоремасига кўра:

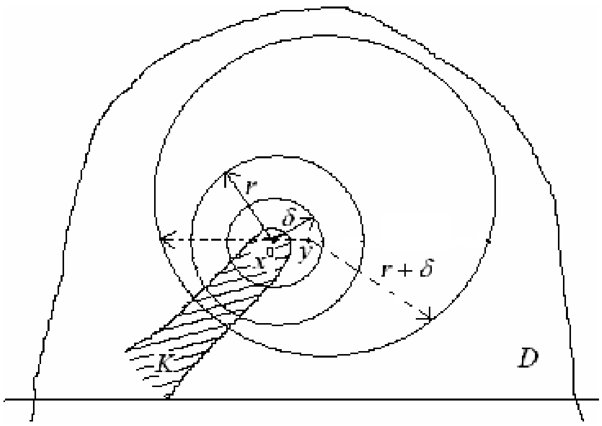
$$\overline{\lim_{j\to\infty}}\int\limits_{B(x^o,r)} u_j(x)dV\ \le\int\limits_{B(x^o,r)}\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j(x)dV\ \le\ AV_n r^n$$

бўлади. Бундан $\forall\varepsilon>0$ сон олинганда ҳам, шундай j_o топилиб, $j\ge j_o$ бўлганда, ушбу :

$$\int\limits_{B(x^o,r)} u_j(x)dV \le \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)V_n r^n$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши келиб чиқади.

Энди $0<\delta<r$ шартни қаноатлантирувчи δ сонини тайинлаб, $y\in B(x^o,\delta)$ нуқталарни қараймиз.



1 – ч и з м а.

2 – теорема ва $u_j(x)\le 0 \quad (x\in G, \quad j=1,2,...)$ шартидан фойдаланиб, $j\ge j_o$ да:

$$u_j(y)\le\frac{1}{V_n(r+\delta)^n}\int\limits_{B(y,r+\delta)} u_j(x)dV \le \frac{1}{V_n(r+\delta)^n}\int\limits_{B(x^0,r)} u_j(x)dV \le$$

$$\le\frac{V_n r^n}{V_n(r+\delta)^n}\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

бўлишини топамиз. Равшанки, етарлича кичик δ лар учун:

$$u_j(y)\le A+\varepsilon\ , \quad j\ge j_0\ , \quad y\in B(x^o,\delta)\ ,$$

тенгсизлак бажарилади.

Демак, компакт K га тегишли ҳар бир x^o нуқта $(x^o\in K)$ олинганда ҳам, бу нуқтага боғлиқ шундай $j(x^o)$ ва $\delta(x^o)>0$ сонлар топиладики, $j\ge j(x^o)\ , \quad y\in B(x^0,\delta(x^0))$ бўлганда:

$$u_j(y)\le A+\varepsilon$$

бўлади. Ушбу:

$$\bigcup_{x^0\in K} B(x^0,\delta(x^0))$$

йиғинди (шарлар йиғиндиси) K компактни тўла қоплайди. Демак,

$B(x^0,\delta(x^0))$ шарларнинг чекли сондагиси ҳам K ни қоплайди. Бундан эса шундай j_0 топилиб, $j \geq j_0$, $y \in K$ да:

$$u_j(y) \leq A+\varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади. ►

И з о ҳ. Хартогс леммаси қуйидаги вариантда ҳам ўринлидир: фараз қилайлик, $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан локал текис чегараланган $\{u_j(x)\} \subset Sh(D)$ кетма – кетлик ва $A(x) \in C(D)$ функция берилган бўлиб, ҳар бир тайинланган $x \in D$ да:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j(x) \leq A(x)$$

бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ ва $\forall K \subset\subset D$ учун $\exists\, j_0 :\ \forall\, j \geq j_0,\ x \in K$ да $u_j(x) \leq A(x)+\varepsilon$ тенгсизлик бажарилади.

◄ Бу тасдиққа ишонч ҳосил қилиш учун Хартогс леммаси исботидаги r сонини шундай танлаш зарурки, ихтиёрий $x, y \in B(x^0, r)$ учун $|\,A(x)-A(y)\,| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ бўлсин. У ҳолда:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \int\limits_{B(x^0,\,r)} u_i(x)\ dV \leq \int\limits_{B(x^0,\ r)} A(x)\ dV\ \leq\ V_n r^n \left[A(x^0)+\frac{\varepsilon}{3}\right]$$

бўлиб, A сони ўрнига $A(x^0)+\dfrac{\varepsilon}{3}$ иштирок қилади. Бундан ташқари, ихтиёрий $y \in B(x^0,\delta)$ учун $|\,A(x^0)-A(y)\,| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ лигидан биз $B(x^o,\delta)$ да $u_j(y)$ ни $j \geq j_0(x^0)$ ларда юқоридан $A(y)+\varepsilon$ билан текис чегараланганлигини ва ниҳоят, бутун K компактда $u_j(x) \leq A(x)+\varepsilon$, $j \geq j_0$, $x \in K$, эканлигини исботлай оламиз.[1] ►

Назорат саволлари:

1. Чегараланган субгармоник функциялар оиласининг аниқ юқори чегараси.
2. Субгармоник функциянинг регулизацияси.
3. Субгармоник функциялар кетма-кетлигининг аниқ юқори чегараси ва юқори лимити.
4. Хартогс леммаси.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Садуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Akademic Publishing, 2012.
2. Klimek M., Pluripotential theory. Clarendon Press., 1991.

IV. АМАЛИЙ МАШҒУЛОТ МАТЕРИАЛЛАРИ

1- ва 2– амалий машғулотлар:

Чекли вариацияли функциялар, функциянинг тўла вариацияси ва уларнинг хоссалари.

Ишдан мақсад: Математик анализнинг биоматематика, механика, оммавий хизмат назарияси, геомеханика ва бошқа соҳалардаги кенг қўлланилишини тушунтириш. Чекли вариацияли функциянинг таърифи ва хоссаларини, ҳамда Стилтьес интеграли ва унинг хоссаларини кенгроқ ўрганиш ва мисоллар ёрдамида татбиқ этиш.

Ишни бажариш учун намуна:

<u>1-Мисол.</u> *Ушбу:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \quad \sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \quad \text{бўлса},\\ 0, \quad \text{агар} \quad x=0, \quad \text{бўлса} & \end{cases}$$

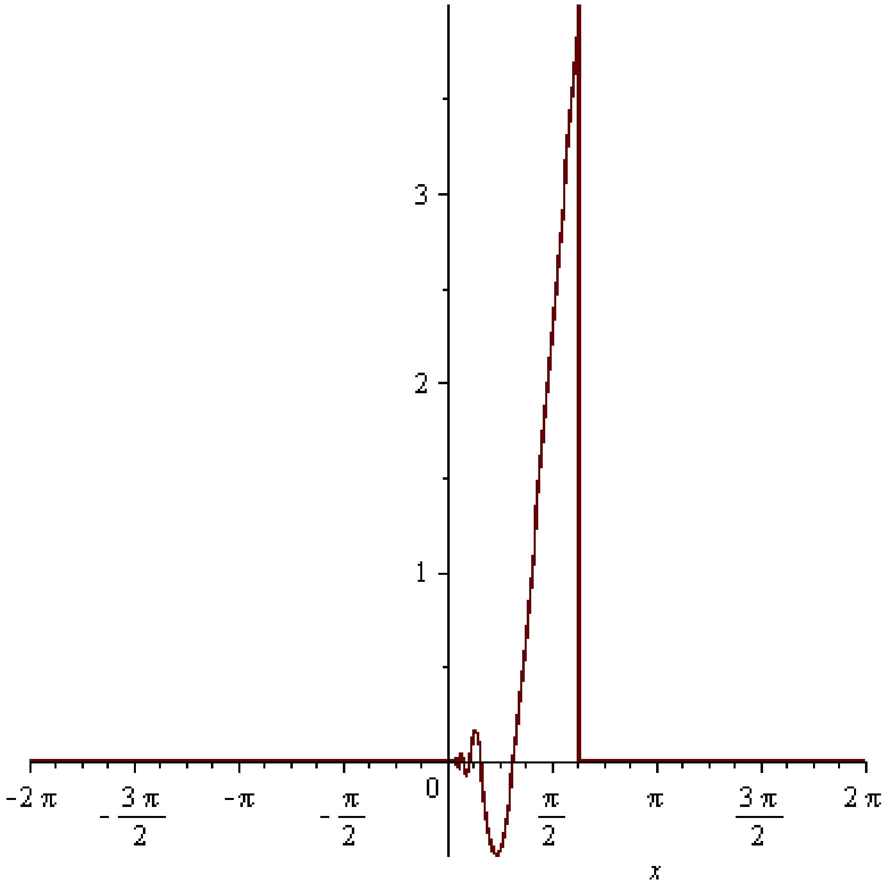
функция ихтиёрий чекли [a,b] кесмада чекли вариацияга эга.

```
> with(plots) :
```

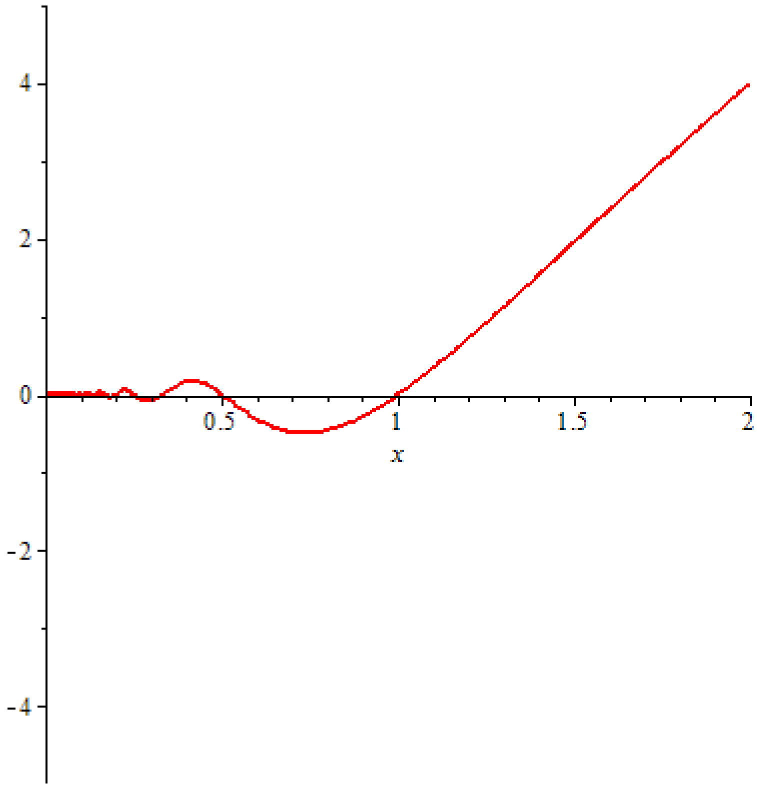
$$> \quad f := \begin{cases} x^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & 0 < x \le 2\\ 0 & x=0 \end{cases};$$

$$f := \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & 0 < x \text{ and } x \le 2\\ 0 & x=0 \end{cases}$$

```
> ;
> smartplot(  );
```



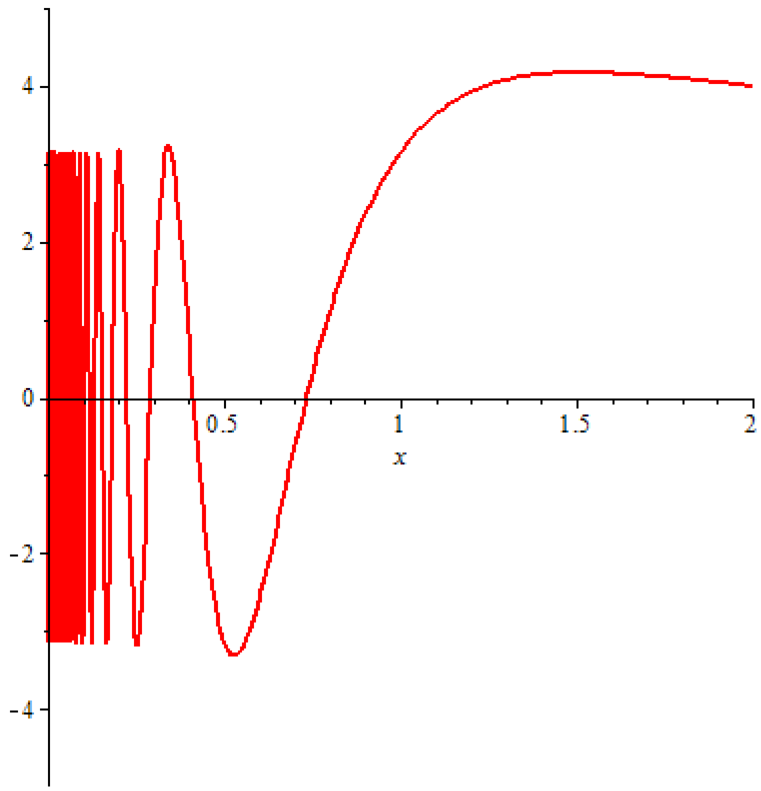
$plot(\text{f}, \text{x} = 0\,..2, -5\,..5, color = red, thickness = 2, discont = [usefdiscont = [bins = 35]], grid = [100, 100]);$



> $g := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f;$

$$g := \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\pi & 0 < x \textbf{ and } x \le 2 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

```
> plot(g, x = 0 ..2, -5 ..5, color = red, thickness = 2, discont = [usefdiscont = [bins
      = 35]], grid = [100, 100]);
```



◄3-теоремадан фойдаланиб кўрсатамиз:

$x \neq 0$ да $\quad f'(x) = 2xSin\frac{\pi}{x} - \pi Cos\frac{\pi}{x}$ ва

$x = 0$ да $\quad f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\Delta x Sin\frac{\pi}{\Delta x} = 0$

бўлгани учун ихтиёрий чекли [a,b] кесмада ушбу:

$$|f'(x)| \le 2\cdot|b| + \pi = L$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Унда 3-теоремага кўра $f(x)$ функция **[a,b]** да чекли вариацияга эга.►

<u>2-Мисол</u>. *Қуйидаги Стилтьес интеграли ҳисоблансин:*

$(S)\int\limits_0^2 x^2 d\ell n(1+x);$

◀ $(S)\int_0^2 x^2 d\ell n(1+x)$ =(((12) - формуладан фойдаланамиз))

$$=(R)\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx= =\left(\frac{x^2}{2}-x+\ell n|x+1|\right)\Big|_0^2=2-2+\ell n3=\ell n3$$.

<u>3-мисол.</u> *Қуйидаги Стилтьес интеграли ҳисоблансин:*

$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x)$, *бу ерда:*

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{агар} \quad x=-1 \quad \text{бўлса},\\ 1, & \text{агар} \quad -1<x<2 \quad \text{бўлса},\\ -1, & \text{агар} \quad 2\le x\le 3 \quad \text{бўлса};\end{cases}$$

◀ $g(x)$ функциянинг $x=-1$ нуқтадаги сакраши 1га, $x=2$ нуқтадаги сакраши –2 га тенг хамда $x\neq -1;2$ нуқталарда $g'(x)=0$. Унда (13)-формулага кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x)=-1\cdot(1-0)+2(-1-1)=-1-4=-5$$

Мустақил ечиш учун мисоллар:

<u>1-мисол.</u> *Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\sin x$; *б)* $(S)\int_{-1}^{1} xdarctgx$.

<u>2-мисол.</u> *Қуйидаги Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

$(S)\int_0^2 x^2dg(x)$,

бу ерда:

$$g(x)=\begin{cases}-1, & \text{агар} \quad 0\le x<\frac{1}{2} \quad \text{бўлса},\\ 0, & \text{агар} \quad \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2} \quad \text{бўлса},\\ 2, & \text{агар} \quad x=\frac{3}{2} \quad \text{бўлса},\\ -2, & \text{агар} \quad \frac{3}{2}<x\le 2 \quad \text{бўлса}.\end{cases}$$

<u>3-мисол.</u> *Стилтьес интеграллари ҳисоблансин:*

а) $(S)\int_{-2}^{2} x dg(x)$, *б)* $(S)\int_{-2}^{2} x^2 dg(x)$, *в)* $(S)\int_{-2}^{2} (x^3+1) dg(x)$.

4. Интегрални ҳисобланг.

1) $\int_{0}^{\pi} \sin x de^x$

2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x d\cos x$

3) $\int_{-1}^{1} x^2 darctgx$

4) $\int_{-2}^{2} x d\phi(x)$ бу ерда $\varphi(x)=\begin{cases} -1, & агар \ \ x=-2 \\ 0, & агар \ \ 2<x<1 \\ -1, & агар \ \ 1\le x\le 2 \end{cases}$

5) $\int_{-3}^{2} (x-1) d\phi(x)$ бу ерда $\varphi(x)=\begin{cases} x^2-2, & агар \ \ -3\le x<-2 \\ 0, & агар \ \ -2\le x\le -1 \\ 2x+1, & агар \ \ -1<x<1 \\ x, & агар \ \ 1\le x<2 \\ 3, & агар \ \ x=2 \end{cases}$

6) $\int_{-3}^{3} x d\phi(x)$ бу ерда $\varphi(x)=\begin{cases} 2, & агар \ \ x=-3 \\ x+2, & агар \ \ -3<x\le -1 \\ 4, & агар \ \ -1<x<0 \\ x^2-1, & агар \ \ 0\le x\le 3 \end{cases}$

7) $\int_0^{\pi} \sin x d\phi(x)$ бу ерда $\varphi(x)=\begin{cases} x, & агар \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \\ 2, & агар \quad x=\dfrac{\pi}{2}, x=\pi \\ x-\dfrac{\pi}{2}, & агар \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$

8) $\int_{-\pi}^{\pi} (x+2)d(e^x \operatorname{sgn}\sin x)$

9) $\int_0^{\pi} (x-1)d(\cos x \operatorname{sgn} x)$

$\int_{-2}^{2} (x^3+1)d\phi(x)$ бу ерда $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & агар \quad -2\le x\le -1 \\ 2, & агар \quad -1<x<0 \\ x^3+3, & агар \quad 0\le x\le 2 \end{cases}$

3 ва 4 – амалий машғулотлар:

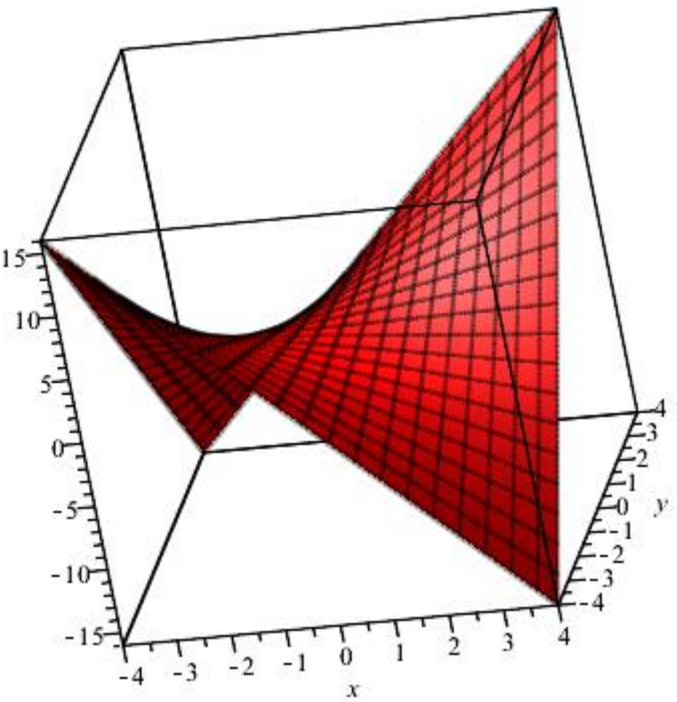
Гармоник ва субгармоник функциялар.

Ишдан мақсад: Биз қуйида гармоник ва субгармоник функцияларнинг энг содда, зарур хоссаларини ўрганиш билан бир қаторда, уларнинг голоморф функциялар билан боғлиқ масалаларини кўриб чиқамиз.

Ишни бажариш учун намуна:

1. $U(x,y)=xy$ функция гармоник функция бўла оладими?

```
> u := x·y;
                    u := x y
> plot3d(u, x =−4 ..4, y =−4 ..4, color = red, thickness = 2, grid = [100, 100]);
```



Лаплас тенгламаси бўйича функцияни гармониккликга текширамиз, яъни:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0$$

Демак, U функция гармоник бўлади.

2. $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ функция гармоник функция бўла оладими?

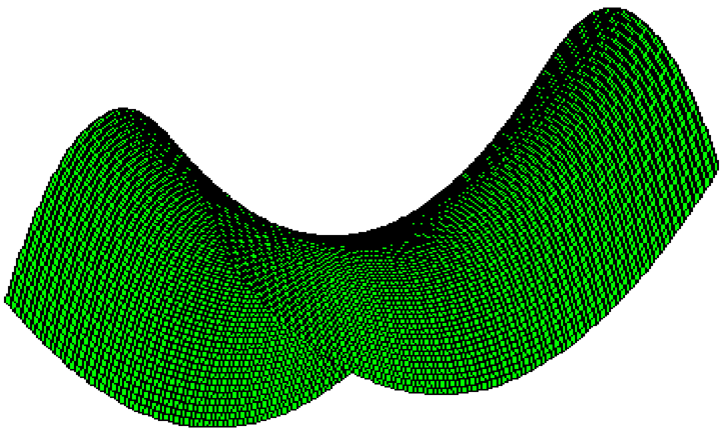
Лаплас тенгламаси бўйича функцияни гармониккликга текширамиз, яъни:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$$\Delta = 2 - 2 = 0$$

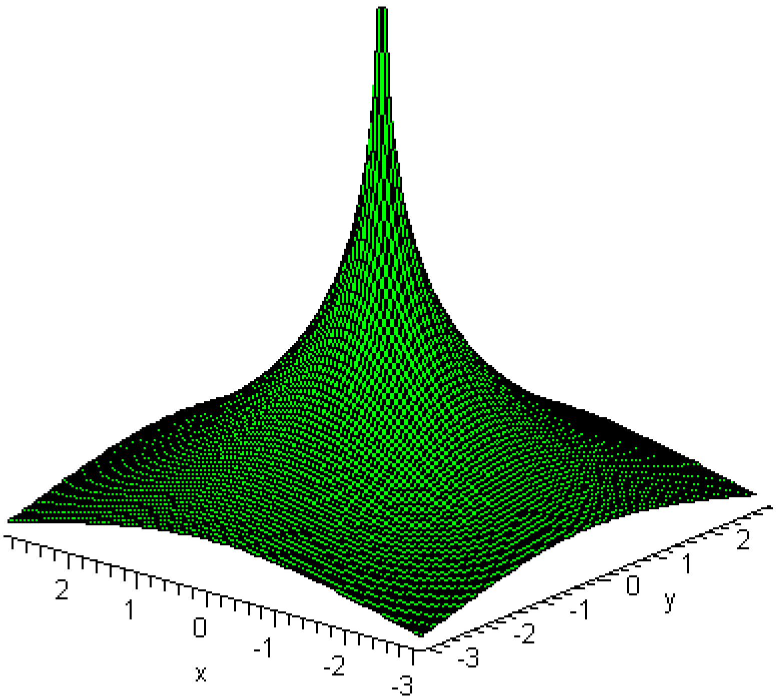


Демак, U функция гармоник бўлади.

> $f := \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right);$

$$f := \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$$

> $plot3d\,(f, x = -3\,..3, y = -3\,..3, color = green, grid = [100, 100]);$



> $Laplacian\,(\,\mathbf{(1)}\,)$

$$\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2\,x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - \frac{2\,y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Мустақил ечиш учун мисоллар:

1. Агар $f(x)$ функция $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M \in \mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x \in D: f(x) < M\}$ тўпламнинг очиқ тўпламлиги исботлансин.

2. $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада берилган ихтиёрий $\omega(x)$ функцияси учун ушбу:

$$\omega_1(y) = \lim_{r \to 0} \sup_{B(y,r)} \omega(x) \ ,$$

$$\omega_2(y) = \overline{\lim_{x \to y}} \, \omega(x)$$

функцияларни қарайлик. ω_1 ва ω_2 ларни D да юқоридан ярим узлуксизлиги исботлансин. $\omega_1 = \omega_2$ ҳақида нима дейиш мумкин?

3. $S(x^0, r)$ сферада ихтиёрий борел ўлчами μ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу $u(x) = \int\limits_{S(x^0,r)} P(x,y) d\mu$ - Пуассон интеграли ҳақида нима дейиш мумкин? Интегралнинг $B(x^0, r)$ да гармониклиги исботлансин, чегаравий қийматлари аниқлансин.

4*. $D \subset R^2$ соҳада ихтиёрий $u \in Sh(D)$ функция учун шундай $u_j(x) \in Sh(D) \bigcap C^\infty(D)$ кетма – кетлик мавжудки, $u_j(x) \downarrow u(x)$, $j \to \infty$. Ихтиёрий $D \subset \mathbf{R}^n$ учун бу тасдиқ ўринлими?

5*. $u(x) \in Sh(D)$ бўлиб, $0 < \alpha \le 2$ тайинланган сон бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $U_\varepsilon \subset D$ мавжудки, $H_{2n-2+\alpha}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ бўлиб, $u(x) \in Lip_{\alpha-0}^{loc}(D \setminus U_\varepsilon)$ бўлади. Бундан D соҳада шундай $\omega(x) \in Lip_{\alpha-0}^{loc}(D)$ мавжудки, $\omega(x) = u(x)$, $x \in D \setminus U$ эканлиги келиб чиқади. Қуйидаги муаммо ҳақида нима дейиш мумкин? Шундай $\omega(x) \in Sh(D) \bigcap Lip_{\alpha-0}^{loc}(D)$ мавжудмики, $x \in D \setminus U$ да $\omega(x) = u(x)$ бўлсин.

---

*) юлдузча билан мураккаб ёки ҳозиргача ҳал қилинмаган масалалар белгиланган.

6. $F(D)$ синфга тегишли функцияга мисол келтиринг. $F(D)$ да очиқ тўплам, атроф тушунчасини беринг.

7. Бир нуқтага, дискрет нуқталарга, $[a,b]$ кесмага, $S(0,1)$ сферага, $B(0,1)$ шарга текис жойлашган бирлик заряд (ўлчам)ларга мос умумлашган функциялар хусусиятлари ўрганилсин. Улар учун хусусий ҳосилалар ҳисоблансин. Хусусий ҳосилалар ўлчам бўла оладими?

5 – Амалий машғулот:

Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар

Ишдан мақсад: Субгармоник функциянинг ўрта қийматлари $m(u,r)$ ва $n(u,r)$ лар ва уларнинг хоссалари, ҳамда улар орасидаги боғланишни ўрганишдан иборат.

Ишни бажариш учун намуна:

Монотон камаювчи субгармоник функциялар кетма-кетлигининг лимити субгармоник бўлишини исботланг.

$$u_j(x)\in Sh(D)\,,\; u_j(x)\geq u_{j+1}(x)\;\; (j=1,2,...,)\Rightarrow \lim_{j\to\infty} u_j(x)\in Sh(D)$$

Исбот**:**

$u_j(x)\in Sh(D)\quad u_{j+1}(x)\leq u_j(x)$

$(j=1,2,...)\Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} u_j(x)\in Sh(D)\quad \forall x_0$,

$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} u_j(x)\leq u_j(x_0)$

$\lim\limits_{j\to\infty}\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} u_j(x)\leq \lim\limits_{j\to\infty} u_j(x_0)$

$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}}\lim\limits_{j\to\infty} u_j(x)\leq u_j(x)\leq u(x_0)$

$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} u(x)\leq u(x_0)$.

Мустақил ечиш учун мисоллар:

1. I_K регуляр нуқталар тўпламини F_σ типидаги тўплам эканлиги, яъни уни саноқли сондаги ёпиқ тўпламлар йиғиндиси эканлиги исботлансин.

2. Агар $K \subset D_1 \bigcap D_2$ бўлиб, $x^0 \in K$ нуқта $K \subset D_1$ га нисбатан регуляр бўлса, у ҳолда у $K \subset D_2$ га нисбатан ҳам регуляр бўладими? Мисоллар келтиринг.

Қайси ҳолда регулярлик тушунчаси K ни ўз ичига олган соҳага боғлиқ эмас.

3*. Агар ихтиёрий $B(x^0, \varepsilon)$ атроф учун $(\varepsilon > 0)$, $K \bigcap \overline{B}(x^0, \varepsilon)$ компакт x^0 нуқтада регуляр бўлса, x^0 га *локал регуляр нуқта* дейилади. Агар $\mathbf{R}^n / K$ - боғланган бўлса, у ҳолда $x^0 \in K$ нинг регуляр бўлиши учун унинг локал регуляр бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.*)

4*. Ихтиёрий поляр бўлмаган компакт $K \subset \mathbf{R}^n$ учун $K_1 \subset K$ - регуляр компакт мавжудми? K ни ичидан регуляр компактлар билан яқинлаштириш мумкинми? $K_j \subset K_{j+1}$, K_j - регуляр $(j = 1,2,\ldots)$ компактлар мавжудмики, $j \to \infty$ да $\omega(x, K_j, D) \uparrow \omega(x, K, D)$ бўлсин.

5. Умумлашган функциялар кетма – кетлиги $f_j = \{f_j\}$ берилган бўлиб, ихтиёрий $\varphi \in F(D)$ учун $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(\varphi) = f(\varphi)$ бўлсин. У ҳолда f_j кетма – кетлик f га (кучсиз) *яқинлашувчи* дейилади ва каби белгиланади. f ни умумлашган функция эканлигини исботланг.

6. Агар $f(x)$ функция $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M \in \mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x \in D\colon f(x) < M\}$ тўпламнинг очиқ тўпламлиги исботлансин.

7. $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада берилган ихтиёрий $\omega(x)$ функцияси учун ушбу:

$$\omega_1(y) = \lim_{r\to 0} \sup_{B(y,r)} \omega(x) \ ,$$

$$\omega_2(y) = \overline{\lim_{x\to y}}\, \omega(x)$$

функцияларни қарайлик. ω_1 ва ω_2 ларни D да юқоридан ярим узлуксизлиги исботлансин. $\omega_1 = \omega_2$ ҳақида нима дейиш мумкин?

8. $S(x^0, r)$ сферада ихтиёрий борел ўлчами μ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу $u(x) = \int\limits_{S(x^0,r)} P(x,y)d\mu$ - Пуассон интеграли ҳақида нима дейиш мумкин? Интегралнинг $B(x^0, r)$ да гармониклиги исботлансин, чегаравий қийматлари аниқлансин.

9*. $D \subset R^2$ соҳада ихтиёрий $u \in Sh(D)$ функция учун шундай $u_j(x) \in Sh(D) \bigcap C^\infty(D)$ кетма – кетлик мавжудки, $u_j(x) \downarrow u(x)$, $j \to \infty$. Ихтиёрий $D \subset \mathbf{R}^n$ учун бу тасдиқ ўринлими?

10*. $u(x) \in Sh(D)$ бўлиб, $0 < \alpha \le 2$ тайинланган сон бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $U_\varepsilon \subset D$ мавжудки, $H_{2n-2+\alpha}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ бўлиб, $u(x) \in Lip_{\alpha-0}^{loc}(D \setminus U_\varepsilon)$ бўлади. Бундан D соҳада шундай $\omega(x) \in Lip_{\alpha-0}^{loc}(D)$ мавжудки, $\omega(x) = u(x)$, $x \in D \setminus U$ эканлиги келиб чиқади. Қуйидаги муаммо ҳақида нима дейиш мумкин? Шундай $\omega(x) \in Sh(D) \bigcap Lip_{\alpha-0}^{loc}(D)$ мавжудмики, $x \in D \setminus U$ да $\omega(x) = u(x)$ бўлсин.

6 – амалий машғулот:

Чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар супремуми, юқори лимити.

Ишдан мақсад: Ушбу амалий машғулот давомида чекли ва чексиз сондаги субгармоник функциялар хоссалари ва супремуми, текис чегараланган субгармоник функциялар оиласига ва субгармоник функциялар кетма-кетлигининг юқори лимитини ҳисоблашга доир

*) юлдузча билан мураккаб ёки ҳозиргача ҳал қилинмаган масалалар белгиланган.

мисолларни, Хартогс леммасининг татбиқига оид масалаларни ўрганамиз.

Ишни бажариш учун намуна:

Юқоридан локал текис чегараланган $\{u_j(x)\} \subset Sh(D)$ кетма – кетлик $\forall x \in D$ да $\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j(x) \le A(x)$ шартни бажарсин. Агар $A(x) \in C(D)$ бўлса, Хартогс леммасига кўра $u_j(x) \le A(x) + \varepsilon$ тенгсизлик D соҳанинг ичида текис ўринлидир. Бу лемма яна қандай $A(x)$ лар учун ўринли? Юқоридан ёки қуйидан ярим узлуксиз $A(x)$ функциялар учун унинг ўринли эмаслигини кўрсатинг.

К ў р с а т м а. Фараз қилайлик, $u(x) \in Sh\,(\mathbf{R}^n)$ функцияси $x = 0$ нуқтада узилишга эга бўлган, $\underline{\lim}_{x\to 0} u(x) < u(0)$, функция бўлиб, $u_j(x) \in Sh(\mathbf{R}^n)C^\infty(\mathbf{R}^n)$ монотон камаювчи, $u(x)$ га интилувчи кетма – кетлик бўлсин: $u_j(x) \downarrow u(x)$. У ҳолда $\{u_j(x)\}$ ва $A(x) = u(x)$ учун Хартогс леммаси ўринли эмас. Бу ерда $A(x) = u(x)$ узлуксиз бўлмасдан, фақат юқоридан ярим узлуксиз.

Энди қуйидан ярим узлуксиз функция учун ҳам Хартогс леммаси ўринли бўлмаслигини кўрсатиш учун $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ текисликда $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{U}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \left| z - \frac{1}{k} \right| \le \delta_K \right\}$ доиралар йиғиндисини шундай танлаш керакки, $V^*(z, E)\big|_{z=0} = 1$ бўлсин. У ҳолда $E_m = \bigcup_{k=1}^{m} \overline{U}_k$ деб, $z_m \in E$ нуқталарни ва $\alpha_m \ge 0$ сонларни шундай танлаш мумкинки,

$$u_m(z) = V^*(z, E_m) + \max\left\{ \frac{1}{\alpha_m} \ln|z|\ ,\ 0 \right\}$$

субгармоник функциялар кетма – кетлиги учун $u_m(z_m) \geq \frac{1}{2}$ бажарилади. Демак, $z^0 \in E$ учун $\overline{\lim_{m\to\infty}} u_m(0) = 0$ лигидан, бу кетма – кетлик учун ҳам Хартогс леммаси ўринли эмас. Бунда $A(z) = V(z, E \bigcup \{0\})$.

Мустақил ечиш учун мисоллар:

1*. Фараз қилайлик, $u_j(x) \in Sh(D) \bigcap C(D)$ бўлиб, $\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j(x) \leq 0$ бўлсин. У ҳолда шундай бўш бўлмаган $B \subset D$ атроф мавжудки, B да Хартогс леммаси ўринли бўлишини, яъни ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай j_0 нинг мавжуд бўлишини, $j > j_0$ ларда $u_j(x) \leq \varepsilon$ бўлишини исботланг.

2. Агар $f(x)$ функция $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M \in \mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x \in D: f(x) < M\}$ тўпламнинг очиқ тўпламлиги исботлансин.

3. $D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада берилган ихтиёрий $\omega(x)$ функцияси учун ушбу:

$$\omega_1(y) = \lim_{r\to 0} \sup_{B(y,r)} \omega(x) \ ,$$

$$\omega_2(y) = \overline{\lim_{x\to y}} \omega(x)$$

функцияларни қарайлик. ω_1 ва ω_2 ларни D да юқоридан ярим узлуксизлиги исботлансин. $\omega_1 = \omega_2$ ҳақида нима дейиш мумкин?

4. $S(x^0, r)$ сферада ихтиёрий борел ўлчами μ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу $u(x) = \int\limits_{S(x^0,r)} P(x,y)d\mu$ - Пуассон интеграли ҳақида нима дейиш мумкин? Интегралнинг $B(x^0, r)$ да гармониклиги исботлансин, чегаравий қийматлари аниқлансин.

5[4*]. $D \subset R^2$ соҳада ихтиёрий $u \in Sh(D)$ функция учун шундай

*) юлдузча билан мураккаб ёки ҳозиргача ҳал қилинмаган масалалар белгиланган.

$u_j(x) \in Sh(D) \bigcap C^{\infty}(D)$ кетма – кетлик мавжудки, $u_j(x) \downarrow u(x)$, $j \to \infty$. Ихтиёрий $D \subset \mathbf{R}^n$ учун бу тасдиқ ўринлими?

6*. $u(x) \in Sh(D)$ бўлиб, $0 < \alpha \leq 2$ тайинланган сон бўлсин. У ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ учун шундай $U_\varepsilon \subset D$ мавжудки, $H_{2n-2+\alpha}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ бўлиб, $u(x) \in Lip_{\alpha-0}^{loc}(D \setminus U_\varepsilon)$ бўлади. Бундан D соҳада шундай $\omega(x) \in Lip_{\alpha-0}^{loc}(D)$ мавжудки, $\omega(x) = u(x)$, $x \in D \setminus U$ эканлиги келиб чиқади. Қуйидаги муаммо ҳақида нима дейиш мумкин? Шундай $\omega(x) \in Sh(D) \bigcap Lip_{\alpha-0}^{loc}(D)$ мавжудмики, $x \in D \setminus U$ да $\omega(x) = u(x)$ бўлсин.

7. $D = \{0 < |z| < 1\} \subset \mathbf{C}$ тешик доирада гармоник $u(z) = \ln|z|$ функцияси учун $f(z) \in O(D)$, $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

8*. (Лелон). Агар $u(z)$ функцияси ҳар бир аргументи бўйича гармоник бўлса, у n - гармоникдир, яъни ҳар бир аргументи бўйича гармониклигидан унинг $C^2(D)$ синфга тегишлилиги келиб чиқади. Исботланг.

V. КЕЙСЛАР БАНКИ

Case 1. Функцияни чекли вариацияга эга бўлишлик билан унинг чекли лимитга эга бўлишлик орасидаги муносабатни аниқланг.

Фараз қилайлик $f(x)$ функция [a,+∞] оралиқда аниқланган бўлиб,хар қандай [a,t], (t>a) кесмада чекли вариацияга эга бўлсин. Агар $\lim\limits_{t\to\infty} \overset{t}{\underset{a}{V}} f$ лимит мавжуд бўлса , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ мавжудлигини исботланг.Тескариси ўринлими? Мисоллар келтиринг.

Case 2. Липшиц шартини қаноатлантирувчи функция чекли вариацияга эга [2-теорема,1-маъруза]. Ушбу тасдиқнинг тескариси ўринлими? Мисоллар келтиринг.

Case 3. Maple дастури ёрдамида функцияни тўлиқ вариациясини ҳисобланг.

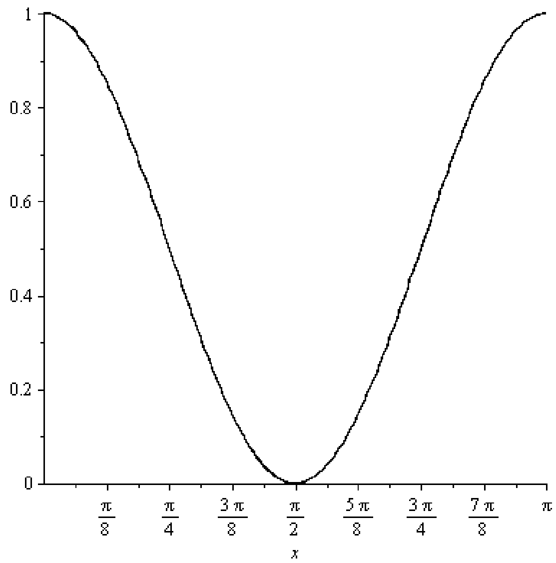
$f(x)=\cos^2 x$ функцияни [0, π] оралиқда иккита ўсувчи функциялар айирмаси шаклида ифодаланг.

> $with(plots)$:

> $f(x) := \cos^2(x);$

$$f := x \to \cos(x)^2$$

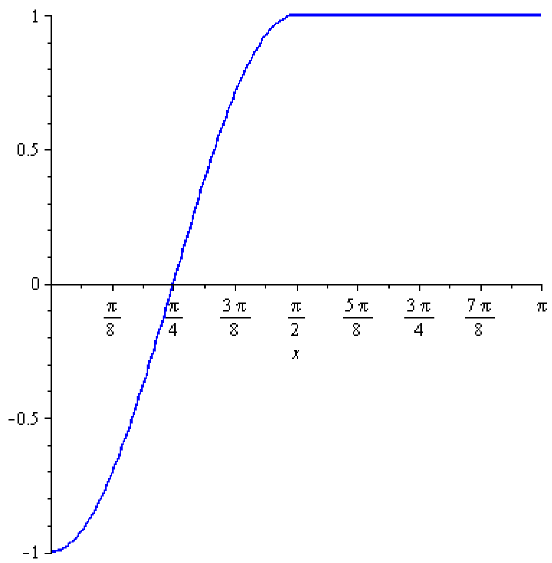
> $plot(f(x), x = 0 .. \mathrm{Pi}, color = [black]);$



$$h := x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x \leq \frac{1}{2}\pi,\ 1 - 2\cos(x)^2,\ \frac{1}{2}\pi < x \textbf{ and } x \leq \pi,\ 1\right)$$

$$x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x \leq \frac{1}{2}\pi,\ 1 - 2\cos(x)^2,\ \frac{1}{2}\pi < x \textbf{ and } x \leq \pi,\ 1\right)$$

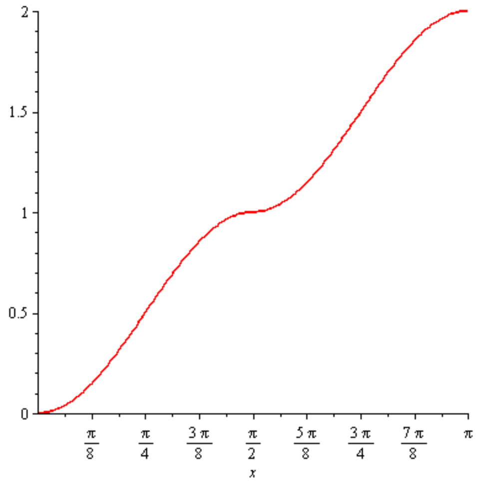
> $plot(h(x), x = 0 .. \text{Pi}, color = [blue]);$



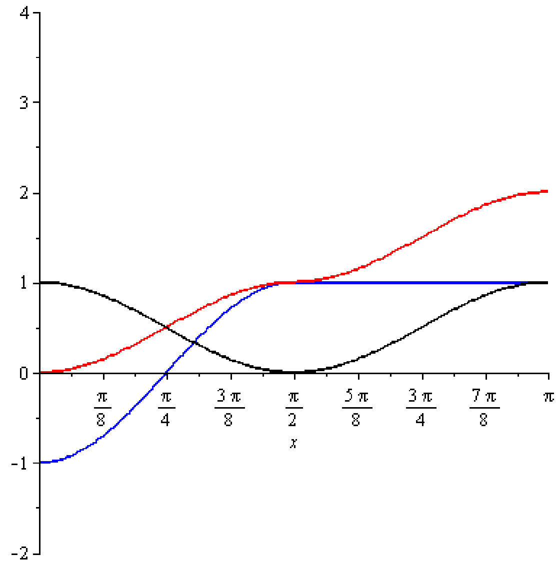
$$g := x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x \leq \frac{1}{2}\pi,\ 1 - \cos(x)^2,\ \frac{1}{2}\pi < x \textbf{ and } x \leq \pi,\ 1 + \cos(x)^2\right)$$

$$x \rightarrow piecewise\left(0 \leq x \textbf{ and } x \leq \frac{1}{2}\pi,\ 1 - \cos(x)^2,\ \frac{1}{2}\pi < x \textbf{ and } x \leq \pi,\ 1 + \cos(x)^2\right)$$

> $plot(g(x), x = 0 .. \text{Pi}, color = [red]);$



> $plot([h(x), g(x), f(x)], x = 0 .. \mathrm{Pi}, -2 .. 4, color = [blue, red, black]);$



Case 4. Стилтьес интегралида аддитивлик хоссаси қайси ҳолда ўринли?

Case 5. Стилтьес интеграли мавжуд бўладиган $f(x), g(x)$ функциялар учун минимал синфни аниқланг.

Case 6. Голоморф функцияни унинг ҳақиқий ёки мавхум қисми ёрдамида қандай усуллар билан тиклаш мумкин?

VI. МУСТАҚИЛ ТАЪЛИМ ТОПШИРИҚЛАРИ

1. Ушбу:

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & агар\ \ x\neq 0\ \ бўлса \\ 0, & агар\ \ x=0,\ \ бўлса \end{cases}$$

функциянинг ихтиёрий кесмада чекли вариацияга эга бўлиши кўрсатилсин.

2. $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)=\overset{c}{\underset{a}{V}} f(x)+\overset{b}{\underset{c}{V}} f(x),$ $a>c>b$ тенглик исботлансин.

3. $f(x)$ функция [a,b] да чекли вариацияга эга бўлса, унда

$$g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}} f(t)$$

функциянинг [a,b] да $\uparrow$ ва чегараланган бўлиши исботлансин.

4. Тўғриланувчи бўлмаган чизиққа мисол келтирилсин.

5. Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

1) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[1;4]$

2) $f(x)=arctgx$, $x\in[-1;1]$

3) $f(x)=[x]$, $x\in[-1;3]$

4) $f(x)=x^2$, $x\in[-2;3]$

5) $f(x)=\sin x$, $x\in[0;2\pi]$

6. Функциянинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ 1-x, & 0<x<1 \\ 5, & x=1 \end{cases}$$

7. Функциянинг тўлиқ вариациясини ҳисобланг:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ 10, & x=1 \\ x^2, & 1<x\leq 2 \end{cases}$$

8. Ушбу:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

функцияни [0,1] кесмада чекли вариацияга эга эканлигини исботланг.

9. Ушбу:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

функцияни [0,2/π] кесмада чекли вариацияга эга эмаслигини исботланг.

10. Агар $\bigvee_a^b f(x)=A$ бўлса,у ҳолда $\bigvee_a^b (kf(x)+m)$

11. Агар $f(x)$ функция $D\subset\mathbf{R}^n$ соҳада юқоридан ярим узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий $M\in\mathbf{R}$ сони учун ушбу $\{x\in D\colon f(x)<M\}$ тўпламнинг очиқ тўпламлиги исботлансин.

12. $D\subset\mathbf{R}^n$ соҳада берилган ихтиёрий $\omega(x)$ функцияси учун ушбу:

$$\omega_1(y)=\lim_{r\to 0}\sup_{B(y,r)}\omega(x)\ ,$$

$$\omega_2(y)=\overline{\lim_{x\to y}}\,\omega(x)$$

функцияларни қарайлик. ω_1 ва ω_2 ларни D да юқоридан ярим узлуксизлиги исботлансин. $\omega_1=\omega_2$ ҳақида нима дейиш мумкин?

13. $F(D)$ синфга тегишли функцияга мисол келтиринг. $F(D)$ да очиқ тўплам, атроф тушунчасини беринг.

14. Бир нуқтага, дискрет нуқталарга, $[a,b]$ кесмага, $S(0,1)$ сферага, $B(0,1)$ шарга текис жойлашган бирлик заряд (ўлчам)ларга мос умумлашган функциялар хусусиятлари ўрганилсин. Улар учун хусусий ҳосилалар ҳисоблансин. Хусусий ҳосилалар ўлчам бўла оладими?

15. Умумлашган функциялар кетма – кетлиги $\{f_j\}$ берилган бўлиб, ихтиёрий $\varphi\in F(D)$ учун $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(\varphi)=f(\varphi)$ бўлсин. У ҳолда f_j кетма – кетлик f га (кучсиз) *яқинлашувчи* дейилади ва $f_j \xrightarrow{\ \ } f$ каби белгиланади. f ни умумлашган функция эканлигини исботланг.

16. Ихтиёрий борел ўлчами μ учун шундай дискрет (дискрет нуқталарга жойлашган) ўлчамлар кетма – кетлиги μ_j мавжудки, $\mu_j \xrightarrow{\ \ } \mu$ бўлади. Исботланг.

17. $S(x^0,r)$ сферада ихтиёрий борел ўлчами μ берилган бўлсин. У ҳолда ушбу $u(x)=\int\limits_{S(x^0,r)} P(x,y)d\mu$ - Пуассон интеграли ҳақида нима дейиш мумкин? Интегралнинг $B(x^0,r)$ да гармониклиги исботлансин, чегаравий қийматлари аниқлансин.

18. $D \subset R^2$ соҳада ихтиёрий $u \in Sh(D)$ функция учун шундай $u_j(x) \in Sh(D) \bigcap C^\infty(D)$ кетма – кетлик мавжудки, $u_j(x) \downarrow u(x)$, $j \to \infty$. Ихтиёрий $D \subset \mathbf{R}^n$ учун бу тасдиқ ўринлими?

VII. ГЛОССАРИЙ

Термин	Ўзбек тилидаги шарҳи	Инглиз тилидаги шарҳи
Чекли вариацияли функция Function of finite variation	$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lvert f(x_{k+1}) - f(x_k) \rvert$ йиғиндилар $\forall n \in N$ учун юқоридан текис чегараланган	For every $n \in N$ the sums $\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lvert f(x_{k+1}) - f(x_k) \rvert$ upper uniformly bounded
Тўлиқ вариация Combined variation	$\bigvee_a^b f(x) := Sup\{\vartheta_n\}$	$\bigvee_a^b f(x) := Sup\{\vartheta_n\}$
Бўлакли монотон Piecewise monotone	функция хар бир $[a_k, a_{k+1}]$ кесмада монотон	If function monotone on every $[a_k, a_{k+1}]$
Липшиц шарти Lipschits condition	шундай L>0 сон топилсаки, ихтиёрий $x, \bar{x} \in [a,b]$ нуқталар учун $\lvert f(\bar{x}) - f(x) \rvert \le L \cdot \lvert \bar{x} - x \rvert$	For any $x, \bar{x} \in [a,b]$ there exists L>0 such that $\lvert f(\bar{x}) - f(x) \rvert \le L \cdot \lvert \bar{x} - x \rvert$
Стилтьес интеграл йиғиндиси The sum of Stieltjes integral	$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)$	$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta g(x_k)$
Стилтьес интеграли Stieltjes integral	$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$ мавжуд ва чекли бўлиб, унинг қиймати [a,b] кесманинг бўлиниш усулига ҳамда ундаги ξ_k нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса.	$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$ exists and finite, and its value isn't depending on partition of [a,b] and selection of the points ξ_k on [a,b]
Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори йиғиндилари Upper and lower sums Darbu-Stieltjes	$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}$, $M_k = Sup_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}$, $\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k)$, $\overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k)$.	$m_k = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}$, $M_k = Sup_{[x_k, x_{k+1}]} \{f(x)\}$, $\underline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k)$, $\overline{S} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k)$.
Дарбу – Стилтьеснинг қуйи ва юқори	$I_* = Sup\{\underline{S}\}$ ва $I^* = \inf\{\overline{S}\}$	$I_* = Sup\{\underline{S}\}$ and $I^* = \inf\{\overline{S}\}$

интеграллари Upper and lower integrals Darbu-Stieltjes		
Гармоник функция Harmonic function	$D \subset \mathbf{R}^n$ соҳада берилган $u \in C^2(D)$ функция ушбу $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ тенгликни қаноатлантирса	$u \in C^2(D)$ function defined on an open set $D \subset \mathbf{R}^n$ if it satisfies the Laplace equation: $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$
Лаплас оператори Laplace operator	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$
$h(D)$	D соҳада гармоник бўлган барча функциялар тўплами	Set of all harmonic functions on an open set D
σ_n	$\mathbf{R}^n$ фазодаги бирлик сферанинг юзаси	The square of unit sphere on $\mathbf{R}^n$
Пуассон формуласи Poisson formula	$P(x,y) = \frac{r^2 - \lvert x - x^0 \rvert^2}{\sigma_n r \lvert x - y \rvert^n}$	$P(x,y) = \frac{r^2 - \lvert x - x^0 \rvert^2}{\sigma_n r \lvert x - y \rvert^n}$
Дирихле масаласи Dirichlet problem	$\Delta u = 0, \;\; u\big\rvert_{\partial D} = \varphi(x)$	$\Delta u = 0, \;\; u\big\rvert_{\partial D} = \varphi(x)$
Чексиз силлиқ Infinitely smooth	$u \in C^\infty(D)$	$u \in C^\infty(D)$
Голоморф функция Holomorphic function	$f(z)$ функция $z_0 \in C$ нуқтанинг бирор $U(z_0, \varepsilon)$ атрофида С-дифференциалланувчи	Function $f(z)$ C-differentiable at the any neighborhood of the point $z_0 \in C$
Субгармоник функция Subharmonic function	$u(x)$ функция қуйидаги икки шартни қаноатлантиради: 1) $u(x)$ юқоридан яримузлуксиз,яъни $\forall x^0 \in D$ учун $\overline{\lim_{x \to x^0}} u(x) \le u(x^0)$ тенгсизлик ўринли 2) ихтиёрий $x^0 \in D$ нуқта учун $r(x^0) > 0$ сон топиладики, ҳар қандай	Function $u(x)$ satisfies following conditions: 1) $u(x)$ – upper semicontinuous function: for $\forall x^0 \in D$ satisfying $\overline{\lim_{x \to x^0}} u(x) \le u(x^0)$ 2) For every $x^0 \in D$ exists $r(x^0) > 0$, for any $r \le r(x^0)$ following inequality holds

	$r \le r(x^0)$ учун $$u(x^0) \le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S(x^0,r)} u(x)d\sigma$$ тенгсизлик ўринли.	$$u(x^0) \le \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int\limits_{S(x^0,r)} u(x)d\sigma$$
$sh(D)$	D соҳада субгармоник функциялар синфи	Family of subharmonic functions on an open set D
Максимумлар принципи Principles of maximums	Агар $u(x) \in Sh(D)$ функция бирор $x^o \in D$ нуқтада ўзининг максимумига эришса, яъни $$u(x^o) = \sup_{x \in D} u(x)$$ бўлса, у ҳолда $u(x) \equiv const$ бўлади.	If function $u(x) \in Sh(D)$ reaches its maximum at the any point of $x^o \in D$, i.e. if $u(x^o) = \sup_{x \in D} u(x)$ then $u(x) \equiv const$

VIII. АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

Махсус адабиётлар:

1. Саъдуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения, Palmarium academic publishing, Deutschland-2012.
2. Саъдуллаев А. Кўп аргументли голоморф функциялар, Урганч-2004.
3. Brian S. Tomson Theory of integral. Simon. Fraser University Classical Real Analysis.com, 2012.
4. L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara Functions of bounded variations and free discontinuity problems, GB, 2000
5. Тўйчиев Т.Т., Тишабоев Ж.К. Дополнительные главы анализа. «Университет», 2015.
6. Саъдуллаев А., Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium Akademic Publishing, 2012.
7. Klimek M.,Pluripotential theory.Clarendon Press.,1991.
8. Tien Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony, Dynamics of holomorphic maps, p. 2.1.1 Subharmonic and quasi-subharmonic functions . Introductory Lectures (Master), Paris-2011, available at: http://www.math.jussieu.fr/~dinh

Интернет манбаалар:

1. http://www.allmath.ru/
2. http://www.mcce.ru/
3. http://lib.mexmat.ru/
4. http://www.webmath.ru/
5. http://www.exponenta.ru/
6. http://www.ziyonet.uz/