

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG
KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI
OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI**

**“ELEMENTAR FUNKSIYALAR VA ULARNING GRAFIKLARINI
ZAMONAVIY MATEMATIK DASTURIY PAKETLAR YORDAMIDA
O‘RGANISH” MODULI BO‘YICHA
O‘QUV – USLUBIY MAJMUA**

Buxoro – 2025

Mazkur o'quv-uslubiy majmua Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024 yil 27 dekabrda 485-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan o'quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi:

Latipov H.M – BuxDU Matematik
analiz kafedrasida o'qituvchisi

Taqrizchi:

Xudayarov S.S– BuxDU
Matematik analiz kafedrasida
dotsenti, f.-m.f.f.d.,(PhD)

MUNDARIJA

I. IShChI DASTUR.....	4
II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA‘LIM METODLARI	4
III. NAZARIY MA‘LUMOTLAR.....	16
IV. AMALIY MASHG‘ULOTLAR.....	37
V. GLOSSARIY.....	55
VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI:	60

I. IShChI DASTUR

KIRISH

Dastur O'zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentabrda tasdiqlangan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 3 dekabrda "Iqtidorli yoshlarni saralab olish tizimi va akademik litseylar faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4910-son hamda Vazirlar Mahkamasining 2022 yil 1 iyundagi "Akademik litseylar rahbar va pedagog xodimlarining uzduksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to'g'risida"gi 296-son Qarorlarida belgilangan ustuvor yo'nalishlar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo'lib, u zamonaviy talablar asosida malaka oshirish jarayonlarining mazmunini takomillashtirish hamda akademik litseylar pedagog xodimlarining kasbiy kompetentligini muntazam oshirib borishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan tayanch modullari mavzulari orqali akademik litseylarda faoliyat olib borayotgan pedagog xodimlarning vektorlar va ularning tenglamalar yechishga oid zamonaviy yondashuvlardan samarali foydalanish, proyektiv geometriyaning tatbiqlarini amalga oshirish, sonlar nazariyasining tenglamalar yechishga oid asoslarini o'zlashtirish darajasini oshirish hisobiga ularning pedagogik mahorat va kasbiy kompetentligini muntazam takomillashtirish bilan birgalikda pedagog xodimlarning ehtiyojlari asosida tanlab olingan tanlov modullari bo'yicha bilim, ko'nikma va malakalarga ega bo'lishlari ta'minlanadi.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi pedagog xodimlarning o'quv-tarbiyaviy jarayonlarini yuqori ilmiy-metodik darajada ta'minlashlari uchun zarur bo'ladigan kasbiy bilim, ko'nikma va malakalarini muntazam yangilash, kasbiy kompetentligi va pedagogik mahoratining uzluksiz rivojlanishini ta'minlashdan iborat.

Modulning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

- pedagog xodimlarning kasbiy bilim, ko'nikma, malakalarini uzluksiz yangilash va rivojlantirish;
- pedagoglarning zamonaviy talablarga mos holda akademik litseylardagi o'qitish sifati va samaradorligini ta'minlash uchun zarur bo'lgan kasbiy mahorat darajasini oshirish;
- o'qitishning innovatsion texnologiyalari va ilg'or xorijiy tajribalarni o'zlashtirish hamda ulardan o'quv jarayonida samarali foydalanish ko'nikmalarini shakllantirish;

- o'quv jarayonini ilm-fan va ishlab chiqarish bilan samarali integratsiyasini ta'minlashga qaratilgan faoliyatni tashkil etish.

Modul bo'yicha qo'yiladigan talablar

Kurs yakunida tinglovchilar quyidagi yo'nalishlarda bilim, ko'nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo'lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- funksiya tushunchasi;
- funksiyaning berilish usullari, grafigi;
- elementar funksiyalarning aniqlanish sohalari va qiymatlar to'plami;

Tinglovchi:

- funksiyalarning o'sishi va kamayishi;
- funksiya ekstremum nuqtalari va ekstremumlarini modellashtirish **ko'nikma va malakalariga** ega bo'lishi lozim.

Tinglovchi:

- funksiya xossalariidan foydalanib murakkab tenglamalarni yechish usullarining nazariy asoslarini amaliyotda samarali qo'llash **kompetensiyalariga** ega bo'lishi lozim.

Modul bo'yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o'quv yuklamasi, soat			
		Hammasi	Auditoriya o'quv yuklamasi		
			Jami	jumladan	
				Nazariy	Amaliy
1.	Funksiya ekstremum nuqtalarini zamonaviy dasturiy paketlarda o'rganish.(Maple)	2	2	2	
2.	Funksiya ekstremum nuqtalarini (Maple) paketlarda dasturini yaratish.	2	2		2
3.	Funksiyaning juft va toqligi hamda xossalari	2	2		2
Jami:		6	6	2	4

NAZARIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

1-Mavzu: Funksiya ekstremum nuqtalarini zamonaviy dasturiy paketlarda o'rganish (Maple). (2soat)

Funksiyalarni tekshirish (uzluksizligini) $\text{iscond}(f, x=x1...x2)$, Ekstremum nuqtalarini $\text{extrema}(f, \{cond\}, x, 's')$

(Funksiya tushunchasi. Funksiyaning berilish usullari. Funksiya grafigi. Elementar funksiyalarning aniqlanish sohalari va qiymatlar to'plami. Funksiyalar ustida arifmetik amallar. Elementar funksiyalar superpozitsiyasi natijasida hosil qilinadigan murakkab funksiyalar.)

AMALIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

1-amaliy mashg'ulot: Funksiya ekstremum nuqtalarini Maple paketlarda dasturini yaratish. (2soat)

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ funksiyani grafigini chizish va uzulish nuqtalarini toppish. $f(x) = x^4 + x^2 + \frac{1}{2}$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini topish

(Teskari funksiya. Davriy funksiyalar. Funksiya xossalari. Juft va toq funksiyalar. Funksiyalarning o'sishi va kamayishi. Funksiya ekstremum nuqtalari va ekstremumlari.)

2-amaliy mashg'ulot: Funksiya juft-toqligi va xossalari

Juft funksiya grafigi ordinata o'qiga (OY o'qi) nisbattan simmetrik, $f(x)$ funksiya toq funksiya bo'lishi uchun $f(-x) = -f(x)$ ixtiyoriy aniqlanish sohasiga tegishli x lar uchun. Funksiyaning juft va toqligi hamda xossalari.

(Funksiyalarning o'sishi va kamayishi. Funksiya ekstremum nuqtalari va ekstremumlari. Funksiya grafiklarini sodda almashtirishlar. Funksiya grafiklarini siljitish, siqish, cho'zish. Chiziqli va kvadratik modellashtirish.

Amaliy mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarda tinglovchilar o'quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o'quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog'liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg'ulotlar zamonaviy ta'lim uslublari va innovasion texnologiyalarga asoslangan holda o'tkaziladi. Bundan tashqari, mustaqil holda o'quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

Dasturning axborot-metodik ta'minoti

Modullarni o'qitish jarayonida ishlab chiqilgan o'quv-metodik materiallar, tegishli soha bo'yicha ilmiy jurnallar, Internet resurslari, multimedia mahsulotlari va boshqa elektron va qog'oz variantdagi manbalardan foydalaniladi.

MODULNI O'QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA'LIM METODLARI

AQLIY XUJUM METODI

Aqliy xujum - g'oyalarni generatsiya (ishlab chiqish) qilish metodidir. «Aqliy xujum» metodi biror muammoni yechishda talabalar tomonidan bildirilgan erkin fikr va mulohazalarni to'plab, ular orqali ma'lum bir yechimga kelinadigan eng samarali metoddur. Aqliy xujum metodining yozma va og'zaki shakllari mavjud. Og'zaki shaklida o'qituvchi tomonidan berilgan savolga talabalarning har biri o'z fikrini og'zaki bildiradi. Talabalar o'z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. Yozma shaklida esa berilgan savolga talabalar o'z javoblarini qog'oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko'rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki «pinbord» doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. «Aqliy xujum» metodining yozma shaklida javoblarni ma'lum belgilar bo'yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to'g'ri va ijobiy qo'llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va no - standart fikrlashga o'rgatadi.

Aqliy xujum metodidan foydalanilganda talabalarning barchasini jalb etish imkoniyati bo'ladi, shu jumladan talabalarda muloqot qilish va munozara olib borish madaniyati shakllanadi. Talabalar o'z fikrini faqat og'zaki emas, balki yozma ravishda bayon etish mahorati, mantiqiy va tizimli fikr yuritish ko'nikmasi rivojlanadi. Bildirilgan fikrlar baholanmasligi talabalarda turli g'oyalar shakllanishiga olib keladi. Bu metod talabalarda ijodiy tafakkurni rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

Vazifasi. “Aqliy xujum” qiyin vaziyatlardan qutulish choralarini topishga, muammoni ko'rish chegarasini kengaytirishga, fikrlash bir xilli - ligini yo'qotishga va keng doirada tafakkurlashga imkon beradi. Eng asosiysi, muammoni yechish jarayonida kurashish muhitidan ijodiy hamkorlik kayfiyatiga o'tiladi va guruh

yanada jipslashadi.

Ob'ekti. Qo'llanish maqsadiga ko'ra bu metod universal hisoblanib tadqiqotchilikda (yangi muammoni yechishga imkon yaratadi), o'qitish jarayonida (o'quv materiallarini tezkor o'zlashtirishga qaratiladi), rivojlantirishda (o'z-o'zini bir muncha samarali boshqarish asosida faol fikrlashni shakllanti - radi) asqotadi.

Qo'llanish usuli. "Aqliy xujum" ishtirokchilari oldiga qo'yilgan muammo bo'yicha xar qanday muloxaza va takliflarni bildirishlari mumkin. Aytilgan fikrlar yozib borildi va ularning mualliflari o'z fikrlarini qay - tadan xotirasida tiklash imkoniyatiga ega bo'ldi. Metod samarasi fikrlar xilma-xilligi bilan tavsiflandi va xujum davomida ular tanqid qilin - maydi, qaytadan ifodalanmaydi. Aqliy xujum tugagach, muhimlik jixatiga ko'ra eng yaxshi takliflar generatsiyalanadi va muammoni yechish uchun zarurlari tanlanadi.

«Aqliy xujum» metodi o'qituvchi tomonidan qo'yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. Talabalarining boshlang'ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo'yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.
2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog'lash maqsad qilib qo'yilganda - yangi mavzuga o'tish qismida amalga oshiriladi.
3. O'tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo'yilganda - mavzudan so'ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

«Aqliy xujum» metodining afzallik tomonlari:

- natijalar baholanmasligi talabalarni turli fikr-g'oyalarning shakllanishiga olib keladi;
- talabalarining barchasi ishtirok etadi;
- fikr-g'oyalar vizuallashtirilib boriladi;
- talabalarining boshlang'ich bilimlarini tekshirib ko'rish imkoniyati mavjud;
- talabalarda mavzuga qiziqish uyg'otish mumkin.

«Aqliy xujum» metodining kamchilik tomonlari:

- o'qituvchi tomonidan savolni to'g'ri qo'ya olmaslik;
- o'qituvchidan yuqori darajada eshitish qobiliyatining talab etilishi.

«Aqliy xujum» metodining tarkibiy tuzilmasi



«Aqliy xujum» metodining bosqichlari:

1. Talabalarga savol tashlanadi va ularga shu savol bo'yicha o'z javoblarini (fikir, mulohaza) bildirishlarini so'raladi;
2. Talabalar savol bo'yicha o'z fikr-mulohazalarini bildirishadi;
3. Talabalarning fikr-g'oyalari (magnitafonga, videotasmaga, rangli qog'ozlarga yoki doskaga) to'planadi;
4. Fikr-g'oyalar ma'lum belgilar bo'yicha guruhlanadi;
5. Yuqorida qo'yilgan savolga aniq va to'g'ri javob tanlab olinadi.

«Aqliy xujum» metodini qo'llashdagi asosiy qoidalar:

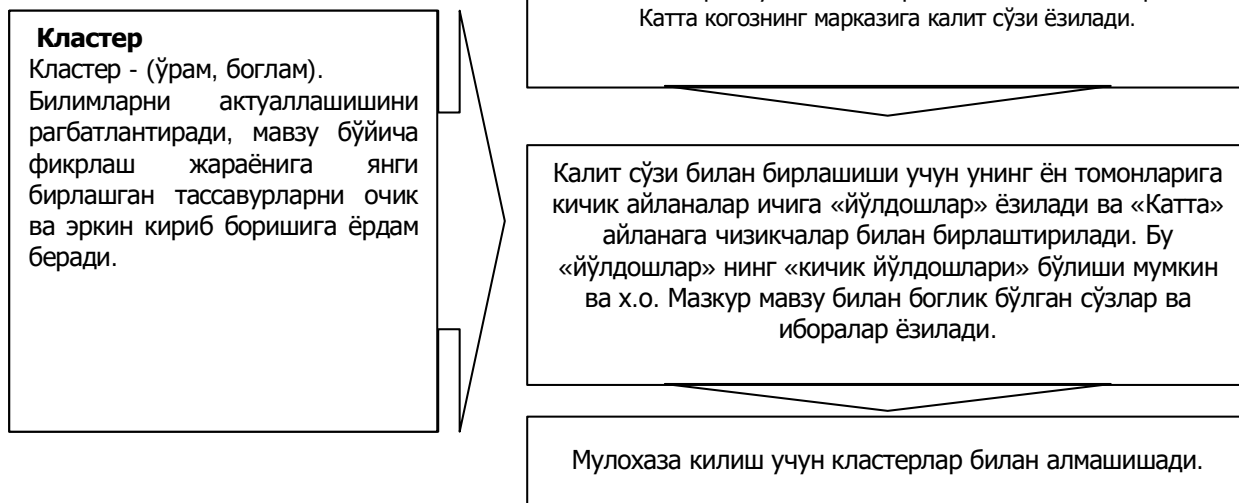
- a) Bildirilgan fikr-g'oyalar muhokama qilinmaydi va baholanmaydi.
- b) Bildirilgan har qanday fikr-g'oyalar, ular hatto to'g'ri bo'lmasa ham inobatga olinadi.

v) Bildirilgan fikr-g'oyalarni to'ldirish va yanada kengaytirish mumkin.

ilova

Mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va iboralar

Zamonaviy ta'lim vositasi tushunchasi , ta'lim vositasi turlari, ta'lim vositasini qo'llash usullari



Ilova

- ✓ Ўзаро ҳурмат ва илтифот кўрсатган ҳолда ҳар ким ўз дўстларини тинглай олиши керак;
- ✓ Берилган топшириқга нисбатан ҳар ким актив, ўзаро ҳамкорликда ва маъсулиятли ёндашиши керак;
- ✓ Зарур пайтда ғар ким ёрдам сўраши керак;
- ✓ Сўралган пайтда ҳар ким ёрдам кўрсатиши керак;
- ✓ Гуруҳ иш натижалари баҳоланаётганда ҳамма қатнашиши керак;
- ✓ Ҳар ким аниқ тушуниши керакки:
- ✓ Ўзгаларга ёрдам бериб, ўзимиз ўрганамиз!
- ✓ Биз бир қайиқда сузаяпмиз: ё бирга қўзлаган манзилга етамиз, ёки бирга чўкамиз!

ilova

“Davra suhbat” munozarasini o‘tkazish bo‘yicha yo‘riqnoma

1. So‘zga chiqqanlarni diqqat bilan, bo‘lmasdan tinglang.
2. Ma‘ruzachining fikriga qo‘shilmasang, o‘z fikringni bildirishga ruxsat so‘ra.
3. Ma‘ruzachining fikriga qo‘shilsang, ko‘rib chiqilayotgan masala bo‘yicha qo‘shimcha fikrlar bildir.

ilova

Tayanch so‘zlar va iboralar:

- ❖ Funksiya
- ❖ Aniqlanish sohasi
- ❖ Qiymatlar to‘plami
- ❖ Davr
- ❖ Teskari funksiya
- ❖ Kasr chiziqli funksiya

5. Ta’lim texnologiyasi

“Elementar funksiyalar va ularning grafiklarini zamonaviy matematik dasturiy paketlar yordamida o‘rganish” modulidan ma’ruza o‘qish texnologiyasi modeli

Mavzu: Funksiya tushunchasi va xossalari

O‘quv vaqti: 80 daqiqa	Tinglovchilar: Akademik litsey o‘qituvchilari
O‘quv mashg‘ulot turi	Ma’ruza
O‘quv mashg‘ulot rejasi	1. Funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohalari 2. Funksiyaning juftligi, toqligi, monotonligi, chegaralanganligi, nollari, o‘zgarmas ishora

	oraliqlari, davriyligi 3. Murakkab funksiya 4. Funksiya grafiklarini dasturiy paketlardan foydalanib chizish
O‘quv mashg‘ulot maqsadi: tinglovchilarda funksiyalar va ularning xossalari, murakkab funksiya haqidagi tushunchalarni shakllantirish va rivojlantirishdan iborat	
Pedagogik vazifalar: • Mavzu bo‘yicha tinglovchilarning bilimlarini oshirish; • Funksiya va uning grafigining maqsadi va vazifalarini tushuntirib berish; • Tinglovchilarga funksiya tatbiqlarini tushuntirish;	O‘quv faoliyati natijalari: tinglovchilar bilishlari kerak: • Tekislikda koordinatalar sistemasi tushunchasini bilishlari; • Funksiya xossalari va uning grafigi yasash, funksiyani tekshirish qoidalarini bilishlari; • Funksiya grafigidan foydalanib turli nostandart tenglamalarni yecha olishlari; • Mavzuga oid misol va masalalar yecha olishlari.
O‘qitish metodi va texnikasi	Interfaol metod
O‘qitish vositasi	T.A. Azlarov, X.T. Mansurovlarning “ Matematik analiz ” darsligi, doska, tarqatma materiallar, internet havolalari.

Ish vaqti bosqichlari	O‘qituvchi faoliyatining mazmuni	Tinglovchilar faoliyatining mazmuni
1-bosqich. O‘quv	1.1. Mavzuni, mavzu rejasini, maqsadini, rejalashtirilayotgan o‘quv natijalarini va	Eshitadilar, yozadilar.

mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	o'quv mashg'ulot xususiyatini tushuntiradi. 1.2. Avvalgi darsda o'tilgan mavzuni takrorlagan xolda bugungi mavzu bilan bog'lanishni tushuntirib beradi.	
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Mavzuni to'lig'icha talqin etadi. Rejadagi har bir tushunchalarni tinglovchilarga tushuntirib beradi. 2.2. Mavzu bo'yicha tinglovchilarga savollar beradi. 2.3. Mavzu bo'yicha tipik masala va misollar keltiradi.	Eshitadilar, yozadilar, savollar beradilar.
3-bosqich. Yakunlovchi (10 daqiqa)	3.1. Mavzuni yakunlaydi. 3.2. Tinglovchilarga mustaqil o'rganishlari uchun vazifalar topshiradi.	Eshitadilar, yozadilar

“Funksiya tushunchasi va grafiklari” moduli bo'yicha amaliy mashg'ulot texnologiyasi modeli

Mavzu: Funksiya tushunchasi va xossalari

O'quv vaqti: 80 daqiqa	tinglovchilar: Akademik litsey o'qituvchilari
O'quv mashg'ulot turi	Amaliyot
O'quv mashg'ulot rejasi	1. Funksiya ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari (to'plamlari) 2. Chegaralangan va monoton funksiyalar 3. Juft, toq va davriy funksiyalar 4. Murakkab va teskari funksiyalar 5. Mustaqil ishlash uchun topshiriqlar berish.
O'quv mashg'ulot maqsadi: tinglovchilarda funksiya tushunchasini	

shakllantirish va rivojlantirishdan iborat	
Pedagogik vazifalar: • Mavzu bo'yicha tinglovchilarning bilimlarini oshirish; • Funksiya va uning grafigining maqsadi va vazifalarini tushuntirib berish; • Tinglovchilarga funksiya tatbiqlarini tushuntirish;	O'quv faoliyati natijalari: tinglovchilar bilishlari kerak: • Tekislikda koordinatalar sistemasi tushunchasini bilishlari; • Funksiya xossalari va uning grafigi yasash, funksiyaning tekshirish qoidalarini bilishlari; • Funksiya grafigidan foydalanib turli nostandart tenglamalarni yecha olishlari; • Mavzuga oid misollar yecha olishlari.
O'qitish metodi va texnikasi	Interfaol metod
O'qitish vositasi	M.Saxaev "Elementar matematika masalalari to'plami", I qism, doska, tarqatma materiallar

Ish vaqti bosqichlari	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Tinglovchilar faoliyatining mazmuni
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuni, mavzu rejasini, maqsadini, rejalashtirilayotgan o'quv natijalarini va o'quv mashg'ulot xususiyatini tushuntiradi. 1.2. Avvalgi darsda o'tilgan mavzuni takrorlagan xolda bugungi mavzu bilan bog'lanishni tushuntirib beradi.	Eshitadilar, yozadilar.
2-bosqich. Asosiy	2.1. Funksiya ta'rif. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalarini	Eshitadilar, yozadilar, misollar yechadilar,

(65 daqiqa)	(to‘plamlari) misollarda ko‘rsatish. 2.2. Chegaralangan va monoton funksiyalarga doir masalalar ishlash. 2.3. Juft, toq va davriy funksiyalarga doir masalalar ishlash. 2.4. Murakkab va teskari funksiyalarga doir masalalar ishlash. 2.5. Tinglovchilar bilan birgalikda misol va masalalar yechish	savollar beradilar.
3-bosqich. Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Mavzuni yakunlaydi. 3.2. Tinglovchilarga mustaqil o‘rganishlari uchun misol va masalalar topshiradi. 3.3. Savol-javobda, misol va masala yechishda faol ishtirok etgan tinglovchilarni rag‘batlantirish.	Eshitadilar, yozadilar

NAZARIY MA'LUMOTLAR

1. Funksiya ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari (to'plamlari)

Tabiat va texnik jarayonlarda, shuningdek fanning barcha sohalarida har hil miqdorlar qatnashadi. Bunda ayrim miqdorlar turli son qiymatlarni qabul qilsa, ayrimlari esa faqat bitta son qiymatga teng bo'lib qolaveradi. Birinchi holdagi miqdorlar o'zgaruvchi miqdorlar, ikkinchi holdagi miqdorlar esa o'zgarmas miqdorlar deyiladi.

Masalan, yuqoriga otilgan jismning tezligi o'zgaruvchi miqdor bo'ladi, chunki uning tezligi avval kamaya boradi, so'ng nolga aylanadi va yerning tortish qonuniga ko'ra tezlik orta boradi. Uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'ladi, chunki har qanday uchburchakda ichki burchaklar yig'indisi 180° ga teng.

O'zgaruvchi miqdorlar x, y, z va h.k. harflar bilan belgilanadi ularning qabul qiladigan qiymatlari haqiqiy sonlar bo'ladi.

Odatda, o'zgaruvchi miqdorning qabul qiladigan qiymatlari to'plami (haqiqiy sonlardan iborat to'plam) ma'lum bo'lsa, o'zgaruvchi berilgan hisoblanadi.

Masalan, o'zgaruvchi sifatida aylana radiusi olinadigan bo'lsa, bu o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari to'plami barcha musbat sonlardan iborat to'plam bo'ladi.

Ba'zan, x o'zgaruvchining qabul qiladigan qiymatlari to'plami E ($E \subset M$) bo'lsin deyish o'rniga x o'zgaruvchi $E \subset M$ to'plamda o'zgaradi deymiz.

Matematikada bir qancha o'zgaruvchilar va ular orasidagi bog'lanishlar o'rganiladi.

Aytaylik, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda E ($E \subset M$) hamda F ($F \subset M$) haqiqiy sonlar to'plamlarida o'zgarsin: $x \in E, y \in F$.

1-Ta'rif. Agar E to'plamdan olingan har bir x songa biror f qoidaga (yoki

qonunga) ko'ra F to'plamning bitta tayin y soni mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda funksiya aniqlangan deyiladi.

Bunda:

E to'plam funksiyaning aniqlanish (berilish) sohasi,

$\{y = f(x) : x \in E\} \subset F$ to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi,

x - erkli o'zgaruvchi, funksiya argumenti,

y - erksiz o'zgaruvchi, x ning funksiyasi deyiladi.

Ta'rifdagi x, y va f larni birlashtirib, y o'zgaruvchi x ning funksiyasi deyilishini

$$y = f(x) \quad (1)$$

kabi yoziladi va "igrek teng ef iks" deb o'qiladi.

Ravshanki, har bir x ga boshqa qoidaga ko'ra bitta tayin y mos qo'yiladigan bo'lsa, unda boshqa funksiya hosil bo'ladi. U, masalan, $y = j(x)$ kabi yozilishi mumkin.

Eslatma. Funksiya ta'rifida E va F to'plamlarning berilishi aytilgan bo'lsada, amaliyotda bu to'plamlar (1) munosabatdan foydalanib topiladi.

Jumladan,

$$y = f(x)$$

funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plami) argument x ning shunday qiymatlaridan iborat to'plam bo'lishi kerakki, bu to'plamdan olingan har bir x ning qiymatida $y = f(x)$ munosabat ma'noga ega bo'lsin.

Masalan, $y = \sqrt{4 - x^2}$ da, uning ma'noga ega bo'lishi uchun $4 - x^2 \geq 0$ bo'lishi kerak. Keyingi tengsizlikni yechamiz:

$$4 - x^2 \geq 0, x^2 - 4 \leq 0, (x - 2)(x + 2) \leq 0 \text{ yoki } -2 \leq x \leq 2.$$

Demak, qaralayotgan funksiyaning aniqlanish sohasi (to'plam) $E = [-2; 2]$

bo'ladi. Bu funksiyaning o'zgarish sohasi esa $F = [0; 2]$ bo'ladi.

Funksiya ta'rifidagi mos qo'yuvchi qoida turlicha usulda, analitik, jadval, grafik va boshqa usullarda bo'lishi mumkin.

a) Analitik usul. Bu usulda x o'zgaruvchining har bir qiymatiga ko'ra unga mos keladigan y ning qiymati x ustida analitik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va boshqa amallar) bajarilishi natijasida topiladi, ya'ni x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar bilan ifodalanadi.

Masalan,

$$y = x^2 + x + 1, \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y = \lg x.$$

Funksiyaning analitik usulda berilishida funksiya bir nechta formulalar yordamida ham aniqlanishi mumkin. Masalan,

$$y = \begin{cases} x + 1, & \text{agar } x \geq 0 \\ x^2 + 1, & \text{agar } x < 0. \end{cases}$$

b) Jadval usul. Bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval ko'rinishida bo'ladi. Bu holda funksiya argumenti x ning bir nechta tayin

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlariga mos keladigan y ning qiymatlari

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

jadval tarzida ifodalanadi.

Funksiyaning jadval usulida berilishidan turli kuzatishlar va tajribalarda keng foydalaniladi.

v) Grafik usul. Bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni egri chiziq (grafik) amalga oshiradi. Funksiyaning grafik usulidan ko'pincha tajriba bilan bog'liq ishlarda, ayniqsa o'zi yozar apparatlardan foydalanishda qo'llaniladi. Bunda, bog'lanishni ifodalovchi egri chiziqdan x ning kerakli qiymatidagi funksiya qiymati ko'chirib olinadi.

1. Funksiya grafigi

Faraz qilaylik,

$$y = f(x)$$

funksiya E to'plamda aniqlangan bo'lsin. E to'plamga tegishli bo'lgan biror x_0 nuqtani olaylik. Ravshanki bu nuqtada y o'zgaruvchining biror qiymati mos keladi. Uni y_0 deylik. Bu y_0 son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi xususiy qiymati deyiladi va uni $f(x_0) = y_0$ kabi yoziladi.

Masalan,

$$f(x) = y = 5x^2 - 3$$

Funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi xususiy qiymati $f(1) = 5 \cdot 1 - 3 = 2$ bo'ladi.

Shuni aytish kerakki, $x = x_0$ va $y = f(x)$ funksiyaning shu nuqtadagi qiymati $(y_0 = f(x_0))$ sonlar birgalikda $(x_0; f(x_0))$ juftlikni tashkil etib, u tekislikda nuqtani tasvirlaydi.

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz.

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, argument x ning E to'plamdan olingan har bir qiymatiga funksiyaning mos qiymati $y (f(x) = y)$ bo'lsin. Natijada, (x, y) juftliklardan tuzilgan ushbu

$$\Gamma = \{(x, y) : x \in E, y = f(x)\} \quad (2)$$

to'plam hosil bo'ladi.

Odatda, (2) to'plam (tekislik nuqtalarining geometrik o'rni) $y = f(x)$ funksiya grafigi deyiladi.

Funksiya grafigining tasviri uning xususiyatlarini chuqurroq tasavvur etishiga yordam beradi.

Dastavval berilgan funksiya grafigini "nuqtalar" bo'yicha tasvirlashni keltiramiz. Keyinchalik funksiya grafigini batafsil o'rganamiz.

$y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E to'plamdan x argumentning bir nechta bir-biriga yaqinroq bo'lgan

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

qiymatlarini olib, bu nuqtalardagi funksiya qiymatlarini topamiz.

Aytaylik, ular

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

bo'lsin. $(y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n))$. Natijada

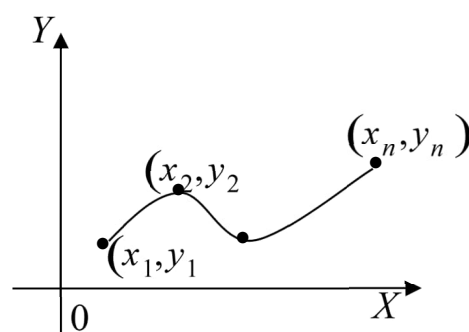
x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
u	y_1	y_2	y_3	...	y_n

jadval hosil bo'ladi. Bu jadvaldan foydalanib

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

juftliklarni tuzamiz. So'ng, bu

juftliklarni tekislikda tasvirlaymiz. (1-chizma)



1-chizma

Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirishda hosil bo'lgan chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bo'ladi (taxminiy grafigi bo'ladi).

Chegaralangan va monoton funksiyalar

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda $(E \in \mathbb{R})$ aniqlangan bo'lsin.

2-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M son (m son) topilsaki, " $x \in E$ uchun $f(x) \in M$, $(f(x) \in m)$ "

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya E to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, u E to'plamda chegaralangan deyiladi.

Ravshanki, agar " $x \in E$ uchun $|f(x)| \leq p$ (p -musbat son) tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda chegaralangan bo'ladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Funksiyaning $E = \left[0; +\infty\right) \cup \left(-\infty; -1\right]$ to'plamda chegaralangan bo'lishi isbotlansin.

◀ Ravshanki, " $x \in E$ uchun

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq 0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya E da quyidan chegaralangan.

Ma'lumki, ixtiyoriy x uchun

$$0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1,$$

$$2x \leq 1 + x^2,$$

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

bo'ladi. Demak, " $x \in E$ uchun

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Bu esa berilgan funksiyaning E da yuqoridan chegaralanganligini bildiradi.

Shunday qilib berilgan funksiya $E = \left[0; +\infty\right) \cup \left(-\infty; -1\right]$ da ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan, binobarin funksiya E da chegaralangan bo'ladi. ▶

Eslatma. Chegaralangan funksiyaning grafigi OX o'qiga parallel bo'lgan ikki to'g'ri chiziq orasida joylashgan bo'ladi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar funksiya argumenti x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deyiladi.

4-ta'rif. Agar funksiya argumenti x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun

$x_1 < x_2$ bo'lganda

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya E to'plamda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

O'suvchi va kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

2-misol. Ushbu

$$f(x) = x^3$$

funksiya monotonlikka tekshirilsin.

◀ Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E = (-\infty; +\infty)$ bo'ladi. E

to'plamdan ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$

bo'lsin deylik. So'ng ushbu

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3$$

ayirmani qaraymiz. Uni quyidagicha yozamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) =$$

$$(x_2 - x_1) \left(x_2^2 + 2 \frac{1}{2} x_2x_1 + x_1^2 + \frac{1}{4} x_1^2 - \frac{1}{4} x_1^2 \right) =$$

$$(x_2 - x_1) \left(x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{3}{4} x_1^2 \right)$$

Ravshanki,

$$x_2 - x_1 > 0, \quad x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{3}{4} x_1^2 > 0$$

Demak,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0, \text{ ya'ni } f(x_2) > f(x_1)$$

bo'ladi. Shunday qilib, berilgan funksiya uchun ixtiyoriy $x_1 \in E$, $x_2 \in E$ va

$x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ bo'lar ekan. Bu esa $f(x) = x^3$ funksiyaning

$E = (-\infty; +\infty)$ da qat'iy o'suvchi ekanini bildiradi. ▶

Sodda tasdiqlarni keltiramiz:

a) Agar $f(x)$ funksiya E to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, C o'zgarmas son bo'lsa, u holda $f(x) + C$ funksiya ham E to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

b) Agar $f(x)$ funksiya E to'plamda o'suvchi bo'lib, $c > 0$ bo'lsa, u holda $c \cdot f(x)$ funksiya E da o'suvchi, $c < 0$ bo'lsa, $c \cdot f(x)$ funksiya E to'plamda kamayuvchi bo'ladi.

v) Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar E to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda $f(x) + g(x)$ funksiya E da o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Masalan, biz yuqorida $f(x) = x^3$ funksiyaning $E = (-\infty; +\infty)$ da o'suvchi ekanini isbotlagan edik. Keltirilgan tasdiqqa ko'ra $g(x) = -x^3$ funksiya $E = (-\infty; +\infty)$ da kamayuvchi bo'ladi.

Juft , toq va davriy funksiyalar

10. Juft va toq funksiyalar

Aytaylik, E koordinata boshi O nuqtaga nisbatan simmetrik to'plam, ya'ni " $x \in E$ uchun, $-x \in E$ bo'lsin. (Masalan, $\mathbb{R}$ 2; $2\mathbb{N}$ $(-4; 4)$ - simmetrik to'plamlar bo'ladi).

Bu E to'plamda $f(x)$ funksiya aniqlangan.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$f(-x) = f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ juft funksiya,

$$f(-x) = -f(x)$$

tenglik bajarilsa, $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

funksiyalar juft funksiyalar bo'ladi, chunki

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), g(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = g(x).$$

Ushbu

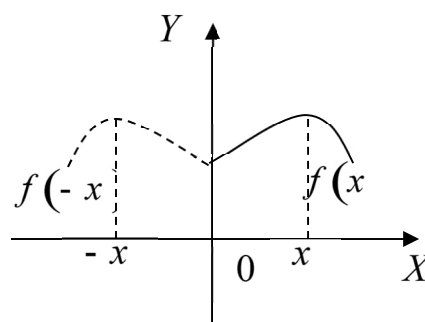
$$\varphi(x) = x^3 + \tilde{o}$$

funksiya esa toq funksiya bo'ladi, chunki

$$\varphi(-x) = (-x)^3 + (-\tilde{o}) = -x^3 - \tilde{o} = -(x^3 + \tilde{o}) = -\varphi(x).$$

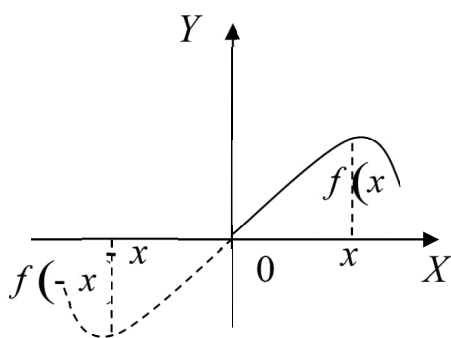
Juft funksiyaning grafigi

OY o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shuning uchun funksiya grafigini $x \geq 0$ bo'lgan hol uchun chizish yetarli bo'ladi. Uni OY o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish bilan berilgan funksiyaning grafigi topiladi (2-chizma).



2-chizma

Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shuning uchun funksiya grafigini $x \geq 0$ bo'lgan xol uchun chizish yetarli bo'ladi. Uni OY o'qi atrofida o'ng tomonga 180° ga burish bilan funksiya grafigi topiladi (3-chizma).



3-chizma

20. Davriy funksiyalar

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas T son ($T \neq 0$) topilsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$1) x - T \in E, \quad x + T \in E,$$

$$2) f(x) = f(x + T)$$

shartlar bajarilsa, $f(x)$ davriy funksiya, T son esa uning davri deyiladi.

Agar T son ($T \neq 0$) $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa, u holda

$$nT \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sonlar ham funksiyaning davri bo'ladi.

Demak, davriy funksiyaning davrlari ko'p bo'ladi. Ular ichida eng kichik musbat bo'lgani (agar u mavjud bo'lsa) funksiyaning asosiy davri deyiladi.

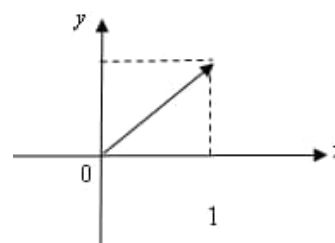
Aytaylik, $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri $\tilde{O} (\tilde{O} \neq 0)$ bo'lsin. Bu funksiyaning grafigi, uzunligi $\tilde{O}$ ga teng bo'lgan oraliqdagi (masalan, $[a, a + T]$) grafigini davriy davom ettirish bilan topiladi.

Ma'lumki, x haqiqiy sonning butun qismi (x dan katta bo'lmagan eng katta butun son) x ning funksiyasi bo'lib, uni $[\tilde{o}]$ kabi belgilanadi.

Endi

$$f(x) = x - [x]$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, bu funksiya x ning kasr qismini ifodalaydi va $[0, 1]$ dagi grafigi quyidagicha bo'ladi: (4-chizma).



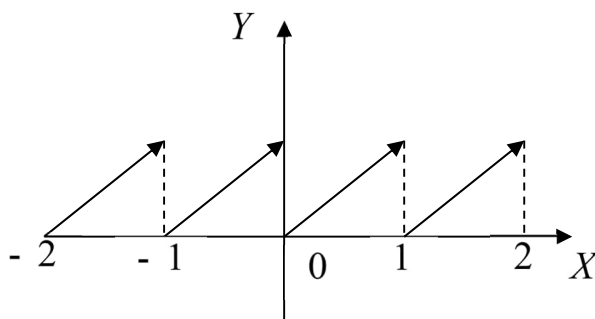
4-chizma

Qaralayotgan funksiya davriy funksiya bo'lib, uning davri $T = 1$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham,

$$f(x + 1) = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - [x] - 1 = x - [x].$$

Bu davriy funksiyaning grafigi 5-chizmada tasvirlangan.



5-chizma

1. Murakkab va teskari funksiyalar

Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lsin. Har bir $x \in E$ uchun berilgan funksiyaning qiymati y ni topib, bunday qiymatlardan

$$F(f) = \{y = f(x) : x \in E\}$$

to'plamni hosil qilamiz. Ravshanki, bu funksiya qiymatlari to'plami bo'ladi.

Shu $F(f)$ to'plamda o'z navbatida $\bar{U} = j(y)$ funksiya berilgan deylik. Natijada E to'plamdan olingan har bir x ga bitta y son (f -qoidaga ko'ra) va $F(f)$ to'plamdagi bunday y songa bitta $\bar{U}$ son (j -qoidaga ko'ra) mos qo'yilib, E to'plamda funksiya aniqlanadi. Uni murakkab funksiya deyilib

$$\bar{U} = j(f(x)) \quad (3)$$

kabi belgilanadi.

(3) murakkab funksiya $y = f(x)$ hamda $\bar{U} = j(y)$ funksiyalar yordamida hosil qilinadi.

Masalan,

$$\bar{U} = \sqrt{x^2 + 1}$$

murakkab funksiya bo'lib, bu funksiya

$$\bar{U} = \sqrt{y}, \quad y = x^2 + 1$$

funksiyalar yordamida hosil bo'lgan.

Teskari funksiya

$y = f(x)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, ixtiyoriy $x_1 \in E$, $x_2 \in E$ va $x_1 \neq x_2$ uchun $f(x_1) \neq f(x_2)$ bo'lsin. U holda berilgan funksiyaning qiymatlari to'plami $F(f)$ dan olingan har bir y ga E to'plamda shunday $x \in E$ nuqta topiladiki, $f(x) = y$ bo'ladi.

$F(f)$ to'plamdan olingan har bir y ga E to'plamda shunday $x \in E$ mos qo'yilsaki, $f(x) = y$ bo'lsa, unda $F(f)$ to'plamda aniqlangan funksiya hosil bo'ladi. Bu funksiya berilgan $y = f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyilib, uni $y = f^{-1}(x)$ kabi belgilanadi.

Demak, $y = f^{-1}(x)$ shunday funksiya,ki,

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

bo'ladi.

3-misol. Ushbu

$$y = f(x) = 2x + 1$$

Funksiyani $E = [0,1]$ da qaraylik. Bu funksiyaga teskari funksiya topilsin.

◀ Bu funksiyaning qiymatlari to'plami $F(f) = [1,3]$ bo'ladi. $[1,3]$ da aniqlangan

$$\tilde{x} = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

funksiya berilgan $y = f(x) = 2x + 1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi, chunki

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1-1}{2} = x \quad \blacktriangleright$$

Eslatma. Ma'lumki, $y = f(x)$ funksiyada x -argument, y esa uning funksiyasi. Bu funksiyaga nisbatan teskari funksiya $\tilde{x} = f^{-1}(y)$ da y -argument, x esa uning funksiyasi. Demak, teskari funksiya grafigini yasashda absissa o'qi sifatida OY o'qni, ordinata o'qi sifatida OX o'qni olish kerak bo'ladi. Bu hol ma'lum noqulayliklar tug'diradi. Qulaylik maqsadida teskari funksiyaning argumentini ham x , uning funksiyasini y kabi belgilanib, quyidagicha

$$y = g(x)$$

kabi yoziladi.

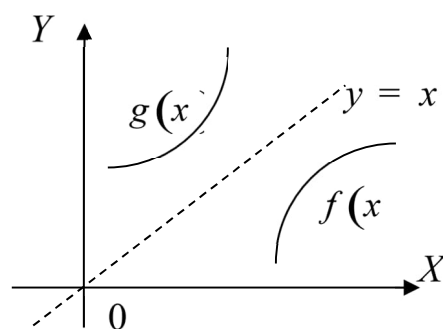
$y = f(x)$ ga nisbatan teskari bo'lgan

$y = g(x)$ funksiya grafigi $y = f(x)$

funksiya grafigi $y = x$ to'g'ri chiziqqa

nisbatan simmetrik ko'chirishdan hosil

bo'ladi (6-chizma).



6-chizma

2. Asosiy elementar funksiyalar va ularning grafiklari

Funksiyalar va ularning grafiklari haqidagi ma'lumotlarni qisqacha bayon etamiz.

Chiziqli funksiya. Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y = ax + b, \quad (2)$$

bunda a va b o'zgarmas sonlar. Chiziqli funksiya $E = (-\infty, +\infty)$ da aniqlangan bo'lib: $a > 0$ bo'lganda o'suvchi, $a < 0$ bo'lganda kamayuvchi funksiya bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $a > 0$ bo'lib, ixtiyoriy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\tilde{x}_1 < x_2$ uchun

$$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = a(x_1 - x_2) < 0$$

bo'ladi. Bundan $f(x_1) < f(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash

$a < 0$ bo'lganda chiziqli funksiyaning kamayuvchi bo'lishi ko'rsatiladi.

Biz 7-bobda to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasini bayon etgan edi. Demak, chiziqli funksiyaning grafigi burchak koeffitsienti a ($a = \text{tga}$) va OY o'qidan b kesma ajratuvchi to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

2. Kvadrat funksiya.

Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (3)$$

bunda a, b, c o'zgarmas sonlar. Kvadrat funksiya $E = (-\infty, +\infty)$ to'plamda aniqlangan.

Xususan, $a = 1$, $b = c = 0$ bo'lganda

$$y = x^2$$

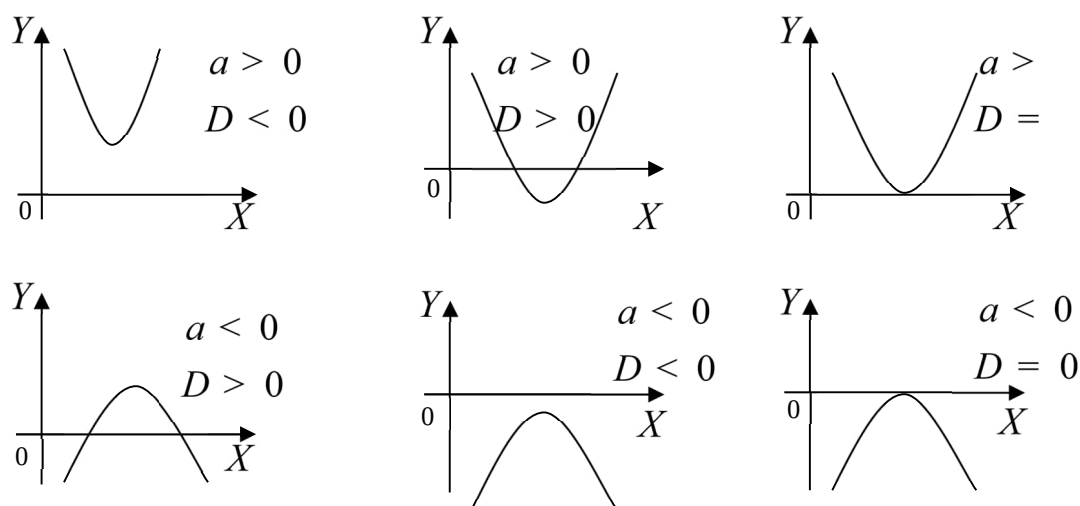
funksiyaga ega bo'lamiz. Biz 8-bobda

$$y^2 = 2px$$

parabola va uning tekislikdagi tasvirini ko'rgan edik. Xuddi shunga o'xshash

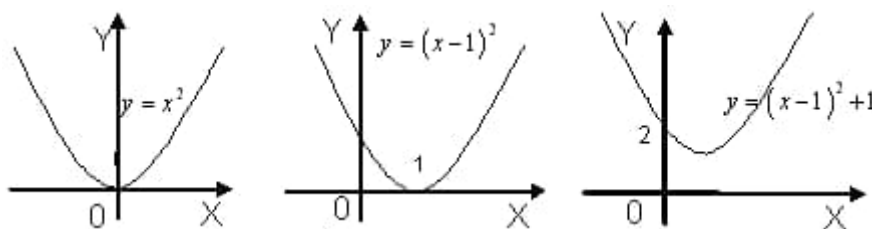
$y = x^2$ funksiya grafigi paraboladan iborat bo'lishini aniqlash qiyin emas.

Umuman, $y = ax^2 + bx + c$ funksiyaning grafigi parabola bo'lib, uning tekislikdagi tasviri a hamda $D = b^2 - 4ac$ (kvadrat uchhadning diskriminanti) larning ishoralariga bog'liq bo'ladi: (1-chizma)



1-chizma

Quyida ushbu $y = x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1$ funksiya grafigini chizish jarayoni ko'rsatilgan:



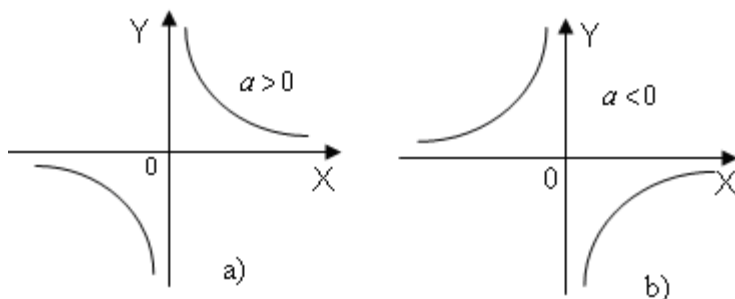
2-chizma

Teskari proporsional bog'lanish. Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y = \frac{a}{x},$$

Bunda a o'zgarmas son ($a \neq 0$). Bu funksiyaning aniqlanish sohasi

$E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ bo'ladi. Qaralayotgan funksiyaning grafigi a ga bog'liq bo'lib, $a > 0$ bo'lganda 3a-chizmada tasvirlangan egri chiziq (teng yonli giperbola), $a < 0$ bo'lganda esa 3b-chizmada tasvirlangan egri chiziq bo'ladi:



3-chizma

Eslatma. Yuqoridagi $y = \frac{a}{x}$ funksiyaning grafigiga ko'ra

$$y = \frac{a}{x+b}$$

funksiyaning grafigini chizish mumkin.

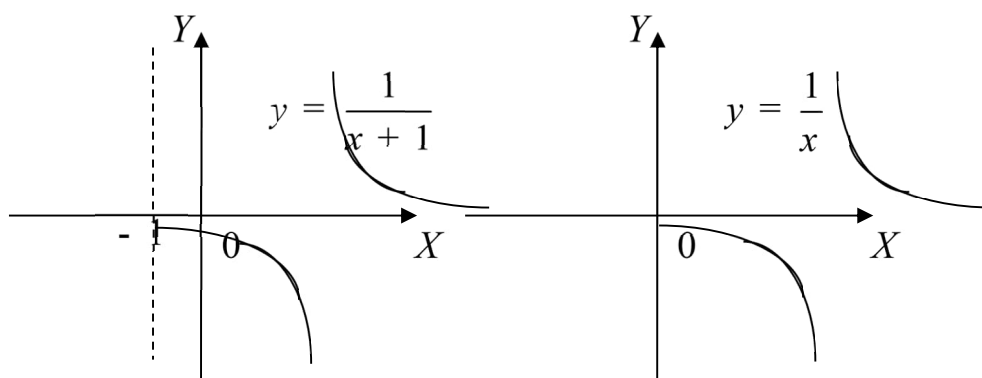
Masalan,

$$y = \frac{1}{x}$$

funksiyaning grafigiga ko'ra

$$y = \frac{1}{x+1}$$

funksiyaning grafigini chizish jarayoni 4-chizmada ko'rsatilgan



4-chizma

4. Kasr chiziqli funksiya.

Bu funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

bunda a, b, c, d - o'zgarmas haqiqiy sonlar. ($c \neq 0$). Kasr chiziqli funksiya

$$E = \left(-\frac{d}{c}, 1 \right) \cup \left(1, +\frac{d}{c} \right), \text{ to'plamda aniqlangan.}$$

Bu funksiyaning grafigi $y = \frac{a}{x}$ funksiya grafigini OX va OY o'qlari

bo'yicha parallel ko'chirish bilan topiladi.

Aytaylik, $a \neq 0$ bo'lsin. Bu holda

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a(x + \frac{b}{a})}{c(x + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} \frac{(x + \frac{d}{c}) + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$$

bo'lib, $\frac{d}{c} = a$, $\frac{a}{c} = b$, $\frac{bc - ad}{c^2} = k$ deyilsa, unda

$$y = \frac{k}{x + d} + b$$

bo'ladi. Agar $a = 0$ bo'lsa, u holda

$$y = \frac{\hat{e}}{x + \alpha} \quad n < 0$$

bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$y = \frac{3x + 4}{x - 1}$$

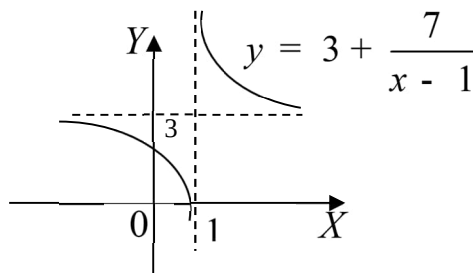
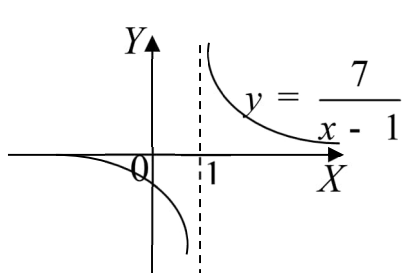
funksiya grafigi chizilsin.

◀ Ravshanki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi $E = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ bo'ladi.

Berilgan funktsiyani quyidagicha yozib olamiz:

$$y = \frac{3x+4}{x-1} = \frac{x+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}(x-1)} = \frac{x-1+\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}(x-1)} = 3 + \frac{7}{x-1}.$$

Shunday qilib, berilgan funksiyaning grafigi $\frac{7}{x-1}$ funksiya grafigini ordinata o'qi bo'yicha yuqoriga 3 birlikka ko'tarish bilan topiladi. (5-chizma). ►



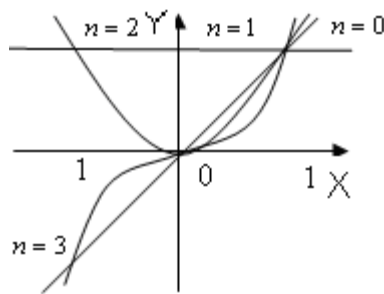
5-chizma

Darajali funksiya. Ushbu

$$y = x^n$$

ko'rinishdagi funksiya darajali funksiya deyiladi, bunda n - butun son. Bu funksiya $n \geq 0$ bo'lganda $E = (-\infty, +\infty)$ to'plamda, $n < 0$ bo'lganda $E = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ to'plamda aniqlangan.

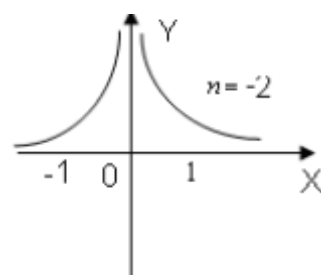
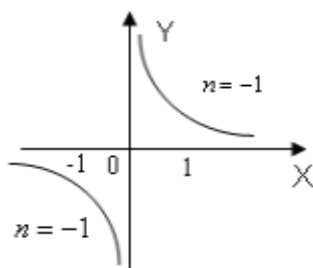
Agar $n \geq 0$ bo'lsa, masalan, $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ bo'lsa, darajali funksiya grafigi $y = 1$, $y = x$ to'g'ri chiziqlar, $y = x^2$ parabola hamda $y = x^3$ egri chiziq (kubik parabola) lardan iborat bo'ladi (6-chizma).



6-chizma

Agar $n < 0$ bo'lsa, masalan, $n = -1$, $n = -2$ bo'lsa, darajali funksiya grafigi

$y = \frac{1}{x}$ giperbola $y = \frac{1}{x^2}$ egri chiziq (ikkinchi tartibli giperbola) lardan iborat bo'ladi (7-chizma)



7-chizma

Eslatma. Agar darajali funksiyada daraja ko‘rsatkich $\frac{1}{n}$ ga ($n \in \mathbb{N}$) teng bo‘lsa, bu

holda funksiya ushbu $y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi n - juft son bo‘lganda $E = [0, +\infty)$ to‘plam, n - toq son bo‘lganda $E = (-\infty, +\infty)$ to‘plam bo‘ladi. Ravshanki, $x = y^n$.

Demak, $y = \sqrt[n]{x}$ funksiya darajali funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo‘ladi. Binobarin, qarayotgan funksiyaning grafigini darajali funksiya grafigiga ko‘ra topish mumkin.

6. Ko‘rsatkichli funksiya.

Ushbu $y = a^x$

ko‘rinishdagi funksiya ko‘rsatkichli funksiya deyiladi, bunda $a > 0$ va $a \neq 1$.

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi

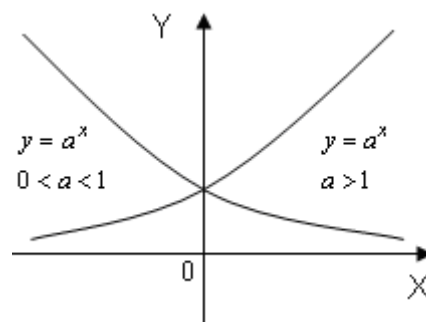
$E = (-\infty, +\infty)$ bo‘lib, $a > 1$ bo‘lganda

funksiya o‘svuchi, $0 < a < 1$ bo‘lganda esa

kamayuvchi bo‘ladi. Ko‘rsatkichli

funksiyaning qiymati har doim musbat, grafigi

OX o‘qidan yuqorida joylashgan. (8-chizma)



8-chizma

7. Logarifmik funksiya.

Ushbu $y = \log_a x$

ko‘rinishdagi funksiya logarifmik funksiya deyiladi, bunda $a > 0$, $a \neq 1$.

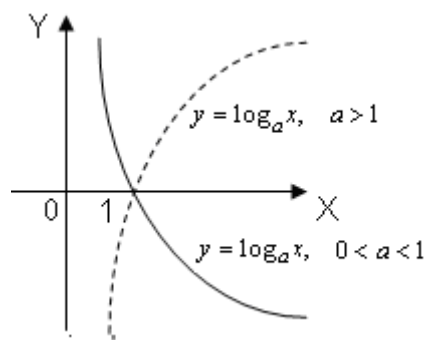
Bu funktsiyaning aniqlanish sohasi

$E = (0, +\infty)$ to'plam bo'ladi. Ravshanki

$$x = a^y.$$

Demak, logarifmik funksiya ko'rsatkichli funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi.

Binobarin, logarifmik funktsiyaning grafigini ko'rsatkichli funksiya grafigiga ko'ra topish mumkin (9-chizma).



9-chizma

Trigonometrik funksiyalar

Trigonometrik funksiya $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$ lar haqidagi dastlabki ma'lumotlar o'quvchiga ma'lum. Unda argument a graduslarda yoki radianlarda hisoblangan burchak deyilgan. Matematikada bu funksiyalarning argumenti x ni son deyilib, u x radianga teng deb qaraladi:

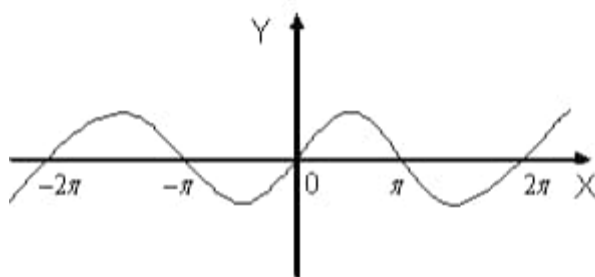
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$$

1) $y = \sin x$ funksiyasi.

Bu funksiya $E = (-\infty, +\infty)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari to'plami esa $F(y) = [-1, 1]$ bo'ladi:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$y = \sin x$ toq, $T = 2\pi$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 10-chizmada tasvirlangan.



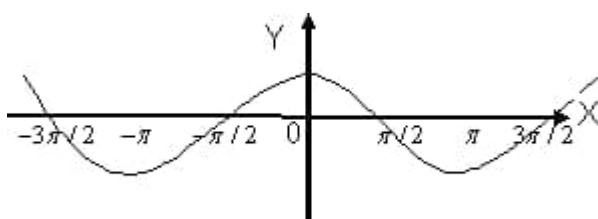
10-chizma

2) $y = \cos x$ funksiyasi.

Bu funksiya $E = (-\infty, +\infty)$ to'plamda aniqlangan, qiymatlari to'plami esa $F(y) = [-1, 1]$ bo'ladi:

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

$y = \cos x$ juft, $T = 2\pi$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 11-chizmada tasvirlangan.



11–chizma

3) $y = \operatorname{tg} x$ funksiyasi.

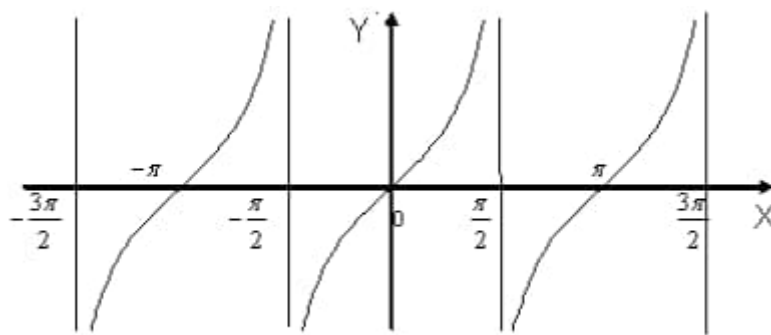
Bu funksiya x ning ushbu

$$x = (2k + 1)\frac{p}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

qiymatlaridan boshqa barcha
qiymatlarida, ya'ni

$$E = (-\infty, +\infty) \setminus \left\{ x : x = (2k + 1)\frac{p}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

to'plamda aniqlangan. $y = \operatorname{tg} x$ toq, $T = p$ davrli funksiya bo'lib, grafigi 12–chizmada tasvirlangan.



12– chizma

4) $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyasi.

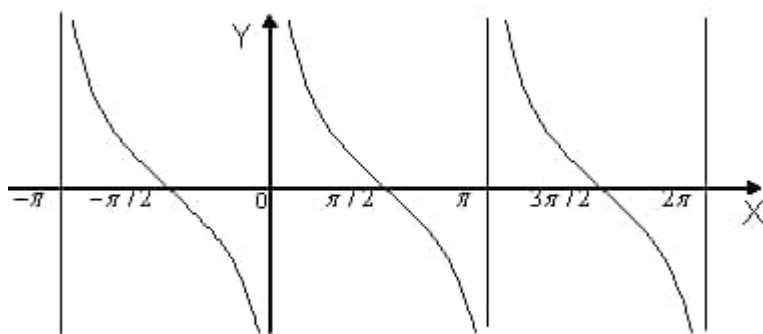
Bu funksiya x ning ushbu

$$x = kp \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

qiymatlaridan boshqa barcha
qiymatlarida, ya'ni

$E = (-\infty, +\infty) \setminus \{x : x = kp, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ to'plamda aniqlangan.

$y = \operatorname{ctg} x$ toq, $T = p$
davrli funksiya bo'lib,
grafigi 13–chizmada
tasvirlangan.



13– chizma

9. Teskari trigonometrik funksiyalar

Ma'lumki, $y = \sin x$ funksiya uchun $x \in \left[-\frac{p}{2}, \frac{p}{2} \right] \subset X$ bo'lsa, $y \in [-1, 1] \subset F$

bo'lib, X va F to'plamlar o'zaro bir qiymatli moslikda bo'ladi. $y = \sin x$

funksiya nisbatan teskari bo'lgan funksiya $y = \arcsin x$ kabi yoziladi. Bu funksiya

$[-1, 1]$ da aniqlangan bo'lib, o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyalarga nisbatan teskari bo'lgan funksiyalar mos ravishda $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arccctg} x$ kabi belgilanadi.

Odatda bu funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deyiladi.

Endi teskari trigonometrik funksiyalarning xossalari keltiramiz.

$y = \arcsin x$ funksiyaning xossalari:

aniqlanish sohasi $[-1, 1]$,

o'zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

toq funksiya $\arcsin(-x) = -\arcsin x$,

monoton o'suvchi.

$y = \arccos x$ funksiyaning xossalari:

aniqlanish sohasi $[0, \pi]$,

o'zgarish sohasi $[0, \pi]$,

quyidagi munosabat o'rinli $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$,

monoton kamayuvchi.

$y = \operatorname{arctg} x$ funksiyaning xossalari:

aniqlanish sohasi $(-\infty, +\infty)$,

o'zgarish sohasi $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

toq funksiya $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$,

monoton o'suvchi.

$y = \operatorname{arccctg} x$ funksiyaning xossalari:

aniqlanish sohasi $(-\infty, +\infty)$,

o'zgarish sohasi $[0, p]$,

quyidagi munosabat o'rinli $\arccos(-x) = p - \arccos x$,

monoton kamayuvchi.

Ta'rif va atamalar

Vektor- yo'nalishga ega kesma.

Kolleniar vektorlar- bir to'g'ri chiziqqa parallel vektorlar.

Dekart koordinatalar sistemasi – to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi

Affin koordinatalar sistemasi- ixtiyoriy burchakli koordinatalar sistemasi

AMALIY MASHG'ULOTLAR

Amaliy mashg'ulot 9.1. Funksiya va uning berilish usullari. Asosiy elementar funksiyalar va ularning xossalari.

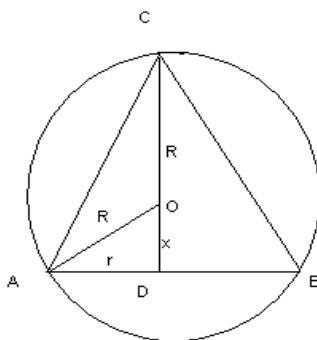
Ishdan maqsad: Ma'ruza materiallari bo'yicha talabalar bilim, malaka va ko'nikmalarini shakllantirish, chuqurlashtirish va kengaytirishdan iboratdir. Bunda, mavzuda ko'rilgan barcha tushuncha, formula va teoremlarga doir misol va masalalarni yechishda, yechimlarni tahlil qilishda olgan nazariy bilimlarini qo'llay olishlari nazarda tutiladi.

Masalaning qo'yilishi: Funksiya ta'rifi, funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari (to'plamlari), funksiya grafigi, chegaralangan va monoton funksiyalar, juft(toq) va davriy funksiyalar, murakkab va teskari funksiyalar, asosiy elementar funksiyalar va ularning grafiklariga doir misol va masalalar yechish

Ishni bajarish uchun namuna

1-misol. Radiusi R ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning hajmi uning o'q kesimining uchidagi burchak funksiyasi ko'rinishida ifodalansin.

Yechilishi. R radiusli shar olib, unga ichki konus chizamiz. Konusning o'q kesimini olamiz (1-chizma).



1-chizma.

formula o‘rinli. Masalani yechish uchun r va H larni R va a lar yordamida ifodalashimiz kerak.

$$\text{ЮПАОС} = p - \frac{3a}{2} + \frac{a}{2} = p - a. \quad \text{ЮПАОД} = a.$$

38

murakkab funksiyalar topilsin.

Yechilishi:

$$f[f(x)] = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4,$$

$$j[j(x)] = 2^{j(x)} = 2^{2x}$$

$$f[j(x)] = [j(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$$

$$j[f(x)] = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$$

bo'ladi.

4-misol. Ushbu $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechilishi:

$$D(f) = R \setminus \{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = R \setminus \{2; 3\} = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$$

5-misol. Agar $f(x) = \frac{1}{1-x}$ bo'lsa,

$$1) j(x) = f(f(x)),$$

$$2) j(x) = f(f(f(x)))$$

funksiyalarning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechilishi:

$$1) j(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = x - \frac{1}{x} \text{ bo'lib, uning aniqlanish}$$

sohasi

$$D(j) = R \setminus \{0; 1\} = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

bo'ladi.

$$2) j(x) = f(f(f(x))) = \frac{1}{1-f(f(x))} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}} = x \text{ bo'lib, bu funksiyaning}$$

ham aniqlanish sohasi $D(j) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ bo'ladi.

6-misol. Agar $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ bo'lsa, $f(x)$ topilsin.

Yechilishi: Berilgan munosabatda $\frac{x}{x+1} = t$ deb belgilaymiz. Unda

$$\frac{x}{x+1} = t \text{ yoki } x = tx + t \text{ yoki } x = \frac{t}{1-t} \text{ bo'lib } f(t) = \frac{t^2}{1-t^2}, \text{ yani } f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$$

bo'ladi.

7-misol. Ushbu funksiyalar aynan tengmi?

1) $f(x) = \lg x^2$ bilan $j(x) = 2\lg|x|$,

2) $f(x) = \lg x^2$ bilan $j(x) = 2\lg x$,

3) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2}$ bilan $j(x) = 2$.

Yechilishi:

1) $f(x)$ va $j(x)$ funksiyalarning aniqlanish sohasi bir xil:

$D(f) = D(j) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bo'lib, " $x \in D(f)$ da $f(x) = \lg x^2 = 2\lg|x| = j(x)$ bo'ladi.

2) $j(x) = 2\lg x$ funksiyaning aniqlanish sohasi esa $D(j) = (0; +\infty)$ bo'ladi. Demak, $D(f) \neq D(j)$. $f(x)$ va $j(x)$ funksiyalar aynan teng emas.

3) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

bo'lib, $j(x) = 2$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(j) = (-\infty; +\infty)$ bo'ladi. Bu to'plamlar bir-biriga teng emas. Binobarin, $f(x)$ va $j(x)$ funksiyalar aynan teng emas.

8-misol. Ushbu $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ va qiymatlari to'plami $E(f)$ lar topilsin.

Yechilishi:

Ravshanki, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ buladi. $E(f)$ ni

topish uchun $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{\sin x}$ deb olib, $-1 \leq \sin x \leq 1$ foydalanamiz.

Demak, $\frac{1}{\sin x} \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ $\cap E(f) = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$

9-misol. Ushbu a) $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$, b) $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ funksiyalar juft yoki toqlikka tekshirilsin.

a) $f(-x) = \frac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^{-x} + a^x}{2} = f(x)$. Demak, $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ funksiya juft.

b) $f(-x) = \lg \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \lg \frac{1-x}{1+x} = \lg \frac{1+x}{1-x}^{-1} = -\lg \frac{1+x}{1-x}$

Demak, $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ funksiya toq.

10-misol. Simmetrik to'plamda aniqlangan har qanday funksiya juft va toq funksiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi isbotlansin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = j(x) + y(x)$$

deb olsak, $j(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ funksiya juft, $y(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

funksiyaning esa toq bo'lishini ko'rish qiyin emas.

11-misol. Ushbu, $f(x) = A \sin(ax + b)$ funksiyaning davri topilsin, bunda A, a, b - o'zgarmas sonlar.

Aytaylik, $f(x)$ funksiyaning davri T bo'lsin ($T \neq 0$). Unda $f(x+T) = f(x)$, ya'ni $A \sin[a(x+T) + b] = A \sin(ax + b)$ bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:

$$\sin \frac{aT}{2} \cos \frac{a}{2} x + b + \frac{aT}{2} = 0$$

bu tenglikdan $\sin \frac{aT}{2} = 0$ bo'lishi kelib chikadi. Demak, $\frac{aT}{2} = pn$, yani $T = \frac{2pn}{a}$

bo'ladi, bunda $n \in \mathbb{Z}$. Berilgan funksiyaning eng kichik musbat davri $T_0 = \frac{2p}{a}$ bo'ladi.

12-misol. Ushbu $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ funksiya monotonlikka tekshirilsin.

Ravshanki, bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty; +\infty)$ bo'ladi. " $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Unda

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2^2} - \frac{x_1}{1+x_1^2} = \frac{(x_2 - x_1)(1 - x_1 x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo'ladi. Bu ayirmaning ishorasi $1 - x_1 x_2$ ning ishorasiga bog'liq bo'ladi.

Agar $x_1, x_2 \in (-1; 1)$ bo'lsa, $1 - x_1 x_2 > 0$, $x_1, x_2 \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ bo'lsa $1 - x_1 x_2 < 0$ bo'ladi. Binobarin, " $x_1, x_2 \in (-1; 1)$ da

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

bo'lib, berilgan funksiya $(-1; 1)$ oralig'ida o'suvchi $\uparrow$ buladi.

" $x_1, x_2 \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ da $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ bo'lib, berilgan funksiya $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ to'plamda kamayuvchi $\downarrow$ bo'ladi.

13-misol. Ushbu

$$y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1)$$

funksiyaga teskari funksiya topilsin. Ravshanki,

$$y = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow y + yx = 1 - x \Leftrightarrow (1+y)x = 1-y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y} \quad (y \neq -1).$$

Demak, berilgan funksiyalarga teskari funksiya $y = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1)$ bo'ladi.

Funksiyalarning grafiklarini yasash

1⁰. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya X MR to'plamda berilgan bo'lsin. $x_0 \in X$ da $f(x_0) = y_0$ deylik. Ravshanki, (x_0, y_0) juftlik tekislikda nuqtani tasvirlaydi.

Tekislikning nuqtalaridan iborat ushbu $\{(x, y) | x \in X, y = f(x)\}$ to'plam $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi.

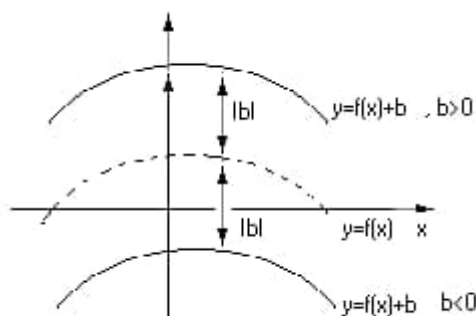
Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shu sababli juft va toq funksiyalarning grafigini faqat argumentning musbat qiymatlari uchun bilish yetarli.

Davriy funksiya uchun esa uning grafigini bir davr oraliqida bilish kifoya.

2⁰. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya grafigining tekislikdagi tasviri ma'lum

bo'lsin. Unga ko'ra quyidagi $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = -f(-x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$ (bunda a, b –uzgarmas sonlar) funksiyalarning grafiklarini yasash usullarini keltiramiz: $y = f(x) + b$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$

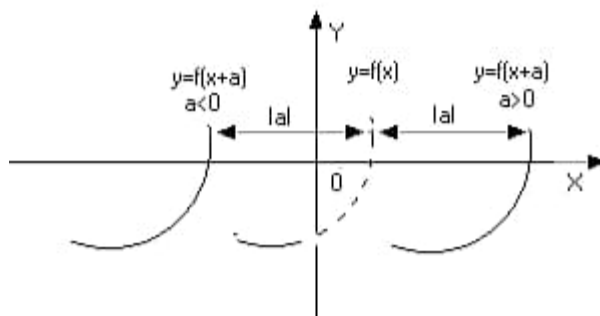
funksiyaning grafigini ordinatalar o'qi bo'yicha $|b|$ masofaga parallel ko'chirish bilan yasaladi. Bunda grafik $b > 0$ bo'lganda yuqoriga, $b < 0$ bo'lganda parallel ko'chiriladi.



2-chizma.

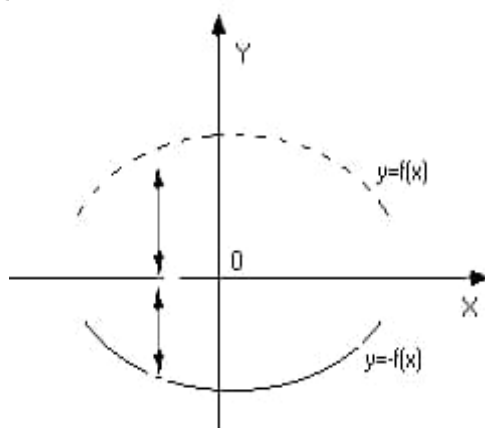
$y = f(x + a)$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$

funksiyaning grafigini abssissalar o'qi bo'yicha $|a|$ masofaga parallel ko'chirish bilan yasaladi. Bunda grafik $a > 0$ bo'lganda chapga, $a < 0$ bo'lganda o'ngga parallel ko'chiriladi.



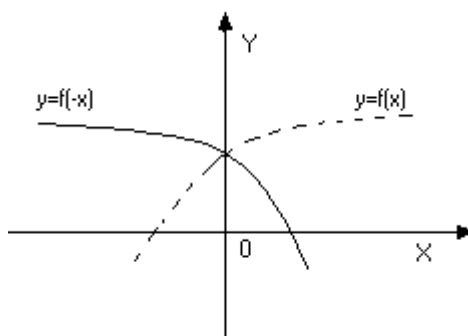
3-chizma.

$y = -f(x)$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiyaning grafigini abssissalar o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish bilan yasaladi.



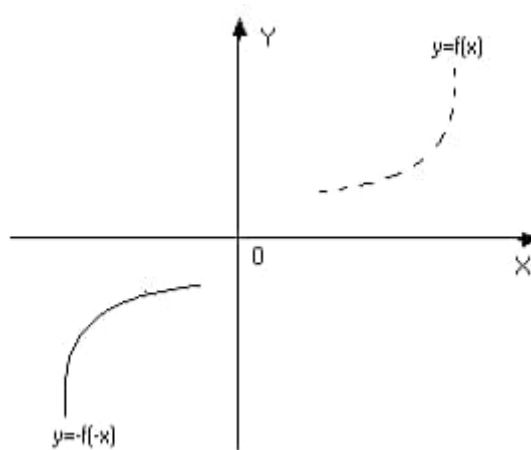
4-chizma.

$y = f(-x)$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigini ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish bilan yasaladi.



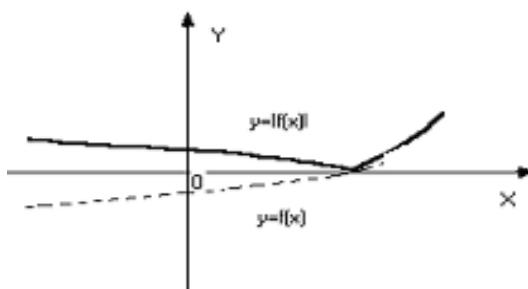
5-chizma.

$y = -f(-x)$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigini koordinata boshiga nisbatan simmetrik ko'chirish bilan yasaladi.



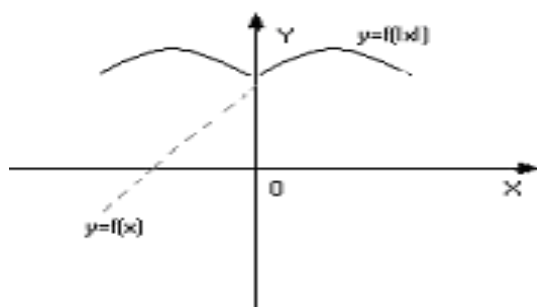
6-chizma.

$y = |f(x)|$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigining OX o'qidan yuqorida joylashgan qismini qoldirish, OX o'qidan pastda joylashgan qismini esa shu o'qqa simmetrik ravishda yuqoriga ko'tarish bilan yasaladi.



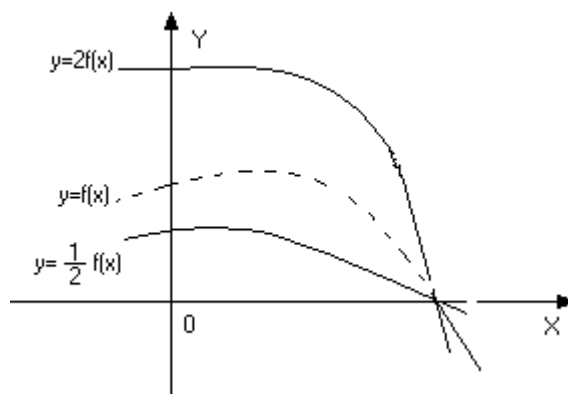
7-chizma.

$y = f(|x|)$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigining OY o'qidan o'ng tomonda joylashgan qismini qoldirish, OY o'qidan chap tomonda joylashgan qismini tashlab, uning o'rniga OY ning o'ng tomondagi qismini shu o'qqa simmetrik ravishda chapga o'tkazish bilan yasaladi.



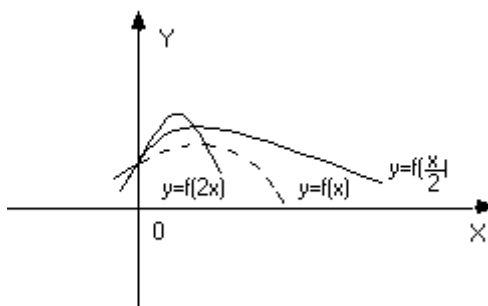
8-chizma.

$y = af(x)$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiyaning grafigining har bir ordinatasini a ga ko'paytirish bilan yasaladi.



9-chizma.

$y = f(ax)$ funksiyaning grafigi. Bu funksiyaning grafigi $y = f(x)$ funksiya grafigining har bir absissani a ga bo'lish bilan yasaladi.



10-chizma.

3⁰. Ko'pincha $y = f(x)$ va $y = j(x)$ funksiylarning grafiklarini bilgan holda bu funksiylarning mos ordinatalarining (ikkalasining ordinatalari bitta x nuqtada hisoblanadi) qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish bilan

$f(x) + j(x)$, $f(x) - j(x)$, $f(x) \cdot j(x)$, $\frac{f(x)}{j(x)}$ funksiylarning grafigini yasash

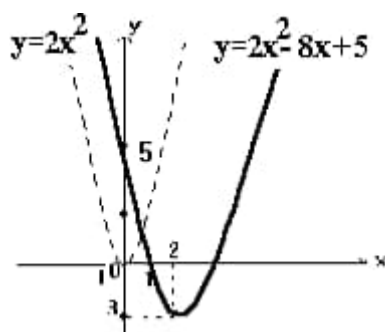
mumkin bo'ladi.

14-misol. Ushbu $y = 2x^2 - 8x + 5$ funksiya grafigi yasalsin.

Kvadrat uchhadning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$y = 2x^2 - 8x + 5 = 2\left(x^2 - 4x + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x^2 - 4x + 4 - 3\right) = 2(x - 2)^2 - 3. \text{ Demak, berilgan}$$

funksiylarning grafigini 1) va 2)-qoidalarga asosan $y = 2x^2$ parabolaning grafigini 2 birlik o'ngga surish va 3 birlik pastga siljitish yordamida hosil qilinadi (11-chizma).



11-chizma

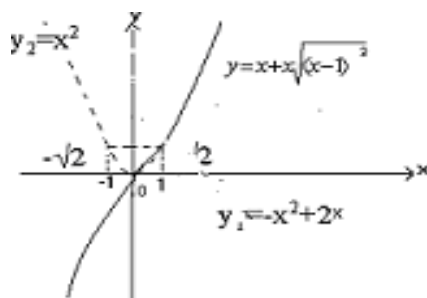
Izoh. Shu yo'l bilan ixtiyoriy kvadrat uchhadning grafigini yasash mumkin.

15-misol. Ushbu $y = x + x\sqrt{(x-1)^2}$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Agar $x > 1$ bo'lsa $y = x + x\sqrt{(x-1)^2} = x^2$, $x < 1$ bo'lsa

$y = x + x(1-x) = -x^2 + 2x$ bo'ladi.

Demak, berilgan funksiyaning grafigi $(-\infty; 1)$ oraliqda $y_1 = -x^2 + 2x$ hamda $[1; +\infty)$ da $y = x^2$ parabolalardan tashkil topgan chizishni ifodalaydi (12-chizma).



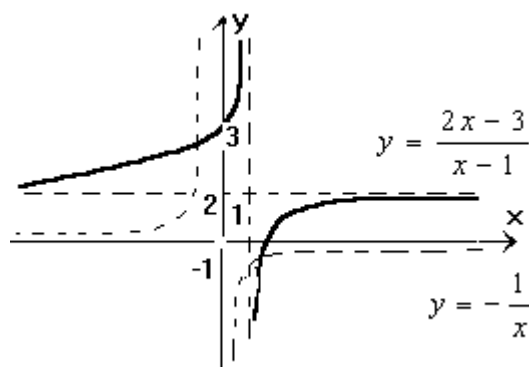
12-chizma.

16-misol. Ushbu $y = \frac{2x-3}{x-1}$ funksiya grafigi yasalsin.

Funksiyaning ko'rinishini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$y = \frac{2x-3}{x-1} = \frac{2(x-1)-1}{x-1} = 2 - \frac{1}{x-1}.$$

Bu funksiyaning grafigini yasash uchun $y = -\frac{1}{x}$ funksiyaning grafigini chizib, uni 1 birlik o'ngga surish va 2 birlik yuqoriga ko'tarish kerak (13-chizma).



13-chizma

Izoh: Shu yo'l bilan ixtiyoriy kasr-chiziqli $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ funksiyaning grafigini yasash mumkin.

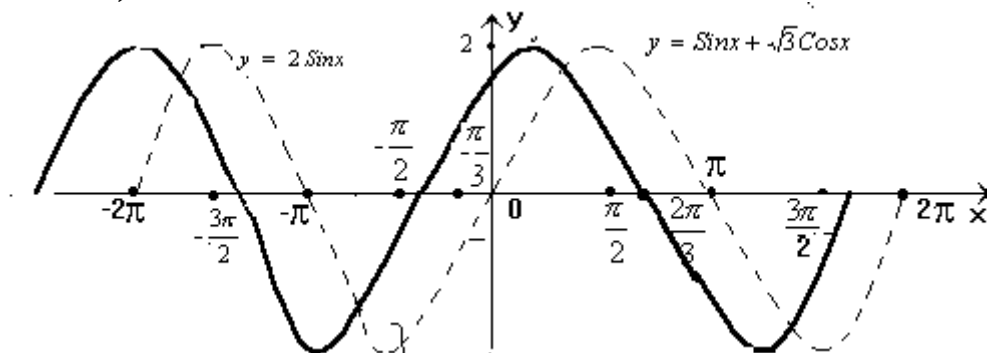
17-misol. Ushbu $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Quyidagi amallarni bajaramiz:

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

Shunday qilib, berilgan funksiyaning grafigini chizish uchun $y = 2 \sin x$

funksiyaning grafigini chizib, uni $\frac{\pi}{6}$ birlik chapga siljitish yetarli ekan (14-chizma)

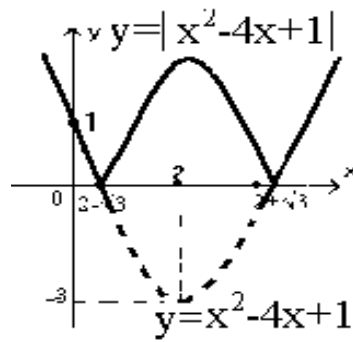


14-chizma

18-misol. Ushbu $y = |x^2 - 4x + 1|$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Bu funksiyaning grafigini yasash uchun avval

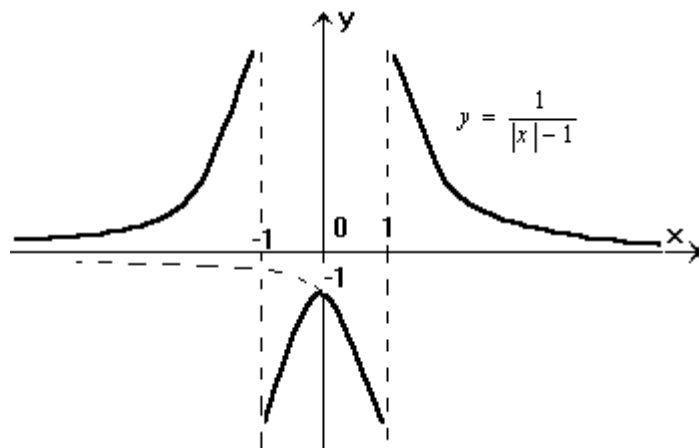
$y_1 = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ funksiyaning grafigini yasab, sung $y = |y_1|$ funksiyaning grafigini yasashda 6-xossadan foydalanamiz (15-chizma).



15-chizma.

19-misol. Ushbu $y = \frac{1}{|x| - 1}$ funksiyaning grafigi yasalsin.

Bu funksiya juft bo'lganligi sababli uning grafigini OY o'qidan o'ng tomonda joylashgan qismini chizish yetarli bo'ladi (chap tomonga OY o'qiga nisbatan simmetrik ko'chiriladi). Demak, $x > 0$ da $y = \frac{1}{x - 1}$ bo'lib, uning grafigini o'ng yarim tekislikda chizamiz va bu grafik yordamida berilgan funksiyaning grafigini hosil qilamiz. (16-chizma).



16-chizma.

20-misol. Ushbu

$$y = \arcsin(\sin x)$$

funksiyaning grafigi yasalsin.

Bu funksiya 2π davrli funksiya bo'ladi, chunki

$$\arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin x)$$

Arksinus ta'rifiga binoan, birinchidan

$$-\frac{p}{2} \leq y \leq \frac{p}{2}$$

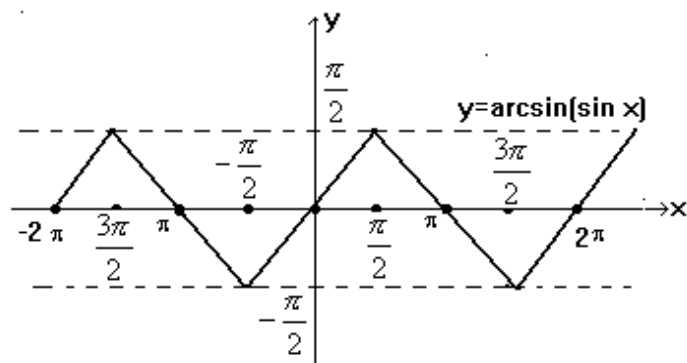
ikkinchidan esa $\sin y = \sin x$ bo'ladi.

Demak,

$$-\frac{p}{2} \leq x \leq \frac{p}{2} \text{ da } y = x,$$

$$\frac{p}{2} \leq x \leq \frac{3p}{2} \text{ da } y = p - x$$

bo'ladi (17-chizma).



17-chizma.

Amaliy topshiriqlar

1. Radiusi R ga teng bo'lgan doiraga ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi uning asosining funksiyasi ko'rinishida ifodalansin.
2. Radiusi R ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning hajmi konus balandligining funksiyasi ko'rinishida ifodalansin.
3. Radiusi R ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning hajmi konus asosi radiusining funksiyasi ko'rinishida ifodalansin.

Modul belgisini ishlatmay quyidagi funksiya analitik ko'rinishda yozilsin.

$$4. \text{ a) } y = |x^2 - 5x + 6| \quad \text{ b) } y = |\lg x|.$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{1}{2}(x + |x|) \quad \text{ b) } y = \frac{1}{2}(x - |x|)$$

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

$$6. \text{ a) } f(x) = \frac{3x-1}{x^2-3x+2}, \quad \text{ b) } f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$$

$$7. \text{ a) } f(x) = \lg(3\sin^2 x - 4), \quad \text{ b) } f(x) = \log_2 |4 - x^2|.$$

8. Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1; 0]$ kesma bo'lsa, quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi topilsin.

$$\text{a) } f(-x^2), \quad \text{ b) } f(\cos x).$$

9. Quyidagi funksiyalarning qiymatlar to'plami topilsin.

$$\text{a) } f(x) = x + \frac{1}{x} (x \in (0; +\infty)), \quad \text{b) } f(x) = 2^{x^2 + 4x - 5}$$

1. Quyidagi funksiyalar juft yoki toqlikka tekshirilsin.

$$\text{a) } f(x) = x^2 - \cos x$$

$$\text{b) } f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$\text{v) } f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^2 x$$

2. Quyidagi funksiyalar davriylikka tekshirilsin, davriy bo'lsa, eng kichik musbat davri topilsin.

$$\text{2. a) } f(x) = x^2 + x - 1, \quad \text{b) } f(x) = 3.$$

$$\text{3. a) } f(x) = \sqrt{\sin 3x} \quad \text{b) } f(x) = \sin^2 x$$

$$\text{4. a) } f(x) = \cos x^2, \quad \text{b) } f(x) = \{x\} = x - [x]$$

$$\text{5. a) } f(x) = \sin 2\pi x, \quad \text{b) } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

6. Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T ($T \neq 0$) bo'lsa, $y = f(ax + b)$ ($a \neq 0$) davriy funksiya bo'lib, uning davri $\frac{T}{a}$ bo'lishi isbotlansin.

7. Ushbu $f(x) = x - \sin x$ funksiya $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda kamayuvchi bo'lishi isbotlansin.

$$\text{8. a) } f(x) = \sin 4x + 5\cos 6x, \quad \text{b) } f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

$$\text{9. a) } f(x) = \cos \pi x; \quad \text{b) } f(x) = \left| \sin(\sqrt{2}x + 1) \right|.$$

10. Davriy bo'lmagan shunday $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga shunday misollar keltirilsinki,

$$1) f(x) + g(x),$$

$$2) f(x) \cdot g(x)$$

funksiyalar davriy bo'lsin.

11. Shunday davriy $f(x)$ va davriy bo'lmagan $g(x)$ funksiyalarga misollar keltirilsinki, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ funksiyalar davriy bo'lsin.

12. Ushbu $f(x) = (x^2 - 1)^2$ funksiyalarning $(-1; 0)$ intervalda ʻsuvchi, $(0; 1)$ intervalda esa kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

Quyidagi funksiyalar monotonlikka tekshirilsin.

$$13. \text{ a) } f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

$$14. \text{ a) } f(x) = \frac{x-1}{|x|+1}; \quad \text{b) } f(x) = 1 - \frac{|x-1|}{1+|x|}.$$

$$15. \text{ a) } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x, \quad x \in [0; \pi],$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}, \quad x \in [0; 2\pi].$$

$$16. \quad \text{a) } f(x) = [x], \quad \text{b) } f(x) = |x| - x$$

$$17. \text{ a) } f(x) = x^4 + 6x^2 + 1, \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}.$$

18. Quyidagi funksiyalarning ʻozaro teskari funksiyalar ekanligi isbotlansin:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$\text{b) } f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = (1-x)^3$$

$$\text{v) } f(x) = \sqrt[3]{x^5}, \quad g(x) = \sqrt[5]{x^3}$$

Quyidagi funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalar topilsin.

$$20. \text{ a) } f(x) = 2x - x^2, \quad x \geq 1; \quad \text{b) } f(x) = 2x - x^2, \quad x \leq 1:$$

$$\text{v) } f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad (|x| \leq 1)$$

$$21. \text{ a) } y = \lg(x-1), \quad \text{b) } y = \sqrt[3]{1-x}.$$

$$22. \quad y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad x < -1.$$

$$23. \quad y = x|x| + 2x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } y = \sin x \quad x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right].$$

Quyidagi funksiyalarning grafiklari yasalsin.

$$1. \quad y = 3x^2 - 6x - 17 \quad 12. \quad y = \max \left\{ x^3; \frac{1}{x} \right\}$$

$$2. \quad y = -2x^2 - 4x + 4 \quad 13. \quad y = \frac{2x-3}{3-x}$$

$$3. \quad y = \frac{2x+5}{x-2} \quad 14. \quad y = 2^{1-x^2}$$

4. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
5. $y = \sqrt{\lg \sin x}$
6. $y = \sin^2 x$
7. $y = 0,5(|x+1| + |x-1|)$
8. $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$
9. $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$
10. $y = \cos(\lg x)$
11. $y = \operatorname{Sign}(\sin x)$
15. $y = 2^{\arctg x}$
16. $y = \log_2 \log_2 x$
17. $y = \frac{\cos 2x}{\sin x}$
18. $y = \arcsin(3x-1)$
19. $y = x^2 + \frac{1}{x}$
20. $y = \frac{x^2}{|x| - 1}$
21. $y = x \cdot \operatorname{Sign}(\sin x)$
22. $y = \min\{\log_2 x, \log_x 2\}$

Tarqatma materiallar

1. Radiusi R ga teng birlangan doiraga ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi uning asosining funksiyasi ko'rinishida ifodalansin.
2. Radiusi R ga teng birlangan sharga ichki chizilgan konusning hajmi konus balandligining funksiyasi ko'rinishida ifodalansin.
3. Radiusi R ga teng bo'lgan sharga ichki chizilgan konusning hajmi konus asosi radiusining funksiyasi ko'rinishida ifodalansin.

Modul belgisini ishlatmay quyidagi funksiya analitik ko'rinishda yozilsin.

4. a) $y = |x^2 - 5x + 6|$, b) $y = |\lg x|$.
5. a) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$, b) $y = \frac{1}{2}(x - |x|)$.

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

6. a) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-3x+2}$, b) $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$
7. a) $f(x) = \lg(3\sin^2 x - 4)$, b) $f(x) = \log_2 |4 - x^2|$.

8. Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1; 0]$ kesma bo'lsa, quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi topilsin.

- a) $f(-x^2)$, b) $f(\cos x)$.

9. Quyidagi funksiyalarning qiymatlar to'plami topilsin.

- a) $f(x) = x + \frac{1}{x} (x \in (0; +\infty))$, b) $f(x) = 2^{x^2+4x-5}$

1. Quyidagi funksiyalar juft yoki toqlikka tekshirilsin.

- a) $f(x) = x^2 - \cos x$
- b) $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$
- v) $f(x) = (x-1)^2 \cdot \sin^2 x$

2. Quyidagi funksiyalar davriylikka tekshirilsin, davriy bo'lsa, eng kichik musbat davri topilsin.

2. a) $f(x) = x^2 + x - 1$, b) $f(x) = 3$.

3. a) $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$ b) $f(x) = \sin^2 x$

4. a) $f(x) = \cos x^2$, b) $f(x) = \{x\} = x - [x]$

5. a) $f(x) = \sin 2\pi x$, b) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6. Agar $f(x)$ davriy funksiya bo'lib, uning davri T ($T \neq 0$) bo'lsa, $y = f(ax + b)$ ($a \neq 0$) davriy funksiya bo'lib, uning davri $\frac{T}{a}$ bo'lishi isbotlansin.

7. Ushbu $f(x) = x - \sin x$ funksiya $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda kamayuvchi bo'lishi isbotlansin.

8. a) $f(x) = \sin 4x + 5\cos 6x$, b) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

9. a) $f(x) = \cos \pi x$; b) $f(x) = \left| \sin(\sqrt{2}x + 1) \right|$.

10. Davriy bo'lmagan shunday $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarga shunday misollar keltirilsinki,

1) $f(x) + g(x)$,

2) $f(x) \cdot g(x)$

funksiyalar davriy bo'lsin.

11. Shunday davriy $f(x)$ va davriy bo'lmagan $g(x)$ funksiyalarga misollar keltirilsinki, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ funksiyalar davriy bo'lsin.

12. Ushbu $f(x) = (x^2 - 1)^2$ funksiyalarning $(-1; 0)$ intervalda o'suvchi, $(0; 1)$ intervalda esa kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

Quyidagi funksiyalar monotonlikka tekshirilsin.

13. a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.

14. a) $f(x) = \frac{x-1}{|x|+1}$; b) $f(x) = 1 - \frac{|x-1|}{1+|x|}$.

15. a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $x \in [0; \pi]$,

$$b) f(x) = \frac{2 - \sin x}{2 + \sin x}, x \in [0; 2\pi].$$

$$16. a) f(x) = [x], \quad b) f(x) = |x| - x$$

$$17. a) f(x) = x^4 + 6x^2 + 1, \quad b) f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}.$$

18. Quyidagi funksiyalarning o'zaro teskari funksiyalar ekanligi isbotlansin:

$$a) f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$b) f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = (1-x)^3$$

$$v) f(x) = \sqrt[3]{x^5}, \quad g(x) = \sqrt[5]{x^3}$$

Quyidagi funksiyalarga teskari bo'lgan funksiyalar topilsin.

$$20. a) f(x) = 2x - x^2, \quad x \geq 1; \quad b) f(x) = 2x - x^2, \quad x \leq 1:$$

$$v) f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad (|x| \leq 1)$$

$$21. a) y = \lg(x-1), \quad b) y = \sqrt[3]{1-x}.$$

$$22. y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad x < -1.$$

$$23. y = x|x| + 2x, \quad x \in \mathbb{R}; \quad b) y = \sin x \quad x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \right].$$

Quyidagi funksiyalarning grafiklari yasalsin.

$$1. y = 3x^2 - 6x - 17 \quad 12. y = \max \left\{ x^3; \frac{1}{x} \right\}$$

$$2. y = -2x^2 - 4x + 4 \quad 13. y = \frac{2x-3}{3-x}$$

$$3. y = \frac{2x+5}{x-2} \quad 14. y = 2^{1-x^2}$$

$$5. y = \sqrt{\lg \sin x}$$

$$16. y = \log_2 \log_2 x$$

$$6. y = \sin^2 x$$

$$17. y = \frac{\cos 2x}{\sin x}$$

$$18. y = \arcsin(3x-1)$$

$$8. y = \arctg(\operatorname{tg} x) \quad 19. y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$9. \quad y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$$

$$20. \quad y = \frac{x^2}{|x| - 1}$$

$$21. \quad y = x \cdot \text{Sign}(\sin x)$$

$$11. \quad y = \text{Sign}(\sin x)$$

$$22. \quad y = \min\{\log_2 x, \log_x 2\}$$

Keyslar banki

Quyidagi funksiyalarni asosiy xossalariga ko'ra grafigi yasalsin.

$$1. \quad y = \cos(\lg x)$$

$$2. \quad y = 2^{\arctan x}$$

$$3. \quad y = 0,5(|x+1| + |x-1|)$$

$$4. \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Oshkormas ko'rinishdagi va parametrik tenglamalari bilan berilgan funksilar va ularni grafigini yasash.
2. Funksiya grafigini parallel ko'chirish, siqish va cho'zish orqali yasash.
3. Murakkab va teskari funksiyalar va ularni grafigini yasash.

Glossariy

Funksiya - biror E to'plamdan olingan har bir x songa biror f qoidaga (yoki qonunga) ko'ra boshqa F to'plamning bitta tayin y soni mos qo'yishlik.

Bunda: E to'plam funksiyaning aniqlanish (berilish) sohasi, $\{y = f(x) : x \in E\} \subset F$ to'plam funksiyaning o'zgarish sohasi, x - erkli o'zgaruvchi, funksiya argumenti, y - erksiz o'zgaruvchi, x ning funksiyasi deyiladi va $y = f(x)$ kabi yoziladi va "igrek teng ef iks" deb o'qiladi.

Analitik usul - bu usulda x o'zgaruvchining har bir qiymatiga ko'ra unga mos keladigan y ning qiymati x ustida analitik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va boshqa amallar) bajarilishi natijasida topiladi, ya'ni x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar bilan ifodalanadi.

Jadval usuli - bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval ko'rinishida bo'ladi.

Grafik usuli - bu usulda x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishni egri chiziq (grafik) yordamida ko'rsatiladi.

$y = f(x)$ **funksiya grafigi** - (x, u) juftliklardan tuzilgan ushbu

$\Gamma = \{(x, y) : x \in E, y = f(x)\}$ to'plam (tekislikdagi nuqtalarining geometrik o'rni)

T davrli davriy funksiya - Agar shunday o'zgarmas T son ($T \neq 0$) topilsaki, ixtiyoriy $x \in E$ uchun

$$\begin{aligned} 1) & x - T \in E, \quad x + T \in E, \\ 2) & f(x) = f(x + T) \end{aligned}$$

shartlar bajarilsa,

$f(x)$ davriy funksiya, son esa uning davri deyiladi.

Juft funksiya- ixtiyoriy $x \in E$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilgan $f(x)$ funksiya.

Toq funksiya - ixtiyoriy $x \in E$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilgan $f(x)$ funksiya.

Ye to'plamda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) funksiya - funksiya argumenti x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) tengsizlik o'rinli bo'lgan $f(x)$ funksiya.

Ye to'plamda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) funksiya - funksiya argumenti x ning ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik o'rinli bo'lgan $f(x)$ funksiya.

Monoton funksiyalar - o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar

Ye to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan funksiyalar - shunday o'zgarmas M son (m son) topilsaki, $\forall x \in E$ uchun $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) tengsizlik bajarilgan $f(x)$ funksiya.

Chegaralangan funksiyalar- $f(x)$ funksiya E to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan.

Keyslar banki

Quyidagi funksiya xossalari asosida grafigini yasang.

$$\begin{aligned} 1. & y = x + x\sqrt{(x-1)^2} & 2. & y = \frac{2x-3}{x-1} & 3. & y = \sin x + \sqrt{3}\cos x \\ 4. & y = \arcsin(\sin x) \end{aligned}$$

Nazorat savollari

1. Funksiya ta'rifini bering va misolda tushuntiring.
2. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalari (to'plamlari) ta'rifini bering va misolda tushuntiring.
3. Funksiya ta'rifidagi mos qo'yuvchi qoida necha usulda bo'ladi va ularni har

- birini tushuntiring?
4. Funksiya grafigi ta'rifini bering va misolda tushuntiring.
 5. Chegaralangan va monoton funksiyalar ta'rifini bering va misolda tushuntiring.
 6. Juft , toq va davriy funksiyalar ta'rifini bering va misolda tushuntiring.
 7. Murakkab va teskari funksiyalar ta'rifini bering va misolda tushuntiring.
 8. Asosiy elementar funksiyalar va ularning ta'rifini bering.
 9. Asosiy elementar funksiyalarning grafiklarini tasvirlang.
 10. Asosiy elementar funksiyalarning xossalari sanab bering.

V. GLOSSARIY

Termin	O'zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Assesment	angl. assessment «baholash», bilimni, ko'nikma va malakalarni bir necha xil yondashuvlar orqali baholash, tahlil qilish, sinab ko'rishdan pedagogik texnologiyasi.	the technology of teaching.by documenting of knowledge, skills, attitudes, with using of different ways of assesment, analysis and testing.
Guruhli ta'lim Group traning	bir o'qituvchi bir necha o'qituvchini o'qitadigan ta'lim shakli. Guruhlar o'quvchilar soniga qarab: kichik (3-6 o'quvchi), o'rta (7-15 o'quvchi), katta (15 dan ortiq o'quvchi, guruhlar) ga ajratiladi. Shuningdek, har bir guruhdagi ta'lim	A form of teaching in which a person teaches a few students. Depending on the number of students the groups can be small (3-6 students), medium (7-15 students) and large (more than 15 students, groups). In addition the each group can be devided by age, training,

	oluvchilarning yoshiga, ta'lim yo'nalishiga va shu kabilarga qarab ham guruhlariga ajratiladi. Bu shaklni qo'llash jarayonida yakka ta'lim shakllari ham amalga oshiriladi. Biologiyadan dars o'tishda eng samarali guruxlar 3-5 kishi	direction, and etc. In this form of training the individual education is also used/ For teaching biology the groups from 3-5 students is the most effective
Edvayzer	- yakka holda diplom ishi, kurs ishini ishlab chiqish, ilmiy-tadqiqot olib borish, individual dasturlarni ishlab chiqish, talabalarning individual o'sish va rivojlanishiga yordam beruvchi maslahatchidir	Person consulting individual diploma work, course work, scientific research, thesis, development of individual programs and individual academic growth and development of students
Intellektual mulk Intellectual proper	ijodiy aqliy faoliyat mahsuli. Ixtirochilik va mualliflik manbai huquqi majmuiga kiruvchi, fan, adabiyot, san'at va ishlab chiqarish sohasida ijodiy faoliyatning boshqa turlari, adabiy, badiiy, ilmiy asarlar, ijrochi aktyorlik san'ati, jumladan, ovoz yozish, radio va	creations of the intellect for which a monopoly is assigned to designated owners by law. Some common types of intellectual property rights (IPR) are trademarks, copyright, patents, industrial design rights, and in some jurisdiction <u>trade secrets</u>: all these cover music, literature, and other artistic

	televidenie asarlari kashfiyotlar, ixtirolar, sanoat namunalari, kompyuter uchun dasturlar, ma'lumotlar ombori, tovar belgilari, firma atamalari va boshqa aqliy mulk manbalari kiradi	works; discoveries and inventions; and words, phrases, symbols, and designs.
Interfaol mashg'ulot Interactive classes	o'qituvchi va o'quvchilar o'zaro faol ishtirok etadigan mashg'ulot. Bunda jarayon o'zaro hamkorlikda kechadi	Classes in whicn both the teacher and stidents are active. The studing and teaching process are doen in close cooperation
Malaka oshirish Qualification of skills	mutaxassislar va rahbar xodimlarning kasbiy bilim va ko'nikmalarini yangilash hamda rivojlantirish jarayoni	The process of updating and development of professional knowledge and skills of experts and admivistrators

VI. ADABIYOTLAR RO'YXATI:

ADABIYOTLAR RO'YXATI

I. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoev Sh.M. Yangi O'zbekiston demokratik o'zgarishlar, keng imkoniyatlar va amaliy ishlar mamlakatiga aylanmoqda. – T.: “O'zbekiston”, 2021. – 184 b.
2. Mirziyoev Sh.M. Yangi O'zbekiston strategiyasi. – T.: “O'zbekiston”, 2021. – 458 b.
3. Mirziyoev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O'zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoev Sh.M. Niyati ulug' xalqning ishi ham ulug', hayoti yorug' va kelajagi farovon bo'ladi. 3-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O'zbekiston, 2018.
7. O'zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentyabrda qabul qilingan “Ta'lim to'g'risida”gi O'RQ-637-sonli Qonuni.
8. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida”gi 4947-sonli Farmoni.
9. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 26 sentyabr “Oliy ta'lim muassasalariga kirish uchun nomzodlarni maksadli tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida”gi PQ-3290-sonli Qarori.
10. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktyabr “O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
11. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 29 oktyabr “Ilm-fanni 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.
12. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida”gi PQ-4708-sonli Qarori.
17. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 3 dekabrda “Iqtidorli yoshlarni saralab olish tizimi va akademik litseylar faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida”gi PQ-4910-son Qarori.
18. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2022 yil 11-iyundagi “Akademik litseylar rahbar va pedagog xodimlarining uzduksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to'g'risida” 296-son Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

19. Amonov T.S., Sharofiddinova D.S. Geogebra - matematikadan jonli

chizmalar dasturini dars jaroyonida qo'llash //Obrazovanie nauka i innovatsionnye idei v mire, str. 176-182, 2023

20. T.I. Buxarova, S.A. Grishin, O.V. Nagornov, D.G. Orlovskiy, Ye.X. Sadekova, Ye.B. Sandakov Otraselevaya fiziko-matematicheskaya olimpiada shkolnikov «Rosatom». Matematika. V pomoshch shkolnikam 7–11 klassov: *Uchebno-metodicheskoe posobie* /; pod red. O.V. Nagornova. – M.: NIYaU MIFI, 2018. – 126 s.

21. Sharipov A., Keunimjayev M. Existence and uniqueness of polyhedral with given value of the conditional curvature, International Electronic Journal of Geometry, 2023, Vol. 16, No. 1, pp. 160-170 (**Scopus**).

22. Suprun V.P. Matematika dlya starsheklassnikov: Nestandartnye metody resheniya zadach. M.: Knizhnyy dom «LIBROKOM», 2009. –272 s.

23. Arslanov M.M. Znamenitye matematicheskie problemy. - Kazan: Kazanskiy federalnyy universitet, 2012.

24. Kravsev S.V. i drugie Metody resheniya zadach po algebre: otprostykh do samykh slojnykh. -M.: Ekzamen, 2001 –544 s.

25. Nouh Hassan Mathematics Function. Translated by: Diab Publishing & Distribution, 2019. –461p. www.Diab-publishing.com

IV. Internet saytlar

26. <http://edu.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi

27. <http://lex.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi

28. <http://lib.bimm.uz> – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi

29. <http://ziyonet.uz> – Ta’lim portali Ziyonet

30. <http://natlib.uz> – Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi

31. <https://problems.ru/> - Matematikadan masalalar.