

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG
KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI
OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI**

**“MATEMATIKA FANIDA FUNKSIYANING HOSILASI VA UNING
AMALIY MASALALARDAGI TATBIQLARI”
MODULI BO‘YICHA
O‘QUV – USLUBIY MAJMUA**

Buxoro – 2025

Mazkur o'quv-uslubiy majmua Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024 yil 27 dekabrda 485-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan o'quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchi:	Xudayarov S.S – BuxDU Matematik analiz kafedrasi dotsenti, f.-m.f.f.d.,(PhD)
Taqrizchi:	Dilmurodov E.B – BuxDU Matematik analiz kafedrasi mudiri dotsenti, f.-m.f.f.d.,(PhD)

I. ISHCHI DASTUR

I. IShChI DASTUR

KIRISH

Dastur O'zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentyabrda tasdiqlangan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 3- dekabrdagi "Iqtidorli yoshlarni saralab olish tizimi va akademik litseylar faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4910-son hamda Vazirlar Mahkamasining 2022-yil 1-iyundagi "Akademik litseylar rahbar va pedagog xodimlarining uzduksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to'g'risida"gi 296-son Qarorlarida belgilangan ustuvor yo'nalishlar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo'lib, u zamonaviy talablar asosida malaka oshirish jarayonlarining mazmunini takomillashtirish hamda akademik litseylar pedagog xodimlarining kasbiy kompetentligini muntazam oshirib borishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan tayanch modullari mavzulari orqali akademik litseylarda faoliyat olib borayotgan pedagog xodimlarning matematikaning asosi bo'lib xizmat qiladigan hosila tushunchasi va uning tatbiqlari, elementar funksiyalar va ularning grafiklarini almashtirishlar, geometriyaning asosiy masalalari yechish usullarini o'zlashtirish hisobiga ularning pedagogik mahorat va kasbiy kompetentligini muntazam takomillashtirish bilan birgalikda pedagog xodimlarning ehtiyojlari asosida tanlab olingan tanlov modullari bo'yicha bilim, ko'nikma va malakalarga ega bo'lishlari ta'minlanadi.

Malaka oshirish kursining o'quv dasturi quyidagi tayanch modullar mazmunini o'z ichiga qamrab oladi:

1.1. Matematika fanida funksiyaning hosilasi va uning amaliy masalalardagi tadbiqlari.

1.2. Elementar funksiyalar va ularning grafiklarini zamonaviy matematik dasturiy paketlar yordamida o'rganish.

1.3. Geometriyaning asosiy masalalarini muxandislik masalalar yechishda qo'llash.

1.4. Yakuniy nazorat.

Kursning maqsadi va vazifalari

Akademik litseylar pedagog kadrlarining malakasini oshirish kursining maqsadi pedagog kadrlarning o'quv-tarbiyaviy jarayonlarini yuqori ilmiy-metodik darajada ta'minlashlari uchun zarur bo'ladigan kasbiy bilim, ko'nikma va malakalarini muntazam yangilash, kasbiy kompetentligi va

pedagogik mahoratining uzluksiz rivojlanishini ta'minlashdan iborat.

Kursning vazifalariga quyidagilar kiradi:

- pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko'nikma, malakalarini uzluksiz oshirish va rivojlantirish;
- pedagoglarning zamonaviy talablarga mos holda akademik litseylardagi o'qitish sifati va samaradorligini ta'minlash uchun zarur bo'lgan kasbiy mahorat darajasini oshirish;
- pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy raqamli texnologiyalar va xorijiy tillarning samarali o'zlashtirilishini ta'minlash;
- o'qitishning innovatsion texnologiyalari va ilg'or xorijiy tajribalarni o'zlashtirish hamda ulardan o'quv jarayonida samarali foydalanish ko'nikmalarini shakllantirish;
- o'quv jarayonini ilm-fan va ishlab chiqarish bilan samarali integratsiyasini ta'minlashga qaratilgan faoliyatni tashkil etish.

Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko'nikma va malakalari hamda kompetentligiga qo'yiladigan talablar:

Kurs yakunida tinglovchilar quyidagi yo'nalishlarda bilim, ko'nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo'lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- o'zgaruvchi miqdorlar orttirmalarining nisbati va uning ma'nosini;
- hosila yordamida funktsiyani tekshirish va grafigini yasashni;
- aunksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini *bilishi* kerak.

Tinglovchi:

- funktsiyaning hosilasi va funktsiya grafigiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzish;
- hosila yordamida funktsiyani tekshirish va grafiklarni yasash;
- funktsiya ekstremum nuqtalari va ekstremumlarini toppish *ko'nikma va malakalariga* ega bo'lishi lozim.

Tinglovchi:

- funktsiyaning hosilasi tushunchasining mohiyatini yoritib berish, hosilaning geometrik va fizik ma'nolarini hamda funktsiyalarni hosila yordamidan tekshirish algoritmini o'zlashtirish va undan funktsiyalarning xossalari aniqlashda, shuningdek, amaliy, ekstremumga doir masalalarni yechishda qo'llay olish *kompetensiyalariga* ega bo'lishi lozim.

Modul bo'yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o'quv yuklamasi, soat			
		Hammasi	Auditoriya o'quv yuklamasi		
			jumladan		
			Jami	Nazariy	Amaliy
1.	Funksiyaning hosilasi.	2	2	2	
2.	Hosila yordamida funktsiyani tekshirish va grafiklarni yasash.	2	2	2	
3.	Hosila yordamida funktsiyani tekshirish va grafiklarni yasash	2	2		2
4.	Funksiyaning lokal maksimum va minimumlari. Ekstremumlari	2	2		2
Jami:		8	8	4	4

NAZARIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

1-Mavzu: Funksiyaning hosilasi. (2 soat)

O'zgaruvchi miqdorlar orttirmalarining nisbati va uning ma'nosi. Urinma ta'rifi. Funksiya orttirmasi. Funksiya limiti. Uzilish nuqtasi.

Hosila, uning geometrik va fizik ma'nosi: Hosilaviy funksiya. O'rtacha tezlik. Oniy tezlik. Yig'indi va ayirmaning hosilasi. O'zgarmas sonni hosila belgisidan tashqariga chiqarish. Ko'paytmaning hosilasi. Bo'linmaning hosilasi. Murakkab funksiya. Murakkab funktsiyaning hosilasi. Funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari.

2-Mavzu: Hosila yordamida funktsiyani tekshirish va grafiklarni yasash. (2 soat)

Hosila yordamida funktsiyani tekshirish va grafiklarni yasash. Funksiyaning statsionar nuqtalar. Funksiyaning lokal maksimum va minimumlari.

Ekstremumlari. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.

AMALIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI

1-Mavzu: Hosila yordamida funktsiyani tekshirish va grafiklarni yasash. (2soat)

Hosila yordamida funktsiyani tekshirish va grafiklarni yasash. Funksiyaning statsionar nuqtalar.

2-Mavzu: Funksiyaning lokal maksimum va minimumlari. Ekstremumlari. (2soat)

Funksiyaning lokal maksimum va minimumlari. Ekstremumlari. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.

Amaliy mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarda tinglovchilar o'quv modullari doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o'quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog'liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg'ulotlar zamonaviy ta'lim uslublari va innovasion texnologiyalarga asoslangan holda o'tkaziladi. Bundan tashqari, mustaqil holda o'quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

Dasturning axborot-metodik ta'minoti

Modullarni o'qitish jarayonida ishlab chiqilgan o'quv-metodik materiallar, tegishli soha bo'yicha ilmiy jurnallar, Internet resurslari, multimedia mahsulotlari va boshqa elektron va qog'oz variantdagi manbalardan foydalaniladi.

III. NAZARIY MA'LUMOTLAR

Funksiya hosilasi ta'rifi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,b) \subset R$ da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ bo'lsin.

Ma'lumki ushbu

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi.

1-ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi

va $\frac{df(x_0)}{dx}$, yoki $f'(x_0)$, yoki $(f(x))'_{x_0}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Agar $x_0 + \Delta x = x$ deyilsa, unda $\Delta x = x - x_0$ va $\Delta x \rightarrow 0$ da $x \rightarrow x_0$ bo'lib, (1) munosabat quyidagi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

ko'rinishga keladi.

2^o. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0 - \delta, x_0) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lsin.

2-ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap hosilasi deyiladi va $f'(x_0 - 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0, x_0 + \delta) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lsin.

3-ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng hosilasi deyiladi va $f'(x_0 + 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Masalan, $f(x) = |x|$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi o'ng hosilasi $f'(+0) = 1$, chap hosilasi $f'(-0) = -1$ bo'ladi.

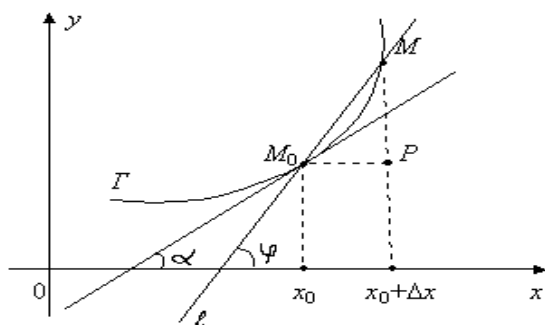
Yuqorida keltirilgan ta'riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada o'ng $f'(x_0 + 0)$ hamda chap $f'(x_0 - 0)$ hosilalarga ega va $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

2. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ng $f'(x_0 + 0)$ hamda chap $f'(x_0 - 0)$ hosilalarga ega bo'lib, $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega va $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f(x)$ funksiya-ning grafigi 5-chizmada tasvirlangan Γ egri chiziqni ifodalasin:



1-chizma.

Bu Γ chiziqda $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ nuqtalarni olib, ular orqali o'tuvchi l kesuvchini qaraymiz.

$M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $M \rightarrow M_0$ da l kesuvchi limit holati Γ chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi.

Ravshanki, φ burchak Δx ga bo'liq: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. $f(x)$ funksiyaning grafigiga M_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

ning mavjud bo'lishi lozim. Bunda α –urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchak.

M_0MP uchburchakdan:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lib, undan

$$\varphi(\Delta x) = \arctg \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Funksiya uzluksizligidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \arctg \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \arctg \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = \arctg f'(x_0).$$

Demak, $\Delta x \rightarrow 0$ da $\varphi(\Delta x)$ ning limiti mavjud va

$$\alpha = \arctg f'(x_0).$$

Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi urin-maning burchak koeffitsientini ifodalaydi. Bunda urinmaning tenglamasi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Aytaylik, P nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = s(t)$ qonun bilan harakat qilsin, bunda t – vaqt, s – o'tilgan yo'l. Agar vaqtning t_1 va t_2 ($t_1 < t_2$) qiymatlaridagi o'tilgan yo'l $s(t_1)$, $s(t_2)$ bo'lsa, unda ushbu nisbat

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$ vaqt oraliqidagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Quyidagi

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1 + 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

limit harakatdagi nuqtaning t_1 vaqtdagi oniy tezligini bildiradi.

Demak, harakatdagi P nuqtaning t vaqtdagi oniy tezligi $v(t)$, o'tilgan $s(t)$ yo'lining hosilasidan iborat bo'ladi:

$$v(t) = s'(t).$$

Hosilaga ega bo'lgan funksiyaning uzluksizligi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a, b) \subset R$ da berilgan bo'lsin.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga

ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ya'ni

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ da } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$$

bo'ladi.

Endi

$$\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

deb belgilaymiz.

Ravshanki,

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ da } \alpha \rightarrow 0.$$

Keyingi tengliklardan topamiz:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Odatda, bu tenglik funksiya orttirmasining formulasi deyiladi. Undan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi.

Eslatma. Funksiyaning biror nuqtada uzluksiz bo'lishi-dan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan, $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz, ammo u shu nuqtada hosilaga ega emas.

1⁰. Ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining hosilasi. Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $(a, b) \subset R$ da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ va $g'(x_0)$ hosilalarga ega bo'lsin. Hosila ta'rifiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \quad (2)$$

bo'ladi.

1) $f(x) \pm g(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(f(x) \pm g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

bo'ladi.

$F(x) = f(x) \pm g(x)$ deb topamiz:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Bu tenglikda $x \rightarrow x_0$ da limitga o'tib, yuqoridagi (1) va (2) munosabatlarni e'tiborga olsak, unda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \\ &\pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0) \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$F'(x_0) = (f(x) \pm g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

2) $f(x) \cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(f(x) \cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) \pm f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

bo'ladi.

$\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$ deb

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0}$$

nisbatni quyidagicha

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x)$$

yozi olamiz. So'ng $x \rightarrow x_0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} &= g(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x) = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

Demak,

$$\Phi'(x_0) = (f(x) \cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

3) $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ($g(x_0) \neq 0$) x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'_{x_0} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

bo'ladi.

Modomiki, $g(x_0) \neq 0$ ekan, unda x_0 nuqtaning biror atrofidagi x larda $g(x) \neq 0$ bo'ladi. Shuni e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \frac{\frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)}}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right]. \end{aligned}$$

Bu tenglikda $x \rightarrow x_0$ da limitga o'tib, ushbu

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'_{x_0} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

tenglikka kelamiz.

1-natija. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, $c \cdot f(x)$ funksiya ($c = \text{const}$) x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(c \cdot f(x))'_{x_0} = c \cdot f'(x_0)$$

bo'ladi, ya'ni o'zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin.

2-natija. Agar $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada hosilalarga ega bulib, $c_1, c_2, \dots, c_n$ o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda

$$(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x))'_{x_0} = c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) + \dots + c_n f_n'(x_0)$$

bo'ladi.

Murakkab funksiyaning hosilasi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda, $g(y)$ funksiya $\{f(x) | x \in X\}$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga, $y_0 \in \{f(x) | x \in X\}$ nuqtada ($y_0 = f(x_0)$) $g'(y_0)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda $g(f(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(g(f(x)))'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

bo'ladi.

$g(y)$ funksiyaning y_0 nuqtada $g'(y_0)$ hosilaga ega bo'lganligidan

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha \cdot (y - y_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi, bunda

$$y = f(x), y_0 = f(x_0) \text{ va } y \rightarrow y_0 \text{ da } \alpha \rightarrow 0.$$

Keyingi tenglikning har ikki tomonini $x - x_0$ ga bo'lib topamiz:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bundan $x \rightarrow x_0$ da limitga o'tib,

$$(g(f(x)))'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

tenglikka kelamiz.

3⁰. Teskari funksiyaning hosilasi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan, uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x_0)$ ($f'(x_0) \neq 0$) hosilaga ega bo'lsin. U holda $x = f^{-1}(y)$ funksiya y_0 ($y_0 = f(x_0)$) nuqtada hosilaga ega va

$$\left[f^{-1}(y) \right]_{x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$$

bo'lib, $x \rightarrow x_0$ da $\alpha \rightarrow 0$ bo'ladi. Bu tenglikdan

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)] - \alpha[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)] = \\ &= [f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)] \cdot [f'(x_0) + \alpha] \end{aligned}$$

ifodaga kelimiz. Bundan esa

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglikda $y \rightarrow y_0$ da limitga o'tib topamiz:

$$\left[f^{-1}(y) \right]_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Hosilaga ega bo'lgan funksiyalar haqidagi teoremlar

Bu teoremlar funksiyalarni tekshirishda muhim rol o'ynaydi.

1-teorema (Ferma teoremasi). $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan. $x_0 \in X$ nuqtaning atrofi uchun $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

$$1) \forall x \in U_\delta(x_0) \text{ da } f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)),$$

2) $f'(x_0)$ mavjud va chekli bo'lsin.

U holda $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

Aytaylik, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \leq f(x_0)$ bo'lsin. Ravshanki, bu holda

$$f(x) - f(x_0) \leq 0$$

bo'ladi.

Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega. Shuning uchun

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo'ladi. Ayni paytda, $x > x_0$ bo'lganda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0,$$

$x < x_0$ bo'lganda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$$

bo'lishidan $f'(x_0) = 0$ ekani kelib chiqadi.

2-teorema (Roll teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 1) $f(x) \in C[a, b]$,
- 2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli,
- 3) $f(a) = f(b)$ bo'lsin.

U holda shunday $x_0 \in (a, b)$ nuqta topiladiki, $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

Shartga ko'ra $f(x) \in C[a, b]$. Unda Veershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni shunday c_1, c_2 nuqtalar ($c_1, c_2 \in [a, b]$) topiladiki,

$$f(c_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$

$$f(c_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

bo'ladi.

Agar $f(c_1) = f(c_2)$ bo'lsa, unda $[a, b]$ da $f(x) = \text{const}$ bo'lib, $\forall x_0 \in (a, b)$ da $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

Agar $f(c_1) > f(c_2)$ bo'lsa, unda $f(a) = f(b)$ bo'lganligi sababli $f(x)$ funksiya $f(c_1)$ hamda $f(c_2)$ qiymatlarning kamida bittasiga $[a, b]$ segmentning ichki x_0 ($a < x_0 < b$) nuqtasida erishadi. Ferma teoremasiga binoan $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

3-teorema (Lagranj teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 1) $f(x) \in C[a, b]$,
- 2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosila mavjud va chekli bo'lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'ladi.

Ushbu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (1)$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Ayni paytda, uning hosilasi

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bo'ladi.

Roll teoremasiga binoan, shunday c ($c \in (a, b)$) nuqta topiladiki,

$$F'(c) = 0 \quad (2)$$

bo'ladi.

(1) va (2) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ya'ni

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

1-natija. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) = 0$ bo'lsin. U holda $\forall x \in (a, b)$ da $f(x) = \text{const}$ bo'ladi.

$x, x_0 \in (a, b)$ ni olib, chekkalari x va x_0 bo'lgan segmentda $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab $f(x) = f(x_0) = \text{const}$ bo'lishini topamiz.

2-natija. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari (a, b) da $f'(x), g'(x)$ hosilalarga ega bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) = g'(x)$ bo'lsin. U holda $\forall x \in (a, b)$ da $f(x) = g(x) + \text{const}$ bo'ladi.

Bu natijaning isboti $f(x) - g(x)$ funksiyaga nisbatan 1-natijani qo'llash bilan kelib chiqadi.

4-teorema (Koshi teoremasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

- 1) $f(x) \in C[a, b], g(x) \in C[a, b],$
- 2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va chekli;
- 3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0$ bo'lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

Avvalo $g(b) \neq g(a)$ bo'lishini ta'kidlab o'tamiz, chunki $g(b) = g(a)$ bo'ladigan bo'lsa, unda Roll teoremasiga ko'ra shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilar

ediki, $g'(c) = 0$ bo'lar edi. Bu 3)-shartga zid.

Quyidagi

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)] \quad (x \in [a, b])$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga binoan shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$\Phi'(c) = 0 \quad (3)$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \quad (4)$$

(3) va (4) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

ya'ni

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Funksiya hosilasining uzilishi haqida. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) ning x_0 nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin.

Agar $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = b$ limit mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chap hosila $f'(x_0 - 0)$ ga ega bo'lib, $f'(x_0 - 0) = b$ bo'ladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = d$ limit mavjud bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ng hosila $f'(x_0 + 0)$ ga ega bo'lib, $f'(x_0 + 0) = d$ bo'ladi.

Aytaylik, $\Delta x \neq 0$ va $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. Lagranj teoremasidan

foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x), \quad (0 < \theta < 1).$$

Endi

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = b$$

mavjud bo'lsin deylik. Unda

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 \rightarrow -0} f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} f'(x_0 + \Delta x) = b$$

bo'lib,

$$\Delta x \rightarrow -0 \text{ da } f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \rightarrow b,$$

ya'ni

$$\Delta x \rightarrow -0 \text{ da } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow b$$

bo'ladi. Demak, $f'(x_0 - 0) = b$. Shunga o'xshash, $f'(x_0 + 0) = d$ bo'lishi ko'rsatiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsin. Unda, ravshanki,

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0)$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x)$$

limitlarnig mavjud va chekli bo'lishidan

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f'(x) = f'(x_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda bu $f'(x)$ hosila birinchi tur uzilishga ega bo'lolmaydi.

Boshqacha aytganda har bir $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ funksiya yoki uzluksiz bo'ladi, yoki ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

Funksiyaning ekstremum qiymatlari

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ bulsin.

1-ta'rif. Agar $x_0 \in (a,b)$ nuqtaning shunday atrofi

$$U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \subset (a,b)$$

mavjud bo'lsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bulsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *maksimumga* (*minimumga*) ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi *maksimumi* (*minimumi*) deyiladi.

2- ta'rif. Agar $x_0 \in (a,b)$ nuqtaning shunday atrofi $U_\delta(x_0) \subset (a,b)$ mavjud bo'lsaki,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = U_\delta(x_0) \text{ uchun}$$

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *qat'iy maksimumga* (*qat'iy minimumga*) ega deyiladi, $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi *qat'iy maksimumi* (*minimumi*) deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflardagi x_0 nuqta $f(x)$ funksiya mos ravishda maksimum (minimum), qat'iy maksimum (qat'iy minimum) qiymat beradigan nuqta deb ataladi.

Funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi maksimum (minimum) qiymatlari

$$f(x) = \max_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \quad \left(f(x) = \min_{x \in U_\delta(x_0)} \{f(x)\} \right)$$

kabi belgilanadi. Bunda max (min) lotincha maximum (minimum) so'zidan olingan bo'lib, eng katta (eng kichik) degan ma'noni anglatadi.

Funksiyaning maksimum va minimumi umumiy nom bilan uning ekstremumi deb ataladi.

1 - eslatma. Yukoridagi ta'riflarda $f(x)$ funksiyaning $x_0 \in (a,b)$ dagi $f(x_0)$ qiymati uning shu nuqta $U_\delta(x_0)$ atrofidan olingan nuqtalardagi qiymatlari bilangina takdos landi. Shuning uchun funksiyaning ekstremumini (maksimum yoki minimumini) lokal ekstremum (lokal maksimum yoki lokal minimum) deb

yuritiladi.

2-eslatma. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda bir qancha maksimum va minimumlarga ega bulishi mumkin.

Funksiya hosilalari yordamida uning ekstremum lari xamda funksiya ekstremum qiymat beradigan nuqtalar topiladi.

Ekstremumning zaruriy sharti. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda niqlangan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada maksimum (minimum) ga erishsin. Demak, ta'rifga ko'ra x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0) \subset (a,b)$ atrofi topiladiki, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Masalan, $f(x) = \sin x$: funksiyaning $(0, 4\pi)$ intervalda saraylik. Bu funksiya unksiya

$x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada maksimum, $x = \frac{3\pi}{2}$ nuqtada minimum, $x = \frac{5\pi}{2}$ nuqtada maksimum, $x = \frac{7\pi}{2}$ nuqtada minimumga ega ekanini aniqlash kiyin emas. Demak, bu funksiya $(0, 4\pi)$ intervalda ikkita maksimum, ikkita minimumga ega bo'lib, maksimum va minimumlar navbatma- navbat keladi.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,b)$ nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, bu nuqtada $y = f(x)$ funksiya ekstremumga erishsa, u holda

$$f'(x) = 0$$

buladi.

Funksiyaning qavariqligi va botiqligi

$y = f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x, f(x)), \forall x \in (a,b)$ nuqtada urinmasi mavjud bo'ladi.

1-ta'rif. Agar (a,b) intervalning istalgan nuqtasida $y = f(x)$ funksiya grafigi unga o'tkazilgan urinmadan yuqorida (pastda) yotsa, funksiya grafigi (a,b) intervalda *botiq (qavariq)* deyiladi.

Funksiya grafigining botiq qismini qavariq qismidan ajratuvchi $M(c, f(c))$ nuqta funksiya grafigining *egilish nuqtasi* deb ataladi.

1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya (a,b) intervalda ikkinchi tartibli

hosilaga ega va $\forall x \in (a, b)$ da $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya grafigi (a, b) intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.

Isboti. $\forall x \in (a, b)$ da $f''(x) < 0$ bo'lsin. Funksiya grafigida $x_0 \in (a, b)$ abssissali ixtiyoriy M nuqta olamiz. Funksiyaning grafigi bu urinmadan pastda yotishini ko'rsatamiz. Buning uchun $x \in (a, b)$ nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqning y ordinatasi bilan urinmaning y_u ordinatasini solishtiramiz.

Urinma tenglamasini tuzamiz:

$$y_u - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

yoki

$$y_u = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

U holda

$$y - y_u = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Lagranj teoremasiga ko'ra $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ bu yerda $c - x_0$ bilan x ning orasida yotadi. Shu sababli

$$y - y_u = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \text{ yoki } y - y_u = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

$f'(c) - f'(x_0)$ ayirmaga Lagranj teoremasini takror qo'llaymiz:

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0), \text{ bu yerda } c_1 - c \text{ bilan } x_0 \text{ ning orasida yotadi.}$$

$$\text{Demak, } y - y_u = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$$

Bu tengsizlikni tekshiramiz:

1) agar $x > x_0$ bo'lsa, u holda $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ bo'ladi va $f''(c) < 0$.

Bundan $y - y_u < 0$ yoki $y < y_u$;

2) agar $x < x_0$ bo'lsa, u holda $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ bo'ladi va $f''(c) < 0$.

Bundan $y - y_u < 0$ yoki $y < y_u$.

Demak, $\forall x \in (a, b)$ da urinmaning ordinatasi funksiya grafigining ordinatasidan katta bo'ladi va (a, b) intervalda funksiya grafigi qavariq.

$f''(x) \geq 0$ da funksiya grafigi botiq bo'lishi shu kabi isbotlanadi.

Funksiya grafigining egilish nuqtasini topish quyidagi teoremalarga asoslanadi.

2-teorema (egilish nuqta mavjud bo'lishining zaruriy sharti).

Agar $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega va $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'lsa, u holda $f''(x) = 0$ bo'ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $f''(x) \neq 0$, aniqlik uchun $f''(x_0) > 0$, bo'lsin. Teoremaning shartiga ko'ra ikkinchi tartibli hosila uzluksiz. U holda $f''(x)$ hosila x_0 nuqtaning biror atrofida musbat bo'ladi va funksiya grafigi bu atrofda botiq bo'ladi. Bu x_0 nuqta egilish nuqtaning absissasi bo'ladi mulohazasiga zid. Demak, qilingan faraz noto'g'ri va $f''(x) = 0$.

$f''(x) = 0$ bo'ladigan nuqtalarning barchasi ham funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'lmaydi.

Masalan, $f(x) = x^4$ funksiya grafigining $M(0, 0)$ nuqtasi egilish nuqta emas, ammo $x = 0$ da $f''(x) = 12x^2 = 0$.

Demak, $f''(x_0) = 0$ shart egilish nuqta mavjud bo'lishining zaruriy sharti bo'ladi.

3-teorema (egilish nuqta mavjud bo'lishining etarli sharti) $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin. Agar δ atrofning x_0 nuqtadan chap va o'ng tomonlarida $f''(x)$ hosila har xil ishoraga ega bo'lsa, u holda $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

Isboti.

$x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f''(x) > 0$ va $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f''(x) < 0$ bo'lsin.

U holda 1-teoremaga ko'ra x_0 nuqtadan chapda funksiya grafigi botiq va o'ngda qavariq bo'ladi. Demak, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

$x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f''(x) < 0$ va $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ da $f''(x) > 0$ bo'lgan hol uchun teorema shu kabi isbotlanadi.

Bu teorema $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib, x_0 nuqtada $f''(x)$ mavjud bo'lmasa ham o'rinli

bo‘ladi. Shu sababli egilish nuqtalarni ikkinchi tartibli hosila nolga teng bo‘lgan yoki uzilishga ega bo‘lgan nuqtalar, ya’ni ikkinchi tur kritik nuqtalar orasidan izlash kerak.

Misol $y = \frac{x}{1-x^2}$ funksiya grafigini botiq va qavariqlikka tekshiramiz.

$$D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty).$$

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}, \quad y'' = \left(\frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3}.$$

Ikkinchi tartibli hosila $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ nuqtalarda nolga teng va mavjud emas.

$f''(x)$ hosilaning bu nuqtalardan chapdan o‘ngga o‘tishdagi ishoralarini tekshiramiz:

Demak, funksiyaning grafigi $(-1; 0)$ va $(1; \infty)$ intervallarda qavariq, $(-\infty; -1)$ va $(0, 1)$ intervallarda botiq bo‘ladi. $O(0; 0)$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi.

Funksiyaning tekshirish va grafigini chizishning umumiy sxemasi

Funksiyaning tekshirish va grafigini chizish ma’lum tartibda (sxema asosida) bajariladi. Shunday sxemalardan birini keltiramiz.

- 1°. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.
- 2°. Funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishadigan nuqtalarini (agar ular mavjud bo‘lsa) aniqlash.
- 3°. Funksiyaning ishorasi o‘zgarmaydigan oraliqlarni ($f(x) > 0$ yoki $f(x) < 0$ bo‘ladigan oraliqlarni) aniqlash.
- 4°. Funksiyaning juft-toqligini tekshirish.
- 5°. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.
- 6°. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlash va ekstremumlarini topish.

7°. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini aniqlash.

8°. 1° – 7° bandlardagi tekshirishlar asosida funksiyaning grafigi chiziladi.

Keltirilgan sxemaning hamma bandlari albatta bajarilishi shart emas. Soddaroq hollarda keltirilgan bandlardan ayrimlarini, masalan 1°, 2°, 6° ni bajarish etarli bo'ladi. Agar funksiya grafigi juda tushunarli bo'lmasa 1° – 7° bandlardan keyin funksiyaning davriyligini tekshirish, funksiyaning bir nechta qo'shmcha nuqtalarini topish va funksiyaning boshqa xususiyatlarini aniqlash bo'yicha qo'shmcha tekshirishlar o'tkazish mumkin.

Misollar

1. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ funksiyaning tekshirish va grafigini chizamiz.

1°. Funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

2°. $x = 0$ da $y = -1$ bo'ladi. Funksiya Oy o'qini $(0; -1)$ nuqtada kesadi. $y \neq 0$ bo'lgani uchun funksiya Ox o'qini kesmaydi.

3°. Funksiya $(-\infty; -1)$ va $(1; +\infty)$ intervallarda musbat ishorali va $(-1; 1)$ interval-da manfiy ishorali.

4°. Funksiya uchun $f(-x) = f(x)$ bo'ladi. Demak, u juft.

$$5°. \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty.$$

Demak, $x = -1$ va $x = 1$ to'g'ri chiziqlar vertikal asimptotalar bo'ladi.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} = 0$$

($x \rightarrow +\infty$ da ham $x \rightarrow -\infty$ da ham $k = 0$)

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - 0 \cdot x \right) = 1.$$

Demak, $y = 1$ to'g'ri chiziq $x \rightarrow +\infty$ da ham $x \rightarrow -\infty$ da ham gorizontal asimptota bo'ladi.

6°. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlaymiz va ekstremumlarini topamiz.

$$y' = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Birinchi tartibli hosila $x = -1$ va $x = 1$ da mavjud emas va $x = 0$ da nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini to'rtta $(-\infty; -1), (0; -1), (0; 1), (1; +\infty)$ intervallarga ajratadi. Hosilaning bu intervallardagi va har bir birinchi tur kritik nuqtadan chapdan o'ngga o'tishdagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:

Demak, funksiya $(-\infty; 0)$ intervalda o'sadi va $(0; +\infty)$ intervalda kamayadi. $x = 0$ maksimum nuqta, $y_{\max} = f(0) = -1$.

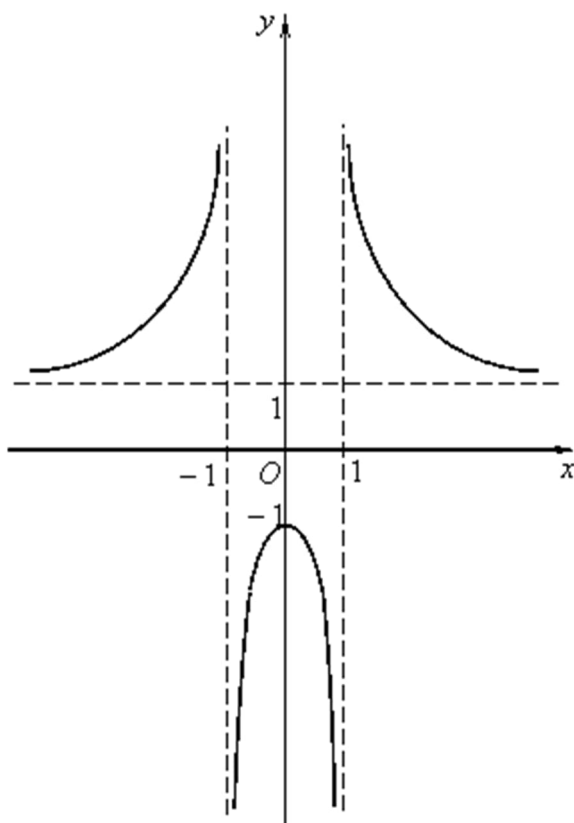
7°. Funksiyaning qavariqlik va botiq-lik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini aniqlaymiz.

$$y'' = \left(-\frac{4x}{(x^2 - 1)^2} \right)' = -4 \frac{(x^2 - 1)^2 - x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{4(1 + 3x^2)}{(x^2 - 1)^3}$$

Ikkinchi tartibli hosila $x = -1$ va $x = 1$ nuqtalarda mavjud emas. y'' hosilaning $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$ intervallardagi va har bir ikkinchi tur kritik nuqtalardan chapdan o'ngga o'tishdagi ishoralarini tekshiramiz:

Demak, funksiyaning grafigi $(-1; 1)$ intervalda qavariq, $(-\infty; -1)$ va $(1; +\infty)$ intervallarda botiq bo'ladi. Funksiya grafigining egilish nuqtasi yo'q.

8°. 1° – 7° bandlar asosida funksiya grafigini chizamiz (17-shakl).



(17-shakl).

2. $y = x^2 e^{-x}$ funksiyani tekshiramiz va grafigini chizamiz.

1°. Funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(f) = R$

2°. $x = 0$ da $y = 0$ bo'ladi. Funksiya Ox va Oy o'qlarini $O(0;0)$ nuqtada kesadi.

3°. Funksiya $(-\infty; 0)$ va $(0; +\infty)$ intervallarda musbat ishorali.

4°. Funksiya uchun $f(x) = f(-x)$ va $f(x) \neq f(-x)$ bo'ladi. Demak, u umumiy ko'rinishdagi funksiya.

5°. Funksiya aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lgani uchun u vertikal asimptotaga ega emas.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Demak, $x \rightarrow +\infty$ da $y = 0$ to'g'ri chiziqli gorizontali assimp tota.

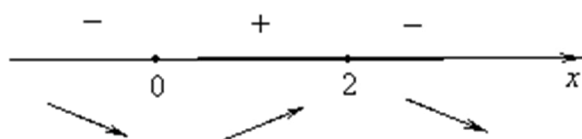
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty.$$

Demak, $x \rightarrow -\infty$ da funksiya assimp totaga ega emas.

6°. Funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlaymiz va ekstremumlarini topamiz.

$$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2).$$

Hosila $x_1 = 0$ va $x = 2$ da nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini uchta $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$ intervallarga ajratadi.



Hosilaning bu intervallardagi va har bir birinchi tur kritik nuqtadan chapdan o'ngga o'tgandagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:

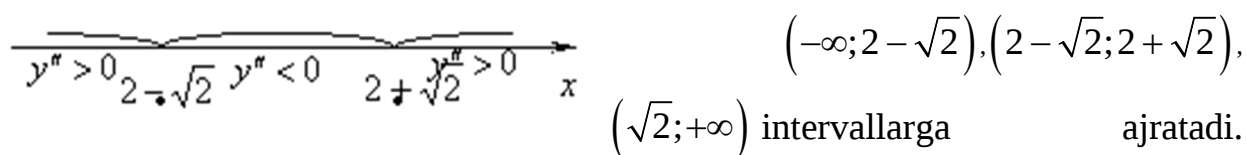
Demak, funksiya $(0; 2)$ intervalda o'sadi va $(-\infty; 0)$ va $(0; +\infty)$ intervallarda kamayadi. $x = 0$ minimum nuqta, $y_{\min} = f(0) = 0$ va $x = 2$ maksimum nuqta $y_{\max} = f(2) = 4e^{-2}$.

7°. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini aniqlaymiz.

$$y'' = (e^{-x}(2x - x^2))' = e^{-x}(x^2 - 2x) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2).$$

Ikkinchi tartibli hosila $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ va

$x_4 = 2 + \sqrt{2}$ nuqtalarda nolga teng. Bu nuqtalar funksiyaning aniqlanish cohasini

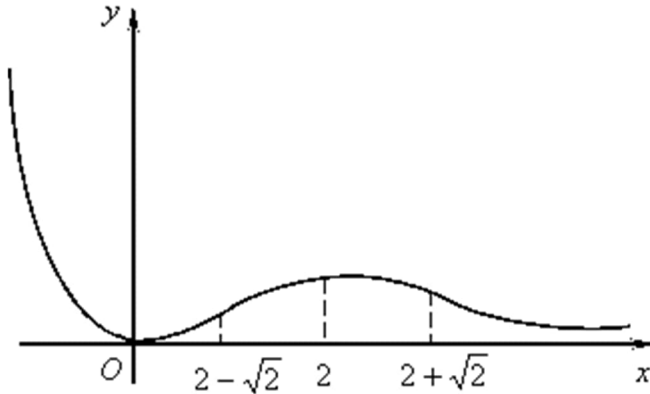


y'' hosilaning bu intervallardagi va ikkinchi tur kritik nuqtalardan chapdan o'ngga o'tgandagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:

Demak, funksiyaning grafigi $(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ intervalda qavariqlik, $(-\infty; 2 - \sqrt{2})$ va $(\sqrt{2}; +\infty)$ intervallarda botiqlik bo'ladi,

$M_1(2 - \sqrt{2}; 0, 2)$ va $M_2(2 + \sqrt{2}; 0, 4)$ funksiya grafigining egilish nuqtalari.

8°. 1° – 7° bandlar asosida funksiya grafigini chizamiz (18 shakl).



18 shakl

Hosilaning tatbiqlari.

1. $y = x^3$ funksiyaning $x = 1$ nuqtadagi hosilasi topilsin.

Yechish: 1) x argumentga Δx orttirma beramiz. U holda y funksiya $y \Delta y$ orttirma oladi. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;

2) Δy ni topamiz:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] \cdot \Delta x;$$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ni topamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] \cdot \Delta x}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2;$$

4) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ni topamiz: Agar bu limit mavjud bo'lsa, u holda y berilgan funksiyaning hosilasidan iborat bo'ladi.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

$$y'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

2. $y = 2x^2 - 2$ parabolaning absissasi $x_0 = -2$ bo'lgan nuqtasiga o'tkazilgan urinmaning tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Parabolaga tegishli bo'lgan va absissasi $x_0 = -2$ bo'lgan nuqtaning ordinatasini topamiz:

$$y_0 = y(x_0) = y(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 2 = 2 \cdot 4 - 2 = 6.$$

$y = f(x)$ egri chiziqning $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma tenglamasi $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ dan iborat bo'lgani uchun dastlab y' ni so'ngra $y'(x_0) = y'(2)$ ni topamiz.

$$y' = (2x^2 - 2)' = (2x^2)' - (2)' = 4x - 0 = 4x;$$

$$y'(-2) = 4 \cdot (-2) = -8.$$

Demak urinma tenglamasi

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0), \quad y - 6 = -8(x + 2), \quad y = -8x - 10 \text{ dan iborat.}$$

3. $y = x^2 - \cos x + 2$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish: Funktsiyalar yig'indisining hosilasini topish formulasidan foydalanamiz:

$$y' = (x^2 - \cos x + 2)' = (x^2)' - (\cos x)' + (2)' = 2x + \sin x + 0 = 2x + \sin x.$$

4. Quyidagi funksiylarning hosilalari topilsin:

$$1) y = (2x + 1)(3x - 1); \quad 2) y = x \cdot \cos x; \quad 3) y = \frac{3+2x}{1+x}.$$

Yechish: 1) Ko'paytmani hosilasini toppish qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = [(2x + 1)(3x - 1)]' = (2x + 1)' \cdot (3x - 1) + (3x - 1)' \cdot (2x + 1) = 2 \cdot (3x - 1) + 3 \cdot (2x + 1) = 6x - 2 + 6x + 3 = 12x + 1;$$

$$\begin{aligned} y' &= [(2x + 1)(3x - 1)]' = (2x + 1)' \cdot (3x - 1) + (3x - 1)' \cdot (2x + 1) \\ &= 2 \cdot (3x - 1) + 3 \cdot (2x + 1) = 6x - 2 + 6x + 3 = 12x + 1; \\ y' &= [(2x + 1)(3x - 1)]' = (2x + 1)' \cdot (3x - 1) + (3x - 1)' \cdot (2x + 1) \\ &= 2 \cdot (3x - 1) + 3 \cdot (2x + 1) = 6x - 2 + 6x + 3 = 12x + 1; \\ y' &= [(2x + 1)(3x - 1)]' = (2x + 1)' \cdot (3x - 1) + (3x - 1)' \cdot (2x + 1) \\ &= 2 \cdot (3x - 1) + 3 \cdot (2x + 1) = 6x - 2 + 6x + 3 = 12x + 1; \end{aligned}$$

$$2) y' = (x \cos x)' = (x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x = \cos x - x \cdot \sin x;$$

3) Bu funksiyaning hosilasini topish uchun bo'linmani hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = \left(\frac{3+2x}{1+x} \right)' = \frac{(3+2x)' \cdot (1+x) - (1+x)' \cdot (3+2x)}{(1+x)^2} = \frac{2 \cdot (1+x) - 1 \cdot (3+2x)}{(1+x)^2} = \frac{2+2x-3-2x}{(1+x)^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

5. To'g'ri chiziqli harakat qonuni

$$S = 4t^3 - t^2 + 1 \text{ (m)}$$

formula bilan berilgan. Bu harakatning $t = 4c$ bo'lgan paytdagi tezlanishi topilsin.

Yechish: Harakatning t paytdagi tezligi:

$$v(t) = s'(t) = (4t^3 - t^2 + 1)' = (12t^2 - 2t) \frac{m}{c},$$

t paytdagi tezlanishi esa

$$a(t) = v'(t) = (12t^2 - 2t)' = (24t - 2) \frac{m}{c^2};$$

ga teng bo'lib undan $a(4) = 24 \cdot 4 - 2 = 96 - 2 = 94 \frac{m}{c^2}$,

6. $y = \frac{1}{3}x^6 + 2x^5 - 4x + 10$ funksiyaning beshinchi tartibli hosilasi topilsin.

$$\text{Yechish: } y^I = \left(\frac{1}{3}x^6 + 2x^5 - 4x + 10\right)' = 2x^5 + 10x^4 - 4;$$

$$y^{II} = (2x^5 + 10x^4 - 4)' = 10x^4 + 40x^3;$$

$$y^{III} = (10x^4 + 40x^3)' = 40x^3 + 120x^2;$$

$$y^{IV} = (40x^3 + 120x^2)' = 120x^2 + 240x;$$

$$y^V = (120x^2 + 240x)' = 240x + 240 = 240(x + 1).$$

7. $y = \cos x$ funksiyaning to'rtinchi tartibli hosilasi topilsin.

$$\text{Yechish: } y' = (\cos x)' = -\sin x; \quad y'' = (-\sin x)' = -\cos x; \quad y''' = (-\cos x)' = \sin x; \quad y^{IV} = (\sin x)' = \cos x.$$

8. $f(x) = x^3 + 5x^2 - 1$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi topilsin va $f''(0.5)$ hisoblansin.

$$\text{Yechish: } f'(x) = (x^3 + 5x^2 - 1)' = 3x^2 + 10x;$$

$$f''(x) = (3x^2 + 10x)' = 6x + 10;$$

$$f''(0.5) = 6 \cdot 0.5 + 10 = 3 + 10 = 13.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Hosilaning ta'rifidan foydalanib, quyidagi funksiylarning hosilalari topilsin:

$$1) y = x^3; \quad 2) y = x^4; \quad 3) y = \frac{1}{x^2}; \quad 4) y = 4x^2 - 5; \quad 5) y = 2\sin^2 x \quad 6) y = 3x^2 + 2x + 5; \quad 7) y = \sqrt[3]{x}; \quad 8) y = 2\cos^2 x.$$

$$\text{Javob: } 1) 3x^2; \quad 2) 4x^3; \quad 3) -\frac{2}{x^3}; \quad 4) 8x; \quad 5) 2\sin 2x; \quad 6) 6x + 2; \quad 7) \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$8) -2\sin 2x.$$

2. Hosilani hisoblash qoidalaridan va hosilalar jadvalidan foydalanib, quyidagi funksiylarning hosilalari topilsin:

$$1) y = 2 + x - x^2; \quad 2) y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 7;$$

$$3) y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3;$$

$$4) y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha);$$

$$5) y = \frac{2x}{1-x^2}; \quad 6) y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}; \quad 7) y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x};$$

$$8) y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}; \quad 9) y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}; \quad 10) y = (2-x^2) \cdot \cos x + 2x \sin x; \quad 11) y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x};$$

$$12) y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x};$$

$$13) y = \frac{\cos x}{1-\sin x}; \quad 14) y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}; \quad 15) y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}; \quad 16) y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\text{Javob: } 1) 1 - 2x; \quad 2) x^2 + x - 2;$$

$$3) 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9); \quad 4) x \sin 2\alpha + \cos 2\alpha; \quad 5) \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2};$$

$$6) \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}; \quad 7) 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \quad 8) -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} \quad (x > 0);$$

$$9) \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad (x > 0); \quad 10) x^2 \sin x; \quad 11) \frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}; \quad 12) -\frac{1+\ln^2 3}{3^x} \cdot \sin x.$$

$$13) \frac{1}{1-\sin x}; \quad 14) \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}; \quad 15) \frac{1-x}{x^4}; \quad 16) \frac{2}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right).$$

3. Quyida berilgan funksiyalarning hosilalari topilsin va ko'rsatilgan nuqtalardagi qiymatlari hisoblansin:

$$1) f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x; \quad f'(0), \quad f'(1), \quad f'(-1);$$

$$2) f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}; \quad f'(2) - f'(-2);$$

$$3) f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}; \quad 0,01 \cdot f(0,01);$$

$$4) f(x) = \sqrt[3]{x^2}; \quad f'(-8);$$

$$5) f(x) = \frac{x}{2x-1}; \quad f(0), \quad f'(2), \quad f'(-2).$$

$$\text{Javob: } 1) 1; 0; 4; \quad 2) 8,25; \quad 3) -90; \quad 4) -\frac{1}{3}; \quad 5) -1; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{25}.$$

4. Quyidagi masalalarda egri chizilarga o'tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin va egri chiziqlar hamda urinmalar yasalsin.

$$1) y = \frac{x^3}{3} \text{ egri chiziqqa } x = -1 \text{ nuqtada};$$

$$2) y^2 = x^3 \text{ egri chiziqqa } x_1 = 0 \text{ va } x_2 = 1 \text{ nuqtalarga};$$

$$3) y = \frac{8}{4+x^2} \text{ lokonga (zulfga) } x = 2 \text{ nuqtada};$$

4) $y = \sin x$ sinusoidaga $x = \pi$ nuqtada.

Javob: 1) $y = x + \frac{2}{3}$; 2) $y = 0$ va $y = \pm \frac{1}{2}(3x - 1)$;

3) $y = -\frac{x}{2} + 2$; 4) $y = -x + \pi$.

5. $xy = 4$ giperbolaga $x_1 = 1$ va $x_2 = -4$ nuqtalarda o'tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin va urinmalar orasidagi burchak topilsin. Egri chiziq va urinmalar yasalsin.

Javob: $y = -4x + 8$, $y = -\frac{1}{4}x - 2$; $\varphi = \arctg \frac{15}{8}$.

6. $y = x^2 + 4x$ parabolaga qaysi nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi?

Javob: $(-2; -4)$.

7. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

1) $y = x^2 + 3^x$; 2) $y = x^2 \cdot 2^x$; 3) $y = x^2 \cdot e^x$; 4) $y = \frac{1+e^x}{1+e^x}$;

5) $y = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$; 6) $y = x - \operatorname{actg} x$; 7) $y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x}$;

Javob: 1) $2x + 3^x \cdot \ln 3$; 2) $x \cdot 2^x (2 + x \ln 2)$; 3) $x e^x (x + 2)$;

4) $\frac{2e^{2x}}{(1-e^x)^2}$; 5) $-\frac{2\sin x}{e^x}$; 6) $\frac{x^2}{1+x^2}$; 7) $-\frac{1+x+x^2}{x(1+x^2)}$.

8. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = \arcsin x + \arccos x$; 2) $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.

Javob: 1) 0; 2) 0.

9. Quyidagi funksiyalarning uchinchi tartibli hosilalari topilsin.

1) $y = x^2 \ln x$; 2) $y = x \cos x$.

Javob: 1) $\frac{2}{x}$; 2) $x \sin x - 3 \cos x$.

10. Quyidagi funksiyalarning n -tartibli hosillalari topilsin.

1) $y = \ln x$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \sqrt{x}$; 4) $y = \cos^2 x$

Javob: 1) $\frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$; 2) $\sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$;

$$3) \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n \sqrt{x^{2n-1}}}; \quad 4) 2^{n-1} \cdot \cos\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

11. Jism $x(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ qonuniga asosan Ox to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qiladi. Harakat tezligi va tezlanishi aniqlansin.

$$\text{Javob: } \frac{dx}{dt} = t^2 - 4t + 3; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2t - 4.$$

12. Qandaydir kimyoviy reaksiya natijasida hosil qilinadigan jism miqdori x bilan t vaqt orasidagi bog'lanish $x = A(1 - e^{-kt})$ tenglama bilan ifodalanadi. Reaksiya tezligi aniqlansin.

$$\text{Javob: } kAe^{-kt}.$$

13. Jism qo'zg'almas o'q atrofida

$$\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2 \text{ (rad).}$$

qonun bo'yicha aylanadi. Jismning $t = 4c.$ dagi burchak tezligi va burchak tezlanishi topilsin.

$$\text{Javob: } w(4) = \varphi'(4) = 20; \quad a(t) = w'(t) = 6.$$

14. Nuqta $S(t) = 2t^3 + t - 1$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakat qilmoqda. Nuqtaning t paytdagi tezligi va tezlanishini toping.

$$\text{Javob: } v(t) = 6t^2 + 1; \quad a(t) = 12t.$$

15. Jismning T temperaturasi t vaqtga bog'liq holda $T(t) = 0.5t^2 - 2t$ qonun bo'yicha o'zgaradi. Vaqtning $t = 5(c)$ paytida bu jism qanday tezlik bilan isiydi?

$$\text{Javob: } v(5) = 3.$$

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Hosila yordamida funksiyani tekshirish va grafiklarni yasash.
2. Funksiyaning statsionar nuqtalari.
3. Funksiyaning lokal maksimum va minimumlari.
4. Ekstremumlar.
5. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.

Glossariy

1. **Funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi** - $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma qiymati.

2. **Funksiyaning funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi** - Ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit qiymati va $\frac{df(x_0)}{dx}$, yoki $f'(x_0)$, yoki $(f(x))'_{x_0}$ kabi belgilanadi.

3. **Funksiyaning o'ng va chap hosilalari** -

- Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap hosilasi deyiladi va $f'(x_0 - 0)$ kabi belgilanadi

- Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng hosilasi deyiladi va $f'(x_0 + 0)$ kabi belgilanadi

4. **Urinmaning tenglamasi** - $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

ko'rinishda bo'ladi.

5. **O'rtacha tezlik** - vaqtning t_1 va t_2 ($t_1 < t_2$) qiymatlaridagi o'tilgan yo'l $s(t_1)$, $s(t_2)$ bo'lsa, unda ushbu nisbat

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$ vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

6. funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi - $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi

7. Murakkab funksiyaning hosilasi - $g(f(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(g(f(x)))'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

bo'ladi.

8. Teskari funksiyaning hosilasi - $y = f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan, uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada

$f'(x_0)$ ($f'(x_0) \neq 0$) hosilaga ega bo'lsin. U holda $x = f^{-1}(y)$ funksiya y_0 ($y_0 = f(x_0)$) nuqtada hosilaga ega va

$$[f^{-1}(y)]'_{x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo'ladi.

9. Ferma teoremasi - $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan. $x_0 \in X$ nuqtaning atrofi uchun $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$ ($\delta > 0$) bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$),

2) $f'(x_0)$ mavjud va chekli bo'lsin.

U holda $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

10. Roll teoremasi - $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli,

3) $f(a) = f(b)$ bo'lsin.

U holda shunday $x_0 \in (a, b)$ nuqta topiladiki, $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

Keyslar banki

1-keys. Masala o'rta tashlanadi: Jism $x(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ qonuniga asosan Ox to'g'ri chiziqli bo'yicha harakat qiladi. Harakat tezligi va tezlanishi aniqlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat savollari

1. Funksiya hosilasi nima?
2. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolarini ayting.
3. Urinma va normal tenglamalarini ta'rifini ayting.
4. Hosila hisoblash qoidalarini ayting.
5. Funksiyaning o'sish va kamayish shartlari ta'riflarini keltiring.
6. Funksiya ekstremumining zaruriy sharti ta'riflarini keltiring
7. Funksiyaning to'plamda eng katta va eng kichik qiymatlari topishni misollarda tushuntiring.
8. Funksiyaning qavariqligi. Egilish nuqtalari ta'riflarini keltiring.
9. Funksiyaning tekshirish va grafigini chizishning umumiy sxemasi keltiring
10. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi ta'riflarini keltiring.

V. GLOSSARIY

Termin	O'zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Assesment	angl. assessment «baholash», bilimni, ko'nikma va malakalarni bir necha xil yondashuvlar orqali baholash, tahlil qilish, sinab	the technology of teaching, by documenting of knowledge, skills, attitudes, with using of different ways of assesment, analysis and testing.

	ko‘rishdan pedagogik texnologiyasi.	
Guruhli ta’lim Group traning	bir o‘qituvchi bir necha o‘qituvchini o‘qitadigan ta’lim shakli. Guruhlar o‘quvchilar soniga qarab: kichik (3-6 o‘quvchi), o‘rta (7-15 o‘quvchi), katta (15 dan ortiq o‘quvchi, guruhlar) ga ajratiladi. Shuningdek, har bir guruhdagi ta’lim oluvchilarning yoshiga, ta’lim yo‘nalishiga va shu kabilarga qarab ham guruhlariga ajratiladi. Bu shaklni qo‘llash jarayonida yakka ta’lim shakllari ham amalga oshiriladi. Biologiyadan dars o‘tishda eng samarali guruxlar 3-5 kishi	A form of teaching in which a person teaches a few students. Depending on the number of students the groups can be small (3-6 students), medium (7-15 students) and large (more than 15 students, groups). In addition the each group can be devided by age, training, direction, and etc. In this form of traning the individual education is also used/ For teaching biology the groups from 3-5 students is the most effective
Edvayzer	- yakka holda diplom ishi, kurs ishini ishlab chiqish, ilmiy-tadqiqot olib borish, individual dasturlarni ishlab chiqish, talabalarning individual o‘sinh va rivojlanishiga yordam beruvchi maslahatchidir	Person consulting individual diploma work, course work, scientific research, thesis, development of individual programs and individual academic growth and development of students

Intellektual mulk Intellectual proper	ijodiy aqliy faoliyat mahsuli. Ixtirochilik va mualliflik manbai huquqi majmuiga kiruvchi, fan, adabiyot, san'at va ishlab chiqarish sohasida ijodiy faoliyatning boshqa turlari, adabiy, badiiy, ilmiy asarlar, ijrochi aktyorlik san'ati, jumladan, ovoz yozish, radio va televidenie asarlari kashfiyotlar, ixtirolar, sanoat namunalari, kompyuter uchun dasturlar, ma'lumotlar ombori, tovar belgilari, firma atamalari va boshqa aqliy mulk manbalari kiradi	creations of the intellect for which a monopoly is assigned to designated owners by law. Some common types of intellectual property rights (IPR) are trademarks, copyright, patents, industrial design rights, and in some jurisdiction <u>trade secrets</u>: all these cover music, literature, and other artistic works; discoveries and inventions; and words, phrases, symbols, and designs.
Interfaol mashg'ulot Interactive classes	o'qituvchi va o'quvchilar o'zaro faol ishtirok etadigan mashg'ulot. Bunda jarayon o'zaro hamkorlikda kechadi	Classes in which both the teacher and students are active. The studying and teaching process are done in close cooperation
Malaka oshirish Qualification of skills	mutaxassislar va rahbar xodimlarning kasbiy bilim va ko'nikmalarini yangilash hamda rivojlantirish jarayoni	The process of updating and development of professional knowledge and skills of experts and administrators

VI. ADABIYOTLAR RO'YXATI:

ADABIYOTLAR RO'YXATI

I.O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoev Sh.M. Yangi O'zbekiston demokratik o'zgarishlar, keng imkoniyatlar va amaliy ishlar mamlakatiga aylanmoqda. – T.: “O'zbekiston”, 2021. – 184 b.
2. Mirziyoev Sh.M. Yangi O'zbekiston strategiyasi. – T.: “O'zbekiston”, 2021. – 458 b.
3. Mirziyoev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O'zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoev Sh.M. Niyati ulug' xalqning ishi ham ulug', hayoti yorug' va kelajagi farovon bo'ladi. 3-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O'zbekiston, 2018.
7. O'zbekiston Respublikasining 2020 yil 23 sentyabrda qabul qilingan “Ta'lim to'g'risida”gi O'RQ-637-sonli Qonuni.
8. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevral “O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida”gi 4947-sonli Farmoni.
9. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 26 sentyabr “Oliy ta'lim muassasalariga kirish uchun nomzodlarni maksadli tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida”gi PQ-3290-sonli Qarori.
10. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 8 oktyabr “O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
11. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 29 oktyabr “Ilm-fanni 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.
12. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida”gi PQ-4708-sonli Qarori.
17. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 3 dekabrda “Iqtidorli

yoshlarni saralab olish tizimi va akademik litseylar faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-4910-son Qarori.

18. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2022 yil 1iyundagi “Akademik litseylar rahbar va pedagog xodimlarining uzduksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida” 296-son Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

19. Sharipov A.S., Topvoldiyev F.F. On Invariants of Surfaces with Isometric on Sections, Mathematics and Statistics 10(3): 523-528, 2022. Scopus DOI: 10.13189/ms.2022.100307

20. T.I. Buxarova, S.A. Grishin, O.V. Nagornov, D.G. Orlovskiy, Ye.X. Sadekova, Ye.B. Sandakov Otraselevaya fiziko-matematicheskaya olimpiada shkolnikov «Rosatom». Matematika. V pomosh shkolnikam 7–11 klassov: *Uchebno-metodicheskoe posobie* /; pod red. O.V. Nagornova. – M.: NIYaU MIFI, 2018. – 126 s.

21. Sharipov A., Keunimjayev M. Existence and uniqueness of polyhedral with given value of the conditional curvature, International Electronic Journal of Geometry, 2023, Vol. 16, No. 1, pp. 160-170 (**Scopus**).

22. Suprun V.P. Matematika dlya starsheklassnikov: Nestandartnye metody resheniya zadach. M.: Knizhnyy dom «LIBROKOM», 2009. –272 s.

23. Arslanov M.M. Znamenitye matematicheskie problemy. - Kazan: Kazanskiy federalnyy universitet, 2012.

24. Kravsev S.V. i drugie Metody resheniya zadach po algebre: otprostykh do samykh slojnykh. -M.: Ekzamen, 2001 –544 s.

25. Nouh Hassan Mathematics Function. Translated by: Diab Publishing & Distribution, 2019. –461p. www.Diab-publishing.com

IV. Internet saytlar

26. <http://edu.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi

27. <http://lex.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi

28. <http://lib.bimm.uz> – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi

29. <http://ziyonet.uz> – Ta’lim portali Ziyonet
30. <http://natlib.uz> – Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi
31. <https://problems.ru/> - Matematikadan masalalar.