

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG  
KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING  
MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG  
KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING  
MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI**

## **CHIZIQLI ALGEBRANING TATBIQLARI**

**Tuzuvchi:**

**Bozorov Z.R.**

**f.-m. f.f.d. (PhD) dots.**



**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG  
KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI  
OSHIRISH MINTAQAVIY MARKAZI**

**“CHIZIQLI ALGEBRANING  
TATBIQLARI”**

**MODULI BO‘YICHA**

**O‘QUV-USLUBIY MAJMUA**

**Matematika va amaliy matematika**

**Buxoro – 2025**

Modulning o'quv-uslubiy majmuasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024 yil 27 dekabrda 485-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan o'quv dasturi va o'quv rejasiga muvofiq ishlab chiqilgan.

**Tuzuvchi: Bozorov Z.R.** – fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.

**Taqrizchi: Jumayev J.J.** – fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent.

**O'quv -uslubiy majmua Buxoro davlat universiteti Ilmiy  
Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan  
(2024 yil "27" dekabrda 5-sonli bayonnoma)**

## **MUNDARIJA**

|                                                                                     |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>I. ISHCHI DASTUR .....</b>                                                       | <b>5</b>   |
| <b>II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL<br/>TA’LIM METODLARI .....</b> | <b>17</b>  |
| <b>III. NAZARIY MATERIALLAR .....</b>                                               | <b>29</b>  |
| <b>IV. AMALIY MASHG‘ULOT MATERIALLARI .....</b>                                     | <b>90</b>  |
| <b>V. GLOSSARIY .....</b>                                                           | <b>115</b> |
| <b>VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI.....</b>                                                | <b>121</b> |

# **I. ISHCHI DASTUR**

## **Kirish**

Ushbu dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida” Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi “Oliy ta’lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to‘g‘risida” PF-4732-son, 2019-yil 27-avgustdagi “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida” PF-5789-son, 2019-yil 8-oktabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida” PF-5847-son, 2020-yil 29-oktabrdagi “Ilm-fanni 2030- yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida” PF-6097-son, 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” PF-60-son, 2023-yil 25-yanvardagi “Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo‘lga qo‘yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to‘g‘risida” PF-14-son, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 11-sentabrdagi ““O‘zbekiston — 2030” strategiyasi to‘g‘risida” PF-158-son Farmonlari, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2024-yil 21-iyundagi “Aholi va davlat xizmatchilarining korrupsiyaga qarshi kurashish sohasidagi bilimlarini uzluksiz oshirish tizimini joriy qilish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-228-son, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2021-yil 17-fevraldagi “Sun’iy intellekt texnologiyalarini jadal joriy etish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-4996-son qarorlari va O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining “Oliy ta’lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo‘yicha qo‘shimcha chora- tadbirlar to‘g‘risida” 2019-yil 23-sentabrdagi 797-son hamda O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining “Oliy ta’lim tashkilotlari rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini samarali tashkil qilish chora-

tadbirlari to'g'risida" 2024-yil 11-iyuldagi 415-son Qarorlarida belgilangan ustuvor vazifalar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo'lib, u oliy ta'lim muassasalari pedagog kadrlarining kasb mahorati hamda innovatsion kompetentligini rivojlantirish, sohaga oid ilg'or xorijiy tajribalar, yangi bilim va malakalarni o'zlashtirish, shuningdek amaliyotga joriy etish ko'nikmalarini takomillashtirishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan mavzular ta'lim sohasi bo'yicha pedagog kadrlarni qayta tayyorlash va malakasini oshirish mazmuni, sifati va ularning tayyorgarligiga qo'yiladigan umumiy malaka talablari va o'quv rejalari asosida shakllantirilgan bo'lib, uning mazmuni yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma'naviy asoslarini yoritib berish, oliy ta'limning normativ-huquqiy asoslari bo'yicha ta'lim-tarbiya jarayonlarini tashkil etish, pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalarni rivojlantirish, ilmiy-innovatsion faoliyat darajasini oshirish, pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish, ta'lim sifatini ta'minlashda baholash metodikalaridan samarali foydalanish, chiziqli algebraning tatbiqlaridan foydalanish, tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirishni o'zlashtirish bo'yicha tegishli bilim, ko'nikma, malaka va kompetensiyalarni rivojlantirishga yo'naltirilgan.

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining o'quv dasturi quyidagi modullar mazmunini o'z ichiga qamrab oladi:

- 1.1. Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi va jamiyatning ma'naviy asoslari.
- 1.2. Oliy ta'limning normativ huquqiy asoslari hamda tizimda korrupsiya va manfaatlar to'qnashuvining oldini olish.
- 1.3. Pedagogik faoliyatda raqamli kompetensiyalar.
- 1.4. Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish.
- 1.5. Pedagogning kasbiy kompetensiyalarini rivojlantirish.
- 1.6. Ta'lim sifatini ta'minlashda baholash metodikalari.
- 1.7. Chiziqli algebraning tatbiqlari.

## 1.8. Tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirish.

### **Malakaviy attestatsiya**

#### **Kursning maqsadi va vazifalari**

Oliy ta'lim muasasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish kursining **maqsadi** pedagog kadrlarning innovatsion yondoshuvlar asosida o'quv-tarbiyaviy jarayonlarni yuksak ilmiy-metodik darajada loyihalashtirish, sohadagi ilg'or tajribalar, zamonaviy bilim va malakalarni o'zlashtirish va amaliyotga joriy etishlari uchun zarur bo'ladigan kasbiy bilim, ko'nikma va malakalarini takomillashtirish, shuningdek ularning ijodiy faolligini rivojlantirishdan iborat

Kursning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

**“Matematika va amaliy matematika”** yo'nalishida pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko'nikma, malakalarini takomillashtirish va rivojlantirish;

-pedagoglarning ijodiy-innovatsion faollik darajasini oshirish;

-pedagog kadrlar tomonidan zamonaviy axborot-kommunikatsiya texnologiyalari, zamonaviy ta'lim va innovatsion texnologiyalar sohasidagi ilg'or xorijiy tajribalarning o'zlashtirilishini ta'minlash;

-o'quv jarayonini tashkil etish va uning sifatini ta'minlash borasidagi ilg'or xorijiy tajribalar, zamonaviy yondashuvlarni o'zlashtirish;

**“Matematika va amaliy matematika”** yo'nalishida qayta tayyorlash va malaka oshirish jarayonlarini fan va ishlab chiqarishdagi innovatsiyalar bilan o'zaro integratsiyasini ta'minlash.

#### **Kurs yakunida tinglovchilarning bilim, ko'nikma va malakalari hamda kompetensiyalariga qo'yiladigan talablar:**

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursining “Chiziqli algebraning tatbiqlari” o'quv moduli bo'yicha tinglovchilar quyidagi yangi bilim, ko'nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo'lishlari talab etiladi:

- zamonaviy algebraning xozirgi kundagi dolzarb masalalarini;
- zamonaviy algebrada foydalaniladigan chiziqli algebra elementlarini;

- chiziqli algebra tushunchalari, ta'riflar va ularning tatbiqlarini;
- chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalarni;
- vektor vazolar, chiziqli bog'liqlilik va chiziqli erklilik, bazis va o'lcham, qism fazo tushunchalarini;

- Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar, chiziqli almashtirishning matritsasi, chizqli almashtirishning yadrosi va obrazini;

- teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usullarini ***bilishi*** kerak.

**Tinglovchi:**

- chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalarni yechish;
- vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar, chiziqli almashtirishning matritsasi, chizqli almashtirishning yadrosi va obrazidan foydalanish;

- matritsalar nazariyasini o'zlashtirish, matritsalarining paydo bo'lish tarixini tahlil etish;

- chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullaridan foydalanish;
- matritsalar va ular ustida amallar bajarish ***ko'nikmalariga*** ega bo'lishi lozim.

**Tinglovchi:**

- chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalardan foydalanish;
- chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalarini ishlab chiqish;
- chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllarini qo'llash;
- chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo'llash ***malakalariga*** ega bo'lishi lozim.

**Tinglovchi:**

- chiziqli algebrada tatbiq etilgan modullardan foydalanish;
- chiziqli algebra tushunchalari, ta'riflarini o'zlashtirish va ularni tatbiq etish;

- chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko'rinishidagi va regular matritsalarini qo'llash;

- zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra

elementlari va usullaridan foydalanish *kompetensiyalariga* ega bo'lishi lozim.

### **Modul hajmi**

Qayta tayyorlash va malaka oshirish kursi "Chiziqli algebraning tatbiqlari" moduli 28 soatni tashkil etadi. Bunda 8 soat ma'ruza, 8 soat amaliy va 12 soat ko'chma mashg'ulot rejalashtirilgan.

## **"MATEMATIKA VA AMALIY MATEMATIKA" YO'NALISHI BO'YICHA QAYTA TAYYORLASH VA MALAKA OSHIRISH KURSINING "CHIZIQLI ALGEBRANING TATBIQLARI" O'QUV MODULI MAZMUNI**

### **1.7. Chiziqli algebraning tatbiqlari.**

Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari. Zamonaviy algebrada foydalaniladigan chiziqli algebra elementlari. Chiziqli algebrada tatbiq etilgan modular. Chiziqli algebra va uning elementlariga doir masalalar. Chiziqli algebra tushunchalari, ta'riflar va ularning tatbiqlari. Matritsalar nazariyasi, matritsalarining paydo bo'lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar. Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o'lchami tushunchalari.

Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. Chiziqli almashtirishlarning matritsalarini. Matritsalarining normal formasi va ularning qo'llanishlari. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko'rinishidagi va regular matritsalarining qo'llanilishi. Vektor vazolar, chiziqli bog'liqlilik va chiziqli erklilik. Bazis va o'lcham, qism fazo tushunchalari. Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli almashtirishning matritsasi. Chiziqli almashtirishning yadrosi va obrazi. Chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllari. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo'llanilishi. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va

usullaridan foydalanish.

**“Chiziqli algebraning tatbiqlari” moduli bo'yicha soatlar taqsimoti**

| <b>№</b>     | <b>Modul mavzulari</b>                                                                             | <b>Ha<br/>mm<br/>asi</b> | <b>Jumladan</b>     |                    |                                         |
|--------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|---------------------|--------------------|-----------------------------------------|
|              |                                                                                                    |                          | <b>Nazar<br/>iy</b> | <b>Ama<br/>liy</b> | <b>Ko'ch<br/>ma<br/>mash<br/>g'ulot</b> |
| 1            | Matritsalar nazariyasi, matritsalarining paydo bo'lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. | 6                        | 2                   | 2                  | 2                                       |
| 2            | Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o'lchami tushunchalari.                                 | 6                        | 2                   | 2                  | 2                                       |
| 3            | Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar.                                                     | 8                        | 2                   | 2                  | 4                                       |
| 4            | Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli almashtirishning matritsasi.                    | 8                        | 2                   | 2                  | 4                                       |
| <b>Jami:</b> |                                                                                                    | <b>28</b>                | <b>8</b>            | <b>8</b>           | <b>12</b>                               |

**NAZARIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI**

**1-mavzu: Matritsalar nazariyasi, matritsalarining paydo bo'lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. (2 soat ma'ruza)**

Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari. Chiziqli algebra tushunchalari, ta'riflar va ularning tatbiqlari. Matritsalar nazariyasi, matritsalarining paydo bo'lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar.

**2-mavzu: Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o'lchami tushunchalari. (2 soat ma'ruza)**

Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o'lchami tushunchalari.

### **3-mavzu: Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. (2 soat ma'ruza )**

Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. Chiziqli almashtirishlarning matritsalarini. Matritsalarining normal formasi va ularning qo'llanishlari. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko'rinishidagi va regular matritsalarining qo'llanilishi.

### **4-mavzu: Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli almashtirishning matritsasi. (2 soat ma'ruza).**

Vektor vazolar, chiziqli bog'liqlilik va chiziqli erklilik. Bazis va o'lcham, qism fazo tushunchalari. Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli almashtirishning matritsasi. Chiziqli almashtirishning yadrosi va obrazi. Chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllari. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo'llanilishi. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish.

## **AMALIY MASHG'ULOTLAR MAZMUNI**

### **1-mavzu: Matritsalar nazariyasi, matritsalarining paydo bo'lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. (2 soat amaliy mashg'ulot)**

Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari. Chiziqli algebra tushunchalari, ta'riflar va ularning tatbiqlari. Matritsalar nazariyasi, matritsalarining paydo bo'lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar.

### **2-mavzu: Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o'lchami tushunchalari. (2 soat amaliy mashg'ulot)**

Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o'lchami tushunchalari.

### **3-mavzu: Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. (2 soat amaliy mashg'ulot)**

Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. Chiziqli almashtirishlarning

matritsalarini. Matritsalarining normal formasi va ularning qo'llanishlari. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko'rinishidagi va regular matritsalarining qo'llanilishi.

#### **4-mavzu: Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli almashtirishning matritsasi. (2 soat amaliy mashg'ulot).**

Vektor vazolar, chiziqli bog'liqlilik va chiziqli erklilik. Bazis va o'lcham, qism fazo tushunchalari. Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli almashtirishning matritsasi. Chiziqli almashtirishning yadrosi va obrazi. Chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllari. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo'llanilishi. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish.

### **AMALIY MASHG'ULOTLARNI TASHKIL ETISH MAZMUNI**

Amaliy mashg'ulotlarda tinglovchilar modul doirasidagi ijodiy topshiriqlar, keyslar, o'quv loyihalari, texnologik jarayonlar bilan bog'liq vaziyatli masalalar asosida amaliy ishlarni bajaradilar.

Amaliy mashg'ulotlar zamonaviy ta'lim uslublari va innovatsion texnologiyalarga asoslangan holda o'tkaziladi. Bundan tashqari, mustaqil holda o'quv va ilmiy adabiyotlardan, elektron resurslardan, tarqatma materiallardan foydalanish tavsiya etiladi.

### **KO'CHMA MASHG'ULOTLAR MAZMUNI**

#### **1-mavzu: Matritsalar nazariyasi, matritsalarining paydo bo'lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. (2 soat ko'chma mashg'ulot)**

Zamonaviy algebraning hozirgi kundagi dolzarb masalalari. Chiziqli algebra tushunchalari, ta'riflar va ularning tatbiqlari. Matritsalar nazariyasi, matritsalarining paydo bo'lish tarixi. Matritsalar va ular ustida amallar. Teskari matritsa va ularni topishning Gaus-Jordan usuli. Matritsalar yordamida yechiladigan masalalar.

**2-mavzu: Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o'lchami  
tushunchalari. (2 soat ko'chma mashg'ulot)**

Chiziqli fazo, chiziqli fazoning bazisi va o'lchami tushunchalari.

**3-mavzu: Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. (4 soat ko'chma  
mashg'ulot)**

Chiziqli almashtirishlar va chiziqli formalar. Chiziqli almashtirishlarning matritsalarini. Matritsalarining normal formasi va ularning qo'llanishlari. Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda yuqori uchburchak ko'rinishidagi va regular matritsalarining qo'llanilishi.

**4-mavzu: Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli  
almashtirishning matritsasi. (4 soat ko'chma mashg'ulot).**

Vektor vazolar, chiziqli bog'liqlilik va chiziqli erklilik. Bazis va o'lcham, qism fazo tushunchalari. Vektor fazodagi chiziqli almashtirishlar. Chiziqli almashtirishning matritsasi. Chiziqli almashtirishning yadrosi va obrazi. Chiziqli almashtirish matritsasining turli normal shakllari. Chiziqli almashtirishlar va ularning matritsalarini graflar nazariyasi va information texnologiyalar sohasida qo'llanilishi. Zamonaviy algebraning dolzarb masalalarini yechishda chiziqli algebra elementlari va usullaridan foydalanish.

**KO'CHMA MASHG'ULOTLARNI TASHKIL ETISH BO'YICHA  
KO'RSATMA VA TAVSIYALAR**

Ko'chma mashg'ulotlar zamonaviy jihozlar hamda innovatsion texnologiyalarni qo'llab faoliyat yuritayotgan ishlab chiqarish korxona va tashkilotlari, oliy ta'lim muassasalari, iqtisodiyot tarmoqlari, ilmiy-tadqiqot va loyiha-konstruktorlik muassasalarida olib boriladi.

## **I. MODULNI O'QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA'LIM METODLARI**

**BINAR MA'RUZA.** “Binar”s o‘zi lotinchadan olingan bo‘lib, “qo‘sh”, “ikki” degan ma’noda qo‘llaniladi. Bunday mashg‘ulotning olib borilishi ikki vakil: o‘qituvchi va metodist; o‘qituvchi va o‘quvchi; taklif etilgan mutaxassis va o‘qituvchi; o‘qituvchi va tyutor (maslahatchi) o‘rtasidagi interfaol suhbat, bahs-munozara va axborotlar almashinuvini namoyon qiladi. Jarayonni bunday tashkillashtirishdan ko‘zlangan asosiy maqsad yangi o‘quv ma’lumotlari va axborotlarini ikki mutaxassis yoki ishtirokchi nuqtayi nazarlarini taqqoslash orqali yoritib berishdan iborat.

**TRENING.** Trening zamonaviy ta’lim shakllaridan biri hisoblanib, u interfaol mashg‘ulotlarni amalga oshirishning o‘ziga xos ko‘rinishidir. Treninglar o‘rganilishi lozim bo‘lgan nazariy g‘oya va fikrlarni amaliy ish hamda mashqlar davomida o‘zlashtirish imkoniyatini beradi va ta’lim oluvchilarda shaxslararo o‘zaro hamkorlikning samarali ko‘nikmasini shakllantirishga, shuningdek, mutaxassis kasbiy kompetentligining umumiy darajasini oshirishga yo‘naltiriladi.

Har qanday pedagogik treningni tashkil etish quyidagi bosqichlardan tashkil topadi:

1. Tashkiliy bosqich: guruhni yig‘ish yoki shakllantirish.
2. Boshlang‘ich bosqich: guruh me‘yorlarini ishlab chiqish, tanishuv va mashg‘ulotdan kutuvlarni aniqlash.
3. Faoliyatli bosqich: trening turi va o‘tkazish metodikasini belgilash.
4. Yakuniy bosqich (refleksiya).

Trening mobaynida talabalar nazariy ma’lumotlarni o‘zlashtirish bilan birga, ularda bilish, emmotsional va xulq-atvor ko‘nikmalari ham rivojlanib boradi.

**“SWOT-TAHLIL” METODI.** Metodning maqsadi: mavjud nazariy bilimlar va amaliy tajribalarni tahlil qilish, taqqoslash orqali muammoni hal etish yo‘llarni topishga, bilimlarni mustahkamlash, takrorlash, baholashga, mustaqil, tanqidiy fikrlashni, nostandart tafakkurni shakllantirishga xizmat qiladi.

S – (strength) kuchli tomonlari

W – (weakness) zaif, kuchsiz tomonlari

O – (opportunity) imkoniyatlari

T – (threat) to'siqlar

**“KEYS-STADI” METODI.** «Keys-stadi» - inglizcha soʻz boʻlib, («case» – aniq vaziyat, hodisa, «study» – oʻrganmoq, tahlil qilmoq) aniq vaziyatlarni oʻrganish, tahlil qilish asosida oʻqitishni amalga oshirishga qaratilgan metod hisoblanadi. Keysda ochiq axborotlardan yoki aniq voqyea-hodisadan vaziyat sifatida tahlil uchun foydalanish mumkin.

Mazkur metod muammoli taʼlim metodidan farqli ravishda real vaziyatlarni oʻrganish asosida aniq qarorlar qabul qilishga asoslanadi. Agar u oʻquv jarayonida maʼlum bir maqsadga erishish yoʻli sifatida qoʻllanilsa, metod xarakteriga ega boʻladi, biror bir jarayonni tadqiq etishda bosqichma-bosqich, maʼlum bir algoritm asosida amalga oshirilsa, texnologik jihatni oʻzida aks ettiradi

“Keys metodi” ni amalga oshirish bosqichlari Ish bosqichlari Faoliyat shakli va mazmuni

1-bosqich: Keys va uning axborot taʼminoti bilan tanishtirish

- yakka tartibdagi audio-vizual ish;
- keys bilan tanishish (matnli, audio yoki media shaklda);
- axborotni umumlashtirish;
- axborot tahlili;
- muammolarni aniqlash

2-bosqich: Keysni aniqlashtirish va oʻquv topshirigʻni belgilash

- individual va guruhda ishlash;
- muammolarni dolzarblik iyerarxiasini aniqlash;
- asosiy muammoli vaziyatni belgilash

3-bosqich: Keysdagi asosiy muammoni tahlil etish orqali oʻquv topshirigʻining yechimini izlash, hal etish yoʻllarini ishlab chiqish

- individual va guruhda ishlash;
- muqobil yechim yoʻllarini ishlab chiqish;

- har bir yechimning imkoniyatlari va to'siqlarni tahlil qilish;
- muqobil yechimlarni tanlash

4-bosqich: Keys yechimini shakllantirish va asoslash, taqdimot.

- yakka va guruhda ishlash;
- muqobil variantlarni amalda qo'llash imkoniyatlarini asoslash;
- ijodiy-loyiha taqdimotini tayyorlash;
- yakuniy xulosa va vaziyat yechimining amaliy aspektlarini yoritish

“Keys-stadi” metodining o'ziga xos xususiyatlari:

- izlanishga doir faoliyatning mavjud bo'lishi.
- jamoaviy va guruhlarda o'qitish.
- individlul, guruhli va jamoaviy ish shakllari integrasiyasi.
- xilma-xil o'quv loyihalarini ishlab chiqish.
- muvaffaqiyatga erishish uchun ta'lim oluvchilarning o'quv-bilish faoliyatini rag'batlantirish

Keys harakatlari o'z ichiga quyidagilar savollar bo'yicha faoliyatni qamrab oladi:

- Kim? (Who?)
- Qachon? (When?)
- Qayerda? (Where?)
- Nima uchun? (Why?)
- Qanday?/ Qanaqa? (How?)
- Nima? (natija) (What?).

**Keys.** 5-sinf darsligining sizga taqdim etilgan bitta mavzusi materiallari bo'yicha keys topshirig'ini tuzing, bu keys asosida o'tiladigan darsni loyihalashtiring, u bo'yicha taqdimot tayyorlang va uni namoyish eting.

**«FSMU» METODI.** Metodning maqsadi: Mazkur metod ishtirokchilardagi umumiy fikrlardan xususiy xulosalar chiqarish, taqqoslash, qiyoslash orqali axborotni o'zlashtirish, xulosalash, shuningdek, mustaqil ijodiy fikrlash ko'nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi. Mazkur metoddan ma'ruza mashg'ulotlarida, mustahkamlashda, o'tilgan mavzuni so'rashda, uyga vazifa

berishda hamda amaliy mashg'ulot natijalarini tahlil etishda foydalanish tavsiya etiladi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- qatnashchilarga mavzuga oid bo'lgan yakuniy xulosa yoki g'oya taklif etiladi;
- har bir ishtirokchiga FSMU metodining bosqichlari yozilgan qog'ozlarni tarqatiladi;
- ishtirokchilarning munosabatlari individual yoki guruhliy tartibda taqdimot qilinadi.

FSMU tahlili qatnashchilarda kasbiy-nazariy bilimlarni amaliy mashqlar va mavjud tajribalar asosida tezroq va muvaffaqiyatli o'zlashtirilishiga asos bo'ladi.

*Namuna.*

Fikr: PISA va TIMSS qiyosiy xalqaro tadqiqotlar natijalari mamlakatimizda matematika fanini o'qitish tizimini tahlil qilish va takomillashtirishni taqozo etadi.

Topshiriq: Mazkur fikrga nisbatan munosabatingizni FSMU orqali tahlil qiling.

**“TUSHUNCHALAR TAHLILI” METODI.** Metodning maqsadi: mazkur metod o'quvchilar yoki qatnashchilarni mavzu buyicha tayanch tushunchalarni o'zlashtirish darajasini aniqlash, o'z bilimlarini mustaqil ravishda tekshirish, baholash, shuningdek, yangi mavzu buyicha dastlabki bilimlar darajasini tashxis qilish maqsadida qo'llaniladi. Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar mashg'ulot qoidalarini bilan tanishtiriladi;
- o'quvchilarga mavzuga yoki bobga tegishli bo'lgan so'zlar, tushunchalar nomi tushirilgan tarqatmalar beriladi ( individual yoki guruhli tartibda);
- o'quvchilar mazkur tushunchalar qanday ma'no anglatishini, qachon, qanday xolatlarda qo'llanilishi haqida yozma ma'lumotlar beradilar ;
- Belgilangan vaqt yakuniga yetgach o'qituvchi berilgan tushunchalarning to'g'ri va to'liq izohini o'qib eshittiradi yoki slayd orqali namoyish etadi;
- Har bir ishtirokchi berilgan to'g'ri javoblar bilan o'zining ishini taqqoslaydi, farqlarini aniqlaydi va o'z bilim darajasini tekshirib, baholaydi.

**VENN DIAGRAMMASI METODI.** Venn diagrammasi - grafik ko'rinishda

bo'lib, olingan natijalarni umumlashtirib, ulardan bir butun xulosa chiqarishga, ikki va undan ortiq predmetlarni (ko'rinish, fakt, tushuncha) taqqoslash, tahlil qilish va o'rganishda qo'llaniladi. Diagramma ikki va undan ortiq aylanani kesishmasidan hosil bo'ladi.

Metodning maqsadi: Bu metod grafik tasvir orqali o'qitishni tashkil etish shakli bo'lib, u ikkita o'zaro kesishgan aylana tasviri orqali ifodalanadi. Mazkur metod turli tushunchalar, asoslar, tasavurlarning analiz va sintezini ikki aspekt orqali ko'rib chiqish, ularning umumiy va farqlovchi jihatlarini aniqlash, taqqoslash imkonini beradi.

Metodni amalga oshirish tartibi:

- ishtirokchilar ikki kishidan iborat juftliklarga birlashtiriladilar va ularga ko'rib chiqilayotgan tushuncha yoki asosning o'ziga xos, farqli jihatlarini (yoki aksi) doiralar ichiga yozib chiqish taklif etiladi;

- navbatdagi bosqichda ishtirokchilar to'rt kishidan iborat kichik guruhlariga birlashtiriladi va har bir juftlik o'z tahlili bilan guruh a'zolarini tanishtiradilar;

- juftliklarning tahlili eshitilgach, ular birgalashib, ko'rib chiqilayotgan muammo yohud tushunchalarning umumiy jihatlarini (yoki farqini) izlab topadilar, umumlashtiradilar va doirachalarning kesishgan qismiga yozadilar.

*Namuna:* PISA va TIMSS xalqaro tadqiqotlar natijalarini qiyosiy tahlil qiling.

**KICHIK GURUHLARDA ISHLASH METODI.** Kichik guruhlarda ishlash orqali o'rganish - ma'lum muammoning yechimini topishga va o'quvchilar faolligini oshirishga qaratilgan darsdagi ijodiy hamkorlikdagi ish. Bosqichlari: guruhlariga bo'lish, muammoni guruhlarda muxokama qilish, muammoning yechimlari taqdimoti, xulosalash.

*Kichik guruhlarda hamkorlikda o'qitish*

Bu yondashuvda kichik guruhlar 4 ta o'quvchidan tashkil topadi. O'qituvchi avval mavzuni tushuntiradi, so'ngra o'quvchilarning mustaqil ishlari tashkil etiladi. O'quvchilarga berilgan o'quv topshiriqlari 4 qismga ajratilib, har bir o'quvchi topshiriqning ma'lum qismini bajaradi. Topshiriq yakunida har bir o'quvchi o'zi bajargan qism yuzasidan fikr yuritib, o'rtoqlarini o'qitadi, so'ngra guruh a'zolari

tomonidan topshiriq yuzasidan umumiy xulosa chiqariladi. O'qituvchi har bir kichik guruh axborotini tinglaydi va test savollari yordamida bilimlarni nazorat qilib baholaydi.

O'quvchilarning kichik guruhlardagi o'quv faoliyati o'yin (turnir, musobaqa) shaklida, individual tarzda ham tashkil etilishi mumkin

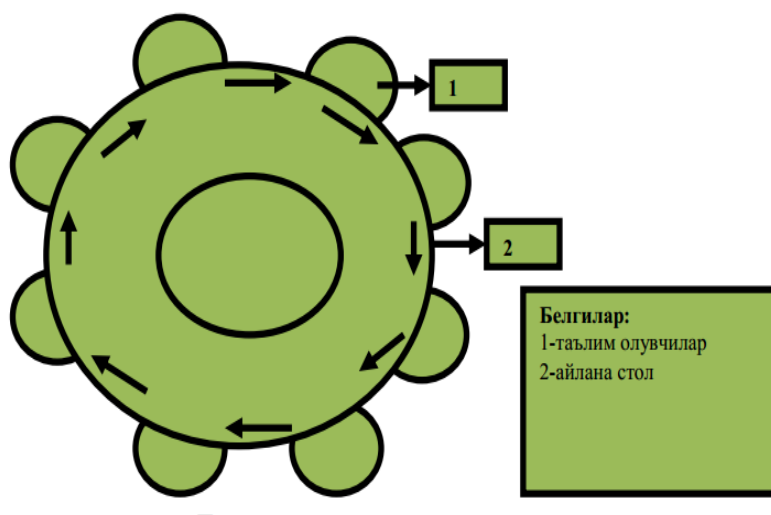
#### *Kichik guruhlarda ijodiy izlanishni tashkil etish*

Kichik guruhlarda ijodiy izlanishni tashkil etish metodi 1976 yili Tel-Aviv universiteti professori Sh.Sharan tomonidan ishlab chiqilgan. Bu metodda ko'proq o'quvchilarning mustaqil va ijodiy ishiga e'tibor qaratiladi.

O'quvchilar alohida-alohida yoki 6 kishilik kichik guruhlarda ijodiy izlanish olib boradilar. Ijodiy izlanish kichik guruhlarda tashkil etilganda darsda o'rganish lozim bo'lgan o'quv materiali kichik qismlarga ajratiladi. Keyin bu qismlar yuzasidan topshiriqlar har bir o'quvchiga taqsimlanadi. Shunday qilib, har bir o'quvchi umumiy topshiriqning bajarilishiga o'z hissasini qo'shadi. Kichik guruhlarda topshiriq yuzasidan munozara o'tkaziladi. Guruh a'zolari birgalikda ma'ruza tayyorlaydi va sinf o'quvchilari o'rtasida o'z ijodiy izlanishlari natijasini e'lon qiladi. Kichik guruhlar o'rtasida o'tkazilgan o'quv bahsi, munozara o'quvchilar jamoasining hamkorlikda bajargan mustaqil faoliyatining natijasi, yakuni sanaladi. Hamkorlikda ishlash natijasida qo'lga kiritilgan muvaffaqiyatlar sinf jamoasining har bir o'quvchining muntazam va faol aqliy mehnat qilishiga, kichik guruhlarini, umuman sinf jamoasini jipslashtirishga, avval o'zlashtirilgan bilim, ko'nikma va malakalarni yangi kutilmagan vaziyatlarda qo'llanib, yangi bilimlarning o'zlashtirishiga bog'liq bo'ladi.

**“DAVRA SUHBATI” METODI** – aylana stol atrofida berilgan muammo yoki savollar yuzasidan ta'lim oluvchilar tomonidan o'z fikr-mulohazalarini bildirish orqali olib boriladigan o'qitish metodidir. “Davra suhbat” metodi qo'llanilganda stol-stullarni doira shaklida joylashtirish kerak. Bu har bir ta'lim oluvchining biri bilan “ko'z aloqasi”ni o'rnatib turishiga yordam beradi. Davra suhbatining og'zaki va yozma shakllari mavjuddir. Og'zaki davra suhbatida ta'lim beruvchi mavzuni boshlab beradi va ta'lim oluvchilardan ushbu savol bo'yicha o'z fikr-

mulohazalarini bildirishlarini s o'raydi va aylana bo'ylab har bir ta'lim oluvchio'z fikr-mulohazalarini og'zaki bayon etadilar. S o'zlayotgan ta'lim oluvchini barcha diqqat bilan tinglaydi, agar muhokama qilish lozim bo'lsa, barcha fikr-mulohazalar tinglanib bo'lingandan s o'ng muhokama qilinadi. Bu esa ta'lim oluvchilarning mustaqil fikrlashiga va nutq madaniyatining rivojlanishiga yordam beradi. Quyida "Davra suhbat" metodining tuzilmasi keltirilgan.



### **Rasm. Davra stolining tuzilmasi**

Yozma davra suhbatida ham stol-stullar aylana shaklida joylashtirilib, har bir ta'lim oluvchiga convert qog'ozi beriladi. Har bir ta'lim oluvchi convert ustiga ma'lum bir mavzu bo'yicha o'z savolini beradi va "Javob varaqasi"ning biriga o'z javobini yozib, convert ichiga solib qo'yadi. Shundan s o'ng konvertni soat yo'nalishi bo'yicha yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi. Konvertni olgan ta'lim oluvchio'z javobini "Javoblar varaqasi"ning biriga yozib, konvert ichiga solib qo'yadi va yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi. Barcha konvertlar aylana bo'ylab harakatlanadi. Yakuniy qismda barcha konvertlar yig'ib olinib, tahlil qilinadi.

#### **"Davra suhbat" metodining bosqichlari quyidagilardan iborat:**

1. Mashg'ulot mavzusi e'lon qilinadi.
2. Ta'lim beruvchi ta'lim oluvchilarni mashg'ulotnio'tkazish tartibi bilan tanishtiradi.
3. Har bir ta'lim oluvchiga bittadan konvert va javoblar yozish uchun guruhda necha ta'lim oluvchi bo'lsa, shunchadan "Javoblar varaqalari"ni tarqatilib, har bir

javobni yozish uchun ajratilgan vaqt belgilab qo'yiladi. Ta'lim oluvchi konvertga va "Javoblar varaqalari"ga o'z ismi-sharifini yozadi.

4. Ta'lim oluvchi konvert ustiga mavzu bo'yicha o'z savolini yozadi va "Javoblar varaqasi"ga o'z javobini yozib, konvert ichiga solib qo'yadi.

5. Konvertga savol yozgan ta'lim oluvchi konvertni soat yo'nalishi bo'yicha yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi.

6. Konvertni olgan ta'lim oluvchi konvert ustidagi savolga "Javoblar varaqalari"dan biriga javob yozadi va konvert ichiga solib qo'yadi hamda yonidagi ta'lim oluvchiga uzatadi.

7. Konvert davra stoli bo'ylab aylanib, yana savol yozgan ta'lim oluvchining o'ziga qaytib keladi. Savol yozgan ta'lim oluvchi konvertdagi "Javoblar varaqalari"ni baholaydi.

8. Barcha konvertlar yig'ib olinadi va tahlil qilinadi.

Ushbu metod orqali ta'lim oluvchilar berilgan mavzu bo'yicha o'zlarining bilimlarini qisqa va aniq ifoda eta oladilar. Bundan tashqari ushbu metod orqali ta'lim oluvchilarni muayyan mavzu bo'yicha baholash imkoniyati yaratiladi. Bunda ta'lim oluvchilarning bergan savollariga guruhdagi boshqa ta'lim oluvchilar bergan javoblarini baholashlari va ta'lim beruvchi ham ta'lim oluvchilarni obyektiv baholashi mumkin.

**MUAMMOLI TA'LIM METODI.** Ta'lim jarayonida o'quvchilarning bilish faoliyatini faollashtirish hamda ularning intellektual imkoniyatlaridan yuqori darajada foydalanish quyidagi umumiy omillarga bog'liq bo'ladi:

- o'rganilayotgan mavzu yuzasidan muammoli savollar tizimi tuzish;
- qo'yilgan muammoli savollar tizimi asosida suhbat metodi orqali tushuntiriladigan mavzu materiallarini o'rgatish va uning tub mohiyatini ochib berish;
- muammoli savol asosida izlanish xarakteridagi o'quv vazifalarini qo'yish.

Yuqoridagi bosqichlar asosida o'quv materiali tushuntiriladiganda o'quvchilar o'zlari darrov tushunib yetmaydigan fakt va tushunchalarga duch keladilar. Natijada o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasida muammoli vaziyat hosil bo'ladi.

Muammoli vaziyatning roli va ahamiyatini aniqlash o'quvchilarning aktiv fikrlash faoliyatini psixologik, pedagogik qonuniyatlarini hisobga olish asosida o'quv jarayonini qayta qurish muammoli ta'limning asosiy g'oyasini belgilab beradi. Muammoli vaziyatlarni hal qilish asosida hosil qilingan dars jarayoni muammoli ta'lim deyiladi.

Muammoli ta'limda o'qituvchi faoliyati shundan iboratki, u zarur hollarda eng murakkab tushunchalar mazmunni tushuntira borib o'rganilayotgan mavzu materiali bilan o'quvchilar orasidagi muntazam ravishda muammoli vaziyatlar vujudga keltiriladi, o'quvchilarni faktlardan xabardor qiladi, natijada o'quvchilar bu faktlarni analiz qilish asosida mustaqil ravishda xulosa chiqaradilar va umumlashtiradilar.

**EVRISTIK TA'LIM METODI.** Evristika degan so'zning ma'nosi savol javobga asosan "topaman" demakdir. Evristik metod bilan o'qitish maktablarda asosan XIX asr boshlaridan boshlab qo'llanila boshladi.

Mashg'ulotlar qiziqarli bo'lishi uchun, bu mashg'ulotlardagi har bir masala yoki topshiriq so'zma-so'z quruq yodlash uchun emas, balki ularning oliy faoliyatlarini ishga soladigan xarakteri bo'lishi kerak. Amerikalik olim D. Poya evristik ta'lim metodi to'g'risida shunday degan edi. Evristikani maqsadi yangiliklarga olib boruvchi metod va qoidalarni izlash demakdir. U evristik metod mohiyatini quyidagidek izchillikda tuzilgan reja orqali amalga oshirishni tavsiya qiladi:

- masalaning quyilishini tushunish;
- masalaning yechish rejaini tuzish;
- tuzilgan rejani amalga oshirish;
- orqaga nazar tashlash (hosil qilingan yechimni tekshirish).

Bu rejani amalga oshirish jarayonida o'qituvchilar quyidagi savollarga javob topadilar:

- Masalada nima noma'lum?
- Masalada nimalar ma'lum?
- Masalaning sharti nimalardan iborat?
- Ilgari shunga o'xshagan masalalar yechilganmi?

-Agar shunga o'xshagan masalalar yechilgan bo'lsa, undan foydalanib qo'yilayotgan masalani yecha oladimi?

Albatta yuqoridagi reja-sxema o'quvchilarning ijodiy fikrlash faoliyatlarini shakllantiradi, ammo bu reja-sxema o'quvchilarning ijodiy qobiliyatlarini shakllantiruvchi birdan bir yo'l bo'la olmaydi.

**AQLIY HUJUM METODI.** Umumiy muammo bo'yicha o'quvchilarni ijodiy ishga, o'zaro muloqotga chorlash. Bosqichlari: muammoli vaziyatni keltirib chiqarish; uning yechimini topish uchun o'quvchilarni jalb qilish; turli yechimlar taqdimotini eshitish; yechimlarni solishtirish va tanlash; xulosalash.

**MUSTAQIL ISHLASH METODI.** Vaqti-vaqti bilan o'tkazib turiladigan, o'quvchilarning mustaqil o'rganish, darslik bilan ishlash va mustaqil amaliy faoliyat bilan shug'ullanish ko'nikmalarini shakllantiradigan, har bir o'quvchiga alohida yoki umumiy tarzda tashkil qilinadigan topshiriqni bajartirish; o'quvchilarning amaliy faoliyatiga aralashmay, tashqaridan teskari aloqa- muloqot yordamida yo'naltirib boshqarish va nazorat qilish.

**JUFTLIKDA ISHLASH METODI.** Biror mavzu bo'yicha yonma-yon o'tirgan o'quvchilarni o'zaro muloqotga chorlash; o'zaro fikr almashish va ularni ba'zilarini tinglash.

**“BAHS-MUNOZARA” METODI.** Metod quyidagi bosqichlarda amalga oshiriladi: o'qituvchi munozara mavzusini tanlaydi va o'quvchilarni munozaraga taklif etadi; o'qituvchi o'quvchilarga muammo bo'yicha «aqliy hujum» o'tkazishga chorlaydi va uni o'tkazish tartibini belgilaydi; o'qituvchi «Aqliy hujum» vaqtida bildirilgan turli g'oya va fikrlarni yozib boradi yoki bu ishni bajarish uchun o'quvchilardan birini kotib etib tayinlaydi hamda bu bosqichda o'qituvchi o'quvchilarga o'z fikrlarini bildirishlariga sharoit yaratib beradi; o'qituvchi o'quvchilar bilan birgalikda, ikkinchi bosqichda «aqliy hujum» davomida bildirilgan fikr va g'oyalarni guruhlariga ajratadi, umumlashtiradi va ularni tahlil qiladi. Tahlil natijasida qo'yilgan muammoning eng maqbul yechimi tanlanadi.

**TADQIQOT METODI.** Tadqiqot usuli o'zlashtirish darajasining eng yuqori cho'qisi hisoblanadi. Bu usul bilan dars o'tilganda o'quvchilar olgan bilimlari

asosida hali o'rganilmagan kichik bir masala ustida yakka yoki birgalashib izlanish olib borishadi, masala yechimiga doir keltirilgan taxminni izlab topilgan dalillar asosida to'g'ri yoki noto'g'riligini tekshirishadi va isbotlashadi. Bosqichlari: -darsda hammaga qiziqish uyg'otadigan biror obyektning xossasini aniqlash yoki u haqidagi masalani qo'yish; -uni o'rganish, tadqiq qilish uchun ma'lumotlar to'plash; -muammo yoki masalaning yechishga oid taxminlar, bashoratlar qilish; -har bir bashoratning qanchalik to'g'riligini to'plangan ma'lumotlar asosida tahlil qilish va isbotlash; -xulosa chiqarish; -sinf oldida taqdimot qilish.

**KLASTER METODI.** Klaster metodi pedagogik, didaktik strategiyaning muayyan shakli bo'lib, u ta'lim oluvchilarga ixtiyoriy muammo (mavzu) lar xususida erkin, ochiqo'ylash va fikrlarni bemalol bayon etish uchun sharoit yaratishga yordam beradi. Mazkur metod turli xil g'oyalar o'rtasidagi aloqalar fikrlash imkoniyatini beruvchi tuzilmani aniqlashni talab etadi. Ushbu metod muayyan mavzuning ta'lim oluvchilar tomonidan chuqur hamda puxta o'zlashtirilguniga qadar fikrlash faoliyatining bir maromda bo'lishini ta'minlashga hizmat qiladi.

«Klaster» metodidan foydalanish tavsifi:

1-bosqich. Nimaniki o'ylagan bo'lsangiz, shuni qog'ozga yozing. Fikringizni sifati to'g'risida o'ylabo'tirmay, ularni shunchaki yozib boring.

2-bosqich. Yozuvingizning orfografiyasi yoki boshqa jihatlariga e'tibor bermang.

3-bosqich. Belgilangan vaqt nihoyasiga yetmaguncha, yozishdan to'xtamang. Agar ma'lum muddat biror-bir g'oyani o'ylay olmasangiz, u holda qog'ozga biror narsaning rasmini chiza boshlang. Bu harakatni yangi g'oya tug'ilgunga qadar davom ettiring.

4-bosqich. Muayyan tushuncha doirasida imkon qadar ko'proq yangi g'oyalarni ilgari surish hamda mazkur g'oyalar o'rtasidagi o'zaro aloqadorlik va bog'liqlikni ko'rsatishga harakat qiling. G'oyalar yig'indisining sifati va ular o'rtasidagi aloqalarni ko'rsatishni cheklamang.



### III. NAZARIY MA'LUMOTLAR

**Matritsalarining turlari. Matritsalarini songa ko'paytirish, matritsalarini qo'shish, matritsalarini ayirish, matritsani matritsalariga ko'paytirish amallari, hamda ularning xossalari.**

Aytaylik,  $a_{ij} (i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n})$   $m \cdot n$  ta ifodalar (sonlar) berilgan va ular ustida arifmetik amallar aniqlangan bo'lsin.

**1-ta'rif.** Agar  $a_{ij} (i = \overline{1; m}, j = \overline{1; n})$   $m \cdot n$  ta ifodalar (sonlar)  $m$  ta satr va  $n$  ta ustundan iborat

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

jadval ko'rinishda yozilgan bo'lsa, uni *matritsa*,  $m \times n$  ni esa uning *tuzilishi (tarkibi)* deb ataladi.

Yotiq (gorizontal) ko'rinishda yozilgan  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  ni *matritsaning i-satri (i-satr-vektori)*, tik (vertikal) ko'rinishda yozilgan

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

ni esa *j-ustuni (j-ustun-vektori)* deb ataladi. Demak, matritsani satr-vektorlar (yoki ustun-vektorlar) sistemasi sifatida ham qarash mumkin ekan.

Agar matritsaning tuzilishi  $m \times n$  da  $m \neq n$  bo'lsa, uni *to'g'ri to'rtburchak*,  $m = n$  bo'lganda esa *kvadrat matritsa* deb ataladi ( $m = n$  bo'lganda kvadrat matritsani *n-tartibli matritsa* deb ham yuritiladi va  $[a_{ij}]_{n \times n}$  o'rniga  $[a_{ij}]_n$  belgilashdan ham foydalanamiz).

Agar  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  matritsaning  $a_{ii} (i = \overline{1; k})$  diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lsa, uni *diagonal matritsa* deyiladi, bu yerda  $k = \min\{m, n\}$ . Diagonal matritsa, odatda, D bilan belgilanadi.

Barcha diagonal elementlari 1 ga teng bo'lgan kvadrat diagonal matritsani *birlik matritsa* deyiladi va E harfi orqali belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Matritsaning barcha elementlari nollardan iborat bo'lsa, uni *nol matritsa* deyiladi va  $E^0$  yoki oddiy nol orqali belgilanadi, ya'ni  $E^0 = [0]_{m \times n} = 0$ .

Odatda, *kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinant uning determinanti* deb ataladi va  $A$  kvadrat matritsa determinantini  $\det A$  yoki  $|A|$  kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matritsaning determinanti quyidagidir:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinanti noldan farqli bo'lgan kvadrat matritsa *maxsus emas* deb, nolga teng bo'lsa, *maxsus* deb ataladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \text{ maxsus matritsadir, chunki}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0;$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ esa maxsusmas matritsadir, chunki}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = 8 \neq 0.$$

## Matritsalar ni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish amallari

**2-ta'rif.** Bir xil tuzilishli  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  va  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  matritsalarining *yig'indisi* deb shunday  $C$  matritsaga aytiladiki, uning elementlari  $A$  va  $B$  matritsalar mos elementlarining yig'indisidan iborat bo'ladi va  $C=A+B$  deb yoziladi.

Ta'rif bo'yicha

$$C = A + B, \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Matritsalar yig'indisi ta'rifidan ularni qo'shish amalining quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. A+(B+C)=(A+B)+C;$$

$$2^0. A+B=B+A;$$

$$3^0. A+E^0=A \text{ (bunda } E^0=(0), \quad A, B, C - \text{ berilgan bir xil tuzilishli matritsalar).}$$

*Matritsalarining ayirmasi ularni qo'shishga teskari amal tariqasida*

ta'riflanadi, ya'ni bir xil tuzilishli  $A$  va  $B$  matritsalarining ayirmasi deb, shunday  $C$  matritsaga aytiladiki,  $B+C=A$  bo'ladi va  $C=A-B$  deb belgilanadi.

Bu ta'rif asosida  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  va  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  bo'lsa,

$$C = A - B, \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

natija olinadi.

Tuzilishlari bir xil bo'lmagan, matritsalarini qo'shish va ayirish amallari aniqlanmagandir.

**3-ta'rif.**  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  matritsaning  $\alpha$  songa ko'paytmasi deb, uning barcha elementlarini shu  $\alpha$  songa ko'paytirishdan hosil qilingan matritsaga aytiladi va  $\alpha A$  yoki  $A\alpha$  ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifga ko'ra

$$A \cdot \alpha = \alpha \cdot A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}.$$

Matritsani songa ko'paytirish amalining ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$$1^0. I \cdot A = A \cdot I = A;$$

$$2^0. A \cdot 0 = 0 \cdot A = E^0;$$

$$3^0. \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A;$$

$$4^0. (\alpha \pm \beta) \cdot A = \alpha A \pm \beta A;$$

$$5^0. \alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B.$$

Bu yerda  $A$  va  $B$  – bir xil tuzilishli matritsalar,  $\alpha$  va  $\beta$  - haqiqiy sonlardir.

Yuqorida ta'riflangan qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish matritsalar ustidagi chiziqli amallardan iboratdir.

## Matritsalarini ko'paytirish

Tuzilishlari mos ravishda  $m \times n$  va  $p \times q$  bo'lgan

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{p \times q}$$

to'g'ri to'rt burchak matritsalar berilgan bo'lsin. Agar  $A$  matritsaning ustunlari soni  $n$   $B$  matritsaning satrlari soni  $p$  ga teng bo'lsa, bu matritsalarini ko'paytirish amali ma'noga ega bo'ladi.

**4-ta'rif.** Berilgan tartibda olingan  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  va  $B = [b_{ij}]_{n \times q}$  matritsalarining ko'paytmasi deb shunday  $C = [c_{ij}]_{m \times q}$  matritsaga aytiladiki, uning elementlari

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}; \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, q} \quad (4.1.2)$$

formula bilan aniqlanadi va  $AB=C$  kabi belgilanadi.

Ta'rifdan matritsalarini ko'paytirish uchun quyidagi qoida kelib chiqadi:

*Ikki matritsaning ko'paytmasidan iborat bo'lgan matritsaning  $i$  – satri va  $j$  – ustunida turuvchi elementni hisoblash uchun birinchi matritsaning  $i$  – satridagi har bir elementini ikkinchi matritsaning  $j$ –ustunining mos elementiga ko'paytirib, so'ngra ularni qo'shish kerak ((4.1.2) formulaga qarang).*

Masalan, quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

to'g'ri to'rt burchak matritsalar ko'paytmasini topaylik:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-3) & 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 2 & 9 & -4 \end{bmatrix}.$$

Matritsalarini ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

- 1<sup>0</sup>.  $A(BC) = (AB)C$ ;
- 2<sup>0</sup>.  $\alpha(AB) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$
- 3<sup>0</sup>.  $(A \pm B) \cdot C = A \cdot C \pm B \cdot C$ ;
- 4<sup>0</sup>.  $C(A \pm B) = C \cdot A \pm C \cdot B$ ;
- 5<sup>0</sup>.  $A$  va  $B$  lar bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo'lsa,  
 $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$  [4].

Bu yerda  $A, B, C$  matritsalar,  $\alpha$  - haqiqiy son.

## 2-mavzu. Ikkinchi va uchinchi tartibli detdeterminantlar va ularning hisoblash. O'rin almashtirishlar. $n$ -tartibli determinantning ta'rifi

Faraz qilaylik,  $\{a_{ij} : i = \overline{1; n}, j = \overline{1; n}, n \in N\}$  to'plam berilgan bo'lib, uning elementlari bo'lgan  $a_{ij}$  ifodalar ustida arifmetik amallar aniqlangan bo'lsin.

**2.1.1-ta'rif.** Yuqorida berilgan to'plamning har bir elementini *birinchi tartibli determinant* deb ataymiz va uning qiymati sifatida shu elementning o'zini qabul qilamiz ([4] §16).

Endi,  $(n-1)$  – tartibli determinant tushunchasi aniqlangan degan faraz asosida  $n$ -tartibli determinantni ( $2 \leq n \in N$ )

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.1.1)$$

kabi belgilab, uning qiymatini aniqlash maqsadida quyidagi yordamchi tushunchalarni kiritamiz.

1) Yotiq (gorizontal) ko'rinishda yozilgan  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  ni (2.1.1) *determinantning  $i$ -satri* ( $i$ -satr – vektori);

2) tik (vertikal) ko'rinishda yozilgan

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

ni  $j$ -ustuni ( $j$ -ustun – vektori);

3)  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  ni esa *diagonali* (*bosh diagonali*) deb ataymiz.

**2.1.2-ta'rif.**  $2 \leq n \in N$  bo'lganda (2.1.1)  $n$ -tartibli determinant  $a_{ij}$

$(i = \overline{1; n}, j = \overline{1; n})$  elementining  $(n-1)$  - tartibli *minori (minori)* deb, mazkur element joylashgan determinantning  $i$ -satri va  $j$ -ustunini o‘chirish natijasida hosil qilingan  $(n-1)$ - tartibli determinantni ataymiz hamda  $M_{ij}$  kabi belgilaymiz.

Bu ta’rifdan ko‘rinadikki,  $n$ - tartibli determinantda  $n^2$  ta  $(n-1)$ - tartibli minorlar mavjud bo‘lib, yuqoridagi farazga ko‘ra, ularning barchasi aniqlangandir.

**2.1.3- ta’rif.** (2.1.1)  $n$ - tartibli determinant  $a_{ij}$  elementining *algebraik to‘ldiruvchisi* deb,  $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$  ni ataymiz va  $A_{ij}$  bilan belgilaymiz.

Demak, bu ta’rifga asosan,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \quad (i = \overline{1; n}, j = \overline{1; n}). \quad (2.1.2)$$

**2.1.4-ta’rif.**  $n$ -tartibli determinantning qiymati deb

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} \quad (2.1.3)$$

ni qabul qilamiz ([4] §16).

(2.1.3) ning o‘ng tomonini *determinantning birinchi satri bo‘yicha yoyilmasi* deb yuritiladi.

### **Ikkinchi tartibli determinant**

Agar (2.1.3) da  $n=2$  deb olsak, 2.1.1-ta’rif bilan birinchi tartibli determinant tushunchasi aniqlanganligi sababli, (2.1.2) yordamida

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^2 a_{1j} A_{1j} = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (2.1.4)$$

ni olamiz.

Ikkinchi tartibli determinantda  $(a_{11}, a_{22})$  *diagonal* bilan bir qatorda  $(a_{12}, a_{21})$  ni *yordamchi diagonal* deb yuritiladi.

(2.1.4) dan *ikkinchi tartibli determinant qiymati diagonal elementlari ko‘paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko‘paytmasini ayirish natijasiga tengligini ko‘ramiz.*

**1-misol.**  $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 6 - (-2) \cdot 5 = -6 + 10 = 4.$

**2-misol.**

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - \cos \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

**3-misol.**  $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1 \cdot (-1) = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

**4-misol.**

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\rho \sin \alpha & \rho \cos \alpha \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \alpha + \rho \sin^2 \alpha = \rho(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \rho.$$

## Uchinchi tartibli determinant

$n=3$  bo'lganda, ikkinchi tartibli determinant (2.1.4) bilan aniqlanganligini hisobga olib, (2.1.3) dan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2.1.5)$$

ni olish qiyin emas. Bu uchinchi tartibli determinantni hisoblashning asosiy formulasi bo'lib, uning o'ng tomonidagi ifodani hosil qilishda (2.1.3) bilan bir qatorda *uchburchaklar* hamda *Sarius qoidasi* deb ataluvchi usullar mavjuddir.

1. *Uchburchaklar qoidasi*. Asosi uchinchi tartibli determinant diagonaliga parallel uchlari esa determinant elementlari joylashgan nuqtalarda bo'lgan teng yonli uchburchaklar chizamiz (tasavvurimizda). Diagonalda joylashgan va aytilgan uchburchaklar uchlari joylashgan 3 tadan elementlarni ko'paytirib, (2.1.5) ning o'ng tomonidagi ifodaning dastlabki 3 ta hadini, xuddi shunday ishni  $(a_{13}, a_{22}, a_{31})$  yordamchi diagonal uchun ham takrorlab, olingan ko'paytmalarni qarama-qarshi ishoralar bilan olib, so'nggi 3 ta hadini hosil qilamiz (2.1.1-rasm).

$a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}$

$a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}$

$a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}$

2.1.1-rasm.

### 5-misol.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - \\ - 2 \cdot (-4) \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 2 = \\ = 8 - 2 + 0 - 0 - 3 - 2 = 1.$$

2. *Sarius qoidasi*. Bu usulda uchinchi tartibli determinantning birinchi va ikkinchi satrlarini uning davomiga mos ravishda to'rtinchi va beshinchi satrlar qilib

yoziq, determinant diagonaliga parallel uchtdan elementlar orqali o'tuvchi yana ikkita diagonal o'tkazamiz. Ularga joylashgan uchtdan elementlarni ko'paytirib (2.1.5) ning birinchi uchta hadini va bu ishni yordamchi diagonal uchun ham bajarib olingan ko'paytmalar ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirib, so'ngi uchta hadini olamiz. Huddi shunga o'xshash ishni determinantning birinchi va ikkinchi ustunlarini mos ravishda to'rtinchi va beshinchi ustunlar qilib yozish bilan ham bajarish mumkin (2.1.2-rasm).

$$\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & & & & 
 \end{array}$$

2.1.2-rasm.

**Determinantning asosiy xossalari. Minor va algebraik to'ldiruvchi tushunchalari. Laplas teoremasi.**

**1-teorema.**  $2 \leq n \in N$  bo'lganda (2.1.1)  $n$ -tartibli determinant uchun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad i = \overline{1; n}$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad j = \overline{1; n}$$
(2.2.1)

munosabatlar o‘rinlidir. Bu yerda  $D_n$  - (2.1.1)  $n$ -tartibli determinantning qiymati,  $A_{ij}$  esa  $a_{ij}$  elementining algebraik to‘ldiruvchisidir.

(2.2.1) yordamida (2.1.1)  $n$ -tartibli determinantning quyidagi xossalarini isbotlash mumkin.

**1<sup>0</sup>.** Determinantning barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozish (determinantni transponirlash) uning qiymatini o‘zgartirmaydi.

**2<sup>0</sup>.**  $2 \leq n \in N$  bo‘lganda determinantning ikkita satrlarining (ustunlarining) o‘rinlari o‘zaro almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o‘zgaradi.

**3<sup>0</sup>.**  $2 \leq n \in N$  bo‘lganda ikkita bir xil satrlarga (ustunlarga) ega bo‘lgan determinant qiymati nolga tengdir.

**4<sup>0</sup>.** Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo‘lgan determinant qiymati nolga tengdir.

**5<sup>0</sup>.** Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari bir xil ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, bu ko‘paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin, va aksincha, determinantni biror songa ko‘paytirish uchun uning biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlarini shu songa ko‘paytirish kifoyadir.

**6<sup>0</sup>.** Proportsional satrlarga (ustunlarga) ega bo‘lgan determinant qiymati nolga tengdir.

**7<sup>0</sup>.** Agar determinantning biror satrining (ustunining) har bir elementi yig‘indidan iborat bo‘lsa, u mos satrining (ustunining) elementi berilgan determinantdagi mos satr (ustun) elementining mos qo‘shiluvchisidan, qolgan satrlari (ustunlari) esa berilgan determinant mos satrlaridan (ustunlaridan) iborat bo‘lgan determinantlarning yig‘indisiga tengdir. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**8<sup>0</sup>.** Determinant biror satri (ustuni) elementlari boshqa satrlar (ustunlar) mos elementlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, u nolga tengdir.

**9<sup>0</sup>.** Determinant biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun) mos elementlarini bitta songa ko‘paytirib qo‘shilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi.

1<sup>0</sup> xossani matematik induksiya usulini qo‘llab va (2.2.1) dan foydalanib isbotlash mumkin. Haqiqatdan ham,  $n=2$  uchun uning o‘rinli ekanligiga bevosita (2.1.4) formuladan foydalanib ishonch hosil qilish osondir. Endi,  $(n-1)$ -tartibli determinant uchun bu xossa o‘rinli deb faraz qilib, uni  $n$ -tartibli determinant uchun isbotlaylik. Agar qiymati  $D_n$  dan iborat berilgan (2.1.1)  $n$ -tartibli determinant barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozishdan hosil qilingan determinantni berilganga *transponirlangan* deb atab, uning qiymatini  $D_n^*$  bilan belgilasak, uning birinchi satri bo‘yicha yoyilmasidan foydalanib,

$$D_n^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1}^* = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} = D_n$$

ni olamiz ( $M_{ij}^*$  orqali  $M_{ij}$  ning transponirlangani belgilangan bo'lib, qilingan farazga ko'ra ular uchun  $M_{ij}^* = M_{ij}$  dir).

2<sup>o</sup> xossa ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi. Buning uchun  $n=2$  bo'lganda bevosita (2.1.4) dan foydalanish,  $n \geq 3$  bo'lganda esa determinantning o'z o'rnida qolgan satri (ustuni) bo'yicha (2.2.1) yoyilmasini yozish kifoyadir.

3<sup>o</sup> xossa 2<sup>o</sup> ning natijasi sifatida kelib chiqadi.

4<sup>o</sup> va 5<sup>o</sup> xossa unda qayd qilingan satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanib isbotlanadi.

6<sup>o</sup> xossa 5<sup>o</sup> va 3<sup>o</sup> larning natijasi sifatida kelib chiqadi.

7<sup>o</sup> xossani ko'rsatish uchun elementlari yig'indilardan iborat satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanish kerak bo'ladi.

8<sup>o</sup> va 9<sup>o</sup> xossalar 7<sup>o</sup> va 6<sup>o</sup> larning natijasidir.

Bulardan tashqari determinantning yana bitta xossasini isbotsiz keltiramiz.

**10<sup>o</sup>.**  $n$ -tartibli  $A$  va  $B$  determinantlarning elementlari vositasida elementlari

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{jk}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ik}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ki} \quad (i = \overline{1; n}, j = \overline{1; n})$$

formulalardan biri yordamida hisoblangan  $C$  determinant uchun

$$C = A \cdot B$$

o'rinlidir. Bu yerda  $a_{ij}$   $A$ ,  $b_{ij}$   $B$ ,  $c_{ij}$  esa  $C$  determinantlarning  $i$ -satri va  $j$ -ustuni elementidir ([4] §13).

**5-misol.**

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

**Yechish.** Uchinchi ustun elementlarini -2 ga ko'paytirib, birinchi ustun mos elementlariga, so'ngra -3 ga ko'paytirib, to'rtinchi ustun mos elementlarga qo'shsak, 9<sup>o</sup> xossaga ko'ra

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 10 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 10 & 3 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-80 - 30 + 18 + 120 - 10 + 36) = -54.$$

**Matritsa rangining ta'rifi. Matritsa rangini hisoblashning minorlar usuli.**

**Ekvivalent almashtirishlar yordamida matritsa rangini hisoblash**

Aytaylik,  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  matritsa berilgan bo'lsin. Agar  $k \leq \min(m, n)$  bo'lsa,  $A$  matritsaning  $k$  ta ustuni va  $k$  ta satri kesishishidagi elementlaridan hosil bo'lgan  $k$ -

tartibli kvadrat matritsaning determinantini  $A$  matritsaning  $k$  – tartibli minori deb ataladi. Matritsaning har bir elementini uning birinchi tartibli minori deb qabul qilinadi.

*Matritsaning rangi deb, uning noldan farqli minorlari tartiblarining eng kattasiga aytiladi.*

Agar  $A$  matritsaning rangi  $r$  ga teng bo'lsa, bu matritsada hech bo'lmaganda bitta noldan farqli  $r$ -tartibli minor borligini, biroq, uning  $r$  dan katta tartibli minorlari mavjud bo'lsa, ularning barchasi nolga tengligini anglatadi.  $A$  matritsaning rangini *rank*  $A$  yoki  $r(A)$  orqali belgilanadi.

Ushbu matritsani qaraylik:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uning yagona to'rtinchi tartibli minori nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(ikkita satri bir xil bo'lgan determinant sifatida); uchinchi tartibli minorlaridan biri

esa noldan farqli, masalan,  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ . Demak, berilgan matritsaning rangi 3

ga teng, ya'ni  $r(A)=3$ .

Matritsaning rangini uning ta'rifi bo'yicha topish uchun ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Bu ishni matritsadagi elementar almashtirishlar tushunchalari yordamida osonlashtirish mumkin.

*Elementar almashtirishlar* deb quyidagilarga aytiladi:

Matritsaning biror satri (ustuni) barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish yoki bo'lish;

2) Matritsaning biror satri (ustuni) barcha elementlariga boshqa satri (ustuni)ning mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shish;

3) Matritsaning satrlari (ustunlari) o'rnini o'zaro almashtirish;

4) Matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lgan satrini (ustunini) tashlab yuborish.

Bir-biridan elementar almashtirishlar orqali hosil qilinadigan matritsalar *ekvivalent matritsalar* deb ataladi. Ekvivalent matritsalarining ranglari teng bo'lishi isbotlangandir.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangini hisoblaylik. Berilgan matritsaning birinchi satri elementlarini

-1 ga ko'paytirib, uchinchi satriga qo'shaylik:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

endi,  $A_1$  ning 2-satrini -1 ga ko'paytirib, uchinchi satriga qo'shsak,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ni olamiz.

$A_2$  matritsaning nollardan iborat uchinchi satrini tashlab yuborib,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

matritsaga kelamiz; uning rangi ikkiga tengligi ravshandir. Demak, berilgan matritsaning rangi ham ikkiga teng, ya'ni  $r(A)=2$ .

**Teskari matritsa ta'rif. Xosva xosmas matritsalar. Teskari matritsa mavjudligining zaruriy va yetarli sharti. Ekvivalent almashtirishlar yordamida teskari matritsani hisoblash.**

**1-ta'rif.** Berilgan  $m \times n$  tuzilishli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matritsadan uning satrlarini mos ustunlar qilib yozish natijasida hosil qilinadigan matritsani  $A$  ga nisbatan *transponirlangan matritsa* deyiladi va uni  $A^*$  (yoki  $A'$ ) bilan belgilanadi.

1<sup>0</sup>.  $(A^*)^* = A$

2<sup>0</sup>.  $A$  va  $B$  lar bir xil tuzilishli bo'lganda  $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$

3<sup>0</sup>.  $A = [a_{ij}]_n$  – *simmetrik kvadrat matritsa*, ya'ni  $a_{ij} = a_{ji}$   $i, j = \overline{1, n}$  bo'lsa,

$A^* = A$  bo'ladi, va aksincha.

4<sup>0</sup>. Agar  $A$  va  $B$  matritsalar uchun  $AB$  aniqlangan bo'lsa,  $(AB)^* = B^* A^*$  o'rinlidir.

### **Teskari matritsa**

**2-ta'rif.** Agar bir xil tuzilishli  $A$  va  $B$  kvadrat matritsalar uchun  $AB=BA=E$  ( $E$ -birlik matritsa) munosabat o'rinli bo'lsa, u vaqtda ularni *o'zaro teskari matritsalar* deyiladi.

Agar  $A$  kvadrat matritsa berilgan bo'lsa, unga teskari matritsani  $A^{-1}$  orqali

belgilanadi. Yuqoridagi ta'rifga ko'ra

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar teskari matritsa mavjud bo'lsa, uning yagona bo'lishi ta'rifidan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham,  $A$  matritsaga ikkita  $A_1^{-1}$  va  $A_2^{-1}$  teskari matritsalar mavjud deb faraz qilsak,

$$\begin{aligned} AA_1^{-1} &= A_1^{-1}A = E, \quad AA_2^{-1} = A_2^{-1}A = E \Rightarrow A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = A_1^{-1}E \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A_1^{-1}A)A_2^{-1} = A_1^{-1} \Rightarrow EA_2^{-1} = A_1^{-1} \Rightarrow A_2^{-1} = A_1^{-1} \end{aligned}$$

ni olamiz.

Berilgan kvadrat matritsaga teskari matritsa har doim ham mavjud bo'lavermaydi. Bu o'rinda quyidagi tasdiq to'g'ridir.

**1-teorema.** Matritsaga teskari matritsa mavjud bo'lishi uchun u maxsus bo'lmasligi (determinanti nolga teng bo'lmasligi) zarur va yetarlidir.

Agar  $C = [A_{ij}]_n$  matritsani qarasak, u vaqtda

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^*$$

ekanligi ravshandir. Demak,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun teskari matritsani topaylik. Buning uchun, avvalo,  $\det A$  determinantni yozamiz va uni hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Demak,  $A$  – maxsusmas matritsa, unga teskari matritsa mavjud. Endi,  $\det A$  ning har bir satr algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -1, & A_{12} &= -(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = 3, & A_{13} &= 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2, \\ A_{21} &= -(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = 3, & A_{22} &= 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = -3, & A_{23} &= -(5 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 1, \\ A_{31} &= 2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = -2, & A_{32} &= -(1 \cdot 5 - 3 \cdot 2) = 1, & A_{33} &= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Bularni mos ravishda ustunlar qilib yozib,  $C^*$  matritsani tuzamiz:

$$C^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nihoyat,  $C^*$  ning barcha elementlarini  $\det A = -1$  ga bo'lib teskari matritsaga

ega bo'lamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi,  $A \cdot A^{-1} = E$  ekanligini tekshiramiz. Haqiqatdan ham,

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) + 6 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Shunga o'xshash,  $A^{-1} \cdot A = E$  ekani ham ko'rsatiladi.

### **Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi va uning yechimi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimining mavjudligining zaruriy va yetarli sharti(Kroneker-Kopelli teoremasi). Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli**

Faraz qilaylik,  $n$  noma'lumli  $m$  ta chiziqli algebraik tenglamalarning (4.2.1) sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema koeffitsiyentlari, noma'lumlari va ozod hadlari bo'lgan o'ng tomonidan tuzilgan (4.2.2) matritsalaridan tashqari sistema matritsasiga yana bitta  $(n+1)$  – ustun qilib sistema o'ng tomonini yozish bilan kengaytirib,  $B$  matritsani hosil qilinadi va uni *sistemaning kengaytirilgan matritsasi* deb ataladi. Demak, sistemaning kengaytirilgan matritsasi

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Bu o'rinda quyidagi tushunchalarni eslatamiz: agar (4.2.1) sistema yechimga ega bo'lsa, u birgalikda, aks holda birgalikda emas deb yuritiladi.

Agar sistema o'ng tomonidagi barcha ozod hadlar nolga teng, ya'ni  $C=0$  (nol matritsa) bo'lsa, (4.2.1) sistema *bir jinsli* deb yuritiladi. Bunday bir jinsli sistema har doim birgalikdadir, ya'ni  $X=0$  uning yechimi bo'lishi ravshandir.

**4.2.1-teorema**(Kroneker-Kopelli). Chiziqli algebraik tenglamalarning (4.2.1) sistemasi birgalikda bo'lishi uchun uning matritsasi  $A$  ning rangi kengaytirilgan matritsasi  $B$  ning rangiga teng bo'lishi ( $r(A)=r(B)$ ) zarur va yetarlidir.

**Isbot.** Sistema bir jinsli bo'lgan hol uchun isbot ravshandir, chunki, bu holda  $A$  va  $B$  lar ekvivalent bo'lib  $r(A)=r(B)$  aniqdir. Endi, sistema bir jinsli bo'lmagan, ya'ni uning o'ng tomonidagi ozod hadlardan aqalli bittasi noldan

farqli bo'lgan holni qaraymiz.

**Zaruriyligi.** (4.2.1) sistema birgalikda va  $x'_j$  ( $j = \overline{1;n}$ ) sonlar (ifodalar) sistemasi uning yechimi deylik. Bu yechimni sistemaning tenglamalariga qo'yib,  $m$  ta

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j = c_i, \quad i = \overline{1;m}$$

tengliklarga ega bo'lamiz va kengaytirilgan  $B$  maricaning (4.2.1) sistemaning o'ng tomonidan iborat bo'lgan  $(n+1)$  –ustunining har bir elementi oldingi ( $A$  matritsaning)  $n$  ta ustunlari mos elementlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'ramiz. Demak,  $A$  va  $B$  lar ekvivalent bo'lib,  $r(A)=r(B)$  kelib chiqadi.

**Yetarliligi.** Faraz qilaylik, (4.2.1) sistema matritsasining rangi uning kengaytirilgan matritsasining rangiga teng, ya'ni  $r(A)=r(B)=r$  bo'lsin.

$A$  matritsaning noldan farqli  $r$  – tartibli minorini ajratib olamiz va uni *bazis minor* deb nomlaymiz. Uning ustunlariga (satrlariga) mos  $A$  matritsaning ustunlarini (satrlarini) *bazis ustun-vektorlar* (*satr-vektorlar*) deb nomlaymiz. Bazis satr-vektorlarga mos sistema tenglamalarini uning *bazis tenglamalari* deb, bazis ustun-vektorlarga mos noma'lumlarni *sistemaning bazis noma'lumlari* deb yuritiladi, ravshanki, ular  $r$  ta bo'ladi; qolgan noma'lumlar ( $r < n$  bo'lganda) *ozod (erkin) noma'lumlar* deb, ozod noma'lumlar soni  $S=n-r$  esa sistemaning *ozodlik (erkinlik) soni* deb ataladi.

Agar yuqorida olingan bazis minorga mos keluvchi sistema bazis tenglamalarini ajratib olib, ozod noma'lumlar nolga teng deb qabul qilsak,  $r$  noma'lumli  $r$  ta chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz va uning determinanti noldan farqli bo'lganligi uchun yagona yechimga ega bo'ladi (Buni 2- bobda ko'rgan edik). Sistemaning qolgan tenglamalari ham bazis minorga mos tenglamalariga chiziqli bog'liq bo'lganliklari sababli, bazis noma'lumlar yuqoridagicha topilganda va ozodlari nolga teng deb olinganini hisobga olsak, qanoatlanishini payqash qiyin emas. Bu teoremaning yetarli qismining isbotidir.

**1- eslatma.** Yuqoridagi 4.2.1-teorema (4.2.1) sistemaning birgalikda yoki birgalikda emasligi haqida bo'lib, uning yechimlari soni haqida hech narsa demaydi. Haqiqatdan ham, agar  $r(A)=r(B)$  bo'lib,  $S>0$ , ya'ni ozod noma'lum mavjud bo'lsa, unga (yoki ularga) ixtiyoriy qiymatlar berish mumkin bo'lib, bu holda (4.2.1) sistemaning yechimlari soni cheksiz ko'p bo'lishi;  $S=0$  bo'lganda esa yechim yagona bo'lishi ravshandir.

*Yagona yechimga ega bo'lgan sistema aniqlangan, bittadan ortiq yechimga ega bo'lganda esa aniqlanmagan deb yuritiladi.*

**2- eslatma.** (4.2.1) sistema birgalikda bo'lganda ozod noma'lumlar mavjud ( $S>0$ ) bo'lsa, ularni nolga tenglab olingan sistema yechimini uning *bazis yechimi* deb yuritiladi.

### **Kramer formulasi.**

Faraz qilaylik birinchi darajali, ikkita noma'lumli ikkita algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

(1)

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-b_2a_{12} \quad \checkmark \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad (2)$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \quad \boxed{\checkmark} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad (3)$$
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} ; & x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta} ; \end{aligned} \quad (4)$$

(1) sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun  $\Delta \neq 0$  bo'lishi zarur va kifoya.  
 (4) ga e'tibor bersak  $\Delta$  berilgan (1) sistemadagi noma'lumlarning oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan 2-tartibli determinant  $\Delta_1, \Delta_2$  lar esa mos ravishda  $\Delta$  ning birinchi va ikkinchi ustunlarini ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil bo'lgan determinantlar.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{berilgan bo'lib,} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{bo'lsa}$$
$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda} ; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda} ; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Lambda} . \quad (5)$$

Agar birinchi darajali n ta noma'lumli n ta algebraik tenglamalar sistemasi

[illegible]

bo'lsa ,berilgan sistemaning yechimi Kramer formulasiga ko'ra qo'yidagicha aniqlanadi.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (6)$$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  lar ning ustun elementlarini mos ravishda ketma-ket ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil bo'ladi.

*Misol.* 1)  $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \quad (x=-1; y=2), \quad 2) \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 2y - 5z = 3 \\ 2x - y - 3z = 7 \end{cases}$

$(x=1; y=-2; z=-1)$ .

Agar uch noma'lumli bir jinsli ikkita tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

berilgan bo'lib,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

determinantning loaqal bittasi noldan farqli bo'lsa, u xolda (7) sistemaning barcha yechimlari

$$x = \Delta_1 t, \quad y = \Delta_2 t, \quad z = \Delta_3 t \quad (8)$$

formula bilan aniqlanadi. (t-ixtiyoriy son).

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \quad (9)$$

(9) da  $\Delta \neq 0$  bo'lsa,  $x=0, y=0, z=0$  lar sistemaning yagona yechimi bo'ladi.

Agar  $\Delta = 0$  bo'lsa, (9) ning cheksiz ko'p yechimi bo'lib, ular (7) kabi aniqlanadi.

**Misollar.**

$$1) \begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad (x=3t; y=4t; z=11t),$$

$$2) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 3x + 7y + 3z = 0 \end{cases} \quad (x=2t; y=-3t; z=5t).$$

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yeching:

$$a) \begin{cases} 8x - y = 4; \\ 9x + 2y = 17 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 9y - 4x = 1; \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x - y = 6; \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$$

Javob: a) (1;4) b) (2;1) c)  $\emptyset$ ,

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$a) \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 7; \\ x - 2y + 4z = 6; \\ 3x - y + 5z = 11 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 4y + z = 1; \\ x + 5y - 3z = 18; \\ 3x + y + 9z = 4 \end{cases}$$

Javob: a) (2;0;1) b) (5;2;-1)

To'rt noma'lumli to'rtta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x - y + 5z - 2t = -8; \\ 3x - y + 4z - 3t = -12; \\ x - 3y + 6z - t = -12; \\ 3x - 2y + z - t = -11 \end{cases}$$

Javob:  $(-1; 3; 0; 2)$

### 7-mavzu: Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Jordan-Gauss usuli

Oldinroq, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda qo'llaniladigan Kramer formulalarini va matritsalar usulini ko'rdik. Bu usullarda tenglamalar va noma'lumlar soni ortgan sari hisoblash ishlarining hajmi juda tez ortib borishini ham payqagan bo'lishimiz kerak. Bu yerda, amaliy jixatdan ancha qulay bo'lgan usullardan biri bilan, ya'ni *Jordan-Gauss usuli* bilan tanishamiz. Bu usulni ba'zan *noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib (chiqarib) borish usuli* deb ham yuritiladi.

Soddalik uchun uch noma'lumli uchta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases}$$

Bu sistema determinanti noldan farqli, ya'ni sistema yagona yechimga ega, undan tashqari,  $a_{11} \neq 0$  deb faraz qilamiz ( $a_{11} = 0$  bo'lsa, tenglamalarning o'rnini almashtirish bilan bunga erishish mumkin) va uni *etakchi koeffitsiyent*, unga mos tenglamani esa *etakchi tenglama* deb nomlaymiz.

Sistemaning birinchi tenglamasini  $a_{11}$  ga bo'lib, etakchi tenglamani

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \quad (4.2.5)$$

ko'rinishga keltiramiz va  $x_1$  ni *bazis noma'lum* deb hisoblaymiz. Bu yerda

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2; 3; 4).$$

Olingan (4.2.5) tenglama yordamida sistemaning qolgan ikkala tenglamalaridagi  $x_1$  qatnashgan hadlarni yo'qotamiz (masalan, (4.2.5) ni  $-a_{21}$  ga ko'paytirib ikkinchi tenglamaga hadlab qo'shsak  $a_{21}x_1$  had yo'qotiladi):

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{2n}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{3n}^{(1)}. \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Bu yerda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j} \cdot a_{1i} \quad (i = 2; 3, \quad j = 2; 3; 4)$$

Endi,  $a_{22}^{(1)} \neq 0$  deb faraz qilib (aks xolda tenglamalar o'rnini almashtirib bunga erishamiz), uni (4.2.6) sistema uchun etakchi koeffitsiyent hisoblab, (4.2.6) sistemaning birinchi tenglamasini unga bo'lib,  $x_2$  ni bazis noma'lum deb hisoblab,

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)}$$

tenglamani olamiz. Bu yerda

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3;4)$$

olingan oxirgi tenglama yordamida (4.2.6) sistema 2-tenglamasidagi  $x_2$  qatnashgan hadni yo'qotib

$$a_{33}^{(2)} x_3 = a_{34}^{(2)}$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} \cdot a_{i2}^{(1)} \quad (i = 3, \quad j = 3;4)$$

Shunday qilib, quyidagi teng kuchli sistemalarni oldik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \\ x_3 = a_{34}^{(3)} \end{cases}$$

Oxirgi sistemada  $a_{34}^{(3)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$  va  $a_{33}^{(2)}$  uni olish uchun etakchi koeffitsiyent,  $x_3$

esa bazis noma'lum bo'lishi ravshandir.

Bu teng kuchli sistemalarni hosil qilish jarayoni Jordan-Gauss usulining *olg'a borish bosqichi* deb yuritiladi. Unda bitta, ya'ni  $x_3$  noma'lumning qiymati aniq bo'lib qoldi. Qolgan noma'lumlarning qiymatlari ketma-ket

$$x_2 = a_{24}^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3, \quad x_1 = a_{14}^{(1)} - a_{12}^{(1)}x_2 - a_{13}^{(1)}x_3$$

formulalar bilan hisoblanadi va bu jarayon usulning *ortga qaytish bosqichi* deb yuritiladi.

Bu usulni umumiy holda (4.2.1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga qo'llash jarayoni ham xuddi yuqoridagidek kechadi.

Bu o'rinda shuni ham aytamizki, (4.2.1) sistemaning birgalikda ekanligi haqidagi ma'lumot bo'lmagan taqdirda ham (uni tekshirmasdan ham) unga bu usulni qo'llash mumkin. Bu holda, uning yechimi yagona bo'lsa, Jordan-Gauss usulining *olg'a borish jarayoni* yakunida (4.2.1) sistemani

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

ko'rinishga keltirish mumkin bo'lib, uni *uchburchakli sistema* deb yuritiladi va mazkur holda sistemaning aniqlangan ekanligi ravshandir.

(4.2.1) sistemaning yechimi cheksiz ko'p bo'lganda esa, uni

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_k + \dots + a_{kn}^{(k)}x_n = a_{k,n+1}^{(k)} \end{cases}$$

ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘ladi, bu yerda  $1 \leq k \leq m$ ,  $k < n$ . Bunday sistemani *pog‘onali sistema* deb ataladi va bu holda sistema aniqlanmagan bo‘lishi ravshandir.

Agar (4.2.1) sistemaning yechimi mavjud bo‘lmasa, Jordan-Gauss usulining olg‘a borish jarayonining biror qadamida (Iteratsiyasida) ziddiyatli tenglama olinadi.

Yuqorida bayon qilingan usulning olg‘a borish jarayonini quyidagicha 1-jadvalga joylashtirish qulaydir.

Bu jadvaldagi oxirgi ustun qilingan hisoblar to‘g‘ri borayotganini nazorat qilib borish uchun kerak bo‘lib, unga joylashgan har bir satrdagi son shu satrdagi oldindagi ustunlarga joylashgan sonlar yig‘indisiga teng bo‘lishi kerak. Bu o‘rinda, boshlang‘ich Iteratsiyada bu ustunga joylashgan sonlar oldingi ustunlardagi sonlar yig‘indisi sifatida hisoblanadi, qolgan Iteratsiyalarda usuldagi hisob jarayoni bu ustunga ham qo‘llaniladi va so‘ngra, olingan son oldingi ustunlarda joylashgan sonlar yig‘indisiga teng ekanligi tekshiriladi, agar hisobda xatoga yo‘l qo‘yilgan bo‘lsa tenglik bajarilmaydi.

1-jadval.

| Iteratsiya              | $x_1$                            | $x_2$                                              | $x_3$                                              | O‘ng tomon                                         | Nazorat ustuni                                                             |
|-------------------------|----------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Boshlang‘ich Iteratsiya | $a_{11}$<br>$a_{21}$<br>$a_{31}$ | $a_{12}$<br>$a_{22}$<br>$a_{32}$                   | $a_{13}$<br>$a_{23}$<br>$a_{33}$                   | $a_{14}$<br>$a_{24}$<br>$a_{34}$                   | $\sum a_{1j} = a_{15}$<br>$\sum a_{2j} = a_{25}$<br>$\sum a_{3j} = a_{35}$ |
| 1-Iteratsiya            | 1                                | $a_{12}^{(1)}$<br>$a_{22}^{(1)}$<br>$a_{32}^{(1)}$ | $a_{13}^{(1)}$<br>$a_{23}^{(1)}$<br>$a_{33}^{(1)}$ | $a_{14}^{(1)}$<br>$a_{24}^{(1)}$<br>$a_{34}^{(1)}$ | $a_{15}^{(1)}$<br>$a_{25}^{(1)}$<br>$a_{35}^{(1)}$                         |
| 2-Iteratsiya            | 1                                | $a_{12}^{(2)}$<br>1<br>$a_{32}^{(2)}$              | $a_{13}^{(1)}$<br>$a_{23}^{(2)}$<br>$a_{33}^{(2)}$ | $a_{14}^{(1)}$<br>$a_{24}^{(2)}$<br>$a_{34}^{(2)}$ | $a_{15}^{(1)}$<br>$a_{25}^{(2)}$<br>$a_{35}^{(2)}$                         |
| 3-Iteratsiya            | 1                                | $a_{12}^{(1)}$<br>1<br>$a_{32}^{(1)}$              | $a_{13}^{(1)}$<br>$a_{23}^{(2)}$<br>1              | $a_{14}^{(1)}$<br>$a_{24}^{(2)}$<br>$a_{34}^{(3)}$ | $a_{15}^{(1)}$<br>$a_{25}^{(2)}$<br>$a_{35}^{(3)}$                         |

Misol. 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

sistema yechilsin.

Yechish. Jordan-Gauss usulini jadval ko‘rinishida tatbiq etamiz (2-jadval).

2-jadval.

| Iteratsiya              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | O'ng tomon | Nazorat ustuni |
|-------------------------|-------|-------|-------|------------|----------------|
| Boshlang'ich Iteratsiya | 1     | 2     | -1    | 2          | 4              |
|                         | 2     | -3    | 1     | -1         | -1             |
|                         | -1    | 1     | 1     | 4          | 5              |
| 1-Iteratsiya            | 1     | 2     | -1    | 2          | 1              |
|                         |       | -7    | 3     | -5         | -9             |
|                         |       | 3     |       | 6          | 9              |
| 2-Iteratsiya            | 1     | 2     | -1    | 2          | 4              |
|                         |       | 1     | -3/7  | 5/7        | 9/7            |
|                         |       |       | 9/7   | 27/7       | 36/7           |
| 3-Iteratsiya            | 1     | 2     | -1    | 2          | 4              |
|                         |       | 1     | -3/7  | 5/7        | 9/7            |
|                         |       |       | 1     | 3          | 4              |

Olg'a borish bosqichi yakunida uchburchakli sistemaga keldik.

Oxirgi Iteratsiyadan  $x_3=3$  ekanligi ko'rinib turibdi. Qolgan noma'lumlarni ortga qaytish bosqichi bilan topamiz.

$$x_2 = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}x_3 = \frac{5}{7} + \frac{3}{7} \cdot 3 = \frac{14}{7} = 2, \quad x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2 \cdot 2 + 3 = 1.$$

Demak, sistema yechimi (1;2;3) dan iborat ekan.

Yuqorida keltirilgan usulni biroz mukammallashtirib, ortga qaytish bosqichidan holis bo'lishimiz mumkin. Buning uchun har bir Iteratsiyada (qadamda) etakchi tenglamadan keyingi tenglamalardagi yo'qotilishi lozim bo'lgan bazis noma'lumni undan oldingi tenglamalarda ham yo'qotib borilsa bas. Bu yo'l bilan yuqoridagi sistemani yechaylik (3-jadval yordamida).

3-jadval

| Iteratsiya              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | O'ng tomon | Nazorat ustuni |
|-------------------------|-------|-------|-------|------------|----------------|
| Boshlang'ich Iteratsiya | 1     | 2     | -1    | 2          | 4              |
|                         | 2     | -3    | 1     | -1         | -1             |
|                         | -1    | 1     | 1     | 4          | 5              |
| 1-Iteratsiya            | 1     | 2     | -1    | 2          | 1              |
|                         |       | -7    | 3     | -5         | -9             |
|                         |       | 3     |       | 6          | 9              |
| 2-Iteratsiya            | 1     |       | -1    | 2          | 10/7           |
|                         |       | 1     | -3/7  | 5/7        | 9/7            |
|                         |       |       | 9/7   | 27/7       | 36/7           |
| 3-Iteratsiya            | 1     |       |       | 1          | 2              |
|                         |       | 1     |       | 2          | 3              |
|                         |       |       | 1     | 3          | 4              |

Ya'ni, ortga qaytish bosqichi kerak bo'lmay qoldi,  $x_1=1$ ,  $x_2=2$ ,  $x_3=3$  ekanligi yaqqol ko'rinib turibdi.

Jordan-Gauss usulini qo'llashdagi Iteratsiyalarda (qadamlarda) tanlanadigan etakchi tenglama va Iteratsiya (qadam) nomerlarining mos tushishi shart emas. Har bir Iteratsiyada oldin tanlanmagan ixtiyoriy tenglamani etakchi deb tanlab, navbatdagi bazis noma'lum sifatida oldingi Iteratsiyalarda tanlanmagan va koeffitsiyenti noldan farqli bo'lgan noma'lumni tanlab olish mumkinligini aytamiz. Bundan foydalanib, nol elementlari ko'proq bo'lgan ustun (yoki satr) yordamida hisoblash ishlarini tezlashtirish mumkin. Shuni ham aytamizki, jadval usulini qo'llaganda bazis noma'lumlarini belgilab borish ustunini ham yozib borish foydali bo'ladi.

Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$$

sistemani yechaylik (4-jadval).

Demak,  $x_1=1$ ,  $x_2=3$ ,  $x_3=1$ .

4-jadval

| Iteratsiya              | Bazis                   | $x_1$       | $x_2$         | $x_3$       | O'ng tomon  | Nazorat ustuni |
|-------------------------|-------------------------|-------------|---------------|-------------|-------------|----------------|
| Boshlang'ich Iteratsiya |                         | 1<br>2<br>1 | 1<br>-1<br>-2 | <br>1<br>-1 | 4<br><br>-6 | 6<br>2<br>-8   |
| 1-Iteratsiya            | $x_3$                   | 1<br>2<br>3 | 1<br>-1<br>-3 | <br>1       | 4<br><br>-6 | 6<br>2<br>-6   |
| 2-Iteratsiya            | $x_2$<br>$x_3$          | 1<br>3<br>6 | 1             | <br>1       | 4<br>4<br>6 | 6<br>8<br>12   |
| 3-Iteratsiya            | $x_2$<br>$x_3$<br>$x_1$ | <br><br>1   | 1             | <br>1       | 3<br>1<br>1 | 4<br>2<br>2    |

Uchrashi mumkin bo'lgan ba'zi-bir hollarni quyidagi misollar asosida tushintirishga harakat qilamiz.

**1-misol.**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

**Yechish** (5-jadval).

5-jadval

| Iteratsiya              | Bazis | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | O'ng tomon | Nazorat ustuni |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|----------------|
| Boshlang'ich Iteratsiya |       | 1     | 1     | 0     | 0     | 1          | 3              |
|                         |       | 0     | 1     | 2     | 0     | 1          | 4              |
|                         |       | 0     | 1     | 1     | -1    | 0          | 1              |
|                         |       | 1     | 3     | 3     | -1    | 2          | 8              |
| 1-Iteratsiya            | $x_1$ | 1     | 1     | 0     | 0     | 1          | 3              |
|                         |       | 0     | 1     | 2     | 0     | 1          | 4              |
|                         |       | 0     | 1     | 1     | -1    | 0          | 1              |
|                         |       | 0     | 2     | 3     | -1    | 1          | 5              |
| 2-Iteratsiya            | $x_1$ | 1     | 1     | 0     | 0     | 1          | 3              |
|                         |       | 0     | 1     | 2     | 0     | 1          | 4              |
|                         | $x_4$ | 0     | -1    | -1    | 1     | 0          | -1             |
|                         |       | 0     | 1     | 2     | 0     | 1          | 4              |
| 3-Iteratsiya            | $x_1$ | 1     | 0     | -2    | 0     | 0          | -1             |
|                         | $x_2$ | 0     | 1     | 2     | 0     | 1          | 4              |
|                         | $x_4$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 1          | 3              |
|                         |       | 0     | 0     | 0     | 0     | 0          | 0              |

4-Iteratsiyani qilib bo'lmaydi, chunki oxirgi satr elementlarining barchasi nollarga aylanib ketdi. Bu oxirgi tenglama qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'rsatadi. Demak, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'lib, yuqoridagi jarayon natijasida bu yechimlarni  $x_1=2x_3$ ,  $x_2=1-2x_3$ ,  $x_4=1-x_3$  ko'rinishida bo'lib, bu yerda  $x_3$  ozod noma'lum ixtiyoriy qiymat olishi mumkin. Bu misolda oxirgi iteratsiya natijasida pog'onali sistemaga keldik.

## 2-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

**Yechish** (6-jadval).

6-jadval

| Iteratsiya              | Bazis | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | O'ng tomon | Nazorat ustuni |
|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------------|----------------|
| Boshlang'ich Iteratsiya |       | 1     | 3     | -1    | 1     | 0          | 4              |
|                         |       | 1     | -1    | 1     | 0     | 1          | 2              |
|                         |       | 0     | 1     | 1     | -1    | 2          | 3              |
| 1-Iteratsiya            | $x_1$ | 1     | 3     | -1    | 1     | 0          | 4              |
|                         |       | 0     | -4    | 2     | -1    | 1          | -2             |
|                         |       | 0     | 1     | 1     | -1    | 2          | 3              |
| 2-Iteratsiya            | $x_1$ | 1     | 4     | 0     | 0     | 2          | 7              |
|                         |       | 0     | -5    | 1     | 0     | -1         | -5             |
|                         | $x_4$ | 0     | -1    | -1    | 1     | -2         | -3             |



**Teorema.** (8.1) sistema uchun  $m < n$  bo'lsa, u holda (8.1) sistema nolmas yechimga ega bo'ladi, bu yerda  $m$  tenglamalar soni va  $n$  noma'lumlar soni.

***Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarining asosiy xossalari:***

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Rightarrow \vec{a} \pm \vec{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$$
$$\alpha \in R \wedge \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \Rightarrow \alpha \vec{b} = (\alpha\beta_1, \alpha\beta_2, \dots, \alpha\beta_n).$$

Biror sonlar maydoni ustida bir jinsli bo‘lmagan  $n$  noma’lumli  $m$  ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

**Teorema.** (8.2) sistema ixtiyoriy ikkita yechimlarining ayirmasi (8.1) sistemaning yechimi bo‘ladi.

### 3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarining fundamental yechimlar sistemasi

Ravshanki, (8.1) sistemaning kengaytirilgan matritsasining  $(n+1)$ -ustuni faqat nollardan tashkil topgani uchun elementar almashtirishlar xossasiga ko'ra kengaytirilgan matritsaning rangi asosiy matritsaning rangiga teng, ya'ni  $r(A) = r(B)$ , bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \text{ va } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}_{m \times (n+1)}$$

Kroneker–Kapelli teoremasiga ko'ra  $r(A) = r(B) = n$  bo'lsa, (8.1) sistema yagona (trivial) yechimga ega. Bu yechim esa yuqorida ta'kidlab o'tganimizdek har doim mavjud. Shuning uchun ham biz bu sistemada  $r(A) = r(B) < n$  deb qaraymiz, ya'ni (8.1) sistema aniqmas sistema bo'lsin va  $r(A) = r$  belgilashni kiritaylik.

**Ta'rif.**  $n - r$  ta ozod noma'lumlardan tuzilgan vektor–funksiya ko'rinishidagi ixtiyoriy yechimlar sistemasi (8.1) sistemaning umumiy yechimi deb ataladi, ya'ni:

$$X(t_1, \dots, t_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ \dots \\ x_r(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ \dots \\ t_{n-r} \end{pmatrix},$$

bu yerda  $x_1, \dots, x_r$ -lar bosh (bazis) o'zgaruvchilar,  $t_1, \dots, t_{n-r}$  lar esa mos ravishda  $x_{r+1}, \dots, x_n$  ozod o'zgaruvchilarning qiymatlari. Bu umumiy yechimdan quyidagi  $n - r$  ta yechimni olamiz:

$$X_1 = X_1(1, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} x_1(1, 0, \dots, 0) \\ \dots \\ x_r(1, 0, \dots, 0) \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = X_2(0, 1, \dots, 0) = \begin{pmatrix} x_1(0, 1, \dots, 0) \\ \dots \\ x_r(0, 1, \dots, 0) \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$X_{n-r} = X_{n-r}(0, 0, \dots, 1) = \begin{pmatrix} x_1(0, 0, \dots, 1) \\ \dots \\ x_r(0, 0, \dots, 1) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Ta’rif.** Ushbu,  $X_1, X_2, \dots, X_{n-r}$  vektor–ustunlar sistemasi (8.1) sistemaning normal fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.

***Fundamental yechimlar sistemasi xossalari***

➤ (8.1) sistemaning ixtiyoriy  $X$  yechimini  $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{n-r} X_{n-r}$  yagona ko‘rinishda ifodalash mumkin, bu yerda  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$  lar biror sonlar. Bu xossani qanoatlantiruvchi (8.1) sistemaning ixtiyoriy  $n-r$  ta yechimlar majmuasi (8.1) sistemaning fundamental yechimlar sistemasi deb ataladi.

➤ (8.1) sistemaning  $n-r$  ta ixtiyoriy yechimlar majmuasi

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \dots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \dots \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, \dots, \quad X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-r)} \\ \dots \\ x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

fundamental yechimlar sistemasini tashkil qiladi, faqat va faqat shu holdaki, bu yechimlarning komponentalaridan tuzilgan ushbu

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n-r)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n-r)} \end{pmatrix}$$

matritsa rangi  $n-r$  ga teng bo'lganda.

➤ Bir jinsli bo'lmagan (8.2) sistema va unga mos bir jinsli (8.1) sistemalar berilganda (8.2) sistemaning umumiy yechimini (8.1) sistemaning umumiy yechimi va (8.2) sistemaning qandaydir bitta xususiy yechimi yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

**Quyidagi bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi ning umumiy yechimi va fundamental yechimlar sistemasini toping.**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

**Yechilishi:** Berilgan sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va uni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko'rinishiga keltiramiz:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right)_{II-2I} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{array} \right).$$

Bundan  $r(A) = r(B) = 2$  va  $n = 2$  bo'lgani uchun berilgan sistema Kroneker – Kapelli teoremasiga ko'ra yagona yechimga ega. Oxirgi hosil qilingan sistemadan mos ravishda ushbu sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 7x_2 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemadagi ikkinchi tenglamadan  $x_2 = 0$  va bu qiymatni sistemadagi birinchi tenglamaga qo'ysak, u holda  $x_1 = 0$  bo'ladi.

*Javob.* Umumiy yechim:  $(0; 0)$ .

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

**Yechilishi:** Berilgan sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va uni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko'rinishiga keltiramiz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)_{II-2I} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

Bundan  $r(A) = r(B) = 2$  va  $n = 3 > 2$  bo'lgani uchun berilgan sistema Kroneker–

Kapelli teoremasiga ko'ra cheksiz ko'p yechimga ega. Bosh (bazis) o'zgaruvchilar soni  $r(A)=2$  va ozod o'zgaruvchilar soni  $n-r(A)=3-2=1$  ga teng. Bosh o'zgaruvchilarni aniqlash uchun  $A$  matritsadan hosil qilingan matritsaning noldan

farqli bo'lgan birorta ikkinchi tartibli minorini tanlaymiz, masalan  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ .

Bu minorning birinchi va ikkinchi ustunlari  $A$  matritsaning  $x_1$  va  $x_2$  o'zgaruvchilariga mos keluvchi ustunlari bo'lib, bu o'zgaruvchilar esa bazis o'zgaruvchilar, qolgan  $x_3$  o'zgaruvchi esa ozod o'zgaruvchi bo'ladi. Biz qarayotgan misolda bazis o'zgaruvchilar sifatida  $x_2$  va  $x_3$  o'zgaruvchilarni tanlash mumkin emas, chunki bu o'zgaruvchilarga mos keluvchi minor nolga teng,

ya'ni  $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$ .

Oxirgi hosil qilingan sistemadan mos ravishda ushbu sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan  $x_2 = x_3$  ni hosil qilib, uni birinchi tenglamaga qo'ysak, u holda  $x_1 = 0$  ga ega bo'lamiz. Agar  $x_3 = t$  deb olsak, u holda sistemaning umumiy yechimi  $X(t) = (0; t; t)^T = t \cdot (0; 1; 1)^T$  ni hosil qilamiz. Bundan fundamental yechimlar sistemasi  $X_1(1) = (0; 1; 1)^T$  ga ega bo'lamiz. Umumiy yechimning fundamental yechimlar sistemasi orqali chiziqli kombinatsiyasi esa  $X(t) = t \cdot X_1(1)$ ,  $t \in R$ .

**Javob.** Umumiy yechim:  $X(t) = t \cdot (0; 1; 1)^T$  va fundamental yechimlar sistemasi  $X_1(1) = (0; 1; 1)^T$ .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

**Yechilishi:** Berilgan sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozamiz va uni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Bundan  $r(A) = r(B) = 2$  va  $n = 4 > 2$  bo‘lgani uchun berilgan sistema Kroneker–Kapelli teoremasiga ko‘ra cheksiz ko‘p yechimga ega.  $r(A) = 2$  bo‘lgani uchun oxirgi hosil qilingan matritsaning birorta noldan farqli bo‘lgan ikkinchi tartibli

minori, masalan  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$  ni tanlaymiz. Bu minorning birinchi va ikkinchi ustunlari mos ravishda  $A$  matritsaning  $x_1$  va  $x_2$  o‘zgaruvchilari ustunlariga mos kelgani uchun bu o‘zgaruvchilar bazis o‘zgaruvchilar, qolgan  $x_3$  va  $x_4$  lar esa ozod o‘zgaruvchilar bo‘ladi. Mos ravishda hosil qilingan matritsadan sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan  $x_2 = -x_3 - \frac{19}{15}x_4$  ni topib, uni sistemaning birinchi tenglamasiga qo‘ysak, u holda  $x_1 = -\frac{7}{15}x_4$  ga ega bo‘lamiz. Agar ozod o‘zgaruvchilarga  $x_3 = t_1$  va  $x_4 = 15t_2$  deb belgilash kiritsak, u holda sistemaning umumiy yechimi  $X(t_1, t_2)$ , fundamental yechimlar sistemasi  $X_1(1,0)$  va  $X_2(0,1)$  lar quyidagicha bo‘ladi:

$$X(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} -7t_2 \\ -t_1 - 19t_2 \\ t_1 \\ 15t_2 \end{pmatrix}, \quad X_1(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad X_2(0, 1) = \begin{pmatrix} -7 \\ -19 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Umumiy yechimning fundamental yechimlar sistemasi orqali chiziqli kombinatsiyasi esa  $X(t_1, t_2) = t_1 \cdot X_1(1, 0) + t_2 \cdot X_2(0, 1)$ ,  $t_1, t_2 \in R$ .

4. Quyidagi bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi ning umumiy yechimi va fundamental yechimlar sistemasini toping.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

**Yechilishi:** Dastlab, berilgan sistema birgalikda yoki birgalikda emasligini tekshiramiz. Buning uchun Kroneker – Kapelli teoremasidan foydalanib, bir jinsli bo'lmagan sistemaning asosiy va kengaytirilgan matritsalarining ranglarini topamiz. Bu matritsalarining ranglarini topish uchun ularni elementar almashtirishlar yordami bilan zinasimon matritsa ko'rinishiga keltiramiz:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -4 & -1 & -8 \\ 0 & -45 & -20 & -5 & -40 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Bundan  $r(A) = r(B) = 2$  va  $n = 4 > 2$  bo'lgani uchun berilgan sistema Kroneker – Kapelli teoremasiga ko'ra cheksiz ko'p yechimga ega. Demak, bu sistemaning umumiy yechimi va fundamental yechimlar sistemasi mavjud. Bu yechimlarni topish uchun biz quyidagi xossadan foydalanamiz.

**Xossa.** (8.2) sistemaning umumiy yechimini (8.1) sistemaning umumiy yechimi va (8.2) sistemaning qandaydir bitta xususiy yechimi yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin.

Shuning uchun dastlab, berilgan bir jinsli bo'lmagan sistemaning birorta xususiy yechimini topamiz. Buning uchun oxirgi hosil qilingan matritsadan quyidagi

sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_4 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_1 = 6, \\ -9x_2 - 4x_3 - x_1 = -8. \end{cases}$$

Bu sistemadagi noma'lumlardan ixtiyoriy ikkitasiga istalgan qiymatni berib, masalan,  $x_3 = x_4 = 0$  bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 6, \\ -x_1 - 9x_2 = -8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 6, \\ -11x_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11}, \\ x_2 = \frac{10}{11}. \end{cases}$$

Demak, biz izlagan xususiy yechim  $X_0 = \left(-\frac{2}{11}, \frac{10}{11}, 0, 0\right)^T$  dan iborat.

Endi berilgan sistemaga mos bir jinsli sistemasining umumiy yechimi va fundamental yechimlar sistemasini topamiz.

$r(A) = 2$  bo'lgani uchun oxirgi hosil qilingan matritsaning birorta noldan farqli

bo'lgan ikkinchi tartibli minori, masalan  $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -9 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$  ni tanlaymiz. Bu minorning birinchi va ikkinchi ustunlari mos ravishda  $A$  matritsaning  $x_1$  va  $x_2$  o'zgaruvchilari ustunlariga mos kelgani uchun bu o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar, qolgan  $x_3$  va  $x_4$  lar esa ozod o'zgaruvchilar bo'ladi. Mos ravishda hosil qilingan matritsadan sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} x_4 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_1 = 0, \\ -9x_2 - 4x_3 - x_1 = 0. \end{cases}$$

Bu sistemadan  $x_1$  va  $x_2$  o'zgaruvchilarini topish uchun sistemaning birinchi tenglamasini 9 ga, ikkinchi tenglamasini esa 7 ga ko'paytirib mos ravishda

qo'shsak, u holda  $x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4$  ga ega bo'lamiz va bu tenglikni sistemaning

ikkinchi tenglamasiga qo'yib  $x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4$  ni hosil qilamiz. Agar ozod

o'zgaruvchilarga  $x_3 = t_1$  va  $x_4 = t_2$  deb belgilash kiritsak, u holda bir jinsli

sistemaning umumiy yechimi  $X(t_1, t_2)$ , fundamental yechimlar sistemasi  $X_1(1, 0)$  va  $X_2(0, 1)$  lar quyidagicha bo'ladi:

$$X(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{11}t_1 - \frac{9}{11}t_2 \\ -\frac{5}{11}t_1 + \frac{1}{11}t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad X_1(1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad X_2(0, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bundan yuqorida aytib o'tilgan xossaga ko'ra bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimi  $X'(t_1, t_2) = X_0 + X(t_1, t_2)$ , fundamental yechimlar sistemasi  $X'_1(1, 0) = X_0 + X_1(1, 0)$  va  $X'_2(0, 1) = X_0 + X_2(0, 1)$  lar quyidagicha bo'ladi:

$$X'(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}t_1 - \frac{9}{11}t_2 \\ \frac{10}{11} - \frac{5}{11}t_1 + \frac{1}{11}t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad X'_1(1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} \\ \frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad X'_2(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Umumiy yechimning fundamental yechimlar sistemasi orqali chiziqli kombinatsiyasi esa  $X'(t_1, t_2) = t_1 \cdot X'_1(1, 0) + t_2 \cdot X'_2(0, 1)$ ,  $t_1, t_2 \in R$ .

**5-misol.** Berilgan bir jinsli sistema umumiy yechimini vektor shaklda quring:

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

**Yechish:**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right) : \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right) : \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1,2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2,6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$m = 4$ ,  $r = 2$  bo'lgani uchun  $m - r = 2$  ta chiziqli erkli  $\vec{e}_1(1; 0)$  va  $\vec{e}_2(0; 1)$

sistemani tanlaymiz.  $\vec{e}_1(1; 0)$  vektor koordinatalarini umumiy yechimning mos erkli

noma'lumlari o'rniga qo'yib, bazis noma'lumlarni aniqlaymiz va  $\vec{F}_1(-2, 6; 1, 2; 1; 0)$  fundamental yechimni quramiz.  $\vec{e}_2(0; 1)$  vektor yordamida  $\vec{F}_2(1; -1; 0; 1)$  fundamental yechimni quramiz. Boshqacha qilib aytganda kengaytirilgan matritsadagi koeffitsiyentlarni sistemaga qo'yamiz:

$$\begin{cases} x_2 - 1,2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2,6x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2,6x_3 + x_4 \\ x_2 = 1,2x_3 - x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

Fundamental yechimlar  $\vec{F}_1(-2, 6; 1, 2; 1; 0)$  va  $\vec{F}_2(1; -1; 0; 1)$  quriladi.

## V. GLOSSARIY

**Algebra-** matematikaning miqdorlar ustida bajariladigan amallarining umumiy qonunlari haqidagi o'quv fani

**Algoritm-** ko'rsatilgan maqsadga erishish yoki qo'yilgan topshiriq(masala)ni yechishga qaratilgan vazifa(amal)lar ketma-ketligini bajarish borasida ijrochiga tushunarli va aniq ko'rsatmalar berish

**Axborot texnologiya** - obekt, jarayon yoki xodisa (axborot maxsulot) xolati haqida yangi sifattdagi ma'lumotlarni olish uchun foydalanadigan ma'lumotlarni (birlamchi) yigish, ishlov berish va o'zlash vositalari, hamda usullari majmuasidir.

**Axborot texnologiyalari turlari:** jadval prosessorlari; Matnli va gipermatnli prosessorlar; Grafik prosessorlari; Ekspert tizimlari; Multimedia vositalari va boshqalar.

**Baho** ta'lim oluvchilar bilim, ko'nikma va malakalarining miqdoriy aholashda bal yoki raqamlar vositasida shartli ifodalanishi

**Bilim** - haqiqiy borliq umumiy aksini topadi. Talabalar hodisa, voqeya, qonuniyatlar to'g'risidagi ma'lumotlarni o'rganadilar va u ularning yutug'i bo'ladi.

bog'lanishlar tizimi bilan ta'minlangan, uning bir fragmentidan boshqasiga darhol o'tish imkoniyatlari oldindan berilgan matn.

**Davlat ta'lim standarti** - matematikadan ta'lim mazmunining majburiy hajmini; o'quvchilarning yosh xususiyatlari va imkoniyatlarini hisobga olgan holda tanlanadigan o'quv yuklamasining yuqori miqdoridagi hajmini; asosiy yo'nalishlar bo'yicha o'quvchilarning bilim, ko'nikma va malakalariga qo'yiladigan talablar va ularni baholash me'yorlarini belgilaydi.

**Dars** – bu mantiqan tugallangan, butun vaqt bilan chegaralangan o'quv-tarbiya jarayonining qismidir.

**Dars tahlili** o'quv mashg'ulotini bir butun yaxlit holda yoki muayyan bo'laklarga bo'lib baholash

**Keys-stadi – Case study** (inglizcha sase - to'plam, aniq vaziyat, stadi -ta'lim) keysda bayon qilingan va ta'lim oluvchilarni muammoni ifodalash hamda uning maqsadga muvofiq tarzdgagi yechimi variantlarini izlashga yo'naltiradigan aniq real

yoki sun'iy ravishda yaratilgan vaziyatning muammoli- vaziyatli tahlil etilishiga asoslanadigan ta'lim

**Konkretlashtirish**-o'qitishning dastlabki bosqichlaridagi qo'llaniladi. U o'rganilayotgan obyektning bir tarafi bir yoqlama o'rganiladi va bu o'rganish uning boshqa tomonlariga bog'liq bo'lmagan holda amalga oshiriladi..

**Konsepsiya**- umumiy g'oya yoki biror-narsa to'g'risida tasavvur, tushuncha, fikrlar tizimi.

**Kreativlik (ijodiylik)** qandaydir yangi, betakror narsa yarata olish layoqati, badiiy shakl yaratish, fikrlash, g'oya va yechimga olib keluvchi aqliy jarayon

**Kuzatish** - atrof olam alohida obyektlar va hodisalarining xossalari va munosabatlarini ular mavjud bo'lgan tabiiy sharoitlarda o'rganish usuliga aytiladi.

**Ko'nikma** –egallagan bilimlar asosida o'zgaruvchan sharoitlarda birorta faoliyatni amalga oshirish qobiliyati.

lozim bo'lgan masala, vazifa

**Malakalar** –bu, ko'p marta takrorlash natijasidagi mashinal (beixtiyoriy), harakatlardir.

**Matematik ta'limning asosiy yunalishlari** - son va hisoblashlar; ifodalarni ayniy shakl almashtirishlar; tenglamalar va tengsizliklar; funksiyalar va grafiklar; geometrik shakllar va kattaliklar.

**Matematika darsligi, o'quv qo'llanmasi** - dastur va didaktika talablari bilan aniklanuvchi o'qitish maqsadlariga mos keluvchi matematika bo'yicha bilimlar asoslarini bayon etuvchi kitob hisoblanadi.

**Matematika o'qitish metodikasi** – jamiyat tomonidan qo'yilgan ta'lim maqsadlarga mos ravishda matematika o'qitish usullarini, qonuniyatlarini uning ma'lum rivojlanish darajasida o'rganadigan va tadqiq etadigan pedagogikaning bo'limi

**Matematika o'qitishda muammoli ta'lim usuli** - ko'pgina tushunchalarni o'rganish muammoli vaziyatni yaratishga olib kelinishi mumkin.

**Matematika o‘qitishda predmetlararo aloqalar**- bu matematika boshqa o‘quv fanlari bilan ,ayniqsa fizika, astronomiya, biologiya, chizmachilik, kimyo va hokazo fanlar bilan bog‘lanishlarga.

**“Matematika” atamasi** - grekcha “bilish, fan” so‘zidan olingan

**Matematika fani** - moddiy borliqning fazoviy va miqdoriy munosabatlarini aks ettiruvchi qonunlarni o‘rganadi

**Ma’ruza usuli**- bunda o‘qituvchi materialni o‘zi bayon etadi.

**Metod** ta’lim jarayonida taqdim etilgan amaliy va nazariy bilimlarni egallash, o‘zlashtirish, o‘rgatish, o‘rganish, bilish uchun xizmat qiladigan yo‘l- yo‘riqlar, usullar majmui

**Modul** o‘quv axborotining mantiqiy bo‘lakka bo‘lingan qismi, ushbu qism mantiqan yaxlit va tugallangan bo‘lib, uning o‘zlashtirilishini nazorat qilish mumkin bo‘ladi

**Modulli o‘qitish** - o‘qitishning istiqbolli tizimlaridan biri hisoblanadi, chunki u ta’lim oluvchilarning bilim imkoniyatlarini va ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirish tizimiga eng yaxshi moslashgandir.

**Muammo** o‘quv jarayonida hal qilinishi

**Muammoli vaziyat** - Mazkur holda vaziyat subyekting hozirgi vaqtda yoki kelgusidagi maqsadlarga erishishiga xavf soladigan vaziyat tushuniladi.

**Multimediya vositalari.** Bularga turli tipdagi axborotlarni va jarayonlarni matn, rasm, sxema, jadval, diagramma va virtual muxitlarni yaratish, saklash, ishlov berish, rakamlashtirilgan va jarayonli kurinishda amalga oshirishning kompyuterli vositalari kiradi.

**Rivojlantiruvchi ta’lim** - o‘qituvchining asosiy vazifasi bilish mustaqilligi va qobiliyatlarini rivojlantirishga yo‘naltirilgan, talabalarni o‘quv faoliyatini tashkillashtirish hisoblanadi.

**Tabaqalashtirish** -o‘qitishda o‘quvchilarni o‘z bilim saviyasi va qobiliyatlariga ko‘ra guruhlariga ajratgan holda, tabaqalarga bo‘lgan holda o‘qitishni nazarda tutadi.

**Tajriba** - obyektlar va hodisalarni o‘rganishning shunday usuliga aytiladiki, bunda biz ularning tabiiy holatiga va rivojiga aralashamiz, ular uchun sun’iy sharoitlar yaratamiz, qismlarga ajratib boshqa obyektlar va hodisalar bilan bog‘lanishlar hosil

qilib tadqiq etamiz.

**Taqqoslash** – o‘rganilayotgan obyektlarning o‘xshashlik va farqlarini fikran ajratishdan iborat.

**Tafakkur** - inson ongida ask etgan obyektlar tomonlar va xossalarini ajratish va ularni yangi bilim olish uchun boshqa obyektlar bilan tegishli munosabatlarda qo‘yish jarayoniga aytiladi. Umuman olganda, tafakkur obyektiv borliqning inson ongida faol aks ettirish jarayonidir.

**Tafakkurning shakllari** - tushuncha, hukm va tasdiqlar.

**Tahlil** muayyan obyekt, voqyea-hodisani har tomonlama tahlil qilish, chuqur tekshirish, o‘rganish

**Ta’lim vositasi** muayyan o‘qitish metodi yoki usullaridan muvaffaqiyatli foydalanish uchun zarur bo‘lgan yordamchi o‘quv materiallari

**Ta’lim tizimi** turli daraja va yo‘nalishdagi o‘zaro aloqador uzluksiz ta’lim dasturlari va davlat ta’lim standartlari, tashkiliy huquqiy turlaridan qat’iy nazar ta’lim muassasalarining barcha tarmoqlari, ta’limni boshqaruv organlari va ular qoshidagi muassasa hamda tashkilotlarni qamrab oluvchi tizim.

**Teoremlar** matematik xukmlarning eng ko‘p ishlatiladigan turi bo‘lib, u aksiomalar yordamida o‘rnatilayotgan nazariy natijalarni ifoda etib, isbotlanishi talab etiladi.

**Texnologiya** grek tilidan (techne) tarjima kilganda san’at, maxorat, bilish ma’nolarini anglatadi, bular esa o‘z navbatida jarayonlardir. Jarayonlar - bu qo‘yilgan maqsadga erishish uchun ma’lum xarakatlar majmuasidir.

**Tizimli yondashuv** tadqiqotchining pedagogik obyekt yaxlitligini ochib ko‘rsatishga yo‘naltiruvchi, uning ichki aloqa va munosabatlarini belgilovchi jarayon

**Tushunchalar** - obyektlarning turli xil sifatlari, belgilari va xususiyatlarini aks ettiradi,

**Uzluksiz ta’lim** o‘zaro mantiqiy izchillik asosida bog‘langan hamda soddadan murakkabga qarab rivojlanib boruvchi va bir-birini taqozo etuvchi bosqichlardan iborat yaxlit ta’lim tizimi

**O'quv materialining elektron shakli.** Bosma shaklda bayon etilgan asosiy, tushuntiruvchi, amaliy matnlarning ovozli elektron versiyasi takdim etiladi.

**O'quvchilarning matematik tayyorgarligiga qo'yiladigan talablar:** a) matematik ta'lim jarayonida o'quvchilarga beriladigan imkoniyatlar bayon etiladi; v) o'quvchilarning matematikadan egallashlari majbur bo'lgan bilim va malakalar, masalalar yechish ko'nikmalari ko'rsatiladi.

**Umumlashtirish-** obyektlar to'plamiga tegishli va bu obyektlarni birlashtiruvchi birorta xossa fikran ajratiladi.

**Hamkorlikda o'qitish** - mashg'ulotlar jarayonida talabalar bilan axborot, shaxsiy va kasbiy tajribalarni almashish asosidagi guruhi yo'qitish shakli

**Evristik o'qitish** - o'qituvchi o'quvchilar bilan hamkorlikda hal etilishi zarur bo'lgan masalani aniqlab olishi. O'quvchilar esa mustaqil ravishda taklif etilgan masalani tadqiq etish jarayonida zaruriy bilimlarni o'zlashtirib oladilar va uning yechimi bo'yicha boshqa vaziyatlar bilan taqqoslaydi. O'rnatilgan masalani yechish davomida o'quvchilar ilmiy bilish metodlarini o'zlashtirib tadqiqotchilik faoliyatini olib borish ko'nikmasi tajribasini egallaydilar.

**Elektron darslik** – fanning o'quv hajmini to'liq qamragan va masofaviy yo'qitish hamda mustaqil o'rganish uchun kompyuter sxnologiyalariga asoslangan, mustaqil ta'lim olishga hamda fanga oid o'quv materiallar, ilmiy ma'lumotlarning har tomonlama samarali o'zlashtirishga mo'ljallangan bo'lib: o'quv va ilmiy materiallar faqat verbal (matn) shaklda; o'quv materiallar verbal (matn) va ikki o'lchamli grafik shaklda; multimedia (ko'p axborotli) elementlari, ya'ni ma'lumot ikki-uch o'lchamli grafik ko'rinishda, ovozli, video, animasiya va qisman verbal (matn) shaklda; taktil (his qilinuvchi, seziladigan) xususiyatli, obektlarga nisbatan harakatlanish tasavvurini yaratadigan shaklda ifodalanadi.

**Elektron lug'at**-an'anaviy "qog'ozli" lug'atga mos keluvchi elektron axborot manbai. Kompyuter versiyada so'z yoki so'zlar guruhiga maxsus ajratilgan ko'rsatma bilan istalgan dasturdan chaqirilishi mumkin. An'anaviy lug'atlardan farqli ravishda elektron lug'at matn va grafikaviy tasvirlar bilan bir qatorda video va

animasion lavhalar, tovush, musiqa va boshqalar bilan birga media-obyektlarning butun spektrlarini o'z ichiga olishi mumkin.

**Elektron nazorat (testlashtirish)** - elektron o'quv adabiyotining komponenti bo'lib, an'anaviy kompyutersiz testlashtirishning analogidir. Elektron testlashtirish holatida kompyuter test va uning natijalarini ko'rsatib beradi, bu bilan bog'liq bo'lgan algoritmlarni joriy qiladi. (Masalan, bajarilgan yoki o'tkazib yuborilgan topshiriqlarga qaytish imkoniyatining borligi yoki yo'qligi, bitta testga vaqtning chegaralanganligi va hokazo).

**Elektron testlar**-saqlangan, ishlov berilgan va baxolash uchun kompyuter yoki telekommunikasion texnikasi yordamida taqdim etiladigan testlar. Testlar berilishi o'rganilgan matnni talabaning qanchalik darajada o'zlashtirganligi o'z-o'zini baholash imkonini beradi

**Elektron topshiriqlar** - o'qituvchiga ta'lim oluvchilarning individul imkoniyatlarini hisobga olgan xolda mustaqil va nazorat ishlari uchun tartibga keltiradigan topshiriqlar majmuini o'zida aks ettiruvchi axborot manbasining muhim ko'rinishidir. Yaratilgan topshiriqlar ta'lim oluvchilarga an'anaviy «qog'oz» li va elektron variantlarida tavsiya etilishi mumkin.

**Elektron o'quv qo'llanma** – fanning o'quv hajmini qisman yoki to'liq qamragan va axborotning adaptasiya blokini o'z ichiga olgan bo'lib, masofaviyo'qitish va mustaqil o'rganish uchun mo'ljallangan o'quv manbai.

**Elektron o'quv-metodik majmua** – davlat ta'lim standarti va fan dasturida belgilangan, bilim, ko'nikma, malaka va kompetensiyalarni shakllantirishni, o'quv jarayonini kompleks loyihalash asosida kafolatlangan natijalarni olishni, mustaqil bilim olish va o'rganishni hamda nazoratni amalga oshirishni ta'minlaydigan, talabaning ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirishga yo'naltirilgan elektron o'quv – uslubiy manbalar, multimediali didaktik vositalar va materiallar, multimediali elektron ta'lim resurslari, multimediali baholash metodlari va mezonlarini o'z ichiga oladi.

## VI. ADABIYOTLAR RO'YXATI

### **I. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari**

1. Mirziyoyev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. - T.: "O'zbekiston", 2017.-488 b.
- 2.Mirziyoyev Sh.M. Milliy taraqqiyot yo'limizni qat'iyat bilan davom ettirib, yangi bosqichga ko'taramiz. 1 -jild. -T.: "O'zbekiston", 2017. — 592 b.
- 3.Mirziyoyev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: "O'zbekiston", 2018. - 507 b.
- 4.Mirziyoyev Sh.M. Niyati ulug' xalqning ishi ham ulug', hayoti yorug' va kelajagi farovon bo'ladi. 3-jild- T.: "O'zbekiston", 2019. - 400 b.
- 5.Mirziyoyev Sh.M. Milliy tiklanishdan - milliy yuksalish sari. 4-jild - T.: "O'zbekiston", 2020. - 400 b.

### **II. Norniativ-huquqiy hujjatlar**

- 1.O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. - T.: O'zbekiston, 2023.
- 2.O'zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda qabul qilingan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni.
- 3.O'zbekiston Respublikasining "Korrupsiyaga qarshi kurashish to'g'risida"gi Qonuni.
4. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2015-yil 12-iyundagi "Oliy ta'lim muassasalarining rahbar va pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida"gi PF-4732-sonli Farmoni.
- 5.O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-maydagi "O'zbekiston Respublikasida korrupsiyaga qarshi kurashish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risidagi PF-5729-son Farmoni.
- 6.O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 27-avgustdagi "Oliy ta'lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining uzluksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to'g'risida"gi PF-5789-sonli Farmoni.
7. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2019-yil 23 sentabrdagi "Oliy ta'lim muassasalari rahbar va pedagog kadrlarining malakasini

oshirish tizimini yanada takomillashtirish bo'yicha qo'shimcha chora-tadbirlar to'g'risida"gi 797-sonli Qarori.

8.O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktabrdagi "O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida"gi PF-5847- sonli Fannoni.

9. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi "2022- 2026-yillarga mo'ljallangan Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to'g'risida"gi PF-60-son Farmoni.

10.O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2023-yil 25-yanvardagi "Respublika ijro etuvchi hokimiyat organlari faoliyatini samarali yo'lga qo'yishga doir birinchi navbatdagi tashkiliy chora-tadbirlar to'g'risida"gi PF-14-sonli Fannoni.

### **III. Maxsus adabiyotlar**

1. 17. Saxayev M.S. Elementar matematikadan masalalar tuplami.— Toshkent: «O'qituvchi», 1977.

2. Umirbekov A.U., Shoabdalov Sh.Sh.Matematikani takrorlash — Toshkent: «O'qituvchi», 1989

3. Xaydarov B.K. Matematika. O'rta maktabning 5-sinfi uchun darslik.—T.: "Yangiyo'lpoligrafservis", 2015 y.

4. Xaydarov B.K., S.Jumanazarov, O.Do'smatov, J.Yu.Saparboyev. "Matematika fanini o'qitishda zamonaviy yondashuvlar va innovasiyalar" moduli bo'yicha o'quv-uslubiy majmua. Toshkent davlat pedagogika universiteti huzuridagi xalq ta'lim xodimlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish xududiy markazi, Toshkent, 2017. T.: 2017. - 98.

5. Xaydarov B.K., S.Jumanazarov., O.Do'smatov., J.Yu.Saparboyev. "Matematika fanini o'qitish metodikasi" moduli bo'yicha o'quv-uslubiy majmua. Toshkent davlat pedagogika universiteti huzuridagi xalq ta'lim xodimlarini kadrlarni qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirish xududiy markazi, Toshkent, 2017.

6. Mirzaahmedov M., Rahimqoriyev A. Matematika 6-sinf. Umumiy o'rta ta'lim maktablari 6-sinfi uchun darslik. –T.: “O‘qituvchi”, 2011 y.
7. Alimov Sh.A., Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M. Algebra. Umumiy o'rta ta'lim maktablari 7-9-sinflari uchun darslik.–T.: “O‘qituvchi”, 2014 y.
8. Azamov A., Xaydarov B., Kuchkarov A., Sariqov Ye., Sag'diyev U. Geometriya. Umumiy o'rta ta'lim maktablari 7 -sinf uchun darslik. –T.: “Yangiyo'l poligraf servis”, 2017 y.
9. Rahimberdiyev A. Geometriya 8-sinf. Darslik.–T.: “O‘qituvchi”, 2014y.
10. Haydarov B., Sariqov Ye., Qo'chqorov A. Geometriya. 9-sinf.–T.: “O‘zbekistonmilliyensiklopediyasi”, 2014 y.
11. Mirzaxmedov M., Haydarov B. vaboshqalar Matematika. 10-sinf. Darslik, 1 - 2 bo'limlar, – T.: MChJ “EKSTREMUM PRESS” 2017 y.
12. Mirzaxmedov M., Haydarov B. vaboshqalar Matematika. 10-sinf. Darslik, 1 - 2 bo'limlar, – T.: MChJ “EKSTREMUMPRESS” 2018 y.

#### **Elektron ta'lim resurslari**

1. O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligining elektron sayti: [www.uzedu.uz](http://www.uzedu.uz)
2. O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining elektron sayti: [www.edu.uz](http://www.edu.uz)
3. Xalq ta'limi sohasida axborot-kommunikasiya texnologiyalarini rivojlantirish markazining elektron sayti:[www.multimediya.uz](http://www.multimediya.uz)
4. O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi huzuridagi Bosh ilmiy-metodik markazning elektron sayti: [www.bim.uz](http://www.bim.uz)

Ziyonet ijtimoiy axborot ta'lim portalining elektron sayti: [www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)