



**FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI
QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING
MALAKASINI OSHIRISH MINTAQAVIY
MARKAZI**



**MATEMATIKA FANINI O'QITISHNING
ZAMONAVIY METODIKALARI**



Modulning ishchi dasturi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2025-yil 30-dekabrdagi oliy ta'lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malakasini oshirish yo'nalishlari o'quv reja va dasturlariga muvofiq ishlab chiqilgan

Tuzuvchi: **A.Yusupova**-FarDU, matematika kafedrası professori

Taqrizchi: **K.Karimov**- FarDU, matematika kafedrası dotsenti, f.-m.f.d.

KIRISH

Ushbu ishchi dastur O'zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentabrda tasdiqlangan "Ta'lim to'g'risida"gi Qonuni, O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 3-dekabrdagi "Iqtidorli yoshlarni saralab olish tizimi va akademik litseylar faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4910-son hamda Vazirlar Mahkamasining 2022-yil 1-iyundagi "Akademik litseylar rahbar va pedagog xodimlarining uzduksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to'g'risida"gi 296-son Qarorlarida belgilangan ustuvor yo'nalishlar hamda namunaviy dastur mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo'lib, u zamonaviy talablar asosida malaka oshirish jarayonlarining mazmunini takomillashtirish hamda akademik litseylar pedagog xodimlarining kasbiy kompetentligini muntazam oshirib borishni maqsad qiladi.

Ishchi dastur doirasida berilayotgan mavzular orqali akademik litseylarda faoliyat olib borayotgan pedagog xodimlarning ta'lim jarayonida matematika fanida masalalarni yechishning nostandart usullarini qo'llash va uning turli masalalardagi tadbirlariga oid bilimlar darajasini kengaytirish va chuqurlashtirish hisobiga ularning pedagogik mahorat va kasbiy kompetentligini muntazam takomillashtirish bilan bog'liq bilim, ko'nikma va malakalarga ega bo'lishlari ta'minlanadi.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi tinglovchilarni matematik masalalarni yechishning nostandart usullarini qo'llash va ularning matematika fanini o'qitishda hamda ta'lim sohasida qo'llanilish imkoniyatlaridan keng foydalanish, dars jarayonida kam e'tibor qaratiladigan masalalarini tahlil qilish va muammolarini hal etish bo'yicha bilim, ko'nikma va malakalarini oshirishdan iborat.

Modulning vazifalariga quyidagilar kiradi:

- pedagog kadrlarning kasbiy bilim, ko'nikma, malakalarini uzluksiz oshirish va rivojlantirish;

- pedagoglarning zamonaviy talablarga mos holda akademik litseylardagi o'qitish sifati va samaradorligini ta'minlash uchun zarur bo'lgan kasbiy mahorat darajasini oshirish;
- o'qitishning innovatsion texnologiyalari va ilg'or xorijiy tajribalarni o'zlashtirish hamda ulardan o'quv jarayonida samarali foydalanish ko'nikmalarini shakllantirish;
- o'quv jarayonini ilm-fan va ishlab chiqarish bilan samarali integratsiyasini ta'minlashga qaratilgan faoliyatni tashkil etish.

Modul bo'yicha tinglovchilarning bilimi, ko'nikma va malakalariga qo'yiladigan talablar

“Matematika fanini o'qitishning zamonaviy metodikalari” modulini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan masalalar doirasida:

Tinglovchi:

- oliy ta'limga kirish testlarining talablariga mos mashqlarni;
- o'zgaruvchilarni almashtirish natijasida trigonometrik funksiyalarga keltirib yechiladigan masalalarni;
- skalyar ko'paytmaning nostandart masalalar yechishda yuqori darajali fikrlash (Bloom: Analyze–Evaluate–Create) texnologiyasidan foydalanishni;
- real hayotiy modellarni;
- mantiqiy topshiriqlar va olimpiada elementlari orqali tahliliy fikrlash ko'nikmalarini shakllantirish metodlarini;
- samaradorligi yuqori, lekin kam uchraydigan kombinatsion usullardan foydalanishga keltiriladigan tenglama va tengsizliklarni **bilishi** kerak.

Tinglovchi:

- nostandart masalalarni yuqori samaradorlikka ega belgilashlar orqali yechish;
- vektorlarni skalyar ko'paytmasi va uning xossalarini o'qitishda STEM, STEAM, PBL (Project-based learning) texnologiyalarini qo'llash;
- yektorlar ustida chiziqli amallar va ulardan foydalanib ba'zi tenglama va tengsizliklarni yechish;
- matematik masalalar yechishda funksional o'rniga qo'yish metodikasida o'quvchi markazidagi ta'lim (Learner-centered learning)

texnologiyasini qo'llay olish ***ko'nikma va malakalariga*** ega bo'lishi lozim.

Tinglovchi:

- hamjihatlik, o'zaro hurmat va tolerantlikni kuchaytirish;
- reyting tizimi va kompetensiya asosida baholash;
- irratsional tenglamalar va tengsizliklar yechishda test va muammoli topshiriqlarni loyihalash;
- diagnostik, formatif va summativ baholash asoslaridan foydalanish;
- murakkab tenglama va tengsizliklar yechishda nostandart usullardan foydalanish ***kompetensiyalariga*** ega bo'lishi lozim.

“Matematika fanini o'qitishning zamonaviy metodikalari” moduli bo'yicha soatlar taqsimoti

	Modul mavzulari	Tinglovchining o'quv yuklamasi, soat			
		Hammasi	Auditoriya o'quv yuklamasi		
			Jami	jumladan	
				Nazariy	Amaliy
1	Matematik masalalar yechishda funksional o'rniga qo'yish metodikasida o'quvchi markazidagi ta'lim (Learner-centered learning) texnologiyani qo'llash.	2	2	2	
2	Nostandart masalalarni yuqori samaradorlikka ega belgilashlar orqali yechish	2	2		2
3	Vektorlar ustida chiziqli amallar va ulardan foydalanib ba'zi tenglama va tengsizliklarni yechish. Vektorlarni skalyar ko'paytmasi va uning xossalarini o'qitishda STEM, STEAM, PBL (Project-based learning) texnologiyalarini qo'llash. Skalyar ko'paytmaning nostandart masalalar	2	2	2	

	yechishda yuqori darajali fikrlash (Bloom: Analyze–Evaluate–Create) texnologiyasidan foydalanish				
4	Murakkab tenglama va tengsizliklar yechishda nostandart usullardan foydalanish	2	2		2
5	Samaradorligi yuqori, lekin kam uchraydigan kombinatsion usullardan foydalanishga keltiriladigan tenglama va tengsizliklar	2	2		2
Jami:		10	10	4	6

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: MATEMATIK MASALALAR YECHISHDA FUNKSIONAL O‘RNIGA QO‘YISH METODIKASIDA O‘QUVCHI MARKAZIDAGI TA’LIM (LEARNER-CENTERED LEARNING) TEXNOLOGIYANI QO‘LLASH. (2 SOAT)

Matematik masalalar yechishda funksional o‘rniga qo‘yish metodikasida o‘quvchi markazidagi ta’lim (Learner-centered learning) texnologiyani qo‘llash. Vektorlarni skalyar ko‘paytmasi va uning xossalarini o‘qitishda STEM, STEAM, PBL (Project-based learning) texnologiyalarini qo‘llash

2-MAVZU: NOSTANDART MASALALAR YECHISHDA YUQORI DARAJALI FIKRLASH (BLOOM: ANALYZE–EVALUATE–CREATE) TEXNOLOGIYASIDAN FOYDALANISH (2 SOAT)

Real hayotiy modellar. Mantiqiy topshiriqlar va olimpiada elementlari orqali tahliliy fikrlash ko‘nikmalarini shakllantirish metodlari. Skalyar ko‘paytmaning nostandart masalalar yechishda yuqori darajali fikrlash (Bloom: Analyze–Evaluate–Create) texnologiyasidan foydalanish

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-AMALIY MASHG‘ULOT: NOSTANDART MASALALARNI YUQORI SAMARADORLIKKA EGA BELGILASHLAR ORQALI YECHISH (2 SOAT)

Nostandart masalalarni yuqori samaradorlikka ega belgilashlar orqali yechish. Vektorlar ustida chiziqli amallar va ulardan foydalanib ba'zi tenglama va tengsizliklarni yechish

2-AMALIY MASHG'ULOT: Vektorlar ustida chiziqli amallar va ulardan foydalanib ba'zi tenglama va tengsizliklarni yechish. Vektorlarni skalyar ko'paytmasi va uning xossalarini o'qitishda STEM, STEAM, PBL (Project-based learning) texnologiyalarini qo'llash. Skalyar ko'paytmaning nostandart masalalar yechishda yuqori darajali fikrlash (Bloom: Analyze–Evaluate–Create) texnologiyasidan foydalanish **(2 SOAT)**

Samaradorligi yuqori, lekin kam uchraydigan kombinatsion usullardan foydalanishga keltiriladigan tenglama va tengsizliklar. Murakkab tenglama va tengsizliklar yechishda nostandart usullardan foydalanish.

3-AMALIY MASHG'ULOT: SAMARADORLIGI YUQORI, LEKIN KAM UCHRAYDIGAN KOMBINATSION USULLARDAN FOYDALANISHGA KELTIRILADIGAN TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR (2 SOAT)

O'zgaruvchilarni almashtirish natijasida trigonometrik funksiyalarga keltirib yechiladigan masalalar. Irratsional tenglamalar va tengsizliklar yechishda test va muammoli topshiriqlarni loyihalash. Samaradorligi yuqori, lekin kam uchraydigan kombinatsion usullardan foydalanishga keltiriladigan tenglama va tengsizliklar. Diagnostik, formatif va summativ baholash. Reyting tizimi va kompetensiya asosidagi baholash

Modulni tashkil etish va o‘tkazish bo‘yicha tavsiyalar

“Matematika fanini o‘qitishning zamonaviy metodikalari” moduli ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar shaklida olib boriladi.

Kursni o‘qitish jarayonida ta’limning zamonaviy metodlari, pedagogik texnologiyalar va masofaviy ta’limga asoslangan raqamli texnologiyalari qo‘llanilishi nazarda tutilgan:

- video ma’ruzada zamonaviy interaktiv texnologiyalar yordamida prezentatsiya va elektron-didaktik texnologiyalar;

- o‘tkaziladigan amaliy mashg‘ulotlarda bulutli texnologiyaga asoslangan dasturiy vositalar, ekspress-so‘rovlar, test so‘rovlari va boshqa interaktiv ta’lim usullarini qo‘llash nazarda tutiladi.

ADABIYOTLARRO‘YXATI

I. Maxsus adabiyotlar

1. Sharipov A.S. Analitik geometriya, Darslik.- T.: Tilsim nashriyoti, 2023. - 304 b.
2. В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави. Элементарная математика. Начало математического анализа. -М.: Мир и образование, 2024.
3. И.Э. Гриншпон, Я.С. Гриншпон. Элементарные функции и их графики. -Томский государственный университет, 2017.
4. И.М. Яглом. Геометрические преобразования. -М.:МФН, 2020.
5. Sharipov A., Keunimjayev M. Existence and uniqueness of polyhedral with given value of the conditional curvature, International Electronic Journal of Geometry, 2023, Vol. 16, No. 1, pp. 160-170 (Scopus).
6. Супрун В.П. Нестандартные методы решения задач. -М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009. –272 с.
7. Арсланов М.М. Знаменитые математические проблемы. - Казань: Казанский федеральный университет, 2012.
8. Кравцев С.В. и другие. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. -М.: Экзамен, 2001. –544 с.
9. Nouh Hassan. Mathematics Function. Translated by: Diab Publishing & Distribution, 2019. –461p. www.Diab-publishing.com

II. Internet saytlar

10. <http://edu.uz>
11. <http://lex.uz>
12. <http://lib.bimm.uz>
13. <http://ziyonet.uz>
14. <http://natlib.uz>
15. <https://problems.ru>

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

AQLIY HUJUM METODI

Aqliy hujum - g‘oyalarni generatsiya (ishlab chiqish) qilish metodidir. “Aqliy hujum” metodi biror muammoni yechishda Tinglovchilar tomonidan bildi - rilgan erkin fikr va mulohazalarni to‘plab, ular orqali ma’lum bir yechimga kelinadigan eng samarali metoddir. Aqliy hujum metodining yozma va og‘zaki shakllari mavjud. Og‘zaki shaklida o‘qituvchi tomonidan berilgan savolga ta -labalarning har biri o‘z fikrini og‘zaki bildiradi. Tinglovchilar o‘z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. Yozma shaklida esa berilgan savolga Tinglovchi - lar o‘z javoblarini qog‘oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko‘rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki “pinbord” doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. “Aqliy hujum” metodining yozma shaklida javoblarni ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to‘g‘ri va ijobiy qo‘llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va no - standart fikrlashga o‘rgatadi.

Aqliy hujum metodidan foydalanilganda Tinglovchilarning barchasini jalb etish imkoniyati bo‘ladi, shu jumladan Tinglovchilarda muloqot qilish va munozara olib borish madaniyati shakllanadi. Tinglovchilar o‘z fikrini faqat og‘zaki emas, balki yozma ravishda bayon etish mahorati, mantiqiy va tizimli fikr yuritish ko‘nikmasi rivojlanadi. Bildirilgan fikrlar baholanmasligi Tinglovchilarda turli g‘oyalar shakllanishiga olib keladi. Bu metod Tinglovchilarda ijodiy tafakkurni rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

Vazifasi. “Aqliy hujum” qiyin vaziyatlardan qutulish choralarini topishga, muammoni ko‘rish chegarasini kengaytirishga, fikrlash bir xilli - ligini yo‘qotishga va keng doirada tafakkurlashga imkon beradi. Eng asosiysi, muammoni yechish jarayonida kurashish muhitidan ijodiy hamkorlik kayfiyatiga o‘tiladi va guruh yanada jipslashadi.

Obyekti. Qo‘llanish maqsadiga ko‘ra bu metod universal hisoblanib tadqiqotchilikda (yangi muammoni yechishga imkon yaratadi), o‘qitish

jarayonida (o'quv materiallarini tezkor o'zlashtirishga qaratiladi), rivojlantirishda (o'z-o'zini bir muncha samarali boshqarish asosida faol fikrlashni shakllanti - radi) asqotadi.

Qo'llanish usuli. "Aqliy hujum" ishtirokchilari oldiga qo'yilgan muammo bo'yicha xar qanday muloxaza va takliflarni bildirishlari mumkin. Aytilgan fikrlar yozib borildi va ularning mualliflari o'z fikrlarini qay - tadan xotirasida tiklash imkoniyatiga ega bo'ldi. Metod samarasi fikrlar xilma-xilligi bilan tavsiflandi va xujum davomida ular tanqid qilin - maydi, qaytadan ifodalanmaydi. Aqliy hujum tugagach, muhimlik jixatiga ko'ra eng yaxshi takliflar generatsiyalanadi va muammoni yechish uchun zarurlari tanlanadi.

"Aqliy hujum" metodi o'qituvchi tomonidan qo'yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. Tinglovchilarning boshlang'ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo'yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.

2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog'lash maqsad qilib qo'yilganda - yangi mavzuga o'tish qismida amalga oshiriladi.

3. O'tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo'yilganda - mavzudan so'ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

"Aqliy hujum" metodining afzallik tomonlari:

- natijalar baholanmasligi Tinglovchilarni turli fikr-g'oyalarning shakl - lanishiga olib keladi;

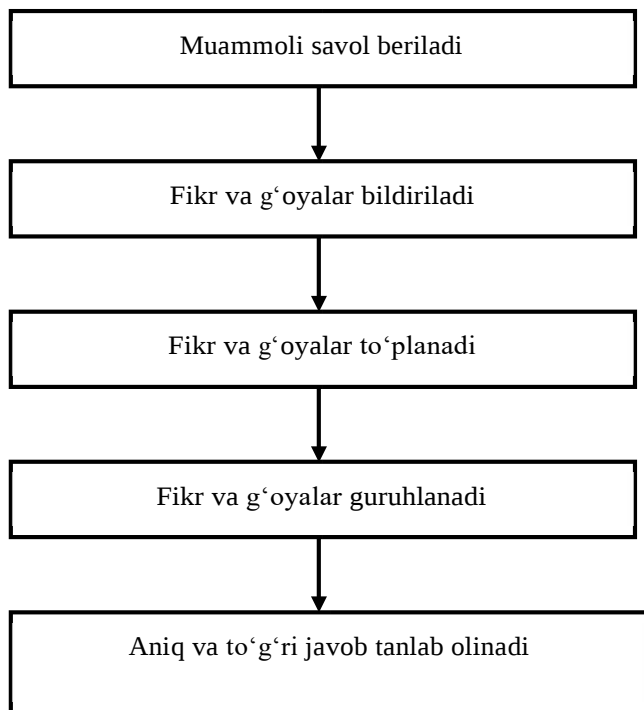
- Tinglovchilarning barchasi ishtirok etadi;
- fikr-g'oyalar vizuallashtirilib boriladi;
- Tinglovchilarning boshlang'ich bilimlarini tekshirib ko'rish imkoniyati mavjud;

- Tinglovchilarda mavzuga qiziqish uyg'otish mumkin.

"Aqliy hujum" metodining kamchilik tomonlari:

- o'qituvchi tomonidan savolni to'g'ri qo'ya olmaslik;
- o'qituvchidan yuqori darajada eshitish qobiliyatining talab etilishi.

“Aqliy hujum” metodining tarkibiy tuzilmasi



“Aqliy hujum” metodining bosqichlari:

1. Tinglovchilarga savol tashlanadi va ularga shu savol bo'yicha o'z javoblarini (fikr, mulohaza) bildirishlarini so'raladi;
2. Tinglovchilar savol bo'yicha o'z fikr-mulohazalarini bildirishadi;
3. Tinglovchilarning fikr-g'oyalari (magnitafonga, videotasmaga, rangli qog'ozlarga yoki doskaga) to'planadi;
4. Fikr-g'oyalar ma'lum belgilar bo'yicha guruhlanadi;
5. Yuqorida qo'yilgan savolga aniq va to'g'ri javob tanlab olinadi.

“Aqliy hujum” metodini qo'llashdagi asosiy qoidalar:

- a) Bildirilgan fikr-g'oyalar muhokama qilinmaydi va baholanmaydi.
- b) Bildirilgan har qanday fikr-g'oyalar, ular hatto to'g'ri bo'lmasa ham inobatga olinadi.
- c) Bildirilgan fikr-g'oyalarni to'ldirish va yanada kengaytirish mumkin.

Ilova

Mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va iboralar

Ilova

- O'zaro hurmat va iltifot ko'rsatgan xolda har kim o'z do'stlarini tinglay
- Guruxlarda ish olib borish qoidalari olishi kerak;
 - Berilgan topshiriqqa nisbatan har kim aktiv, o'zaro hamkorlikda va ma'suliyatli yondashishi kerak;
 - Zarur paytda g'ar kim yordam so'rashi kerak;
 - So'ralgan paytda har kim yordam ko'rsatishi kerak;
 - Gurux ish natijalari baholanayotganda hamma qatnashishi kerak;
- Har kim aniq tushunishi kerakki:
 - O'zgalarga yordam berib, o'zimiz o'rganamiz!
 - Biz bir qayiqda suzayapmiz: yo birga ko'zlagan manzilga yetamiz, yoki birga cho'kamiz!

ilova

“Davra suhbat” munozarasini o'tkazish bo'yicha yo'riqnoma

1. So'zga chiqqanlarni diqqat bilan, bo'lmasdan tinglang.
2. Ma'ruzachining fikriga qo'shilmasang, o'z fikringni bildirishga ruxsat so'ra.
3. Ma'ruzachining fikriga qo'shilsang, ko'rib chiqilayotgan masala bo'yicha qo'shimcha fikrlar bildir.

Ilova

Tayanch so'zlar va iboralar:

- ✓ Learner-centered learning texnologiyasi
- ✓ STEM texnologiyasi
- ✓ STEAM texnologiyasi
- ✓ PBL texnologiyasi
- ✓ Nostandart masalalar
- ✓ Vektorlar ustida chiziqli amallar
- ✓ Samaradorligi yuqori, lekin kam uchraydigan kombinatsion usullar,
- ✓ Irratsional tenglamalar va tengsizliklar,
- ✓ Diagnostik, formatif va summativ baholash,

NAZARIY MA'LUMOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: 1-MAVZU: MATEMATIK MASALALAR YECHISHDA FUNKSIONAL O'RNIGA QO'YISH METODIKASIDA O'QUVCHI MARKAZIDAGI TA'LIM (LEARNER-CENTERED LEARNING) TEXNOLOGIYANI QO'LLASH. (2 SOAT)

XVII asrda Yan Amos Komenskiy (1592-1670) «an'anaviy o'qitish» atamasini kiritdi. U maktab ta'limini tashkil etib, sinf dars tizimini, maktabda o'quv yili va uni o'quv choraklariga bo'lish to'g'risidagi tushunchani kiritdi, o'quv kunini qanday tashkil etishni belgilab berdi, o'quv mashg'ulotlarining sinf-dars tizimini nazariy jihatdan ishlab chiqdi va buni amalda qo'lladi. An'anaviy ta'lim quyidagi xususiyatlarga ega:

- an'anaviy ta'limda barcha mavzular bo'yicha qat'iy dars turlari tanlanadi;
- dars mavzusi bo'yicha bilim, ko'nikma, malakalarni shakllantiriladi, mustahkamlanadi;
- yangi mavzuni tushuntiriladi, mustahkamlanadi, nazorat, topshiriqlar beriladi;
- ta'lim oluvchilar o'qituvchini tinglash va o'zlashtirish, berilgan topshiriqlarni bajarish bilan cheklanadi;
- darsning modul va algoritmlaridan har bir o'qituvchi o'zi qo'llayotgan metodga muvofiq foydalanadi;
- an'anaviy ta'lim to'g'ridan to'g'ri diqqatni jalb qilmasdan yoki tanlab olingan ba'zi bir qismlarga chuqurroq kirmasdan, fanlarning umumiy doirasini qamrab oladi;
- an'anaviy o'quv dasturi ma'ruzasida o'qituvchi sinfda biron bir mavzu haqida gapirishni, ta'lim oluvchilar qaydlarni yozib olishni va keyin olingan bilimlarni test yoki imtihonda qo'llashni o'z ichiga oladi. Muayyan

shaxslar uchun an'anaviy sinf tuzilmalari va ma'ruzalar monoton bo'lishi mumkin, bu ta'lim oluvchilarning diqqatini tezda yo'qotishiga olib keladi.

STEAM yondashuvi — fan (Science), texnologiya (Technology), muhandislik (Engineering), san'at (Arts) va matematika (Mathematics) integratsiyasiga asoslangan ta'lim metodologiyasidir. Bu yondashuv tinglovchiarning ijodkorligi, tanqidiy fikrlashi va real hayotga mos ko'nikmalarni shakllantirishga xizmat qiladi. Quyida matematikaga STEAM yondashuvini qo'llash usullari ko'rib chiqiladi:

1. Fan (Science) integratsiyasi

Matematik modellashtirish: Fizika va kimyo jarayonlarini (masalan, suyuqlikning oqish tezligi yoki reaksiya tezligi) matematik formulalar yordamida ifodalash.

Ma'lumotlarni tahlil qilish: Ilmiy tadqiqotlardan olingan ma'lumotlarni (ob-havo ma'lumotlari, biologik o'lchovlar) matematik grafiklar va statistik usullar yordamida tahlil qilish.

Tabiiy jarayonlar bilan bog'lash: Matematik tushunchalarni (masalan, proporsiya, foiz yoki eksponential o'sish) biologiya yoki ekologiya masalalarida qo'llash.

2. Texnologiya (Technology) integratsiyasi

Dasturiy ta'minotlardan foydalanish: GeoGebra, Desmos kabi vositalardan foydalanib geometrik shakllar va funksiyalarni vizualizatsiya qilish.

Kod yozish orqali matematika o'rganish: Scratch yoki Python kabi dasturlash tillaridan foydalanib, matematik masalalarni dasturiy yechish.

Ma'lumotlarni vizualizatsiya qilish: Excel yoki boshqa vositalar yordamida ma'lumotlarni diagramma va grafiklar shaklida ifodalash.

3. Muhandislik (Engineering) integratsiyasi

Muammo yechish: Ko'priq qurish, qavatlar o'lchamini hisoblash yoki mexanik qurilmalar uchun matematik hisob-kitoblarni amalga oshirish.

3D modellash: Geometrik tushunchalarni (masalan, hajm va sirt maydoni) 3D printer yordamida amalda qo'llash.

Robototexnika: Robotlarning harakat trajektoriyasini hisoblash yoki sensorlar ishlashiga matematik modellarni qo'llash.

4. San'at (Arts) integratsiyasi

Simmetriya va naqshlar: Matematik simmetriya va fraktallarni chizish orqali san'at va dizaynga oid elementlarni o'rganish.

Musiqadagi matematika: Ritm, chastota va harmonikalarni o'rganishda matematik qoidalarni qo'llash.

Tasviriy san'at: Matematik tushunchalar asosida geometrik dizaynlar yaratish.

5. Matematika (Mathematics) asosida integratsiya

Metodlar:

Real hayot masalalari: Matematika orqali kundalik hayotdagi iqtisodiy, muhandislik va texnologik muammolarni yechish.

Matematika loyihalari: Tinglovchiarni guruhlariga bo'lib, matematik masalalar orqali loyihalar tayyorlash (masalan, shahar infratuzilmasi uchun matematik modellar yaratish).

STEAM yondashuvini o'quv jarayoniga joriy etish bosqichlari

1. Integratsiya uchun mavzularni tanlash: Masalan, matematik tenglamalar mavzusini fizik jarayonlar yoki texnologiyalar bilan bog'lash.

2. Amaliy loyihalar ishlab chiqish: Har bir fan uchun tegishli bo'lgan topshiriqlarni birlashtirib, yakuniy loyiha yaratish.

3. Jamoaviy ishlashni tashkil qilish: Guruhda ishlashni ta'minlash orqali tinglovchiarning kooperatsiya va kommunikatsiya ko'nikmalarini rivojlantirish.

4. Natijalarni tahlil qilish va taqdimot qilish: Tinglovchiardan o'z loyihalarini taqdim qilishni so'rab, ularni baholash.

Yondashuvning afzalliklari: Tinglovchiarning qiziqishini oshiradi va mavzularni real hayotga bog'lashga imkon beradi. Har xil sohalar bo'yicha keng ko'nikmalarni rivojlantiradi. Kritik fikrlash va ijodkorlikni shakllantiradi. Ushbu metodika matematikani nafaqat fan sifatida, balki turli sohalar bilan bog'liq vosita sifatida o'rgatishda katta yordam beradi.

Dastlabki STEM maktablarda yangi g'amxo'rlikka muhtoj bo'lgan muhim narsalar sifatida targ'ib qilingan. Keyin, to'satdan, STEAM bir xil turdagi ko'nikmalarni targ'ib qiluvchi yangi qisqartirildi. Qo'shilgan "A" san'at uchun, ijodkorlik va dizayn tamoyillaridan foydalanishga alohida e'tibor berishni anglatadi.

Ilm-fan texnologiyasi va matematika o'zaro bog'liq tushunchalarni o'rgatadigan va tanqidiy fikrlash va analitik ko'nikmalar bilan yechilgan muammolarni aniqlashga qaratilgan ilm-fan va unga aloqador mavzularga zamonaviy yondoshuvni ramzlash uchun ishlatiladigan qisqartma bo'ldi.

Keyinchalik, Rhode orolining Dizayn maktabi qisqartirilgan STEAM qo'shimchasini qo'shdi, ayniqsa, qo'shiqni qo'shib qo'ydi.

Bu yaxshi dizayni va ijodiy yondashuv elementlari ham o'qitishga qo'shilganligini namoyish qilish uchun mo'ljallangan. Boshqa maktablar va tarbiyachilar ham o'zlarining burilishlari va qisqartmasi bilan musiqani ikkinchi M qo'shib qo'yishdi.

Stenforddan Design Thinking loyihasi kabi dasturlar mavjud, ular loyihalarda STEM ko'nikmalarini tez-tez ishlatadigan haqiqiy muammolarni hal qilish va tanqidiy fikrlashni o'rgatadi.

San'at / musiqa / dizayn elementini qo'shgan holda, o'qituvchilar o'zlarining miya-analitik va ijodiy tomonlarining har ikkalasini ham ertangi kunning eng yaxshi mutafakkirlarini rivojlantirish uchun foydalanayotganligiga ishonishadi.

Darhaqiqat, u pastga tushganda, qisqartma tanlovi STEMni o'qitish uchun qanday o'quv dasturlari yoki o'qitish usullaridan foydalanilayotganligini

ko'rsatadi. Qanday materiallardan qat'i nazar, o'qituvchi yoki maktab o'qitishda boshqa narsalar yoki materiallarni tortib olishi mumkin. STEM ta'limi uchun STEM ta'limining ahamiyati shundaki, bolalar STEMning o'z hayotiga qanday ta'sir qilishlarini o'rganishadi, shuningdek, tanqidiy fikrlash va mulohaza qilish qobiliyatlari bilan birgalikda muammolarni aniqlash va ularni hal qilish yo'llarini topishga imkon beradi. Yangi va mavjud muammolarga ijodiy yondashuvlarni topish - bugungi iqtisodiyotda va kelajakdagi ish joyida zarur bo'lgan asosiy ko'nikmalarni.

STEAM yondashuvi o'quv samaradorligiga qanday ta'sir qiladi? Uning asosiy g'oyasi shundan iboratki, amaliyot nazariy bilimlar singari muhimdir. Ya'ni, o'rganish paytida biz nafaqat miyamiz bilan, balki qo'limiz bilan ham ishlashimiz kerak. Faqat sinf devorlarida o'rganish tez o'zgaruvchan dunyo bilan hamqadam emas. STEAM yondashuvining asosiy farqi shundaki, bolalar turli xil mavzularni muvaffaqiyatli o'rganish uchun ham miyani, ham qo'llarini ishlatadilar. Ular olgan bilimlarni o'zlari «uqib oladilar».STEAM ta'limi nafaqat o'qitish usuli, balki fikrlash tarzidir. STEAM ta'lim muhitida bolalar bilimga ega bo'ladilar va darhol undan foydalanishni o'rganadilar. Shuning uchun, ular o'sib ulg'ayganlarida va hayotiy muammolarga duch kelganda, atrof muhitning ifloslanishi yoki global iqlim o'zgarishi bo'ladimi, bunday murakkab masalalarni faqat turli sohalaridagi bilimlarga tayanib va birgalikda ishlash orqali hal qilish mumkinligini tushunadilar. Bu erda faqat bitta mavzu bo'yicha bilimga tayanish yetarli emas. STEAM yondashuvi bizning ta'lim va ta'limga bo'lgan qarashimizni o'zgartirmoqda. Amaliy qobiliyatga e'tibor berib, talabalar o'zlarining irodasini, ijodkorligini, moslashuvchanligini rivojlantiradi va boshqalar bilan hamkorlik qilishni o'rganadi. Ushbu ko'nikmalar va bilimlar asosiy ta'lim vazifasini tashkil etadi, ya'ni. bu butun ta'lim tizimi nimaga intilishini.Ta'limga ushbu yangi yondashuv qanday paydo bo'ldi? Bu nazariya va amaliyotni birlashtirishning mantiqiy natijasidir. **STEAM** Amerikada ishlab chiqilgan. Ba'zi maktablar bitiruvchilarning

martabalarini e'tiborga olishdi va fan, texnologiya, muhandislik va matematika kabi fanlarni birlashtirishga qaror qilishdi va STEM tizimi shu tarzda shakllandi. (Fan, texnika, muhandislik va matematika). Keyinchalik bu erda Art qo'shildi va endi STEAM oxirigacha shakllandi. O'qituvchilar ushbu mavzular, aniqrog'i ushbu fanlardan bilimlar kelajakda talabalarning yuqori malakali mutaxassis bo'lib etishishiga yordam beradi, deb hisoblashadi. Oxir oqibat, bolalar yaxshi bilim olishga intilishadi va uni darhol amalda qo'llashadi. Dunyo o'zgarib bormoqda, hatto ta'lim bir joyda turmasa ham. So'nggi o'n yilliklardagi o'zgarishlar yoqimli, ammo shu bilan birga bizni havotirlantiradi. Ushbu yangi narsalarning ixtiro qilinishi bilan odamlar ilgari duch kelmagan ko'plab yangi muammolar mavjud. Har kuni yangi ish turlari va hattoki butun kasbiy sohalar paydo bo'ladi, shuning uchun zamonaviy o'qituvchilar o'qitadigan bilimlari va mahoratlari vaqt talablariga javob beradimi yoki yo'qmi deb o'ylashlari kerak. O'zingizning g'oyangizni topishga bilim yordam beradi, ammo haqiqiy ish bu g'oyani haqiqatga aylantiradi. Agar biz an'anaviy ta'limning asosiy maqsadi bilimlarni o'rgatish va bu bilimlardan fikrlash va ijod qilish uchun foydalanish deb aytsak, STEAM yondashuvi bizni olgan bilimlarni haqiqiy ko'nikmalar bilan birlashtirishga o'rgatadi.

Xulosa qilib aytganda, shuni ta'kidlashni istardikki, an'anaviy o'qitish uslublari bilan taqqoslaganda, o'rta maktabdagi STEAM yondashuvi bolalarni tajribalar o'tkazishga, modellar tuzishga, mustaqil ravishda musiqa va filmlar yaratishga, o'z g'oyalarini haqiqatga aylantirishga va yakuniy mahsulotni yaratishga undaydi.

Ushbu ta'lim yondashuvi bolalarga nazariyava amaliy ko'nikmalarni samarali tarzda birlashtirishga imkon beradi va universitetga kirish va keyingi o'qishni osonlashtiradi.

**2-MAVZU: VEKTORLAR USTIDA CHIZIQLI AMALLAR VA
ULARDAN FOYDALANIB BA'ZI TENGLAMA VA
TENGSIZLIKLARNI YECHISH. VEKTORLARNI SKALYAR
KO'PAYTMASI VA UNING XOSSALARINI O'QITISHDA STEM,
STEAM, PBL (PROJECT-BASED LEARNING)
TEXNOLOGIYALARINI QO'LLASH. SKALYAR KO'PAYTMANING
NOSTANDART MASALALAR YECHISHDA YUQORI DARAJALI
FIKRLASH (BLOOM: ANALYZE–EVALUATE–CREATE)
TEXNOLOGIYASIDAN FOYDALANISH**

Reja:

1. Real hayotiy modellar.
2. Mantiqiy topshiriqlar va olimpiada elementlari orqali tahliliy fikrlash ko'nikmalarini shakllantirish metodlari.
3. Skalyar ko'paytmaning nostandart masalalar yechishda yuqori darajali fikrlash (Bloom: Analyze–Evaluate–Create) texnologiyasidan foydalanish.

Real hayotiy model — bu kundalik hayotda uchraydigan hodisa, jarayon yoki muammoni matematik ifodalar (tenglama, formula, grafik, jadval, ehtimollik va statistik usullar) yordamida tasvirlash va tahlil qilishdir. Matematik model real obyektning soddalashtirilgan nusxasi bo'lib, u orqali real vaziyatni tushunish, bashorat qilish va qaror qabul qilish mumkin. Matematik modellashtirishning maqsadi: Real muammolarni matematik yo'l bilan hal qilish, Nazariy bilimlarni amaliyotga tatbiq etish, Jarayonlarni tahlil va prognoz qilish, Eng samarali yechimni tanlash. Matematik modellashtirishning ahamiyati: Matematikani hayot bilan bog'laydi, Tinglovchiarda muammo yechish kompetensiyasini rivojlantiradi, Tanqidiy va mantiqiy fikrlashni shakllantiradi, Xalqaro baholash (PISA, TIMSS) talablari bilan mos. Real hayotiy modellashtirish bosqichlari. Matematik modellashtirish odatda quyidagi 6 bosqichda amalga oshiriladi: Muammoni tushunish, Real vaziyatni aniqlash va muhim omillarni tanlash, Faraz (taxmin)lar

kiritish, Keraksiz tafsilotlarni chetga chiqarish, Matematik model qurish, O'zgaruvchilar, tenglamalar, formulalar tuzish, Modelni yechish, Matematik usullar yordamida hisoblash, Natijani talqin qilish, Yechimni real vaziyatga moslash, Modelni tekshirish va takomillashtirish, Natijaning mantiqiy va amaliy mosligini baholash. Matematik real hayotiy modellarning turlari:

Algebraik modellar Tenglama va tengsizliklar: Masalan: Daromad – Xarajat = Foyda

Funksional modellar Bir kattalikning boshqasiga bog'liqligi. Masalan: $S = vt$ (yo'l, tezlik va vaqt bog'lanishi)

Grafik modellar. Grafik, diagramma, chizmalar . Masalan: Elektr energiyasi iste'molining vaqt bo'yicha grafigi

Statistik modellar. O'rtacha qiymat, dispersiya, ehtimollik. Masalan: Sinfdagi baholar taqsimoti

Geometrik modellar. Shakl, hajm, yuzalar. Masalan: Xonaning hajmini hisoblash

Diskret modellar. Butun sonlar, jadval, algoritmlar. Masalan: Avtobus jadvali

Matematik real hayotiy modellarga kengaytirilgan misollar

1-misol : Moliyaviy rejalashtirish Oylik jamg'arma modeli:

Jamg'arma = Daromad – Xarajatlar 2-misol :

Transport harakati Avtomobil yo'li:

$$S=vt$$

3-misol : Aholi o'sishi

$$N(t) = N_{\{0\}} + (B - D) + (I - E)$$

$(N(t) - (t))$ vaqtdan keyingi aholi soni, $N_{\{0\}}$ - boshlang'ich aholi soni, B - Tug'ilganlar soni (Births), D - O'lganlar soni (Deaths), I - Kirib kelganlar (Immigration), E - Chiqib ketganlar (Emigration).

Ta'lim jarayonida real hayotiy modellar: O'quvchini faol o'rganishga jalb qiladi, PBL (Project-Based Learning) asosida tashkil etiladi , STEAM ta'limida

muhim o‘rin tutadi. PISA tadqiqotlarida real hayotiy modellar PISA topshiriqlari: Real hayotiy vaziyatlarga asoslanadi, O‘quvchining matematik savodxonligini baholaydi, Model tuzish va talqin qilishni talab etadi. O‘qituvchi uchun metodik tavsiyalar: Kundalik hayotdan olingan masalalardan foydalaning, Grafik va jadvalni ko‘proq qo‘llang, Tinglovchiarni modelni mustaqil qurishga undang, Natijani muhokama qiling. Afzalliklari va cheklovlari Afzalliklari: Amaliy ko‘nikmalar shakllanadi, Matematikaga qiziqish oshadi, Hayotiy kompetensiyalar rivojlanadi. Cheklovlari: Vaqt talab qiladi, Murakkab masalalarda soddalashtirish zarur, Baholash qiyinroq.

STEM texnologiyasi

STEM ta’limi birinchi bor Amerikada Massachusetts Texnologiyalar Institutida (MIT) ishlab chiqilgan. Bu mashhur institutning shiori «Mind and hand» – «Aql va qo‘l» dir. Massachusetts Texnologiyalar instituti STEM kurslarini ishlab chiqdi va hatto ba’zi o‘quv yurtlarida STEM ta’lim markazlarini yaratidi. Avstraliya, Buyuk Britaniya, Isroil, Kanada, Xitoy, Singapur, AQSH ta’lim tizimida keng qo‘llanilmoqda. Ta’limning maqsadi ta’lim oluvchilarni ijodiy tafakkurini rivojlantirish va ularni loyihalashtirish asosida o‘qitish orqali tabiiy fanlar, texnologiya, muhandislik, matematika va san'at fanlaridan samarali foydalanishga o‘rgatishdir. STEM ta’lim quyidagi xususiyatlarga ega:

- STEM ta’limi binar mashg‘ulotlar, loyihalar, o‘quv tadqiqotlariga tayanadi.
- STEM ta’limi muhitida bilimlarni saqlash muhimdir, ammo ta’lim oluvchilarning ushbu bilimlarni qanday qo‘llashi undan ham muhim. STEM nafaqat ta’lim oluvchiga biron-bir mavzu haqida ma'lumot berish, balki o‘quvchiga ushbu mavzuni haqiqiy hayotga qanday tatbiq etish va kelajakda undan qanday foydalanish lozimligini ko‘rsatishga qaratilgan. Masalan, an'anaviy matematik kurs o‘quvchiga tenglamani o‘rgatishi mumkin, ammo ta’lim oluvchi ushbu tenglamani haqiqiy hayotdagi vaziyatlarga qanday qo‘llashni bilmasligi mumkin. STEM ta’limi

o'quvchiga matematik tenglamani o'rgatadi hamda undan fan yoki muhandislik kabi turli sohalarda qanday foydalanish mumkinligiga yo'nalish beradi;

- STEM ta'limi diqqatni jalb qilishga, tanlab olingan mavzuning barcha qismlariga chuqurroq kirishga, fanlarni umumiy emas, balki aynan bir qismini qamrab oladi;

- STEM ta'limi oluvchilarni to'g'ridan-to'g'ri mavzuga tatbiq etilishi mumkin bo'lgan tadbirlarga jalb qiladi, natijada ta'lim oluvchilarning qiziqishi ortib boradi va bo'shliqni cheklaydi;

- STEM ta'limida aynan bir qolip mavjud emas, dars bola shaxsiga yo'naltirilgan bo'lishi kerak;

STEM ta'limining umumiy chizmasi:



STEM ta'limining o'qitish modeli afzalliklari:

- motivatsiyaning yuqorililigi (ta'lim oluvchilar darsni kamroq qoldirib, darsga nisbatan munosabati o'zgarganini namoyish qiladi. O'qituvchi bola bo'sh vaqtini bajonidil loyiha (o'quv tadqiqoti)ga sarflayotganini sezadi);

- bilimlarni egallash (bilim olish mas'uliyati o'z bo'ynida ekanligini yaxshiroq his etadi);

- yuqori darajadagi fikrlash ko'nikmalarining shakllanishi (ta'lim oluvchilar murakkab, mavhum holatlarda ham yuqori darajada fikrlash, muammo yechimini topish, qaror qabul qilish ko'nikmalarini o'zida shakllantiradi);

- hamkorlikda ishlash ko'nikmasining rivojlanishi (loyiha (o'quv tadqiqoti) jamoaviy jarayon bo'lib, hamkorlikda ishlash afzalligini namoyon etadi. Hamkorlik muhitida ishlab, ta'lim oluvchilar ko'proq ma'lumotga ega bo'lishadi);

- mustaqil ishlash malakasining rivojlanishi (tashkillashtirish, vaqtni boshqarish, mustaqil ishlash ko'nikma va malakasi shakllanadi);

-barcha uchun qulay va afzal (loyiha (o'quv tadqiqoti) an'anaviy metodlar samara bermayotgan ta'lim oluvchilar uchun qulay. Avval faol bo'lmagan ta'lim oluvchilar endi o'quv faoliyatida dadillashadi. Darsdagi bilishning turli xil imkoniyatlari ta'lim olish ehtiyoji (motivatsiya)ni shakllantiradi).

STEM ta'limining o'qitish modeli kamchiliklari:

- ko'p vaqt talab etilganligi;
- nazorat qilish imkoniyati kamligi;
- o'qituvchi rolining pasayishi;
- «bo'sh o'zalshtiruvchi» ta'lim oluvchilar bo'lganligi sababli «iqtidorli»larning bahosiga ta'siri yoki aksincha;
- o'qituvchining ko'p qirrali bilimga ega emasligi.

STEM - ta'lim jarayonida o'qitish tinglovchiarning qiziqishlari va xususiyatlarini inobatga olgan holda, ayrim fanlar va ularni o'rganish darajasini tanlab olish orqali o'quv jarayonini individuallashtirishni ko'zda tutadi. STEM – ta'lim dasturida tinglovchiarning qiziqishlaridan kelib chiqqan holda sinfdan tashqari va amaliy mashg'ulotlar o'tkazish nazarda tutiladi. O'quv dastur o'qitishning maqsadlari jamiyat va davlat manfaatlari va talablariga mos kelmog'i hamda javob bermog'i lozim.

Mustaqil Respublikamizning jahon hamjamiyatida tutgan o'rni tobora o'sib, xalqaro aloqalar, savdo-sotiq, turizm va mamlakatlar o'rtasidagi madaniy hamda iqtisodiy aloqalar rivojlanib, mustahkamlanib borayotgan bir paytda uning kelajagini yaratuvchi yoshlarga xorijiy tillarni puxta o'rgatish va xorijliklar bilan muloqot davomida o'ziga taalluqli masalalarni erkin muhokama qila olish, umuman og'zaki yoki yozma shaklda muloqot qilishni o'rgatish hozirgi kunning eng muhim vazifalaridan biridir.

STEM ta'limi ta'lim oluvchilar maktablarda amaliy, ta'limiy, tarbiyaviy va rivojlantiruvchi maqsadlarga tayanadi:

Amaliy maqsad fanlarga oid dasturlarda qayd etilgan talablar doirasida tushunish, o'z fikrini bayon etish kabi malaka va

Ta'limga STEM yondashuv tatbiqi

Ko'nikmalarni shakllantirish orqali model yaratish hamda ularni tatbiq qilishdan iboratdir.

Ta'limiy maqsad fanlarni chuqur o'rgatish jarayonida ta'lim oluvchilarning tafakkurini o'stirish va egallagan bilimlarini rivojlantirish tushuniladi.

Tarbiyaviy maqsad ta'lim oluvchilarda aqliy mehnat, malaka va ko'nikmalarini hosil qilish, shuningdek, ularni vatanparvarlik va axloqiy poklik ruhida tarbiyalash, har tomonlama rivojlangan, yuksak ma'naviyatli, mustaqil fikrlovchi shaxsni shakllantirish, rostgo'ylik, o'zga xalqqa, uning qadriyatlariga hurmat bilan qarash, iymon-e'tiqod, do'stlik, o'z qadrini bilish va irodalilik kabi sifatlarni shakllantirish kabilar tushuniladi.

Rivojlantiruvchi maqsad ta'lim oluvchini har tomonlama yetuk shaxs bo'lib yetishishini, ya'ni uning aqliy, hissiy va ruhlantiruvchi xususiyatlarini rivojlantirishni ifodalaydi.

STEM ta'limi o'qitishning amaliy, ta'limiy, tarbiyaviy va rivojlantiruvchi maqsadlari nafaqat dars jarayonida, balki darsdan tashqari vaqtlarda mustaqil o'qib o'rganishga yo'naltiradi.

STEM ta'limi o'quv reja, dasturini tuzishda fanlararo bilimlarni uzatish, chuqur fikrlash, o'quvchi tafakkurini o'stirish, izlanish, tanqidiy o'rganish, interfaol strategiyalarni qo'llashni inobatga olinadi. STEM ta'limida ta'lim oluvchilar, o'qituvchi, amaliyotchi trenerlar faoliyat yuritadi.

STEM ta'limi dasturida amaliy mashg'ulotlar ta'lim oluvchining qiziqishini inobatga olgan holda bitta, ikkita yoki undan ortiq yo'nalishlarning: fan, texnologiya, muhandislik, matematika va san'at kabilarning integratsiyasiga tayaniladi. Ushbu integratsiyada o'qitish jarayoni o'qituvchilar

uslubi (anketa, individual suhbat, o‘zaro hamkorlikda ishlash va boshqalar)ga bog‘liq.

Bilimlarni uzatish tizimi – bu hozirgi va kelajakdagi murakkab masalalarni tushunish uchun fanlarning o‘zaro bog‘liqligini namoyish etishga qaratilgan tuzilma. Bunda faqatgina bitta fan doirasida emas, balki bir nechta fan va sohalarning tushunchalari, metodlari hamda yondashuvlari e‘tiborga olinadi. Bilimlarni uzatish tizimi ta’lim oluvchilarning yuqori darajadagi fikrlash strategiyasini, ijodkorligini va o‘qishini rivojlantirish uchun pedagogik texnologiyalardan to‘g‘ri foydalanishni nazarda tutadi. Jumladan, “Blum taksonomiyasi” strategiyasida qo‘llaniladigan fe‘llardan foydalanish ahamiyatlidir.

STEM ta’lim oluvchining ijodiy tafakkurini shakllantiruvchi 8 ko‘nikmani rivojlantirish nazarda tutadi:

1. Savol berish va muammolarni aniqlash. Tabiiy va yaralgan olam haqidagi tasavvurlarni bilish va tushunish uchun savollarni aniq, to‘g‘ri shakllantira olish ko‘nikmasi nazarda tutiladi. Bunda empirik tafakkur shakllantiriladi va rivojlantiriladi.

2. Tadqiqotlarni rejalashtirish va o‘tkazish. Ta’lim oluvchilar individual, guruhlarda laboratoriya yoki sinov maydonchalarida tadqiqotlarni rejalashtirish va olib borish ko‘nikmasini shakllantiriladi va rivojlantiriladi.

3. Ma'lumotlarni tahlil va talqin qilish. Tadqiqot natijalaridan olingan ma'lumotlarning mazmun-mohiyatini tushunish uchun mantiqiy jihatdan tahlil va talqin qilish ko‘nikmasi shakllantiriladi va rivojlantiriladi. Ma'lumotlarning qonuniyatlari har doim ham aniq bo‘lmasligi sababli aniqlashtirish uchun bir qator vositalardan: jadvallashtirish, grafik izohlash, vizual idrok qilish va statistik tahlildan foydalaniladi.

4. Matematik va hisoblash tafakkuridan foydalanish. Fizik hodisalar va ularning o‘rtasidagi aloqalarini ifodalash uchun matematik va hisoblash vositalardan: statistik ma'lumotlarni tahlil qilish, miqdoriy ko‘rsatkichlarni

keltirish orqali ta'lim oluvchilarda matematik va hisoblash tafakkuridan foydalanish ko'nikmasi shakllantiriladi va rivojlantiriladi.

5. Mulohazalarni tartibga solish va yechimini ishlab chiqish. Ilmiy mahsulotlar – bu mulohaza va ta'riflar, muhandislik mahsulotlari esa qarorlardir. Shu nuqtayi nazardan ta'lim oluvchilarda mulohaza yuritish, ta'rif berish, qaror chiqarish ko'nikmasi shakllantiriladi va rivojlantiriladi.

6. Dalillar asosida argumentlash. Argumentlash – bu mulohazalar va qarorlar qabul qilish jarayonidir. Bu jarayonda ta'lim oluvchilarda dalillar asosida argumentlash ko'nikmasi shakllantiriladi va rivojlantiriladi.

7. Axborotni qabul qilish, baholash va uzatish. Ta'lim beruvchilar yaratilgan g'oya va metodlarni aniq, ishonchli yetkazishlari kerak. Ta'lim oluvchilar esa yakka tarzda va guruhlarda g'oyalarni o'rganish, baholash va tanqidiy tahlil qilish ko'nikmasiga ega bo'ladi.

8. Modellarni ishlab chiqish va qo'llash. Ta'lim oluvchilar g'oyalar va mulohazalarni taqdim etishda modellar: diagrammalar, chizmalar, fizik nusxalar, matematik tasvirlar, kompyuter modellash vositalarni yaratish va qo'llash ko'nikmasini shakllantiriladi va rivojlantiriladi.

2. STEAM texnologiyasi

Steam texnologiyasi — bu ta'limda fanlararo integratsiyaga asoslangan zamonaviy pedagogik yondashuv bo'lib, Science (tabiiy fanlar), Technology (texnologiya), Engineering (muhandislik), Art (san'at), Mathematics(matematika) yo'nalishlarini birlashtirgan holda o'qitishni nazarda tutadi. Steam yondashuvi o'quvchini faqat bilim oluvchi emas, balki muammoni hal qiluvchi, ijodkor va tadqiqotchi shaxs sifatida shakllantiradi. Steam texnologiyasining paydo bo'lish tarixi: XX asr oxiri – XXI asr boshlarida STEM modeli ishlab chiqildi, Texnik bilimlar yetarli bo'lmagani sababli Art (ijodkorlik) komponenti qo'shildi, Natijada Steam modeli yuzaga keldi. Bu yondashuv AQSh, Janubiy Koreya, Yaponiya, Finlyandiya kabi

davlatlarda keng joriy etilgan. Steam texnologiyasining asosiy maqsadlari: Tinglovchiarda tanqidiy va mantiqiy fikrlashni rivojlantirish, Nazariy bilimlarni real hayot bilan bog‘lash, Innovatsion va ijodiy yondashuvni shakllantirish, Jamoada ishlash va muloqot ko‘nikmalarini rivojlantirish, Kelajak kasblariga tayyorlash Steam texnologiyasining vazifalari, Fanlararo aloqani mustahkamlash, Muammo asosida o‘qitishni yo‘lga qo‘yish, Tajriba va loyihalar orqali o‘rganish, O‘quvchining mustaqil izlanishini qo‘llab-quvvatlash. Steam texnologiyasining asosiy tamoyillari: Integratsiya – fanlarni birlashtirib o‘qitish, Amaliyot ustunligi – “o‘rganib ko‘rish”, Ijodkorlik – yangi g‘oya va dizayn, Hamkorlik – jamoaviy ish, Tadqiqot – savol berish va izlanish.

Steam darslarini tashkil etish bosqichlari: Muammo yoki savol qo‘yish, g‘oyalarni muhokama qilish, loyiha rejasini tuzish, model yoki mahsulot yaratish, sinov va tajriba, tahlil, xulosa va baholash. Steam texnologiyasida o‘qituvchi va o‘quvchi roli O‘qituvchi: Yo‘naltiruvchi va maslahatchi, ta’lim muhitini tashkil etuvchi, innovatsion usullarni qo‘llovchi. O‘quvchi: Faol ishtirokchi, tadqiqotchi, muammo yechuvchi, ijodkor shaxs.

STEAM va an’anaviy ta’limning taqqoslanishi

An’anaviy ta’lim	STEAM ta’lim
Nazariya ustun	Amaliyot ustun
O‘qituvchi markazda	O‘quvchi markazda
Fanlar alohida	Fanlar birlashgan
Tayyor bilim	Izlanish va tajriba

STEAM texnologiyasining ta’lim bosqichlarida qo‘llanilishi
 Maktabgacha ta’lim: Konstruktorlar, Rang va shakllar, Oddiy tajribalar.
 Boshlang‘ich sinflar: Modellashtirish, Oddiy muhandislik loyihalari.

O'rta va yuqori sinflar: Robototexnika, Dasturlash, Ilmiy tadqiqotlar. Steam texnologiyasining afzalliklari (Mustaqil fikrlash rivojlanadi, Amaliy ko'nikmalar shakllanadi, Fanlarga qiziqish oshadi, Innovatsion tafakkur rivojlanadi, Zamonaviy kasblarga tayyorlaydi). STEAM texnologiyasining kamchiliklari (Ko'proq vaqt talab etadi, Maxsus jihozlar zarur, O'qituvchidan yuqori malaka talab etiladi, PBL (Project-based learning) texnologiyasi).

PBL (Project-Based Learning) — bu tinglovchiarning real hayot muammolari yoki savollari asosida loyiha ishlab chiqishi orqali bilim, ko'nikma va kompetensiyalarni egallashga qaratilgan zamonaviy ta'lim texnologiyasidir.

PBLda o'quvchi: bilimni tayyor holatda olmaydi, balki izlanish, tajriba va amaliy faoliyat orqali egallaydi. PBL texnologiyasining kelib chiqishi XX asr boshlarida amerikalik pedagog John Dewey va William Kilpatrick g'oyalari asosida shakllangan. "Learning by doing" (Amaliy faoliyat orqali o'rganish) tamoyiliga asoslanadi. Bugungi kunda AQSh, Yevropa, Osiyo davlatlarida keng qo'llaniladi. PBL texnologiyasining asosiy maqsadlari: Tinglovchiarda mustaqil fikrlashni rivojlantirish, Muammolarni amaliy yo'l bilan hal qilish, Fanlararo bilimlarni integratsiyalash, Hayotiy va kasbiy kompetensiyalarni shakllantirish, PBL texnologiyasining vazifalari, Tadqiqot olib borish ko'nikmalarini rivojlantirish, Jamoada ishlashni o'rgatish, Axborotni izlash va tahlil qilish, Natijani taqdim eta olish. PBL texnologiyasining asosiy tamoyillari: Muammo asosida o'qitish, Amaliy yo'naltirilganlik, Mustaqillik, Hamkorlik, Ijodkorlik, Refleksiya (o'zini baholash). PBL texnologiyasining turlari: Tadqiqot loyihalari – ilmiy izlanishlar, Amaliy loyihalar – mahsulot yaratish, Ijodiy loyihalar – dizayn, san'at, Axborot loyihalari – ma'lumot yig'ish va tahlil, Ijtimoiy loyihalar – jamiyat muammolarini hal qilish. PBL darslarini tashkil etish bosqichlari: Muammo yoki savol qo'yish, Loyihaning maqsadini aniqlash, Rejalashtirish,

Tadqiqot va amaliy ishlar, Mahsulot yaratish, Taqdimot, Baholash va refleksiya. PBL texnologiyasida o'qituvchi va o'quvchi roli O'qituvchi: Yo'naltiruvchi va maslahatchi, Jarayonni nazorat qiluvchi, Motivator O'quvchi, Tadqiqotchi, Faol ishtirokchi, Muammo yechuvchi, Jamoa a'zosi.

PBL va an'anaviy ta'limning farqi

An'anaviy ta'lim	PBL
Nazariy bilim	Amaliy loyiha
O'qituvchi markazda	O'quvchi markazda
Individual ish	Jamoaviy ish
Natija — test	Natija — loyiha

PBL texnologiyasining ta'lim bosqichlarida qo'llanilishi Maktabgacha ta'lim: Oddiy loyihalar (rasm, maket) Boshlang'ich sinflar, Kichik guruh loyihalari O'rta va yuqori sinflar, Murakkab fanlararo loyihalar Oliy ta'lim, Kurs va bitiruv loyihalari. PBL texnologiyasining afzalliklari: Mustaqil fikrlash rivojlanadi, Hayotiy ko'nikmalar shakllanadi, Fanlarga qiziqish oshadi, Jamoada ishlash o'rganiladi, O'z-o'zini baholash rivojlanadi. PBL texnologiyasining kamchiliklari: Ko'p vaqt talab etadi, Baholash murakkab, O'qituvchidan yuqori malaka talab qiladi, Resurslar zarur. PBL va STEAM texnologiyasining bog'liqligi: PBL — bu STEAM texnologiyasining asosiy metodlaridan biri bo'lib, STEAM loyihalari ko'pincha PBL asosida tashkil etiladi.

AMALIY MASHG'ULOT

1-AMALIY MASHG'ULOT NOSTANDART MASALALARNI YUQORI SAMARADORLIKKA EGA BELGILASHLAR ORQALI YECHISH

Bu ishda har xil nostandart matematik masalalarni yechishning yo'llari, fikrlash usullari, uni anglashga yo'l ochadigan mulohazalar keltiriladi. Bu ish matematikaga qiziqadigan o'quvchilarni mustaqil fikrlashga, ilmiy izlanuvchanlikka va ijodga, kashfiyotchilik malakalarini paydo qilishga katta yordam beradi. Odatda nostandart masala deganda umumiy kursdan, darslikdan tashqari, umumiy qoida yoki ta'rif yordamida yechilmaydigan, ma'lum mantiqiy yoki sun'iy usullarda yechiladigan, qiyinchilik darajasi yuqori bo'lgan masalalar tushuniladi. Oddiy darslikdagi misol-masalalar ma'lum ta'rif qoidalar yordamida yechilgani uchun ularga sarf etiladigan bilim-ko'nikmalar fikrlash darajasini, bilish-o'rganish darajasini rivojlantirmaydi. Shuning uchun nostandart misol-masalalarni yechish matematik bilimni rivojlantirishga, mustaqil ishlashga, yangi usullar topishga, ya'ni ilmiy izlanish o'rganishga yordam beradi. Albatta bu yerda qaralayotgan usullar, misol-masalalar o'quvchiga aniq bir yo'l yo'riq ko'rsatadi, matematik masalalarni yechishning barcha yo'llarini o'rgatadi deb qarash xato bo'ladi. Matematik masalalarni yechishning umumiy (universal) usuli yo'q va bo'lishi mumkin ham emas. Bu yerda faqat ma'lum bir yo'nalishlar, usullardan foydalanishga masala va misollar qaraladi. Mavzuning dolzarbligi. Qiyinchilik darajasi yuqori bo'lgan masalalarni yechishda nazariya va uslubiy qo'llanmalardan tashqari, yechimni topishni ko'ra olish, ma'lum bir narsalarni kashf eta olish kerak bo'ladi. Masalalarni yechishda quyidagi tavsiyalar berish mumkin.

1) Birinchidan, masalaning mazmunini to'la to'kis tushunib olguncha uni qayta-qayta takrorlab o'qish kerak. Bunda albatta nima berilgan?, masala sharti nimadan iborat?, nimani topish kerak yoki nimani isbotlash kerak? degan

savollarga e'tibor berish kerak. 2) Agar masala geometriya bilan bog'liq bo'lsa, unga mos chizmani aniq chizib, kerakli belgilarni kiritib, ortiqcha chizmalar bajarmaslik kerak, geometriyada to'g'ri, aniq chizma yarim yechim degani. Kerak bo'lganda, chizma aniq bo'lmasa uni bir necha marta chizib o'zingizga qulay qilib olish kerak. Noto'g'ri chizmadan noto'g'ri xulosa chiqarish mumkin. 3) Masala yechish davomida, har bir qilingan qadamning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini tekshirish kerak. 4) Masala yechish davomida masalaning hamma shartlaridan foydalanilgani yoki yo'qligini kuzatib borish kerak. 5) Masalani yechish protsessida keyingi qadamni bilmay qolsangiz, shu paytgacha nimalar oldingiz va nimalar olish kerak edi degan savollarga javob berishga harakat qiling. 6) Quyidagi hollarda, masalan, qo'yilgan masala xato berilgan hollarda qanday yondashish kerak? Masalaning xato qo'yilganini sezsangiz uning xatoligini ko'rsatish qo'yilgan masalani yechganingiz bo'ladi. Mabodo masalaning xatoligini bilmay qolsangiz uni yechishga harakat qilish foydadan xoli emas. Chunki uni yechishga harakat qilish mobaynida ma'lum yangiliklar, malaka va tajribaga ega bo'lasiz. Masalan, quyidagi masalani qaraymiz $10 \cdot (a+b) > ab$ tengsizlikni isbotlash talab qilinsin. Bunda $a, b > 0$. Ko'rish mumkinki, ayrim a va b larda, masalan, $a=10, b=20$ da $10 \cdot (10+20) > 10 \cdot 20$, ya'ni $300 > 200$. Lekin $a=100, b=100$ da $10 \cdot (100+100) < 100 \cdot 100$ $2000 < 10000$. Shuning uchun berilgan ifodani shakl almashtirishlar yordamida boshqa hollarga keltirib qarash kerak. Masalan, $10 \cdot (a+b) > ab$ ifodani tengsizlikning ikkala qismini $10ab$ ga bo'lib, $1/a + 1/b > 1/10$ ko'rinishida yozish mumkin. Bu yerdan ko'rinadiki, agar biz a va b larni yetarlicha katta sonlar qilib tanlasak, ularning teskarilari yetarlicha kichik bo'lib, yig'indi ham kichik bo'ladi. Shu fikr yordamida biz tengsizlikning xato berilganini ko'ramiz. 7) Shunday masalalar qo'yilishi mumkinki, uning berilgan shartlari yetarli emas. 8) Shunday masalalar borki, ularni yechish uchun oddiy fikrlashning o'zi yetadi, shunday masalalar borki, ularni yechish uchun ma'lum matematik ilmlardan tashqari, topqirlik ko'ra olish, yangi narsalarni yarata

olish, kashfiyot qilish kerak bo`ladi. Shunday masalalar borki, ular yirik matematiklar tomonidan qo`yilgan bo`lib, o`z yechimini kutmoqda. Ko`p hollarda bu masalalar juda oddiy ko`rinishda beriladi. Lekin yechimi juda qiyin. Masalan a) Yechilmagan eng qadimgi masalalardan biri mukammal sonlar haqidagisidir. Son mukammal deyiladi, agar bu son o`zining barcha natural bo`luvchilari (o`zidan tashqari) yig`indisiga teng bo`lsa. Masalan 6 soni mukammaldir, chunki  $6=1+2+3$ .  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$  ; Ko`rsatilganki, agar $2n+1 - 1$ soni qandaydir n larda tub bo`lsa, bu holda  $(2n + 1 - 1) \cdot 2n$  soni albatta mukammal bo`ladi. Bundan mukammal sonlarning juft bo`lishlik holi topilgan, lekin toq mukammal sonlar bor yo`qligi aniqlanmagan. b) Lekin vaqt o`tishi bilan yechilmagan masalalar o`z yechimini topadi. Masalan berilgan doiraga tengdosh bo`lgan kvadratni sirkul va chizg`ich yordamida yasash masalasi yoki berilgan burchakni sirkul va lineyka yordamida teng uchga bo`lish masalalaridir. Bu masalalar qadimgi grek matematiklari tomonidan qo`yilgan bo`lib, 4 ming yillar mobaynida o`z yechimini kutgan. Faqat 1837-yil fransuz matematigi Ventsel berilgan burchakni faqat sirkul va lineyka yordamida doim 3 ta teng bo`lakka bo`lib bo`lmasligini ko`rsatdi.

Mantiqiy topshiriqlar va olimpiada elementlari orqali tahliliy fikrlash Ko`nikmalarini shakllantirish metodlari.

Mantiqiy fikrlash va tahliliy ko`nikmalar tushunchasi. Mantiqiy fikrlash bu — axborotni qabul qilish, analiz qilish, xulosalar chiqarish va to`g`ri qaror qabul qilish jarayoni. Matematikada mantiqiy fikrlash masalalarni qat`iy qadamlar orqali yechishni anglatadi.

Tahliliy fikrlash bu — masalani komponentlarga ajratish, munosabatlarni topish va tuzilmani anglash orqali yechim izlashdir.

Olimpiada elementlari — bu murakkab, yuqori darajadagi mantiqiy yondashuvni talab qiluvchi topshiriqlar bo`lib, ularni yechish tahliliy fikrlashni chuqurlashtiradi.

Mantiqiy topshiriqlar va olimpiada elementlari orqali tahliliy fikrlash ko'nikmalarini shakllantirishning asosiy metodlari Muammoli ta'lim metodi. Mazmuni: O'quvchiga tayyor yechim emas, muammo beriladi. Natijasi: mustaqil fikrlash, faraz qilish, sabablarni tahlil qilish

Misol: "Nima uchun bu formula har doim ishlaydi? Qaysi holatda ishlamasligi mumkin?" Savol-javob (Sokrat metodi) Mazmuni: O'qituvchi o'quvchini ketma-ket savollar orqali yechimga olib boradi. Rivojlantiradi: mantiqiy bog'lanish, tahliliy mulohaza, izchil fikrlash.

Savollar namunasi:

1. Bu shart nimani bildiradi?
2. Qanday xulosaga kelish mumkin?
3. Boshqa yo'l bormi?

Tahlil va sintez metodi. Tahlil: muammoni qismlarga ajratish. Sintez: qismlarni birlashtirib umumiy xulosa chiqarish. Qo'llanilishi: murakkab masalalar, olimpiada topshiriqlari. **Taqqoslash metodi.** Mazmuni: Ikki yoki undan ortiq holatni qiyoslash. Natijasi: farqlarni aniqlash, umumiy qonuniyatni topish. Misol: To'g'ri va noto'g'ri yechimni solishtirish. **Modellash metodi.** Mazmuni: Muammoni model (jadval, diagramma, grafik) orqali ifodalash. Foydasi: abstrakt fikrlash, vizual tahlil. **Faraz va tekshirish metodi.** Mazmuni: taxmin qilish, tekshirish – xulosa chiqarish, Rivojlantiradi: ilmiy fikrlash, mantiqiy dalillash. **Teskari fikrlash metodi.** Mazmuni: Natijadan shartga qarab yechim izlash. Samarali: tenglamalar, mantiqiy masalalar. **Algoritmik fikrlash metodi.** Mazmuni: Masalani bosqichma-bosqich yechish. Natijasi: tizimli fikrlash, izchillik. **Guruhiy va hamkorlik metodi.** Mazmuni: Masalani jamoada muhokama qilish. Rivojlantiradi: tanqidiy fikrlash, asoslab gapirish, boshqacha yondashuvlarni tushunish. **Refleksiya metodi.** Mazmuni: O'quvchi o'z fikrlash jarayonini tahlil qiladi.

3. Metodlarni darsda qo'llash ketma-ketligi

1. Muammo qo'yish

2. Faraz qilish
3. Tahlil qilish
4. Model tuzish
5. Yechim topish
6. Taqqoslash
7. Xulosa chiqarish
8. Refleksiya

3. Skalyar ko'paytmaning nostandart masalalar yechishda yuqori darajali fikrlash (Bloom: Analyze–Evaluate–Create) texnologiyasidan foydalanish.

Nazariy asos: Skalyar ko'paytmaning ta'rifi va uning geometrik xossalari Ixtiyoriy x va y vektorlarning uzunliklari va ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasiga

$$(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos(\widehat{(\vec{x}, \vec{y})})$$

teng haqiqiy (skalyar) songa, berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb ataladi va (x, y) kabi belgilanadi.

Tetraedrning hajmi

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Bu formuladan foydalanib tetraedr hajmini hisoblash formulasini chiqaraylik.

1.2. Nostandart masalalar mohiyati. Nostandart masalalar: tayyor formulani qo'llash bilan cheklanmaydi; yashirin bog'lanishlarni topishni talab qiladi; bir nechta yechim strategiyasiga ega bo'lishi mumkin; □ baholash va ijodiy yondashuvni talab qiladi.

Bloom taksonomiyasining yuqori darajalari va skalyar ko'paytma

Bloom darajasi	Mazmuni	Skalyar ko'paytma kontekstida
Analyze	Tahlil qilish	Masala shartini vektor munosabatlariga ajratish

Evaluate	Baholash	Yechim usullarini solishtirish, to'g'riligini asoslash
Create	Yaratish	Yangi masala, model yoki yechim strategiyasini yaratish

2- AMALIY MASHG'ULOT: MURAKKAB TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR YECHISHDA NOSTANDART USULLARDAN FOYDALANISH

1-Misol.(Kolmogorov kubogi, Rossiya -2004) Musbat a, b, c sonlarning yig'indisi birga teng bo'lsa,

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{a}{b(b+1)} + \frac{b}{c(c+1)} + \frac{c}{a(a+1)} \right) \geq \frac{3}{4}$$

tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang.

Yechilishi: Bu tengsizlikni chap tomonini T bilan belgilab, umumlashgan KoshiBunyakovskiy-Shvarts tengsizligini quyidagicha qo'llaymiz:

$$T \cdot (a(b+1) + b(c+1) + c(a+1)) \geq (a+b+c)^3 = 1$$

yoki $T \geq \frac{1}{ab+bc+ca+1}$ tengsizlikni va undan

$$T \geq \frac{1}{ab+bc+ca+1} \geq \frac{1}{\frac{(a+b+c)^2}{3} + 1} = \frac{3}{4}$$

munosabatni hosil qilamiz.

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b}{b+c} + \frac{b^2+c}{c+a} + \frac{c^2+a}{a+b} &= \frac{a(1-b-c)+b}{b+c} + \frac{b(1-a-c)+c}{c+a} + \frac{c(1-b-a)+a}{a+b} = \\
&= \frac{a+b}{b+c} - a + \frac{b+c}{c+a} - b + \frac{c+a}{a+b} - c = \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} - 1 \geq \\
&\geq 3 \sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c+a} \cdot \frac{c+a}{a+b}} - 1 = 2
\end{aligned}$$

2-Misol (Yaponiya -2002) Aytaylik, $n \geq 3$ va $n \in \mathbb{N}$ da musbat $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$

sonlar quyidagi $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ $8ab_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$ shartlarni

qanoatlantirsin. U holda

$$a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \dots + a_n(b_n + a_1) < 1$$

tengsizlikni isbotlang

Yechilishi: $t = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ deb belgilab,

$$\begin{aligned}
&a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n-1} + a_n a_1 \leq \\
&\leq a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + \dots + a_1 a_n + \\
&+ a_2 a_3 + a_2 a_4 + \dots + a_2 a_n + \\
&+ a_3 a_4 + \dots + a_3 a_n + \\
&+ \dots + \\
&+ a_{n-1} a_n = \\
&= \frac{1}{2} \{ (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \} = \frac{1}{2} (1 - t)
\end{aligned}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bu yerdan $t < 1$ kelib chiqadi.

Koshi-Bunyakovskiy-Shvarts tengsizligini qo'llab,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = t$$

yoki $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{t}$ tengsizlikni topamiz. Bundan

$$\begin{aligned}
&a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + \dots + a_n(b_n + a_1) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) + \\
&+ (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_1) \leq \sqrt{t} + \frac{1}{2} (1 - t) = -\frac{1}{2} (\sqrt{t} - 1)^2 + 1 < 1
\end{aligned}$$

3-Misol (Koreya -2000) Aytaylik, a, b, c, x, y, z haqiqiy sonlar quyidagi

$a \geq b \geq c > 0, x \geq y \geq z > 0$ shartlarni qanoatlantirsin, u holda

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}$$

tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi: Berilgan tengsizlikni chap tomonida turgan qo'shiluvchilarni mos ravishda A, B, C deb belgilaymiz.

$$\begin{aligned} (by+cz)(bz+cy) &= (b^2+c^2)yz + bc(y^2+z^2) \leq \left(\frac{y^2+z^2}{2}\right)bc(y^2+z^2) = \\ &= \frac{1}{2}(y^2+z^2)(b+c)^2 \Rightarrow A \geq 2\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \frac{x^2}{y^2+z^2} \end{aligned}$$

Xuddi shunday, $B \geq 2\left(\frac{b}{a+c}\right)^2 \frac{y^2}{x^2+z^2}, C \geq 2\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \frac{z^2}{x^2+y^2}$ tengsizliklarni hosil qilamiz. Berilgan shartlarga ko'ra

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a} \geq \frac{c}{a+b}, \frac{x^2}{y^2+z^2} \geq \frac{y^2}{z^2+x^2} \geq \frac{z^2}{x^2+y^2}$$

munosabatlar o'rinli. Chebishev tengsizligini

$$\begin{aligned} \text{qo'llasak,} \quad & \geq 2 \cdot \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 \right\} \left\{ \frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} \right\} \geq \\ & \geq 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 \left(\frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} \right) \end{aligned}$$

Musbat α, β, γ sonlar uchun $\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \geq \frac{3}{2}$ tengsizlikni isbotlaymiz.

$\alpha + \beta = \tau, \beta + \gamma = s, \gamma + \alpha = t$ belgilash kiritib,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} &= \frac{\tau+t-s}{2s} + \frac{\tau+s-t}{2t} + \frac{s+t-\tau}{2\tau} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{s} + \frac{t}{s} + \frac{\tau}{t} + \frac{s}{t} + \frac{s}{\tau} + \frac{t}{\tau} - 3 \right) \geq \frac{1}{2} (2+2+2-3) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ni hosil qilamiz. Bundan $A+B+C \geq 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

Tenglik $a = b = c$ va $x = y = z$ bo'lganda bajariladi.

4 -misol(XMO -2001) $x_1, x_2, \dots, x_n$ haqiqiy sonlar uchun

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}$$

tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi: Tengsizlikni musbat $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar uchun isbotlash yetarli. KoshiBunyakovskiy-Shvarts tengsizligini quyidagi usulda qo‘llab,

$$\begin{aligned} & \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} < \\ & < \sqrt{n \left(\left(\frac{x_1}{1+x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} \right)^2 \right)} \end{aligned}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bundan

$$\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} + \dots + \frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^2} < 1$$

ekanligini ko‘rsatsak, yuqoridagi tengsizlik isbotlanadi.

$$\begin{aligned} & \frac{x_k^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_k^2)} \leq \frac{x_k^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\dots+x_{k-1}^2)(1+x_1^2+\dots+x_k^2)} = \\ & = \frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_{k-1}^2} - \frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_k^2} \end{aligned}$$

bo‘lgani uchun

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{1+x_1^2+\dots+x_k^2} \right)^2 < 1 - \frac{1}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < 1$$

4-misol: Bizga a, b, c musbat haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}$$

Isbot: Tengsizlikka quyidagicha o'zgartirish kiritsak,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} = \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ba+bc} + \frac{c^2}{cb+ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

ko'rib turganingizdek keyingi bosqichda Koshi-Shvarz tengsizligidan foydalandik. Endi biz tengsizlikni isbotlashimiz uchun

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$$

tengsizlikni isbotlashimiz yetarli. Bu tengsizlikni soddalashtirish natijasida esa

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ko'rinishga keladi. Bu esa doim o'rinli. Isbot tugadi. (Jumanazarov Xoshim)

5 -misol: Bizga a va b musbat haqiqiy sonlar berilgan bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$8(a^4 + b^4) \geq (a+b)^4$$

Isbot: Bunda ham tengsizlikdan quyidagicha foydalanamiz.

$$a^4 + b^4 = \frac{a^4}{1} + \frac{b^4}{1} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{(a+b)^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{(a+b)^4}{8}$$

Bunda ham ikkinchi bosqichda Koshi-Shvarz tengsizligidan foydalandik.

6 -misol: Agar $x, y, z > 0$ bo'lsa quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{z+y} + \frac{2}{x+z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Isbot: Tengsizlikka quyidagicha o'zgaritirish kiritamiz,

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{x+y} + \frac{(\sqrt{2})^2}{z+y} + \frac{(\sqrt{2})^2}{x+z} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2(x+y+z)} = \frac{9}{x+y+z}$$

Tenglik sharti esa $x = y = z$ da bajariladi. Isbot tugadi

7 -misol: Agar a, b, x, y, z musbat haqiqiy sonlar bo'lsa, Quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{x}{ay + bz} + \frac{y}{az + bx} + \frac{z}{ax + by} \geq \frac{3}{a + b}$$

Isbot: Bunda ham quyidagicha o'zgartirish kiritamiz.

$$\begin{aligned} \frac{x}{ay + bz} + \frac{y}{az + bx} + \frac{z}{ax + by} &= \frac{x^2}{ayx + bzx} + \frac{y^2}{azy + byx} + \frac{z^2}{axz + byz} \geq \\ &\geq \frac{(x + y + z)^2}{(a + b)(xy + xz + yz)} \geq \frac{3}{a + b} \end{aligned}$$

Bizga $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + xz + yz)$ ma'lumligidan foydalanib ketdik. Demak isbot tugadi

8 -misol: a, b, c haqiqiy musbat sonlar uchun $abc = 1$ o'rinli bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(a + c)} + \frac{1}{c^3(b + a)} \geq \frac{3}{2}$$

Isbot: Koshi-Shvarz tengsizligiga moslab o'zgartirish kiritamiz.

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(a + c)} + \frac{1}{c^3(b + a)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab + ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{ab + bc} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac + bc}$$

Koshi-Shvarz tengsizligi va $abc = 1$ dan foydalansak,

$$\geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab + bc + ac)} = \frac{\frac{(ab + bc + ca)^2}{(abc)^2}}{2(ab + bc + ca)} = \frac{ab + ac + bc}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

Isbot tugadi.

3-AMALIY MASHG'ULOT: SAMARADORLIGI YUQORI, LEKIN KAM UCHRAYDIGAN KOMBINATSION USULLARDAN

FOYDALANISHGA KELTIRILADIGAN TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR

Ma'lumki, u yoki bu matematik metod o'z tabiatiga ko'ra real voqeliklarning bevosita o'ziga emas, balki uning ma'lum qonuniyatlar asosida tuzilgan matematik modeliga qo'llaniladi. Matematik model esa voqelikning barcha o'zgarishlarini o'zida mujassamlashtirgan u yoki bu ko'rinishdagi funksional munosabatdir.

Shuning uchun tadbqiqiy ahamiyatli ekstremal masalalarni yechish tuzilgan asosiy funksiyaning ma'lum bir shartlardagi optimal qiymatlarini topishdan iborat.

Maktab matematika kursida tadbqiqiy ahamiyatli ekstremal masalalar sistemasini tuzishda, bizningcha quyidagi talablarni e'tiborga olish muhimdir.

1. Tuzilgan (tanlanayotgan) masalalar hozirgi zamon ishlab chiqarishining axborotlariga asoslangan bo'lishi kerak.

2. Masalalar qandaydir matematik muammo asosiga qurilmay, balki bevosita ishlab chiqarish natijalariga mos kelishi kerak.

3. Masala sharti tushunarli bo'lishi, agarda unda ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lgan terminlar ishtirok etsa, yechishga kirishishdan oldin ularni mufassal izohlash zarur.

4. Masalaning yechimi maktab programmasida tashqariga chiqmasligi zarur.

Bundan buyon yozuvda ekstremal masala deganda tadbqiqiy mohiyatli ekstremal masalalarni tushunishga shartlashamiz.

Ekstremal masalalarni yechish metodlari bilan tanishishdan oldin quyidagi masalani ko'raylik:

Tomonlari 6 sm. va 4 sm. bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning S yuzi aniqlansin.

Masalaning javobi ravshan $S = 24$ kv. sm. Endi esa masalaning shartini biroz o'zgartiraylik. Perimetri 20 sm. bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi hisoblansin.

Qo'yilgan shartda endi masala javobi endi aniq emas, chunki perimetri 20 sm. bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar soni sanoqsiz ko'pdir. Quyidagi jadvalni tuzamiz: (a va v – lar to'g'ri to'rtburchak tomonlari, S yuza)

a	1	2	3	4	5	6	6,5
v	9	8	7	6	5	4	3,5
S	9	16	21	24	25	24	22,75

Bu jadvaldan ko'rinadiki, tomonlar o'zgarishi bilan yuza ham o'zgara boradi, tomonlar o'rtasidagi ma'lum bir munosabatda esa yuza eng katta qiymatga erishadi. $A=5, B=5$ da $S=25$ (kv.sm.) ya'ni perimetr o'zgarmas bo'lganda eng katta yuzaga ega bo'luvchi figura kvadrat ekan.

Birinchi qarashda sodda ko'ringan bu masalani ijobiy hal qilish uchun, ekstremal masalalarni yechishning turlicha usullardan foydalanishni bilishga to'g'ri keladi (bu masalani kamida 3 hil yo'l bilan yechish mumkin).

Quyida biz ekstremal masalalarni yechishning ba'zi asosiy metodlariga to'htalib o'tamiz.

Buyuk matematik Yakob Shteyner (1796-1863) o'z vaqtida ekstremal masalalarni yechishning ikki metodi haqida fikr yuritgan edi.

I. Differensial hisob yordamida hisoblash metodi.

II. Sintetik metod (xususiy usullar yordamida).

Har ikkala metodga alohida to'htalib o'tamiz.

I. Differensial hisob yordamida hisoblash metodi.

Ko'pdan ko'p amaliy masalalar funksiyaning biror oraliqdagi eng katta yoki eng kichik qiymatini topishga keltiriladi. Bunday masalalarni yechish usullari darslikda ko'rsatilgan bo'lib, funksiyaning yopiq oraliqda eng katta va eng kichik qiymatini topishga asoslangandir.

Biroq ekstremal masalalarda tekshirilayotgan funksiya ko'pincha ochiq, hatto cheksiz oraliqda bo'lishi mumkin.

Shuning uchun o'quv qo'llanmasidagi 28-punktning funksiyalarni tekshirishning yana bir qoidasi bilan to'ldirish maqsadga muvofiqdir. Quyida teorema sifatida keltirilgan qoida o'quvchilarni o'zlashtirishi uchun aytarli qiyinchilik tug'dirmaydi.

1-teorema. Aytaylik F funksiya J oraliqda differensiyalanuvchi bo'lib yagona X_0 kritik nuqtaga ega bo'lsin.

U holda F hosila $x < x_0$ da manfiy, $x > x_0$ da musbat bo'lsa, $x = x_0$ nuqtada F funksiya eng kichik qiymatga erishadi.

Bu teoremaning isbotini o'quvchining o'ziga havola etamiz. Shuni e'tiborga olish kerakki, bu teorema ixtiyoriy oraliq uchun o'rinlidir.

Ba'zi hollarda masalan, masala shartida xarflar ishtirok etganda kritik nuqtadan o'tishdagi xosila ishorasini aniqlash bir muncha qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi. Bunday hollarda ikkinchi tartibli xosiladan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

2. Sintetik metod

Ekstremal masalalarni xususiy metodlardan foydalanib yechish.

1. Kvadrat funksiya va ularning ekstremumlari.

Aytaylik

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

funksiya berilgan bo'lib, bu funksiya $\mathbb{R}$ da aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. $f(x)$ xosila qoidasidan foydalanmay tekshiraylik.

2-teorema. $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadrat funksiya $x_0 = -\frac{b}{2a}$ da ekstremum qiymatga erishadi. Agar $a < 0$ bo'lsa bu qiymat eng katta, $a > 0$ bo'lsa, bu qiymat eng kichik bo'ladi.

Isbot: Berilgan funksiylardan to'la kvadrat ajratamiz:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

Endi esa yuqoridagi har ikkala holda ham teoremaning o'rinli ekanligini isbotlaymiz.

A) $a < 0$ bo'lsa, birinchi qo'shiluvchi $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ - manfiy bo'lib, $x = -\frac{b}{2a}$ da eng katta qiymatga erishadi. Ikkinchi qo'shiluvchi o'zgarmas son bo'lgani uchun bu holda kvadrat funksiya $c - \frac{b^2}{4a}$ ga teng va eng katta qiymatga erishadi.

B) $a > 0$ bo'lsa birinchi qo'shiluvchi $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ - musbat bo'lib, $x = -\frac{b}{2a}$ da eng kichik qiymatga erishadi. Ikkinchi qo'shiluvchi o'zgarmas son bo'lgani uchun kvadrat funksiya $x = -\frac{b}{2a}$ da $c - \frac{b^2}{4a}$ ga teng eng kichik qiymatga erishadi.

Bu teorema tekshirilayotgan masalaning matematik modeli kvadrat funksiya bo'lgan hollarda, shubhasiz katta ahamiyatga ega bo'ladi.

Fikrimizning dalili sifatida quyidagi masalani ko'raylik.

Masala:

To'g'ri burchakli to'rtburchak shaklidagi yer uchastkasi bir tomondan zavod devoriga yopishgan. Agar uchastka devorining umumiy uzunligi 200 metr bo'lsa,

uning yuzasi eng katta bo'lishi uchun devorlarning o'lchamlari qanday bo'lishi kerak?
Yechish:

Aytaylik, devorlardan birining uzunligi x_m bo'lsin, u holda unga qo'shni tomonning uzunligi $(200 - 2x)$ m. bo'lib, uchastkaning yuzasi $S = x \cdot (200 - 2x) = -2x^2 + 200x$ bo'ladi.

Shunday qilib, tekshirilayotgan masalaning matematik modeli $S = -2x^2 + 200x$ – ko'rinishdagi kvadrat funksiyaning hosil qildik. Bu yerda $a = -2 < 0, b = 200, c = 0$.

U holda yuqoridagi teoremaning f) – holiga ko'ra

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{200}{2 \cdot (-2)} = 50$$

da yuza eng katta bo'ladi.

Ekstremumga tekshirish zarur bo'lgan ba'zi masalalarni yechishda oldindan ma'lum bo'lgan tengsizliklardan ham foydalaniladi. Navbatdagi metod sifatida ana shunday tengsizliklardan biri bilan tanishamiz.

2. Ekstremal masalalarni tengsizliklar yordamida yechish.

3-teorema.

Aytalik, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – nomanfiy sonlar bo'lib, p -natural son bo'lsin. u holda

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{N} \geq \sqrt[p]{x_1 + x_2 + \dots \cdot x_i}$$

tengsizlik o'rinlidir. (1) ya'ni berilgan sonlarning o'rta arifmetigi, shu sonlarning o'rta geometrik qiymatidan kichik emas. Bu yerda tenglik alomati faqat $x_1, x_2, \dots = x_n$ bo'lgandagina o'rinlidir.

Bu teorema matematik induksiya metodi yordamida isbotlanadi. Quyida biz ushbu teoremadan kelib chiqadigan ikkita muhim natijaga to'htalamiz va ularning to'liq isbotini keltiramiz.

1-natijasi. Yig'indisi o'zgarmas bo'lgan n – ta manfiy bo'lmagan sonlarning ko'paytmasi shu ko'paytiruvchilar o'zaro teng bo'lgandagina eng katta qiymatga erishadi.

Isbot. Aytaylik, n – ta manfiy bo'lmagan qo'shiluvchilar (o'zgaruvchilar)ning yig'indisi S bo'lsin. (1) ga ko'ra

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i}{N} \geq \sqrt[n]{p} \text{ va } x_1 + x_2 + \dots + x_i \geq n\sqrt[n]{p}.$$

Bu yerda tenglik faqat $X_k (k=1,2,\dots,x_n)$ ko'paytiruvchilarning har biri $\sqrt[n]{p}$ - ga teng bo'lgandagina o'rinli, boshqa hollarda esa, yig'indi $n\sqrt[n]{p}$ - o'zgarmasdan katta bo'ladi.

Demak, $n\sqrt[n]{p}$ - qiymat $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ – yig'indining eng kichik qiymati bo'lib, bu qiymatga har bir qo'shiluvchi $\sqrt[n]{p}$ - ga teng bo'lgandagina erishadi.

Keltirilgan teorema va uning natijalari maktab matematika kursida katta ahamiyatga ega bo'lsada, doimo qo'llanilavermaydi. Ularning mohiyatini ko'rsatish maqsadida quyidagi misollarni keltiramiz;

Funksiyalar ekstremumga tekshirilsin.

A) $y = x + \frac{1}{x}$

B) $y = \frac{(a+x)(b+x)}{x}$

V) $y = x(a-x)$

G) $y = x^2(a^2 - n^2x^2)$

Agar shu funksiyalarni tekshirishda an'anaviy xosila metodidan foydalansak, birmuncha xisoblash ishlarini bajarishga to'g'ri keladi, shuning

uchun yuqorida isbotlangan natijalardan foydanaylik.

Yechish;

$$y = \frac{(a+b)(b+x)}{x} = \frac{ab}{x} + a + b + x$$

Xosil bo'lgan sonlar (o'zgaruvchilar)ning ko'paytmasi $\frac{ab}{x} \cdot a \cdot b \cdot x = a^2 b^2$ -o'zgarmas son, shuning uchun 2-natijaga ko'ra $\frac{ab}{x} = x$ bo'lganndagina berilgan berilgan funksiya eng kichik qiymatga erishadi ya'ni $x = \sqrt{ab}$ funksiya eng kichik qiymatga erishadi.

2) $y = x^2(a^2 - m^2 x^2)$ funksiyaning ko'rinishda yozib olsak o'ng tomondagi ko'paytuvchilarni yig'indisi $m^2 x^2 + a^2 - m^2 x^2 = a^2$ o'zgarmas son bo'ladi.

U holda 1-natijaga ko'ra berilgan funksiya $m^2 x^2 = a^2 - m^2 x^2$ bo'lgandagina yoki $x = a \frac{\sqrt{2}}{m}$ da eng katta qiymatga erishadi.

Bu kabi masalalarni tuzish o'qituvchi uchun aytarli qiyinchilik tug'dirmaydi. Imkoniyat darajasida, bevosita dars davomida yoki darslardan tashqari paytlarda o'quvchilarni yuqori tipdagi masalalar va ularning yechimlari bilan tanishtirib borish, shubhasiz ularda fanga bo'lgan qiziqishlarni kuchaytiradi, hamda bilish faoliyatlarini aktivlashtirishga xizmat qiladi.

Shuni hisobga olgan holda quyida keltirilgan ba'zi amaliy mohiyatli ekstremal masalalarni yechishda yuqorida bayon etilgan metodga ham mufassal to'htalib o'tiladi.

1-masala.

Hajmi 108 sm^3 bo'lgan korobkani yasash talab etiladi. Korobka qopqog'i yo'q va ostki qismi kvadratdan iborat. Bu korobkaning o'lchamlari qanday bo'lganda, uni yasash uchun eng kam miqdorda xom ashyo sarf qilinadi.

Yechish. 1-usul.

1) Asos kvadrat bo'lgani uchun uning o'lchovlari x va y bo'lsin deb olamiz, u holda hajm $V = x^2 \cdot y$ bo'lgani uchun $V = 108 \text{ sm}^3$ – ni hisobga olsak,

$$y = \frac{108}{x^2} \text{ bo'ladi.}$$

2) Korobka sirti yuzasi $s = \tilde{o}^2 + 4\tilde{o}y = \tilde{o}^2 + \frac{432}{\tilde{o}}$, ya'ni $s = \tilde{o}^2 + \frac{432}{\tilde{o}}$ bo'ladi.

Demak, bu holda $s = \tilde{o}^2 + \frac{432}{\tilde{o}}$ funksiyani minimumga tenglashtirish kerak.

3) Hosil bo'lgan funksiyani $s = x^2 + \frac{216}{x} + \frac{216}{x}$ ko'rinishida yozib olamiz. Bu funksiyaning tuzilishidan ko'rinib turibdiki, har uchala qo'shiluvchilarning ko'paytmasi o'zgarmas sonidir, ya'ni:

$$x^2 \cdot \frac{216}{x} \cdot \frac{216}{x} = 216^2.$$

Shuning uchun 3-teoremaning 2-natijasiga ko'ra S kattalik o'zining eng kichik qiymatiga faqat va faqat qo'shiluvchilar o'zaro teng bo'lgandagina erishadi, ya'ni $x^2 = \frac{216}{x}$; bundan esa $x = 6$, u holda $y = 3$ bo'ladi.

Demak, 108 sm^3 korobkani eng kam xom ashyo sarflab yasash uchun o'lchovlari $x = 6$; $y = 3$ bo'lishi kerak ekan.

Endi bu masalani hosila usulidan foydalanib yechaylik.

2-usul

1) Yuqorida hosil qilingan $s = \tilde{o}^2 + \frac{432}{\tilde{o}}$ funksiyani $\tilde{o} = \frac{108}{3}$ munosabatni e'tiborga olib ekstremumga tekshiramiz.

2) Birinchi tartibli hosilani hisoblaymiz:

$$s^1 = 2x - \frac{432}{x^2};$$

bu xosilani nolga tenglab, $2x - \frac{432}{x^2} = 0$ tenglamadan yagona $x_0 = 6$ –ni krtitik nutasini topamiz, $x_0 = 6$ nuqta atrofida $x_1 = 5$ va $x_2 = 7$ nuqtalarda hosila ishorasini tekshiramiz:

$$S'(5) < 0, S'(7) > 0;$$

Bundan ko'rinadiki, funksiya hosilasi kritik nuqtadan o'tishda o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, demak bu funksiya $x_0 = 6$ nuqtada minimum qiymatga erishadi, bundan esa, $u = 3$ topiladi.

2-masala

Eni 60 sm. bo'lgan kvadrat shaklidagi temir tunukadan asosi kvadrat shaklida bo'lgan qopqoqsiz eng katta sig'imli korobka yasalsin.

Yechish.

Aytaylik, buklanadigan kvadrat tasmachalarning eni X bo'lsin. Ko'rish mumkinki, $\tilde{\sigma} = \frac{60}{2} = 30$.

Kvadrat asosning eni $60 - 2x$ bo'lgani uchun korobkaning hajmi $V = (60 - 2x^2) \cdot x$ dan iborat bo'ladi. Shu hosil qilingan funksiyaning eng katta qiymatini topamiz.

1-usul.

Hosilani hisoblaymiz:

$$v^1 = 12x^2 - 480x + 3600$$

v^1 – hosilani nolga tenglab

$12x^2 - 40x + 3600 = 0$ yoki $x^2 - 40x + 300 = 0$ dan $x_1 = 30, x_2 = 10$ ildizlarni topamiz, bu ildizlardan $x_1 = 30$ masala shartini qanoatlantirmaydi, shuning uchun hosila ishorasini $x_2 = 10$ atrofida tekshiramiz.

$v'(x < 10) > 0, v'(x = 10) = 0, v'(x > 10) < 0$ ekanligidan, $x = 10$ nuqtadan o'tishidan hosila o'z ishorasini musbatdan manfiyga almashtiradi. Shuning

uchun $v = (60 - 2x)^2 \cdot x$ funksiya $x = 10$ bo'lganda o'zining eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni:

$$v_{\max} = (60 - 2 \cdot 10) = 1600 (\text{sm}^3)$$

2-usul

Hosil qilingan $v = (60 - 2x)^2 \cdot x$ funksiyaning quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$4 \cdot v = (60 - 2x)(60 - 2x) \cdot 4x$$

U holda 3-teoremaning 1-natijasiga ko'ra v – hajm eng katta qiymatga ega bo'lishi uchun

$$(60 - 2x) + (60 - 2x) + 4x = 120$$

o'zgarmas son bo'lganligidan $60 - 2 = 4x$ bo'lishi kerak. Bundan esa $x = 10$ javobini hosil qilamiz. Bunda 2-usulni 1-usulga qaraganda birmuncha foydaliroq ekanligini alohida ta'kidlash zarur.

Matematikada, ayniqsa amaliy ahamiyatli masalalarni yechishda olingan masalani imkoniyat darajasida turli usullar bilan yechish, hamda olingan natijalarni masala mohiyatiga qarab albatta tahlil qilib berish birinchidan o'quvchi yoki talabani bevosita matematika bo'lgan qiziqishini orttiribgina qolmay, balki ularda mustaqilshug'ullanish, o'z ustida ijodiy fikrlash qobiliyatini shakllantirishga katta yordam beradi.

Shu maqsadda quyidagi masalaning yechimini topishda uchta usulni ko'rsatib o'tamiz.

3-masala

Yuzasi a^2 bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi uchastkani devor bilan o'rab olish kerak. Uchastkani o'rab olish uchun ketadigan xom ashyo eng kichik qiymatga erishish uchun uchastka o'lchovlari qanday bo'lishi kerak?

Yechish. Qo'yilgan masalaning mohiyati quyidagicha: perimetri eng kichik bo'lgan a^2 yuzali to'g'ri to'rtburchakni topish kerak.

1-usul.

Aytaylik, $x > 0$ – to'g'ri to'rtburchakning tomoni bo'lsin, u holda $\frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}}$ uning ikkinchi tomoni bo'ladi. U holda to'g'ri to'rtburchakning perimetri uchun

$$D = 2 \left(\tilde{o} + \frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}} \right)$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya $(0; +\infty)$ da aniqlangan va differentsiylanuvchi. Uning birinchi tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$D^1 = 2 \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}^2} \right);$$

Topilgan hosilani nolga tenglab $D^1 = 2 \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}^2} \right) = 0$ dan $x_1 = a$ va $x_2 = -a$

qiymat masala shartini qanoatlantirmaydi.

Shuning uchun R' - hosilani $x = a$ nuqtadan o'tishidagi ishorasini tekshiramiz, hisoblashlarga ko'ra $r'(x < x_1) < 0$; $p'(x = x_1 = 0)$ va $p'(x > x_1) > 0$ demak p' – hosila $x = a$ nuqtadan o'tishda o'z ishorasini manfiydan musbatga

o'zgartiradi, shuning uchun $\tilde{o} = 2\tilde{o} \left(\tilde{o} + \frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}} \right)$ funksiya $x = 0$ bo'lganda eng

kichik qiymatga erishadi demak, yuzasi a^2 bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar ichida eng kichik perimetrlisi kvadratdan iborat ekan.

2-usul

$R(x) = 2 \left(\tilde{o} + \frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}} \right)$ funksiyadan to'liq kvadratga ajrataylik.

$$p(x) = 2 \left[\left(\sqrt{x} \right)^2 - 2\sqrt{x} \cdot \frac{a}{\sqrt{x}} + \frac{a^2}{\left(\sqrt{x} \right)^2} \right] + 4a = 2 \left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}} \right)^2 + 4a, \quad \text{bunda}$$

$$x \in (0; +\infty);$$

Ma'lumki, ohirgi yig'indi o'zining minimum qiymatiga erishi uchun

$\left(\sqrt{\tilde{o}} - \frac{\dot{a}}{\sqrt{\tilde{o}}}\right)^2 = 0$ bo'lishi kerak. Buning uchun esa, $\sqrt{\tilde{o}} = \frac{\dot{a}}{\sqrt{\tilde{o}}}$ bo'lishi kifoya.

U holda yuqoridagi 1-usul natijasiga mos keluvchi $x=a$ javobini hosil qilamiz.

3-usul

$$R(x) = 2\left(\tilde{o} + \frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}}\right) \text{ funksiyaga qaytamiz.}$$

Funksiyaning berilishiga ko'ra, undagi qo'shiluvchilarning ko'paytmasi

$\tilde{o} \cdot \frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}} = \dot{a}^2$ bo'lib, o'zgarmas sonidir. Shuning uchun, 3-teoremaning 2-

natijasiga ko'ra, qo'shimchalar o'zaro teng bo'lgandagina va faqat shu holda

$P(x)$ – o'zining eng kichik qiymatiga erishadi. Shuning uchun $A = \frac{\dot{a}^2}{\tilde{o}}$ ga

ko'ra yana $a = x$ – javobini hosil qilamiz.

4-masala.

Ekin maydoni uchun yuzasi 3,24 ga bo'lgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi uchastka ajratildi va uning atrofi zavur bilan o'rab chiqildi. Zavur qazish ishlari eng arzon bo'lishi uchun, uchastka o'lchamlari qanday bo'lishi kerak? Agar 1 metr zavur qazish uchun 50 so'm sarflanishi ma'lum bo'lsa, zavurning umumiy qiymatini aniqlansin.

Yechish.

1) Aytaylik yer uchaskasining o'lchamlari x va y bo'lsin. u holda uchastka

yuzasi $S = x \cdot y$ bo'lgani uchun $y = \frac{S}{x}$ yoki $y = \frac{3.24}{x}$ bo'ladi.

2) Yer uchaskasining perimetri

$$p = 2x + 2y = 2(x + y)$$

bo'lib, unga yuqoridagi qiymatini qo'ysak

$$p(x) = 2\left(x + \frac{3.24}{x}\right)$$

ko'rinishidagi funktsiyani hosil qilamiz. $3.24 \text{ ga} = 32400 \text{ m}^2$ – ekanligini hisobga olsak $\phi(x) = 2\left(x + \frac{32400}{x}\right)$ kelib chiqadi. Hosil qilingan bu funktsiyani $x \in (0; +\infty)$ da tekshiramiz.

3) Bu funktsiya $\phi \cdot \frac{32400}{\phi} = 32400$ o'zgarmas son ekanligidan 3-teoremaning 2-natijasiga ko'ra, $R(x)$ funktsiya minimal qiymatga ega bo'lishi uchun $y = \frac{32400}{\phi}$ bo'lishi kerak. Bundan esa, $x = 180m$, hamda $y = 180m$. ekanligidan kelib chiqadi. Demak masala shartini qanoatlantiruvchi to'rtburchak bu kvadrat ekan. Bu holda $P = 2(x + y) = 2(180 + 180) = 720(m)$ bo'lgani uchun zavurni qalinlikka ega.

“MATEMATIKA FANINI O‘QITISHNING ZAMONAVIY METODIKALARI” MODULI BO‘YICHA AMALIY MASHG‘ULOTDA

foydalanish uchun tavsiya qilinadigan masalalar

1. Matritsalar ustida amallarni bajaring

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 7 & 12 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Teskari matritsani toping

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \\ 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \\ 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

4. Tenglamalar sistemasini yeching

$$\begin{cases} 5x - 7y - z = -9 \\ 2x + 9y + 7z = 20 \\ x - 5y - 11z = -9 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4x - 7y - z = 9 \\ 2x + 19y + 10z = 27 \\ x - 8y + 3z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x - 27y + z = -6 \\ 2x + 19y - 6z = -21 \\ x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

5. Quyidagi funksiyalar berilgan. y' toping

1. $y = 6x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 56x^2 - 34x + 1$.
2. $y = 19x^5 - 14x^4 + 89x^3 - 154x^2 - 45x + 19$
3. $y = 25x^5 e^x$
4. $y = 6x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 56x^2 - 34x + 1$

6. O'nlar va birlar xonasidagi raqamlar kvadratlarining ayirmasi, ushbu raqamlarning yig'indisidan 2 marta katta bo'lgan eng katta 2 xonali sonni toping.

7. x va y natural sonlar uchun $16x = 64y^2$ tenglik o'rinli bo'lsa, $x^2 - y^2$ ning qabul qilishi mumkin bo'lgan eng kichik qiymatini toping,

8. 0, 2, 3 va 5 raqamlaridan foydalanib hosil qilingan nechta 4 xonali son 25 ga bo'linadi?

9. A natural sonni 11 ga bo'lganda 5 qoldiq, 12 ga bo'lganda 6 qoldiq va 13 ga bo'lganda 7 qoldiq qoladi. A ning eng kichik qiymatini toping.

☐ ☐

11. a {2;1;3}, b {1;-21} vektorlar hosil qiladigan parallelogram yuzini toping.

☐ ☐ ☐ ☐

12. a {1;1;9}, b {2;01} vektorlar berilgan. a ning b ga proyeksiyasi uzunligini toping.

13. $x^2 - x$ tenglama nechta haqiqiy ildizga ega?

14. a ning qanday eng kichik butun qiymatida $x^2 - 10x + 5 > a$ tengsizlik x ning barcha qiymatlarida o'rinli bo'ladi?

15. $5^x + 12^x = 13^x$ tenglama nechta haqiqiy yechimga ega?

16. Raqamlari yig'indisi 25 ga teng bo'lgan nechta uch xonali son 11 ga bo'linadi?

17. n ning qanday qiymatida $n^3 - 1$ ifoda tub son bo'ladi?

18. Uch xonali sonni xonalari teskari tartibda yozilsa 99 ga kamayadi. Raqamlari yig'indisi 14 ga teng va o'rtadagi raqami qolgan raqamlar yig'indisiga teng. Shu shonning raqamlari ko'paytmasini toping.

19. Agar 2 ta sonning ayirmasi, kvadratlarining ayirmasi va kublarining ayirmasi 1:3:7 nisbatda bo'lsa, shu sonlarning o'rta arifmetigini toping.

20. Agar $x^2 - mx + m^2 + a = 0$ tenglamaning ildizlari x_1, x_2 , bo'lsa, $x_1^3 + x_2^3$ ning qiymatini toping.

21. $x + |x| + |y| > 100$ tengsizlik nechta butun yechimga ega?

22. $1/7$ ning o'nli kasr yozuvida verguldan keying 100-xonada turgan raqamni toping.

2010!

23. Shunday natural son topingki, shu songacha bo'lgan toq sonlar yig'indisidan 50 marta kichik bo'lsin.

IV. AMALIY MASHG'ULOTLAR

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1. $A(2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi va Ox o'qi bilan 45° burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing hamda k va b parametrlarni aniqlang.

2. $A(-4; 6)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinat o'qlaridan yuzi 6 ga teng uchburchak ajratuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

3. $3x - 4y = 6$ va $8x + 6y = 11$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping

4. $3x - 2y + 7 = 0$, $6x - 4y - 9 = 0$, $6x + 4y - 5 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$ to'g'ri chiziqlar qaysilari parallel va qaysilari perpendikulyar ekanligini aniqlang.

5. $y = kx + b$ tenglamani normal ko'rinishga keltiring.

6. Koordinatalar boshidan $12x - 5y + 39 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.
7. $A(9; 3; 0)$, $B(2; 5)$, $C(3; 2)$ nuqtalar uchburchak uchlari bo'lsa, BD – balandlik uzunligini toping.
8. $3x - 4y - 29 = 0$ va $2x + 5y + 19 = 0$ to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi koordinatalarini toping.
9. $P(4; -3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\overrightarrow{PO}$ vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
10. $M(-1; 3)$ $N(2; 5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini umumiy, kanonik, burchak koeffisientli, kesmalar bo'yicha va normal ko'rinishda yozing.
11. $M_0(1; -2)$ nuqtadan $2x + 3y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel va perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazing va tenglamalarini yozing.
12. Uchburchak tomonlari tenglamalari $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $5x - y - 5 = 0$ bo'lsa, uchki burchaklarini toping.
13. $M(-1; 3)$ $N(2; 5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini umumiy, kanonik, burchak koeffisientli, kesmalar bo'yicha va normal ko'rinishda yozing.
14. $M_0(1; -2)$ nuqtadan $2x + 3y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa parallel va perpendikulyar to'g'ri chiziqlar o'tkazing va tenglamalarini yozing.
15. Uchburchak tomonlari tenglamalari $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $5x - y - 5 = 0$ bo'lsa, uchki burchaklarini toping.
16. $4x - 3y - 7 = 0$, $4x - 3y + 3 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.
17. $3x + y - 8 = 0$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $A(-2; 4)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan B nuqtani toping.

18. $A(2; -3)$ nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qida $b = 3$ kesma ajratuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
19. $P(2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlarida teng kesmalar ajratuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
20. Koordinatalar boshidan $3x - 6y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyar uzunligini toping.
21. $x + y - 5 = 0$, $7x - y - 19 = 0$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalari tenglamalarini yozing.
22. $4x + 3y - 36 = 0$ to'g'ri chiziqni koordinata o'qlari bilan hosil qilgan uchburchak yuzini toping
23. $A(-4; 0)$, $B(0; 6)$ nuqtalar berilgan. AB kesma o'rtasidan o'tuvchi va Ox o'qida ajratgan kesmasi Oy o'qida ajratgan kesmasidan 2 marta uzun bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
24. a ning qanday qiymatlarida $(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a = 5 = 0$ to'g'ri chiziq
 - a) Ox o'qiga parallel
 - b) Oy o'qiga parallel
 - c) koordinata boshidan o'tadi.
25. $A(3; -2)$, $B(1; 5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq yo'naltiruvchi vektorining moduli topilsin.
26. $A(3; 2)$, $B(-1; -3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq normal vektori moduli topilsin.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Markazi $O(0; 0)$ nuqtada bo'lib, $3x - 4y + 20 = 0$ to'g'ri chiziqqa urinuvchi aylan tenglamasini yozing.
2. $x^2 + y^2 + y = 0$ tenglama bilan berilgan aylana markazi koordinatalari va radiusini toping.

3. $x^2 + y^2 = 5$ aylanaga $M_0(-1; 2)$ nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing.
4. Fokuslari Ox o'qda yotgan va $2b = 10$, $\varepsilon = \frac{12}{13}$ bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.
5. $x^2 + 4y^2 = 16$ tenglama bilan berilgan ellipsning fokuslari koordinatalari va ekscentrisitetini toping.
6. Fokuslari Ox o'qida yotuvchi va $M_1(4; -\sqrt{3})$, $M_2(2\sqrt{2}; 3)$ nuqtalardan o'tuvchi ellipsning kanonik tenglamasini yozing.
7. Fokuslari Ox o'qida yotgan va $2c = 26$ direktrisalar orasidagi masofa $22\frac{2}{13}$ ga teng giperbolaning kanonik tenglamasini yozing.
8. Giperbolaning fokuslari $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellips fokuslari bilan ustma-ust tushsa va $\varepsilon = 2$ bo'lsa uning kanonik tenglamasini yozing.
9. $A(-4; 6)$ nuqta berilgan. Diametri OA bo'lgan aylana tenglamasini yozing.
10. $A(1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi va koordinata o'qlariga urinuvchi aylana tenglamasini yozing.
11. $C(-7; 2)$ nuqtadan $x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$ aylanagacha bo'lgan eng qisqa masofani toping.
12. $M(2; -3)$ nuqta orqali o'tuvchi, katta yarim o'qi $a = 4$ bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.
13. $M_1(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4})$ va $M_2(-2; \frac{\sqrt{15}}{5})$ nuqtalardan o'tuvchi va fokuslari Ox o'qda yotuvchi ellipsning kanonik tenglamasini yozing.
14. $9x^2 + 16y^2 = 225$ tenglama bilan berilgan ellipsning yarim o'qlari, ekscentrisiteti, fokuslari koordinatalari va direktrisa tenglamalrini yozing.

Mustaqil yechish uchun test savollari

Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa

1. Quyidagi hollarning har birida nuqtalar orasidagi masofa topilsin:

1. $A(4;3)$, $B(7;7)$; 2) $A(12; 1)$, $B(0;4)$;
3. $A(3;1)$, $B(2;4)$; 4) $A(3;5)$, $B(4;6)$.
2. Koordinatalar boshidan quyidagi nuqtalargacha bo'lgan masofalar topilsin:
 1. $A(11;4)$; 2. $B(11;0)$; 3. $C(3; 4)$; 4) $D(5;12)$.
 3. Koordinata o'qlarida yotuvchi va $(1;1)$, $(3;7)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar topilsin.
 4. Oy o'qida koordinatalar boshidan va $A(8; 4)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqta topilsin.
 5. ABC uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: $A(3;1)$, $B(7;5)$, $C(5;1)$. Berilgan uchburchak o'tkir burchaklimi, to'g'ri burchaklimi yoki o'tmas burchaklimi?
 6. Koordinata o'qlarida $(5;9)$ nuqtadan 15 birlik uzoqlikda joylashgan nuqtalar topilsin.
 7. Markazi $C(6;7)$ nuqtada va radiusi 5 bo'lgan aylana berilgan. $A(7;14)$ nuqtadan bu aylanaga urinmalar o'tkazilgan. A nuqtadan urinish nuqtalarigacha bo'lgan masofalar topilsin.
 8. Radiusi 10 bo'lgan aylana markazi $C(4; 6)$ nuqtada. Koordinata burchaklarining bissektrisalar bilan aylananing kesishish nuqtalari topilsin.
 9. ABC uchburchak uchlari berilgan: $A(2; 3)$, $B(1;3)$, $C(6;4)$. A nuqtaga BC tomonga nisbatan simmetrik bo'lgan M nuqta topilsin.
 10. Uchlari berilgan $A(2;2)$, $B(5;1)$, $C(3;5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi va radiusi topilsin.
 11. Tomoni 10 ga teng rombning ikkita qarama-qarshi uchlari $A(8;3)$, $C(10;11)$ berilgan. Qolgan uchlarining koordinatalari topilsin.
 12. $A(4;2)$ nuqtadan o'tib, Ox o'qiga $B(2;0)$ nuqtada urinadigan aylana markazi topilsin.

13. $A(2,1)$ nuqtadan o'tuvchi va ikkala koordinata o'qlariga urinadigan aylana markazi va radiusi topilsin.

Tekislikda kyesmani berilgan nisbatda bo'lish

14. $M_1(2; 3)$, $M_2(5;1)$ nuqtalar bilan chegaralangan $M_1 M_2$ kesmani

1) $\lambda = 2$;

2) $\lambda = 1/2$

3) $\lambda = 4$;

4) $\lambda = 1/3$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatalari topilsin.

15. Quyidagi hollarning har birida $M_1 M_2$ kesma o'rtasining koordinatalari topilsin:

1) $M_1(2; 3)$, $M_2(4; 7)$;

);

2) $M_1(2; 4)$, $M_2(2;$

4);

3) $M_1(0; 0)$, $M_2(1;1)$.

16. $A(3;4)$, $B(2;1)$ nuqtalar berilgan. AB to'g'ri chiziqlarning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin.

17. Uchlari $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning og'irlik markazi topilsin.

18. Uchburchak tomonlarining o'rtalari $M_1(2; 4)$, $M_2(3; 0)$, $M_3(2; 1)$ nuqtalarda bo'lsa, uning uchlari topilsin.

19. AB kesmaning bir uchi $A(2;3)$ nuqtada joylashgan. $M(1;2)$ nuqta uning o'rtasi. Kesmaning ikkinchi uchi topilsin.

20. Parallelogrammning qo'shni uchlari $A(4; 7)$, $B(2; 6)$ va diagonallari kesishgan nuqtasi $M(3;1)$ berilgan. Uning qolgan ikki uchining koordinatalari topilsin.

21. Ox va Oy o'qlarida mos ravishda $OA=8$, $OB=4$ kesmalar joylashtirilgan. Koordinatalar boshidan AB to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikular asosi AB kesmani qanday nisbatda bo'ladi?

22. $A(3;1)$, $B(2;3)$ nuqtalar orqali o'tgan to'g'ri chiziqda shunday C nuqta topilsinki, $AC=3AB$ tenglik bajarilsin.

23. Trapetsiyaning uchta ketma-ket joylashgan uchlari $A(2;3)$, $B(1;4)$, $C(3;1)$ berilgan. Agar uning AD asosi BC asosidan 5-marta katta bo'lsa, trapetsiyaning to'rtinchi uchi topilsin.

24. $A(4;2)$, $B(8;7)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani uchta teng bo'lakka bo'luvchi C va D nuqtalar topilsin.

25. $C(2;2)$ va $D(1;5)$ nuqtalar AB kesmani uchta teng bo'lakka ajratsa, uning AB, uchlari topilsin.

26. $A(2;4)$ nuqta berilgan. AB to'g'ri chiziq ordinata o'qini C nuqtada, abssissa o'qini D nuqtada kesib o'tadi. C nuqta AB kesmani $\frac{2}{3}$ nisbatda va D nuqta $\frac{3}{4}$ nisbatda bo'lishini bilgan holda B nuqtaning koordinatalari topilsin.

27. $A(9;1)$, $B(2;6)$ nuqtalar berilgan. AB to'g'ri chiziqlarning ikkinchi va to'rtinchi koordinata burchaklari bissektrissasi bilan kesishgan C nuqtasi AB kesmani qanday nisbatda bo'ladi?

28. $C(5;4)$ nuqta AB kesmani $\frac{3}{4}$ nisbatda, $D(6;5)$ nuqta esa $\frac{2}{3}$ nisbatda bo'lsa, A va B nuqtalarning koordinatalari topilsin.

29. ABCD parallelogrammning A uchi BC tomon o'rtasi E bilan va B uchi esa CD tomonida yotuvchi N nuqta bilan tutashtirilgan; DN kesma CD kesma uzunligining uchdan biriga teng. AEBN, kesmalarning kesishgan K nuqtasi shu kesmalarni qanday nisbatlarda bo'ladi?

30. Uchlari $A(5; 4)$, $B(1; 2)$, $C(5; 1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning AD medianasining uzunligini topilsin.
31. Ikkita $(4; 2)$, $(0; 1)$ nuqtalardan o'tadigan to'g'ri chiziqda $A(4; 4)$ nuqtadan 5 birlik masofada joylashgan nuqtalar topilsin.
32. Ikkita $(4; 8)$ va $(1; 4)$ nuqtalardan o'tadigan to'g'ri chiziqda $A(1; 4)$ nuqtadan 4 birlik masofada joylashgan nuqtalar topilsin.
33. Uchlari $A(4; 1)$, $B(7; 5)$, $C(4; 7)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak AD bissektrisasining uzunligi hisoblansin.
- 34.* Uchlari $A(9; 2)$, $B(0; 20)$, $C(15; 10)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi va radiusi topilsin.
- 35.* Markazlari $C_1(2; 5)$, $C_2(7; 10)$ nuqtalarda bo'lib, radiuslari mos ravishda 3 va 7 ga teng bo'lgan ikki aylana umumiy urinmalarining kesishgan nuqtasi topilsin.
36. Trapetsiyaning uchta ketma-ket uchlari $A(1; 2)$, $B(1; 3)$, $C(9; 9)$ berilgan. Trapetsiyaning asosi $AD=15$ bo'lsa, uning to'rtinchi D uchi topilsin.
37. Uchta $A(7; 1)$, $B(6; 7)$, $C(2; 4)$ nuqtalarga mos ravishda og'irligi 60, 100, 40 ga teng yuklar qo'yilgan. Bu sistemaning og'irlik markazi topilsin.
38. To'g'ri burchak ostida bukilgan sterjen qismlari uzunliklari mos ravishda $OA=2$ va $OB=5$ bo'lsa, uning og'irlik markazi topilsin.
39. Simdan yasalgan va tomonlarining uzunliklari 3, 4, 5 sm bo'lgan uchburchakning og'irlik markazi topilsin.
40. Uchlari mos ravishda $A(4; 4)$, $B(5; 7)$, $C(10; 10)$, $D(12; 4)$ nuqtalarda bo'lgan bir jinsli plastinkaning og'irlik markazi topilsin.
- 41.* Muntazam uchburchak uchlarining nomdosh koordinatalarining o'rta arifmetik qiymati ko'pburchak markazining mos koordinatasiga teng ekanligi isbotlansin.
- 42.* Muntazam ko'pburchak barcha tomonlari va barcha diagonal uzunliklari kvadratlarining yig'indisi topilsin.

Tekislikda berilgan uchburchakning yuzi

43. Uchlari $A(4;2)$, $B(9;4)$, $C(7;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi hisoblansin.

44. Uchlari $A(2;0)$, $B(0;1)$, $C(2;0)$, $D(3;2)$, $E(1;3)$ nuqtalarda bo'lgan beshburchakning yuzi hisoblansin.

45. Quyidagi hollarning har birida ABC uchburchakning yuzi hisoblansin:

1) $A(2;1)$, $B(3;4)$,

$C(1;6)$;

2) $A(2;4)$, $B(0;3)$,

$C(1;7)$;

3) $A(5;4)$, $B(11;0)$,

$C(0;3)$.

46. Berilgan $A(2;0)$ nuqtadan $B(1;1)$ va $C(5;4)$ nuqtalar orqali o'tgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

47. Koordinatalar boshidan $A(1;5)$ va $B(2;4)$ nuqtalar orqali o'tgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

48. Uchburchakning ikki uchi $A(5;1)$ va $B(2;2)$ nuqtalarda, uchinchi uchi esa Ox o'qida joylashgan. Uchburchakning yuzi 10 (kv.birlik) ga teng bo'lsa, uchinchi uchining koordinatalari topilsin.

49. Yuzi $S=3$ ga teng uchburchakning ikki uchi $A(3;1)$ va $B(1;3)$ nuqtalarda joylashgan. Bu uchburchakning og'irlik markazi Ox o'qida yotish ma'lum bo'lsa uning uchinchi C uchining koordinatalari topilsin.

50. Quyidagi hollarning har birida AB , nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

1) $A(3,5,1)$, $B(7,8,4)$;

2) $A(3,0,4)$, $B(2,4,6)$.

51. Oy o'qida $A(3,1,0)$ va, $B(2,4,1)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikdagi nuqta topilsin.

52. O'xz tekisligida $A(1,1,1)$, $B(1,1,0)$ va $C(3,1,1)$ nuqtalardan teng uzoqlashgan nuqta topilsin.
53. Berilgan to'rtta $A(1,2,3)$, $B(5,2,3)$, $C(2,5,3)$, $D(1,2,1)$ nuqtalardan o'tuvchi sferaning markazi va radiusi topilsin.
54. Koordinata tekisliklarida, koordinatalar boshi bilan birgalikda qirralari birga teng bo'lgan muntazam tetraedrning uchlari bo'ladigan nuqtalarni toping.
55. Uchlari $A(1;0;1)$, $B(0;2;3)$, $C(4;4;1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzasi topilsin.
56. Parallelogrammning ketma-ket keluvchi $A(3;0;4)$, $B(1,2,3)$, $C(9,6,4)$ uchlari berilgan. Uning
- 1) to'rtinchi uchini;
 - 2) diagonallarining kesishish nuqtasini;
 - 3) B uchidagi burchagini; 4) AC diagonali uzunligini; 5) yuzasini toping.
57. Bir uchi koordinata boshida bo'lib, shu uchdan chiquvchi qirralarining oxirlari $A(2;3;6)$, $B(8;4;1)$, $C(2;2;1)$ nuqtalarda bo'lgan parallelepipedning hajmi topilsin.
58. Affin fazoda uchlari $M_1(3;2;4)$, $M_2(6;0;1)$ nuqtalarda bo'lgan $M_1 M_2$ kesmani 1) $\lambda=2$; 2) $\lambda=3/4$ nisbatda bo'luvchi nuqta topilsin.
59. Affin fazoda $M_1(3;2;4)$ va $M_2(6;0;1)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarda O'xz tekisligida yotuvchi nuqta topilsin.
60. AB kesma besh bo'lakka bo'lingan: birinchi bo'luvchi nuqtasi $C(3;5;7)$ va oxirgi bo'luvchi nuqtasi $F(2;4;8)$ ma'lum. Kesma uchlarining koordinatalari va qolgan bo'luvchi nuqtalarning koordinatalari topilsin.
61. Uchburchakning ikkita $A(4;1;2)$, $B(3;5;16)$ uchlari berilgan. AC tomon o'rtasi Oy o'qda, va BC tomonning o'rtasi Oxy tekislikda yotganligini bilgan holda uning uchinchi C uchi topilsin.
62. Uchlari $A(2;1;7)$, $B(4;5;2)$ nuqtalarda bo'lgan AB kesmani koordinata tekisliklarining har biri qanday nisbatda bo'ladi?

63. Ikkita to'g'ri chiziq berilgan: ulardan biri $A(3; 5; 15), B(0; 0; 7)$ nuqtalardan, ikkinchisi esa $C(2; 1; 4), D(4; 3; 0)$ nuqtalardan o'tadi. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish, kesishmasligi aniqlansin. Kesishgan holda kesishish nuqtasi topilsin.

64. Ikkita $A(8; 6; 7), B(20; 15; 10)$ nuqtalar berilgan. AB to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan qaysi biri bilan kesishishi aniqlansin.

65.* Tetraedrning qarama-qarshi qirralari o'rtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziqlarning bitta nuqtada kesishishini va shu nuqtada teng ikkiga bo'linishini isbotlang. Xuddi shu nuqtada tetraedrning uchlarini qarama-qarshi yoqlarining og'irlik markazlari bilan tutashtiradigan to'g'ri chiziqlar ham kesishishini isbotlang va shu nuqtada qanday nisbatda bo'linishini toping.

66.* Parallelepipedning bir uchidan chiqqan uchta qirrasi oxirlaridan o'tkazilgan tekislik shu uchdan chiqqan diagonalni qanday nisbatda bo'ladi?

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Ikkinchi tartibli determinantning xossalari
2. Uchinchi tartibli determinantning xossalari
3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish masalasining masalalar yechishga tatbiqlari
4. Vektrolar aralash ko'paytmasining turli masalalar yechishga tatbiqlari
5. Affin koordinatalar sistemasida ikki nuqta orasidagi masofa
6. Ikki qaytali vektor ko'paytmaning formulasini geometrik usul bilan keltirib chiqarish

V.GLOSSARIY

Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi - Musbat yo'nalishlari mos ravishda e_1, e_2 vektorlar bilan aniqlanuvchi a va b to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan sistema tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va $0, e_1, e_2$ yoki $(0, e_1, e_2)$ ko'rinishda belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi e_1, e_2 vektorlarni koordinat vektorlar deyiladi; a to'g'ri chiziqni Ox bilan belgilab abtsissalar o'qi, b to'g'ri chiziqni esa Oy bilan belgilab ordinatalar o'qi deb ataladi.

Radius vektor - Tekislikda $(0, e_1, e_2)$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikda birorta N nuqtani olaylik ON vektorni N nuqtaning radius vektori deyiladi.

Nuqtaning absissasi -Radius–vektorning x, y , koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi va uni $N(x; y)$ belgilaymiz. Bunda x soni N nuqtaning absissasi yoki birinchi koordinatasi

Nuqtaning ordinatasi - Radius–vektorning x, y , koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi $N(x; y)$ belgilaymiz. y son esa N nuqtaning ordinatasi yoki ikkinchi koordinatasi deyiladi.

Chorak- Koordinat o'qlari tekislikni to'rtta qismga ajratadi. Har bir qismni chorak deyiladi.

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish- Agar $AN = \lambda NB$ shart o'rinli bo'lsa, u holda nuqta AB kesma berilgan λ nisbatda bo'ladi deyiladi.

Uchburchak yuzi - Uchburchak yuzi a va b vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzining yarmiga teng.

Tetraedr hajmi - Tetraedr hajmi AB, AC, AD vektorlarga yasalgan parallelepipedning hajmini $\frac{1}{6}$ bo'lagiga teng.

Keyslar banki

$A(1)$ va $B(-5)$ nuqtalar bilan chegaralangan kesma $M(x)$ nuqta bilan $AM:MB = 1:2$ nisbatda bo'lingan. M nuqtaning koordinatasi topilsin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat savollari

1. Analitik geometriyaning asosiy masalalarini sanab bering.
2. Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofani (tekislikda, to'g'ri chiziqda) topish formulalarini keltirib chiqaring.
3. Har qanday $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar asosida yasalgan parallelepipedning hajmi tetraedrning olti barobar hajmiga teng ekanligini isbotlang.
4. Uchburchakning yuzasini hisoblash uchun formulani keltirib chiqaring.
5. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish masalasini tavsiflang.
6. Kesmani berilgan nisbatda bo'lishdagi nisbat qachon musbat qiymatga ega bo'ladi?
7. Kesmani berilgan nisbatda bo'lishdagi nisbat qachon manfiy qiymatga ega bo'ladi?
8. Ikki qaytali vektor ko'paytmaning hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

VI. ADABIYOTLAR RO'YXATI:

I. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoev Sh.M. Yangi O'zbekiston demokratik o'zgarishlar, keng imkoniyatlar va amaliy ishlar mamlakatiga aylanmoqda. – T.: “O'zbekiston”, 2021. – 184 b.
2. Mirziyoev Sh.M. Yangi O'zbekiston strategiyasi. – T.: “O'zbekiston”, 2021. – 458 b.
3. Mirziyoev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O'zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoev Sh.M. Niyati ulug' xalqning ishi ham ulug', hayoti yorug' va kelajagi farovon bo'ladi. 3-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O'zbekiston, 2018.
7. O'zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentyabrda qabul qilingan “Ta'lim to'g'risida”gi O'RQ-637-sonli Qonuni.
8. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral “O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida”gi 4947-sonli Farmoni.
9. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 26-sentyabr “Oliy ta'lim muassasalariga kirish uchun nomzodlarni maksadli tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida”gi PQ-3290-sonli Qarori.
10. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktyabr “O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
11. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktyabr “Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.
12. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida”gi PQ-4708-sonli Qarori.
17. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 3-dekabrda “Iqtidorli yoshlarni saralab olish tizimi va akademik litseylar faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida” PQ-4910-son Qarori.

18. O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2022-yil liyundagi “Akademik litseylar rahbar va pedagog xodimlarining uzduksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risda” 296-son Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

19. Amonov T.S., Sharofiddinova D.S. Geogebra - matematikadan jonli chizmalar dasturini dars jaroyonida qo‘llash //Образование наука и инновационные идеи в мире, стр. 176-182, 2023

20. Т.И. Бухарова, С.А. Гришин, О.В. Нагорнов, Д.Г. Орловский, Е.Х. Садекова, Е.Б. Сандаков Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом». Математика. В помощь школьникам 7–11 классов: Учебно-методическое пособие /; под ред. О.В. Нагорнова. – М.: НИЯУ МИФИ, 2018. – 126 с.

21. Sharipov A., Keunimjayev M. Existence and uniqueness of polyhedral with given value of the conditional curvature, International Electronic Journal of Geometry, 2023, Vol. 16, No. 1, pp. 160-170 (Scopus).

22. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. –272 с.

23. Арсланов М.М. Знаменитые математические проблемы. - Казан: Казанский федеральный университет, 2012.

24. Кравцев С.В. и другие Методы решения задач по алгебре: отпростых до самых сложных. -М.: Экзамен, 2001 –544 с.

25. Nouh Hassan Mathematics Function. Translated by: Diab Publishing & Distribution, 2019. –461p. www.Diab-publishing.com

IV. Internet saytlar

26. <http://edu.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi

27. <http://lex.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi

28. <http://lib.bimm.uz> – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi

29. <http://ziyonet.uz> – Ta’lim portali Ziyonet

30. <http://natlib.uz> –Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi

31. <https://problems.ru/> - Matematikadan masalalar.

