

**ГЛАВНЫЙ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЦЕНТР ПЕРЕПОДГОТОВКИ И  
ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ И УПРАВЛЕНЧЕСКИХ  
КАДРОВ СИСТЕМЫ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ПРИ МИНИСТЕРСТВЕ  
ВЫСШЕГО СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ОТРАСЛЕВОЙ ЦЕНТР ПЕРЕПОДГОТОВКИ И ПОВЫШЕНИЯ  
КВАЛИФИКАЦИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ КАДРОВ ПРИ ТАШКЕНТСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

**“УТВЕРЖДАЮ”**

Директор отраслевого центра  
переподготовки и повышения  
квалификации педагогических  
кадров при ТГТУ Н.Э.Авезов

“ \_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2015 год

**УЧЕБНО–МЕТОДИЧЕСКОЕ КОМПЛЕКС ПО МОДУЛЮ  
СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ**

**Разработал:** д.т.н., проф. Игамбердиев Х.З.

**ТАШКЕНТ -2015**

## Оглавление

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА .....	3
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ .....	8
Лекция № 1 Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем	8
Лекция № 2 Устойчивость и критерии качества систем управления.....	20
Лекция № 3 Принципы детерминированного синтеза систем управления.....	30
СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ .....	37
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1 ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ .....	37
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2 ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ .....	41
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3 УПРАВЛЯЕМОСТЬ, НАБЛЮДАЕМОСТЬ, ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ.....	44
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ .....	47
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5 АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМ А.М.ЛЯПУНОВА.....	51
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6 СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С РЕГУЛЯТОРОМ СОСТОЯНИЯ .....	57
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	59

## **УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ МОДУЛЯ**

### **Цель модуля «Современная теория управления»:**

Цель изучения дисциплины заключается в формировании у студентов знаний и умений анализа и синтеза систем автоматического управления в терминах метода пространства состояний.

### **Задачи модуля «Современная теория управления»:**

Основными задачами курса являются:

- изучение методов анализа систем автоматического управления;
- изучение методов синтеза систем автоматического управления.

### **ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ЗНАНИЯМ, УМЕНИЮ И НАВЫКАМ**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

#### *1) Знать:*

основные принципы и концепции построения систем автоматического регулирования и управления;

математический аппарат теории автоматического управления;

методы анализа и синтеза систем автоматического регулирования и управления;

основные проблемы и перспективы направления развития теории автоматического регулирования.

#### *2) Уметь:*

составлять математические описания автоматических систем регулирования и управления;

осуществлять анализ устойчивости и качества автоматических систем регулирования и управления;

обоснованно выбирать структуры и схемы автоматического регулирования и управления, осуществлять параметрическую оптимизацию регулирующих и управляющих устройств;

синтезировать законы и алгоритмы оптимального управления объектами.

#### *3) Владеть навыками:*

– построения векторно-матричных моделей объектов и систем управления в непрерывном и дискретном времени;

– использования математического аппарата матричной алгебры для анализа и синтеза систем управления;

– решения практических задач построения современных систем управления с наблюдателями состояния.

– проведения расчетов и моделирования систем автоматического регулирования в пакетах математических программ (Matlab).

### **СВЯЗЬ И ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ С ДРУГИМИ ДИСЦИПЛИНАМИ**

Изучение современной теории управления базируется в основном на учебном материале следующих дисциплин: «Математика» (линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, преобразования Лапласа и Фурье, теория вероятности), «Теория автоматического управления», «Программирование и основы алгоритмизации» (примеры составления и отладка программ), «Общая электротехника и электроника» (переходные процессы в электрических цепях).

**Распределение времени между составляющими модуля: 26 соат**

№	Темы	Учебная нагрузка, час					
		Общие	Итого	Жумладан:			Самостоятельная работа
				Теоритические	Практические	Внеаудиторное	
1.	Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем.	4	2	2			2
2.	Устойчивость и критерии качества систем управления.	6	4	4			2
3.	Принципы детерминированного синтеза систем управления.	4	2	2			2
4.	Векторно-матричные модели систем управления в непрерывном времени	2	2		2		
5.	Векторно-матричные модели систем управления в дискретном времени	2	2		2		
6.	Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость	2	2		2		
7.	Вычислительные алгоритмы формирования векторно-матричных моделей в дискретном времени	2	2		2		
8.	Анализ устойчивости динамических систем на основе теорем А.М.Ляпунова	4	4		4		
9.	Синтез системы управления с регулятором состояния	2	2		2		
10.	Синтез оптимального управления	2	2		2		
	<b>Общие</b>	<b>30</b>	<b>24</b>	<b>8</b>	<b>16</b>	<b>–</b>	<b>6</b>

**СОДЕРЖАНИЕ МОДУЛЯ**

**Содержание теоретического курса**

**1 - Лекция: Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем.**

**План:**

- Введение.
1. Понятие пространства состояний.
  2. Векторно-матричные модели систем управления в непрерывном и дискретном времени.
  3. Решение уравнения состояния в дискретном времени.
  4. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

Вводится понятие пространства состояний и приводятся формы описания динамических систем. Рассматриваются векторно-матричные модели систем управления в непрерывном и дискретном времени. Приводятся алгоритмы решения уравнения состояния в

дискретном времени. Рассматриваются понятия управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости динамических систем.

## **2 - Лекция: Устойчивость и критерии качества систем управления.**

### **План:**

1. Понятие об устойчивости систем управления.
2. Теоремы Ляпунова об устойчивости линейных и нелинейных систем.
3. Оценка качества процессов управления на основе оптимального распределения полюсов системы управления.

Рассматриваются вопросы анализа устойчивости и критерии качества систем управления. Приводятся теоремы Ляпунова об устойчивости линейных и нелинейных систем. Рассматриваются оценки качества процессов управления на основе оптимального распределения полюсов системы управления.

## **3 – Лекция: Принципы детерминированного синтеза систем управления.**

### **План:**

1. Синтез системы управления с регулятором состояния.
2. Синтез оптимального управления.
3. Оценка вектора состояния при случайных возмущениях и наличии помех.

Рассматриваются принципы детерминированного синтеза систем управления. Приводятся алгоритмы синтеза систем управления с регулятором состояния и систем оптимального управления. Анализируются вопросы формирования и построения оценок вектора состояния при случайных возмущениях и наличии помех.

## **СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

### **Практическое занятие №1**

#### **Векторно-матричные модели систем управления в непрерывном времени**

*Задача 1.1.*

*Задача 1.2.*

*Задача 1.3.*

### **Практическое занятие №2**

#### **Векторно-матричные модели систем управления в дискретном времени**

*Задача 2.1.*

*Задача 2.2.*

*Задача 2.3.*

### **Практическое занятие №3**

#### **Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость**

*Задача 3.1.*

### **Практическое занятие №4**

#### **Вычислительные алгоритмы формирования векторно-матричных моделей в дискретном времени**

*Задача 4.1.*

*Задача 4.2.*

### **Практическое занятие №5**

#### **Анализ устойчивости динамических систем на основе теорем А.М.Ляпунова**

*Задача 5.1.*

*Задача 5.2.*

**Практическое занятие №6**  
**Синтез системы управления с регулятором состояния**

**Задача 6.1.**

**Практическое занятие №7**  
**Синтез оптимального управления**

**Задача 7.1.**

**Темы для самостоятельной работы**

1. Динамические и статические системы. Уравнения состояния линейных систем.
2. Передаточные функции и их определение по уравнениям состояния. Передаточные функции линейных систем. Алгоритмы вычисления передаточных функций.
3. Уравнения состояния при соединении систем. Независимые подсистемы. Последовательное соединение. Соединение с обратной связью.
4. Диагональная и жорданова формы. Простые вещественные собственные числа. Простые мнимые собственные числа. Общий случай. Вещественная форма Жордана.
5. Управляемое каноническое представление. Наблюдаемое каноническое представление
6. Преобразование уравнений состояния к диагональной и блочно-диагональной формам. Простые вещественные собственные числа. Простые мнимые собственные числа.
7. Преобразование уравнений состояния к управляемой и наблюдаемой каноническим формам. О возможности преобразования матрицы к форме Фробениуса. Управляемое каноническое представление. Наблюдаемое каноническое представление.
8. Определение уравнений состояния по передаточной функции. Управляемое каноническое представление. Наблюдаемое каноническое представление.
9. Поле фазовых скоростей. Классификация особых точек. Вектор фазовой скорости. Состояния равновесия системы. Декомпозиция пространства состояний.
10. Виды фазовых портретов для систем второго порядка. Фазовые портреты при диагональной (жордановой) форме матрицы. Фазовые портреты при канонической форме фазовой переменной.
11. Решение уравнений состояния. Формула Коши. Решение однородного уравнения. Решение неоднородного уравнения. Свойства переходной матрицы
12. Дискретные модели непрерывных систем. Постановка задачи дискретизации. Формулы перехода к разностным уравнениям.
13. Методы вычисления матричной экспоненты. Точные методы. Приближенные методы.
14. Устойчивость дискретных моделей. Связь с методами численного интегрирования. Условия устойчивости. Устойчивость методов численного интегрирования.
15. Управляемость и наблюдаемость линейных систем. Критерии управляемости. Критерии наблюдаемости. Теорема дуальности.
16. Оценивание состояния объекта и возмущений.
17. Наблюдатели состояния. Наблюдатели пониженного порядка. Оценивание возмущений.
18. Синтез модальных и терминальных регуляторов. Модальное управление по выходу объекта. Теорема разделения. Терминальное управление.
19. Особенности процессов в нелинейных системах. Предельные циклы. Автоколебания. Состояния равновесия. Пересечение траекторий. Скользящие режимы. Влияние внешних воздействий
20. Методы исследования нелинейных систем. Методы фазового пространства. Метод фазовой плоскости. Метод точечных отображений. Условия существования предельных циклов для систем второго порядка.
21. Метод функций Ляпунова. Основные определения. Устойчивость множеств и частичная устойчивость. Функции Ляпунова. Устойчивость непрерывных систем. Устойчивость дискретных систем.
22. Методы теории абсолютной устойчивости. Задача абсолютной устойчивости. Круговой критерий. Критерий В.М. Попова.

23. Исследование скользящих режимов. Метод эквивалентного управления. Понятие о скользящих режимах. Определение движения в скользящем режиме.
24. Методы адаптивного управления. Структура адаптивных систем управления. Методика решения задач адаптивного управления.
25. Управление синхронизацией систем на основе адаптивных наблюдателей. Идея управляемой синхронизации. Постановка задачи и схема решения. Условия адаптивной синхронизации. Передача сообщений с использованием систем Чуа.

#### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
2. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / Пер. с англ. Под ред. Я.З.Цыпкина. –М.: Наука. 1985. – 296 с.
3. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
5. Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Линейные системы автоматического регулирования: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. -264 с.
6. К.Ю.Поляков. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2008. - 80 с.

#### **Источники Интернета:**

1. [www.labview.ru](http://www.labview.ru)
2. [www.matlab.com](http://www.matlab.com)
3. [www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)
4. [www.edu.uz](http://www.edu.uz)

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

### Лекция № 1 Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем

#### План:

1. Введение.
2. Понятие пространства состояний.
3. Векторно-матричные модели систем управления в непрерывном и дискретном времени.
4. Решение уравнения состояния в дискретном времени.
5. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

**Аннотация.** Вводится понятие пространства состояний и приводятся формы описания динамических систем. Рассматриваются векторно-матричные модели систем управления в непрерывном и дискретном времени. Приводятся алгоритмы решения уравнения состояния в дискретном времени. Рассматриваются понятия управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости динамических систем.

**Ключевые слова:** система управления, пространство состояний, векторно-матричные модели, управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

#### 1. Введение

До пятидесятих годов XX века классической *теорией автоматического регулирования* (ТАР) было принято называть базирующуюся на рассмотрении линейных дифференциальных уравнений теорию устойчивости и качества процессов в системе объект - регулятор. Основы этой теории были заложены И.А. Вышнеградским и Дж. Максвеллом. По существу она тесно соприкасалась с теорией устойчивости «в малом» А.М. Ляпунова, но имела ярко выраженную инженерную направленность.

Под влиянием потребностей автоматизации управления технологическими процессами и движущимися объектами в сороковых и пятидесятих годах прошлого века интенсивно развивалась *теория автоматического управления* (ТАУ). Она впитала существующие в то время методы теории связи теории колебаний и создала собственные методы анализа и синтеза систем с обратной связью. Эта прикладная теория автоматического управления именовалась в то время *современной*. Получив во многом завершённые формы, она составила предмет учебных дисциплин технических вузов, многочисленных учебников и учебных пособий. До настоящего времени она является основным инструментом предварительного анализа и синтеза локальных систем стабилизации на стадии их проектирования.

В рамках этой инженерной теории использовались методы, основанные на частотном анализе, алгебре передаточных функций, преобразовании Лапласа. Задача управления технологическими процессами и движущимися объектами решалась в «малом».

Таким образом, предметом этой теории для сложных объектов являлось решения множества частных задач на каждом этапе или режиме технологического процесса и движущегося объекта. Увязка всех этих частных задач для достижения конечной цели управления производилась на стадии проектирования системы на основе априорной информации с помощью методов, внешних по отношению к данной теории.

В конце пятидесятих - начале шестидесятих годов, когда Л.С. Понтрягиным была создана математическая теория оптимальных процессов, Р. Беллман предложил метод динамического программирования, а Р. Калман разработал общую теорию фильтрации и управления, были заложены основы *современной теории автоматического управления*. (СТАУ)



Основным характерными признаками СТАУ является описание процессов в *пространстве состояний* и применения для решения задач анализа и синтеза систем *методов пространства состояний*.

В курсе лекций рассматриваются следующие вопросы:

Понятие пространства состояний и формы описания динамических систем. Понятие пространства состояний. Векторно-матричные модели систем управления в непрерывном и дискретном времени. Решение уравнения состояния в дискретном времени. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

Устойчивость и критерии качества систем управления. Понятие об устойчивости систем управления. Теоремы Ляпунова об устойчивости линейных и нелинейных систем. Оптимальное распределение полюсов системы управления.

Принципы детерминированного синтеза систем управления. Синтез системы управления с регулятором состояния. Синтез оптимального управления. Оценка вектора состояния при случайных возмущениях и наличии помех.

1. Цель преподавания дисциплины. Курс имеет целью изучение современных методов теории пространства состояния для решения задач анализа и синтеза систем автоматического управления.

2. Задачи изучения курса

Основными задачами курса являются:

формирование навыков построения векторно-матричных моделей объектов и систем управления в непрерывном и дискретном времени;

формирование устойчивого представления об использовании математического аппарата матричной алгебры для анализа и синтеза систем управления;

формирования навыков решения практических задач построения современных систем управления с наблюдателями состояния.

3. Перечень дисциплин, усвоение которых необходимо для изучения курса.

а) высшая математика – дифференциальное, интегральное и операционное исчисление, матрицы, функции от матриц, матричная алгебра, теория дифференциальных уравнений.

б) теория автоматического управления (классическая) - принципы построения и элементный состав систем автоматического управления, преобразование Лапласа, передаточные функции, графы и структурные схемы.

в) основы теории систем – методы математического описания и синтеза систем.

4. Общая характеристика и рекомендации по изучению материала

Материал курса «Современная теория управления» посвящен теоретическим и практическим вопросам изучения и применения методов пространства состояния для конструирования и изучения систем автоматического управления динамическими объектами на уровне их векторно-матричных моделей в непрерывном и дискретном времени.

Теоретическая часть курса дает представление о методах и алгоритмах анализа и синтеза систем управления с использованием современной теории пространства состояния.

Изучение практических вопросов предлагаемого материала позволяет сформировать начальные навыки по построению и использованию векторно-матричных моделей динамических систем в задачах автоматического управления.

**2. Понятие пространства состояний.**

Современная теория автоматического управления оперирует с векторно-матричными моделями динамических систем. При этом рассматриваются в общем случае многомерные системы (рис.1.1.), т.е. системы произвольного порядка со многими входами и многими выходами, в связи, с чем широко используются векторно-матричные уравнения и аппарат векторной алгебры.

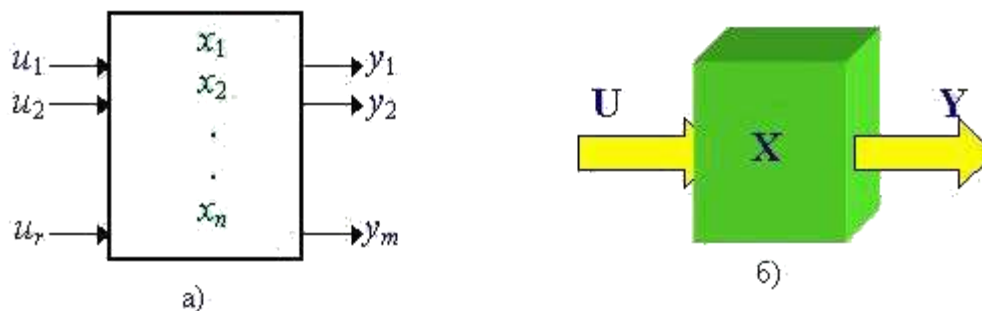


Рис.1.1. Скалярное (а) и векторное (б) представления динамической системы.

Все переменные, характеризующие систему, можно разделить на три группы.

1. *Входные переменные* или входные воздействия, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемой системе. Они характеризуются вектором входа.

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_r], \quad r - \text{число входов}$$

2. *Выходные переменные*, характеризующие реакцию системы на указанные входные воздействия. Представляются вектором выхода

$$y^T = [y_1, y_2, \dots, y_m], \quad m - \text{число выходов.}$$

3. *Промежуточные переменные*, характеризующие внутреннее состояние системы, - *переменные состояния*, представляются вектором

$$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n], \quad n - \text{число переменных состояния.}$$

Таким образом, совокупность входов можно рассматривать как один обобщенный вход, на который воздействует вектор входа  $u$ , совокупность выходов как вектор  $y$ , а совокупность промежуточных координат, характеризующих состояние системы, – в виде вектора состояния  $x$  (рис. 1.1., б).

*Состояние системы* – это та минимальная информация о прошлом, которая необходима для полного описания будущего поведения (т.е. выходов) системы, если поведение ее входов известно.

Собственно система, ее входы и выходы – это три взаимосвязанных объекта, которые в каждой конкретной ситуации определяются соответственно математической моделью системы, заданием множеств входных и выходных переменных. Иначе говоря, описание систем в пространстве состояний производится в терминах «вход–состояние–выход».

Заметим, что в классической теории автоматического управления описание систем производится в терминах «вход–выход» посредством, например, передаточной функции.

Векторно-матричные модели в непрерывном времени. В общем случае динамическая система в непрерывном может быть описана парой матричных уравнений:

$$\dot{x}(t) = F[x(t), u(t), t], \quad (1.1)$$

$$y(t) = Q[x(t), u(t), t], \quad (1.2)$$

где  $F$  –  $n$  – мерная вектор-функция системы;  $Q$  –  $m$  – мерная вектор-функция выхода.

Матричное уравнение (1.1) называют *уравнением состояния* системы.

Его решение, удовлетворяющее начальному условию  $x_0 = x(t_0)$ , дает вектор состояния системы

$$x(t) = \Psi[x(t_0), u(t), t]. \quad (1.3)$$

Матричное уравнение (1.2), определяющее выходные переменные в зависимости от  $x(t)$  и  $u(t)$ , называют *уравнением выхода*.

В частном случае зависимости  $F_i (i=1, \dots, n)$ ,  $Q_k (k=1, \dots, m)$  могут быть линейными комбинациями переменных состояния  $x_i$  и входных переменных  $u_q$ . При этом динамическая система описывается в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (1.4)$$

$$y = C(t)x + D(t)u, \quad (1.5)$$

Переход к стационарным моделям позволяет оперировать с коэффициентными матрицами, т.е. со стационарными уравнениями

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.6)$$

$$y = Cx + Du, \quad (1.7)$$

где:

$A$  – функциональная матрица размером  $n \times n$ , называемая *матрицей состояния системы* (объекта);

$B$  – функциональная матрица размером  $n \times r$ , называемая *матрицей управления* (входа);

$C$  – функциональная матрица размером  $m \times n$ , называемая *матрицей выхода по состоянию*;

$D$  – функциональная матрица размером  $m \times r$ , называемая *матрицей выхода по управлению*.

Очень часто  $D=0$ , т.е. выход непосредственно не зависит от входа.

В дальнейшем под векторно-матричной моделью объекта (системы) будем понимать описание ее динамического поведения в классе стационарных непрерывных линейных систем, представленное в виде уравнений (1.6), (1.7).

Таким образом, ВММ имеет единую форму представления, что значительно облегчает алгоритмизацию и компьютерную реализацию проектных процедур и проектных операций структурно-параметрического синтеза и анализа систем управления. Однако с использованием ВММ может быть получено лишь приближенное проектное решение, которое потребует дальнейшего уточнения, так как такие модели отображают динамическое поведение реального объекта лишь в классе стационарных линейных систем.

Построение ВММ реального объекта сопряжено с проблемами линеаризации исходного математического описания и приведения его к структурированному виду – форме Коши.

Если мы знаем физическое описание системы и можем записать уравнения, описывающие поведения ее отдельных частей, то получить уравнения состояния системы обычно сравнительно не трудно.

### **3. Векторно-матричные модели систем управления в дискретном времени.**

Широкое применение в теории и практике автоматического управления цифровых управляющих устройств и систем управления с ЭВМ обуславливает необходимость рассмотрения вопросов построения ВММ непрерывных объектов в дискретном времени.

Цифровые системы управления содержат как непрерывные, так и квантованные или дискретные сигналы. Наличие сигналов различного типа затрудняет описание динамического поведения системы. Однако часто можно ограничиться описанием поведения системы в моменты квантования. В этом случае сигналы выделяются только в дискретные моменты времени. Такие системы называют системами дискретного времени, они оперируют с последовательностями чисел, и, следовательно, для их описания естественно использовать разностные уравнения.

Проблема заключается в нахождении способа описания непрерывной динамической системы, связанной с ЭВМ посредством аналого-цифрового (АЦП) и цифро-аналогового (ЦАП) преобразователей. Рассмотрим схему, показанную на рис.1.2. Сигналы в ЭВМ представляют собой последовательности  $\{u(t_k)\}$  и  $\{y(t_k)\}$ , необходимо определить зависимости между ними.

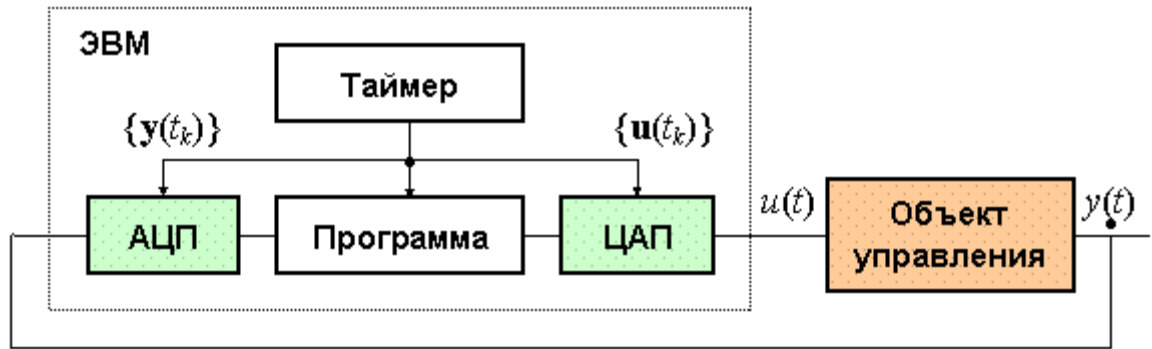


Рис.1.2. Принципиальная схема цифровой системы управления

Построение дискретного эквивалента непрерывной системы называется *квантованием непрерывной системы*.

В дальнейшем будем считать, что непрерывная система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

Наиболее распространенная ситуация в цифровом управлении состоит в том, что АЦП сохраняет уровень аналогового сигнала постоянным до тех пор, пока не потребуется новое преобразование

Так как управляющий сигнал прерывист, необходимо установить его поведение в точках разрыва. Допустим, что сигнал непрерывен справа и представляется дискретным процессом

$$\{u(t_k) : k = 1, 0, 1, \dots\}. \quad (1.8)$$

Определим связь между переменными системы в моменты квантования. При заданном состоянии в момент квантования  $t_k$  состояние в некоторый момент  $t$  можно получить, решив систему (1.8).

Первому уравнению системы (1.8) соответствует однородное уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (1.9)$$

решение которого равно

$$x(t) = e^{A(t-t_k)} x(t_k). \quad (1.10)$$

Обозначим  $e^{A(t-t_k)} = \Phi(t-t_k)$ , тогда решение уравнения можно представить как

$$x(t) = \Phi(t-t_k) x(t_k). \quad (1.11)$$

Допустим, что решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x(t) = e^{A(t-t_k)} C_1(t) = \Phi(t-t_k) C_1(t). \quad (1.12)$$

Дифференцируя (2.4) по  $t$ , получим

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \Phi(t-t_k) \dot{C}_1(t). \quad (1.13)$$

Сравнение первого уравнения системы (1.8) и уравнения (1.13) позволяет получить следующее соотношение:

$$\Phi(t-t_k) \dot{C}_1(t) = Bu(t), \quad (1.14)$$

откуда

$$C_1(t) = \int_{t_k}^t \Phi^{-1}(s-t_k) Bu(s) ds + C_2. \quad (1.15)$$

Подставим (1.15) в (1.12), тогда

$$x(t) = \Phi(t-t_k) C_2 + \int_{t_k}^t \Phi(t-s) Bu(s) ds. \quad (1.16)$$

Здесь учтено, что

$$\Phi(t-t_k)\Phi^{-1}(s-t_k) = e^{A(t-t_k)}e^{-A(s-t_k)} = e^{A(t-s)} = \Phi(t-s).$$

Вектор  $C_2$  определяется по начальным условиям. При  $t = t_k$

$$x(t_k) = \Phi(0)C_2 = C_2.$$

Таким образом,

$$x(t) = \Phi(t-t_k)x(t_k) + \int_{t_1}^t \Phi(t-s)Bu(s)ds. \quad (1.17)$$

На основании решения (1.9) определим состояние и выход системы в следующий момент квантования  $t_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= \Phi(t_k, t_{k+1})x(t_k) + \Gamma(t_k, t_{k+1})u(t_k), \\ y(t_k) &= Cx(t_k) + Du(t_k), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(t_k, t_{k+1}) &= e^{A(t_{k+1}-t_k)}, \\ \Gamma(t_k, t_{k+1}) &= \int_0^{At_k} e^{As} B ds. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Заметим, что характеристики системы между моментами ее квантования дают представление о реакции системы на ступенчатые воздействия с начальными условиями. Это означает, что между моментами квантования система функционирует как разомкнутая.

Для периодического квантования с периодом  $T, t_k = kT$ , модель (1.18) сводится к стационарной системе, которую будем рассматривать в дальнейшем. Для простоты записи примем  $T = 1$ , тогда

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\Phi = e^{AT}; \quad \Gamma = \int_0^T e^{As} B ds. \quad (1.21)$$

Если матрица  $A$  не особая, то возможна запись

$$\Gamma = A^{-1} [e^{AT} - I] B, \quad (1.22)$$

где  $I$  – единичная матрица.

Таким образом, для получения ВММ непрерывной системы в дискретном времени требуется вычислить матричную экспоненту и проинтегрировать ее.

Вначале рассмотрим простейший случай. Используя разложение матричной экспоненты в ряд, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!}, \\ \Gamma &= A^{-1} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!} - I \right) B. \end{aligned} \quad (1.23)$$

При  $i = 1$  выражения (2.15) принимают вид

$$\Phi = I + AT, \quad \Gamma = BT. \quad (1.24)$$

По существу такая аппроксимация совпадает с простейшим методом решения дифференциальных уравнений по Эйлерау.

Модель (1.24) будем называть *дискретной моделью по Эйлерау*.

Более точное нахождение матриц  $\Phi$  и  $\Gamma$  может быть осуществлено различными способами, в том числе такими, как:

- разложение матричной экспоненты в ряд;
- применение преобразования Лапласа

$$L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}, \quad (1.25)$$

использование теоремы Гамильтона - Кэли.

#### 4. Решение уравнения состояния в дискретном времени.

Здесь мы рассмотрим вопросы анализа специфических свойств объектов и систем управления, представленных векторно-матричными моделями в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \quad (1.26)$$

моделями типа «вход – выход»

$$A(s)y(s) = B(s)u(s), \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned} A(s) &= a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n, \\ B(s) &= b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m. \end{aligned}$$

а также векторно-матричными моделями в дискретном времени

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Полную картину динамического поведения объектов и систем управления, как в непрерывном, так и в дискретном времени можно оценить по результатам решения уравнений состояния (1.26) или (1.28).

Общее решение уравнений состояния в непрерывном времени было выполнено при рассмотрении алгоритмов вычисления матриц состояния ( $\Phi$ ) и управления ( $\Gamma$ ) векторно-матричной модели непрерывного объекта в дискретном времени.

Дискретная стационарная система может быть описана разностными уравнениями (1.28), если значение периода квантования для простоты записи предварительно принято равным  $T = 1$ .

Предположим, что известны начальный вектор  $x(k_0)$  и входные сигналы:  $u(k_0)$ ,  $u(k_0 + 1)$ ,  $u(k_0 + 2)$ , ...

Систему уравнений (4.3) можно решить просто, выполнив следующие итерации:

$$\begin{aligned} x(k_0 + 1) &= \Phi x(k_0) + \Gamma u(k_0), \\ x(k_0 + 2) &= \Phi x(k_0 + 1) + \Gamma u(k_0 + 1) = \Phi^2 x(k_0) + \Phi \Gamma u(k_0) + \Gamma u(k_0 + 1), \\ x(k_0 + 3) &= \Phi x(k_0 + 2) + \Gamma u(k_0 + 2) = \Phi^3 x(k_0) + \Phi^2 \Gamma u(k_0) + \Phi \Gamma u(k_0 + 1) + \Gamma u(k_0 + 2), \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

или для любого значения  $k$  имеем

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \Phi^{k-k_0-1} \Gamma u(k_0) + \dots + \Gamma u(k-1) = \Phi^{k-k_0} x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j), \\ y(k) &= \Phi^{k-k_0} C x(k_0) + C \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u(j) + Du(k). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Полученное решение (1.29) состоит из двух частей: одна зависит от начальных условий, другая является взвешенной суммой входных сигналов.



Объект называется *идентифицируемым*, если по измерениям координат состояния объекта можно определить матрицу системы  $\Phi$ .

$$\begin{aligned}x(1) &= \Phi x(0), \\x(2) &= \Phi^2 x(0), \\&\dots\dots\dots \\x(n) &= \Phi^n x(0),\end{aligned}$$

или

$$[x(1):x(2):\dots:x(n)] = A[x(0):\Phi x(0):\dots:\Phi^{n-1}x(0)]. \quad (1.33)$$

Так как векторы  $x$  известны, единственное решение для  $A$  существует только тогда, когда матрица

$$[x(0):\Phi x(0):\dots:\Phi^{n-1}x(0)],$$

имеет ранг  $n$ .

В литературе можно найти более детальное рассмотрение этих понятий. Так например, различают управляемость по состоянию и по выходу, полную и общую, сильную и слабую. Наблюдаемость может быть полной и общей.

### Контрольные вопросы к лекции № 1

1. Какие переменные при построении математического описания системы принято называть

- a) входными переменными;
- b) выходными переменными;
- c) переменными состояния?

2. Математическое описание объекта с одним входом и одним выходом представлено структурной схемой, содержащей  $q$  элементов, представленных передаточной функцией общего вида

$$H_i(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_p s^p}{a_0 + a_1s + \dots + a_r s^r}$$

Как в этом случае можно определить размерность пространства состояния  $N_\Sigma$  для описания этого объекта?

3. Математическое описание объекта с двумя входами  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и одним выходом  $y(t)$  представлено следующим уравнением в операторной форме

$$Y(s) = \frac{1}{1 + T_1s + T_1T_2s^2} U_1(s) + \frac{1 + T_2s}{1 + T_1s + T_1T_2s^2} U_2(s)$$

Какова в этом случае будет размерность пространства состояния  $n$  для описания этого объекта?

4. Выберите из приведенных ниже записей возможные формы представления *уравнения состояния* для непрерывных систем.

- a)  $\dot{x}(t) = F[x(t), u(t), t]$ ;      b)  $y = Cx + Du$ ;
- c)  $y(t) = Q[x(t), u(t), t]$       d)  $y = C(t)x + D(t)u$ ;
- e)  $\dot{x} = Ax + Bu$ ;      f)  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ;
- g)  $L\dot{x} = Qx + Ru$ .

5. Объект управления имеет  $r$  – входов,  $m$  – выходов, его математическое описание в непрерывном времени содержит  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка. Какова в этом случае будет размерность *матрицы состояния*?



6. Сформируйте векторно-матричную модель фильтра, электрическая схема которого представлена на рис. 1.3.

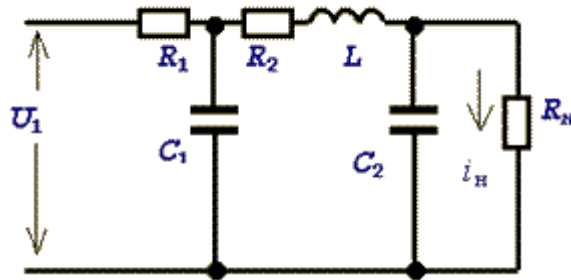


Рис. 1.3. Схема фильтра к заданию

Здесь следует учесть, что

- объект имеет один вход –  $U_1$  один выход –  $i_H$ ;
- все параметры электрической схемы  $R_1, R_2, L, C_1, C_2, R_H$  известны и являются постоянными;
- могут быть использованы следующие обозначения  $T_1 = R_1 C_1$ ;  $T_2 = \frac{L}{R_2}$ ;  $T_3 = R_H C_2$ .

7. При составлении математического описания динамических процессов в упругом электромеханическом объекте, включающем в себя электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения ( $\Phi = const$ ) и механизм, модель которого представляется двух массовой системой, могут быть использованы следующие переменные:

- $i_y$  – ток электродвигателя,
- $\Omega_1$  – скорость вращения электродвигателя,
- $M_y$  – упругий момент механизма,
- $\Omega_2$  – скорость вращения механизма,
- $\varphi$  – угол поворота ротора электродвигателя,
- $l$  – линейное перемещение механизма.

Какие из этих переменных, и в какой последовательности включены в состав вектора состояния  $x^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$  приведенной ниже векторно-матричной модели?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 & -27,7 & 0 & 0 \\ 18,4 & 0 & -22,2 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 9,62 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1048 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u;$$

$$y = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

8. Запишите дискретную модель по Эйлера для непрерывного объекта представленного следующей векторно-матричной моделью в непрерывном времени

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1,2 \\ -0,2 & -0,3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

9. Для непрерывного объекта, представленного на рис.1.4 в виде структурной схемы, определите внутреннее содержание матриц  $\Phi, \Gamma, C$  векторно-матричной модели в дискретном времени с периодом квантования  $T$ .

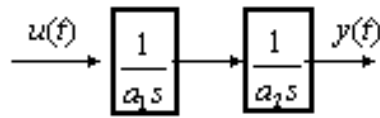


Рис.1.4. Структурная схема объекта

10. Непрерывный объект в дискретном времени с периодом квантования  $T$  представлен векторно-матричной моделью следующего вида

$$\mathbf{x}(kT+T) = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \mathbf{x}(kT) + \begin{bmatrix} 1 - \cos T \\ \sin T \end{bmatrix} u(kT).$$

Запишите уравнение состояния этого объекта в непрерывном времени.

11. Для построения дискретной модели непрерывного объекта 5-го порядка используется алгоритм вычисления матричной экспоненты с помощью степенного ряда 25 степени ( $i=0, 1, \dots, 25$ ). Какую максимальную степень ( $k$ ) матрицы  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}^k$ ) при этом необходимо вычислить?

12. Укажите основной недостаток алгоритма вычисления матричной экспоненты с помощью степенного ряда.

13. Назовите главное достоинство символьно-численного алгоритма формирования дискретной векторно-матричной модели.

14. При каких условиях для вычисления матрицы состояния  $\Phi$  дискретной ВММ с помощью символьно-численного алгоритма дважды используются одинаковые матричные коэффициенты, т.е.  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k+1}$ .

15. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T & (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{A}\mathbf{C} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{C} \\ \dots \\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{C} \end{bmatrix},$$

определите состояние  $\mathbf{x}(2)$ ?

16. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad u(k) = 0.5k + 1.$$

Определите такую управляющую последовательность, что

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

17. Для каких систем понятия достижимости и управляемости эквивалентны?

18. Система представлена следующей ВММ в дискретном времени

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.25 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k); \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Оцените достижимость, наблюдаемость и управляемость этой системы.

19. Какие свойства и характеристики системы изменятся после преобразования ее векторно-матричной модели к новому координатному базису  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  с помощью невырожденной матрицы  $\mathbf{T}$ .

20. Допустим, что нам необходимо привести ВММ непрерывной системы с одним входом и одним выходом

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

$$y = \mathbf{Cx}.$$

к канонической форме управляемости. Предварительно определены коэффициенты характеристического уравнения системы и матрица преобразования  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1}$ . Для вычисления какой матрицы преобразованной системы будет использована матрица  $\mathbf{Q}$ .

21. Допустим, что нам необходимо привести ВММ непрерывной системы с одним входом и одним выходом

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

$$y = \mathbf{Cx}.$$

к канонической форме наблюдаемости. Предварительно определены коэффициенты характеристического уравнения системы и матрица преобразования  $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1}$ . Для вычисления какой матрицы преобразованной системы будет использована матрица  $\mathbf{Q}$ .

22. Какова будет матрица наблюдаемости непрерывной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u,$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \cdot \mathbf{x}$$

### Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
2. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / Пер. с англ. Под ред. Я.З.Цыпкина. -М.: Наука. 1985. - 296 с.
3. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. - 832 с.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
5. Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Линейные системы автоматического регулирования: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. -264 с.
6. К.Ю.Поляков. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2008. - 80 с.

## Лекция № 2 Устойчивость и критерии качества систем управления.

### План:

1. Понятие об устойчивости систем управления.
2. Теоремы Ляпунова об устойчивости линейных и нелинейных систем.
3. Оценка качества процессов управления на основе оптимального распределения полюсов системы управления.

**Аннотация.** Рассматриваются вопросы анализа устойчивости и критерии качества систем управления. Приводятся теоремы Ляпунова об устойчивости линейных и нелинейных систем. Рассматриваются оценки качества процессов управления на основе оптимального распределения полюсов системы управления.

**Ключевые слова:** устойчивость систем управления, теоремы Ляпунова, оценка качества процессов управления, оптимальное распределение полюсов систем управления.

### 1. Понятие об устойчивости систем управления.

Понятие устойчивости системы регулирования связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния.

Понятие устойчивости можно распространить и на случай движения некоторой системы. Пусть ее состояние определяется независимыми координатами  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Заданное движение системы определяется некоторым законом изменения координат:  $x_{10}(t), x_{20}(t), \dots, x_{n0}(t)$ .

Аналогично случаю равновесия положение заданное движение можно назвать *невозмущенным движением*. Приложение внешних сил к рассматриваемой системе вызовет отклонение действительного движения от заданного:  $x_1(t) \neq x_{10}(t)$ ,  $x_2(t) \neq x_{20}(t)$  и т. д.

Это движение будет *возмущенным*.

Заданное невозмущенное движение будет устойчивым, если в результате приложения внешних сил, которые затем снимаются, возмущенное движение по истечении некоторого времени войдет в заданную область:

$$|x_i(t) - x_{i0}(t)| \leq \varepsilon_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим вопрос устойчивости более подробно. Пусть система регулирования описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в форме Коши

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

Если при  $t = t_n$  заданы начальные значения  $x_{i0} (i = 1, 2, \dots, n)$ , то решение может быть представлено в виде  $x_i = x_i(x_{10}, \dots, x_{n0})$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть установившиеся процессы в системе характеризуются координатами  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ . Введем также отклонения координат  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), характеризующие отклонения процесса от установившегося.

Систему уравнений (2.1) перепишем для отклонений:

$$\frac{d\Delta x_i}{dt} = f_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n), \quad (2.2)$$

где  $f_i$  – некоторые нелинейные функции. Эти уравнения называются уравнениями возмущенного движения. Их тривиальные решения  $\Delta x_i^0 = 0$  соответствуют невозмущенному движению, так как при этом  $x_i = x_i^0$ .

Начальные значения отклонений  $\Delta x_{i0}$  носят название *возмущений*. Решение системы (2.2) для некоторых начальных отклонений  $\Delta x_i = \Delta x_i(\Delta x_{10}, \dots, \Delta x_{n0}, t)$  представляет собой возмущенное движение.

А. М. Ляпунов дал следующее определение устойчивости.

Невозмущенное движение (при  $\Delta x_i^0 = 0$ ) называется устойчивым по отношению к переменным  $x_i$ , если при всяком заданном положительном числе  $A^2$ , как бы мало оно ни было, можно выбрать другое положительное число  $\lambda^2(A^2)$  так, что для всех возмущений  $\Delta x_{i0}$ , удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=0}^n \mu_i^2 \Delta x_{i0}^2 \leq \lambda^2, \quad (2.3)$$

возмущенное движение (2.2) будет для времени  $t \geq T$  удовлетворять неравенству

$$\sum_{i=0}^n \mu_i^2 \Delta x_i^2 \leq A^2. \quad (2.4)$$

Здесь  $\mu_i$  – некоторые весовые коэффициенты, необходимые для уравнивания физических размерностей величин  $\Delta x_i$ .

Геометрическая интерпретация этого условия заключается в следующем. В пространстве координат  $\mu_i \Delta x_i$  построим две сферы с радиусами  $\lambda$  и  $A$ . Система будет устойчивой, если при возмущениях, не выведших изображающую точку  $M(\Delta x_{10}, \dots, \Delta x_{n0})$  из пределов сферы  $\lambda$ , возмущенное движение будет таково, что, начиная с некоторого времени  $t \geq T$ , изображающая точка  $M(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$  будет в пределах сферы  $A$ .

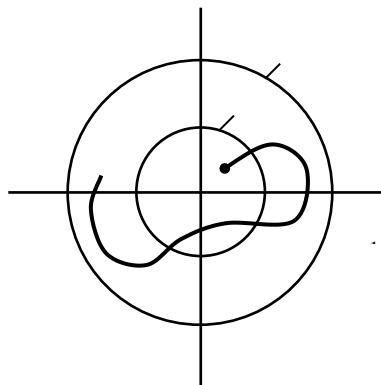


Рис. 2.1.

Если с течением времени изображающая точка стремится к началу координат, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то система асимптотически устойчива.

Перейдем теперь к вопросу устойчивости линейных, а точнее, линеаризованных систем регулирования.

Рассмотрим дифференциальное уравнение движения линеаризованной системы автоматического регулирования, записанное для регулируемой величины  $y(t)$  при наличии задающего воздействия  $g(t)$  и при равенстве нулю возмущающих воздействий:

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) g(t). \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $a_0, \dots, a_n$  и  $b_0, \dots, b_m$  представляют собой постоянные величины, а оператор  $p = \frac{d}{dt}$ .

Процесс регулирования определяется решением дифференциального уравнения как сумма двух решений – частного решения неоднородного уравнения (2.5) с правой частью и общего решения уравнения (2.5) без правой части, т. е. с правой частью, равной нулю:

$$y(t) = y_{\text{частн}}(t) + y_{\text{общ}}(t), \quad (2.6)$$

в случае  $y_{\text{частн}}(t) = \text{const}$  это будет установившееся значение. Первое слагаемое (2.6) называют также вынужденным решением  $y_{\text{в}}(t)$ , а второе слагаемое – переходной составляющей  $y_n(t)$ . Тогда формула (2.6) может быть записана в виде

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + y_n(t).$$

Система будет называться устойчивой, если с течением времени при  $t \rightarrow \infty$  переходная составляющая будет стремиться к нулю:  $y_n(t) \rightarrow 0$ . Найдем эту составляющую из (2.5). Для этой цели необходимо решить дифференциальное уравнение без правой части

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0. \quad (2.7)$$

Общее решение ищется в виде

$$y_n(t) = y_{\text{общ}}(t) = Ce^{\delta t}.$$

Дифференцируя это выражение  $n$  раз и подставляя в (2.7), получаем после сокращения на общий множитель  $Ce^{\delta t}$

$$a_0 \delta^n + a_1 \delta^{n-1} + \dots + a_{n-1} \delta + a_n = 0. \quad (2.8)$$

Полученное алгебраическое уравнение называется характеристическим. Корни его  $\delta_1, \dots, \delta_n$  будут определять характер переходного процесса в системе. Нетрудно заметить, что по своему виду левая часть (2.8) полностью совпадает с левой частью (2.5). Поэтому характеристическое уравнение получается приравниванием левой части (2.5) нулю:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (2.9)$$

Однако здесь буква  $p = \delta$  означает уже не символ дифференцирования, а некоторое комплексное число, которое является решением (корнем) характеристического уравнения.

Так как в решении характеристического уравнения содержится  $n$  корней, то переходная составляющая может быть записана в виде

$$y_n(p) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (2.10)$$

где  $p_1, \dots, p_n$  – корни характеристического уравнения,  $C_1, \dots, C_n$  – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Корни могут быть вещественными, комплексными и чисто мнимыми.

Следовательно, для затухания переходного процесса необходимо, чтобы вещественные части корней были отрицательными. Это относится как к вещественным, так и к комплексным корням. Если хотя бы один корень характеристического уравнения будет иметь положительную вещественную часть, то переходный процесс в целом будет расходиться, т. е. система окажется неустойчивой.

## **2. Теоремы Ляпунова об устойчивости линейных и нелинейных систем.**

Приведем теоремы Ляпунова об устойчивости линейной системы.

1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то реальная система будет также устойчивой, т. е. малые нелинейные члены не могут в этом случае нарушить устойчивость системы.
2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один

корень с положительной вещественной частью, то реальная система будет также неустойчивой, т. е. малые нелинейные члены не могут сделать ее устойчивой.

3. При наличии нулевых и чисто мнимых корней поведение реальной системы не всегда даже качественно определяется ее линеаризованными уравнениями. При этом даже малые нелинейные члены могут коренным образом изменить вид переходного процесса, сделав систему устойчивой или неустойчивой.

Теоремы прямого метода Ляпунова. Предварительно заметим, что при изложении прямого метода Ляпунова, именуемого также второй методой Ляпунова, будем пользоваться дифференциальными уравнениями автоматической системы в форме уравнений первого порядка, полагая, что они записаны для переходного процесса в отклонениях всех переменных от их значений в установившемся процессе при новых постоянных значениях возмущающего  $f = f^0$  и задающего  $g = g^0$  воздействий. Следовательно, эти уравнения для нелинейной системы  $n$ -го порядка будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \right\}, \quad (2.11)$$

где функции  $X_1, X_2, \dots, X_n$  произвольны и содержат любого вида нелинейности, но всегда удовлетворяют условию

$$X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0 \text{ при } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (2.12)$$

так как в установившемся состоянии все отклонения переменных и их производные равны, очевидно, нулю по самому определению понятия этих отклонений.

Нам понадобятся в дальнейшем еще следующие сведения.

Понятие о знакоопределенных, знакопостоянных и знакопеременных функциях. Пусть имеется функция нескольких переменных

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Представим себе  $n$ -мерное фазовое пространство, в котором  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  являются прямоугольными координатами (это будут, в частности, фазовая плоскость при  $n = 2$  и обычное трехмерное пространство при  $n = 3$ ). Тогда в каждой точке указанного пространства функция  $V$  будет иметь некоторое определенное значение. Нам понадобятся в дальнейшем функции  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , которые обращаются в нуль в начале координат (т. е. при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ) и непрерывны в некоторой области вокруг него.

Функция  $V$  называется знакоопределенной в некоторой области, если она во всех точках этой области вокруг начала координат сохраняет один

и тот же знак и нигде не обращается в нуль, кроме только самого начала координат.

Функция  $V$  называется знакопостоянной, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Функция  $V$  называется знакопеременной, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Приведем примеры всех трех типов функций  $V$ . Пусть  $n = 2$  и  $V = x_1^2 + x_2^2$ . Это будет знакоопределенная (положительная) функция, так как  $V = 0$  только тогда, когда одновременно  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 0$ , и  $V > 0$  при всех вещественных значениях  $x_1$  и  $x_2$ . Аналогично при любом  $n$  функция  $V = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  будет знакоопределенной положительной, а  $V = -(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$  — знакоопределенной отрицательной.

Если взять функцию  $V = x_1 + x_2$  при  $n = 3$ , то она уже не будет знакоопределенной, так как, оставаясь положительной при любых  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , она может обращаться в нуль не только при  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , но также и при любом значении  $x_3$ , если  $x_1 = x_2 = 0$  (т. е. на всей оси  $x_3$ , рис. 2.1, а). Следовательно, это будет знакопостоянная (положительная) функция.

Наконец, функция  $V = x_1 + x_2$  будет знакопеременной, так как она положительна для всех точек плоскости справа от прямой  $x_1 = -x_2$  (рис. 2.1, б) и отрицательна слева от этой прямой.

Заметим, что в некоторых частных задачах нам понадобится также функция  $V$ , которая обращается в нуль не в начале координат, а на заданном конечном отрезке  $AB$  (рис. 2.1, в). Тогда знакоопределенность функции  $V$  будет обозначать ее неизменный знак и необращение в нуль в некоторой области вокруг этого отрезка.

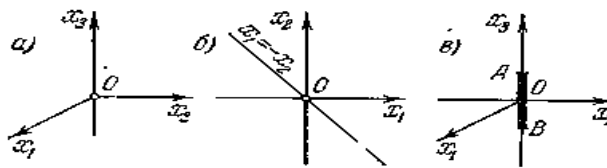


Рис. 2.2.

Функция Ляпунова и ее производная по времени. Любую функцию

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.13)$$

тождественно обращающуюся в нуль при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , будем называть функцией Ляпунова, если в ней в качестве величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  взяты те отклонения переменных системы регулирования в переходном процессе

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \dots, \quad x_n = x_n(t),$$

в которых записываются уравнения (2.11) для этой системы.

Производная от функции Ляпунова по времени, так же как и сама  $V$ , является некоторой функцией отклонений, т. е.

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.14)$$

причем согласно свойству (2.12) эта функция  $W$ , так же как и сама  $V$ , тождественно обращается в нуль при  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Поэтому к ней в одинаковой степени можно применять все те же понятия знакоопределенности, знакопостоянства и знакопеременности в некоторой области вокруг начала координат, о которых говорилось выше по отношению к функции  $V$ .

Устойчивость системы при любых больших начальных отклонениях называется коротко устойчивостью в целом.

Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем. Теорема формулируется следующим образом: если при заданных в форме (2.11) уравнениях системы  $n$ -го порядка можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , чтобы ее производная по времени  $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку  $V$ , то данная система устойчива. При знакоопределенной функции  $W$  будет иметь место асимптотическая устойчивость.



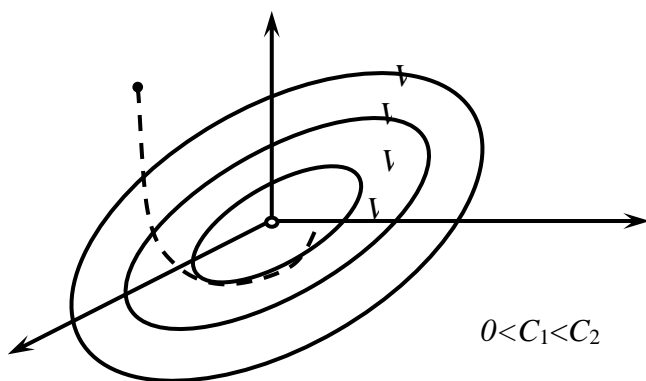


Рис. 2.3.

Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем. Поскольку предыдущая теорема Ляпунова дает, вообще говоря, только достаточные условия устойчивости и поскольку кроме области устойчивости нелинейная

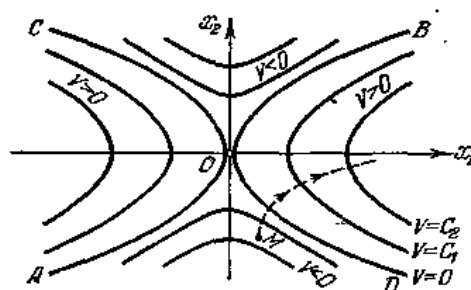


Рис. 2.4.

система может иметь целый ряд особых областей, то может возникнуть потребность в отдельном определении области неустойчивости путем использования нижеприведенной теоремы Ляпунова, которая дает достаточные условия неустойчивости системы.

Теорема формулируется так: если при заданных в форме (2.11) уравнениях системы  $n$ -го порядка производная  $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от какой-нибудь функции Ляпунова  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  окажется знакоопределенной, причем сама функция  $V$  в какой-нибудь области, примыкающей к началу координат, будет иметь знак, одинаковый со знаком производной  $W$ , то данная система неустойчива.

### 3. Оценка качества процессов управления на основе оптимального распределения полюсов системы управления.

Процесс функционального проектирования систем управления неразрывно связан с решением задачи оптимизации управления, то есть задачи оптимального достижения главной цели при соблюдении множества ограничений. В общем случае *цель управления* заключается в том, чтобы перевести объект из начального состояния  $x(t_0)$ , в котором он находится в момент  $t_0$ , в конечное состояние  $x(t_2)$ , принадлежащее подобласти  $R_1$  области допустимых состояний  $R$ , то есть  $x(t_2) \in R_1$ . Здесь  $R_1 \in R$ , что соответствует выделению в пространстве состояний области допустимых состояний  $R$  и сужению ее до некоторой области  $R_1$ , которая для нас по каким-то причинам является желательной.

*Задача управления* заключается в том, чтобы в области допустимых управлений  $Q(u)$  найти такое управление, при котором будет достигнута цель.

Функционалы и функции, выражающие цель управления и ограничения, называют *критериями качества*.

Операция формирования критерия качества управления является наиболее ответственной на подготовительной стадии проектирования. Поэтому наиболее оптимальное ее выполнение достигается путем сочетания формализованных методов и творческой деятельности проектировщика, работающего в диалоге с вычислительной системой.

Рассмотрим некоторые методические аспекты формирования критериев качества управления для решения задач предварительного синтеза системы управления.

При описании объекта управления с помощью векторно-матричной модели в пространстве состояний задание качества управления может быть трансформирован в оптимальное распределение на комплексной плоскости полюсов замкнутой системы.

Для системы, описываемой векторно-матричной моделью в непрерывном времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.15)$$

полюса системы - это собственные значения матрицы  $A$ , которые обычно обозначаются через  $\lambda_i(A)$ , где  $i = 1, \dots, n$ . В то же время собственными значениями матрицы  $A$  называются корни ее характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0. \quad (2.16)$$

Для односвязных систем, которые могут быть описаны общей передаточной функцией

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{m-1}s^{m-1} + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n} \quad (2.17)$$

полюса системы – это корни характеристического многочлена  $A(s)$ . Соответственно нулями системы называются корни многочлена  $B(s)$ , при которых  $H(s) = 0$ .

Расположение полюсов на комплексной плоскости во многом характеризует синтезируемую систему, определяя ее переходные и частотные характеристики, а, следовательно, и динамические показатели качества. Так, например, устойчивость системы определяется размещением полюсов в левой полуплоскости.

Часто понятие оптимального переходного процесса связывают с минимизацией какого-либо функционала. Подобные стандартные формы получены эмпирически, и область их применения ограничивается системами невысокого порядка. К таким фильтрам относятся приведенные в табл.2.1. распределения, минимизирующие интеграл от квадрата ошибки и оптимизирующий функционал.

Таблица 2.1

Коэффициенты полинома  $1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$  для распределений

а) минимум интеграла от квадрата ошибки

$n$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
2	1						
3	2	1					
4	2	3	1				
5	3	3	4	1			
6	3	6	4	5	1		
7	4	6	10	5	6	1	
8	4	10	10	15	6	7	1

б) минимум оптимизирующего функционала

$n$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$
2	1.4						
3	2.15	1.75					
4	2.7	3.40	2.10				
5	3.4	5.50	5.00	2.80			
6	3.95	7.45	8.60	6.60	3.25		
7	4.58	10.64	15.54	15.00	10.42	4.47	
8	5.15	13.30	22.20	25.75	21.60	12.8	5.20

Качество работы системы управления характеризуется, с одной стороны, ее точностью в установившемся режиме, а с другой – переходным процессом от одного установившегося состояния к другому. При исследовании переходных процессов чаще всего полагают, что входной сигнал является единичной ступенчатой функцией. В этом случае кривая переходного процесса называется переходной функцией и характеризуется некоторыми показателями,

принимаемыми за меру качества системы управления. К числу таких показателей могут быть отнесены:

- время нарастания  $t_H$  – время, необходимое для достижения 95% конечного значения;
  - время установления (регулирования)  $t_y$  – время, необходимое для попадания в некоторую окрестность конечного значения без выхода из него;
  - перерегулирование – максимальная относительная величина выброса  $(Y_{\max} / Y_{уст} - 1) \cdot 100\%$  ;
  - пульсации (колебания) – число колебаний до выхода кривой в установившийся режим.
- Обобщенный функционал качества управления. Для детерминированных процессов с непрерывным временем, описываемых в пространстве состояний, функционал качества в общем случае имеет вид

$$I = V_3 [x(t_k), Q_k] + \int_{t_0}^{t_k} L[x(t), u(t), t, Q, R] dt. \quad (2.18)$$

Здесь  $V_3$  – заданная с точностью до матрицы параметров  $Q_k$  скалярная функция конечного состояния – терминальная функция;  $L$  – скалярная функция, действующая из пространств состояния, управления;  $Q$  – матрица параметров зависимости  $L$  от  $x$ ;  $R$  – матрица параметров зависимости  $L$  от  $u$ .

Функционал (7.2) можно назвать классическим. Он использовался в классических задачах вариационного исчисления:

- в задаче Больца, где  $V_3 \neq 0$ ,  $L \neq 0$ ;
- в задаче Лагранжа, где  $V_3 = 0$ ,  $L \neq 0$ ;
- в задаче Майера, где  $V_3 \neq 0$ ,  $L = 0$ .

Опустим векторы параметров как аргументы функций в (2.18). Тогда функционал Больца запишется в общей форме как

$$I = V_3 [x(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} L[x(t), u(t), t] dt. \quad (2.19)$$

На практике применяют частные формы классического функционала (2.19). Некоторые из этих форм рассмотрим ниже.

Классический функционал с аддитивной функцией затрат на управление функция  $L$  может быть представлена в виде суммы функций:

$$L[x(t), u(t), t] = Q_3[x(t), t] + U_3[u(t), t]. \quad (2.20)$$

Функция  $U_3[u(t), t]$ , как правило, имеет смысл тех или иных затрат на управление. Поэтому функционал

$$I = V_3 [x(t_k)] + \int_{t_0}^{t_k} Q_3[x(t), t] dt + \int_{t_0}^{t_k} U_3[u(t), t] dt, \quad (2.21)$$

называют классическим функционалом с аддитивной функцией затрат на управление.

Классический квадратичный функционал (Летова–Калмана). Пусть все три функции  $V_3$ ,  $Q_3$ ,  $U_3$  выражаются квадратичными формами:

$$V_3 = 0.5x^T(t_k)Q_k x(t_k); \quad Q_3 = 0.5x^T(t)Qx(t); \quad U_3 = 0.5u^T(t_k)Ru(t), \quad (2.22)$$

где  $Q_k$ ,  $Q$  – положительно полуопределенные квадратные  $n \times n$  – матрицы;  $R$  – положительно определенная квадратная  $r \times r$  – матрица;  $Q$  и  $R$  могут быть нестационарными матрицами.

Напомним, что некоторую матрицу  $F(n \times n)$  называют положительно полуопределенной (неотрицательно определенной), если она симметрична, то есть  $F = F^T$ , и при любом  $n$ -мерном векторе  $x \neq 0$  выполняется неравенство  $x^T F x \geq 0$ .

Положительно определенная матрица  $F$  в тех же условиях обладает свойством  $x^T F x > 0$ .

Соответствующий функционал

$$I = \frac{1}{2} x^T(t_k) Q_k x(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} u^T(t) R u(t) dt \quad (2.23)$$

является классическим квадратичным функционалом.

Проанализируем смысловое содержание функционала (2.23).

Первое слагаемое в его составе характеризует ошибку управления в конечный момент времени  $t_k$  и используется с целью обеспечить малость этой ошибки.

Второе слагаемое оценивает отклонения реальных переменных состояния от желаемых и представляет собой своеобразный «штраф» за большие ошибки при любом  $t_0 \leq t \leq t_k$ .

Последнее слагаемое, будучи всегда положительным, оценивает стоимость управления. Физически оно характеризует затрагиваемую энергию на управление.

Основное затруднение формирования квадратичного критерия качества связано с выбором элементов весовых матриц  $Q$  и  $R$ .

Предварительный выбор значений элементов весовых матриц  $Q$  и  $R$  может быть осуществлен с помощью следующих рекомендаций.

1. Обычно матрицы  $Q$  и  $R$  назначаются постоянными и диагональными, т. е. матрица  $Q$  – содержит  $n$  ненулевых элементов  $q_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$ , а матрица  $R$  –  $r$  элементов  $r_{jj}, j = 1, 2, \dots, r$ .

2. Принимаем, что максимально допустимые отклонения переменных состояния  $x(t)$  в любой момент времени вносят в функционал качества одинаковый вклад. Распространяя аналогичные рассуждения и на отклонения сигналов управления  $u(t)$ , можно записать

$$q_{ii} = \left( \frac{x_{i\max}}{x_{i\max}} \right)^2 q_{11}; \quad r_{jj} = \left( \frac{u_{j\max}}{u_{j\max}} \right)^2 r_{11}. \quad (2.24)$$

Здесь  $x_{i\max}$  – максимально допустимое отклонение  $i$ -й переменной состояния ( $i = 2, 3, \dots, n$ ), определяемое техническим заданием;  $u_{j\max}$  – максимально допустимое отклонение  $j$ -го сигнала управления ( $j = 2, 3, \dots, r$ ) согласно техническому заданию.

Общий вклад максимально допустимых отклонений переменных состояния должен приблизительно соответствовать общему вкладу максимально допустимых отклонений сигналов управления.

$$\sum_{i=1}^n q_{ii} x_{i\max}^2 = \sum_{j=1}^r r_{jj} u_{j\max}^2. \quad (2.25)$$

3. Произвольно выбираем значение  $r_{11}$  (например,  $r_{11} = 1$ ), и по формулам (2.24), (2.25) вычисляем значения остальных коэффициентов.

Полученные значения весовых коэффициентов следует рассматривать как начальные оценки. Если отклонения по всем переменным достигают своего максимума не одновременно, формулы (2.24), (2.25) неверно отражают требования, предъявляемые к системе. Поэтому окончательный выбор весовых коэффициентов целесообразно производить после нескольких пробных процедур синтеза и моделирования системы управления.

## Контрольные вопросы к лекции № 2

1. Объект управления первоначально представлен передаточной функцией

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4}.$$

Какое число корней Вы должны расположить на комплексной плоскости для задания желаемого динамического качества проектируемой системы управления?

2. Технологические требования к проектируемой системе управления не допускают перерегулирования входного сигнала  $y(t)$  более 1% при ступенчатом входном воздействии  $u(t)$ . Какое стандартное распределение полюсов следует выбрать в качестве критерия качества управления?
3. Какой из рассмотренных здесь фильтров имеет амплитудно-частотную характеристику максимально приближающуюся к АЧХ идеального фильтра?
4. Какая нелинейная динамическая система называется абсолютно устойчивой?
5. Свойством какого вида движения динамической системы является устойчивость по Ляпунову?
6. Какое невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым?
7. Какая динамическая система называется устойчивой «в целом»?
8. Как называется непрерывная функция, если она в рассматриваемой области не сохраняет одного и того же знака?
9. Какие ограничения на функцию Ляпунова и ее производную по времени накладывает теорема Ляпунова об устойчивости?
10. Что с геометрической точки зрения представляет собой производная от функции Ляпунова по времени, составленная в силу уравнений движения динамической системы?
11. Какое пространство называют фазовым пространством динамической системы?
12. Как определяют координаты состояний равновесия нелинейной динамической системы в фазовом пространстве?

### Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.
2. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / Пер. с англ. Под ред. Я.З.Цыпкина. -М.: Наука. 1985. - 296 с.
3. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. - 832 с.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.
5. Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Линейные системы автоматического регулирования: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. -264 с.
6. К.Ю.Поляков. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2008. - 80 с.

## Лекция № 3 Принципы детерминированного синтеза систем управления

### План:

1. Синтез системы управления с регулятором состояния.
2. Синтез оптимального управления.
3. Оценка вектора состояния при случайных возмущениях и наличии помех.

**Аннотация.** Рассматриваются принципы детерминированного синтеза систем управления. Приводятся алгоритмы синтеза систем управления с регулятором состояния и систем оптимального управления. Анализируются вопросы формирования и построения оценок вектора состояния при случайных возмущениях и наличии помех.

**Ключевые слова:** система управления, детерминированный синтез, регулятор состояния, оптимальное управление, оценка вектора состояния, случайные возмущения, помехи.

Понятие “синтез” означает нахождение такой структуры и параметров системы управления, при которых выходные переменные объекта управления (ОУ) отвечают заданным требованиям или критериям качества. Решение проблем автоматизации процедуры синтеза систем управления (СУ) сопряжено с построением универсальных алгоритмов, обеспечивающих поиск оптимальных структуры и параметров СУ, не зависимо от сложности ОУ. Очевидно, что универсальность алгоритмов и их инвариантность к сложности ОУ может быть достигнута только при использовании высоко формализованных упрощенных математических моделей ОУ, которыми являются векторно-матричные модели.

Если синтез осуществляется в пространстве состояний, то при известном состоянии  $x(t_1)$  в момент времени  $t_1$  должна существовать возможность нахождения такого управления, которое будет удовлетворять требованиям, налагаемым на выход объекта. Эти требования формируются с помощью критериев качества управления, которые рассмотрены в предыдущем разделе.

В большинстве практических задач синтеза СУ возникает противоречивая ситуация: объект управления обладает нелинейными свойствами, устройства управления предполагается реализовать с помощью средств цифровой (микропроцессорной) техники, а наиболее простыми, доступными и эффективными являются алгоритмы и программы синтеза СУ с помощью линейных непрерывных моделей.

В том случае, когда ВММ удовлетворяет требованиям адекватности описания нелинейного ОУ и требованиям представления дискретного управляющего устройства применение указанных алгоритмов вполне оправдано и наиболее рационально. Однако и при невыполнении этих требований выполнение процедуры синтеза СУ целесообразно начать с использования ВММ с последующим их усложнением до требуемого вида. Таким образом, несмотря на техническую сложность современных ЭМС, нелинейные свойства ОУ и дискретный характер управления, алгоритмы синтеза и анализа СУ, основанные на матричных операциях с векторно-матричными моделями, не потеряли свою актуальность.

Этап функционального проектирования систем управления предусматривает выполнение следующих проектных операций:

- синтез СУ с регулятором состояния;
- синтез оптимального управления;
- синтез наблюдателей состояния;

**Синтез системы управления с регулятором состояния.** В линейном случае мы всегда выражаем вектор входа через линейную комбинацию компонент вектора состояния, т.е. в непрерывном времени с помощью уравнения

$$u(t) = -Kx(t) + r(t), \quad (3.1)$$

а в дискретном случае с помощью уравнения

$$u(k) = -Kx(k) + r(k), \quad (3.2)$$

где  $r(t)$ ,  $r(k)$  – задающая переменная.

Следует отметить, что уравнения (3.1), (3.2) имеют вид уравнений выхода векторно-матричной модели в пространстве состояний и, таким образом, управляющее устройство, определяемое уравнениями (3.1), (3.2), является статическим. Требуемый астатизм обеспечивается дополнительным включением в СУ элементов, обладающих интегрирующими свойствами.

Для решения задачи синтеза в такой постановке, необходимо измерение всех компонент вектора состояния объекта  $x(t)$ . Если состояние объекта неизмеряемо, его надо оценить. В детерминированных системах это осуществляется с помощью наблюдателя. Сначала оценивается вектор состояния  $\hat{x}(t)$ , а затем рассчитывается вектор входа объекта

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + r(t), \quad (3.3)$$

Одним из фундаментальных методов проектирования детерминированных систем управления в пространстве состояний является метод расположения полюсов.

В линейных системах качество управления и динамические показатели системы можно задать с помощью корней характеристического уравнения или полинома замкнутой системы.

Общая постановка задачи. Для стационарного непрерывного управляемого объекта, уравнение динамики которого имеет вид

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.4)$$

и управляющего устройства, описываемого уравнением

$$u = -Kx + r \quad (3.5)$$

необходимо определить матрицу  $K$ , такую, чтобы замкнутая система, получаемая подстановкой (3.5) в (3.4),

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br = A^*x + Br, \quad (3.6)$$

имела желаемый характеристический полином

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = d_0 + d_1\lambda + \dots + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n. \quad (3.7)$$

Здесь же рассмотрим ряд алгоритмов вычисления матрицы коэффициентов обратных связей  $K$ .

Алгоритм 1. Рассмотрим управляемый объект с одним входом и одним выходом. Подстановкой

$$x = Qz, \quad (3.8)$$

преобразуем его к канонической форме управляемости

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (3.9)$$

Для линейных стационарных систем характер свободного движения не изменится, если выбрать вместо (3.5) регулятор вида

$$u = -^z Kz, \quad (3.10)$$

или

$$u = -k_R^T z, \text{ где } k_R^T = [k_1, k_2, \dots, k_n].$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(k_1 + a_0) & -(k_2 + a_1) & \dots & -(k_n + a_{n-1}) \end{bmatrix} z = A_R z. \quad (3.11)$$

В этом случае характеристический полином имеет вид

$$\det(\lambda I - A_R) = (k_1 + a_0) + (k_2 + a_1)\lambda + \dots + (k_n + a_{n-1})\lambda^{n-1} + \lambda^n. \quad (3.13)$$

Сопоставляя полиномы (3.12) и (3.7), получаем соотношения для вычисления коэффициентов матрицы регулятора  $k_R^T$ :

$$k_{i+1} = d_i - a_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.13)$$

Связь между управляющей переменной  $u$  и вектором состояния  $x$  определяется согласно выражению (3.10):

$$u = -k_R^T z = -k_R^T T x = -K x, \quad (3.14)$$

то есть

$$K = k_R^T T. \quad (3.15)$$

Из этого следует, что для вычисления коэффициентов обратных связей нужно определить еще и матрицу преобразования  $T = Q^{-1}$ .

Таким образом, алгоритм 1 синтеза регулятора состояния может быть сформулирован следующим образом:

1. На основании требований технического задания к динамическим характеристикам проектируемой СУ формируется критерий качества управления в форме характеристического полинома (3.13), т.е. определяются коэффициенты  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ .

2. Векторно-матричная модель объекта преобразуется к канонической форме управляемости. В процессе преобразования определяются коэффициенты характеристического уравнения  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , прямая и обратная матрицы преобразования  $Q, T = Q^{-1}$ .

3. На основании выражения (3.13) вычисляются коэффициенты матрицы  $k_R^T$ .

4. По формуле (3.15) определяется матрица реальных коэффициентов обратных связей  $K$  по полному вектору состояния.

Алгоритм 2. Общность постановки задачи не нарушится, если считать, что оптимальные динамические характеристики проектируемой системы задаются в виде эталонной модели

$$\dot{z} = A_3 z + B_3 u, \quad (3.16)$$

имеющей тот же порядок, что и модель объекта (3.4).

Тогда коэффициенты регулятора состояния однозначно определяются путем решения уравнения

$$\det(A - BK) = \det(A_3). \quad (3.17)$$

Процесс синтеза сводится к двум задачам:

1) определение эталонной модели (3.16);

2) решение уравнения (3.17).

Наиболее просто желаемое качество управления можно задать с помощью эталонной модели, представленной в канонической форме управляемости

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \cdot \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_{y0} & -a_{y1} & \dots & -a_{yn-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (3.18)$$



Коэффициенты  $a_{y_0}, a_{y_1}, \dots, a_{y_{n-1}}$  в этом случае соответствуют коэффициентам  $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$  желаемого характеристического полинома (3.7).

Для согласования объекта и эталонной модели введем линейное преобразование

$$x = T^{-1}z = Qz. \quad (3.19)$$

После преобразования (3.9) система “объект + регулятор” (3.6) относительно нового базиса имеет вид  $Q\dot{z} = \{A - BK\}Qz$ , или  $\dot{z} = Q^{-1}(A - BK)Qz$ .

Из условия равенства собственных движений синтезируемой системы и эталонной модели следует, что  $x = T^{-1}z = Qz$ .

Откуда получается выражение для вычисления значений матрицы обратных связей  $K$  регулятора состояния:

$$BK = A - QA, Q^{-1}. \quad (3.19)$$

Таким образом, для синтеза регулятора состояния в этом случае необходимо:

- задать векторно-матричную модель объекта управления;
- сформировать эталонную модель в канонической форме управляемости (3.18);
- вычислить матрицы преобразования ОУ к канонической форме управляемости  $Q$  и  $Q^{-1}$ .
- из матричного выражения (3.20) вычислить  $K$ .

Синтез оптимального управления. В традиционной постановке задача синтеза оптимального управления в пространстве состояний предусматривает определение вектора управляющих сигналов  $u_0(t)$  на основании минимизации некоторого критерия качества и формулируется следующим образом.

Для объекта управления, который описывается векторными дифференциальными и алгебраическими уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

необходимо найти закон управления  $u_0(t)$ , при котором достигается минимум квадратичного функционала качества

$$I = \frac{1}{2} x^T(T)Fx(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt. \quad (3.22)$$

Общая математическая постановка указанной задачи приводит к уравнению Беллмана, которое имеет следующий вид:

$$-\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega(u)} \left\{ L(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} f(x(t), u(t), t) \right\}. \quad (3.23)$$

Вывод уравнения Беллмана, характеристики входящих в него переменных.

Решение уравнения (3.23) для объекта управления, который описывается векторно-матричной моделью (3.21), позволяет определить закон оптимального управления в виде

$$u_0(t) = -R^{-1}(t)B(t)P(t)x(t) = -K_0(t)x(t), \quad (3.24)$$

где  $K_0(t) = R^{-1}(t)B(t)P(t)$ ,  $P(t)$  – решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t) - Q. \quad (3.25)$$

с граничным условием  $P(T) = F$ .

Оценка вектора состояния при случайных возмущениях и наличии помех. При решении практических задач очень часто возникает ситуация, когда необходимые для управления координаты вектора состояния объекта не измеряются или измеряются с существенными случайными ошибками, а движение объекта управления подвержено случайным воздействиям.

В таких ситуациях управление определяется на основе результатов оценивания состояния системы, которое имеет статистическую связь с данными наблюдений.

Рассмотрим алгоритм линейной оценки вектора состояния системы с минимальной дисперсией.

Пусть динамическая система описывается векторным дифференциальным уравнением.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + T(t)w(t). \quad (3.26)$$

Здесь, кроме представленных ранее матриц и векторов,  $w(t)$  –  $k$  – мерный вектор случайных воздействий;  $T$  – матрица размером  $n \times k$ .

Вектор измеряемых выходных координат, который доступен наблюдению, определяется соотношением

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t), \quad (3.27)$$

где  $v(t)$  –  $m$  – мерный вектор случайных помех, сопровождающих измерения.

Предполагается, что система (3.26), (3.27) при  $w(t) \equiv 0$  и  $v(t) \equiv 0$  наблюдаема. Будем считать  $w(t)$  и  $v(t)$  гауссовскими случайными процессами типа белого шума с нулевыми математическими ожиданиями

$$M[w(t)] = 0, \quad M[v(t)] = 0,$$

и корреляционными матрицами

$$\begin{aligned} \text{cov}[w(t), w^T(\tau)] &= M[w(t), w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau), \\ \text{cov}[v(t), v^T(\tau)] &= M[v(t), v^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $\delta(t)$  – дельта-функция;  $Q(t)$  – симметричная неотрицательно определенная  $k \times k$  – матрица интенсивности белого шума  $w(t)$ ;

$R(t)$  – симметричная положительно определенная  $m \times m$  – матрица интенсивности белого шума  $v(t)$ .

Допустим, что начальное состояние системы  $x(t_0)$  –  $n$  – мерный случайный вектор с известным математическим ожиданием

$$M[x(t_0)] = \bar{x}_0,$$

и корреляционной матрицей

$$\text{cov}[x(t_0), x(t_0)] = M\{[x(t_0) - \bar{x}_0] \cdot [x(t_0) - \bar{x}_0]^T\} = P(t_0, t_0) = P(t_0) = P_0. \quad (3.29)$$

Кроме того, будем считать, что  $x(t_0)$ ,  $w(t)$ ,  $v(t)$  взаимно не коррелированы.

Найти необходимо линейную несмещенную оценку вектора  $x(t_0)$ , построенную на основе наблюдения  $y(\tau)$ , ( $t_0 \leq \tau \leq t$ ).

Несмещенная оценка  $\hat{x}(t)$  предполагает равенство ее математического ожидания математическому ожиданию истинной величины  $x(t)$ .

$$M[\hat{x}(t)] = M[x(t)]. \quad (3.30)$$

Предположим, что  $\hat{x}(t)$  получается на выходе фильтра

$$\dot{\hat{x}}(t) = F(t)\hat{x}(t) + C(t)u(t) + L(t)y(t). \quad (3.31)$$

Чтобы процесс на выходе фильтра был несмещенной оценкой, должно выполняться равенство (3.30). Вычислим математическое ожидание обеих частей уравнения (3.31):

$$M[\dot{\hat{x}}(t)] = F(t)M[\hat{x}(t)] + C(t)u(t) + L(t)M[y(t)], \quad (3.32)$$

но из (3.27) следует, что

$$M[y(t)] = C(t)M[x(t)]. \quad (3.33)$$

На основании (3.31) – (3.33) получим дифференциальное уравнение для среднего значения вектора состояния системы:

$$\dot{\bar{x}}(t) = [F(t) + L(t)C(t)]\bar{x}(t) + C(t)u(t). \quad (3.34)$$

Вычисляя математическое ожидание от (3.38), получим еще одно уравнение для среднего значения вектора состояния

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)u(t). \quad (3.35)$$

Сравнивая (3.35) и (3.34), определим первое условие несмещенности оценки вектора состояния:

$$\begin{aligned} F(t) &= A(t) - L(t)C(t), \\ C(t) &= B(t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Второе условие состоит в том, чтобы уравнения (3.36) и (3.37) решались при одном и том же начальном условии

$$\bar{x}(t_0) = M[\hat{x}(t_0)] = M[x(t_0)] = \bar{x}_0. \quad (3.37)$$

При выполнении этих условий уравнение фильтра примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) + L(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)], \\ \hat{x}(t_0) &= \bar{x}_0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Остается определить матрицу коэффициентов усиления фильтра  $L(t)$ , которая обеспечила бы оптимальную оценку в том смысле, что составляющие ошибки оценивания должны иметь минимальную дисперсию.

Согласно принципу дуальности и с учетом того, что дисперсия случайной функции представляет собой среднее значение квадрата разности между случайной функцией и ее средним значением, можно утверждать, что матрица коэффициентов усиления оптимального фильтра определяется выражением

$$L(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t), \quad (3.39)$$

которое получается по алгоритму синтеза оптимального управления для сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= A^T \alpha + C^T \beta, \\ \gamma &= B^T \alpha. \end{aligned}$$

Здесь  $P(t)$  – корреляционная матрица ошибок оценивания, является решением матричного дифференциального уравнения Риккати.

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + T(t)Q(t)T^T(t). \quad (3.40)$$

Наблюдатель, построенный по приведенному алгоритму, называют оптимальным фильтром Калмана – Бьюси.

Для стационарной системы, в которой  $A, B, C, T, Q, R$  – коэффициентные матрицы, уравнение фильтра Калмана – Бьюси принимает вид

$$\dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)]. \quad (3.41)$$

Матрица коэффициентов усиления фильтра постоянна и определяется выражением

$$L = PC^T R^{-1}, \quad (3.42)$$

где  $P$  – положительно определенная матрица, являющаяся решением алгебраического матричного уравнения Риккати

$$0 = AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + TQT^T. \quad (3.43)$$

Многочисленные вычислительные эксперименты, выполненные в целях анализа систем управления с наблюдателями, построенными по принципу фильтра Калмана – Бьюси при учете помех и случайных возмущений, подтверждают корректность приведенных алгоритмов.

### Контрольные вопросы к лекции № 3

1. Для объекта, описанного ВММ, матрицы которой имеют размеры  $A(7 \times 7)$ ,  $B(7 \times 7)$ ,  $C(1 \times 7)$ , синтезирован регулятор состояния при допущении, что все переменные состояния измеряемы. Каков будет размер матрицы состояния системы «объект – регулятор»?
2. Какие операции должны быть обязательно выполнены при реализации любого из алгоритмов синтеза регулятора состояния?

3. Каковы будут значения параметров регулятора состояния, синтезированного для объекта? Векторно-матричная модель объекта и эталонная модель системы управления приведены ниже.

1. ВММ объекта управления

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Эталонная модель СУ

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -40 & -400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u,$$

4. Каковы будут значения параметров регулятора состояния, синтезированного для объекта? Векторно-матричная модель объекта и эталонная модель системы управления приведены ниже.

1. ВММ объекта управления

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -100 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2. Эталонная модель СУ

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -40 & -400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix} u,$$

5. Укажите основные особенности численного решения матричного дифференциального уравнения Риккати?

6. При каких условиях матричное дифференциальное уравнение Риккати вырождается в алгебраическое?

7. Какие значения должны принимать коэффициенты обратных связей для «точной» реализации оптимального управления?

8. Для достижения каких целей и из каких условий выбирается матрица L наблюдателя полного порядка?

9. Назовите два основных принципа синтеза наблюдателя.

10. В какой последовательности следует выполнять проектные операции синтеза регулятора и наблюдателя состояния?

11. Вы решили воспользоваться методом расположения полюсов для синтеза наблюдателя полного порядка. С какой векторно-матричной моделью должна выполняться эта операция, если ВММ объекта управления имеет вид

12. Какой из рассмотренных ранее алгоритмов используется для вычисления матрицы коэффициентов усиления оптимального фильтра?

13. При каких условиях матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана-Бьюси постоянна во времени?

### Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления / Под ред. К.А.Пупкова. ТОМ 1-4. - М.: МГТУ им. Баумана, 2004.

2. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / Пер. с англ. Под ред. Я.З.Цыпкина. -М.: Наука. 1985. - 296 с.

3. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. Пер. с. англ. Б.И.Копылова. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. - 832 с.

4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. -СПб.: Профессия, 2004. - 752 с.

5. Лазарева Т.Я., Мартемьянов Ю.Ф. Линейные системы автоматического регулирования: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. -264 с.

6. К.Ю.Поляков. Теория автоматического управления. Часть I. -СПб.: 2008. - 80 с.

## СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

### Практическое занятие №1 Векторно-матричные модели систем управления в непрерывном времени

**Задача 1.1.** Получим уравнения состояния для простейшей  $RLC$ -цепи, показанной на рис 1.1.1

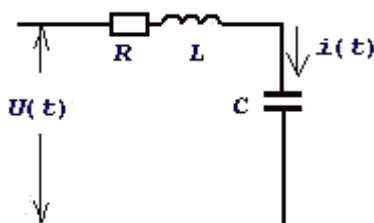


Рис. 1.1.1. Схема  $RLC$ -цепи.

Динамическое поведение этой системы при  $t \geq t_0$  полностью определяется, если известны начальные значения  $i(t_0), U_c(t_0)$  и входное напряжение  $U(t)$  при  $t \geq t_0$ . Следовательно,  $i(t), U_c(t)$  можно выбрать в качестве переменных состояния, то есть  $x^T = [i(t), U_c(t)]$ ,  $y[i(t)]$ .

Для указанных переменных состояния можно записать дифференциальные уравнения

$$U(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + U_c,$$

$$C \frac{dU_c}{dt} = i(t),$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{U}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} U(t). \quad (1.1.1)$$

Таким образом, для рассматриваемой системы матрицы  $A, B, C$  векторно-матричная модель будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0].$$

**Задача 1.2.** На рис. 1.2.1. показан электродвигатель постоянного тока независимого возбуждения, работающий при постоянном магнитном потоке ( $\Phi = const$ ).

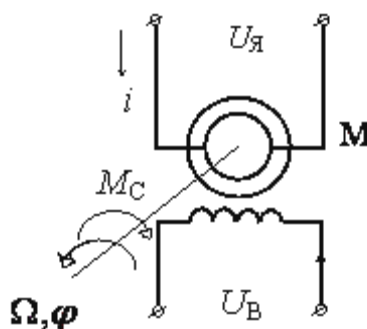


Рис. 1.2.1. Электродвигатель постоянного тока.

Дифференциальные уравнения для такого объекта могут быть записаны относительно следующих переменных состояния:  $\Omega(t)$  – скорости вращения ротора, тока якоря  $i(t)$ , углового перемещения ротора  $\varphi(t)$ . При использовании зависимостей для электродвижущей силы  $E = k\Phi\Omega = C\Omega$  и вращающего момента двигателя  $M = k\Phi \cdot i = Ci$ , получим уравнение электрической цепи

$$U_{\text{я}}(t) = R_{\text{я}}i(t) + L_{\text{я}} \frac{di(t)}{dt} + E,$$

и уравнения вращающейся части

$$M - M_c = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega,$$

где  $J$  – приведенный момент инерции электродвигателя.

Представляя векторы состояния, входа и выхода как  $x^T = [\Omega(t) \ i(t) \ \varphi(t)]$ ;  $u^T = [U_{\text{я}} \ M_c]$ ;  $y = [\Omega(t)]$  получим следующую векторно-матричную модель электродвигателя постоянного тока

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{i} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C/J & 0 \\ -C/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/J \\ 1/L & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\text{я}} \\ M_c \end{bmatrix}, \quad (1.2.1)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \varphi \end{bmatrix},$$

то есть для рассматриваемой системы матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  векторно-матричная модель будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & C/J & 0 \\ -C/L & -R/L & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1/J \\ -1/L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0].$$

**Задача 1.3.** Построим векторно-матричную модель электромеханического объекта – электропривода постоянного тока, приводящего в движение через механический редуктор тяжелую платформу. Функциональная схема такого объекта приведена на рис. 1.3.1.

Здесь легко можно выделить три функциональных элемента, соответствующие трем видам преобразования энергии:

*преобразователь*, осуществляющий управляемое преобразование электрической энергии;

*двигатель*, выполняющий преобразование электрической энергии в механическую, – электромеханический преобразователь;

*механизм*, осуществляющий передачу механической энергии от вала двигателя через редуктор к рабочему органу - платформе.

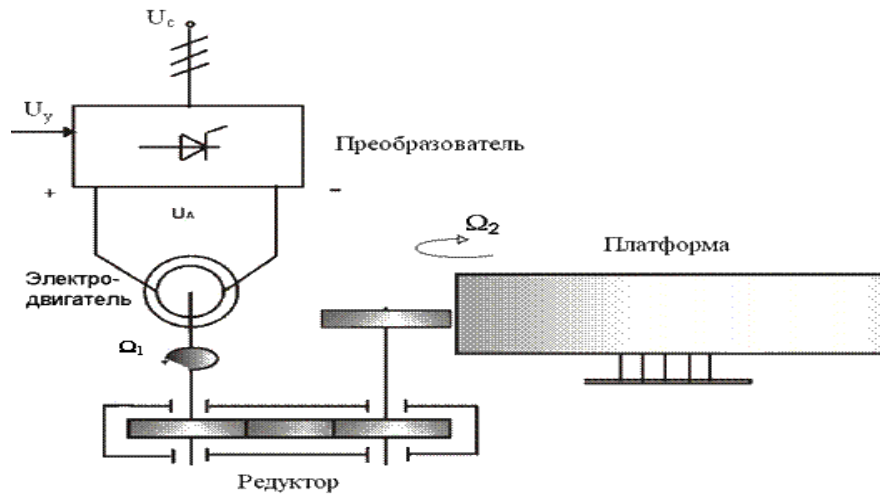


Рис. 1.3.1. Функциональная схема электромеханического объекта

При использовании общеизвестных допущений и обозначений координат и параметров такого объекта его динамическое поведение при  $M_c = 0$  описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dU_n}{dt} &= -\frac{1}{T_n}U_n + \frac{K_n}{T_n}U_y, \\
 \frac{di_\lambda}{dt} &= -\frac{1}{T_\lambda}i_\lambda - \frac{C}{R_\lambda T_\lambda}\Omega_\lambda + \frac{1}{R_\lambda T_\lambda}U_n, \\
 \frac{d\Omega_1}{dt} &= \frac{C}{J_1}i_\lambda - \frac{1}{J_1}M_y, \\
 \frac{dM_y}{dt} &= C_{12}\Omega_1 - C_{12}\Omega_2, \\
 \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{1}{J_2}M_y.
 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Если компонентами вектора состояния выбрать  $x^T = [U_n \ i_\lambda \ \Omega_1 \ M_y \ \Omega_2]$ , где  $U_n$  – напряжение преобразователя,  $i_\lambda$  – ток электродвигателя,  $\Omega_1$  – скорость вращения электродвигателя,  $M_y$  – момент упругости механизма,  $\Omega_2$  – скорость вращения механизма, то элементы векторно-матричной модели

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\
 y(t) &= Cx(t),
 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

принимают следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_\lambda T_\lambda} & -\frac{1}{T_\lambda} & -\frac{\tilde{N}}{R_\lambda T_\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C}{J_1} & 0 & -\frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & C_{12} & 0 & -C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{K_n}{T_n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 (1.3.3) \quad C &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]
 \end{aligned}$$

Таблица 1.3.1

Параметры объекта		
Параметр	Значение	Ед. изм.
$T_n$	0,01	<i>с</i>
$K_n$	22	отн.
$T_я$	0,0143	<i>с</i>
$K_я$	2,1	<i>ом</i>
$J_1$	0,045	$кгм^2$
$J_2$	0,104	$кгм^2$
$C$	0,83	<i>Вб</i>
$C_{12}$	80	$НМ/с^{-1}$

После подстановки реальных значений параметров объекта, которые приведены в табл. 1.3.1., компоненты матриц состояния  $A$  и управления  $B$  принимают вид:

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 33,3 & -70 & -27,7 & 0 & 0 \\ 0 & 18,4 & 0 & -22,2 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 0 & -80 \\ 0 & 0 & 0 & 9,62 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$$



## Практическое занятие №2 Векторно-матричные модели систем управления в дискретном времени

**Задача 2.1.** Получим ВММ в дискретном времени для интегратора второго порядка, структурная схема которого приведена на рис. 2.1.1. Динамический процесс для такого объекта при  $\tau_1 = \tau_2 = 1$  описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = u. \quad (2.1.1)$$

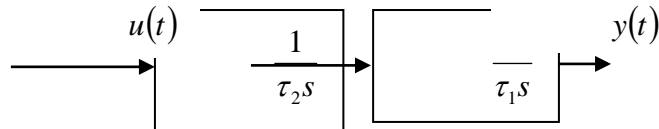


Рис. 2.1.1. Структурная схема двойного интегратора

Вводя  $z$  и  $\dot{z}$  как состояния системы, получим векторно-матричную запись уравнения (2.1.1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Определим матрицы  $\Phi$  и  $\tilde{A}$  разложением матричной экспоненты в ряд.

$$\Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ds = \int_0^T \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}.$$

Так как  $A^2 = 0$ , приведенный ряд сходится точно.

Таким образом, векторно-матричная модель двойного интегратора в дискретном времени имеет вид

$$x(kT + T) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(kT),$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(kT).$$

**Задача 2.2.** Для непрерывной модели электродвигателя постоянного тока будем считать, что  $L_{\dot{y}} = 0$ ,  $M_c = 0$ . Тогда уравнения электродвигателя будут иметь вид

$$U_{\dot{y}}(t) = R_{\dot{y}} i(t) + C\Omega(t), \quad \frac{d\Omega(t)}{dt} = -\frac{C^2}{JR}\Omega(t) + \frac{C}{JR}U_{\dot{y}}(t),$$

$$Ci(t) = J \frac{d\Omega(t)}{dt}, \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} = \Omega(t).$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \Omega(t).$$

В нормализованной форме записи значений параметров электродвигателя, то есть при  $R_{\text{я}}=1$ ,  $C=1$ ,  $J=1$  в пространстве состояния  $x^r = [\Omega(t) \ \varphi(t)]$ ;  $u = [U_{\text{я}}]$ ;  $y = [\varphi(t)]$  получим следующую запись ВММ в непрерывном времени

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 1] x.$$

Найдем изображение матричной экспоненты по Лапласу:

$$L\{e^{AT}\} = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

Вычисляя обратное преобразование элементов полученной матрицы, получим матрицу

$$\Phi = e^{AT} = \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения матрицы  $\tilde{A}$  используем выражение (2.2.1):

$$e^{AT} B = \begin{bmatrix} e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}; \quad \tilde{A} = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 1 - e^{-s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, векторно-матричная модель рассматриваемой системы в дискретном времени имеет вид

$$\begin{aligned} x(kT + T) &= \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 1 - e^{-T} & 1 \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} 1 - e^{-T} \\ T - 1 + e^{-T} \end{bmatrix} u(kT), \\ y(kT) &= [0 \ 1] x(kT). \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Для систем с реальными параметрами чаще всего применяют *теорему Гамильтона – Кэли*, согласно которой любую функцию квадратной матрицы

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + \dots + d_{n-1} A^{n-1}$$

можно вычислить через характеристический полином

$$f(\lambda_i) = d_0 I + d_1 \lambda_i + \dots + d_{n-1} \lambda_i^{n-1},$$

где  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$  – корни характеристического уравнения матрицы  $A$   $\det(\lambda I - A) = 0$ .

**Задача 2.3.** Построим ВММ в дискретном времени для непрерывной системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0] x.$$

Первоначально определим корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

решение которого дает следующие значения:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ .

Так как порядок матрицы равен 2, имеем  $e^{AT} = d_0 I + d_1 A$ .

Коэффициенты  $d_0$ ,  $d_1$  определяем из системы уравнений

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} \\ e^{\lambda_2 T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 \\ 1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix},$$

решение которой имеет вид

$$d_1 = \frac{e^{\lambda_2 T} - e^{\lambda_1 T}}{\lambda_2 - \lambda_1} = e^{-T} - e^{-2T};$$

$$d_0 = e^{\lambda_1 T} - d_1 \lambda_1 = 2e^{-T} - e^{-2T}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi = e^{AT} &= (2e^{-T} - e^{-2T}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-T} - e^{-2T}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & e^{-T} - e^{-2T} \\ -2e^{-T} - e^{-2T} & -e^{-T} + e^{-2T} \end{bmatrix} = e^{-T} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + e^{-2T} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \\ \Gamma &= \int_0^T e^{As} B ds = \int_0^T \begin{bmatrix} e^{-s} & -e^{-2s} \\ -e^{-s} & +2e^{-2s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} -e^{-T} + e^{-2T} \\ 1 + e^{-T} - 2e^{-2T} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## Практическое занятие №3 Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

**Задача 3.1.** Для иллюстрации понятий управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости выберем простую систему второго порядка

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

$$y(k) = Cx(k).$$

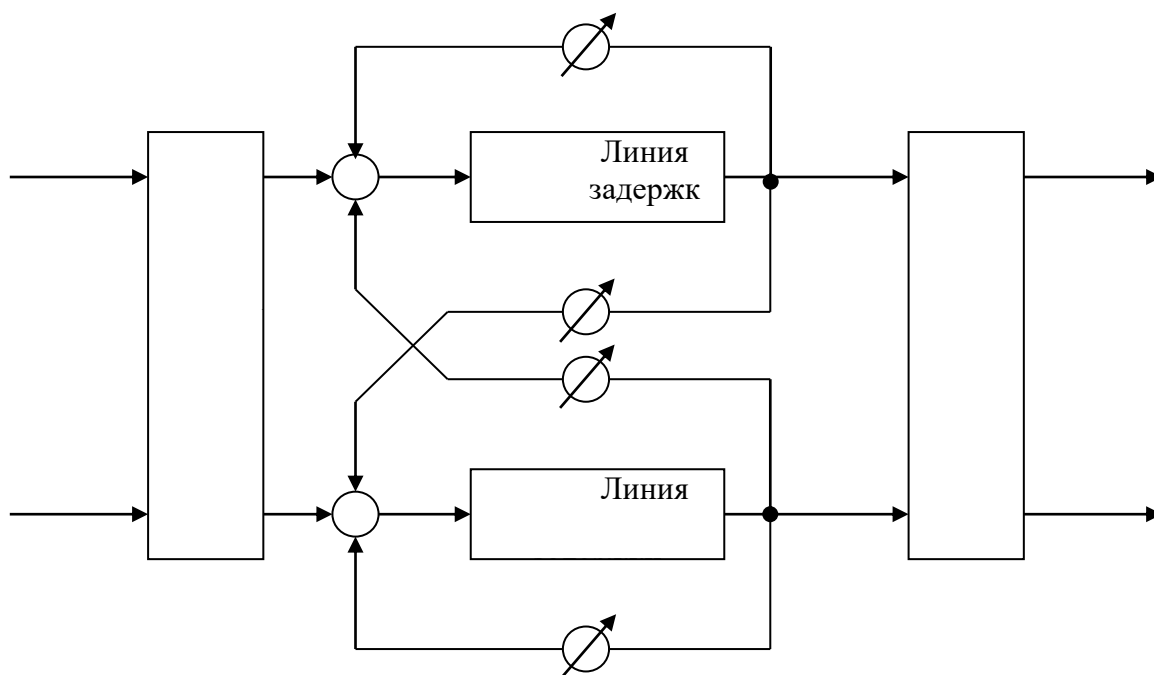


Рис.3.1.1.

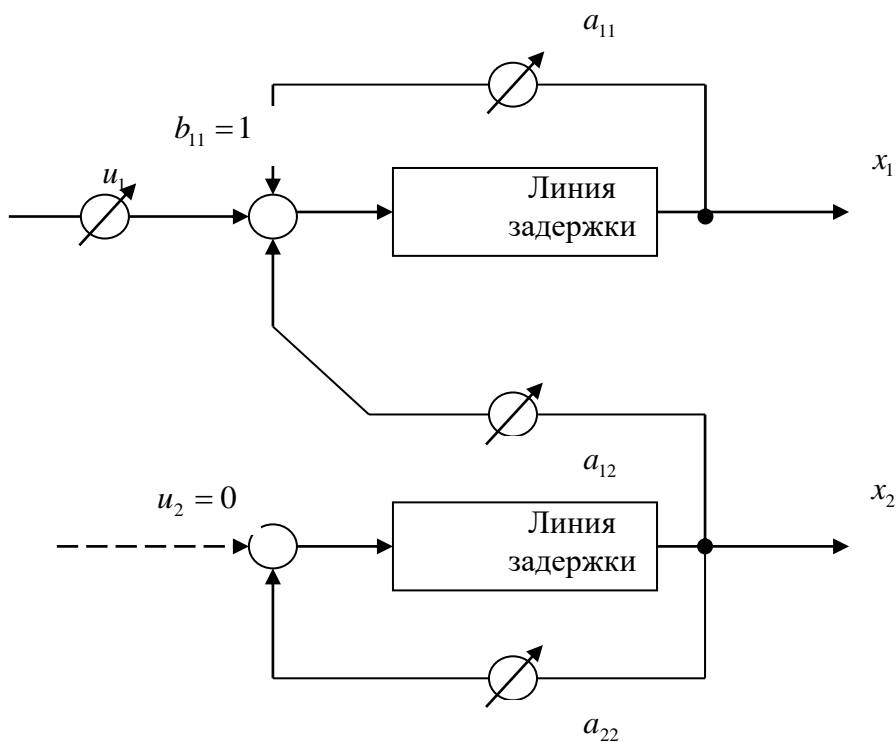


Рис.3.1.2.

(рис.3.1.1), где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим управляемость системы. Имеем

$$[AB \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система управляема, если ранг равен 2, т. е. когда  $a_{21} \neq 0$ , и неуправляема, если  $a_{21} = 0$ . Из рис.3.1.2 видно, что, когда  $a_{21} = 0$ , отсутствует управление координатой  $x_2$ . Отметим, что все остальные параметры  $a_{ij}$  могут равняться нулю, но система останется управляемой.

Перейдем к наблюдаемости. Имеем

$$[C' \mid A'C'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

Система наблюдаема, если ранг равен 2, т. е. когда  $a_{12} \neq 0$ , и ненаблюдаема, когда  $a_{12} = 0$ . В этом случае выходная координата  $y$  не содержит информации о  $x_2$  (рис.3.1.3). Снова отметим, что все остальные параметры могут равняться нулю, но система останется наблюдаемой.

Идентифицируемость:

$$[x(0) \mid Ax(0)] = \begin{bmatrix} x_1(0) & a_{11}x_1(0) + a_{12}x_2(0) \\ x_2(0) & a_{21}x_1(0) + a_{22}x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Система идентифицируема, если ранг матрицы равен 2, и неидентифицируема, если определитель матрицы равен нулю. Для этого оба столбца матрицы должны быть линейно зависимы. Различают простейший случай, когда  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ , т. е. объект, который находится в состоянии покоя, не может быть идентифицирован,

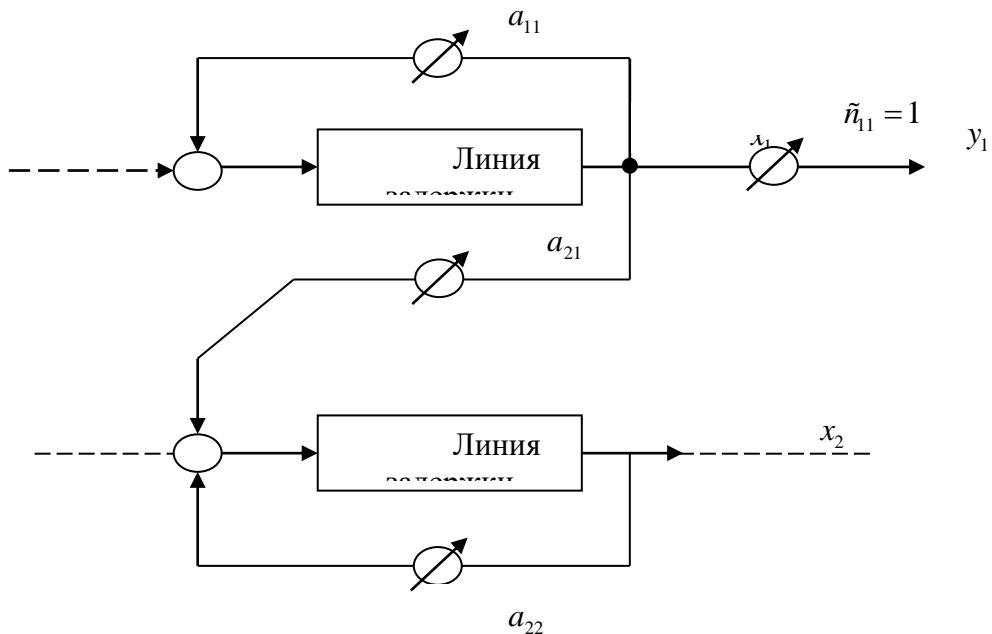


Рис.3.1.3.

и нетривиальный случай, когда

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}, \text{ или } [A - \lambda I] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = 0.$$

В этом случае нужно найти собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и соответствующие собственные векторы  $r_1$  и  $r_2$ . Если  $x(0) = \alpha r_1$ , то возбуждается только одна гармоника объекта  $\exp[\lambda_1 t]$ , а гармоника  $\exp[\lambda_2 t]$  не идентифицируется. Если  $x(0) = \beta r_2$ , то может быть идентифицирована одна только гармоника  $\exp[\lambda_2 t]$ . Таким образом, объект идентифицируем только тогда, когда начальное условие  $x(0)$  возбуждает все гармоники объекта.

## Практическое занятие №4 Вычислительные алгоритмы формирования векторно-матричных моделей в дискретном времени

**Задача 4.1.** Вычисление матричной экспоненты с помощью степенного ряда при заданном значении периода квантования  $T$ .

Получение относительно точного решения степенного ряда

$$\Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!}, \quad \Gamma = A^{-1} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!} - IB \right) \quad (4.1.1)$$

сопряжено с необходимостью вычисления высоких степеней матрицы  $A$ . Однако с помощью алгоритма, построенного на основании теоремы Кели-Гамильтона, матричная экспонента может быть вычислена с помощью  $(n-1)$  степеней матрицы  $A$ .

Согласно этому алгоритму вычисление матриц  $\Phi$  и  $\Gamma$  производится в несколько этапов (шагов).

*Шаг 1:* вычисляют первые  $(n-1)$  степеней матрицы  $A$ .

*Шаг 2:* вычисляют коэффициенты характеристического уравнения

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0 \quad (4.1.2)$$

по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} a_{n-1} &= -T \\ a_{n-2} &= -\frac{1}{2}(a_{n-1}T + T^2) \\ a_{n-3} &= -\frac{1}{3}(a_{n-2}T + a_{n-1}T^2 + T^3) \\ &\dots \\ a_0 &= -\frac{1}{n}(a_1T_1 + a_2T_2 + \dots + a_{n-1}T_{n-1} + T_n), \end{aligned} \right\} \quad (4.1.3)$$

где  $T_k = t_r(A^k)$  – след матрицы  $A^k$ .

*Шаг 3:* согласно теореме Кели-Гамильтона  $n$ -ая степень матрицы вычисляется через коэффициенты характеристического уравнения как

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0I, \quad (4.1.4)$$

$a(n+m)$ -я степень матрицы  $A$  находится с помощью последовательного умножения этого соотношения на матрицу  $A$ .

$$A^{n+m} = -q_{0m}I + q_{1m}A + q_{2m}A^2 + \dots + q_{n-1}A^{n-1} \quad (4.1.5)$$

для  $m=0,1,2,\dots$ ; где

$$\left. \begin{aligned} q_{00} &= -a_0 \\ q_{10} &= -a_1 \\ &\dots \quad \dots \\ q_{n-1,0} &= -a_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.6)$$

а остальные коэффициенты определяются из рекуррентных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} q_{m0} &= -a_0 q_{0,m-1} \\ q_{1m} &= -q_{0,m-1} - a_1 q_{1,m-1} \\ q_{2m} &= q_{0,m-1} - a_2 q_{2,m-1} \\ &\dots \\ q_{n-1} &= -q_{n-2,m-1} - a_{n-1} q_{n-1,m-1}, \end{aligned} \right\} \cdot \quad (4.1.7)$$

*Шаг 4:* для любого заданного  $T$  функцию  $e^{AT}$  можно записать как

$$e^{AT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (AT)^k = \sum_{k=0}^{n-1} (AT)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{n+k}}{(n+k)!} \left[ \sum_{j=0}^{n-1} q_{jk} A^j \right] = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \left[ \frac{T^j}{j!} + \sum_{k=0}^{\infty} q_{jk} \frac{T^{n+k}}{(n+k)!} \right]. \quad (4.1.8)$$

Таким образом, функцию  $e^{AT}$  можно определить с любой заданной точностью с помощью уже вычисленных матриц  $A^2, A^3, \dots, A^{n-1}$  и коэффициентов  $q_{ii}$  без вычисления и суммирования степеней матрицы  $A$  выше  $(n-1)$ .

Интегрирование матричной экспоненты при разложении в ряд заменяется взвешенной суммой

$$\int_0^T e^{As} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \sum_0^T s^k ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} A^k T^{k+1} = T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AT)^k}{(k+1)!}, \quad (4.1.9)$$

которая вычисляется аналогично матричной экспоненте

$$T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AT)^k}{(k+1)!} = T \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} (AT)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{n+k}}{(n+k+1)!} \sum_{j=0}^{n-1} q_{jk} A^j \right]. \quad (4.1.10)$$

Применение соотношений (4.1.8-4.1.10) возможно только в том случае, если заранее определена величина периода квантования.

**Задача 4.2.** Вычисление матричной экспоненты при неизвестном значении периода квантования  $T$ .

Особую актуальность представляют *символьно-численные алгоритмы* формирования дискретной ВММ, когда величина периода квантования заранее неизвестна.

Для этих целей может быть использовано представление  $e^{AT}$  в виде функции от матрицы. Анализ известного математического аппарата вычисления функций от матриц показывает, что наиболее приемлемым методом вычисления матричной экспоненты является формула Сильвестра, согласно которой

$$e^{AT} = \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k-1} T^l e^{\lambda_k T} Z_{kl}, \quad (4.2.1)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_q$  – различные собственные значения матрицы  $A$  (то есть  $\lambda_i \neq \lambda_j; i, j = 1, 2, \dots, \theta$ ),  $m_k$  – кратность собственного значения  $\lambda_k$  как нуля минимального многочлена матрицы  $A$ ,  $Z_{kl}$  – компоненты матрицы  $A$ , определяемые через значения приведенной присоединенной матрицы.

Если характеристический многочлен матрицы  $A \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  имеет все различные нули, то  $m_k = 1$  для  $k = 1, 2, \dots, n$  и минимальный многочлен совпадает с характеристическим. При этом основная формула теоремы Сильвестра приводится к следующему виду:

$$e^{AT} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k T} Z_{k1} = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k T} \frac{\prod_{i=k}^n (A - \lambda_i I)}{\prod_{i=k}^n (\lambda_k - \lambda_i)}. \quad (4.2.2)$$



Если первоначально считать период квантования неизвестным, то будет целесообразным представить матрицы  $\Phi$  и  $\tilde{A}$  формируемой ВММ трехмерными  $\Phi(n \times n \times n)$ ,  $\tilde{A}(n \times m \times n)$ .

В этом случае матрицы дискретной модели записываются как произведение некоторых матричных коэффициентов, умноженных на собственные моды  $\lambda_i \neq \lambda_j; i, j = 1, 2, \dots, \theta$ , то есть

$$\begin{aligned}\Phi(T) &= F_1 e^{\lambda_1 T} + F_2 e^{\lambda_2 T} + \dots + F_n e^{\lambda_n T}, \\ \Gamma(T) &= G_1 e^{\lambda_1 T} + G_2 e^{\lambda_2 T} + \dots + G_n e^{\lambda_n T}.\end{aligned}\quad (4.2.3)$$

Таким образом, трехмерные матрицы дискретных моделей содержат  $n$  квадратных коэффициентных матриц  $F_i$  или  $G_i$  и при выбранном значении периода квантования  $T$  численное значение каждого элемента матриц вычисляется по формулам

$$\begin{aligned}\Phi(i, j) &= F_1(i, j) e^{\lambda_1 T} + F_2(i, j) e^{\lambda_2 T} + \dots + F_n(i, j) e^{\lambda_n T}, \\ \tilde{A}(i, j) &= G_1(i, j) e^{\lambda_1 T} + G_2(i, j) e^{\lambda_2 T} + \dots + G_n(i, j) e^{\lambda_n T}.\end{aligned}\quad (4.2.4)$$

Причем моды комплексных собственных значений записываются через синус и косинус, например, для  $\lambda_k = \alpha + j\omega$ ,  $\lambda_{k+1} = \alpha + j\omega$   $e^{\lambda_k T} = e^{\alpha T} \sin \omega T$ ,  $e^{\lambda_{k+1} T} = e^{\alpha T} \cos \omega T$ , значения корней характеристического полинома определяются численным методом по алгоритму, в основу которого положен метод нахождения комплексных корней многочлена Берстоу.

Рациональность такого способа формирования дискретных ВММ объясняется, прежде всего, тем, что наиболее трудоемкие вычислительные операции по определению постоянных матричных коэффициентов выполняются один раз для любого количества исследуемых значений периода квантования. Такого никак нельзя добиться при использовании степенного ряда.

Для подтверждения преимуществ символьно-численного алгоритма рассмотрим варианты формирования дискретной модели непрерывного объекта 3-го порядка, представляющего собой линейризованную модель серийного электродвигателя.

В непрерывном времени объект описывается векторно-матричной моделью вида:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 8.75 & 0 \\ -59.07 & -525 & -103 \\ 357.44 & 76.3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} \times U.\quad (4.2.5)$$

Компонентами вектора состояния здесь являются: магнитный поток –  $\Phi$ , ток –  $i$ , скорость вращения ротора –  $\Omega$ .

В результате вычислительных экспериментов сформировано выражение для вычисления матричной экспоненты

$$\begin{aligned}\Phi(T) &= \begin{bmatrix} 0.999 & 0.019 & 0.004 \\ 0.028 & -0.028 & -0.208 \\ -0.004 & 0.141 & 1.028 \end{bmatrix} e^{-20089T} \cos(2477T) + \begin{bmatrix} 0.999 & 0.019 & 0.004 \\ 0.028 & -0.028 & -0.208 \\ -0.004 & 0.141 & 1.028 \end{bmatrix} e^{-20089T} \cos(2477T) + \\ &+ \begin{bmatrix} 0.999 & 0.019 & 0.004 \\ 0.028 & -0.028 & -0.208 \\ -0.004 & 0.141 & 1.028 \end{bmatrix} e^{-50982T}.\end{aligned}$$

Многочисленные эксперименты по оценке достоверности результатов конструирования ВММ в дискретном времени показывают, что значения переменных состояния, вычисленные с использованием построенной дискретной модели, практически не отличаются от значений координат непрерывной модели. Результаты единичного эксперимента приведены на рис.4.2.1.

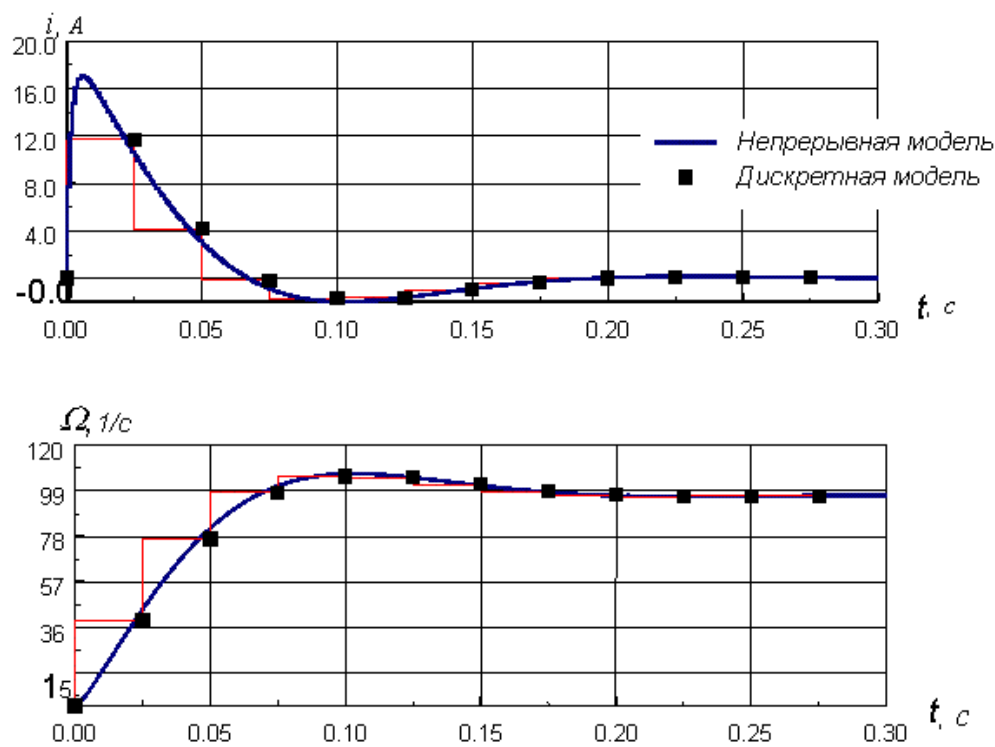


Рис. 4.2.1. Сравнительные динамические характеристики ВММ в непрерывно и дискретном времени.

На основе вышесказанного можно сделать вывод о предпочтительном использовании символьно-численного алгоритма формирования ВММ в дискретном времени, основанного на теореме Сильвестра, что дает возможность анализировать зависимость результатов вычисления от периода квантования, а вычисленные собственные значения и коэффициенты характеристического уравнения могут быть использованы в дальнейших расчетах.

## Практическое занятие №5 Анализ устойчивости динамических систем на основе теорем А.М.Ляпунова

**Задача 5.1.** Приведем пример практического использования теоремы А.М.Ляпунова об устойчивости нелинейных систем на наглядных геометрических образах. Для простоты возьмем систему третьего порядка ( $n=3$ ). Тогда исходная система уравнений примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= X_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (5.1.1)$$

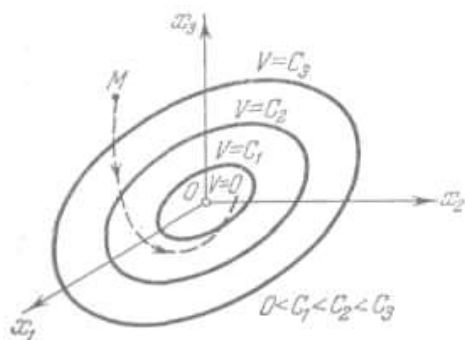
Возьмем знакоопределенную положительную функцию Ляпунова в виде

$$V = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2, \quad (5.1.2)$$

где  $a, b, c$  – произвольно заданные вещественные числа. Будем придавать величине  $V$  возрастающие постоянные значения:  $V=0, C_1, C_2, C_3, \dots$ , что означает

$$\begin{aligned} a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= 0, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= C_1, \\ a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 + c^2 x_3^2 &= C_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Первое из этих выражений соответствует одной точке  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  (началу координат фазового пространства), а остальные – поверхностям эллипсоидов в фазовом пространстве, причем каждый последующий эллипсоид содержит внутри себя целиком предыдущий (рис.5.1.1).



**Рис.5.1.1**

Возьмем теперь производную от функции Ляпунова по времени. Согласно

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n,$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – правые части уравнений (5.1.1) системы автоматического регулирования, представляющие собой заданные функции от отклонений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , и (5.1.2)

$$\frac{dV}{dt} = 2a^2 x_1 X_1(x_1, x_2, x_3) + 2b^2 x_2 X_2(x_1, x_2, x_3) + 2c^2 x_3 X_3(x_1, x_2, x_3) = W(x_1, x_2, x_3),$$

где функции  $X_1, X_2, X_3$  берутся из заданных уравнений системы регулирования (5.1.1).

Если полученная таким путем функция  $W(x_1, x_2, x_3)$  окажется знакоопределенной отрицательной, т. е. если

$$\frac{dV}{dt} < 0 \quad (5.1.3)$$

во всех точках исследуемого фазового пространства, кроме одного только начала координат, где

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (\text{при } x_1 = x_2 = x_3 = 0),$$

то при любых начальных условиях изображающая точка  $M$  (рис.5.1.1) вследствие (5.1.3) будет двигаться в сторону уменьшения значения  $V$ , т.е. будет пересекать эллипсоиды, изображенные на рис.5.1.1, извне внутрь. В результате с течением времени изображающая точка  $M$  будет стремиться к началу координат  $O$  фазового пространства и уже никак не сможет выйти за пределы тех эллипсоидов, в которые она проникла.

Это и означает затухание всех отклонений  $x_1, x_2, x_3$  в переходном процессе с течением времени. Таким образом, установлена устойчивость данной системы регулирования, что иллюстрирует справедливость теоремы для системы третьего порядка (в случае знакоопределенной функции  $W$ ).

Отсюда вытекает справедливость теоремы и в общем случае. Рассуждения остаются аналогичными, только вместо трех уравнений (5.1.1) будет  $n$  уравнений. Как и раньше, для любой знакоопределенной положительной функции Ляпунова  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$  получим некоторые замкнутые поверхности, окружающие начало координат (рис.5.1.1), но уже не в обычном трехмерном, а в  $n$ -мерном фазовом пространстве (их иногда называют гиперповерхностями). Поэтому, если производная  $\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n)$  окажется знакоопределенной отрицательной, то траектория изображающей точки  $M$  в  $n$ -мерном пространстве при любых начальных условиях с течением времени будет пересекать указанные поверхности только извне внутрь, что и свидетельствует об устойчивости данной системы.

Если же функция  $W$  будет не знакоопределенной, а знакопостоянной, то очевидно, что траектория изображающей точки  $M$  не везде будет пересекать поверхности  $V=C$ , а может их касаться в тех точках, где  $W$  обращается в нуль (помимо начала координат). Но так как во всех других местах фазового пространства функция  $W$  имеет один и тот же знак, вследствие чего изображающая точка может идти только извне внутрь поверхности  $V=C$ , то при решении задачи остается только проверить, не «застрянет» ли изображающая точка там, где  $W=0$ .

**Задача 5.2.** Рассмотрим следующую схему системы автоматического регулирования, представленную на рис. 5.2.1.а.

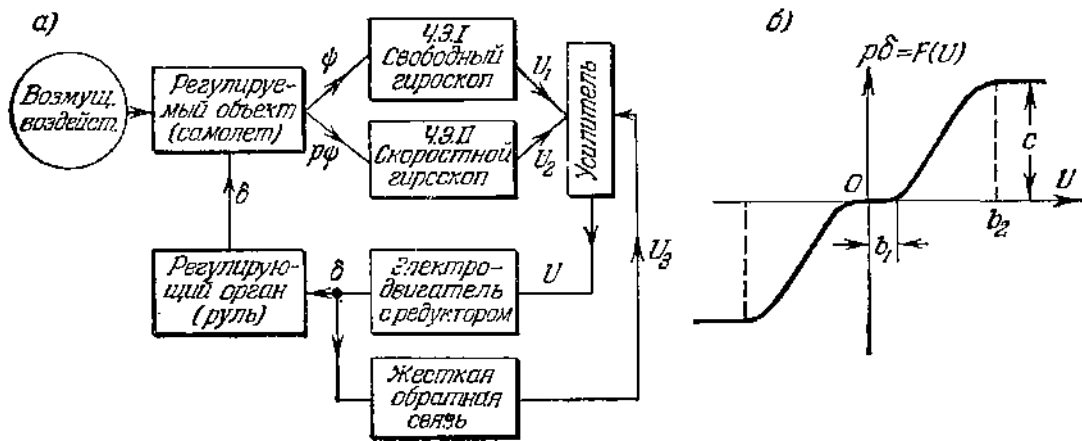


Рис.5.2.1

Пусть все звенья системы являются линейными, за исключением электродвигателя (с редуктором), для которого будем рассматривать его реальную характеристику (рис.5.2.1,б). Она может иметь произвольное криволинейное очертание с зоной застоя (при  $|U| < b_1$ ) и с зоной насыщения (при  $|U| < b_2$ ). Наклон характеристики и ее криволинейность могут быть любыми, лишь бы только соблюдались условия

$$\frac{dF}{dU} \geq 0, F > 0 \text{ при } U > b_1 \text{ и } F < 0 \text{ при } U < -b_1. \quad (5.2.1)$$

Требуется найти условия устойчивости данной системы автоматического регулирования.

Уравнение самолета как регулируемого объекта в грубо упрощенном виде будет

$$(T_1 p + 1) p \psi = -k_1 \delta, \quad (5.2.2)$$

где  $\psi$  – отклонение курсового угла самолета,  $\delta$  – отклонение руля.

Уравнения чувствительных элементов (гироскопов с потенциометрами):

$$U_1 = k_2 \psi, \quad U_2 = k_3 p \psi. \quad (5.2.3)$$

Уравнение обратной связи

$$U_3 = k_4 \delta. \quad (5.2.4)$$

Уравнение усилителя

$$U = k_5 U_1 + k_6 U_2 - k_7 U_3. \quad (5.2.5)$$

Уравнение электродвигателя с редуктором и рулем

$$p \delta = F(U), \quad (5.2.6)$$

где  $F(U)$  задается графиком рис.5.2.1,б.

Уравнения (5.2.3), (5.2.4), и (5.2.5) можно свести к одному:

$$U = k_\psi \psi + k_{p\psi} p \psi - k_{oc} \delta, \quad (5.2.7)$$

где

$$k_\psi = k_2 k_5, \quad k_{p\psi} = k_3 k_6, \quad k_{oc} = k_4 k_7.$$

Введем новые переменные:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{T_1 k_1} p \psi + \frac{1}{T_1} \delta, & x_2 &= -\frac{1}{T_1} \delta, \\ x_3 &= \frac{1}{T_1 k_1 k_{p\psi}} U = \frac{k_\psi}{T_1 k_1 k_{p\psi}} \psi + \frac{1}{T_1 k_1} p \psi - \frac{k_{oc}}{T_1 k_1 k_{p\psi}} \delta \end{aligned} \right\} \quad (5.2.8)$$

и безразмерное время

$$\tau = \frac{t}{T_1}. \quad (5.2.9)$$

С введением этих переменных дифференциальные уравнения всей систем мы (5.2.2), (5.2.6), (5.2.7) преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= -x_1 + f(x_3), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -f(x_3), \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= (\gamma - 1)x_1 + \lambda x_2 - r f(x_3), \end{aligned} \right\} \quad (5.2.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{T_1 k_\psi}{k_{p\psi}}, \quad r = \frac{k_\psi}{k_1 k_{p\psi}}, \\ f(x_3) &= F(T_1 k_1 k_{p\psi} x_3), \end{aligned} \right\} \quad (5.2.11)$$

т. е. функция  $f(x_3)$  имеет все те же свойства, что и заданная функция  $F(U)$  (рис.5.2.1,б), и отличается лишь масштабом чертежа по оси абсцисс в связи с заменой переменной  $U$  на  $x_3$  согласно третьему из равенств (5.2.8).

Установившийся процесс полета при данной системе согласно (5.2.2), (5.2.6), (5.2.8) и графику рис.5.2.1,б будет иметь место при

$$\delta = 0, \quad p\psi = 0, \quad |\psi| < \frac{b_1}{k_{p\psi}}, \quad (5.2.12)$$

т. е. наличие зоны застоя двигателя приводит к тому, что в установившемся процессе курсовой угол может принять любое постоянное значение в пределах (5.2.12).

В новых переменных (5.2.8) установившийся процесс полета определяется значениями:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad |x_3| < \frac{b_1}{T_1 k_1 k_{p\psi}}, \quad (5.2.13)$$

чему соответствует любая точка отрезка  $AB$  в фазовом пространстве (рис.5.2.2,а).

При отыскании условий устойчивости рассмотрим два случая:  $\gamma > 1$  и  $0 < \gamma < 1$ .

Случай  $\gamma > 1$ . Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{\gamma - 1}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3. \quad (5.2.14)$$

Здесь интеграл будет всегда положительным, так как функция  $f(x_3)$  нечетная (см. условие (5.2.1)), Поэтому  $V$  есть знакоопределенная положительная функция, если  $\gamma > 1$ , обращающаяся в нуль на отрезке установившегося

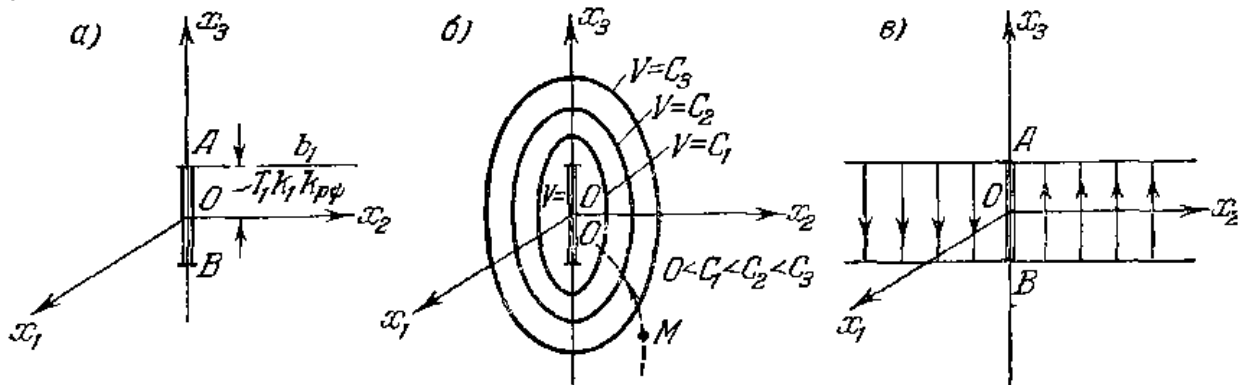


Рис.5.2.2

процесса  $AB$  (рис.5.2.2), Поверхности  $V(x_1, x_2, x_3) = C$  окружают этот отрезок (рис.5.2.2,б), стягиваясь к нему с уменьшением  $C$ .

Составим производную от функции Ляпунова:

$$W = \frac{dV}{d\tau} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial x_3} \frac{dx_3}{d\tau},$$

причем частные производные возьмем из (5.2.14), а производные по безразмерному времени – из уравнений системы (5.2.10). Тогда

$$W = -(\gamma - 1)x_1^2 + (\gamma - 1)x_1 f(x_3) - \gamma x_2 f(x_3) + f(x_3)[(\gamma - 1)x_1 + \gamma x_2 - r f(x_3)].$$

Представим это в виде

$$W = -(\gamma - 1)[f(x_3) - x_1]^2 - (r - \gamma + 1)[f(x_3)]^2. \quad (5.2.15)$$

Эта функция  $W$  знакопостоянная, так как она не включает в себя координату  $x_2$ , а потому обращается в нуль не только на отрезке установившегося процесса  $AB$ , а на всей полосе шириной  $AB$  в плоскости  $x_2x_3$  (рис.5.2.2,в). Но вне этой полосы согласно (5.2.15) она будет всюду отрицательной при

$$r > \gamma - 1, \text{ если } \gamma > 1. \quad (5.2.16)$$

Поэтому согласно теореме Ляпунова об устойчивости выражение (5.2.16) является достаточным условием устойчивости рассматриваемой нелинейной системы самолета с курсовым автопилотом (при любой кривизне и любом наклоне характеристики двигателя, имеющей вид рис.5.2.1,б).

Траектория изображающей точки  $M$  будет пересекать поверхности  $V = C$  извне внутрь везде, где  $W = \frac{dV}{d\tau} < 0$ . Нужно только проверить, не «застрянет» ли изображающая точка  $M$  там, где  $W$  обращается в нуль (помимо отрезка установившегося процесса  $AB$ ). В данном случае речь идет о том, не останется ли изображающая точка на полосе (показанной на рис.5.2.2,в), где  $W = 0$ , если она случайно на нее попадет.

Для решения этого вопроса найдем проекции скорости изображающей точки  $M \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}$ , когда эта точка находится в любом месте указанной полосы. Поскольку там

$$x_1 = 0, \quad |x_3| < \frac{b_1}{T_1 k_1 k_{p\psi}}, \quad f(x_3) = 0,$$

то искомые проекции скорости согласно (5.2.10) будут

$$\frac{dx_1}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = 0, \quad \frac{dx_3}{d\tau} = \gamma x_2.$$

Таким образом, если изображающая точка  $M$  попадет на указанную полосу вне отрезка  $AB$  (рис.5.2.2,в), то она не останется в ней, а пройдет ее поперек по прямой, параллельной оси  $x_3$ , с постоянной скоростью, равной  $\gamma x_2$ , как показано стрелками на рис.5.2.2,в. Пройдя полосу, изображающая точка снова будет пересекать поверхности  $V = C$  извне внутрь, т. е. данная система регулирования будет устойчивой.

Случай  $0 < \gamma < 1$ . Для этого случая возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = \frac{1-\gamma}{2} x_1^2 + \frac{\gamma}{2} x_2^2 + \int_0^{x_3} f(x_3) dx_3.$$

Производная от нее будет

$$W = \frac{dV}{d\tau} = -(1-\gamma)x_1^2 - r[f(x_3)]^2.$$

Отсюда аналогично предыдущему приходим к достаточному условию устойчивости системы в виде

$$r > 0, \text{ если } 0 < \gamma < 1. \quad (5.2.17)$$

Общий вывод. Полученные в данной задаче достаточные условия устойчивости (5.2.16) и (5.2.17) после подстановки выражений  $\gamma$  и  $r$  через параметры системы (5.2.11) принимают вид соответственно

$$k_{oc} > (T_1 k_{p\psi} - k_{p\psi}) k_1, \text{ если } k_{p\psi} < T_1 k_{p\psi}, \\ k_{oc} > 0, \text{ если } k_{p\psi} > T_1 k_{p\psi}.$$

Первое из этих условий устойчивости говорит о том, что передаточное число обратной связи надо сделать достаточно большим, если производная  $p\psi$  введена в закон регулирования недостаточно интенсивно. Из второго же условия устойчивости следует, что

система будет устойчива при любой, обратной связи, если передаточное число по производной достаточно велико.

Как видим, данные условия устойчивости не зависят от формы характеристики двигателя (рис.5.2.1,*б*), т. е. они одинаковы при любой кривизне, любом наклоне и любой зоне застоя (в том числе и при однозначной релейной характеристике двигателя постоянной скорости, а также и при линейной характеристике). Такие условия называются условиями абсолютной устойчивости. Они гарантируют, что при их выполнении система будет наверняка устойчива при любой нелинейности с ограничением лишь (5.2.1). В действительности же система может быть устойчивой и в некоторой области за пределами этих условий устойчивости при конкретно заданной форме- нелинейности.



## Практическое занятие №6 Синтез системы управления с регулятором состояния

**Задача 6.1.** Для упругого электромеханического объекта, который рассмотрен выше, синтезируем регулятор состояния.

При построении ВММ откажемся от учета инерционности преобразователя и введем следующие компоненты вектора состояния  $x^T = [\Omega_{MX} \quad F \quad \Omega_{дв} \quad i]$ , где  $\Omega_{MX}$  – скорость вращения платформы,  $F$ – усилие, под действием которого вращается платформа,  $\Omega_{дв}$  – скорость вращения электродвигателя,  $i$ – ток электродвигателя.

Таблица 6.1.1.

Параметры электромеханического объекта

Параметр	Электродвигатель					Механизм	
	$K_{ТП}$	$R_{я}$	$T_{я}$	$C_{дв}$	$J_{дв}$	$C_{МХ}$	$J_{МХ}$
Единицы измерения	–	Ом	с	В*с	кг*м <sup>2</sup>	Н*м/рад	кг*м <sup>2</sup>
Численные значения	6	3.15	0.025	0.16	0.015	0.65	0.1

Векторно-матричная модель объекта с учетом численных значений параметров преобразователя, электродвигателя и механизма, приведенных в табл. 6.1.1, принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6.5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -43.3 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -40 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 76.2 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot x.$$

Выберем желаемый характеристический полином

$$p(\lambda) = 14641 + 3478.071\lambda + 413.1198\lambda^2 + 28.7444\lambda^3 + \lambda^4,$$

которому соответствует эталонная модель, представленная в канонической форме

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -14641 & -3478.1 & -413.12 & -28.744 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u.$$

Вычислительные эксперименты, выполненные с помощью компьютерного комплекса функционального проектирования СУ, позволили получить расчетные параметры регулятора состояния в виде значений коэффициентов обратных связей по вектору состояния, которые приведены во второй строке табл.6.1.2.

Таблица 6.1.2

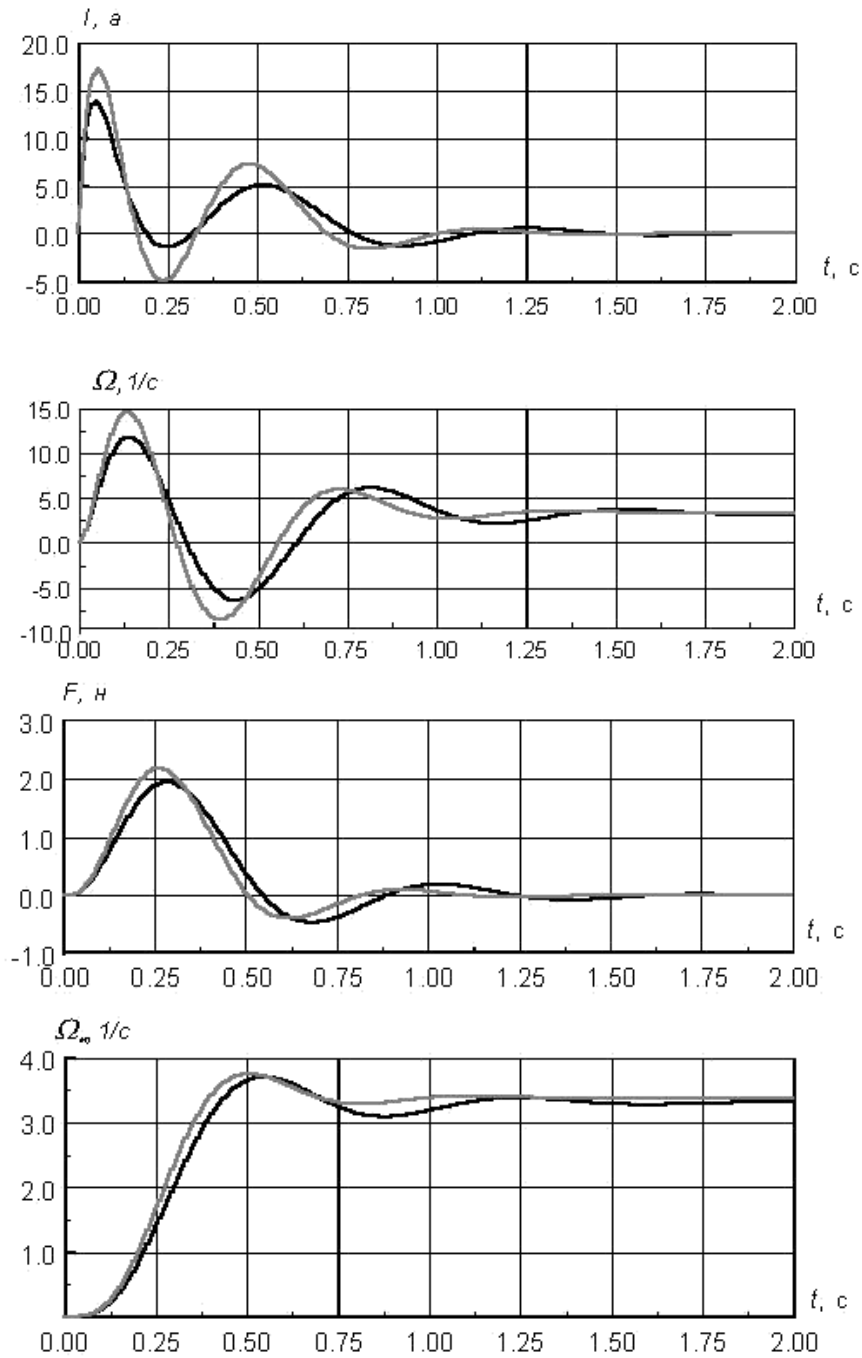
Параметры регулятора состояния

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$
Расчетные значения	-2.479	-2.685	-0.451	0.148
Значения реализации	-2.5	-2.5	-0.5	0

Анализ полученных результатов показывает, что для обеспечения заданного качества динамических характеристик СУ электромеханическим объектом необходимо введение слабой положительной обратной связи по току электродвигателя, что нежелательно. В этой связи было принято решение в дальнейшем отказаться от реализации обратной связи по току, а значения других коэффициентов округлить в допустимых пределах. Выбранные значения

параметров дальнейшей реализации регулятора состояния приведены в третьей строке табл.6.1.2.

Обоснованность принятого решения доказывают приведенные на рис.6.1.1 предварительные результаты вычислительных экспериментов с моделями синтезированных систем управления. Суммарное среднеквадратичное отклонения выходной координаты не превышает здесь 1.5%.



— - расчетные параметры регулятора состояния  
— - параметры реализации

Рис.6.1.1. Сравнительные динамические характеристики СУ

## Практическое занятие №7. Синтез оптимального управления

**Задача 7.1.** Для электромеханического объекта с упругой передачей механического движения от вала электродвигателя к валу рабочего механизма, численные значения параметров которого приведены в табл. 7.1.1, выполним синтез оптимального управления и безынерционного регулятора состояния.

Таблица 7.1.1

		Электродвигатель				Механизм	
Параметр	$K_{ТП}$	$R_{я}$	$T_{я}$	$C_{ДВ}$	$J_{ДВ}$	$C_{МХ}$	$J_{МХ}$
Единицы измерения	–	Ом	с	В*с	кг*м <sup>2</sup>	Н*м/рад	кг*м <sup>2</sup>
Численные значения	7	3.15	0.05	0.16	0.015	0.65	0.05

Результатом серии вычислительных экспериментов явились:

- внутреннее содержание весовых матриц  $Q$ , и  $R$   
 $diag Q = [0.001 \ 0.001 \ 0.005 \ 0.32]$ ;  $R = [1.0]$ ,
- временные характеристики

$$K_0(t) = -R^{-1}(t)B(t)P(t),$$

полученные в результате решения уравнения Риккати в обратном времени, которые приведены на рис. 7.1.1

Для постановки имитационных экспериментов используем приведенные в табл.7.1.2 постоянные расчетные значения коэффициентов обратных связей, соответствующие  $t=0$ , и значения реализации.

Таблица 7.1.2

Значения коэффициентов обратных связей				
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$
Расчетные значения	-0.480285	-0.97471	-0.00073	-0.20381
Значения реализации	-0.5	-1.0	0	-0.2

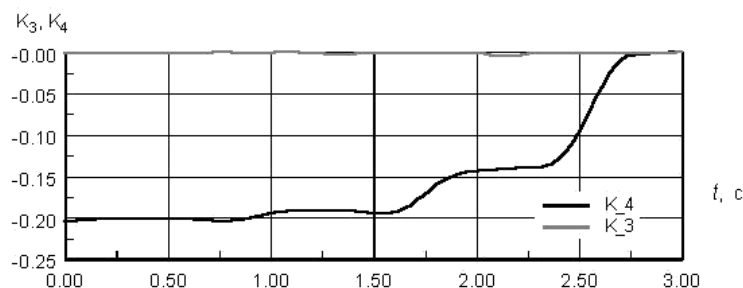
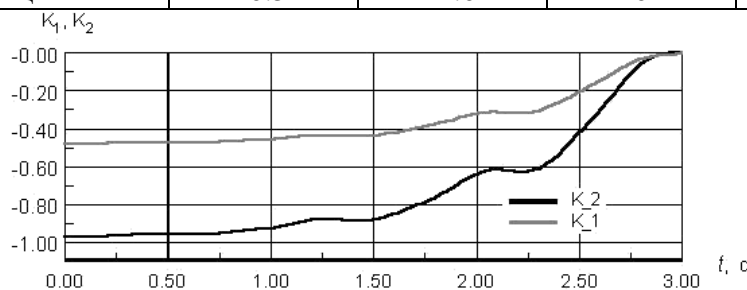


Рис. 7.1.1. Динамические характеристики  $K_0(t)$

Сравнительные динамические характеристики (см. рис.7.1.2), систем управления, в которых параметры регулятора соответствуют значениям реализации коэффициентов обратных связей (табл.7.1.2) и значениям регулятора состояния, синтезированного при использовании в качестве критерия качества биномиального распределения корней ( $\Omega_0 = 8.5c^{-1}$ ), подтверждают корректность алгоритмического и программного обеспечения синтеза оптимального управления.

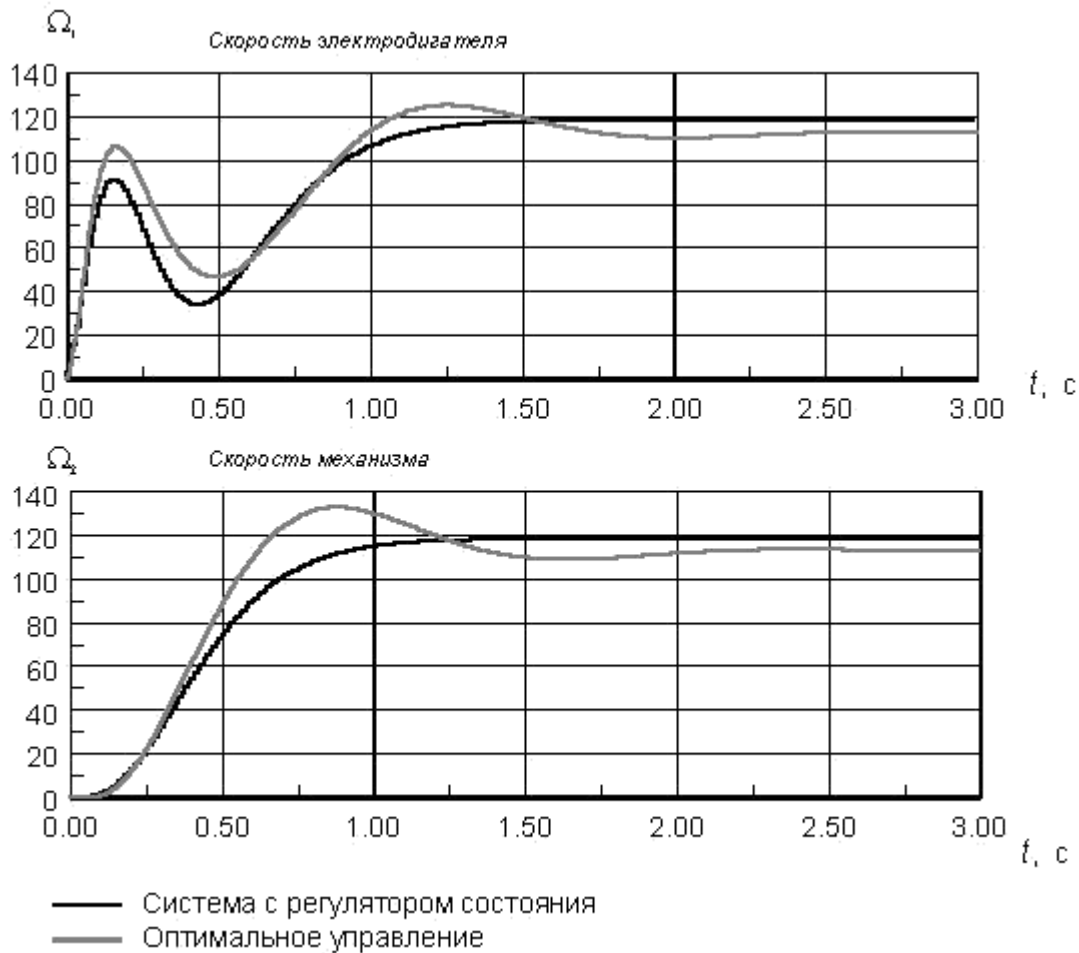


Рис. 7.1.2. Сравнительные динамические характеристики систем управления с регулятором состояния