



**O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI PEDAGOG KADRLARNI
QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING
MALAKASINI OSHIRISH TARMOQ
(MINTAQAVIY) MARKAZI**

**GEOMETRIYANING ASOSIY
MASALALARINI MUXANDISLIK
MASALALAR YECHISHDA QO'LLASH**

**MODULI BO'YICHA
O'QUV – USLUBIY
MAJMUA**

2025

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**OLIY TA’LIM TIZIMI KADRLARINI QAYTA
TAYYORLASH VA MALAKASINI OSHIRISH INISTITUTI**

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI PEDAGOG
KADRLARNI QAYTA TAYYORLASH VA ULARNING MALAKASINI
OSHIRISH TARMOQ (MINTAQAVIY) MARKAZI**

**“Geometriyaning asosiy masalalarini muxandislik
masalalar yechishda qo‘llash”**

MODULI BO‘YICHA

O‘QUV–USLUBIY MAJMUUA

Toshkent - 2025

Modulning o‘quv-uslubiy majmuasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 27-dekabrdagi 485-sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan oliy ta’lim muassasalari pedagog kadrlarini qayta tayyorlash va malaka oshirish yo‘nalishlari o‘quv reja va dasturlariga muvofiq ishlab chiqilgan.

- Tuzuvchilar:** **Tayanch modullari:**
A.S.Sharipov - O‘zbekiston Milliy universiteti, “Geometriya va topologiya” kafedrası professori, f.-m.f.d., professor.
- Taqrizchi:** J.O.Aslonov – O‘zbekiston Milliy universiteti, “Geometriya va topologiya” kafedrası dotsenti, f.-m.f.n., dotsent.
- Xorijiy ekspert:** T.I.Buxarova – MMFI Milliy Tadqiqot Yadro universiteti Federal davlat avtonom oliy ta’lim muassasasining “Oliy matematika” kafedrası dosenti, f.-m.f.n.,dotsent.

*O‘quv uslubiy majmua Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Kengashining qarori bilan nashrga tavsiya qilingan
(2024- yil “29” noyabrdagi 4-sonli bayonnoma).*

MUNDARIJA

I. ISHCHI DASTUR	5
II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI.....	9
III. NAZARIY MA’LUMOTLAR.....	17
IV. AMALIY MASHG‘ULOTLAR	31
V. GLOSSARIY	40
VI. ADABIYOTLAR RO‘YXATI:.....	44

I. ISHCHI DASTUR

KIRISH

Dastur O‘zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentyabrda tasdiqlangan “Ta’lim to‘g‘risida”gi Qonuni, O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 3-dekabrda “Iqtidorli yoshlarni saralab olish tizimi va akademik litseylar faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4910-son hamda Vazirlar Mahkamasining 2022-yil 1-iyundagi “Akademik litseylar rahbar va pedagog xodimlarining uzduksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to‘g‘risida”gi 296-son Qarorlarida belgilangan ustuvor yo‘nalishlar mazmunidan kelib chiqqan holda tuzilgan bo‘lib, u zamonaviy talablar asosida malaka oshirish jarayonlarining mazmunini takomillashtirish hamda akademik litseylar pedagog xodimlarining kasbiy kompetentligini muntazam oshirib borishni maqsad qiladi.

Dastur doirasida berilayotgan tayanch modullari mavzulari orqali akademik litseylarda faoliyat olib borayotgan pedagog xodimlarning vektorlar va ularning tenglamalar yechishga oid zamonaviy yondashuvlardan samarali foydalanish, projektiv geometriyaning tatbiqlarini amalga oshirish, sonlar nazariyasining tenglamalar yechishga oid asoslarini o‘zlashtirish darajasini oshirish hisobiga ularning pedagogik mahorat va kasbiy kompetentligini muntazam takomillashtirish bilan birgalikda pedagog xodimlarning ehtiyojlari asosida tanlab olingan tanlov modullari bo‘yicha bilim, ko‘nikma va malakalarga ega bo‘lishlari ta’minlanadi.

Modulning maqsadi va vazifalari

Modulning maqsadi pedagog xodimlarning o‘quv-tarbiyaviy jarayonlarini yuqori ilmiy-metodik darajada ta’minlashlari uchun zarur bo‘ladigan kasbiy bilim, ko‘nikma va malakalarini muntazam yangilash, kasbiy kompetentligi va pedagogik mahoratining uzluksiz rivojlanishini ta’minlashdan iborat.

Modulning **vazifalariga** quyidagilar kiradi:

- pedagog xodimlarning kasbiy bilim, ko‘nikma, malakalarini uzluksiz yangilash va rivojlantirish;

- pedagoglarning zamonaviy talablarga mos holda akademik litseylardagi o'qitish sifati va samaradorligini ta'minlash uchun zarur bo'lgan kasbiy mahorat darajasini oshirish;

- o'qitishning innovatsion texnologiyalari va ilg'or xorijiy tajribalarni o'zlashtirish hamda ulardan o'quv jarayonida samarali foydalanish ko'nikmalarini shakllantirish;

- o'quv jarayonini ilm-fan va ishlab chiqarish bilan samarali integratsiyasini ta'minlashga qaratilgan faoliyatni tashkil etish.

Modul bo'yicha qo'yiladigan talablar

Kurs yakunida tinglovchilar quyidagi yo'nalishlarda bilim, ko'nikma, malaka hamda kompetensiyalarga ega bo'lishlari talab etiladi:

Tinglovchi:

- ikki nuqta orasidagi masofani;
- tetraedrning hajmini;
- uchburchakning yuzasini;
- kesmani berilgan nisbatda bo'lishni;
- ikki qaytali vektor ko'paytmalarni;
- tekislikda affin almashtirishlari, fazoda affin almashtirishlarini;
- affin almashtirishlarida yuzalar va hajmlar nisbatlarining saqlanishini **bilishi** kerak.

Tinglovchi:

- tetraedrning hajmini topish;
- geometriyaning sodda masalalarini echish;
- kesmani berilgan nisbatda bo'lish;
- chiziqli va kvadratik modellash;
- affin almashtirishlarida yuzalar va hajmlar nisbatlarini saqlash;

- bir bazisdan boshqa bazisga o'tish matrisasi, ortogonal almashtirishlar, izometrik almashtirishlar, harakatlardan foydalanish **ko'nikma va malakalariga** ega bo'lishi lozim.

Tinglovchi:

- geometriyaning sodda masalalarini yechishda qo'llay olish;
- kesmani berilgan nisbatda bo'lish;
- kesmani berilgan nisbatda bo'lish va ularni amaliyotga tadbiq etish;
- tekislikda affin almashtirishlari, fazoda affin almashtirishlarini qo'llay olish **kompetensiyalariga** ega bo'lishi lozim.

“Geometriyaning asosiy masalalarini muxandislik masalalar yechishga qo'llash” moduli bo'yicha soatlar taqsimoti

№	Modul mavzulari	Tinglovchining o'quv yuklamasi, soat			
		Hammasi	Auditoriya o'quv yuklamasi		
			Jami	jumladan	
				Nazariy	Amaliy
1.	Geometriyaning sodda masalalari.	2	2	2	
2.	Uchburchakning yuzasi.	2	2	2	
3.	Tekislikda affin almashtirishlari, fazoda affin almashtirishlari.	2	2		2
4.	Bir bazisdan boshqa bazisga o'tish matrisasi, ortogonal almashtirishlar, izometrik almashtirishlar, harakat.	2	2		2
Jami:		8	8	4	4

NAZARIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-MAVZU: GEOMETRIYANING SODDA MASALALARI.

Geometriyaning sodda masalalari. Ikki nuqta orasidagi masofa. Tetraedrning hajmi.

2-MAVZU: UCHBURCHAKNING YUZASI.

Uchburchakning yuzasi. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish. Ikki qaytali vektor ko‘paytma.

AMALIY MASHG‘ULOTLAR MAZMUNI

1-AMALIY MASHG‘ULOT: TEKISLIKDA AFFIN ALMASHTIRISHLARI, FAZODA AFFIN ALMASHTIRISHLARI.

Tekislikda affin almashtirishlari, fazoda affin almashtirishlari. Affin almashtirishlarida yuzalar va hajmlar nisbatlarining saqlanishi.

2-AMALIY MASHG‘ULOT: BIR BAZISDAN BOSHQA BAZISGA O‘TISH MATRISASI, ORTOGONAL ALMASHTIRISHLAR, IZOMETRIK ALMASHTIRISHLAR, HARAKAT.

Bir bazisdan boshqa bazisga o‘tish matrisasi, ortogonal almashtirishlar, izometrik almashtirishlar, harakat. Harakatlar izometrik almashtirishlar sifatida.

II. MODULNI O‘QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA’LIM METODLARI

AQLIY XUJUM METODI

Aqliy xujum - g‘oyalarni generatsiya (ishlab chiqish) qilish metodidir. “Aqliy xujum” metodi biror muammoni yechishda talabalar tomonidan bildi - rilgan erkin fikr va mulohazalarni to‘plab, ular orqali ma’lum bir yechimga kelinadigan eng samarali metoddir. Aqliy xujum metodining yozma va og‘zaki shakllari mavjud. Og‘zaki shaklida o‘qituvchi tomonidan berilgan savolga talabalarning har biri o‘z fikrini og‘zaki bildiradi. Talabalar o‘z javoblarini aniq va qisqa tarzda bayon etadilar. Yozma shaklida esa berilgan savolga talabalar o‘z javoblarini qog‘oz kartochkalarga qisqa va barchaga ko‘rinarli tarzda yozadilar. Javoblar doskaga (magnitlar yordamida) yoki “pinbord” doskasiga (ignalar yordamida) mahkamlanadi. “Aqliy xujum” metodining yozma shaklida javoblarni ma’lum belgilar bo‘yicha guruhlab chiqish imkoniyati mavjuddir. Ushbu metod to‘g‘ri va ijobiy qo‘llanilganda shaxsni erkin, ijodiy va no - standart fikrlashga o‘rgatadi.

Aqliy xujum metodidan foydalanilganda talabalarning barchasini jalb etish imkoniyati bo‘ladi, shu jumladan talabalarda muloqot qilish va munozara olib borish madaniyati shakllanadi. Talabalar o‘z fikrini faqat og‘zaki emas, balki yozma ravishda bayon etish mahorati, mantiqiy va tizimli fikr yuritish ko‘nikmasi rivojlanadi. Bildirilgan fikrlar baholanmasligi talabalarda turli g‘oyalar shakllanishiga olib keladi. Bu metod talabalarda ijodiy tafakkurni rivojlantirish uchun xizmat qiladi.

Vazifasi. “Aqliy xujum” qiyin vaziyatlardan qutulish choralarini topishga, muammoni ko‘rish chegarasini kengaytirishga, fikrlash bir xilli - ligini yo‘qotishga va keng doirada tafakkurlashga imkon beradi. Eng asosiysi, muammoni yechish jarayonida kurashish muhitidan ijodiy hamkorlik kayfiyatiga o‘tiladi va guruh yanada jipslashadi.

Obyekti. Qo‘llanish maqsadiga ko‘ra bu metod universal hisoblanib tadqiqotchilikda (yangi muammoni yechishga imkon yaratadi), o‘qitish jarayonida (o‘quv materiallarini tezkor o‘zlashtirishga qaratiladi), rivojlantirishda (o‘z-o‘zini

bir muncha samarali boshqarish asosida faol fikrlashni shakllanti - radi) asqotadi.

Qo'llanish usuli. “Aqliy xujum” ishtirokchilari oldiga qo'yilgan muammo bo'yicha xar qanday muloxaza va takliflarni bildirishlari mumkin. Aytilgan fikrlar yozib borildi va ularning mualliflari o'z fikrlarini qay - tadan xotirasida tiklash imkoniyatiga ega bo'ldi. Metod samarasi fikrlar xilma-xilligi bilan tavsiflandi va xujum davomida ular tanqid qilin - maydi, qaytadan ifodalanmaydi. Aqliy xujum tugagach, muhimlik jixatiga ko'ra eng yaxshi takliflar generatsiyalanadi va muammoni yechish uchun zarurlari tanlanadi.

“Aqliy xujum” metodi o'qituvchi tomonidan qo'yilgan maqsadga qarab amalga oshiriladi:

1. Talabalarning boshlang'ich bilimlarini aniqlash maqsad qilib qo'yilganda, bu metod darsning mavzuga kirish qismida amalga oshiriladi.
2. Mavzuni takrorlash yoki bir mavzuni keyingi mavzu bilan bog'lash maqsad qilib qo'yilganda - yangi mavzuga o'tish qismida amalga oshiriladi.
3. O'tilgan mavzuni mustahkamlash maqsad qilib qo'yilganda - mavzudan so'ng, darsning mustahkamlash qismida amalga oshiriladi.

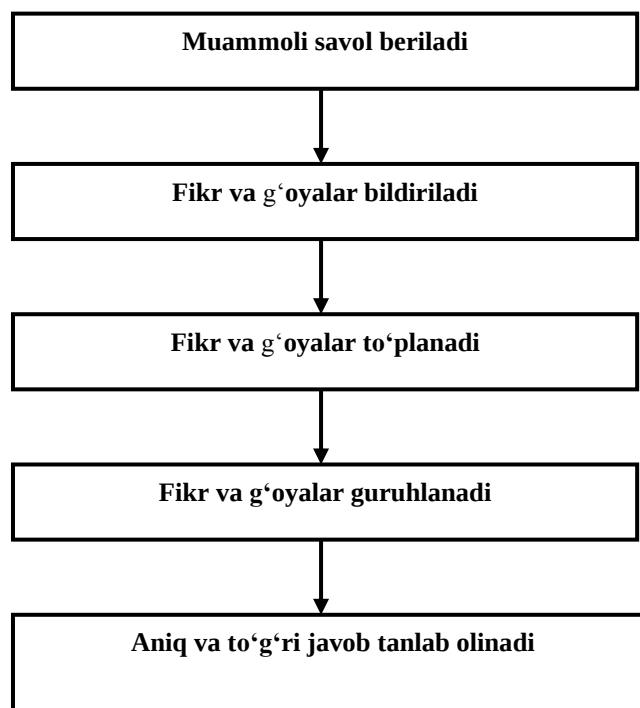
“Aqliy xujum” metodining afzallik tomonlari:

- natijalar baholanmasligi talabalarni turli fikr-g'oyalarning shakl - lanishiga olib keladi;
- talabalarning barchasi ishtirok etadi;
- fikr-g'oyalar vizuallashtirilib boriladi;
- talabalarning boshlang'ich bilimlarini tekshirib ko'rish imkoniyati mavjud;
- talabalarda mavzuga qiziqish uyg'otish mumkin.

“Aqliy xujum” metodining kamchilik tomonlari:

- o'qituvchi tomonidan savolni to'g'ri qo'ya olmaslik;
- o'qituvchidan yuqori darajada eshitish qobiliyatining talab etilishi.

“Aqliy xujum” metodining tarkibiy tuzilmasi



“Aqliy xujum” metodining bosqichlari:

1. Talabalarga savol tashlanadi va ularga shu savol bo'yicha o'z javoblarini (fikr, mulohaza) bildirishlarini so'raladi;
2. Talabalar savol bo'yicha o'z fikr-mulohazalarini bildirishadi;
3. Talabalarining fikr-g'oyalari (magnitafonga, videotasmaga, rangli qog'ozlarga yoki doskaga) to'planadi;
4. Fikr-g'oyalar ma'lum belgilar bo'yicha guruhlanadi;
5. Yuqorida qo'yilgan savolga aniq va to'g'ri javob tanlab olinadi.

“Aqliy xujum” metodini qo'llashdagi asosiy qoidalar:

- a) Bildirilgan fikr-g'oyalar muhokama qilinmaydi va baholanmaydi.
- b) Bildirilgan har qanday fikr-g'oyalar, ular hatto to'g'ri bo'lmasa ham inobatga olinadi.
- v) Bildirilgan fikr-g'oyalarni to'ldirish va yanada kengaytirish mumkin.

Mavzu bo'yicha asosiy tushuncha va iboralar

Zamonaviy ta'lim vositasi tushunchasi , ta'lim vositasi turlari, ta'lim vositasini qo'llash usullari

- ✓ O'zaro hurmat va iltifot ko'rsatgan xolda har kim o'z do'stlarini tinglay olishi kerak;
- ✓ Berilgan topshiriqqa nisbatan har kim aktiv, o'zaro hamkorlikda va ma'suliyatli yondashishi kerak;
- ✓ Zarur paytda g'ar kim yordam so'rashi kerak;
- ✓ So'ralgan paytda har kim yordam ko'rsatishi kerak;
- ✓ Gurux ish natijalari baholanayotganda hamma qatnashishi kerak;
- ✓ Har kim aniq tushunishi kerakki:
- ✓ O'zgalarga yordam berib, o'zimiz o'rganamiz!
- ✓ Biz bir qayiqda suzayapmiz: yo birga ko'zlagan manzilga yetamiz, yoki birga cho'kamiz!

“Davra suhbat” munozarasini o'tkazish bo'yicha yo'riqnoma

1. So'zga chiqqanlarni diqqat bilan, bo'lmasdan tinglang.
2. Ma'ruzachining fikriga qo'shilmasang, o'z fikringni bildirishga ruxsat so'ra.
3. Ma'ruzachining fikriga qo'shilsang, ko'rib chiqilayotgan masala bo'yicha qo'shimcha fikrlar bildir.

Tayanch so'zlar va iboralar:

- ❖ Bazis va o'lcham
- ❖ Tekislikda va fazoda affin koordinatalar sistemasi
- ❖ Tekislikda va fazoda dekart koordinatalar sistemasi.
- ❖ Dekart koordinatalar sistemalarini almashtirish

- ❖ Ikki nuqta orasidagi masofa
- ❖ Tetraedrning hajmi
- ❖ Uchburchakning yuzasi.

5. Ta'lim texnologiyasi

“Geometriyaning asosiy masalalarini muxandislik masalalar yechishga qo'llash” modulidan ma'ruza o'qish texnologiyasi modeli

Mavzu: Geometriyaning asosiy masalalari

O'quv vaqti: 80 daqiqa	Tinglovchilar: Akademik litsey o'qituvchilari
O'quv mashg'ulot turi	Ma'ruza
O'quv mashg'ulot rejasi	1. Bazis va o'lcham tushunchasi. Tekislikda va fazoda affin koordinatalar sistemasi 2. Tekislikda va fazoda dekart koordinatalar sistemasi. Dekart koordinatalar sistemalarini almashtirish 3. Geometriyaning sodda masalalari: Ikki nuqta orasidagi masofa. Tetraedrning hajmi. Uchburchakning yuzasi. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish
O'quv mashg'ulot maqsadi: tinglovchilarda gyeometriyaning sodda masalalari: Ikki nuqta orasidagi masofa. Tetraedrning hajmi. Uchburchakning yuzasi. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish haqidagi tushunchalarni shakllantirish va rivojlantirishdan iborat	
Pedagogik vazifalar: • Mavzu bo'yicha tinglovchilarning bilimlarini oshirish;	O'quv faoliyati natijalari: tinglovchilar bilishlari kerak: • Tekislikda koordinatalar sistemasi tushunchasini bilishlari;

• Funksiya va uning grafigining maqsadi va vazifalarini tushuntirib berish; • Tinglovchilarga funksiya tatbiqlarini tushuntirish;		• Dekart koordinatalar sistemalarini almashtirish qoidalarini bilishlari; • Geometriyaning sodda masalalari; • Mavzuga oid misol va masalalar yecha olishlari.
O'qitish metodi va texnikasi		Interfaol metod
O'qitish vositasi		T.A. Azlarov, X.T. Mansurovlarning " Matematik analiz " darsligi, doska, tarqatma materiallar, internet havolalari.
Ish vaqti bosqichlari	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Tinglovchilar faoliyatining mazmuni
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuni, mavzu rejasini, maqsadini, rejalashtirilayotgan o'quv natijalarini va o'quv mashg'ulot xususiyatini tushuntiradi. 1.2. Avvalgi darsda o'tilgan mavzuni takrorlagan xolda bugungi mavzu bilan bog'lanishni tushuntirib beradi.	Eshitadilar, yozadilar.
2-bosqich. Asosiy (60 daqiqa)	2.1. Mavzuni to'lig'icha talqin etadi. Rejadagi har bir tushunchalarni tinglovchilarga tushuntirib beradi. 2.2. Mavzu bo'yicha tinglovchilarga savollar beradi. 2.3. Mavzu bo'yicha tipik masala va misollar keltiradi.	Eshitadilar, yozadilar, savollar beradilar.
3-bosqich. Yakunlovchi (10 daqiqa)	3.1. Mavzuni yakunlaydi. 3.2. Tinglovchilarga mustaqil o'rganishlari uchun vazifalar topshiradi.	Eshitadilar, yozadilar

“Geometriyaning asosiy masalalarini muxandislik masalalar yechishga qo‘llash” moduli bo‘yicha amaliy mashg‘ulot texnologiyasi modeli
Mavzu: Geometriyaning asosiy masalalari

O‘quv vaqti: 80 daqiqa	tinglovchilar: Akademik litsey o‘qituvchilari
O‘quv mashg‘ulot turi	Amaliyot
O‘quv mashg‘ulot rejasi	1. Bazis va o‘lcham tushunchasi. Tekislikda va fazoda affin koordinatalar sistemasi 2. Tekislikda va fazoda dekart koordinatalar sistemasi. Dekart koordinatalar sistemalarini almashtirish 3. Geometriyaning sodda masalalari: Ikki nuqta orasidagi masofa. Tetraedrning hajmi. Uchburchakning yuzasi. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish
O‘quv mashg‘ulot maqsadi: tinglovchilarda funksiya tushunchasini shakllantirish va rivojlantirishdan iborat	
Pedagogik vazifalar: • Mavzu bo‘yicha tinglovchilarning bilimlarini oshirish; • Funksiya va uning grafigining maqsadi va vazifalarini tushuntirib berish; • Tinglovchilarga funksiya tatbiqlarini tushuntirish;	O‘quv faoliyati natijalari: tinglovchilar bilishlari kerak: • Tekislikda koordinatalar sistemasi tushunchasini bilishlari; • Dekart koordinatalar sistemalarini almashtirish qoidalarini bilishlari; • Geometriyaning sodda masalalari; • Mavzuga oid misol va masalalar yecha olishlari.
O‘qitish metodi va texnikasi	Interfaol metod
O‘qitish vositasi	M.Saxayev “Elementar matematika masalalari to‘plami”, I qism, doska, tarqatma materiallar

Ish vaqti bosqichlari	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Tinglovchilar faoliyatining mazmuni
1-bosqich. O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mavzuni, mavzu rejasini, maqsadini, rejalashtirilayotgan o'quv natijalarini va o'quv mashg'ulot xususiyatini tushuntiradi. 1.2. Avvalgi darsda o'tilgan mavzuni takrorlagan xolda bugungi mavzu bilan bog'lanishni tushuntirib beradi.	Eshitadilar, yozadilar.
2-bosqich. Asosiy (65 daqiqa)	2.1. Funksiya ta'rifi. Funksiyaning aniqlanish va o'zgarish sohalarini (to'plamlari) misollarda ko'rsatish. 2.2. Chegaralangan va monoton funksiyalarga doir masalalar ishlash. 2.3. Juft, toq va davriy funksiyalarga doir masalalar ishlash. 2.4. Murakkab va teskari funksiyalarga doir masalalar ishlash. 2.5. Tinglovchilar bilan birgalikda misol va masalalar yechish	Eshitadilar, yozadilar, misollar yechadilar, savollar beradilar.
3-bosqich. Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Mavzuni yakunlaydi. 3.2. Tinglovchilarga mustaqil o'rganishlari uchun misol va masalalar topshiradi. 3.3. Savol-javobda, misol va masala yechishda faol ishtirok etgan tinglovchilarni rag'batlantirish.	Eshitadilar, yozadilar

III. NAZARIY MA'LUMOTLAR

1-Mavzu: Geometriyaning sodda masalalari

Reja

- 1.Geometriyaning sodda masalalari
- 2.Ikki nuqta orasidagi masofa
- 3.Tetraedrning hajmi

1. Ikki nuqta orasidagi masofa

m - o'lchamli V_m (m – tayin son, $m = 1,2,3$) fazoda to'g'riburchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin.

Uch o'lchamli V_3 (V_1 va V_2 hollarda ham masala xuddi shunday hal qilinadi) fazoda ikkita $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarni qaraymiz. U holda ular orasidagi masofa

$$r(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Ikki o'lchamli V_2 tekislikda esa $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$r(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

kabi topiladi.

Bir o'lchamli V_1 to'g'ri chiziqda $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa $\rho(A, B) = |x_2 - x_1|$ kabi hisoblanadi.

3.Tetraedrning hajmi

Fazoda dekart koordinatalar sistemasi $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ berilgan, shu bilan fazo oriyentirlangan bo'lsin.

Ta’rif. Uchta $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning (ko‘rsatilgan tartibda olingan) aralash ko‘paytmasi deb, birinchi ikki vektorning vektor ko‘paytmasiga uchinchi vektorni skalyar ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan songa aytiladi.

$[\vec{a} \vec{b}] \cdot \vec{c}$ yoki $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$ ko‘rinishlarda yoziladi.

Teorema. (aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosi). Uchta komplanar bo‘lmagan $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasining absolyut qiymati, bu vektorlar uzunliklariga yasalgan parallelepiped hajmiga teng, ya’ni

$$|(\vec{a} \vec{b} \vec{c})| = V_n \quad (1)$$

Isbot. $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning boshini O nuqtaga ko‘chirib parallelepipedni yasaymiz. $OH = h$ - parallelepiped balandligi. $[\vec{a} \vec{b}]$ - son parallelepiped asosining yuzi. Ta’rifga asosan $[\vec{a} \vec{b}] \cdot \vec{c} = |[\vec{a} \vec{b}]| \cdot |\vec{c}| \cos \phi$. $\phi = \left([\vec{a} \vec{b}] \wedge \vec{c} \right)$ bo‘lib, OHC

to‘g‘ri burchakli uchburchakdan $\frac{OH}{|\vec{c}|} = \cos \phi$.

$$h = |\vec{c}| \cos \phi. S_{ac} = |[\vec{a} \vec{b}]|. \quad |[\vec{a} \vec{b}] \cdot \vec{c}| = V.$$

Aralash ko‘paytma xossalari.

$$1^\circ. (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = (\vec{c} \vec{a} \vec{b}).$$

Haqiqatan ham, uch vektorlarga qurilgan hamma parallelepiped hajmlari teng va vektor uchtaliklarining oriyentatsiyalari bir xil.

$$2^\circ. (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c}).$$

Haqiqatan, $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = [\vec{a} \vec{b}] \cdot \vec{c} = -[\vec{b} \vec{a}] \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c})$. Demak, $(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = -(\vec{b} \vec{a} \vec{c})$.

$$(\vec{b} \vec{c} \vec{a}) = -(\vec{c} \vec{b} \vec{a}), (\vec{c} \vec{a} \vec{b}) = -(\vec{a} \vec{c} \vec{b})$$

$$3^\circ. ((\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{d}) = (\vec{a} \vec{c} \vec{d}) + (\vec{b} \vec{c} \vec{d}).$$

Buni isbotlashda vektor ko‘paytma xossalaridan foydalanamiz.

$$((\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} \vec{d}) = [(\vec{a} + \vec{b}) \vec{c}] \vec{d} = ([\vec{a} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{c}]) \vec{d} = [\vec{a} \vec{c}] \vec{d} + [\vec{b} \vec{c}] \vec{d} = (\vec{a} \vec{c} \vec{d}) + (\vec{b} \vec{c} \vec{d}).$$

4°. $\forall \lambda \in R$ uchun $(\lambda \vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \lambda (\vec{a} \vec{b} \vec{c})$. Bu xossani isbotlashda ham vektor ko‘paytma xossalaridan foydalanamiz.

$$(\lambda \vec{a} \vec{b} \vec{c}) = [\lambda \vec{a} \vec{b}] \vec{c} = \lambda [\vec{a} \vec{b}] \vec{c} = \lambda (\vec{a} \vec{b} \vec{c})$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning aralash ko‘paytmasi.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \\ \vec{b} &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\vec{c} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}.$$

3-§ dagi uchburchak yuzi formulasiga asosan

$$[\vec{a} \vec{b}] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$[\vec{a} \vec{b}]$ vektorni $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ vektorga skalyar ko‘paytiramiz.

$$[\vec{a} \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3,$$

demak,

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Bu formuladan foydalanib tetraedr hajmini hisoblash formulasini chiqaraylik.

Tetraedr uchlari $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarda bo'lsin.

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$$\overrightarrow{AD}(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1).$$

Tetraedr hajmi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektorlarga yasalgan parallelepipedning hajmini $\frac{1}{6}$ bo'lagiga teng.

$$V_{mem} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

2-mavzu: Uchburchakning yuzasi.

Reja:

1. Uchburchakning yuzasi.
2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish
3. Ikki qaytali vektor ko'paytma.

Uchburchak yuzi

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ koordinatalarga ega bo'lsin. Bu vektorlarning vektor ko'paytmasining koordinatalarini topaylik:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \\ \vec{b} &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.\end{aligned}$$

Vektor ko'paytma va xossalari e'tiborga olib:

$$\begin{aligned}[\vec{a} \ \vec{b}] &= [x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}] = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \\ [\vec{a} \ \vec{b}] &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Uchburchak yuzi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzining yarmiga teng.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\vec{a} \ \vec{b}]|,$$

bundan

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$$

2. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

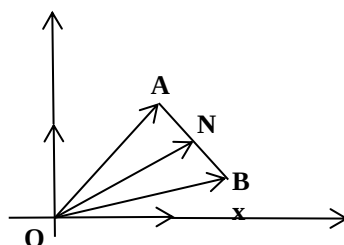
Tekislikni A va B nuqtalar va $\lambda \neq -1$ haqiqiy son berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar

$$\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{NB} \quad (1)$$

shart o'rinli bo'lsa, u holda nuqta AB kesma berilgan λ nisbatda bo'ladi deyiladi.

λ sonni uchta A, B, N nuqtalarning oddiy nisbati deyiladi va $\lambda = (AN : NB)$



20-chizma

ko'rinishda yoziladi.

Agar $\lambda > 0$ bo'lsa, $\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{NB}$ vektorlar bir xil yo'nalgan bo'ladi, $N \in \overline{AB}$ kesmada yotadi, agar $\lambda < 0$ bo'lsa, $N \notin \overline{AB}$. $\overrightarrow{AN}$ va $\overrightarrow{NB}$ vektorlarning ishoralari har xil bo'ladi.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $N(x, y)$ koordinatalarga ega bo'lsin.

Bo'luvchi N nuqtani koordinatalarini topaylik.

$$\overrightarrow{AN}(x - x_1, y - y_1), \overrightarrow{NB}(x_2 - x, y_2 - y)$$

(1) formuladan foydalanib yozamiz.

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1)$$

Bundan:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{aligned} \quad (2)$$

(2) formula berilgan kesmani λ nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatalarini topish formulasi.

Agar $\lambda=1$ teng bo'lsa, N nuqta berilgan kesmani teng ikkiga bo'ladi. Ya'ni

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

1-misol. Uchlari $A(1, 2)$, $N(0, 5)$, $C(-2, 3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchaklarning medianalar kesishgan nuqtasini toping.

Yechish: AD mediana $D(x, y)$ nuqta BC tomon o'rta nuqtasi $D(-1, 4)$.

Uchburchak medianalar kesishgan nuqtasi $O(x, y)$ bo'lsin, u holda

$$\begin{aligned} \frac{AO}{OD} &= \lambda = 2:1, \lambda = 2 \\ x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{1 + 2(-1)}{3} = -\frac{1}{3} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Demak, $O(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3})$.

3. Ikki qaytali vektor ko'paytma

Uch o'lchamli V_3 fazoda $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Agar $\vec{b}$ vektor $\vec{c}$ vektorga vektor ko'paytirilsa, hosil bo'lgan $[\vec{b}, \vec{c}]$ vektorni $\vec{a}$ vektorga ham vektor ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ vektor ikki qaytali vektor ko'paytma deb ataladi.

5 - Tasdiq. Ikki vektorni ikki qaytali vektor ko'paytmasi o'rtadagi vektorni qolgan ikkitasining skalyar ko'paytmasidan, ichki vektor ko'paytmadagi ikkinchi

vektorni qolgan ikkita vektorlarning skalyar ko'paytmasiga ko'paytirish natijasi ayirilganiga teng, ya'ni

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

3-mavzu: Tekislikda affin almashtirishlari, fazoda affin almashtirishlari.

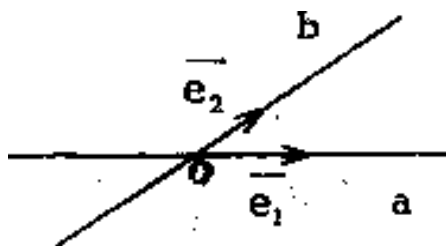
Reja

1. Tekislikda va fazoda affin koordinatalar sistemasi
2. Tekislikda va fazoda dekart koordinatalar sistemasi
3. Tekislikda affin koordinatalar sistemasini almashtirish.
4. Tekislikda affin koordinatalar sistemasini almashtirish.

Tayanch iboralar: Bazis va o'lcham tushunchasi. Tekislikda va fazoda affin koordinatalar sistemasi. Tekislikda va fazoda dekart koordinatalar sistemasi. Dekart koordinatalar sistemalarini almashtirish.

1. Tekislikda va fazoda affin koordinatalar sistemasi

Tekislikda O nuqtaga qo'yilgan ikkita $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ bazis vektorlar berilgan bo'lsin (1-chizma). Bu vektorlar orqali o'tuvchi a va b to'g'ri chiziqlarni olamiz ($a \cap b = 0$).



1-chizma.

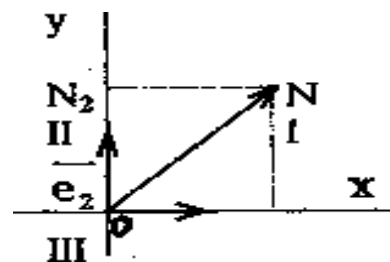
1 - Ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ vektorlar bilan aniqlanuvchi a va b to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan sistema tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va 0 , $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ yoki $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ko'rinishda belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ vektorlarni koordinat vektorlar deyiladi; a to'g'ri chiziqni Ox bilan belgilab abtsissalar o'qi, b to'g'ri chiziqni esa Oy bilan belgilab ordinatalar o'qi deb ataladi.

Tekislikda $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikda birorta N nuqtani olaylik (2- chizma) $\overrightarrow{ON}$ vektorni N nuqtaning *radius* vektori deyiladi.

$\overrightarrow{ON}$ vektorni hamma vaqt bazis vektorlari buyicha yoyib yozish mumkin:

$$\overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$x, y \in R$. x, y sonlar ON radius vektorning koordinatalari deyiladi, $\overrightarrow{ON}(x; y)$ yoziladi.



2-chizma.

Radius-vektorning x, y koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi $N(x, y)$ belgilaymiz. Bunda x soni N nuqtaning absissasi yoki birinchi koordinatasi, y son esa N nuqtaning ordinatasi yoki ikkinchi koordinatasi deyiladi.

Xullas, tekislikda affin koordinatalar sistemasi berilsa, istalgan N nuqtaga uning koordinatalari bo'lmish bir juft $x, y \in R^2 = R \times R$ sonlar mos keladi, aksincha, ma'lum tartibda olingan $x, y \in R$ sonlari, koordinatalari shu sonlardan iborat bitta N nuqta mos keladi.

Haqiqatan, tekislikda $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin (2-chizma) absissalar o'qiga O nuqtadan boshlab $\overrightarrow{ON}_1 = x\vec{e}_1$ vektorni, ordinatalar o'qiga esa $\overrightarrow{ON}_2 = y\vec{e}_2$ vektorlarni qo'yib, N_1 va N_2 nuqtalardan Oy va Ox o'qlarga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz, ularning kesishgan nuqtasi izlanayotgan N nuqta bo'ladi, chunki $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON}_1 + \overrightarrow{ON}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

Shunday qilib, $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ga nisbatan $N(x, y) \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$
Agar $x=0$ bo'lsa $\overrightarrow{ON} = y\vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{ON} \parallel x\vec{e}_1 \Rightarrow N \in oy$

Agar $y=0$ bo'lsa $N \in ox$, ya'ni Ox o'qida yotadi.

Shunday qilib, abtsissa o'qida yotgan nuqta koordinatalari $(x, 0)$ va ordinata o'qida yotgan nuqtaning koordinatalar $(0, y)$ bo'ladi. Koordinatalar boshining koordinatalari $O(0, 0)$ bo'ladi.

Koordinat o'qlari tekislikni to'rtta qismga ajratadi. Har bir qismni chorak deyiladi.

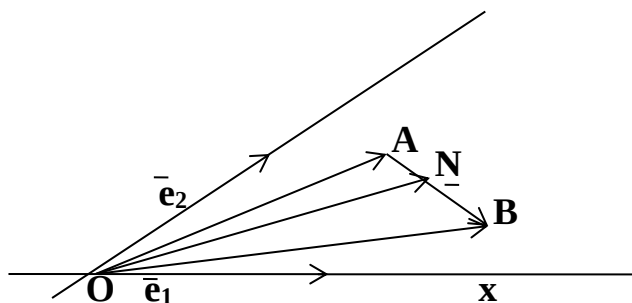
$M(x, y)$ nuqta koordinat o'qlarda yotmasa uning qaysi chorakda yotishini x, y sonlarning ishorasiga qarab aniqlash mumkin.

1-masala. AB vektorlarining boshi $A(x_1, y_1)$ va oxiri $B(x_2, y_2)$ koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatasini toping.

Yechish:

$$\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{OB} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1) \vec{e}_1 - (y_2 - y_1) \vec{e}_2 \quad \text{bundan } \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$



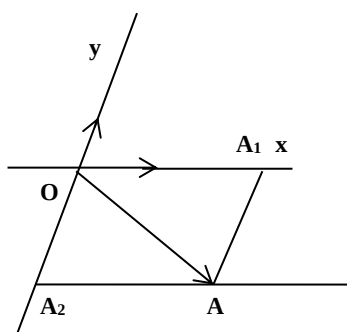
3-chizma

2-misol. Affin koordinatalar sistemasi berilgan $A(3, -3)$, $B(0, 3)$, $C(-2, 0)$ nuqtalarni yasang.

Yechish. A nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{OA} = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ vektorni yasaymiz.

Buning uchun O nuqtadan boshlab $\vec{e}_1$ vektorga kollinear $\overrightarrow{OA_1} = 3\vec{e}_1$ vektorni, $\vec{e}_2$ kollinear $\overrightarrow{OA_2} = -3\vec{e}_2$ vektorlarni yasaymiz.

Bu vektorlarning yig'indisini yasasak OA vektoriga ega bo'lamiz va A nuqtani topamiz.



4-chizma

Tekislikda va fazoda dekart koordinatalar sistemasi

Affin koordinatalar sistemasining $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ koordinat vektori ortogonal bazisni tashkil qilsa, ya'ni $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ bo'lsa, u holda affin koordinatalar sistemasi dekart koordinatalar sistemasi bo'ladi. Bunday koordinatalar sistemasini (O, i, j) ko'rinishida belgilaymiz Bu yerda $i^2 = j^2 = 1$, $i \times j = 0$.

Dekart koordinat sistemasi affin koordinatalar sistemasining xususiy holi bo'lgani uchun affin koordinatalar sistemasiga nisbatan o'rinli mulohazalar Dekart koordinatalar sistemasida ham o'z kuchini saqlaydi.

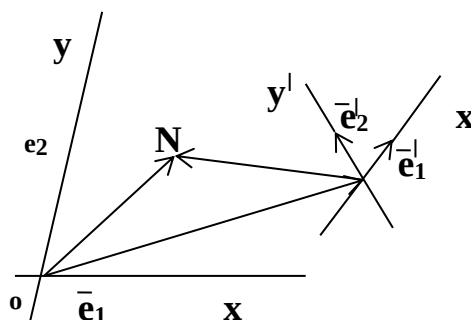
Ammo dekart koordinatalar sistemada o'rni bo'lgan ba'zi mulohazalar affinda

o'rinli bo'lavermaydi.

Tekislikda affin va dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.

Tekislikda ikkita $(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ va $(0, \bar{e}'_1, \bar{e}'_2)$ affin koordinatalar sistemasini berilgan bo'lsin (1-chizma).

Qulaylik uchun birinchisini eski, ikinchisini yangi affin koordinatalar sistemasini deb olamiz. Bundan tashqari, yangi koordinatalar sistemasining vaziyati eski koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan bo'lsin.



1-chizma

$$\bar{e}'_1(c_{11}, c_{12}), \bar{e}'_2(c_{21}, c_{22}), o'(x_0, y_0). C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ta'rifga ko'ra ushbuni yoza olamiz.

$$\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2; \\ \bar{e}'_2 &= c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2. \end{aligned} \quad o' = x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2 \quad (2)$$

Bizning maqsadimiz N nuqtaning eski koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini x, y larni, shu nuqtaning yangi koordinatalar sistemasidagi x', y' koordinatlar orqali ifodalashdir.

Vektorlarni qo'shishdagi uchburchak qoidasiga asosan

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'N} \quad \overrightarrow{O'N} = x'\bar{e}'_1 + y'\bar{e}'_2 \quad (1 - \text{chizma}).$$

Bundan, $x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = \overrightarrow{OO'} + x'\bar{e}'_1 + y'\bar{e}'_2$.

$$(2) \text{ dan foydalanib, } x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2 + (c_{11}x' + c_{12}y')\bar{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y')\bar{e}_2$$

$\bar{e}_1$ va $\bar{e}_2$ vektorlar kolleniar emasligidan foydalanib quyidagi formulani yozamiz.

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned} \quad (3)$$

(3) formuladan affin koordinatalar sistemasini almashtirish formulasi deyiladi. Bu formulaning chap tomonining koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa

$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

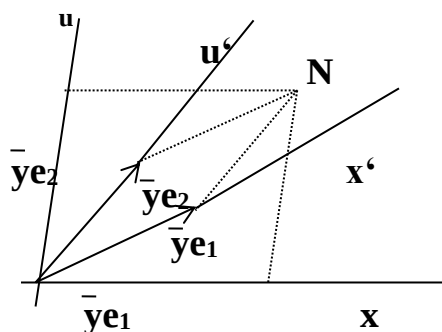
C' matritsa C matritsani transponirlash natijasida hosil qilingan. Matritsa determinanti $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ (5)

chunki $\bar{e}'_1$ va $\bar{e}'_2$ vektorlar bazis vektorlar.

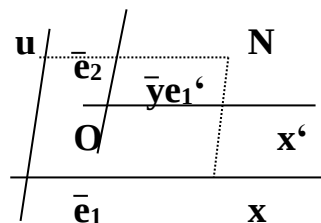
(3) ni hamma vaqt x', y' larga nisbatan yechish mumkin. Bu esa N nuqtaning yangi koordinatalar sistemasidagi x', y' larni shu nuqtaning eski sistemasidagi x, y

koordinatalar orqali ifodalash mumkinligini ko'rsatadi.

Quyidagi xususiy holni qaraymiz: 1. $O \neq O'$ $\vec{e}'_1(c_{11}, c_{21}) = \vec{e}_1(1, 0)$



3-chizma



2-chizma

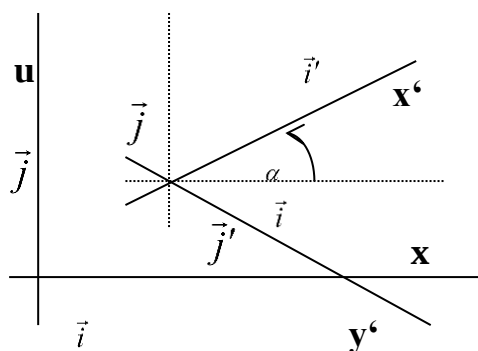
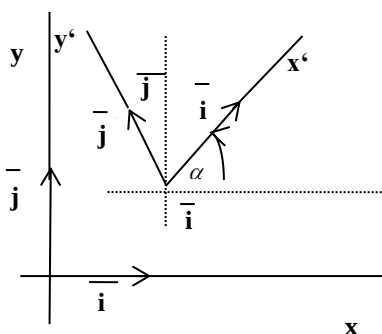
1. $O = O'$ bo'lib, bazis vektorlar turlicha bo'lsin (27-chizma), u

$$\text{holda bo'lib, } \begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' \end{cases} \quad (7)$$

formulaga ega bo'lamiz.

To'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini almashtirish.

Endi dekart koordinatalar sistemasini almashtirishga to'xtaymiz. Bir to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidan ikkinchi dekart koordinatalar sistemasiga o'tishda (4) formuladan foydalanamiz, lekin o'tish matritsasining C_{ij} ($i, j = 1, 2$) elementlariga qo'shimcha shartlar qo'yiladi.



5-chizma

Tekislikda $(o, \vec{i}, \vec{j})$ - eski $(o, \vec{i}', \vec{j}')$ - yangi dekart koordinatalar sistemasini

bo'lsin.

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j} \\ \vec{j}' &= c_{12}\vec{i} + c_{22}\vec{j}\end{aligned}\quad (8)$$

$(\vec{i} \wedge \vec{i}') = \alpha$ bo'lsin, bu yerda ikki hol o'rinli bo'ladi.

1. Eski va yangi koordinatalar sistemasi bir xil yo'nalishga ega (29-chizma).

$$(\vec{i}' \wedge \vec{j}') = 90^\circ + \alpha, \quad (\vec{i}' \wedge \vec{j}) = 90^\circ - \alpha, \quad (\vec{j} \wedge \vec{j}') = \alpha$$

(6.6) tenglikni navbat bilan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$c_{11} = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \cos(\vec{i}' \wedge \vec{j}) = \cos \alpha \quad c_{21} = \vec{i}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{i}' \wedge \vec{i}) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$c_{12} = \vec{j}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{j}' \wedge \vec{i}) = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha, \quad c_{22} = \cos \alpha$$

topilgan qiymatlarni (4) ga qo'yib,

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0 \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0\end{aligned}\quad (9)$$

Yo'nalishlari bir xil bo'lgan dekart koordinatalar sistemasini almashtirish formulasiga ega bo'lamiz.

2. Eski va yangi koordinatalar sistemasi turli yo'nalishga ega (5-chizma).

$$(\vec{j}' \wedge \vec{i}) = 270^\circ + \alpha, \quad (\vec{i}' \wedge \vec{j}) = 90^\circ - \alpha, \quad (\vec{j} \wedge \vec{j}') = 180^\circ + \alpha$$

Buni e'tiborga olib, (6) ni $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlarga navbati bilan ko'paytirsak, ushbuga ega bo'lamiz.

$$c_{11} = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \cos \alpha \quad c_{21} = \vec{i}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{i}' \wedge \vec{i}) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$c_{12} = \vec{j}' \cdot \vec{i} = \cos(\vec{j}' \wedge \vec{i}) = \cos(270^\circ + \alpha) = -\sin \alpha, \quad c_{22} = \cos(\vec{j}' \wedge \vec{j}) = \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

Topilgan qiymatlarni (4) ga qo'yib,

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + x_0 \\ y &= x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + y_0\end{aligned}\quad (10)$$

Yo'nalishlari har xil bo'lgan dekart koordinatalar sistemasini almashtirish formulasiga ega bo'lamiz.

(6) va (10) formulalarni bitta

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha + \varepsilon y' \sin \alpha + x_0 \\ y &= x' \sin \alpha + \varepsilon y' \cos \alpha + y_0\end{aligned}\quad (11)$$

formulaga birlashtirish mumkin, bu yerda $\varepsilon = \pm 1$, yo'nalishlar bir xil bo'lsa $\varepsilon = +1$, agar har xil bo'lsa $\varepsilon = -1$ ga teng.

Affin koordinatalarni almashtirish

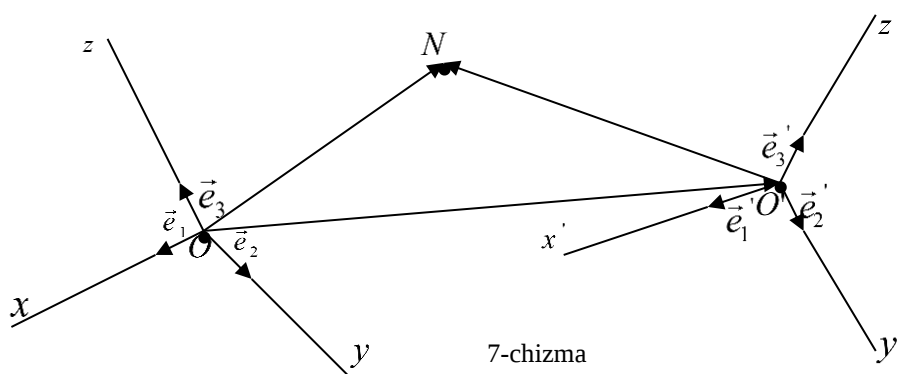
4-mavzu: Bir bazisdan boshqa bazisga o'tish matrisasi, ortogonal almashtirishlar, izometrik almashtirishlar, harakat.

Reja:

1. Bir bazisdan boshqa bazisga o'tish matrisasi
2. ortogonal almashtirishlar, izometrik almashtirishlar, harakat
3. Harakatlar izometrik almashtirishlar sifatida.

Fazoda ikkita $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ -eski, $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ -yangi affin koordinatalar sistemalari berilgan. Fazoda ixtiyoriy N nuqta olsak, uning eski sistemadagi x, y, z koordinatalar bilan, shu nuqtaning yangi sistemadagi x', y', z' koordinatalar orasidagi bog'lanishni aniqlash kerak. Yangi koordinatalar sistemasining boshi O' nuqta va koordinata vektorlari $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ eski sistemaga nisbatan berilgan bo'lsin, ya'ni:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO'}(x_0, y_0, z_0) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_1(c_{11}, c_{21}, c_{31}) &\Leftrightarrow \vec{e}'_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2(c_{12}, c_{22}, c_{32}) &\Leftrightarrow \vec{e}'_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3(c_{13}, c_{23}, c_{33}) &\Leftrightarrow \vec{e}'_3 = c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3.\end{aligned}\quad (11)$$



Vektorlarni qo'shishdagi uchburchak qoidasiga ko'ra $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'N}$, shuning uchun (7-chizma)

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 + z'\vec{e}'_3 + x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3, \quad (12)$$

(11) dagi $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ va $\vec{e}'_3$ larning ifodalarini (12) ga qo'yib, o'ng va chap tomondagi mos koeffitsiyentlarni tenglashtirib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned}x &= c_{11}x' + c_{21}y' + c_{31}z' + x_0, \\ y &= c_{12}x' + c_{22}y' + c_{32}z' + y_0, \\ z &= c_{13}x' + c_{23}y' + c_{33}z' + z_0.\end{aligned}\quad (13)$$

N nuqtaning eski sistemasidagi koordinatalari x, y, z lar yangi sistemadagi x', y', z' koordinatalar orqali (13) formulalar orqali ifodalanadi. (13) formula affin koordinatalar sistemasini almashtirish formulasi deyiladi. Bu almashtirish koeffitsiyentlaridan

$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (14)$$

matritsa tuzilgan.

N vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (15)$$

matritsani olaylik. Bu matritsani $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eski bazisdan N yangi bazisga o'tish matritsasi deyiladi. Bu matritsaning determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (15')$$

N chiziqli erkli vektorlar bo'lsa, u holda $\Delta \neq 0$.

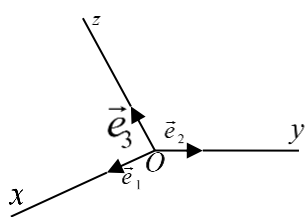
Agar $\Delta = 0$ bo'lsa, algebradan ma'lum, determinantning bitta yo'li qolgan yo'llari orqali chiziqli ifoda qilinadi. Demak, $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ va $\vec{e}'_3$ vektorlar komplanar bo'ladi, bu esa zid natija. (14) va (15) matritsalarini solishtirib, C' matritsa C matritsani transponirlash bilan hosil qilingan. Demak, C' matritsa determinanti ham nolga teng emas.

Shuning uchun (13) tenglamani x', y', z' larga nisbatan bir qiymatli echib, N nuqtaning yangi koordinatalarini shu nuqtaning eski koordinatalari orqali ifodalaymiz, ya'ni:

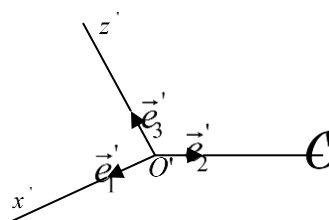
$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + c_{13}z + a, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + c_{23}z + b, \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + c_{33}z + c. \end{aligned} \quad (16)$$

Xususiy hollar:

I hol. Affin koordinatalar sistemalarining boshlari turli nuqtalarda bo'lib, bazis vektorlari mos ravishda kollinear bo'lsin. (8-chizma)



8-chizma



$$\begin{aligned} c_{11} &= 1, \quad c_{21} = 0, \quad c_{31} = 0, \\ c_{12} &= 0, \quad c_{22} = 1, \quad c_{32} = 0, \\ c_{13} &= 0, \quad c_{23} = 0, \quad c_{33} = 1, \end{aligned} \quad (17)$$

(13) va (17) larga e'tibor bersak, ushbu

$$\begin{aligned}x &= x' + x_0, \\y &= y' + y_0, \\z &= z' + z_0.\end{aligned}\tag{18}$$

formulaga ega bo'lmiz. Bu formulani koordinatalar sistemasini parallel ko'chirish formulasi deyiladi.

II hol. Eski va yangi sistemalarning koordinata boshlari bir nuqtada bo'lsin, ya'ni $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ bo'lsin, u holda (13) dan

$$\begin{aligned}x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'.\end{aligned}\tag{19}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Bir affin koordinatalar sistemasini ikkinchi affin koordinatalar sistemasiga o'tkazish formulasi (13)

$$x_0, y_0, z_0, c_{\beta\alpha} (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

12 parametrغا bog'liq.

Bir to'g'ri burchakli (O, i, j, k) koordinatalar sistemasidan ikkinchi dekart koordinatalar (O', i', j', k') sistemasiga o'tish formulasi (13) ko'rinishda bo'ladi, chunki to'g'ri burchakli dekart koordinatalar sistemi affin koordinatalar sistemasining xususiy holi.

Bu formuladagi $c_{\alpha\beta} (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ koeffitsiyentlar $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ birlik vektorning $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortonormallashtirilgan bazisga nisbatan koordinatalari bo'ladi:

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j} + c_{31}\vec{k}, \\ \vec{j}' &= c_{12}\vec{i} + c_{22}\vec{j} + c_{32}\vec{k}, \\ \vec{k}' &= c_{13}\vec{i} + c_{23}\vec{j} + c_{33}\vec{k}.\end{aligned}$$

Bu tenglikni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlarga skalyar ko'paytirib topamiz:

$$\begin{aligned}\cos\left(\vec{i}' \wedge \vec{i}\right) &= c_{11}, \cos\left(\vec{i}' \wedge \vec{j}\right) = c_{21}, \cos\left(\vec{i}' \wedge \vec{k}\right) = c_{31}, \\ \cos\left(\vec{j}' \wedge \vec{i}\right) &= c_{12}, \cos\left(\vec{j}' \wedge \vec{j}\right) = c_{22}, \cos\left(\vec{j}' \wedge \vec{k}\right) = c_{32}, \\ \cos\left(\vec{k}' \wedge \vec{i}\right) &= c_{13}, \cos\left(\vec{k}' \wedge \vec{j}\right) = c_{23}, \cos\left(\vec{k}' \wedge \vec{k}\right) = c_{33}.\end{aligned}$$

Topilgan qiymatlarni (13) formulaga qo'ysak, dekart koordinatalar sistemasini almashtirish formulasini hosil qilamiz.

$$\begin{aligned}
3\text{-}\S \text{ da} \quad & (\vec{i}')^2 = (\vec{j}')^2 = (\vec{k}')^2 = 1, \quad \vec{i}' \cdot \vec{j}' = \vec{i}' \cdot \vec{k}' = \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0, \\
& c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1, \quad c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, \\
& c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1, \quad c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0, \\
& c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1. \quad c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

IV. AMALIY MASHG'ULOTLAR

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1. $A(1)$ va $B(-5)$ nuqtalar bilan chegaralangan kesma $M(x)$ nuqta bilan $AM:MB = 1:2$ nisbatda bo'lingan. M nuqtaning koordinatasi topilsin.

Yechish: AB kesmani $\frac{AM}{MB} = \lambda$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatasi

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

formuladan topiladi. Bizda $x_1 = 1$, $x_2 = -5$ va $\lambda = \frac{1}{2}$ bo'lganligi uchun

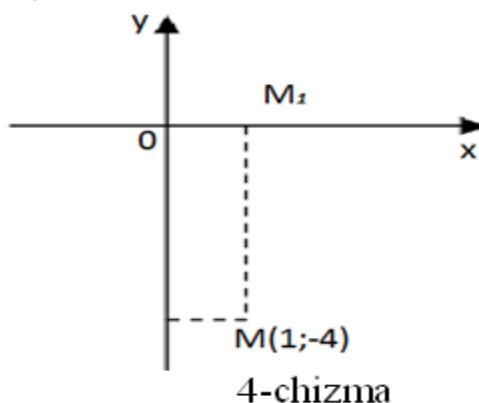
$$x = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot (-5)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

bo'ladi. Demak, (-1) .

2. $A(-4; 1)$, $B(0; -3)$, $C(-1; 8)$, $D(3; 2.5)$, $E(6; 0)$, $F(2; -4)$, $G(-0.5; 0)$ nuqtalar yasalsin.

3. $M(1; -4)$ nuqtaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari topilsin.

Yechish: Dastlab xOy to'g'ri burchakli Dekart kordinatalar sistemasida $M(1; -4)$ nuqtani tasvirlaymiz (4-chizma).



M nuqtaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini topish uchun M nuqtadan Ox va Oy o'qlariga perpendikulyarlar tushiramiz. Ox o'qiga tushirilgan perpendikulyar uni $M_1(1; 0)$ nuqtada, Oy o'qiga tushirilgan perpendikulyar $M_2(0; -4)$ nuqtada kesadi. Demak, $M(1; -4)$ nuqtaning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari $M_1(1; 0)$ va $M_2(0; -4)$ bo'ladi.

4. $A(-3; 8)$ nuqtadan $B(-7; 5)$ nuqtagacha bo'lgan masofa topilsin.

Yechish: Boshlang'ich nuqtasi $A(x_1; y_1)$ va oxirgi nuqtasi $B(x_2; y_2)$ bo'lgan AB kesmaning uzunligi

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

formuladan topilishi ma'lum. Bizda $x_1 = -3$, $x_2 = -7$, $y_1 = 8$, $y_2 = 5$

bo'lganligi uchun $AB = \sqrt{(-7 - (-3))^2 + (5 - 8)^2} = \sqrt{(-7 + 3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

5. N nuqtaning absissasi -1 ga teng bo'lib, u $A(2; 5)$ nuqtadan 5 birlikka teng masofada yotadi. N nuqtaning ordinatasi topilsin.

Yechish: N nuqtaning ordinatasini y deb olamiz. U holda $N(-1; y)$ nuqtadan $A(2; 5)$ nuqtagacha masofa $AN = \sqrt{(2+1)^2 + (5-y)^2}$ bo'lib, u 5 ga teng. Demak, $\sqrt{9 + (5-y)^2} = 5$, $9 + (5-y)^2 = 25$, $(5-y)^2 = 16$, $5-y = \pm 4$, $y_1 = 1$, $y_2 = 9$. Shunday N nuqtaning ordinatasi 1 yoki 9 ga teng.

6. $A(-1; 3)$ va $B(2; 1)$ nuqtani birlashtiruvchi kesma ordinata o'qini M nuqtada kesib o'tadi. M nuqta kesmani qanday nisbatda bo'ladi?

Yechish: Aytaylik M nuqta AB kesmani $AM:MB = \lambda$ nisbatda bo'lsin. U holda M nuqtaning absissasi A va B nuqtalar absissalari orqali quyidagi formula bo'yicha ifodalanadi:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$$

M nuqta ordinata o'qida yotganligi uchun uning absissasi nolga teng. Ya'ni, $\frac{-1+\lambda \cdot 2}{1+\lambda} = 0$, $\frac{2\lambda-1}{1+\lambda} = 0$, $2\lambda - 1 = 0$, $2\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

7. Uchlari $A(-4; 6)$ va $B(2; -1)$ nuqtalarda bo'lgan kesmaning o'rtasini toping.

Yechish: Agar AB kesmaning o'rtasini C deb olsak, u holda uning koordinatalari

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

formulalardan topiladi. Bizda $x_1 = -4$, $x_2 = 2$, $y_1 = 6$, $y_2 = -1$ bo'lgani uchun

$$x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1, \quad y = \frac{6+(-1)}{2} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

Demak, $C(-1; 2.5)$.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Koordinatalar to'g'ri chizig'ida $A(-5)$, $B(4)$ va $C(-2)$ nuqtalarni belgilang va AB , BC , AC masofalarni toping hamda $AB+BC=AC$ ekanligini tekshiring.

Javob: $AB = 9$, $BC = -6$, $AC = 3$, $9-6=3$.

2. Uchlari $A(-4; 2)$, $B(0; -1)$ va $C(3; 3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yasalsin hamda uning perimetri va burchaklari topilsin.

Javob: $5(2 + \sqrt{2})$, 90° , 45° .

3. Uchlari $A(-3; -2)$, $B(0; -1)$ va $C(-2; 5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning to'g'ri burchakli ekanligi isbotlansin.

4. Uchlari $A(7; -3)$, $B(12; 9)$ va $C(6; 1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning perimetri topilsin.

Javob: $23 + \sqrt{17}$.

5. Uchlari $A(-6; 0)$, $B(-7; 7)$ va $C(1; 1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi topilsin.

Javob: $(-3; 4)$.

6. Uchlari $A(-4; 6)$, $B(2; -1)$ nuqtalarda bo'lgan AB kesmaning o'rtasi C ning koordinatalari topilsin.

Javob: $(-1; 2.5)$.

7. Uchburchakning uchlari $A(-5; 1)$, $B(-3; 3)$ va $C(1; -1)$ nuqtalarda joylashgan. Uchburchak tomonlarining o'rtalarini toping.

Javob: $(-4; 2)$, $(-2; 0)$ $(-1; 1)$.

8. $A(-6; 1)$ va $B(2; -11)$ nuqtalar orasidagi kesma to'rtta teng bo'lakka bo'lingan. Bo'linish nuqtalarining koordinatalarini toping.

Javob: $(-4; -2)$, $(-2; -5)$, $(0; -8)$.

9. $A(-4; -2)$, va $B(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesma M nuqta bilan $AM:MB = 3:7$ nisbatda bo'lingan. M nuqtaning koordinatalarini toping.

Javob: $M(1.5; -3)$.

10. $C(-\frac{4}{7}; 4)$ nuqta AB kesmani $AC:CB = 2:5$ nisbatda bo'ladi. Agar $A(-2; 4)$ bo'lsa, B nuqta topilsin.

Javob: $B(3; 4)$.

11. AB kesma B nuqtadan boshlab C nuqttagacha $AC = 3AB$ shartni qanoatlantiradigan qilib davom ettirilgan. Agar $A(-4; 7)$, bo'lsa, C nuqta topilsin.

Javob: $C(11; -17)$.

12. Agar uchburchak tomonlarining o'rtalari $K(4; 7)$, $M(6; -1)$ va $N(2; -2)$ nuqtalarda bo'lsa, uchburchakning uchlari topilsin.

Javob:

13. $A(-2; 1)$ va $B(3; 6)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani $AM:MB = -3:2$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatalari topilsin.

Javob: $(13; 16)$.

14. Uchlari $O(0; 0)$, $A(8; 0)$, va $B(0; 6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning OC medianasi va OD bissektrisasining uzunligi topilsin.

Javob: $OC = 5$, $OD = \frac{24\sqrt{2}}{7}$.

15. Uchlari $A(1; -1)$, $B(6; 4)$ va $C(2; 6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning og'irlik markazi topilsin.

Ko'rsatma. Uchburchakning og'irlik markazi uning medianalari kesishish nuqtasida bo'ladi.

Javob: $(3; 3)$.

16. Uchlari $A(2; 0)$, $B(5; 3)$ va $C(2; 6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzi topilsin.

Javob: 9.

17. Uchlari $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ va $D(5; -2)$ nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning yuzi topilsin.

Javob: 13.

18. $A(1; 1)$, $B(-1; 7)$ va $C(0; 4)$ nuqtalarni bir to'g'ri chiziqda yotishini isbotlang.

Mustaqil yechish uchun test savollari

Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofa

1. Quyidagi hollarning har birida nuqtalar orasidagi masofa topilsin:

1) $A(4; 3)$, $B(7; 7)$; 3) $A(12; -1)$, $B(0; 4)$;

2) $A(3; 1)$, $B(-2; 4)$; 4) $A(3; 5)$, $B(4; 6)$.

2. Koordinatalar boshidan quyidagi nuqtalargacha bo'lgan masofalar topilsin:

1) $A(11; 4)$; 3) $B(-11; 0)$;

2) $C(-3; -4)$; 4) $D(5; 12)$.

3. Koordinata o'qlarida yotuvchi va $(1; 1)$, $(3; 7)$ nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar topilsin.

4. Oy o'qida koordinatalar boshidan va $(-8; -4)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqta topilsin.

5. ABC uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: $A(3; 1)$, $B(7; 5)$, $C(5; -1)$. Berilgan uchburchak o'tkir burchaklimi, to'g'ri burchaklimi yoki o'tmas burchaklimi?

6. Koordinata o'qlarida $(-5; 9)$ nuqtadan 15 birlik uzoqlikda joylashgan nuqtalar topilsin.

7. Markazi $C(6; 7)$ nuqtada va radiusi 5 bo'lgan aylana berilgan. $A(7; 14)$ nuqtadan bu aylanaga urinmalar o'tkazilgan. A nuqtadan urinish nuqtalarigacha bo'lgan masofalar topilsin.

8. Radiusi 10 bo'lgan aylana markazi $C(-4; -6)$ nuqtada. Koordinata burchaklarining bissektrisalari bilan aylananing kesishish nuqtalari topilsin.

9. ABC uchburchak uchlari berilgan: $A(2; -3)$, $B(1; 3)$, $C(-6; -4)$. A nuqtaga BC tomonga nisbatan simmetrik bo'lgan M nuqta topilsin.

10. Uchlari berilgan $A(2; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(3; -5)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi va radiusi topilsin.

11. Tomoni 10 ga teng rombning ikkita qarama-qarshi uchlari $A(8; -3)$, $C(10; 11)$ berilgan. Qolgan uchlarining koordinatalari topilsin.

12. $A(-4; 2)$ nuqtadan o'tib, O_x o'qiga $B(2; 0)$ nuqtada urinadigan aylana markazi topilsin.

13. $A(2, -1)$ nuqtadan o'tuvchi va ikkala koordinata o'qlariga urinadigan aylana markazi va radiusi topilsin.

Tekislikda kyesmani berilgan nisbatda bo'lish

14. $M_1(2; 3)$, $M_2(-5; 1)$ nuqtalar bilan chegaralangan M_1M_2 kesmani

1) $\lambda = 2$;

2) $\lambda = -\frac{1}{2}$;

3) $\lambda = -4$;

4) $\lambda = \frac{1}{3}$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatalari topilsin.

15. Quyidagi hollarning har birida M_1M_2 kesma o'rtasining koordinatalari topilsin:

1) $M_1(2; 3)$, $M_2(-4; 7)$;

2) $M_1(-2; 4)$, $M_2(2; -4)$;

3) $M_1(0; 0)$, $M_2(1; 1)$.

16. $A(3; 4)$, $B(2; -1)$ nuqtalar berilgan. AB to'g'ri chiziqlarning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari topilsin.

17. Uchlari $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ nuqtalarda joylashgan uchburchakning og'irlik markazi topilsin.

18. Uchburchak tomonlarining o'rtalari $M_1(2; 4)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3(2; 1)$ nuqtalarda bo'lsa, uning uchlari topilsin.

19. AB kesmaning bir uchi $A(2; 3)$ nuqtada joylashgan. $M(1; -2)$ nuqta uning o'rtasi. Kesmaning ikkinchi uchi topilsin.

20. Parallelogrammning qo'shni uchlari $A(-4; -7)$, $B(2; 6)$ va diagonallari kesishgan nuqtasi $M(3; 1)$ berilgan. Uning qolgan ikki uchining koordinatalari topilsin.

21. Ox va Oy o'qlarida mos ravishda $OA=8$, $OB=4$ kesmalar joylashtirilgan. Koordinatalar boshidan AB to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikular asosi AB kesmani qanday nisbatda bo'ladi?

22. $A(-3; 1)$, $B(2; -3)$ nuqtalar orqali o'tgan to'g'ri chiziqda shunday C nuqta topilsinki, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ tenglik bajarilsin.

23. Trapetsiyaning uchta ketma-ket joylashgan uchlari $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$, $C(3; 1)$ berilgan. Agar uning AD asosi BC asosidan 5-marta katta bo'lsa, trapetsiyaning to'rtinchi uchi topilsin.

24. $A(-4; 2)$, $B(8; -7)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani uchta teng bo'lakka

bo'luvchi C va D nuqtalar topilsin.

25. $C(2;2)$ va $D(1;5)$ nuqtalar AB kesmani uchta teng bo'lakka ajratsa, uning A, B uchlari topilsin.

26. $A(2;4)$ nuqta berilgan. AB to'g'ri chiziq ordinata o'qini C nuqtada, abssissa o'qini D nuqtada kesib o'tadi. C nuqta AB kesmani $\frac{2}{3}$ nisbatda va D nuqta $-\frac{3}{4}$ nisbatda bo'lishini bilgan holda B nuqtaning koordinatalari topilsin.

27. $A(9;-1), B(-2;6)$ nuqtalar berilgan. AB to'g'ri chiziqning ikkinchi va to'rtinchi koordinata burchaklari bissektrissasi bilan kesishgan C nuqtasi AB kesmani qanday nisbatda bo'ladi?

28. $C(-5;4)$ nuqta AB kesmani $\frac{3}{4}$ nisbatda, $D(6;-5)$ nuqta esa $\frac{2}{3}$ nisbatda bo'lsa, A va B nuqtalarning koordinatalari topilsin.

29. $ABCD$ parallelogrammning A uchi BC tomon o'rtasi E bilan va B uchi esa CD tomonida yotuvchi N nuqta bilan tutashtirilgan; DN kesma CD kesma uzunligining uchdan biriga teng. AE, BN kesmalarning kesishgan K nuqtasi shu kesmalarni qanday nisbatlarda bo'ladi?

30. Uchlari $A(5;-4), B(-1;2), C(5;1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning AD medianasining uzunligini topilsin.

31. Ikki $(4;2), (0;-1)$ nuqtalardan o'tadigan to'g'ri chiziqda $(-4;-4)$ nuqtadan 5 birlik masofada joylashgan nuqtalar topilsin.

32. Ikki $(4;8), (-1;-4)$ nuqtalardan o'tadigan to'g'ri chiziqda $(-1;-4)$ nuqtadan 4 birlik masofada joylashgan nuqtalar topilsin.

33. Uchlari $A(4;1), B(7;5), C(-4;7)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchak AD bissektrisasining uzunligi hisoblansin.

34.* Uchlari $A(9;2), B(0;20), C(-15;-10)$ nuqtalarda bo'lgan ABC uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi va radiusi topilsin.

35.* Markazlari $C_1(2;5), C_2(7\frac{1}{3}; 10\frac{1}{3})$ nuqtalarda bo'lib, radiuslari mos ravishda 3 va 7 ga teng bo'lgan ikki aylana umumiy urinmalarining kesishgan nuqtasi topilsin.

36. Trapetsiyaning uchta ketma-ket uchlari $A(-1;-2), B(1;3), C(9;9)$ berilgan. Trapetsiyaning asosi $AD=15$ bo'lsa, uning to'rtinchi D uchi topilsin.

37. Uchta $A(7;1\frac{1}{2}), B(6;7), C(2;4)$ nuqtalarga mos ravishda og'irligi 60, 100, 40 ga teng yuklar qo'yilgan. Bu sistemaning og'irlik markazi topilsin.

38. To'g'ri burchak ostida bukilgan sterjen qismlari uzunliklari mos ravishda

$OA = 2$ va $OB = 5$ bo'lsa, uning og'irlik markazi topilsin.

39. Simdan yasalgan va tomonlarining uzunliklari 3, 4, 5 sm bo'lgan uchburchakning og'irlik markazi topilsin.

40. Uchlari mos ravishda $A(4;4), B(5;7), C(10;10), D(12;4)$ nuqtalarda bo'lgan bir jinsli plastinkaning og'irlik markazi topilsin.

41.* Muntazam uchburchak uchlarining nomdosh koordinatalarining o'rta arifmetik qiymati ko'pburchak markazining mos koordinatasiga teng ekanligi isbotlansin.

42.* Muntazam ko'pburchak barcha tomonlari va barcha diagonal uzunliklari kvadratlarining yig'indisi topilsin.

Tekislikda berilgan uchburchakning yuzi

43. Uchlari $A(4;2), B(9;4), C(7;6)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi hisoblansin.

44. Uchlari $A(-2;0), B(0;-1), C(2;0), D(3;2), E(-1;3)$ nuqtalarda bo'lgan beshburchakning yuzi hisoblansin.

45. Quyidagi hollarning har birida ABC uchburchakning yuzi hisoblansin:

- 1) $A(2;1), B(3;4), C(1;6)$;
- 2) $A(-2;4), B(0;-3), C(1;7)$;
- 3) $A(5;4), B(11;0), C(0;3)$.

46. Berilgan $A(2;0)$ nuqtadan $B(1;1)$ va $C(5;4)$ nuqtalar orqali o'tgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

47. Koordinatalar boshidan $A(1;5)$ va $B(2;4)$ nuqtalar orqali o'tgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa topilsin.

48. Uchburchakning ikki uchi $A(5;1)$ va $B(-2;2)$ nuqtalarda, uchinchi uchi esa Ox o'qida joylashgan. Uchburchakning yuzi 10 (kv.birlik) ga teng bo'lsa, uchinchi uchining koordinatalari topilsin.

49. Yuzi $S = 3$ ga teng uchburchakning ikki uchi $A(3;1)$ va $B(1;-3)$ nuqtalarda joylashgan. Bu uchburchakning og'irlik markazi Ox o'qida yotish ma'lum bo'lsa uning uchinchi C uchining koordinatalari topilsin.

50. Quyidagi hollarning har birida A, B nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

- 1) $A(3,5,1), B(7,8,4)$;
- 2) $A(-3,0,4), B(-2,-4,6)$.

51. Oy o'qida $A(3,1,0)$ va, $B(-2,4,1)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikdagi nuqta topilsin.

52. Oxz tekisligida $A(1,1,1), B(-1,1,0)$ va $C(3,1,-1)$ nuqtalardan teng uzoqlashgan nuqta topilsin.

53. Berilgan to'rtta $A(1,2,3), B(5,2,3), C(2,5,3), D(1,2,-1)$ nuqtalardan o'tuvchi sferaning markazi va radiusi topilsin.

54. Koordinata tekisliklarida, koordinatalar boshi bilan birgalikda qirralari birga teng bo'lgan muntazam tetraedrning uchlari bo'ladigan nuqtalarni toping.

55. Uchlari $A(-1;0;-1), B(0;2;-3), C(4;4;1)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzasi topilsin.

56. Parallelogrammning ketma-ket keluvchi $A(3;0;4), B(1,2,3), C(9,6,4)$ uchlari berilgan. Uning

- 1) to'rtinchi uchini;
- 2) diagonallarining kesishish nuqtasini;
- 3) B uchidagi burchagini;
- 4) AC diagonali uzunligini;
- 5) yuzasini toping.

57. Bir uchi koordinata boshida bo'lib, shu uchdan chiquvchi qirralarining oxirlari $(2;3;6), (8;4;1), (2;-2;1)$ nuqtalarda bo'lgan parallelepipedning hajmi topilsin.

58. Affin fazoda uchlari $M_1(-3;2;4), M_2(6;0;1)$ nuqtalarda bo'lgan M_1M_2 kesmani 1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -\frac{3}{4}$ nisbatda bo'luvchi nuqta topilsin.

59. Affin fazoda $M_1(-3;2;4)$ va $M_2(6;0;1)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarda Oxz tekisligida yotuvchi nuqta topilsin.

60. AB kesma besh bo'lakka bo'lingan: birinchi bo'luvchi nuqtasi $C(3;-5;7)$ va oxirgi bo'luvchi nuqtasi $F(-2;4;-8)$ ma'lum. Kesma uchlarining koordinatalari va qolgan bo'luvchi nuqtalarning koordinatalari topilsin.

61. Uchburchakning ikkita $A(-4;-1;2), B(3;5;-16)$ uchlari berilgan. AC tomon o'rtasi Oy o'qda, va BC tomonning o'rtasi Oxy tekislikda yotganligini bilgan holda uning uchinchi C uchi topilsin.

62. Uchlari $A(2;-1;7), B(4;5;-2)$ nuqtalarda bo'lgan AB kesmani koordinata tekisliklarining har biri qanday nisbatda bo'ladi?

63. Ikkita to'g'ri chiziq berilgan: ulardan biri $A(-3;5;15), B(0;0;7)$ nuqtalardan, ikkinchisi esa $C(2;-1;4), D(4;-3;0)$ nuqtalardan o'tadi. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishish, kesishmasligi aniqlansin. Kesishgan holda kesishish nuqtasi topilsin.

64. Ikkita $A(8;-6;7), B(-20;15;10)$ nuqtalar berilgan. AB to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan qaysi biri bilan kesishishi aniqlansin.

65.* Tetraedrning qarama-qarshi qirralari o'rtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziqlarning bitta nuqtada kesishishini va shu nuqtada teng ikkiga bo'linishini isbotlang. Xuddi shu nuqtada tetraedrning uchlari qarama-qarshi yoqlarining

og'irlik markazlari bilan tutashtiradigan to'g'ri chiziqlar ham kesishishini isbotlang va shu nuqtada qanday nisbatda bo'linishini toping.

66.* Parallelepipedning bir uchidan chiqqan uchta qirradi oxirlaridan o'tkazilgan tekislik shu uchdan chiqqan diagonalni qanday nisbatda bo'ladi?

67.* $A_1A_2A_3A_4$ tetraedrning uchlari ixtiyoriy olingan K nuqta bilan tutashtirilgan. A_1K, A_2K, A_3K, A_4K to'g'ri chiziqlar qarama-qarshi $A_2A_3A_4, A_3A_1A_4, A_4A_1A_2, A_1A_2A_3$ yoqlar bilan mos ravishda A_1', A_2', A_3', A_4' nuqtalarda kesishsin. $\frac{\overline{KA_1'}}{A_1A_1'} + \frac{\overline{KA_2'}}{A_2A_2'} + \frac{\overline{KA_3'}}{A_3A_3'} + \frac{\overline{KA_4'}}{A_4A_4'} = 1$ ekanligi isbotlansin.

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Ikkinchi tartibli determinantning xossalari
2. Uchinchi tartibli determinantning xossalari
3. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish masalasining masalalar yechishga tatbiqlari
4. Vektrolar aralash ko'paytmasining turli masalalar yechishga tatbiqlari
5. Affin koordinatalar sistemasida ikki nuqta orasidagi masofa
6. Ikki qaytali vektor ko'paytmaning formulasini geometrik usul bilan keltirib chiqarish

Glossariy

Tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi - Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vektorlar bilan aniqlanuvchi a va b to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan sistema tekislikdagi affin koordinatalar sistemasi deyiladi va $0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ yoki $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ko'rinishda belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vektorlarni koordinat vektorlar deyiladi; a to'g'ri chiziqni Ox bilan belgilab absissalar o'qi, b to'g'ri chiziqni esa Oy bilan belgilab ordinatalar o'qi deb ataladi.

Radius vektor - Tekislikda $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ affin koordinatalar sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikda birorta N nuqtani olaylik ON vektorni N nuqtaning radius vektori deyiladi.

Nuqtaning absissasi - Radius-vektorning x, y koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi $N(x, y)$ belgilaymiz. Bunda x soni N nuqtaning absissasi yoki birinchi koordinatasi

Nuqtaning ordinatasi - Radius-vektorning x, y koordinatalari N nuqtaning ham koordinatalari deyiladi $N(x, y)$ belgilaymiz. y son esa N nuqtaning ordinatasi yoki ikkinchi koordinatasi deyiladi.

Chorak - Koordinat o'qlari tekislikni to'rtta qismga ajratadi. Har bir qismni chorak deyiladi.

Kesmani berilgan nisbatda bo'lish- Agar $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{NB}$ (1)

shart o'rinli bo'lsa, u holda nuqta AB kesma berilgan λ nisbatda bo'ladi deyiladi.

λ sonni uchta A, B, N nuqtalarning oddiy nisbati deyiladi va $\lambda = (AN : NB)$ ko'rinishda yoziladi.

Uchburchak yuzi - Uchburchak yuzi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzining yarmiga teng.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| [\vec{a} \ \vec{b}] \right|$$

Tetraedr hajmi - Tetraedr hajmi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vektorlarga yasalgan

parallelepipedning hajmini $\frac{1}{6}$ bo'lagiga teng.

$$V_{mem} = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AD} \right) \right| = \frac{1}{6} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

Keyslar banki

$A(1)$ va $B(-5)$ nuqtalar bilan chegaralangan kesma $M(x)$ nuqta bilan $AM : MB = 1 : 2$ nisbatda bo'lingan. M nuqtaning koordinatasi topilsin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat savollari

1. Analitik geometriyaning asosiy masalalarini sanab bering.
2. Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofani (tekislikda, to'g'ri chiziqli) topish formulalarini keltirib chiqaring.
3. Har qanday $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar asosida yasalgan parallelepipedning hajmi tetraedrning olti barobar hajmiga teng ekanligini isbotlang.
4. Uchburchakning yuzasini hisoblash uchun formulani keltirib chiqaring.
5. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish masalasini tavsiflang.
6. Kesmani berilgan nisbatda bo'lishdagi nisbat qachon musbat qiymatga ega bo'ladi?
7. Kesmani berilgan nisbatda bo'lishdagi nisbat qachon manfiy qiymatga ega bo'ladi?
8. Ikki qaytali vektor ko'paytmaning hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

V. GLOSSARIY

Termin	O'zbek tilidagi sharhi	Ingliz tilidagi sharhi
Assesment	angl. assessment “baholash”, bilimni, ko‘nikma va malakalarni bir necha xil yondashuvlar orqali baholash, tahlil qilish, sinab ko‘rishdan pedagogik texnologiyasi.	the technology of teaching.by documenting of knowledge, skills, attitudes, with using of different ways of assesment, analysis and testing.
Guruhli ta’lim Group traning	bir o‘qituvchi bir necha o‘qituvchini o‘qitadigan ta’lim shakli. Guruhlar o‘quvchilar soniga qarab: kichik (3-6 o‘quvchi), o‘rta (7-15 o‘quvchi), katta (15 dan ortiq o‘quvchi, guruhlar) ga ajratiladi. Shuningdek, har bir guruhdagi ta’lim oluvchilarning yoshiga, ta’lim yo‘nalishiga va shu kabilarga qarab ham guruhlarga ajratiladi. Bu shaklni qo‘llash jarayonida yakka ta’lim shakllari ham amalga oshiriladi.	A form of teaching in which a person teaches a few students. Depending on the number of students the groups can be small (3-6 students), medium (7-15 students) and large (more than 15 students, groups). In addition the each group can be devided by age, training, direction, and etc. In this form of traning the individual education is also used/ For teaching biology the groups from 3-5 students is the most effective

	Biologiyadan dars o‘tishda eng samarali guruxlar 3-5 kishi	
Edvayzer	- yakka holda diplom ishi, kurs ishini ishlab chiqish, ilmiy-tadqiqot olib borish, individual dasturlarni ishlab chiqish, talabalarning individual o‘shish va rivojlanishiga yordam beruvchi maslahatchidir	Person consulting individual diploma work, course work, scientific research, thesis, development of individual programs and individual academic growth and development of students
Intellektual mulk Intellectual proper	ijodiy aqliy faoliyat mahsuli. Ixtirochilik va mualliflik manbai huquqi majmuiga kiruvchi, fan, adabiyot, san’at va ishlab chiqarish sohasida ijodiy faoliyatning boshqa turlari, adabiy, badiiy, ilmiy asarlar, ijrochi aktyorlik san’ati, jumladan, ovoz yozish, radio va televideniye asarlari kashfiyotlar, ixtirolar, sanoat namunalari, kompyuter uchun dasturlar, ma’lumotlar ombori, tovar belgilari, firma atamalari va boshqa	creations of the <u>intellect</u> for which a <u>monopoly</u> is assigned to designated owners by <u>law</u>. Some common types of intellectual property rights (IPR) are <u>trademarks</u>, <u>copyright</u>, <u>patents</u>, <u>industrial design rights</u>, and in some jurisdiction <u>trade secrets</u>: all these cover music, literature, and other artistic works; discoveries and inventions; and words, phrases, symbols, and designs.

	aqliy mulk manbalari kiradi	
Interfaol mashg'ulot Interactive classes	o'qituvchi va o'quvchilar o'zaro faol ishtirok etadigan mashg'ulot. Bunda jarayon o'zaro hamkorlikda kechadi	Classes in which both the teacher and students are active. The studying and teaching process are done in close cooperation
Malaka oshirish Qualification of skills	mutaxassislar va rahbar xodimlarning kasbiy bilim va ko'nikmalarini yangilash hamda rivojlantirish jarayoni	The process of updating and development of professional knowledge and skills of experts and administrators

VI. ADABIYOTLAR RO'YXATI:

ADABIYOTLAR RO'YXATI

I. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining asarlari

1. Mirziyoev Sh.M. Yangi O'zbekiston demokratik o'zgarishlar, keng imkoniyatlar va amaliy ishlar mamlakatiga aylanmoqda. – T.: “O'zbekiston”, 2021. – 184 b.
2. Mirziyoev Sh.M. Yangi O'zbekiston strategiyasi. – T.: “O'zbekiston”, 2021. – 458 b.
3. Mirziyoev Sh.M. Xalqimizning roziligi bizning faoliyatimizga berilgan eng oliy bahodir. 2-jild. T.: “O'zbekiston”, 2018. – 507 b.
4. Mirziyoev Sh.M. Niyati ulug' xalqning ishi ham ulug', hayoti yorug' va kelajagi farovon bo'ladi. 3-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2019. – 400 b.
5. Mirziyoev Sh.M. Milliy tiklanishdan – milliy yuksalish sari. 4-jild.– T.: “O'zbekiston”, 2020. – 400 b.

II. Normativ-huquqiy hujjatlar

6. O'zbekiston Respublikasining Konstitutsiyasi. – T.: O'zbekiston, 2018.
7. O'zbekiston Respublikasining 2020-yil 23-sentyabrda qabul qilingan “Ta'lim to'g'risida”gi O'RQ-637-sonli Qonuni.
8. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral “O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida”gi 4947-sonli Farmoni.
9. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 26-sentyabr “Oliy ta'lim muassasalariga kirish uchun nomzodlarni maksadli tayyorlash tizimini yanada takomillashtirish to'g'risida”gi PQ-3290-sonli Qarori.
10. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 8-oktyabr “O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-5847-sonli Farmoni.
11. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktyabr “Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida”gi PF-6097-sonli Farmoni.
12. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida”gi PQ-4708-sonli Qarori.
17. O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 3-dekabrda “Iqtidorli yoshlarni saralab olish tizimi va akademik litseylar faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida” PQ-4910-son Qarori.
18. O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2022-yil 1-iyundagi “Akademik litseylar rahbar va pedagog xodimlarining uzduksiz malakasini oshirish tizimini joriy etish to'g'risida” 296-son Qarori.

III. Maxsus adabiyotlar

. Amonov T.S., Sharofiddinova D.S. Geogebra - matematikadan jonli chizmalar dasturini dars jaroyonida qo'llash //Образование наука и инновационные идеи в мире, стр. 176-182, 2023

20. Т.И. Бухарова, С.А. Гришин, О.В. Нагорнов, Д.Г. Орловский, Е.Х. Садекова, Е.Б. Сандаков Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом». Математика. В помощь школьникам 7–11 классов: Учебно-методическое пособие /; под ред. О.В. Нагорнова. – М.: НИЯУ МИФИ, 2018. – 126 с.

21. Sharipov A., Keunimjayev M. Existence and uniqueness of polyhedral with given value of the conditional curvature, International Electronic Journal of Geometry, 2023, Vol. 16, No. 1, pp. 160-170 (**Scopus**).

22. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. –272 с.

23. Арсланов М.М. Знаменитые математические проблемы. - Казан: Казанский федеральный университет, 2012.

24. Кравцев С.В. и другие Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. -М.: Экзамен, 2001 –544 с.

25. Nough Hassan Mathematics Function. Translated by: Diab Publishing & Distribution, 2019. –461p. www.Diab-publishing.com

IV. Internet saytlar

26. <http://edu.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi

27. <http://lex.uz> – O‘zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma’lumotlari milliy bazasi

28. <http://lib.bimm.uz> – Oliy ta’lim tizimi pedagog va rahbar kadrlarini qayta tayyorlash va ularning malakasini oshirishni tashkil etish bosh ilmiy-metodik markazi

29. <http://ziyonet.uz> – Ta’lim portali Ziyonet

30. <http://natlib.uz>—Alisher Navoiy nomidagi O‘zbekiston Milliy kutubxonasi

31. <https://problems.ru/> - Matematikadan masalalar.